ΑΣΚΗΣΗ 9

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΠΥΡΗΝΙΚΩΝ ΔΙΑΣΠΑΣΕΩΝ

Σκοπός

Σκοπός αυτής της άσκησης είναι η πραγματοποίηση στατιστικής ανάλυσης των πειραματικών δεδομένων πυρηνικών διασπάσεων από μια ραδιενεργό πηγή. Οι πειραματικές μετρήσεις συγκρίνονται με τις θεωρητικές στατιστικές κατανομές Poisson και Gauss.

Εισαγωγή

Κατά τη μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα την πραγματική του τιμή. Αν πάρουμε ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων κάτω από σχεδόν ίδιες συνθήκες, τότε μπορούμε να πούμε ότι η πραγματική του τιμή είναι περίπου ο μέσος όρος των μετρήσεων. Μερικές φορές η στατιστική στην οποία υπόκεινται οι μετρήσεις, μας επιτρέπει να εκφράσουμε πόσο απέχει η πραγματική τιμή από τον μέσο όρο των μετρήσεων. Μια τέτοια περίπτωση είναι και η ραδιενεργός διάσπαση των ασταθών πυρήνων με σταθερά διάσπασης λ, η οποία αντιστοιχεί στην πιθανότητα διάσπασης του πυρήνα ανά μονάδα χρόνου.

Ένα ισότοπο με σταθερά διάσπασης $\lambda=1\text{x}10^{-5}$/sec και χρόνο ημιζωής $T_{1/2}=6.93\text{x}10^4$ sec (19.25 hours), έχει πιθανότητα διάσπασης 1 προς 100000 σε κάθε δευτερόλεπτο. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε την ακριβή χρονική στιγμή της διάσπασης, μπορούμε μόνο να γνωρίζουμε την πιθανότητα διάσπασης σε κάθε δευτερόλεπτο. Οι διασπάσεις των ραδιενεργών πυρήνων είναι τυχαίες και υπακούουν στους νόμους της στατιστικής.

Αν τη χρονική στιγμή t=0 έχουμε ένα δείγμα από N_0 ραδιενεργούς πυρήνες, η πιθανότητα να συμβεί μια διάσπαση στο χρονικό διάστημα (0,t), με $t<<\tau=1/\lambda$, είναι λN_0. Αποδεικνύεται (βλέπε Κ Χριστοδουλίδη, 'Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων', σελ. 125), ότι αν το N_0 είναι αρκετά μεγάλο ώστε να διατηρείται περίπου σταθερό κατά τη διάρκεια της μέτρησης, οι πιθανότητες να συμβούν $r = 0,1,2,....$ διασπάσεις στο χρονικό διάστημα t, δίδονται από την έκφραση:

.
$$P_r(t) = \frac{(\lambda N_0 t)^r}{r!} e^{-\lambda N_0 t} \qquad 9.1$$

δηλαδή ακολουθούν την κατανομή Poisson

.
$$P_r = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} \qquad 9.2$$

όπου μ ο μέσος ή αναμενόμενος αριθμός διασπάσεων στο χρονικό διάστημα (0,t) που τον προσεγγίζουμε πρακτικά με τη μέση τιμή $\bar{r}$ των πειραματικών μετρήσεων, ενώ η τυπική απόκλιση του r για την κατανομή Poisson $\sigma_r = \sqrt{\mu} = \sqrt{\bar{r}}$.

Ο ρυθμός καταμέτρησης R=r/t, ακολουθεί επίσης την κατανομή Poisson, με τυπική απόκλιση μιας μέτρησης R

$$\sigma_R = \frac{\sigma_r}{t} = \frac{\sqrt{\bar{r}}}{t} = \sqrt{\frac{\bar{r}/t}{t}} = \sqrt{\frac{\bar{R}}{t}} \qquad 9.3$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια πιθανότητα 66.66% μια τυχαία μέτρηση του R να βρίσκεται στο διάστημα από $\overline{R}+\sigma_R$ έως $\overline{R}-\sigma_R$.

Αν το R είναι μεγάλο (μεγαλύτερο από 50-100) η κατανομή φυσικών αριθμών Poisson μπορεί να προσεγγιστεί με ικανοποιητική ακρίβεια από την κανονική κατανομή ή καλύτερα να συγκλίνει στην κατανομή πραγματικών αριθμών Gauss με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα (central limit theorem):

$$P_R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(R-\overline{R})^2 / 2\sigma^2} \qquad 9.4$$

όπου $\sigma^2 = \mu = \overline{R}$ είναι το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης και δίνει ένα μέτρο του εύρους της κατανομής.
Αν επαναλάβουμε n φορές τις μετρήσεις του R μιας πηγής, η συχνότητα εμφάνισης της τιμής R μιας μέτρησης δίνεται από τη σχέση :

$$f(R) = n\,P_R \qquad 9.5$$

επομένως στην περίπτωση της κατανομής Gauss για παράδειγμα :

$$f(R) = \frac{n}{\sqrt{2\pi\overline{R}}} e^{-(R-\overline{R})^2 / 2\overline{R}} \qquad 9.6$$

Μέθοδος

Στη συγκεκριμένη άσκηση θα πραγματοποιήσετε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις καταγραφής πυρηνικών διασπάσεων χρησιμοποιώντας έναν ανιχνευτή Geiger-Müller (G.M.) και μια ραδιενεργό πηγή ακτινοβολίας-β ^{90}Sr. Ο απαριθμητής G.M. με μόνο μειονέκτημα τον περιορισμένο μέγιστο αριθμό κρούσεων ανά δευτερόλεπτο που μπορεί να επεξεργαστεί, λόγω του νεκρού του χρόνου, αποτελεί ιδανική λύση για τη στατιστική μελέτη των ραδιενεργών διασπάσεων. Στη συνέχεια θα κατασκευάσετε διαγράμματα της συχνότητας $f(R)$ συναρτήσει του R, και θα κάνετε γραφική σύγκριση των πειραματικών μετρήσεων με τις θεωρητικές προβλέψεις. Θα πραγματοποιήσετε δυο σειρές μετρήσεων μια με χαμηλό (3-7) και μια με υψηλό ρυθμό κρούσεων (20-40) ανά δευτερόλεπτο για να δοκιμάσετε αντίστοιχα τις κατανομές Poisson και Gauss.

Πειραματική διάταξη

- Ανιχνευτής Geiger-Müller με τη μονάδα επικοινωνίας του EN-18 με τον Η/Υ.
- Ραδιενεργός πηγή ^{90}Sr εκπομπής σωματιδίων β, ενεργότητας ~0.1 μCi (3.7×10^3 διασπάσεις/sec)
- Απορροφητές αλουμινίου

Βιβλιογραφία

1. Κ. Χριστοδουλίδη, ‘Ανάλυση και παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων’
2. ‘Εργαστηριακές ασκήσεις φυσικής’, Τόμος 2.
3. Εισαγωγή στην Πυρηνική Φυσική, Π.Ασημακόπουλος, Ιωάννινα, 2002.

4. Schaum's Outline Series, 'Πιθανότητες και Στατιστική'

Πειραματική Διαδικασία

1. Ανάψτε αν χρειαστεί τη μονάδα επικοινωνίας EN-18 και τον Η/Υ και θέσετε την τάση του G.M. στα 900 Volts.
2. Αν ο υπολογιστής σας έχει Windows, χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα STX, για να θέσετε την τάση του G.M. στα 900 Volts, αλλιώς στο λειτουργικό σύστημα DOS, στο root directory του σκληρού δίσκου C πληκτρολογείστε την εντολή: CD GEIGER (κεφαλαία ή πεζά), εν συνεχεία GCI, οπότε εμφανίζεται το Program Menu στην οθόνη και η διάταξη σας είναι έτοιμη προς χρήση.
3. Τοποθετείστε με τη λαβίδα τη ραδιενεργό πηγή ^{90}Sr στην ειδική θήκη από Plexiglas και στη συνέχεια πάρτε μια δοκιμαστική μέτρηση 1 λεπτού ελέγχοντας ποια είναι η όψη (πλευρά) της πηγής που σας δίνει το μεγαλύτερο αριθμό γεγονότων.
4. Τοποθετείστε τη θήκη σε κατάλληλη απόσταση από τον ανιχνευτή ώστε ο ρυθμός κρούσεων που καταμετρώνται να είναι της τάξης των 3-7 κρούσεων το δευτερόλεπτο. Αν χρειαστεί, χρησιμοποιείστε κατάλληλους απορροφητές Al.
4. Στο λειτουργικό σύστημα DOS θα πρέπει να θέσετε σαν 'time interval' την τιμή 1 sec και σαν συνολικό χρόνο μέτρησης τα 2.5 min. Αυτό θα σας δώσει 150 επαναλήψεις της ίδιας μέτρησης χρονικής διάρκειας 1 sec, το μέγιστο δηλαδή αριθμό επαναλήψεων που διαθέτει το λογισμικό (στα Windows δεν έχετε αντίστοιχο περιορισμό). Μόλις η μέτρηση ολοκληρωθεί, πατήστε 'E' και στην ερώτηση αν θέλετε να δείτε την κατανομή, επιλέξτε 'y'(es). Καταγράψτε τα αποτελέσματα της μέτρησης σε πίνακα με στήλες του τύπου ρυθμός κρούσεων R, συχνότητα εμφάνισης f_i. Καταγράψτε επίσης τη μέση τιμή των μετρήσεων. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία άλλες τέσσερις φορές, ώστε ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων να γίνει 750-1000 (στα Windows απλά σώζετε τα αντίστοιχα αρχεία) Ο τελικός σας πίνακας θα πρέπει να δείχνει περίπου όπως ο παρακάτω:

R	f_1	f_2	f_3	…	f_n	$f_1+f_2+f_3+...+f_n$
0	.	.			.	.
1	.	.			.	.
. . .	. . .	. . .			. . .	. . .

5. Πλησιάστε την πηγή στον ανιχνευτή και αφαιρέστε τους τυχόν απορροφητές, ώστε ο ρυθμός καταμέτρησης να αυξηθεί σε ~20-40 κρούσεις ανά δευτερόλεπτο. Επαναλάβετε τη διαδικασία του προηγούμενου βήματος όσες φορές χρειαστεί, ώστε ο αριθμός επαναλήψεων να γίνει 750-1000, θέτοντας και πάλι σαν 'time interval' την τιμή 1 sec και σαν συνολικό χρόνο μέτρησης τα 2.5 min. Μόλις κάθε μέτρηση ολοκληρωθεί, πατήστε 'E' και στην ερώτηση αν θέλετε να δείτε την κατανομή, επιλέξτε 'y'(es). Καταγράψτε τα αποτελέσματα της μέτρησης σε πίνακα με στήλες του τύπου ρυθμός κρούσεων R, συχνότητα εμφάνισης f_i. Καταγράψτε επίσης τη μέση τιμή των μετρήσεων για κάθε σειρά μετρήσεων. Ο τελικός σας πίνακας θα πρέπει να δείχνει περίπου όπως ο παρακάτω:

R	f_1	f_2	f_3	...	f_n	$f_1+f_2+f_3+...+f_n$
20	.	.	.	.	.	.
21	.	.	.	.	.	.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Με βάση την καταγραφή των μετρήσεων με τον χαμηλό ρυθμό κρούσεων, κατασκευάστε σε χιλιοστομετρικό χαρτί ή με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού στον υπολογιστή (π.χ. Excel, Origin, Paw κ.λ.π.) το ιστόγραμμα της συχνότητας f_i ως συνάρτηση του ρυθμού κρούσεων R_i. Από τη σχέση 9.5 υπολογίστε τις θεωρητικά αναμενόμενες συχνότητες κρούσεων με βάση την κατανομή Poisson, χρησιμοποιώντας ως μέσο μ τη μέση τιμή $\overline{R}$ των μετρήσεών σας και μεταφέρετε τα αποτελέσματα στο ιστόγραμμά σας. Μην ξεχνάτε ότι η συνολική σας δειγματοληψία είναι μία, ανεξάρτητα από πόσες επιμέρους μικρότερες έχετε πραγματοποιήσει. Από τη σχέση 9.6 να υπολογίσετε τις θεωρητικά αναμενόμενες συχνότητες κρούσεων με βάση την κατανομή Gauss και να τις μεταφέρετε στο διάγραμμα με τις πειραματικές τιμές.
2. Επαναλάβετε την ίδια ακριβώς διαδικασία για τις μετρήσεις με τον υψηλό ρυθμό κρούσεων, έχοντας ομαδοποιήσει όμως τις κρούσεις σε δέκα-δεκαπέντε περίπου ίσα διαστήματα, δηλαδή ανά 3 ή ανά 5 μετρήσεις. Για παράδειγμα: Έστω ότι έχετε αριθμό κρούσεων 22, 23, 24, με συχνότητες f_{22}, f_{23}, f_{24}, αντίστοιχα. Θα μπορούσατε να τις ομαδοποιήσετε με κεντρικό αριθμό κρούσεων τις 23 και συχνότητα $(f_{22}+f_{23}+f_{24})/3$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα από λογισμικό (π.χ. Excel, Origin, Paw κ.λ.π.) ή με απλή καταμέτρηση. Ο στόχος είναι να αποφευχθεί η ύπαρξη πολλών τιμών κρούσεων στη γραφική σας παράσταση.
3. Ακολουθούν οι μετρήσεις σας τις κατανομές Poisson και Gauss, αντίστοιχα; Πού αποδίδετε πιθανές διαφορές και στις δύο περιπτώσεις; Αναπτύξτε το κριτήριο ελέγχου του χ^2 και αναλύστε πώς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στη σύγκριση πειραματικών μετρήσεων και θεωρητικών προβλέψεων. Πώς θα μπορούσατε να βελτιώσετε τη συμφωνία των πειραματικών μετρήσεων με τις θεωρητικά αναμενόμενες κατανομές;
4. Από τις μέσες τιμές των n σειρών μετρήσεων του ερωτήματος 2, υπολογίστε την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής των μετρήσεών σας. Να συγκρίνετε την τιμή αυτή με την τυπική απόκλιση της μιας μέτρησης, που θα υπολογίσετε από τη σχέση 9.3, και να εξετάσετε αν τα αποτελέσματά σας είναι αναμενόμενα.