

Άσκηση 3

Μέτρηση της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης, G , με τη μέθοδο του Cavendish

3.1. Σκοπός

Σκοπός του πειράματος είναι η μέτρηση της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης ή βαρυτικής σταθεράς, G , με την μέθοδο του Cavendish. Επίσης, χρησιμοποιώντας τις γνωστές τιμές για τη μέση ακτίνα της Γης, R , και την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της, g , θα υπολογιστεί η μάζα και η μέση πυκνότητα της Γης.

3.2. Γενικά

Σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα για την παγκόσμια έλξη, η βαρυτική δύναμη, F , μεταξύ δύο σημειακών μαζών, m_1 και m_2 , που βρίσκονται σε απόσταση r , είναι ελκτική, ασκείται κατά μήκος της ευθείας που τις ενώνει και έχει τιμή ίση με

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

όπου G είναι η **σταθερά της παγκόσμιας έλξης ή βαρυτική σταθερά**.

Αν η Γη θεωρηθεί σφαίρα με ακτίνα R και μάζα M , τότε η δύναμη που ασκεί σε σημειακή μάζα m κοντά στην επιφάνειά της είναι

$$F = G \frac{M m}{R^2} = m g \quad (3.2)$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης. Άρα

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (3.3)$$

Αν τα G , g και R είναι γνωστά, τότε η μάζα της Γης υπολογίζεται από τον τύπο

$$M = \frac{g}{G} R^2 \quad (3.4)$$

ενώ η μέση πυκνότητα της Γης, εάν αυτή θεωρηθεί σαν σφαίρα με όγκο $V = (4/3) \pi R^3$, είναι

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3g}{4\pi GR} \quad (3.5)$$

Να σημειωθεί ότι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης είναι γνωστή με τη μικρότερη ακρίβεια συγκριτικά με άλλες σταθερές, εξαιτίας της δυσκολίας μέτρησης των πολύ ασθενών βαρυτικών δυνάμεων. Οι διεθνώς αποδεκτές (1986) τιμές για τα G , M και ρ είναι:

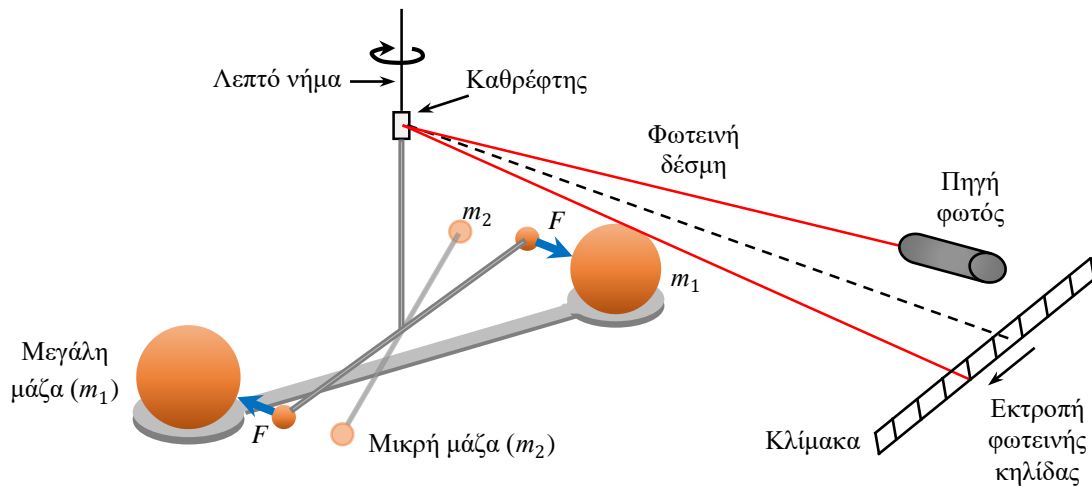
Σταθερά της παγκόσμιας έλξης: $G = (6,67259 \pm 0,00085) \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$

Μάζα της Γης: $M = (5,97418 \pm 0,00075) \times 10^{24} \text{ Kg}$.

Μέση πυκνότητα της Γης: $\rho = (5,5152 \pm 0,0012) \text{ g/cm}^3$

3.3. Μέθοδος

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται σε αυτό το πείραμα είναι όμοια με αυτή που περιγράφεται στην κλασική εργασία του Henry Cavendish (1731-1810), ο οποίος το 1798 κατάφερε να «ζυγίσει τον κόσμο», σύμφωνα με τον ίδιο, δηλαδή να προσδιορίσει τη μάζα και τη μέση πυκνότητα της Γης. Βασίζεται στη μέτρηση των πολύ ασθενών βαρυτικών δυνάμεων μεταξύ σφαιρικών μαζών που βρίσκονται σε γνωστή απόσταση μεταξύ τους με τη βοήθεια ενός ζυγού στρέψης (Σχ. 3.1).



Σχήμα 3.1. Σχηματική παράσταση και αρχή λειτουργίας της διάταξης Cavendish.

Ο ζυγός στρέψης αποτελείται από ένα σύστημα δύο μικρών σφαιρικών μαζών m_2 στα άκρα μιας λεπτής ράβδου, μήκους $2d$, η οποία κρέμεται από σταθερό σημείο με ένα πολύ λεπτό μεταλλικό νήμα που είναι στερεωμένο στο μέσο της ράβδου. Στο νήμα είναι επίσης στερεωμένος ένας μικρός καθρέφτης, που περιστρέφεται μαζί με τη ράβδο.

Αν δύο μεγάλες σφαιρικές μάζες m_1 πλησιάσουν συμμετρικά τις μάζες m_2 , τότε οι βαρυτικές δυνάμεις περιστρέφουν το σύστημα ράβδου-μαζών προς τη νέα θέση ισορροπίας, όπου η ροπή επαναφοράς που ασκεί το νήμα εξισορροπεί τη ροπή των βαρυτικών δυνάμεων. Η περιστροφή αυτή μπορεί να παρατηρηθεί με τη βοήθεια μιας φωτεινής δέσμης, η οποία, ανακλώμενη στον καθρέφτη, σχηματίζει μια φωτεινή κηλίδα σε μια κλίμακα που βρίσκεται σε απόσταση L από αυτόν.

Όταν στο σύστημα των μαζών m_2 δεν ασκείται ροπή στρέψης, αυτό ισορροπεί πάνω στην ευθεία PP' και η φωτεινή κηλίδα στη θέση O (Σχ. 3.2). Όταν οι μεγάλες μάζες m_1 βρίσκονται στις θέσεις A , οι ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις ασκούν ροπή στο σύστημα του ζυγού στρέψης, το οποίο κατά τη μεταβατική περίοδο εκτελεί αποσβενόμενη στροφική ταλάντωση, σαν στροφικό εκκρεμές, έως ότου οι μάζες m_2 ισορροπήσουν στις θέσεις A' και η κηλίδα στη θέση X_1 . Όταν οι μεγάλες μάζες m_1 μεταφερθούν στις συμμετρικές θέσεις B , μετά το πέρας της μεταβατικής περιόδου, οι νέες θέσεις ισορροπίας των μικρών μαζών m_2 είναι οι B' και της κηλίδας η X_2 .

Σε κατάσταση ισορροπίας, αν οι θέσεις A, A' είναι συμμετρικές των B, B' ως προς τον άξονα PP' , η δύναμη ανάμεσα σε κάθε ζεύγος μαζών m_1 και m_2 είναι

$$F = G \frac{m_1 m_2}{b^2} \quad (3.6)$$

όπου b είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των μικρών και μεγάλων μαζών.

$$G = \frac{D S b^2}{8 L d m_1 m_2} \quad (3.11)$$

όπου άγνωστη είναι μόνο η σταθερά D , η οποία μπορεί να υπολογιστεί από τα χαρακτηριστικά του στροφικού εκκρεμούς.

Αν ένα στροφικό εκκρεμές στραφεί αρχικά κατά μια γωνία φ και αφεθεί ελεύθερο, θα εκτελέσει στροφική κίνηση που διέπεται από την εξίσωση

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - D \varphi \quad (3.12)$$

που σημαίνει ότι (Ροπή αδράνειας)×(Γωνιακή επιτάχυνση) = (Ροπή).

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (3.13)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα, φ_0 το πλάτος της ταλάντωσης και θ μια σταθερά, γνωστή ως σταθερά φάσης, που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Αυτή είναι απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (3.14)$$

Στην πράξη, όμως, υπάρχει απώλεια ενέργειας που οφείλεται στην τριβή, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την εκθετική μείωση του πλάτους ταλάντωσης με τον χρόνο και μια μικρή αύξηση της περιόδου σε μια τιμή T , καθώς η κίνηση του στροφικού εκκρεμούς είναι τώρα

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \theta) \quad (3.15)$$

Ωστόσο, στην περίπτωση που δεν υπάρχει πολύ μεγάλη απόσβεση, η νέα περίοδος T δεν διαφέρει σημαντικά από την T_0 .

Αν οι μάζες m_2 των μικρών σφαιρών είναι πολύ μεγαλύτερες από τη μάζα της ράβδου πάνω στην οποία είναι στερεωμένες και οι ακτίνα τους είναι πολύ μικρότερη από το μήκος της ράβδου, η ροπή αδράνειας του ζυγού είναι

$$I = 2 m_2 d^2 \quad (3.16)$$

οπότε, σε συνδυασμό με την Εξ. (3.14), βρίσκουμε

$$D = 8\pi^2 \frac{m_2 d^2}{T^2} \quad (3.17)$$

Από τις Εξ. (3.11) και (3.17) προκύπτει

$$G = \frac{\pi^2 d S b^2}{m_1 L T^2} \quad (3.18)$$

Αν s_0 είναι η απόσταση των κέντρων των σφαιρών m_1 από την ευθεία PP' (Σχ. 3.2), τότε

$$b = s_0 - s = s_0 - d \frac{\alpha}{2} = s_0 - \frac{d S}{4 L} \quad (3.19)$$

επομένως

$$G = \frac{\pi^2 d S}{m_1 L T^2} \left(s_0 - \frac{d S}{4 L} \right)^2 \quad (3.20)$$

Σε αυτή την τελική έκφραση για το G , τα μεγέθη m_1 , d και s_0 είναι γνωστά χαρακτηριστικά του ζυγού, ενώ τα μεγέθη S , T και L προσδιορίζονται μέσω της πειραματικής διαδικασίας.

3.4. Πειραματική Διάταξη



Σχήμα 3.3. Η διάταξη της άσκησης.

Η πειραματική διάταξη της άσκησης (Σχ. 3.1, 3.2 και 3.3) αποτελείται από τον ζυγό στρέψης, δύο μικρές και δύο μεγαλύτερες σφαιρικές μάζες, μία πηγή φωτός (λείζερ), μία κλίμακα και ένα ψηφιακό χρονόμετρο χειρός.

Το σύστημα του ζυγού στρέψης βρίσκεται μέσα σε προστατευτικό περίβλημα. Αποτελείται από ένα πολύ λεπτό νήμα από ορείχαλκο, το πάνω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο, ενώ στο κάτω άκρο του υπάρχει μια ελαφριά οριζόντια ράβδος. Στα άκρα της ράβδου βρίσκονται δύο μικρές σφαιρικές μάζες από μόλυβδο, με μάζες $m_2 = 15$ g και ακτίνες 6,9 mm, τα κέντρα των οποίων απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2d = 10$ cm. Επίσης, στο κάτω μέρος του νήματος υπάρχει στερεωμένος καθρέφτης που περιστρέφεται μαζί με τη ράβδο, ενώ ο άξονας του ζυγού είναι κατακόρυφος. Δύο μεγάλες μολύβδινες σφαιρικές μάζες με $m_1 = 1,5$ kg και ακτίνες 32 mm, είναι τοποθετημένες πάνω σε βάση που μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον άξονα του ζυγού,

μεταφέροντας έτσι τις δύο μάζες στις ακραίες θέσεις A και B του Σχ. 3.2. Η διάταξη είναι στερεωμένη στον τοίχο για την αποφυγή των κραδασμών.

Βιβλιογραφία

1. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος A: *Μηχανική–Κύματα–Θερμοδυναμική* (Αθήνα, ⁴2022), 13.1, 13.2, 14.7.
2. R. A. Serway, J. W. Jewett, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς: Μηχανική – Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα – Θερμοδυναμική – Σχετικότητα* (Αθήνα, 2012), M13.1, M13.2, T1.5.
3. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική: Βασικές αρχές*, Τόμος A: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 2021), 13.1, 15.3, 15.5.
4. R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1 (Reading, Mass., 1965), Ch. 7.
5. H. Cavendish, “Experiments to determine the Density of the Earth”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 88 (1798): 469-526.
6. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος I (Αθήνα, ²2010), σ. 67-80.

Εκτέλεση

ΠΡΟΣΟΧΗ! Ο ζυγός στρέψης είναι πολύ ευαίσθητη διάταξη και γι' αυτό δεν πρέπει να τον αγγίζετε. Η μετατόπιση των μεγάλων μαζών πρέπει να γίνεται αργά, με μεγάλη προσοχή. Κάθε χτύπημα, εκτός από την ζημιά που μπορεί να προκαλέσει, διαταράσσει την ισορροπία, η οποία χρειάζεται πολύ χρόνο για να αποκατασταθεί.

1. Αναγνωρίστε τα διάφορα μέρη της διάταξης.
2. Τροφοδοτήστε το λείζερ με τάση 12 V και βεβαιωθείτε ότι η φωτεινή κηλίδα ανακλάται από τον καθρέφτη του ζυγού στρέψης και βρίσκεται πάνω στην κλίμακα. Επειδή η φωτεινή κηλίδα είναι σχετικά πλατιά, αποφασίστε ποιο χαρακτηριστικό σημείο της κηλίδας θα θεωρήσετε ότι καθορίζει την θέση της, X , πάνω στην κλίμακα. Εκτιμήστε πόσο είναι το σφάλμα ανάγνωσης της θέσης της κηλίδας.
3. Με την βοήθεια του επιβλέποντα, περιστρέψτε το σύστημα των μεγάλων μαζών ώστε να τις τοποθετήσετε στη θέση A (Σχ. 3.2), θέστε σε λειτουργία το χρονόμετρο και αρχίστε να καταγράφετε τη θέση της κηλίδας κάθε ένα λεπτό, χωρίς να σταματάτε το χρονόμετρο. Πιο συχνές μετρήσεις δεν είναι απαραίτητες, παρά μόνο για τον ακριβή προσδιορισμό των μεγίστων και ελαχίστων αποκλίσεων. Παρατηρήστε ότι η κηλίδα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, όπως αναμένουμε θεωρητικά. Συνεχίστε τις μετρήσεις έως ότου να έχετε 4 ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα). Αυτό διαρκεί περίπου 40 λεπτά. Μην σταματήσετε το χρονόμετρο.
4. Με τη βοήθεια του επιβλέποντα, μετατοπίστε τις μεγάλες μάζες στις θέσεις B και επαναλάβετε την καταγραφή της θέσης της κηλίδας στην κλίμακα μέχρι οι μετρήσεις να περιέχουν τέσσερα ακρότατα.
5. Σημειώστε την απόσταση, $L \pm \delta L$, μεταξύ του άξονα περιστροφής του ζυγού και του κεντρικού σημείου στην κλίμακα, η οποία αναγράφεται σε κάθε πειραματική διάταξη.

3.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της θέσης $X(t)$ της κηλίδας ως συνάρτηση του χρόνου. (Αναμένετε δύο φθίνουσες ταλαντώσεις, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4.)
2. Εκτιμήστε τις θέσεις ισορροπίας, X_1 και X_2 , καθώς και τα σφάλματά τους, όπως φαίνεται στην ένθετη γραφική παράσταση του Σχ. 3.4.

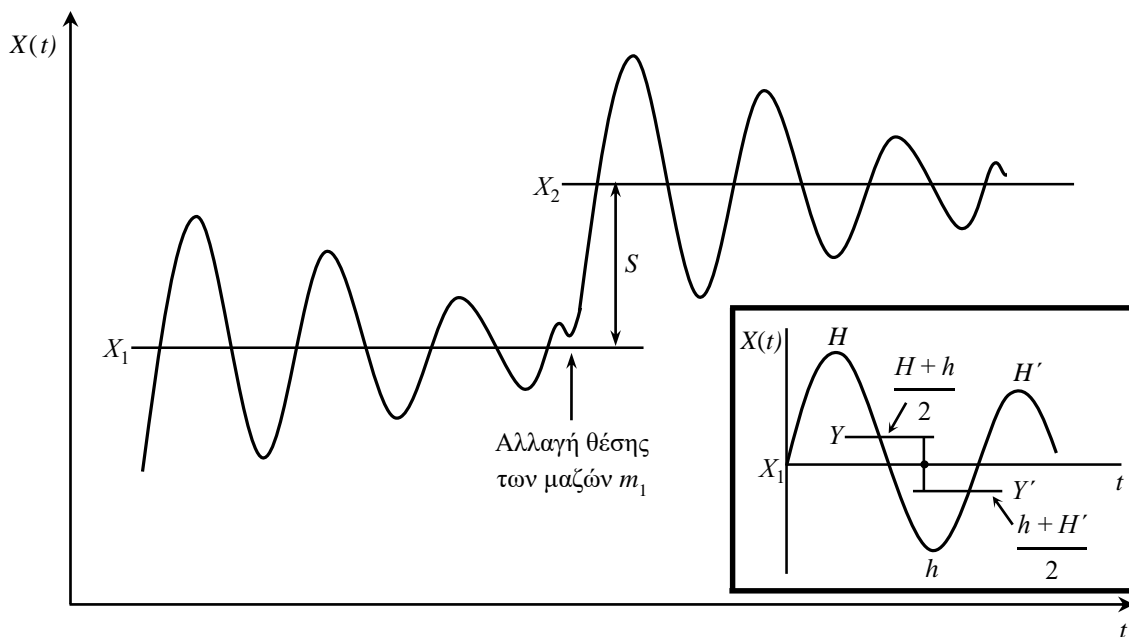
Πιο συγκεκριμένα, αν H και H' είναι δύο διαδοχικά μέγιστα της $X(t)$ και h είναι το μεταξύ τους ελάχιστο, τότε μια καλή εκτίμηση της X_1 είναι το ημιάθροισμα των μέσων τιμών Y και Y' , ενώ το σφάλμα της X_1 είναι μικρότερο από την ημιδιαφορά τους. Επομένως, με αυτή τη μέθοδο, για την πιθανή θέση ισορροπίας έχουμε

$$X_1 = \frac{1}{4}(H + 2h + H') \pm \frac{1}{4}(H - H') \quad (3.21)$$

Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αν έχουν καταγραφεί δύο ελάχιστα και το μεταξύ τους μέγιστο, αντί των δύο μεγίστων και ενός ελαχίστου.

Σημειώνεται ότι τα σφάλματα των X_1 και X_2 δεν μπορούν να είναι μικρότερα από το σφάλμα ανάγνωσης της θέσης της κηλίδας στην κλίμακα.

3. Υπολογίστε τη διαφορά $S = |X_1 - X_2| \pm \delta S$.



Σχήμα 3.4. Γραφική παράσταση της θέσης $X(t)$ της κηλίδας, καθώς και ένθετη μέθοδος προσδιορισμού της θέσης ισορροπίας της κηλίδας, όταν δεν μεσολαβεί επαρκής χρόνος για να αποσβέσουν οι ταλαντώσεις.

4. Χαράξτε στη γραφική παράσταση δύο ευθείες που να αντιστοιχούν στις τιμές των X_1 και X_2 . Προσδιορίστε την περίοδο ταλάντωσης T , χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν περισσότερες τιμές από το σχήμα. Η μέση τιμή αυτών των περιόδων, όπως και το σφάλμα αυτής, μας δίνουν το $T \pm \delta T$.

5. Από την Εξ. (3.20), υπολογίστε την τιμή της βαρυτικής σταθεράς, $G \pm \delta G$. Δίνονται, ως γνωστά τα μεγέθη $m_1 = 1,500 \pm 0,001$ kg, $d = 50,0 \pm 0,2$ mm και $s_0 = 46,5 \pm 0,2$ mm.

Παρατήρηση: Στον υπολογισμό του δG , αποφασίστε ποια είναι τα τρία μεγέθη που συνεισφέρουν περισσότερο στο τελικό σφάλμα (εκείνα με το μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα) και θεωρήστε ότι τα υπόλοιπα είναι γνωστά με αμελητέα σφάλματα.

6. Έχοντας υπολογίσει την τιμή του G , υπολογίστε (Εξ. 3.4, 3.5) τη μάζα της Γης, $M \pm \delta M$, και τη μέση πυκνότητά της, $\rho \pm \delta \rho$, με δεδομένες τις τιμές της ακτίνας της Γης, $R = 6370$ km, και της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης, $g = 9,80$ m/s², με αμελητέα σφάλματα σε σύγκριση με αυτό του G .

7. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με εκείνα που δίνονται στο εδάφιο 3.2. Υπάρχουν μεγάλες διαφορές; Αν ναι, σχολιάστε. Ποιες είναι κατά την γνώμη σας οι πιθανές πηγές σφάλματος στις μετρήσεις σας;

8. Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται μεταξύ των μαζών m_1 και m_2 σε απόσταση s_0 . Τι κλάσμα αυτής της δύναμης θα ασκούσε πάνω στις μάζες m_2 ο άνθρωπος, με μάζα $M = 75$ kg, θεωρούμενη ως σημειακή, σε απόσταση 0,5 m από τις m_2 ; Από το αποτέλεσμα, τι συμπεραίνετε για την επίδραση που είχε στα αποτελέσματα η παρουσία σας κοντά στη συσκευή κατά τη διάρκεια της άσκησης;