

# Άσκηση 12

## Μέτρηση του λόγου $c_p/c_v$ των αερίων

### 12.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση του λόγου  $c_p/c_v$  των ειδικών θερμοτήτων του ατμοσφαιρικού αέρα και η κατάταξή του σε μία από τις κατηγορίες των μονατομικών, διατομικών ή πολυατομικών αερίων.

### 12.2. Γενικά

#### 12.2.1. Καταστατική εξίσωση αερίων

Η μακροσκοπική κατάσταση ενός αερίου περιγράφεται πλήρως αν δοθούν ο όγκος  $V$ , η θερμοκρασία  $T$  και η πίεσή του  $p$ . Τα μεγέθη αυτά συνδέονται μεταξύ τους, όταν το αέριο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, μέσω μιας σχέσης η οποία είναι γνωστή ως **καταστατική εξίσωση** του αερίου,

$$f(p, V, T) = 0 \quad (12.1)$$

Η καταστατική εξίσωση παίρνει μια απλή μορφή στην περίπτωση ενός **ιδανικού αερίου**, δηλαδή ενός αερίου του οποίου τα μόρια έχουν αμελητέες διαστάσεις, συμπεριφέρονται ως ελαστικές σφαίρες στις συγκρούσεις και δεν αλληλεπιδρούν παρά μόνο στιγμιαία όταν συγκρούονται. Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων είναι

$$p V = n R T \quad (12.2)$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των γραμμομορίων του αερίου στον όγκο  $V$ , σε απόλυτη θερμοκρασία  $T$  και πίεση  $p$ , και  $R$  είναι μια σταθερά, γνωστή ως **παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων**, που έχει την τιμή  $8,314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ , για όλα τα ιδανικά αέρια. Όταν η σταθερά  $R$  διαιρεθεί με τον αριθμό των μορίων ανά γραμμομόριο (σταθερά του Avogadro,  $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ), προκύπτει η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων ανά μόριο,  $k = R/N_A = 1,380 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ , γνωστή ως **σταθερά του Boltzmann**.

Αν γίνεται αναφορά σε ένα γραμμομόριο, το οποίο καταλαμβάνει όγκο ίσο με  $v = V/n$ , τότε η καταστατική εξίσωση είναι:

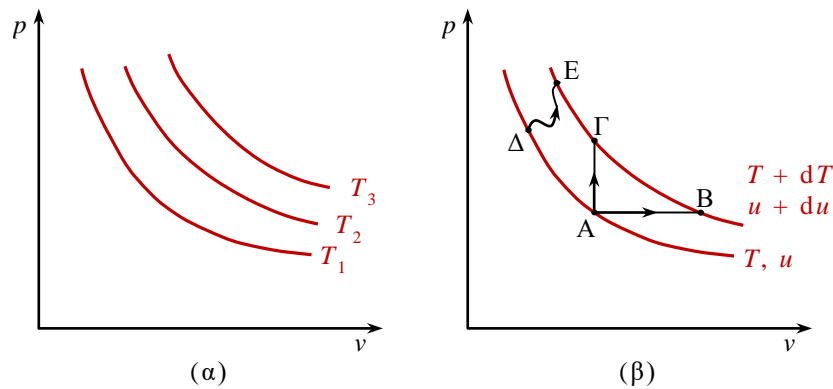
$$p v = R T \quad (12.3)$$

Οι καμπύλες της πίεσης  $p$  ως συνάρτησης του μοριακού όγκου  $v$  για διάφορες τιμές της θερμοκρασίας  $T$  είναι υπερβολές (ισόθερμες), όπως φαίνεται στο Σχ. 12.1.α.

Για τα **πραγματικά αέρια**, η καταστατική εξίσωση είναι πιο σύνθετη, λαμβάνοντας υπόψη τόσο το μέγεθος των μορίων όσο και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις (εξίσωση Van der Waals). Διαπιστώνεται όμως πειραματικά ότι, στις συνήθεις συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας, αέρια όπως το υδρογόνο, το άζωτο, το οξυγόνο κ.λπ., συμπεριφέρονται ως ιδανικά με πολύ καλή προσέγγιση.

Το άθροισμα όλων των ενεργειών των μορίων ενός αερίου ονομάζεται **εσωτερική ενέργεια** του αερίου. Η εσωτερική ενέργεια ενός αερίου αποτελείται από τις κινητικές ενέργειες των μορίων του και, σε περιπτώσεις μορίων με εσωτερική δομή, και τις εσωτερικές

ενέργειες των μορίων του. Για ένα ιδανικό αέριο, λόγω της απουσίας αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μορίων του, η εσωτερική ενέργεια θα είναι ανεξάρτητη του όγκου που καταλαμβάνει το αέριο και της πίεσής του. Η εσωτερική ενέργεια του ιδανικού αερίου εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του. Οι ισόθερμες καμπύλες του Σχ. 12.1.α είναι επομένως και καμπύλες σταθερής εσωτερικής ενέργειας,  $u$ .



**Σχήμα 12.1.** (α) Η μεταβολή της πίεσης  $p$  ως συνάρτηση του μοριακού όγκου  $v$  ενός ιδανικού αερίου, για διάφορες τιμές της απόλυτης θερμοκρασίας  $T$ . Οι ισόθερμες καμπύλες είναι και καμπύλες σταθερής εσωτερικής ενέργειας  $u$  για το ιδανικό αέριο. (β) Δύο ισόθερμες καμπύλες ιδανικού αερίου που αντιστοιχούν σε θερμοκρασίες  $T$  και  $T + dT$ , και σε τιμές  $u$  και  $u + du$  της εσωτερικής ενέργειας. Στο σχήμα φαίνονται και τρεις διαφορετικές μεταβολές που μπορεί να υποστεί το αέριο: μια ισοβαρής (AB), μια ισόχωρη (ΑΓ) και μια γενική (ΔΕ).

### 12.2.2. Ειδικές θερμότητες $c_p$ και $c_v$ ιδανικού αερίου

Έστω ότι ένα mol ιδανικού αερίου, που βρίσκεται αρχικά σε όγκο  $v$ , θερμοκρασία  $T$  και υπό πίεση  $p$ , απορροφά ποσότητα θερμότητας  $dq$ . Η μεταβολή της θερμοκρασίας του αερίου,  $dT$ , θα εξαρτηθεί από τις συνθήκες κάτω από τις οποίες απορροφήθηκε, δηλαδή υπό σταθερή πίεση (**ισοβαρής**) ή υπό σταθερό όγκο (**ισόχωρη**).

Αν η απορρόφηση θερμότητας  $dq$  ανά mol από το αέριο, υπό σταθερή πίεση, οδηγήσει σε αύξηση της θερμοκρασίας του κατά  $dT$ , τότε ο λόγος

$$c_p = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{p = \text{σταθ.}} \quad (12.4)$$

ονομάζεται **γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερή πίεση**.

Αν η απορρόφηση θερμότητας  $dq$  ανά mol από το αέριο, υπό σταθερό όγκο, οδηγήσει σε αύξηση της θερμοκρασίας του κατά  $dT$ , τότε ο λόγος

$$c_v = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{v = \text{σταθ.}} \quad (12.5)$$

ονομάζεται **γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του αερίου υπό σταθερό όγκο**.

Ο λόγος των δύο ειδικών θερμοτήτων δίνει τον αριθμό

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (12.6)$$

ο οποίος είναι μεγαλύτερος της μονάδας για λόγους που θα εξηγηθούν παρακάτω.

Σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα της θερμοδυναμικής, η απορρόφηση θερμότητας  $dq$  από μια ποσότητα ενός mol ιδανικού αερίου το οποίο επίσης παράγει έργο  $dw$ , έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας κατά  $du$ , όπου

$$du = dq - dw \quad (12.7)$$

Έστω ότι έχουμε δύο μεταβολές, μία ισοβαρή και μία ισόχωρη, που έχουν και οι δύο ως τελικό αποτέλεσμα την αύξηση της θερμοκρασίας του αερίου από  $T$  σε  $T + dT$  και της εσωτερικής ενέργειας από  $u$  σε  $u + du$  (ΑΒ και ΑΓ στο Σχ. 12.1.β, αντίστοιχα).

Στην ισοβαρή μεταβολή, η θερμότητα που δίνεται στο αέριο είναι, σύμφωνα με την Εξ. (12.4), ίση με

$$dq = c_p dT \quad (12.8)$$

Επίσης, το αέριο παράγει έργο ίσο με

$$dw = p dv \quad (12.9)$$

όπου  $dv$  είναι η μεταβολή στον όγκο του. Όμως, από την καταστατική εξίσωση του αερίου (Εξ. 12.3), για σταθερή πίεση, έχουμε

$$p dv = R dT \quad (12.10)$$

Από τις Εξ. (12.7)–(12.10) προκύπτει ότι

$$du = c_p dT - R dT \quad (12.11)$$

Στην ισόχωρη μεταβολή, το αέριο δεν παράγει έργο. Επίσης, από την Εξ. (12.5),

$$dq = c_v dT \quad (12.12)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (12.12) στην Εξ. (12.7), και θέτοντας  $dw = 0$ , παίρνουμε

$$du = c_v dT \quad (12.13)$$

Ας σημειωθεί ότι από τις σχέσεις (12.5) και (12.13) προκύπτει ότι

$$c_v = \left( \frac{du}{dT} \right)_{v = \text{σταθ.}} \quad (12.14)$$

Επειδή στις δύο μεταβολές τα  $du$  και  $dT$  είναι τα ίδια, οι Εξ. (12.11) και (12.13) δίνουν

$$du = c_p dT - R dT = c_v dT \quad (12.15)$$

ή τελικά,

$$c_p - c_v = R \quad (12.16)$$

Φαίνεται αμέσως ότι  $c_p > c_v$ , όπως αναμένεται αν ληφθεί υπόψη ότι στην ισόχωρη μεταβολή δεν παράγεται έργο από το αέριο, επομένως, για την ίδια προσφερόμενη ενέργεια, οι αυξήσεις της εσωτερικής του ενέργειας και της θερμοκρασίας του είναι μεγαλύτερες.

### 12.2.3. Βαθμοί ελευθερίας και θεώρημα της ισοκατανομής της ενέργειας

Στη συζήτηση που θα ακολουθήσει για τις ειδικές θερμότητες των αερίων, θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα της ισοκατανομής της ενέργειας, το οποίο και θα διατυπωθεί εδώ χωρίς απόδειξη.

Στη θερμοδυναμική, κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή που πρέπει να δοθεί για να καθοριστεί η ολική ενέργεια ενός συστήματος ονομάζεται **βαθμός ελευθερίας** του συστήματος. Έτσι, μια ελεύθερη σημειακή μάζα, της οποίας η ενέργεια καθορίζεται πλήρως από τρεις συνιστώσες της ταχύτητάς της, έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Αν η μάζα αυτή βρίσκεται μέσα σε ένα διατηρητικό πεδίο δύναμης, μέσα στο οποίο έχει και δυναμική ενέργεια, που εξαρτάται από τις

τρεις συντεταγμένες θέσης της μάζας, οι βαθμοί ελευθερίας της είναι έξι. Αν η μάζα δεν είναι σημειακή αλλά έχει και εσωτερική δομή, όπως π.χ. ένα μόριο, τότε, για να καθοριστεί η ενέργειά του, χρειάζεται να δοθούν και άλλες συντεταγμένες, που περιγράφουν αυτή την εσωτερική δομή, και ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι μεγαλύτερος.

Στην κλασική θερμοδυναμική, το **θεώρημα της ισοκατανομής της ενέργειας** διατυπώνεται ως εξής: Σε κάθε μεταβλητή, η οποία συνεισφέρει έναν τετραγωνικό όρο στην ενέργεια ενός συστήματος, αντιστοιχεί, σε θερμική ισορροπία, μια μέση ενέργεια ίση με  $\frac{1}{2} kT$ .

Έτσι, για την ελεύθερη σημειακή μάζα, η ενέργεια της οποίας είναι ίση με την κινητική της,  $K = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ , η μέση ενέργειά της στη θερμοκρασία  $T$  είναι ίση με

$$\bar{K} = \frac{1}{2} m (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = \frac{3}{2} kT \quad (12.17)$$

Αν η μάζα είναι ελαστικά συνδεδεμένη σε κάποιο σημείο, ώστε να έχει και δυναμική ενέργεια ίση με  $P = \frac{1}{2} s_x x^2 + \frac{1}{2} s_y y^2 + \frac{1}{2} s_z z^2$ , με κάποιες σταθερές  $s_x$ ,  $s_y$ , και  $s_z$  (οι οποίες μπορεί να είναι και άγνωστες), τότε στη θερμοκρασία  $T$  έχει μέση ενέργεια ίση με

$$\bar{E} = \bar{K} + \bar{P} = \frac{1}{2} m (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) + \frac{1}{2} (s_x \overline{x^2} + s_y \overline{y^2} + s_z \overline{z^2}) = 6 \left( \frac{1}{2} kT \right) = 3 kT \quad (12.18)$$

Για σύστημα που αποτελείται από  $N$  τέτοιες μάζες, η μέση ενέργεια είναι ίση με  $3 NkT$ .

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται οι μέσες ενέργειες και άλλων συστημάτων σε θερμοδυναμική ισορροπία.

#### 12.2.4. Ειδικές θερμότητες $c_p$ και $c_v$ των μονοατομικών αερίων

Σύμφωνα με την κινητική θεωρία των αερίων, η εσωτερική ενέργεια ενός μονοατομικού αερίου είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μορίων του. Από όσα ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, η μέση ενέργεια κάθε ατόμου του αερίου, σε ισορροπία στη θερμοκρασία  $T$ , είναι ίση με  $\frac{3}{2} kT$ . Για ένα mol, το οποίο έχει  $N_A$  μόρια (άτομα εδώ), η μέση εσωτερική ενέργεια είναι:

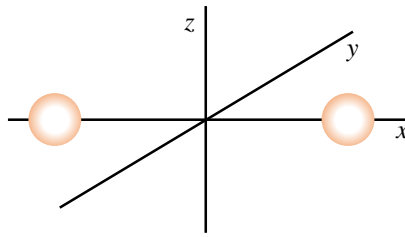
$$u = N_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} RT \quad (12.19)$$

Από τις Εξ. (12.14) και (12.16) προκύπτει ότι, σύμφωνα με την κλασική θερμοδυναμική, οι γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες του ιδανικού μονοατομικού αερίου και ο λόγος τους είναι

$$c_p = \frac{5}{2} R \quad c_v = \frac{3}{2} R \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} \quad (12.20)$$

#### 12.2.5. Ειδικές θερμότητες $c_p$ και $c_v$ των διατομικών αερίων

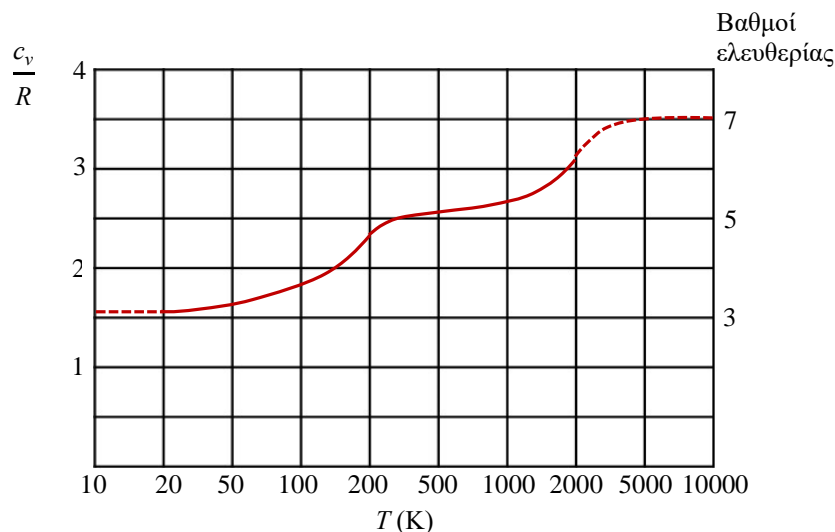
Ένα διατομικό αέριο έχει περισσότερους βαθμούς ελευθερίας από ένα μονοατομικό, λόγω της εσωτερικής του δομής. Το μόριο έχει ροπή αδράνειας, η οποία συνεισφέρει στην ολική του ενέργεια τρεις τετραγωνικούς όρους της μορφής  $\frac{1}{2} I \omega^2$ , έναν για καθέναν από τους τρεις κύριους άξονες περιστροφής του γύρω από το κέντρο μάζας του (Σχ. 12.2).



**Σχήμα 12.2.** Διατομικό μόριο και οι άξονες περιστροφής του.

Το διατομικό μόριο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας λόγω της μεταφορικής του κίνησης και τρεις λόγω της περιστροφικής του κίνησης. Ακόμη ένας βαθμός ελευθερίας προκύπτει από τη δυνατότητα που έχουν τα άτομα του μορίου να εκτελούν ταλαντώσεις κατά μήκος του άξονα που τα ενώνει. Τα δύο άτομα δεν ταλαντώνονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, αλλά σε συμφωνία, έτσι ώστε οι ορμές τους στο σύστημα κέντρου μάζας τους να είναι ίσες και αντίθετες. Συνολικά, λοιπόν, ένα διατομικό άτομο έχει επτά βαθμούς ελευθερίας. Επειδή καθένας από αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας συνεισφέρει έναν τετραγωνικό όρο στην ολική ενέργεια του συστήματος, η μέση ενέργεια του μορίου στη θερμοκρασία  $T$  θα έπρεπε να είναι, σύμφωνα με την κλασική θερμοδυναμική, ίση με  $7/2 kT$ .

Στην πράξη, όμως, τα διατομικά αέρια συμπεριφέρονται σαν να είχαν λιγότερους βαθμούς ελευθερίας από τους 7 που αναφέρθηκαν, εκτός αν βρίσκονται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες. Σαν παράδειγμα δίνεται στο Σχ. 12.3 η μεταβολή με τη θερμοκρασία της γραμμομοριακής ειδικής θερμότητας  $c_v$  του υδρογόνου υπό σταθερό όγκο.



**Σχήμα 12.3.** Η μεταβολή με τη θερμοκρασία των βαθμών ελευθερίας και του λόγου  $c_v/R$ , όπου  $c_v$  η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του μοριακού υδρογόνου υπό σταθερό όγκο. Η κλίμακα της θερμοκρασίας είναι λογαριθμική.

Το υδρογόνο είναι το μόνο διατομικό αέριο που παραμένει αέριο σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες και μας δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά των αερίων αυτών. Φαίνεται στο σχήμα ότι το υδρογόνο συμπεριφέρεται σαν να έχει μόνο 3 βαθμούς ελευθερίας σε θερμοκρασίες κάτω των 50 K περίπου, 5 βαθμούς στη θερμοκρασία των 500 K και να τείνει στους 7 βαθμούς σε μεγάλες θερμοκρασίες, στις οποίες όμως το μόριο διασπάται. Αντίθετα με τις κλασικές προβλέψεις, η ειδική θερμότητα μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία.

Η ερμηνεία αυτών των παρατηρήσεων δεν δίνεται από την Κλασική Φυσική αλλά από την Κβαντομηχανική. Σύμφωνα με την τελευταία, η ενέργεια ενός συστήματος στις περιστροφικές

ή ταλαντωτικές του κινήσεις δεν μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο αλλά μπορεί να παίρνει τιμές μόνο από ένα σύνολο διακριτών (κβαντωμένων) τιμών. Στη θερμική ισορροπία, σε κάποια θερμοκρασία, το κλάσμα των μορίων που βρίσκονται σε μια ορισμένη ενεργειακή στάθμη εξαρτάται τόσο από τη θερμοκρασία όσο και από την ενέργεια του μορίου στη στάθμη αυτή. Έτσι, για παράδειγμα, σε χαμηλές θερμοκρασίες, η πιθανότητα να περιστρέφεται ένα διατομικό μόριο γύρω από τον άξονα που ενώνει τα δύο του άτομα είναι αμελητέα και αυτός ο βαθμός ελευθερίας μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι «παγωμένος» και δεν συνεισφέρει στην ολική ενέργεια του συστήματος. Καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία, οι διάφοροι βαθμοί ελευθερίας διεγείρονται σε μεγαλύτερο ποσοστό και συνεισφέρουν στην ειδική θερμότητα του αερίου. Η εξάρτηση της εσωτερικής ενέργειας από τη θερμοκρασία είναι επομένως μια πολύπλοκη συνάρτηση από αυτή της κλασικής θερμοδυναμικής. Η κλασική πρόβλεψη επιτυγχάνεται μόνο σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες, εφόσον βέβαια τα μόρια δεν διασπώνται σε μεμονωμένα άτομα στις θερμοκρασίες αυτές.

Για τους λόγους που αναφέρθηκαν, τα διατομικά αέρια έχουν στις συνήθεις θερμοκρασίες ουσιαστικά μόνο 5 βαθμούς ελευθερίας, 3 μεταφορικής και 2 περιστροφικής κίνησης. Επομένως, η γραμμομοριακή εσωτερική τους ενέργεια είναι

$$u = N_A \frac{5}{2} kT = \frac{5}{2} RT \quad (12.21)$$

ενώ οι γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες του ιδανικού διατομικού αερίου και ο λόγος τους είναι

$$c_p = \frac{7}{2} R \quad c_v = \frac{5}{2} R \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} \quad (12.22)$$

#### 12.2.6. Ειδικές θερμότητες $c_p$ και $c_v$ των τριατομικών και πολυατομικών αερίων

Τα τριατομικά μόρια, ως πιο σύνθετα, έχουν περισσότερους βαθμούς ελευθερίας από τα διατομικά. Τα άτομα του μορίου συνήθως δεν βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, όπως στο διατομικό μόριο, και εμφανίζουν επομένως μη αμελητέα ροπή αδρανείας γύρω από τρεις άξονες. Υπάρχει λοιπόν ακόμη ένας «ενεργός» βαθμός ελευθερίας στα τριατομικά και στα πολυατομικά μόρια. Για τους λόγους που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, τα τριατομικά και τα πολυατομικά μόρια εμφανίζονται να έχουν, σε συνήθεις θερμοκρασίες, 6 βαθμούς ελευθερίας. Επομένως,

$$u = N_A \frac{6}{2} kT = 3 RT \quad (12.23)$$

οπότε οι γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες του ιδανικού τριατομικού αερίου και ο λόγος τους είναι

$$c_p = 4 R \quad c_v = 3 R \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{4}{3} \quad (12.24)$$

#### 12.2.7. Σύγκριση θεωρητικών και πειραματικών τιμών των ειδικών θερμότητων

Στον Πίνακα I δίνονται οι θεωρητικά προβλεπόμενες και οι πειραματικές τιμές των ειδικών θερμότητων για διάφορα αέρια, στη θερμοκρασία των 20 °C και σε ατμοσφαιρική πίεση.

## Πίνακας Ι

### Γραμμομοριακές ειδικές θερμότητες των αερίων

Σε θερμοκρασία 20 °C και πίεση 1 atm  
Στην κορυφή κάθε στήλης δίνεται η θεωρητική τιμή

Αέριο	$c_p/R$	$c_v/R$	$\gamma = c_p/c_v$
<b>Μονατομικά</b>	$5/2 = 2,5$	$3/2 = 1,5$	$5/3 = 1,67$
He	2,52	1,52	1,66
Ar	2,52	1,51	1,67
<b>Διατομικά</b>	$7/2 = 3,5$	$5/2 = 2,5$	$7/5 = 1,4$
H <sub>2</sub>	3,42	2,44	1,41
O <sub>2</sub>	3,52	2,50	1,40
N <sub>2</sub>	3,50	2,45	1,40
Ατμ. Αέρας	3,50	2,45	1,40
Cl <sub>2</sub>	4,12	3,02	1,36
<b>Πολυατομικά</b>	4	3	$4/3 = 1,33$
CO <sub>2</sub>	4,40	3,38	1,30
NH <sub>3</sub>	4,48	3,42	1,31
CH <sub>4</sub>	4,42	3,27	1,31
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> O	16,60	15,40	1,08

Αξιοσημείωτη συμφωνία παρατηρείται μεταξύ των θεωρητικών προβλέψεων και των πειραματικών τιμών για τα μονατομικά αέρια. Για τα διατομικά αέρια η συμφωνία είναι ικανοποιητική, ενώ σημαντικές διαφορές παρατηρούνται για τα πολυατομικά μόρια, για τα οποία οι θεωρητικές προβλέψεις είναι λιγότερο ακριβείς, για τους λόγους που αναφέρθηκαν ήδη.

#### 12.2.8. Αδιαβατικές μεταβολές σε αέρια

Ας εξετάσουμε μια μεταβολή σε ένα ιδανικό αέριο κατά την οποία δεν δίνεται ή αφαιρείται θερμότητα από το αέριο. Μια τέτοια μεταβολή ονομάζεται **αδιαβατική**. Σε μια αδιαβατική μεταβολή  $dq = 0$  και το πρώτο αξίωμα της θερμοδυναμικής (Εξ. 12.7) παίρνει τη μορφή

$$du = - dw \quad (12.25)$$

η οποία, σε συνδυασμό με την Εξ. (12.9), δίνει

$$du + p dv = 0 \quad (12.26)$$

Η εσωτερική ενέργεια ενός ιδανικού αερίου είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας του και η Εξ. (12.14) ισχύει για όλες τις μεταβολές, επομένως, γενικά, είναι:  $du = c_v dT$ . Έτσι, η Εξ. (12.26) παίρνει τη μορφή:

$$c_v dT + p dv = 0 \quad (12.27)$$

Από την παραγωγή της καταστατικής εξίσωσης (12.3), προκύπτει ότι

$$p \, dv + v \, dp = R \, dT = (c_p - c_v) \, dT \quad (12.28)$$

Απαλείφοντας το  $dT$  μεταξύ των Εξ. (12.27) και (12.28) έχουμε:

$$v \, dp + \frac{c_p}{c_v} p \, dv = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0 \quad (12.29)$$

η οποία, με ολοκλήρωση, δίνει  $\ln p + \gamma \ln v = \text{σταθ.}$  ή τελικά

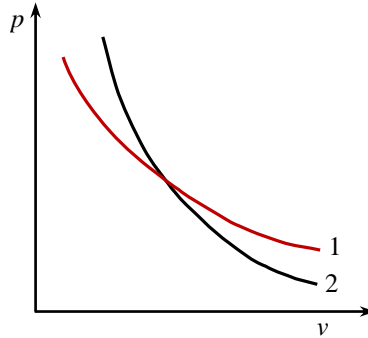
$$p v^\gamma = \text{σταθ.} \quad (12.30)$$

Αν η μεταβολή δεν είναι απολύτως αδιαβατική αλλά υπάρχει μερική ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον, τότε η Εξ. (12.30) τροποποιείται σε

$$p v^\alpha = \text{σταθ.} \quad (12.31)$$

όπου  $1 < \alpha < \gamma$ .

Στο Σχ. 12.4 δίνεται η γραφική παράσταση μιας ισόθερμης (1) και μιας αδιαβατικής (2) μεταβολής ιδανικού αερίου. Φαίνεται ότι στην αδιαβατική μεταβολή η κλίση ( $dp/dv$ ) είναι μεγαλύτερη (κατά ένα παράγοντα  $\gamma$ ) απ' ό,τι στην ισόθερμη μεταβολή.



Σχήμα 12.4. Ισόθερμη (1) και αδιαβατική (2) μεταβολή.

## 12.4. Μέθοδος

Η μέτρηση του λόγου  $\gamma = c_p/c_v$  των αερίων θα γίνει με τη μέθοδο του Torruchardt, στην οποία χρησιμοποιείται η διάταξη του σχήματος 12.5. Μία κοιλότητα έχει ως μοναδική έξοδο έναν κατακόρυφο γυάλινο σωλήνα, μέσα στον οποίο μπορεί να κινείται αεροστεγώς ένα έμβολο. Ο συνολικός όγκος της κοιλότητας και του γυάλινου σωλήνα είναι  $V_0$ .

Αν μέσα στο σωλήνα αφήσουμε ελεύθερο το έμβολο, τότε αυτό θα κατέβει μέχρι ένα ορισμένο ύψος και στη συνέχεια θα εκτελέσει ταλαντώσεις γύρω από κάποια θέση ισορροπίας, καθώς το αέριο που περιέχεται στην κοιλότητα συμπιέζεται και διαστέλλεται.

Αν η μάζα του εμβόλου είναι  $m$  και το εμβαδόν της διατομής του σωλήνα είναι  $S$ , τότε στη θέση ισορροπίας του εμβόλου θα ισχύει η σχέση:

$$p = p_0 + \frac{m g}{S} \quad (12.32)$$

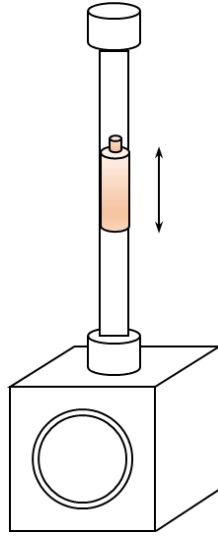
όπου  $p$  είναι η πίεση του αέρα μέσα στην κοιλότητα και  $p_0$  είναι η ατμοσφαιρική πίεση.

Όταν το έμβολο βρίσκεται σε απόσταση  $z$  από τη θέση ισορροπίας του (θετική προς τα πάνω), προκύπτει μια διαφορά πίεσης  $\Delta p$  μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού της κοιλότητας. Η εξίσωση κίνησης του εμβόλου είναι:



$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = S \Delta p \quad (12.33)$$

(Το βάρος του εμβόλου δεν εμφανίζεται στην εξίσωση γιατί η μετατόπιση  $z$  μετρείται από το σημείο ισορροπίας του.)



**Σχήμα 12.5.** Η πειραματική διάταξη για την μέτρηση του λόγου  $\gamma = c_p/c_v$  των αερίων με τη μέθοδο Torruchardt.

Αν η μεταβολή θεωρηθεί αδιαβατική (λόγω της μικρής χρονικής διάρκειας του φαινομένου), τότε θα ισχύει η σχέση

$$p V^\gamma = \text{σταθ.} \quad (12.34)$$

όπου  $V$  είναι ο μέσος όγκος κάτω από το έμβολο, όταν αυτό ισορροπεί, ενώ η μέση πίεση,  $p$ , μέσα στην κοιλότητα δίνεται από τη Εξ. (12.32). Με παραγωγή, η Εξ. (12.34) δίνει

$$dp = -\gamma \frac{p}{V} dV \quad (12.35)$$

ή, κατά προσέγγιση, για μικρές μεταβολές  $\Delta V$  και  $\Delta p$ ,

$$\Delta p = -\gamma \frac{p}{V} \Delta V \quad (12.36)$$

Επειδή  $\Delta V = Sz$ , η Εξ. (12.36) δίνει

$$\Delta p = -\frac{\gamma p S}{V} z \quad (12.37)$$

Η Εξ. (12.33) σε συνδυασμό με την Εξ. (12.37) δίνει την εξίσωση κίνησης

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\gamma p S^2}{m V} z = 0 \quad (12.38)$$

η οποία είναι της μορφής

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0 \quad (12.39)$$

$$\text{με} \quad \omega^2 = \frac{\gamma p S^2}{m V} \quad (12.40)$$

Η διαφορική εξίσωση (12.39) είναι η εξίσωση κίνησης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή, της οποίας η γενική λύση είναι

$$Z(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (12.41)$$

και περιγράφει μια απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα  $\omega$ .

Επειδή όλα τα μεγέθη στην (12.40) μπορούν να μετρηθούν, ο προσδιορισμός του  $\gamma$  είναι δυνατός, αν είναι γνωστή η γωνιακή συχνότητα  $\omega = 2\pi/T$  από μετρήσεις της περιόδου  $T$  της ταλάντωσης του εμβόλου. Έτσι, από τις Εξ. (12.40) και (12.32), προκύπτει

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{mV}{(Sp_0 + mg)S} \quad (12.42)$$

Καθώς τα αρχικά μεγέθη  $p_0$  και  $V_0$  συνδέονται με τις μέσες τιμές  $p$  και  $V$  μέσω της σχέσης  $p_0 V_0 = pV$ , με αντικατάσταση, η Εξ. (12.42) γίνεται τελικά

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{m p_0 V_0}{(Sp_0 + mg)^2} \quad (12.43)$$

η οποία είναι η σχέση που δίνει τον λόγο  $\gamma = c_p/c_v$ .

### 12.5. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη (Σχ. 12.5) αποτελείται από έναν κύβο κατασκευασμένο από πλεξιγκλάς, ο οποίος επικοινωνεί με τον εξωτερικό χώρο μέσω ενός κατακόρυφου γυάλινου σωλήνα που βρίσκεται στην επάνω του πλευρά. Ο συνολικός εσωτερικός όγκος του κύβου και του σωλήνα είναι  $1140 \text{ cm}^3$ .

Στη διάταξη παρέχεται η δυνατότητα για την εύκολη εξαγωγή του εμβόλου από τον κύβο. Η πρόσβαση στο εσωτερικό του κύβου επιτυγχάνεται με το ξεβίδωμα του πώματος που βρίσκεται στη μία του πλευρά.

Χρησιμοποιούνται επίσης ένας ζυγός, ένα μικρόμετρο, ένα χρονόμετρο και ένα βαρόμετρο για τη μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης.

### Βιβλιογραφία

1. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, <sup>4</sup>2022), 18.1, 18.3, 18.4, 19.3-19.8.
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική: Βασικές αρχές*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 2021), 18.5, 19.1, 19.2, 19.4, 19.7-19.9.
3. F. W. Sears, *Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics* (Reading Mass., <sup>2</sup>1963), Κεφ. 12 και 15.
4. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι (Αθήνα, <sup>2</sup>2010), σ. 167-184.

### 12.6. Εκτέλεση

**ΠΡΟΣΟΧΗ!** Η καλή λειτουργία της διάταξης βασίζεται στην όσο το δυνατόν καλύτερη εφαρμογή του εμβόλου στον γυάλινο σωλήνα. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να αποφευχθεί κάθε παραμόρφωση του σχήματος του εμβόλου. Θα πρέπει επομένως στη διάρκεια της

άσκησης να χειρίζεστε το έμβολο με μεγάλη προσοχή και να το τοποθετείτε, όταν δεν χρησιμοποιείται, πάνω στο προστατευτικό πανί που παρέχεται.

1. Με μεγάλη προσοχή ζυγίστε το έμβολο. Σημειώστε το σφάλμα της ζύγισης. Κατά τη ζύγιση και εκτέλεση του πειράματος, φροντίστε το έμβολο να τοποθετείται πάνω σε ένα καθαρό πανί.

2. Με τη βοήθεια ενός μικρομέτρου, μετρήστε τη διάμετρο του εμβόλου. Σημειώστε επίσης το σφάλμα αυτής της μέτρησης.

Ο ολικός όγκος του κύβου και του σωλήνα είναι  $V_0 = 1140 \pm 2 \text{ cm}^3$ .

3. Βεβαιωθείτε ότι το πώμα του κύβου είναι στη θέση του και βιδωμένο αεροστεγώς, για να αποφευχθούν βλάβες στο έμβολο στις μετρήσεις που θα ακολουθήσουν.

4. Εισάγοντας με προσοχή το έμβολο στον γυάλινο σωλήνα, αφήστε το να πέσει ελεύθερα και αμέσως μετρήστε τον ολικό χρόνο για 10 πλήρεις ταλαντώσεις του.

5. Μετά από την απόσβεση των ταλαντώσεων, το έμβολο θα συνεχίσει να πέφτει αργά και τελικά θα πέσει μέσα στον κύβο. Ξεβιδώστε το πώμα και βγάλτε το έμβολο από τον κύβο. Επανατοποθετήστε το πώμα στη θέση του και βιδώστε το ώστε η τρύπα να κλείσει αεροστεγώς.

6. Επαναλάβετε τα βήματα 3, 4 και 5 άλλες 9 φορές, ώστε να έχετε συνολικά 10 μετρήσεις.

7. Με τη βοήθεια ενός βαρομέτρου υδραργύρου, μετρήστε και καταγράψτε την ατμοσφαιρική πίεση  $p_0$ . Σημειώστε τις μονάδες της πίεσης και το σφάλμα αυτής της μέτρησης.

### 12.7. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Από τον χρόνο των 10 ταλαντώσεων του εμβόλου, βρείτε την περίοδο  $T$  της ταλάντωσης για καθεμία από τις 10 μετρήσεις.

2. Για τις 10 τιμές της περιόδου που βρήκατε, υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση αυτής, και γράψτε το αποτέλεσμα ως  $T \pm \delta T$ .

3. Από τη Εξ. (12.43), υπολογίστε τον λόγο  $\gamma = c_p/c_v$ , καθώς και το σφάλμα του. Στον υπολογισμό του σφάλματος να εκτιμήσετε ποια από τα μεγέθη στην Εξ. (12.43) έχουν αμελητέα σφάλματα σε σύγκριση με τα υπόλοιπα και να αγνοήσετε τα σφάλματα αυτά. Γράψτε το τελικό αποτέλεσμα του πειράματος ως  $\gamma \pm \delta\gamma$ .

4. Με βάση την τιμή του  $\gamma$  που προσδιορίσατε, κατατάξτε τον ατμοσφαιρικό αέρα σε μία από τις τρεις κατηγορίες των μονοατομικών, διατομικών ή πολυατομικών αερίων.