

Άσκηση 21

Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις – Συντονισμός

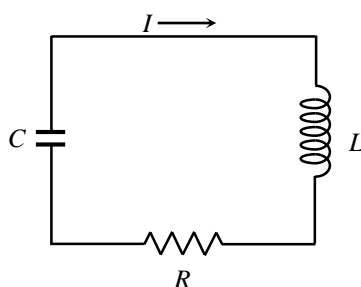
21.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή θα μελετηθούν οι εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RLC σειράς και το φαινόμενο του συντονισμού. Από την καμπύλη συντονισμού ρεύματος θα προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά στοιχεία του κυκλώματος, όπως η ιδιοσυχνότητα (συχνότητα συντονισμού), ο συντελεστής ποιότητας και η αντίσταση απωλειών του κυκλώματος, καθώς και ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου. Θα καταγραφούν επίσης η καμπύλη φάσης ως συνάρτηση της συχνότητας διέγερσης, όπως και η καμπύλη συντονισμού της τάσης στα άκρα του πυκνωτή, και, τέλος, θα παρατηρηθούν οι ελεύθερες φθίνουσες ταλαντώσεις του κυκλώματος.

21.2. Γενικά

21.2.1. Ελεύθερες φθίνουσες ταλαντώσεις σε κύκλωμα RLC

Το διάγραμμα του κυκλώματος στο Σχ. 21.1 παριστάνει ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελούμενο από μια αντίσταση R , ένα πηνίο L και έναν πυκνωτή C σε σειρά. Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά φορτισμένος με τάση U , θα κυκλοφορήσει στο κύκλωμα ρεύμα I και το σύστημα θα εκτελέσει ταλαντώσεις ρεύματος και τάσης. Η ταλάντωση περιλαμβάνει περιοδική μεταφορά ενέργειας από τον πυκνωτή στο πηνίο, δηλαδή από το ηλεκτρικό στο μαγνητικό πεδίο, και αντίστροφα. Εξαιτίας της αντίστασης R , το ρεύμα I , επομένως και η ενέργεια που παραμένει στα πεδία, συνεχώς μειώνεται, με αποτέλεσμα μια βαθμιαία ελάττωση του πλάτους των ταλαντώσεων. Μια λεπτομερέστερη μελέτη των κυκλωμάτων συντονισμού και των ηλεκτρικών ταλαντώσεων υπάρχει στο Παράρτημα (Π21), στο τέλος της άσκησης.



Σχήμα 21.1. Κύκλωμα RLC σειράς.

Αν στο κύκλωμα δεν υπήρχε απόσβεση ($R = 0$) θα είχαμε αμείωτο ταλαντωτή με χαρακτηριστική φυσική συχνότητα ή **ιδιοσυχνότητα**:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (21.1)$$

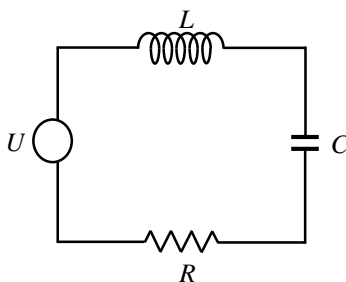
όπου L η **αυτεπαγωγή** του πηνίου και C η **χωρητικότητα** του πυκνωτή. Η συχνότητα αυτή εξαρτάται επομένως μόνο από τα στοιχεία L , C του κυκλώματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όπως γνωρίζουμε, η συχνότητα f συνδέεται με τη **γωνιακή** (ή **κυκλική**) **συχνότητα** ω με τη σχέση $\omega = 2\pi f$. Στην άσκηση αυτή, όπως άλλωστε και σε άλλες ασκήσεις που αναφέρονται σε ταλαντώσεις, ονομάζεται συνήθως συχνότητα, για λόγους συντομίας, και η γωνιακή συχνότητα ω .

21.2.2. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις κυκλώματος συντονισμού

Αν στο παραπάνω κύκλωμα προσθέσουμε ως πηγή ενέργειας την εναλλασσόμενη τάση $U = U_0 \cos \omega t$ (Σχ. 21.2), παράγονται εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, οι οποίες, ύστερα από ένα μεταβατικό στάδιο, φθάνουν σε μια μόνιμη κατάσταση, όπου το ρεύμα I ταλαντώνεται με τη συχνότητα ω της διεγείρουσας τάσης:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (21.2)$$



Σχήμα 21.2. Κύκλωμα RLC σειράς διεγερόμενο από εναλλασσόμενη τάση $U = U_0 \cos \omega t$.

Το πλάτος της ταλάντωσης I_0 , που διατηρείται σταθερό, δίνεται από τη σχέση

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (21.3)$$

και η διαφορά φάσης φ μεταξύ ρεύματος και τάσης, που οφείλεται στη δράση των χωρητικών και επαγωγικών στοιχείων του κυκλώματος, δίνεται από τη σχέση:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \quad (21.4)$$

Η παράσταση $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ ονομάζεται **εμπέδηση** ή **σύνθετη αντίσταση** του κυκλώματος, ενώ το αντίστροφό της, $Y = 1/Z$, ονομάζεται **σύνθετη αγωγιμότητα** του συστήματος. Η σύνθετη αγωγιμότητα Y μετριέται σε siemens (S) ($1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$).

Όπως προκύπτει από την Εξ. (21.3), το πλάτος του ρεύματος παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν $\omega L = 1/\omega C$, οπότε έχουμε $Z = R$ και το κύκλωμα εμφανίζει ωμική συμπεριφορά. Τότε, από τη σχέση $\omega L = 1/\omega C$ και την Εξ. (21.1), έχουμε:

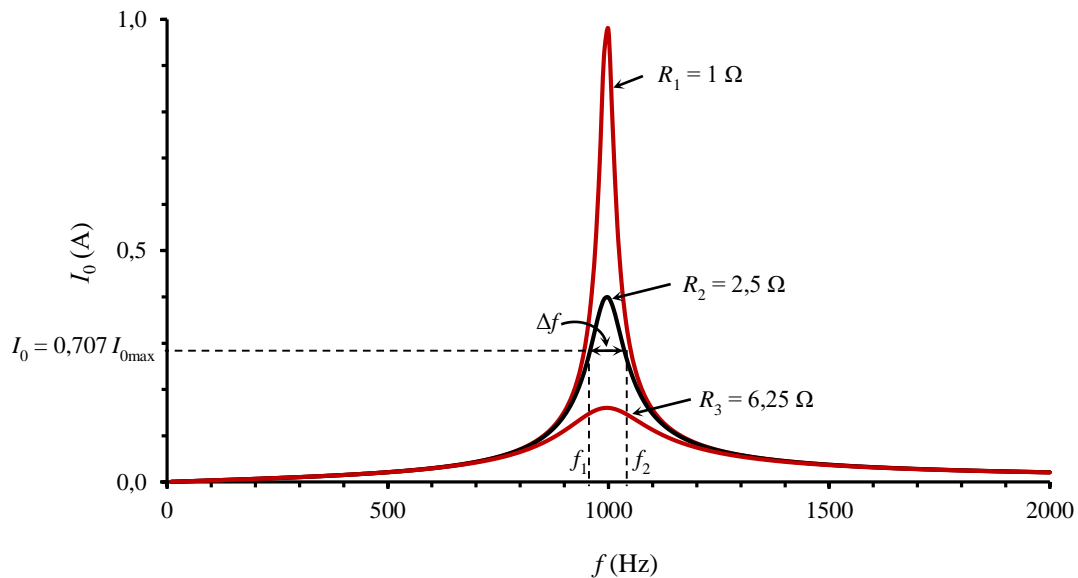
$$\omega = \omega_\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (21.5)$$

Η συχνότητα αυτή ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού**, συμβολίζεται με ω_σ και, όπως βλέπουμε, συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του συστήματος.

Στο Σχ. 21.3 φαίνεται η καμπύλη συντονισμού ρεύματος ενός κυκλώματος RLC σειράς, δηλαδή η γραφική παράσταση του πλάτους του ρεύματος I_0 ως συνάρτηση της συχνότητας $f = \omega/2\pi$, για τρεις διαφορετικές τιμές της αντίστασης R . Παρατηρείται ότι όσο μικρότερη είναι

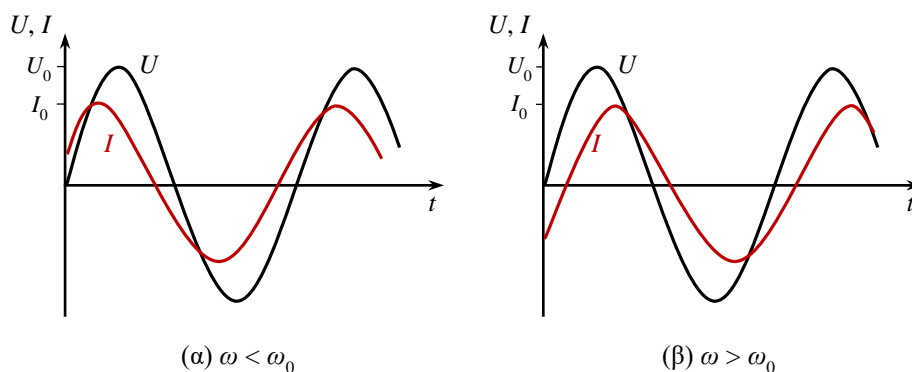
η R , τόσο οξύτερος είναι ο συντονισμός. Σε όλες τις περιπτώσεις, το ρεύμα φθάνει τη μέγιστη τιμή στη συχνότητα συντονισμού [Εξ. (21.5)] και το πλάτος του είναι τότε

$$I_{0\max} = \frac{U_0}{R} \quad (21.6)$$



Σχήμα 21.3. Καμπύλη συντονισμού ρεύματος ενός κυκλώματος RLC σειράς για τρεις διαφορετικές τιμές της αντίστασης R και για $U_0 = 1 \text{ V}$. Η συχνότητα συντονισμού είναι $f_0 = 1000 \text{ Hz}$.

Η οξύτητα μιας τέτοιας καμπύλης μετριέται με το **εύρος ζώνης συχνοτήτων** $\Delta f = f_2 - f_1$, όπου f_2 και f_1 είναι οι συχνότητες δεξιά και αριστερά της συχνότητας συντονισμού που αντιστοιχούν σε τιμές του ρεύματος ίσες με το $1/\sqrt{2} = 0,707$ της μέγιστης τιμής (Σχ. 21.3). Επειδή η ενέργεια, άρα και η ισχύς της ταλάντωσης, είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του ρεύματος, οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στη μισή τιμή της ισχύος. Με άλλα λόγια, στις τιμές f_1 και f_2 της συχνότητας διέγερσης η ισχύς έχει μειωθεί κατά 50%. Είναι φανερό ότι όσο οξύτερη είναι η καμπύλη συντονισμού, τόσο στενότερη είναι και η ζώνη Δf των συχνοτήτων που επιλέγονται από το κύκλωμα.

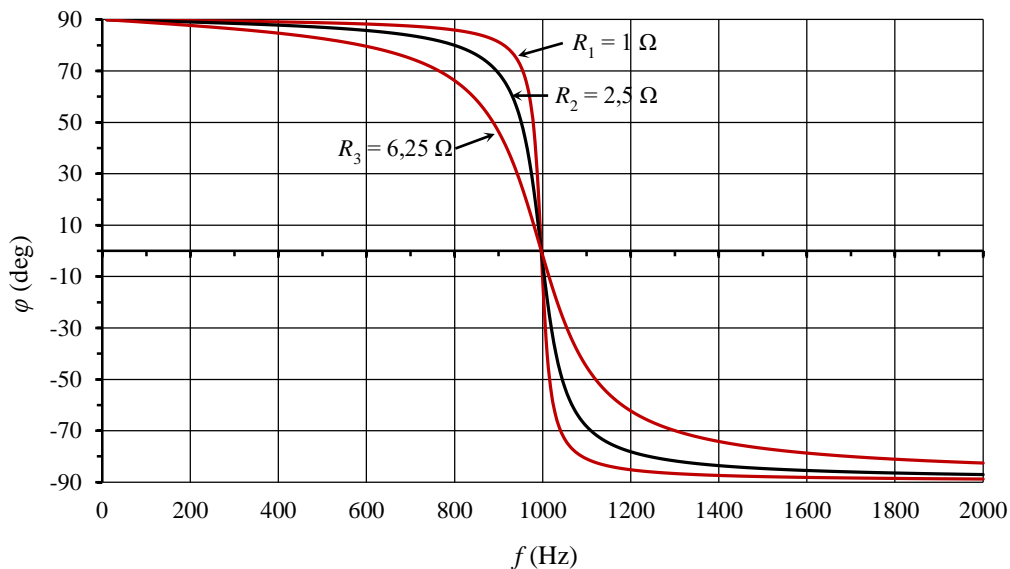


Σχήμα 21.4. Οι καμπύλες της τάσης U και του ρεύματος I σε διεγυρόμενο κύκλωμα RLC σειράς ως συνάρτηση του χρόνου t . (α) Για $\omega < \omega_0$ το ρεύμα προηγείται της τάσης. (β) Για $\omega > \omega_0$ το ρεύμα έπεται της τάσης.

Όπως προκύπτει από την Εξ. (21.4), στη συχνότητα συντονισμού ($\omega = \omega_0$) το ρεύμα είναι σε φάση με την εφαρμοζόμενη τάση ($\varphi = 0$), οπότε τα δύο μεγέθη ταλαντώνονται σε φάση, με

αποτέλεσμα η μέση ισχύς να είναι μέγιστη. Όταν η συχνότητα της διεγείρουσας τάσης είναι μικρότερη της συχνότητας συντονισμού ($\omega < \omega_0$), τότε υπερισχύει η χωρητική αντίσταση ($1/\omega C > \omega L$) και από την Εξ. (21.4) προκύπτει $\tan\varphi > 0$, οπότε το ρεύμα προηγείται της τάσης (Σχ. 21.4.α), ενώ για συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας συντονισμού ($\omega > \omega_0$), υπερισχύει η επαγωγική αντίσταση ($\omega L > 1/\omega C$), οπότε έχουμε $\tan\varphi < 0$ και το ρεύμα έπεται της τάσης (Σχ. 21.4.β).

Στο Σχ. 21.5 απεικονίζεται η μεταβολή της φάσης φ μεταξύ ρεύματος και τάσης ως συνάρτηση της συχνότητας, f για το κύκλωμα του Σχ. 21.3.



Σχήμα 21.5. Μεταβολή της διαφοράς φάσης φ μεταξύ τάσης της πηγής και ρεύματος, για το κύκλωμα συντονισμού RLC σειράς του Σχ. 21.3, ως συνάρτηση της συχνότητας f . Η διαφορά φάσης μηδενίζεται όταν η συχνότητα διέγερσης συμπίπτει με τη συχνότητα συντονισμού. Για $f > f_0$, το φ είναι αρνητικό (το ρεύμα έπεται της τάσης), ενώ για $f < f_0$, το φ είναι θετικό.

21.2.3. Ο συντελεστής ποιότητας Q ενός κυκλώματος συντονισμού

Για να χαρακτηρίσουμε την επιλεκτικότητα ενός ταλαντούμενου συστήματος, εισάγουμε την έννοια της ποιότητάς του. Αυτή ορίζεται από την παράμετρο Q (να μην συγχέεται με το φορτίο) που καλείται **συντελεστής ποιότητας** ενός κυκλώματος και δίνεται από το πηλίκο:

$$Q = 2\pi \frac{\text{μέγιστη αποταμιευμένη ενέργεια στον συντονισμό}}{\text{καταναλισκόμενη ενέργεια σε χρόνο μίας περιόδου}}$$

Με βάση τον ορισμό αυτό βρίσκουμε ότι

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (21.7)$$

Μπορεί εξάλλου να αποδειχθεί ότι το Q ισούται με το πηλίκο της συχνότητας συντονισμού δια του εύρους ζώνης συχνοτήτων, $\Delta f = f_2 - f_1$, της καμπύλης (Σχ. 21.3):

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (21.8)$$

Από την Εξ. (21.8) προκύπτει ότι όσο οξύτερη είναι η καμπύλη συντονισμού τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του Q . Αυτό άλλωστε δικαιολογεί και την ονομασία του, γιατί μια

οξεία καμπύλη συντονισμού συνεπάγεται ότι το κύκλωμα κάνει επιλογή στενής περιοχής συχνοτήτων και επομένως είναι καλής ποιότητας.

Στην κατάσταση συντονισμού τα πλάτη της τάσης στα άκρα του πηνίου και του πυκνωτή είναι ίσα:

$$U_0^L = \omega_0 L I_0 = I_0 / \omega_0 C = U_0^C$$

Επειδή στον συντονισμό $I_0 = U_0 / R$, έχουμε ότι

$$U_0^L = U_0^C \approx Q U_0, \text{ για } Q \geq 3 \quad (21.9)$$

Το Q μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την Εξ. (21.9), αν γνωρίζουμε το U_0 και το U_0^L ή το U_0^C .

Τέλος, ο συντελεστής ποιότητας Q μπορεί να προσδιοριστεί από τις ελεύθερες φθίνουσες ταλαντώσεις ενός κυκλώματος RLC και ισούται με τον αριθμό των ακτινίων κατά τη διάρκεια των οποίων η ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται κατά έναν παράγοντα ίσο με e . Επειδή η ενέργεια της ταλάντωσης είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους, έχουμε τη δυνατότητα να μετρήσουμε το Q μέσω της μέτρησης του πλάτους. Μετρώντας δηλαδή τον αριθμό N των κύκλων κατά τη διάρκεια των οποίων το πλάτος μειώνεται κατά έναν παράγοντα $e^{1/2}$, ή στο 60% της αρχικής τιμής, υπολογίζουμε τον παράγοντα Q από τη σχέση

$$Q = 2\pi N \quad (21.10)$$

αφού στον έναν κύκλο περιλαμβάνονται 2π ακτίνια.

21.3. Μέθοδος

Για να μελετήσουμε το φαινόμενο του συντονισμού στο κύκλωμα RLC , τροφοδοτούμε τα άκρα του κυκλώματος με μια εναλλασσόμενη τάση μεταβλητής συχνότητας. Για τις διάφορες τιμές της συχνότητας f , μετράμε τις αντίστοιχες τιμές του πλάτους του ρεύματος I_0 και της τάσης U_0 . Με βάση τις τιμές αυτές σχεδιάζουμε την καμπύλη συντονισμού, δηλαδή την εξάρτηση της τιμής του πλάτους του ρεύματος I_0 από τη συχνότητα διέγερσης f . Από την καμπύλη συντονισμού μπορούμε να προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά στοιχεία του κυκλώματος ως εξής:

- Από τη θέση του μεγίστου της I_0 βρίσκουμε τη συχνότητα συντονισμού f_0 .
- Από την τιμή του μεγίστου της I_0 υπολογίζουμε την ολική ωμική αντίσταση $R_{ολ}$ του κυκλώματος.
- Από το εύρος Δf της καμπύλης συντονισμού, και με τη βοήθεια της Εξ. (21.8), υπολογίζουμε τον συντελεστή ποιότητας Q .

Μετρώντας τη χρονική καθυστέρηση Δt μεταξύ των κυματομορφών της τάσης U της πηγής και του ρεύματος I (Σχ. 21.4), προσδιορίζουμε τη διαφορά φάσης, φ , μεταξύ ρεύματος και τάσης και προσδιορίζουμε ακριβέστερα τη συχνότητα συντονισμού f_0 . Από τη γνωστή τιμή της χωρητικότητας C του πυκνωτή, με τη βοήθεια της Εξ. (21.5), μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του L .

Επιπλέον, για τις διάφορες τιμές της συχνότητας f , μετράμε τις αντίστοιχες τιμές του πλάτους της τάσης U_0^C στα άκρα του πυκνωτή και σχεδιάζουμε την καμπύλη συντονισμού αυτής της τάσης. Βάσει της Εξ. (21.9), η μέτρηση της τιμής U_0^C στον συντονισμό οδηγεί στον εκ νέου προσδιορισμό του Q .

Τέλος, παρατηρούμε τις ελεύθερες φθίνουσες ταλαντώσεις του κυκλώματος, οι οποίες προσφέρουν ταυτόχρονα μια τρίτη εκτίμηση του Q από την Εξ. (21.10).

21.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη (Σχ. 21.7) περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

- Μία γεννήτρια παλμών ως πηγή ημιτονικής τάσης και τετραγωνικών παλμών μεταβλητής συχνότητας.
- Το κύκλωμα RLC που πρόκειται να μελετηθεί (Σχ. 21.6).
- Έναν παλμογράφο δύο καναλιών.

21.4.1. Η γεννήτρια παλμών

Το πλάτος της ημιτονικής τάσης και των παλμών που παράγονται από τη γεννήτρια ρυθμίζεται με το κουμπί «AMPLITUDE», ενώ η συχνότητα ρυθμίζεται με τον ρεοστάτη «FREQUENCY», κάτω αριστερά, αφού πρώτα επιλεγεί η κλίμακα από την περιοχή «FREQUENCY RANGE». Το πλάτος των παλμών ρυθμίζεται από 0 έως 10 V, ενώ η συχνότητά τους από 0 έως 2 MHz. Επίσης, με το πάτημα των κατάλληλων κουμπιών στην περιοχή «FUNCTION», οι παλμοί που παράγονται από τη γεννήτρια είναι ημιτονικής, τριγωνικής ή ορθογώνιας μορφής.

Η συχνότητα των παλμών αναγράφεται στην ψηφιακή οθόνη της γεννήτριας, ενώ το πλάτος των παλμών που παίρνουμε από τη γεννήτρια προσδιορίζεται με τον παλμογράφο ή με άλλον μετρητή (βλ. Π21.3).

Ο διακόπτης ON/OFF του οργάνου βρίσκεται στην πίσω όψη του.

21.4.2. Το κύκλωμα RLC

Το κύκλωμα αυτό αποτελείται από μία βάση συναρμολόγησης από πλεξιγκλάς με κατάλληλες υποδοχές, όπου τοποθετούνται, αναδιατάσσονται ή αφαιρούνται τα στοιχεία R , L και C . Σημειώνεται ότι οι τιμές της αντίστασης και του πυκνωτή είναι γνωστές, ενώ οι τιμές της αυτεπαγωγής L και της ωμικής αντίστασης του πηνίου, R_L , προσδιορίζονται πειραματικά από τον σπουδαστή.



Σχήμα 21.6. Το κύκλωμα RLC της άσκησης.

21.4.3. Ο παλμογράφος

Ο παλμογράφος, που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της περιόδου και του πλάτους των παλμών σε διάφορα σημεία του κυκλώματος RLC , έχει μεγάλη αντίσταση εισόδου και δεν αλλοιώνει τα χαρακτηριστικά του κυκλώματος. Η λειτουργία του παλμογράφου περιγράφεται αναλυτικά στην Άσκηση 15 (*Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι).

Βιβλιογραφία

1. E. M. Purcell, *Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός (Μαθήματα Φυσικής Berkeley, Τόμος 2)*, (Αθήνα, 1995), 8.1, 8.2.
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική: Βασικές αρχές, Τόμος Β΄: Ηλεκτρομαγνητισμός – Οπτική – Σύγχρονη Φυσική* (Αθήνα, 2021), 31.1-31.4.
3. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική, Τόμος Β΄: Ηλεκτρομαγνητισμός – Οπτική – Σύγχρονη Φυσική* (Αθήνα, 2022), 31.2-31.5.
4. R. A. Serway, J. W. Jewett, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς: Ηλεκτρισμός και μαγνητισμός – Φως και οπτική – Σύγχρονη φυσική* (Αθήνα, 2013), H11.2-H11.7.
5. H. J. Pain, *Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων* (Αθήνα, 1991), Κεφ. 2.
6. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής, Τόμος ΙΙ (Αθήνα, 2011), σ. 11-27, 265-276.

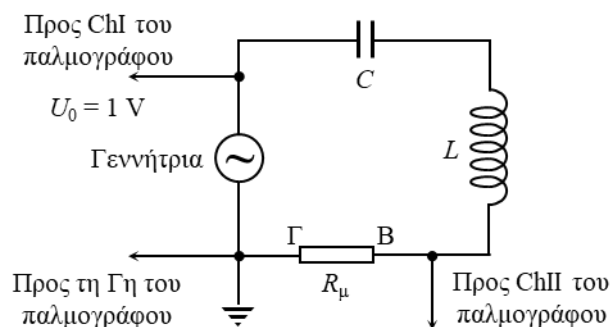
21.5. Εκτέλεση

21.5.1. Καταγραφή της καμπύλης συντονισμού του ρεύματος

Στο πείραμα αυτό μετريέται το εναλλασσόμενο ρεύμα του κυκλώματος ως συνάρτηση της συχνότητας. Όμως, επειδή ο παλμογράφος είναι μετρητής τάσης, και όχι ρεύματος, στο κύκλωμα σκόπιμα εισάγεται μία «μετρητική» αντίσταση $R_{\mu} = 100 \Omega$. Έτσι, μετρώντας με τον παλμογράφο την τάση στην R_{μ} , $U_0^{R_{\mu}}$, το ρεύμα υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση

$$I_0 = \frac{U_0^{R_{\mu}}}{R_{\mu}} \quad (21.11)$$

1. Συναρμολογήστε το κύκλωμα RLC σειράς, όπως φαίνεται στο Σχ. 21.7.



Σχήμα 21.7. Κύκλωμα RLC για την καταγραφή της καμπύλης συντονισμού του ρεύματος.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Σε όλες τις μετρήσεις το μαύρο (γειωμένο) καλώδιο του παλμογράφου πρέπει να συνδέεται πάντα με το αρνητικό (-), γειωμένο, βύσμα της γεννήτριας, ώστε να μην βραχυκυκλώνεται κανένα από τα στοιχεία του κυκλώματος.

2. Θέστε σε λειτουργία τη γεννήτρια και τον παλμογράφο. Επιλέξτε στη γεννήτρια την κλίμακα συχνοτήτων των 20 kHz και ρυθμίστε τη συχνότητα στο 1 kHz.

3. Ρυθμίστε τη γεννήτρια να παράγει ημιτονική τάση με πλάτος $U_0 = 1 \text{ V}$, μετρώντας το με τον παλμογράφο.

4. Μετρήστε την τάση $U_0^{R_\mu}$ στα άκρα της μετρητικής αντίστασης για συχνότητες f μεταξύ 1 και 20 kHz, με βήμα 1 kHz, και καταχωρήστε τις μετρήσεις στις δύο πρώτες στήλες του Πίνακα I. **Προσοχή:** Στην περιοχή του συντονισμού (8-12 kHz) το βήμα μειώνεται σε 0,2 kHz.

Πίνακας I

| f (kHz) | $U_0^{R_\mu}$ (V) | I_0 (mA) |
|-----------|-------------------|------------|
| | | |

5. Προσδιορίστε, κατά προσέγγιση, τη συχνότητα συντονισμού ($f_0 \pm \delta f_0$), δηλαδή τη συχνότητα εκείνη για την οποία το πλάτος παίρνει τη μέγιστη τιμή.

21.5.2. Καταγραφή της καμπύλης φάσης του ρεύματος

Στο πείραμα αυτό μετριέται η μετατόπιση της φάσης της τάσης στα άκρα της μετρητικής αντίστασης (που η χρονική συμπεριφορά της ταυτίζεται με εκείνη του ρεύματος) ως προς αυτήν της γεννήτριας. Η καταγραφή της καμπύλης γίνεται μέσω της μέτρησης της χρονικής υστέρησης Δt του ενός σήματος ως προς το άλλο (Σχ. 21.4). Η μετατόπιση της φάσης φ συνδέεται με τη χρονική υστέρηση Δt με τη σχέση

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} 360^\circ = \Delta t \times f \times 360^\circ \quad (21.12)$$

1. Για τιμές συχνοτήτων μεταξύ 1 και 20 kHz, με βήμα 1 kHz, μετρήστε τη διαφορά χρόνου Δt (είτε από τις θέσεις των μεγίστων είτε από τις θέσεις μηδενισμού των κυματομορφών) και καταγράψτε τις μετρήσεις στις δύο πρώτες στήλες του Πίνακα II. **Προσοχή:** στην περιοχή του συντονισμού (8-12 kHz) το βήμα μειώνεται σε 0,5 kHz. Οι τιμές της Δt σημειώνονται με θετικό πρόσημο όταν το ρεύμα προηγείται της τάσης και με αρνητικό πρόσημο στην αντίθετη περίπτωση.

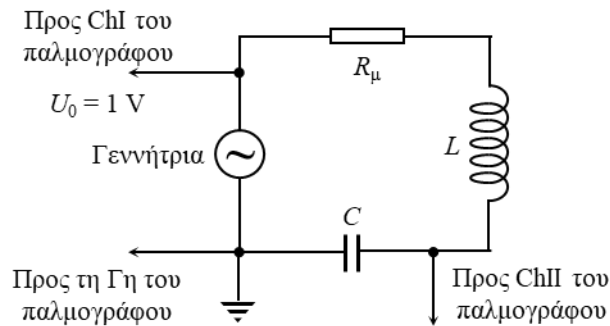
Πίνακας II

| f (kHz) | Δt (s) | φ (deg) |
|-----------|----------------|-----------------|
| | | |

2. Προσδιορίστε ξανά τη συχνότητα συντονισμού ($f_0 \pm \delta f_0$), που αντιστοιχεί στο $\Delta t = 0$, αλλά τώρα με μεγαλύτερη ακρίβεια.

21.5.3. Καταγραφή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή

1. Συναρμολογήστε το κύκλωμα όπως φαίνεται στο Σχ. 21.8, εναλλάσσοντας τις θέσεις της μετρητικής αντίστασης R_μ με τον πυκνωτή C .



Σχήμα 21.8. Κύκλωμα RLC για την καταγραφή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή.

2. Μετρήστε την τάση U_0^C στα άκρα του πυκνωτή ως συνάρτηση της συχνότητας f στο διάστημα 1-20 kHz, με βήμα 1 kHz, και συμπληρώστε τον Πίνακα III. **Προσοχή:** Στην περιοχή του συντονισμού (8-12 kHz), το βήμα μειώνεται σε 0,5 kHz..

Πίνακας III

| f (kHz) | U_0^C (V) |
|-----------|-------------|
| | |

21.5.4. Παρατήρηση των ελεύθερων ταλαντώσεων του κυκλώματος

1. Ρυθμίστε τη γεννήτρια ώστε να παράγει ορθογώνιους παλμούς, συχνότητας 0,2 kHz, και επιλέξτε στον παλμογράφο την κατάλληλη σάρωση (0,2-0,5 ms/div) για να έχετε πληρέστερη εικόνα στην οθόνη. Στο κανάλι ChII, θα εμφανίζεται τώρα η εικόνα των ελεύθερων ταλαντώσεων με απόσβεση του κυκλώματος, οι οποίες θα διεγείρονται με κάθε άνοδο και με κάθε κάθοδο του ορθογώνιου παλμού.
2. Μετρήστε τον αριθμό N των κύκλων κατά τη διάρκεια των οποίων το πλάτος των ταλαντώσεων μειώνεται κατά έναν παράγοντα $e^{1/2}$, δηλαδή στο 60 % της αρχικής του τιμής.
3. Αυξήστε αργά τη συχνότητα της γεννήτριας μέχρι τα 12 kHz και, παρακολουθώντας την εξέλιξη της φθίνουσας κυματομορφής στην οθόνη του παλμογράφου, σημειώστε τις όποιες παρατηρήσεις σας.
4. Κλείστε τη γεννήτρια και τον παλμογράφο και αποσυνδέστε το κύκλωμα τοποθετώντας τα καλώδια στις υποδοχές τους.

21.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

21.6.1. Η καμπύλη συντονισμού του ρεύματος

1. Συμπληρώστε τον Πίνακα I.
2. Με βάση τις τιμές του Πίνακα I, σχεδιάστε σε χαρτί μιλιμετρέ την πειραματική καμπύλη συντονισμού του ρεύματος και, από αυτήν, προσδιορίστε με ακρίβεια τη συχνότητα συντονισμού, $f_0 \pm \delta f_0$.
3. Προσδιορίστε το εύρος ζώνης συχνοτήτων, $\Delta f = f_2 - f_1$ (βλ. Σχ. 21.3), καθώς και το σφάλμα του. Από την τιμή αυτή και την Εξ. (21.8), υπολογίστε τον συντελεστή ποιότητας, $Q \pm \delta Q$.

4. Από την τιμή του ρεύματος στον συντονισμό και με τη βοήθεια της Εξ. (21.6), υπολογίστε την ολική αντίσταση, $R_{ολ} \pm \delta R_{ολ}$. Δεδομένου ότι $R_{ολ} = R_{\mu} + R_L$ (βλ. εδάφιο Π21.1), υπολογίστε την αντίσταση απωλειών του κυκλώματος, που ταυτίζεται με την ωμική αντίσταση του πηνίου R_L .

21.6.2. Η καμπύλη φάσης του ρεύματος

1. Συμπληρώστε τον Πίνακα II.
2. Με βάση τις τιμές του Πίνακα II, σχεδιάστε σε χαρτί μιλιμετρέ την καμπύλη φάσης του ρεύματος και συγκρίνετε το διάγραμμα αυτό με τη μορφή της αναμενόμενης θεωρητικής καμπύλης (Σχ. 21.5).
3. Από την πειραματική καμπύλη υπολογίστε και πάλι τη συχνότητα συντονισμού, $f_0 \pm \delta f_0$. Συγκρίνετε την τιμή αυτή με εκείνη που βρήκατε στο βήμα 21.6.1.2.
4. Με βάση τη συχνότητα συντονισμού και τη γνωστή τιμή του C ($C = 4,7 \text{ nF} \pm 5\%$), υπολογίστε από την Εξ. (21.5) την τιμή της αυτεπαγωγής, $L \pm \delta L$.
5. Η ολική αντίσταση, $R_{ολ} \pm \delta R_{ολ}$, μπορεί να υπολογιστεί και από την τιμή του Q (Εξ. 21.7). Συγκρίνετε την τιμή αυτή με εκείνη που υπολογίστηκε στο βήμα 21.6.1.4. Ποια από τις δύο μεθόδους είναι προτιμότερη και γιατί;

21.6.3. Η καμπύλη συντονισμού της τάσης στα άκρα του πυκνωτή

1. Με βάση τις τιμές του Πίνακα III, σχεδιάστε σε χαρτί μιλιμετρέ την καμπύλη συντονισμού της τάσης στα άκρα του πυκνωτή.
2. Από την τιμή της U_0^C στον συντονισμό, υπολογίστε [Εξ. (21.9)] τον συντελεστή ποιότητας, $Q \pm \delta Q$.

21.6.4. Παρατήρηση των ελεύθερων ταλαντώσεων του κυκλώματος

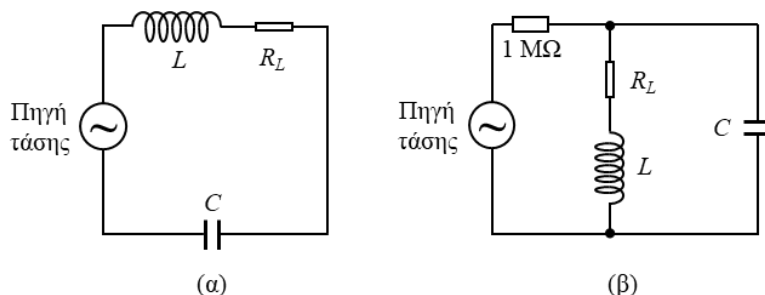
1. Από τον αριθμό N των κύκλων που μετρήσατε, εκτιμήστε [Εξ. (21.10)] τον συντελεστή Q .
2. Ποια από τις τρεις μεθόδους υπολογισμού του Q είναι προτιμότερη και γιατί;
3. Σχολιάστε τις παρατηρήσεις των ελεύθερων ταλαντώσεων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Π21)

Π21.1. Κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων RLC

Ένα πηνίο από μονωμένο σύρμα δημιουργεί μία αυτεπαγωγή L . Όταν το πηνίο αυτό συνδέεται ηλεκτρικά με έναν πυκνωτή C , τότε τα στοιχεία αυτά δημιουργούν το λεγόμενο κύκλωμα LC , το οποίο ουσιαστικά είναι ένας ηλεκτρομαγνητικός ταλαντωτής όπου μπορεί κανείς να διεγείρει ελεύθερες αλλά κατά κανόνα φθίνουσες ταλαντώσεις. Στα στοιχεία του κυκλώματος προστίθεται και η αντίσταση απωλειών R , που παριστάνει τις *συνολικές απώλειες* του κυκλώματος, δηλαδή τις απώλειες στον πυκνωτή, στο πηνίο και στα συνδετικά καλώδια. Σημειώνεται ότι σε συχνότητες $f < 20$ kHz οι ολικές απώλειες σχεδόν ταυτίζονται με τις απώλειες στην ωμική αντίσταση του πηνίου, δηλαδή $R = R_L$.

Συνήθως η διέγερση του κυκλώματος γίνεται με μια γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης, που θα την αποκαλούμε πηγή. Έτσι, ανάλογα με το πώς η πηγή συνδέεται με τα στοιχεία L , C (την R_L την θεωρούμε ενσωματωμένη στο πηνίο), τα κυκλώματα χωρίζονται σε κυκλώματα σειράς (Σχ. Π21.1.α) και κυκλώματα παραλλήλου (Σχ. Π21.1.β). Με τα κυκλώματα παραλλήλου δεν θα ασχοληθούμε στην άσκηση αυτή.



Σχήμα Π21.1. Κύκλωμα LC (α) σειράς και (β) παραλλήλου.

Ανάλογα με το είδος του σήματος που παράγει η πηγή, στα κυκλώματα αυτά μπορούν να διεγερθούν ελεύθερες ή εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Τις ελεύθερες ταλαντώσεις τις παρατηρεί κανείς στην οθόνη του παλμογράφου, όταν η πηγή παράγει ορθογώνιους παλμούς σχετικά μεγάλης διάρκειας, στα μέτωπα του παλμού. Η ταλάντωση είναι φθίνουσα και γίνεται με συχνότητα περίπου $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, που ονομάζεται **φυσική συχνότητα** ή **ιδιοσυχνότητα** του ταλαντωτή. Στην περίπτωση όπου η πηγή παράγει αρμονικό σήμα τύπου $U(t) = U_0 \cos \omega t$, οι ταλαντώσεις στο κύκλωμα θα είναι εξαναγκασμένες και η συχνότητά τους θα είναι ίδια με αυτή της πηγής. Αυτό που διαφοροποιείται είναι η φάση της ταλάντωσης και το πλάτος της, το οποίο μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα της πηγής συμπίπτει με τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή.

Π21.2. Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις σε κύκλωμα RLC σειράς

Στο κύκλωμα RLC σειράς (Σχ. Π21.1.α), η πηγή εναλλασσόμενης τάσης συνδέεται σε σειρά με τα υπόλοιπα στοιχεία, οπότε το εναλλασσόμενο ρεύμα που δημιουργείται στο κύκλωμα διαρρέει όλα τα στοιχεία του κυκλώματος και έχει ενιαία τιμή παρότι οι εναλλασσόμενες τάσεις στα στοιχεία αυτά διαφέρουν. Το πλάτος του εναλλασσόμενου αυτού ρεύματος μπορεί να υπολογιστεί. Πράγματι, έστω ότι η πηγή εναλλασσόμενης τάσης παράγει ηλεκτρικό σήμα τύπου

$$U(t) = U_0 \cos \omega t \quad (\text{Π21.1})$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα και U_0 το πλάτος της παραγόμενης εναλλασσόμενης τάσης. Για λόγους καλύτερης εποπτείας, θα υποθέσουμε ότι η εσωτερική αντίσταση της πηγής είναι μηδέν, δηλαδή η πηγή είναι μια *ιδανική* πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Μεταξύ άλλων, αυτό σημαίνει ότι η πηγή δεν συμβάλλει στην αντίσταση απωλειών.

Με δεδομένες τις τιμές U_0 και ω , τρία είναι τα ερωτήματα που ανακύπτουν εδώ:

- Ποια είναι η συνάρτηση ρεύματος $I = I(\omega)$;
- Ποια είναι η συνάρτηση φάσης $\varphi = \varphi(\omega)$ ως προς αυτήν της πηγής;
- Ποια είναι η συνάρτηση τάσης στο πηνίο $U_L = U_L(\omega)$, ή στον πυκνωτή $U_C = U_C(\omega)$;

Π21.2.1. Η συνάρτηση ρεύματος – Καμπύλη συντονισμού ρεύματος

Τη συνάρτηση ρεύματος θα την υπολογίσουμε καταφεύγοντας στους μιγαδικούς αριθμούς, όπου η τάση της πηγής U_0 και η αντίσταση απωλειών R αποδίδονται με πραγματικούς αριθμούς, ενώ οι αντιστάσεις του πηνίου και του πυκνωτή με τις φανταστικές τιμές $j\omega L$ και $1/j\omega C$, αντίστοιχα, όπου j είναι η φανταστική μονάδα ($j^2 = -1$). Επομένως, σε μιγαδικές μεταβλητές, ο δεύτερος νόμος του Kirchhoff έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{U}_L + \dot{U}_C + \dot{U}_R &= U_0 \quad \text{ή} \quad \dot{I}R_L + \dot{I}R_C + \dot{I}R = U_0 \\ \text{ή} \quad j\dot{I}\omega L + \frac{\dot{I}}{j\omega C} + \dot{I}R &= U_0 \end{aligned} \quad (\text{Π21.2})$$

όπου \dot{I} είναι το μιγαδικό ρεύμα που ρέει στο κύκλωμα. Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\dot{I} = \frac{U_0}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (\text{Π21.3})$$

Η Εξ. (Π21.3) ορίζει το πλάτος αλλά και τη φάση του εναλλασσόμενου ρεύματος ως προς εκείνη της πηγής, και ουσιαστικά είναι ο νόμος του Ohm διατυπωμένος σε μιγαδική μορφή. Στον παρονομαστή, η μιγαδική αντίσταση του κυκλώματος αποτελείται από δύο μέρη, το πραγματικό και το φανταστικό.

Το πλάτος του εναλλασσόμενου ρεύματος, που παρατηρείται στην οθόνη ενός παλμογράφου (ανεξαρτήτως φάσης), ισούται με το μέτρο της μιγαδικής παράστασης της Εξ. (Π21.3) και είναι

$$|I(\omega)| = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (\text{Π21.4})$$

Βλέπουμε ότι το πλάτος του ρεύματος είναι μια περίπλοκη συνάρτηση της συχνότητας ω και μεγιστοποιείται εκεί όπου ελαχιστοποιείται ο παρονομαστής, δηλαδή στη συχνότητα ω_0 για την οποία ισχύει

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \text{ή} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Π21.5})$$

Καθιερώθηκε η συχνότητα ω_0 να αποκαλείται **συχνότητα συντονισμού**, υπό την έννοια ότι η τιμή της συμπίπτει με τη φυσική συχνότητα των ελεύθερων ταλαντώσεων στο κύκλωμα όταν οι απώλειές του είναι μηδέν, επομένως το κύκλωμα συντονίζεται όταν η γεννήτρια

παράγει τη συχνότητα αυτή. Σημειώνεται ακόμη ότι, στην Ηλεκτρονική και την Ηλεκτροτεχνία, ο παρονομαστής της Εξ. (Π21.4), δηλαδή το μέτρο της μιγαδικής αντίστασης, ονομάζεται **εμπέδηση** ή **σύνθετη αντίσταση** του κυκλώματος RLC και συμβολίζεται συνήθως με το κεφαλαίο Z .

Από την Εξ. (Π21.4) προκύπτει ότι το πλάτος του ρεύματος στη συχνότητα συντονισμού είναι

$$I_{\text{συν}} = \frac{U_0}{R_{\text{ολ}}} \quad (\text{Π21.6})$$

Όπως βλέπουμε, δεν εξαρτάται από τα στοιχεία L και C , αλλά μόνο από την αντίσταση απωλειών.

Στο Σχ. 21.3 δόθηκαν τρεις καμπύλες συντονισμού ρεύματος που καταγράφηκαν σε τρία κυκλώματα με τα ίδια στοιχεία L και C , αλλά διαφορετική αντίσταση απωλειών. Σχολιάζοντας τις καμπύλες αυτές μπορούμε να πούμε ότι:

- Όσο μικρότερες είναι οι απώλειες τόσο οξύτερη είναι η καμπύλη και μεγαλύτερο το ρεύμα συντονισμού.
- Η συχνότητα συντονισμού δεν εξαρτάται από τις απώλειες στο κύκλωμα, καθώς όλες οι καμπύλες μεγιστοποιούνται στη συχνότητα ω_0 ($2\pi \times 1000$ rad/s)
- Η καμπύλη συντονισμού δεν είναι συμμετρική και $I(0) = I(\infty) = 0$.

Τελικά, για τη συνάρτηση του εναλλασσόμενου ρεύματος που ρέει στο κλειστό κύκλωμα, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$I(t) = |I(\omega)| \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0 \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (\text{Π21.7})$$

όπου φ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης της πηγής και του εναλλασσόμενου ρεύματος. Στα συμπεράσματα πρέπει να προσθέσουμε ακόμη ότι, γενικά, *το εναλλασσόμενο ρεύμα στο κύκλωμα δεν μεταβάλλεται με την ίδια φάση με αυτήν της πηγής*, παρά μόνο σε μία ειδική περίπτωση. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό συμβαίνει μόνο στη συχνότητα συντονισμού. Καθώς εδώ το ρεύμα εξαρτάται μόνο από τις τιμές U_0 και R και έχουμε $\varphi = 0$, λέμε ότι στη συχνότητα συντονισμού το κύκλωμα RLC έχει ωμική συμπεριφορά.

Π21.2.2. Η συνάρτηση φάσης του ρεύματος

Εύκολα παρατηρείται στην οθόνη ενός παλμογράφου ότι η φάση της ταλάντωσης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι μετατοπισμένη ως προς αυτήν της πηγής. Μπορεί να δείξει κανείς ότι η εφαπτομένη της γωνιακής αυτής μετατόπισης ισούται με το πηλίκο του φανταστικού μέρους της Εξ. (Π21.3) προς το πραγματικό. Αλλά για να γίνουν οι σχετικοί υπολογισμοί σωστά, πρέπει πρώτα το μιγαδικό ρεύμα να αναλυθεί σε δύο μέρη —το πραγματικό και το φανταστικό— και στη συνέχεια τα δύο αυτά μέρη να διαιρεθούν. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στη σχέση

$$\tan \varphi = - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (\text{Π21.8})$$

Στο Σχ. 21.5 δόθηκαν τρεις καμπύλες φάσης που προκύπτουν από την Εξ. (Π21.8) και αντιστοιχούν στις καμπύλες συντονισμού του Σχ. 21.3. Βλέπουμε ότι:

- Στη συχνότητα συντονισμού (1000 Hz), η φάση του ρεύματος συμπίπτει με τη φάση της πηγής, καθότι η μεταξύ τους διαφορά φάσης είναι μηδέν.
- Στην περιοχή της ω_0 , η αντίσταση απωλειών επηρεάζει έντονα τον ρυθμό μεταβολής της φάσης.
- Σε χαμηλές συχνότητες $\omega < \omega_0$, ισχύει $\varphi > 0$, δηλαδή η φάση του ρεύματος προηγείται της φάσης της πηγής (όπως όταν βραχυκυκλώνεται το πηνίο).
- Σε υψηλές συχνότητες $\omega > \omega_0$, έχουμε $\varphi < 0$, δηλαδή η φάση του ρεύματος έπεται της φάσης της πηγής (όπως όταν βραχυκυκλώνεται ο πυκνωτής). Οι δύο τελευταίες ιδιότητες είναι λίγο-πολύ προφανείς, καθώς στις χαμηλές συχνότητες η αντίσταση του κυκλώματος κυριαρχείται από τον παράγοντα $1/\omega C$ (χωρητική αντίσταση), ενώ στις υψηλές από τον παράγοντα ωL (επαγωγική αντίσταση).

Π21.2.3. Ο συντελεστής ποιότητας Q του ταλαντωτή

Οι απώλειες στους ταλαντωτές ορίζονται με πολλούς τρόπους, αλλά ο πιο χρήσιμος είναι εκείνος του παράγοντα απωλειών, Q , ο οποίος επιτρέπει τη σύγκριση διάφορων ταλαντωτών, όπως του μηχανικού, του ηλεκτρομαγνητικού, του ατομικού, του μοριακού κ.λπ., επειδή ο παράγοντας αυτός είναι ένας αδιάστατος αριθμός, ενώ, για παράδειγμα, η αντίσταση απωλειών στο κύκλωμα RLC εκφράζεται σε Ω . Όσο μεγαλύτερος είναι ο παράγοντας Q , τόσο μικρότερες είναι οι απώλειες στον ταλαντωτή. Για παράδειγμα, στον χαλαζία, ο Q είναι 10^5 - 10^6 (!), ενώ στους ηλεκτρομαγνητικούς ταλαντωτές είναι της τάξης του 10^2 .

Καθιερώθηκαν τέσσερις τρόποι μέτρησης του Q , που επιλέγονται ανάλογα με τις πειραματικές συνθήκες, οι οποίοι περιγράφονται ακολούθως.

Π21.2.3.1. Ελεύθερες φθίνουσες ταλαντώσεις

Εδώ ο συντελεστής Q ορίζεται ως ένας αριθμός που ισούται με τον αριθμό των ακτινίων κατά τη διάρκεια των οποίων η ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται κατά έναν παράγοντα ίσο με e .

Η άμεση εφαρμογή του ορισμού παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες, καθώς οι μετρητές μετρούν συνήθως το πλάτος της ταλάντωσης και όχι την ενέργεια του ταλαντωτή. Αλλά, επειδή η ενέργεια της ταλάντωσης είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους, προκύπτει η δυνατότητα μέτρησης του Q μέσω της μέτρησης του πλάτους. Έτσι, μετρώντας τον αριθμό N των κύκλων κατά τη διάρκεια των οποίων το πλάτος μειώνεται κατά έναν παράγοντα $e^{1/2}$, ή στο 60% της αρχικής τιμής, ο συντελεστής Q υπολογίζεται από τη σχέση

$$Q = 2\pi N \quad (\text{Π21.9})$$

αφού στον έναν κύκλο περιλαμβάνονται 2π ακτίνια.

Π21.2.3.2. Ηλεκτρομαγνητικοί ταλαντωτές

Στους ηλεκτρομαγνητικούς ταλαντωτές ο συντελεστής Q ορίζεται ισοδύναμα από το πηλίκο

$$Q = 2\pi \frac{E_L}{E_R} \quad (\text{Π21.10})$$

όπου E_L είναι η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια στο πηνίο στη συχνότητα συντονισμού και E_R είναι η καταναλισκόμενη ενέργεια στην R σε χρόνο μίας περιόδου. Με βάση τον ορισμό αυτό προκύπτει η σχέση

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (\text{Π21.11})$$

Επομένως, μετρώντας τις παραμέτρους ω_0 , R και L , μπορούμε να υπολογίσουμε τον Q από την Εξ. (Π21.11).

Π21.2.3.3. Καμπύλη συντονισμού

Ο συντελεστής Q μπορεί να υπολογιστεί στις καμπύλες συντονισμού από τις τιμές των δύο συχνοτήτων, f_1 και f_2 , αντίστοιχα, δεξιά και αριστερά της συχνότητας συντονισμού, f_0 , στις οποίες η ενέργεια του ταλαντωτή μειώνεται κατά έναν παράγοντα 2. Η σχετική ανάλυση οδηγεί στη σχέση

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (\text{Π21.12})$$

όπου f_0 είναι η συχνότητα συντονισμού και $\Delta f = f_2 - f_1$ είναι η ζώνη διέλευσης του κυκλώματος RLC . Στη μέθοδο αυτή η Δf μετριέται άμεσα από την καμπύλη συντονισμού. Για τον σκοπό αυτό, καταγράφουμε την καμπύλη συντονισμού, σημείο-σημείο, με μεγάλη λεπτομέρεια. Στη συνέχεια, μετράμε το εύρος Δf , σε Hz, στο ύψος $1/2^{1/2} \approx 0,707$ της κορυφής (Σχ. 21.3), δηλαδή στις συχνότητες όπου το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται κατά έναν παράγοντα 0,707. Για παράδειγμα, στην καμπύλη συντονισμού που δίνεται στο Σχ. 21.3, με μέγιστο ρεύμα 0,4 A, το εύρος Δf είναι περίπου 80 Hz. Επομένως, εδώ ο παράγοντας ποιότητας, Q , είναι $f_0/\Delta f = 1000 \text{ Hz}/80 \text{ Hz} \approx 13$.

Π21.2.3.4. Μέτρηση της τάσης συντονισμού στον πυκνωτή

Η μέθοδος αυτή είναι η πλέον ενδεδειγμένη, καθώς είναι η λιγότερο κοπιαστική και επιπλέον διασφαλίζει τη μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση του Q . Εδώ αρκούν δύο μετρήσεις: της τάσης της γεννήτριας, U_0 , και της τάσης στον πυκνωτή, U_C , στη συχνότητα συντονισμού. Αποδεικνύεται ότι, στον συντονισμό, η τάση στον πυκνωτή είναι, με καλή προσέγγιση, Q φορές υψηλότερη απ' ό,τι η τάση της γεννήτριας, δηλαδή

$$Q = \frac{U_C}{U_0} \quad (\text{Π21.13})$$

Η Εξ. (Π21.13) θεμελιώνεται στην ενότητα που ακολουθεί.

Π21.2.4. Συντονισμός τάσης στον πυκνωτή

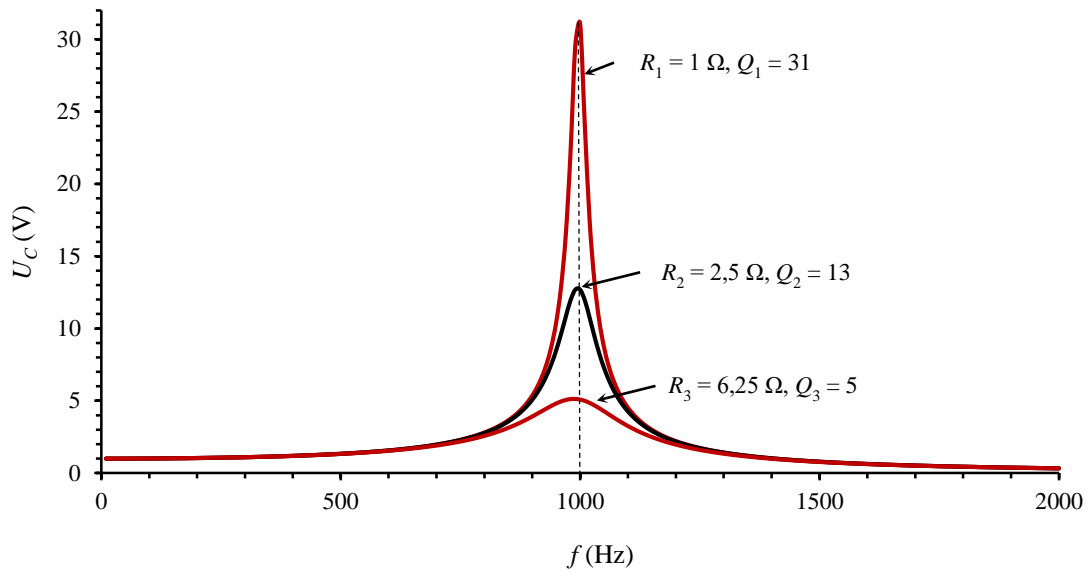
Θα καταφύγουμε πάλι στη μιγαδική μορφή των νόμων Ohm και Kirchhoff:

$$\dot{U}_L + \dot{U}_C + \dot{U}_R = U_0 \quad \text{ή} \quad \dot{U}_C = U_0 - \dot{I}(R + j\omega L) = U_0 - \frac{U_0(R + j\omega L)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (\text{Π21.14})$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτουν, για το μέτρο και τη φάση της U_C , οι σχέσεις:

$$|U_C| = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}, \quad \tan \varphi = -\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \quad \text{ή} \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad (\text{Π21.15})$$

οι γραφικές παραστάσεις των οποίων δίνονται στα Σχ. Π21.2 και Π21.3, αντίστοιχα.



Σχήμα Π21.2. Η καμπύλη συντονισμού της τάσης στα άκρα του πυκνωτή για το κύκλωμα του Σχ. 21.3. Η συχνότητα συντονισμού f_0 είναι περίπου ίση με 1000 Hz.

Η συχνότητα συντονισμού της τάσης U_C προσδιορίζεται από το ακρότατο του παρονομαστή στην πρώτη από τις Εξ. (Π21.15) και η τιμή της υπολογίζεται από τη σχέση

$$\omega_{\sigma}^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \quad (\text{Π21.16})$$

όπου $Q = \omega L/R$. Συνεπώς, ο συντονισμός τάσης γίνεται σε συχνότητα λίγο μικρότερη της ω_0 !

Είναι ενδιαφέρον να δούμε πόση είναι η τάση συντονισμού στον πυκνωτή. Έτσι, από τις Εξ. (Π21.11), (Π21.15) και (Π21.16) προκύπτει

$$|U_{C,\sigma}| = \frac{2U_0Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \approx U_0Q, \text{ για } Q \geq 3 \quad (\text{Π21.17})$$

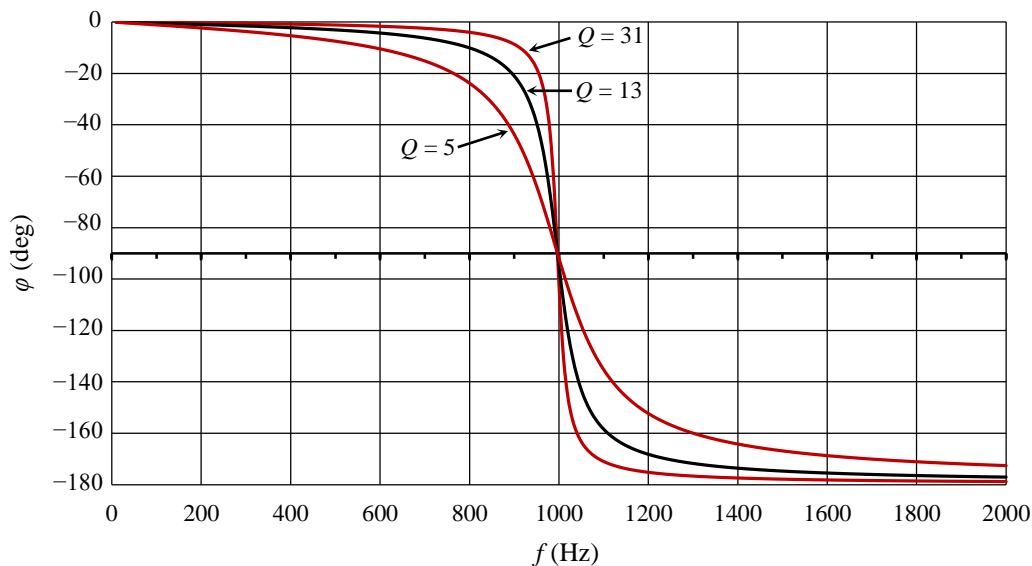
Σχολιάζοντας την καμπύλη συντονισμού τάσης στον πυκνωτή (Σχ. Π21.2), μπορούμε να πούμε ότι, όπως και στο ρεύμα, η τάση στον πυκνωτή μεγιστοποιείται περίπου στη συχνότητα $1/\sqrt{LC}$. Παρατηρούμε όμως και τις ακόλουθες διαφορές:

- Η κορυφή της καμπύλης μετατοπίζεται προς τις χαμηλότερες συχνότητες καθώς οι απώλειες στο κύκλωμα αυξάνονται. Σημειώνεται ότι η μετατόπιση αυτή δεν λαμβάνει χώρα στον συντονισμό ρεύματος.
- Σε αντίθεση με το ρεύμα, στη συχνότητα $\omega = 0$ η τάση στον πυκνωτή δεν μηδενίζεται, αλλά είναι U_0 .
- Στη συχνότητα συντονισμού η τάση στον πυκνωτή είναι, με καλή προσέγγιση, ίση με Q φορές την τάση της πηγής.

Από την τελευταία παρατήρηση πηγάζει η πιο απλή, εύκολη, ακριβής και γρήγορη μέθοδος για τη μέτρηση του Q , που είναι η ακόλουθη: Με έναν παλμογράφο μετράμε την τάση της

πηγής και, στη συνέχεια, μεταβάλλουμε τη συχνότητα έως ότου μεγιστοποιηθεί η τάση στον πυκνωτή. Μετράμε ακολούθως την τάση συντονισμού στον πυκνωτή και ο λόγος των δύο τάσεων δίνει τον συντελεστή Q (Εξ. Π21.17). Για παράδειγμα, στο Σχ. Π21.2 ($U_0 = 1 \text{ V}$), στο κύκλωμα με την οξύτερη καμπύλη, το Q είναι περίπου 31, στη δεύτερη 13, ενώ στην τρίτη 5. Τις ίδιες τιμές δίνουν και οι λόγοι $f_0/\Delta f$.

Π21.2.5. Η καμπύλη φάσης της τάσης στον πυκνωτή



Σχ. Π21.3. Η καμπύλη της φάσης της τάσης στα άκρα του πυκνωτή συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης.

Και εδώ (Σχ. Π21.3) παρατηρούνται ορισμένες διαφορές σε σχέση με τη συνάρτηση φάσης του ρεύματος, οι κυριότερες από τις οποίες είναι:

- η ταλάντωση της τάσης στον πυκνωτή πάντοτε υστερεί έναντι της τάσης της πηγής (παντού $\varphi < 0$),
- σε πολύ χαμηλές συχνότητες ($f \ll f_0$) η τάση στον πυκνωτή μεταβάλλεται με την ίδια σχεδόν φάση με αυτήν της πηγής ($\varphi \approx 0$),
- στη φυσική συχνότητα (συχνότητα συντονισμού) f_0 η υστέρηση της φάσης είναι 90° ακριβώς και δεν εξαρτάται από τον παράγοντα Q ($\varphi = 90^\circ$ σε όλες τις καμπύλες),
- σε πολύ υψηλές συχνότητες, ($f \gg f_0$), η τάση στον πυκνωτή μεταβάλλεται με υστέρηση περίπου 180° ($\varphi \approx 180^\circ$).

Π21.3. Παρατηρήσεις σχετικά με γεννήτρια παλμών της άσκησης

Η γεννήτρια της άσκησης έχει δύο εξόδους. Η μία έχει εσωτερική αντίσταση 50Ω , ενώ η δεύτερη 600Ω . Αλλά ακόμη και η χρήση της πρώτης από αυτές είναι προβληματική, καθώς τα 50Ω προκαλούν μείωση της τάσης εξόδου όταν το κύκλωμα RLC αρχίζει να καταναλώνει μεγάλα ρεύματα (5 mA) στην περιοχή του συντονισμού. Για να διατηρείται η τάση εξόδου σταθερή σε όλο το φάσμα συχνοτήτων, στην παρούσα άσκηση δεν χρησιμοποιείται η έξοδος των 50Ω , αλλά εκείνη των 600Ω , η οποία σκόπιμα υπέστη ηλεκτρονική τροποποίηση της εσωτερικής αντίστασης στο επίπεδο των $10 \text{ m}\Omega$, οπότε η τιμή αυτή μπορεί με άνεση να

θεωρηθεί μηδέν. Στην έξοδο αυτή το σήμα διατηρείται σταθερό σε όλο το φάσμα συχνοτήτων και δεν εξαρτάται από το επίπεδο του ρεύματος που καταναλώνει το κύκλωμα RLC , υπό τον όρο, όμως, ότι το ρεύμα κατανάλωσης δεν υπερβαίνει τα 40 mA. Έτσι, πέραν των 40 mA, ενεργοποιείται το σύστημα προστασίας, που μειώνει την τάση εξόδου στο μηδέν.

Τονίζεται ιδιαίτερα ότι η αναγραφόμενη στην ψηφιακή οθόνη τάση ισχύει μόνο για την έξοδο 50 Ω. Αλλά, καθώς η δεύτερη έξοδος, η έξοδος των 10 mΩ, προστατεύεται ηλεκτρονικά από ένα τυχαίο βραχυκύκλωμα ($I_{\max} = 40 \text{ mA}$), σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας της γεννήτριας το κύκλωμα προστασίας σκόπιμα μειώνει την τάση εξόδου 5 φορές. Επομένως, η παραγόμενη εναλλασσόμενη τάση στην έξοδο αυτή δεν συμπίπτει με την τιμή που αναγράφεται στην ψηφιακή οθόνη του οργάνου. Έτσι, η τιμή της προσδιορίζεται με τον παλμογράφο ή με άλλον μετρητή. Η παρατήρηση αυτή δεν ισχύει για τη συχνότητα, διότι η αναγραφόμενη στην οθόνη τιμή σωστά αποδίδει τη συχνότητα στις δύο εξόδους.