Άσκηση 22

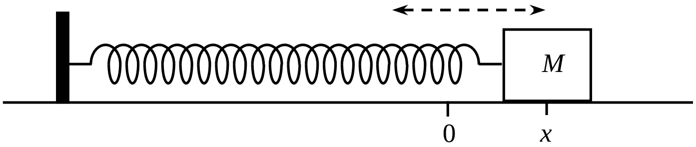
Εξαναγκασμένες μηχανικές ταλαντώσεις

22.1 Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι η μελέτη των ελεύθερων και των εξαναγκασμένων μηχανικών ταλαντώσεων ενός κλασικού συστήματος που αποτελείται από ένα ελατήριο και μια μάζα, η οποία μπορεί να κινείται με ελεγχόμενη τριβή. Θα μελετηθούν πρώτα οι ελεύθερες ταλαντώσεις του συστήματος, όταν η μάζα κινείται πάνω σε μια αεροτροχιά με ελάχιστες τριβές, και θα προσδιοριστούν η σταθερά του ελατηρίου, ο συντελεστής ποιότητας και η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Ακολούθως, θα καταγραφούν οι καμπύλες συντονισμού (και, προαιρετικά, της φάσης) των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων και θα προσδιοριστεί (προαιρετικά) η ταχύτητα της μάζας όταν κινείται κάτω από συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης.

22.2 Γενικά

Ένα κλασικό παράδειγμα αρμονικού ταλαντωτή είναι το σύστημα που αποτελείται από ένα ελατήριο και μια μάζα, η οποία εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Στη συνέχεια θα μελετηθούν πρώτα οι ελεύθερες ταλαντώσεις με μηδενική απόσβεση (ιδανικές) και οι ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση και ακολούθως οι ιδανικές εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση.



Σχήμα 22.1. Απλός αρμονικός ταλαντωτής αποτελούμενος από μια μάζα *M* συνδεδεμένη με ένα ελατήριο που είναι πακτωμένο στο ένα άκρο του.

22.2.1 Ελεύθερες αρμονικές ταλαντώσεις χωρίς απώλεια ενέργειας

Η περίπτωση των αρμονικών ταλαντώσεων χωρίς απώλεια ενέργειας είναι ιδανική και αποτελεί ασφαλώς μια προσέγγιση της πραγματικότητας, όταν ένα σώμα εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους και με πάρα πολύ μικρή απόσβεση. Έστω ότι η μάζα του σώματος είναι M, η **σταθερά του ελατηρίου** k και η θέση ισορροπίας του σώματος βρίσκεται στο σημείο $x = 0$ (Σχ. 22.1). Από τη μαθηματική ανάλυση (βλ. Π22.1 στο Παράρτημα, στο τέλος της άσκησης) προκύπτει ότι η απομάκρυνση x της μάζας από τη θέση ισορροπίας της περιγράφεται από τη σχέση

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{22.1}$$

όπου φ και x_0 είναι η αρχική φάση και μετατόπιση, αντίστοιχα, και η ω_0, που δίνεται από τη σχέση

$$\omega_0 = \sqrt{k/M} \tag{22.2}$$

είναι η **γωνιακή** ή **κυκλική συχνότητα** των ταλαντώσεων που εκτελεί η μάζα. Η συχνότητα f_0 είναι προφανώς

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} \tag{22.3}$$

Όπως βλέπουμε, στην ιδανική περίπτωση, η συχνότητα ταλάντωσης εξαρτάται μόνο από τις σταθερές k και M.

22.2.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση

Σε ένα σύστημα με απώλειες οι ταλαντώσεις σιγά-σιγά σβήνουν. Μία συνηθισμένη περίπτωση ταλαντώσεων με απόσβεση είναι αυτή στην οποία η δύναμη τριβής, που προκαλεί τις απώλειες, είναι ανάλογη προς την ταχύτητα του σώματος. Θεωρούμε ότι η επιφάνεια πάνω στην οποία γίνεται η κίνηση του σώματος δεν προβάλλει αντίσταση τριβής και ότι η τριβή δημιουργείται μόνον εξαιτίας της κίνησης του σώματος μέσα σε κάποιο μαγνητικό πεδίο ή ένα υγρό ή αέριο (βλ. Π22.2). Συνεπώς, για τη δύναμη τριβής μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$F_{\tau\rho} = -\,b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{22.4}$$

όπου το b αποκαλείται **σταθερά τριβής**. Συμβολίζουμε με γ την ποσότητα

$$\gamma = \frac{b}{2M} \tag{22.5}$$

η οποία είναι μια σταθερά με διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου και ονομάζεται **συντελεστής εξασθένησης**.

Ο χαρακτήρας της κίνησης εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ της σταθεράς γ και της ιδιοσυχνότητας ή φυσικής συχνότητας ω_0 του συστήματος. Ξεχωρίζουν τρεις περιπτώσεις:

1. **ασθενής απόσβεση**, όταν $\gamma < \omega_0$,
2. **κρίσιμη απόσβεση**, όταν $\gamma = \omega_0$,
3. **ισχυρή** ή **υπερκρίσιμη απόσβεση**, όταν $\gamma > \omega_0$.

22.2.2.1. Ασθενής απόσβεση ($\gamma < \omega_0$)

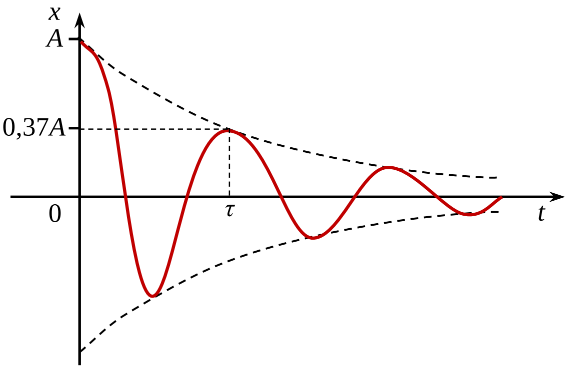
Στην περίπτωση αυτή (βλ. Π22.2.1) το σύστημα εκτελεί μια ταλάντωση της μορφής

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \tag{22.6}$$

το πλάτος της οποίας μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο. Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ω είναι μικρότερη από τη γωνιακή ιδιοσυχνότητα ω_0 κατά έναν παράγοντα $\sqrt{1-\gamma^2/\omega_0^2}$, έχουμε δηλαδή

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \tag{22.7}$$

Μια τέτοια ασθενής απόσβεση απεικονίζεται στο Σχ. 22.2. Ορίζουμε ως **σταθερά χρόνου** τ τον χρόνο που απαιτείται ώστε να φθάσει το πλάτος ταλάντωσης στο 1/e = 0,37 της αρχικής του τιμής. Από την Εξ. (22.6) βλέπουμε ότι η σταθερά χρόνου του συστήματος που μελετάμε είναι ίση με $1/\gamma$.



Σχήμα 22.2. Γραφική παράσταση μιας ταλάντωσης με ασθενή απόσβεση.

Ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος που περιλαμβάνει τα μεγέθη ω και γ και χρησιμοποιείται ευρύτατα είναι ο **συντελεστής ποιότητας** Q του συστήματος, που εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο φθίνει η ενέργεια του ταλαντωτή (βλ. Π22.2.1.1). Ορίζεται ως ο αριθμός των ακτινίων κατά τον οποίο πρέπει να ταλαντωθεί το σύστημα για να μειωθεί η ενέργειά του κατά έναν παράγοντα e από την αρχική της τιμή. Επειδή η ενέργεια του ταλαντωτή είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους, στο διάστημα αυτό το πλάτος των ταλαντώσεων μειώνεται κατά $e^{1/2}$. Συνεπώς,

$$Q = 2\pi N \tag{22.8}$$

όπου N είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων κατά τον οποίο το πλάτος μειώνεται στο 60% ($1/e^{1/2} \sim 0{,}6$) της αρχικής του τιμής.

Επιπλέον, το Q μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

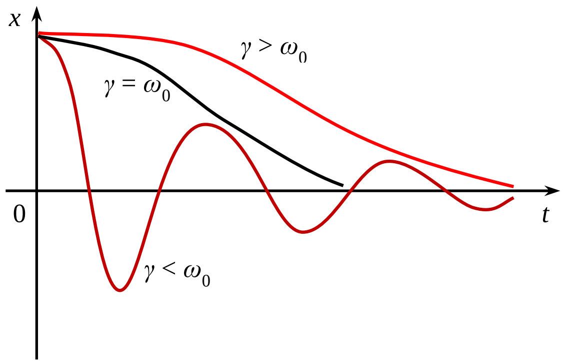
$$Q = \frac{\omega}{2\gamma} \tag{22.9}$$

οπότε, από τις Εξ. (22.7) και (22.9), βρίσκουμε ότι

$$\omega_0 = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{και} \qquad f_0 = f\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \tag{22.10}$$

22.2.2.2. Κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = \omega_0$)

Από τη μαθηματική ανάλυση αυτής της περίπτωσης (βλ. Π22.2.2) προκύπτει ότι, σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης, το σώμα τείνει προς τη θέση ισορροπίας *ασυμπτωτικά*, χωρίς ταλάντωση. Στο Σχ. 22.3 δίνεται η γραφική παράσταση μιας ταλάντωσης με κρίσιμη απόσβεση.



Σχήμα 22.3. Γραφική παράσταση μιας ταλάντωσης με ασθενή απόσβεση ($\gamma < \omega_0$), με κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = \omega_0$) και με ισχυρή απόσβεση ($\gamma > \omega_0$).

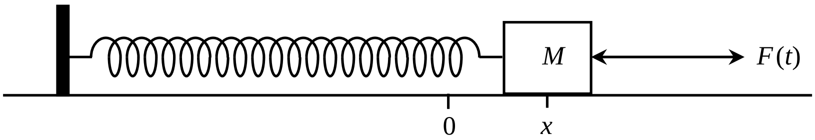
22.2.2.3. Ισχυρή (υπερκρίσιμη) απόσβεση ($\gamma > \omega_0$)

Από τη μαθηματική ανάλυση του προβλήματος (βλ. Π22.2.3) προκύπτει ότι η απομάκρυνση x δίνεται από το άθροισμα δύο ταλαντώσεων που φθίνουν συναρτήσει του χρόνου και το σώμα θα τείνει προς τη θέση ισορροπίας ασυμπτωτικά.

Αν συγκρίνει κανείς τους χρόνους επιστροφής του σώματος στη θέση ισορροπίας στις περιπτώσεις $\gamma = \omega_0$ και $\gamma > \omega_0$, διαπιστώνει ότι ο χρόνος αυτός είναι ελάχιστος σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης (βλ. Σχ. 22.3).

22.2.3. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση – Συντονισμός

Για να διατηρηθεί το πλάτος των ταλαντώσεων σταθερό με τον χρόνο, το σύστημα θα πρέπει να τροφοδοτείται περιοδικά με ενέργεια. Στα μηχανικά συστήματα αυτό επιτυγχάνεται με την άσκηση μιας περιοδικής δύναμης πάνω στο σώμα (Σχ. 22.4), συνήθως ημιτονικής μορφής, αν και αυτό δεν είναι απαραίτητο. Οι ταλαντώσεις που διεγείρονται στο σύστημα είναι τώρα **εξαναγκασμένες**. Ύστερα από ένα μεταβατικό στάδιο, η διάρκεια του οποίου εξαρτάται από τις σταθερές του προβλήματος, οι ταλαντώσεις αυτές φθάνουν σε μια μόνιμη κατάσταση.



Σχήμα 22.4. Όταν στον αρμονικό ταλαντωτή του Σχ. 22.1 επιδρά μια εξωτερική περιοδική δύναμη $F(t)$, το σύστημα θα εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

Έστω ότι η εφαρμοζόμενη περιοδική δύναμη έχει τη μορφή:

$$F = F_0 \cos(\omega t) \tag{22.11}$$

Από την αναλυτική μαθηματική επεξεργασία του προβλήματος (βλ. Π22.3) προκύπτει ότι, **στη μόνιμη κατάσταση**, η γενική λύση είναι περιοδική και έχει τη μορφή

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{22.12}$$

όπου το πλάτος της ταλάντωσης A δίνεται από τη σχέση

$$A = \frac{F_0/M}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \tag{22.13}$$

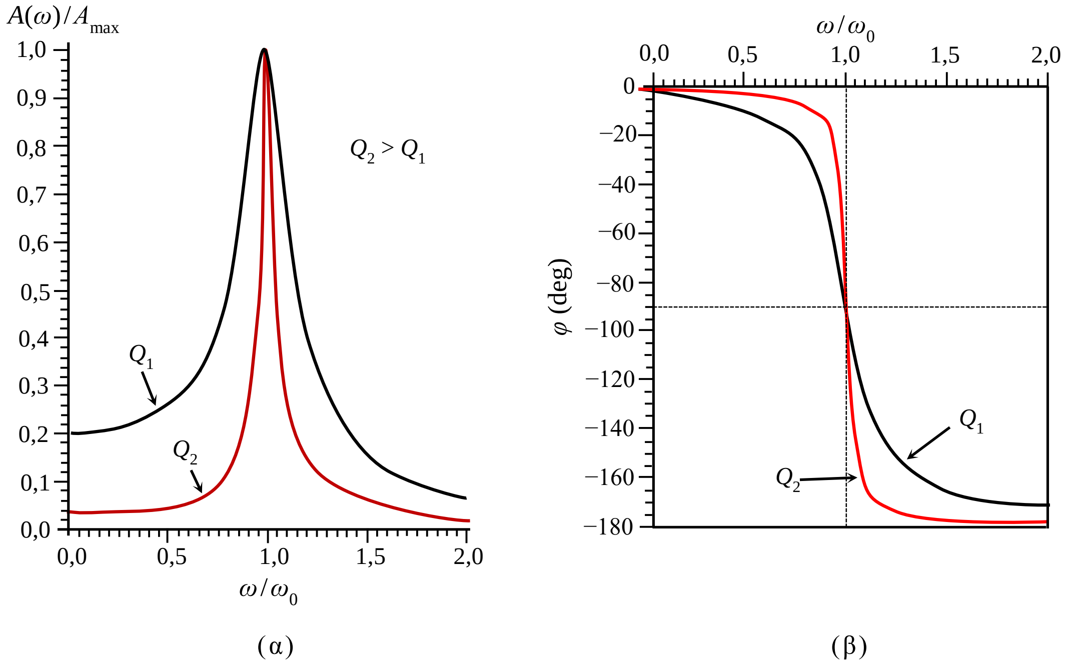
και η διαφορά φάσης φ μεταξύ της διεγείρουσας δύναμης και της μετατόπισης δίνεται από τη σχέση

$$\tan\varphi = \frac{2\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{22.14}$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο όταν $\omega \approx \omega_0$, δηλαδή όταν η συχνότητα της διέγερσης είναι περίπου ίση με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του συστήματος Η συχνότητα αυτή ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού** και συμβολίζεται με το ω_σ. Εξάλλου, από την Εξ. (22.12) προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή $\varphi = 90°$, με άλλα λόγια η απομάκρυνση της μάζας από τη θέση ισορροπίας της βρίσκεται σε διαφορά φάσης 90° με τη διεγείρουσα δύναμη.

Στο Σχ. 22.5 δίνονται οι κανονικοποιημένες καμπύλες του πλάτους της ταλάντωσης και της φάσης ως συνάρτηση της συχνότητας, για δύο ταλαντωτές που έχουν την ίδια ιδιοσυχνότητα ω_0 αλλά διαφορετικό συντελεστή ποιότητας Q. Επισημαίνονται μερικές ιδιότητες των καμπυλών αυτών:

- Οι καμπύλες συντονισμού δεν είναι συμμετρικές.
- Η κορυφή της καμπύλης με μεγαλύτερο Q βρίσκεται λίγο δεξιότερα και πιο κοντά στο σημείο $\omega/\omega_0 = 1$.
- Στον συντονισμό το σώμα ταλαντώνεται πάντα με καθυστέρηση 90°, για οποιοδήποτε Q.
- Όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής ποιότητας Q, δηλαδή όσο μικρότερες απώλειες έχει το σύστημα, τόσο οξύτερη είναι η καμπύλη συντονισμού. Αυτό άλλωστε δικαιολογεί και την ονομασία του Q, γιατί μια οξεία καμπύλη συντονισμού υποδεικνύει ότι το σύστημα κάνει επιλογή στενής περιοχής συχνοτήτων και είναι επομένως καλής ποιότητας (βλ και Άσκηση 21, Σχ. 21.3).



Σχήμα 22.5. Κανονικοποιημένες καμπύλες (α) του πλάτους A και (β) της φάσης φ της ταλάντωσης ως συνάρτηση της συχνότητας διέγερσης ω, για δύο ταλαντωτές που έχουν την ίδια ιδιοσυχνότητα, ω_0, αλλά διαφορετικό συντελεστή ποιότητας Q.

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι το Q δίνεται από τη σχέση

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{22.15}$$

όπου Δf είναι το **εύρος ζώνης συχνοτήτων**, το οποίο ορίζεται ως $\Delta f = f_1 - f_2$, με f_1 και f_2 τις συχνότητες δεξιά και αριστερά της συχνότητας συντονισμού που αντιστοιχούν σε τιμές του πλάτους ταλάντωσης ίσες με το $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ της μέγιστης τιμής του.

Μπορεί ακόμη να δειχθεί ότι, στον συντονισμό, το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης $A_{\max}$ συνδέεται με το Q και με το πλάτος της ασκούμενης δύναμης F_0 με τη σχέση

$$A_{\max} = Q\,\frac{F_0}{M\omega_0^2} = Q\,\frac{F_0}{k} \tag{22.16}$$

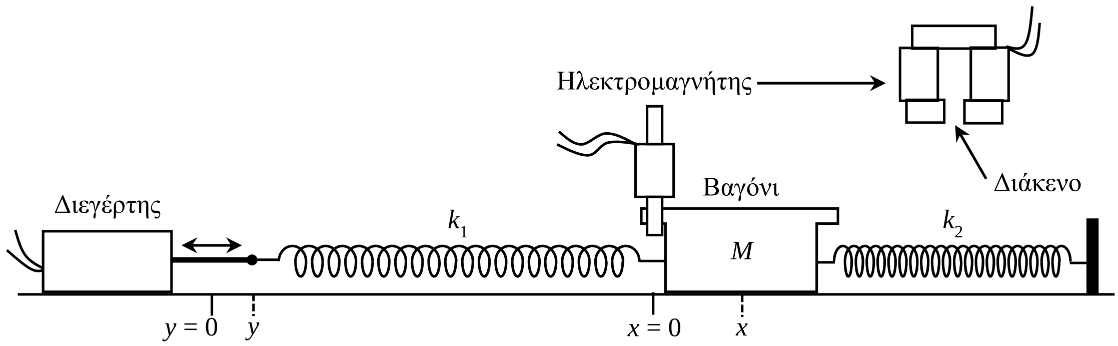
όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου.

Τέλος, είναι χρήσιμη και η σχέση που περιλαμβάνει τα μεγέθη ω_σ, ω_0 και Q:

$$\omega_\sigma = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad \text{και} \qquad f_\sigma = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \tag{22.17}$$

22.3 Μέθοδος

Για τη διεξαγωγή της άσκησης χρησιμοποιείται μια πειραματική διάταξη που αποτελείται από δύο όμοια ελατήρια και ένα βαγόνι, το οποίο μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε αεροτροχιά, πρακτικά χωρίς τριβές (Σχ. 22.6). Οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις προκαλούνται από έναν διεγέρτη, ο οποίος τροφοδοτείται από μια γεννήτρια. Το βαγόνι μπορεί να κινηθεί μέσα στο διάκενο του πυρήνα ενός ηλεκτρομαγνήτη, όπου μπορεί να δημιουργηθεί ισχυρό μαγνητικό πεδίο, το οποίο προκαλεί τις απώλειες λόγω τριβής του συστήματος.



Σχήμα 22.6. Η πειραματική διάταξη για μελέτη των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με τριβή.

Στα πειράματα που εκτελούνται στην εργασία αυτή, η εξωτερική δύναμη ασκείται στο σώμα με την αρμονική μεταβολή του σημείου στήριξης του αριστερού ελατηρίου (Σχ. 22.6). Με την κίνηση του άκρου του ελατηρίου μεταφέρεται πάνω στο σώμα μια εναλλασσόμενη δύναμη, η οποία επιδρά στο σύστημα όπως και στο θεωρητικό μοντέλο. Συνεπώς όλο το μαθηματικό υπόβαθρο και τα συμπεράσματα που αναπτύξαμε μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση όπου το σημείο στήριξης του ενός από τα δύο ελατήρια ταλαντώνεται αρμονικά (βλ. Π22.4).

Επίσης, στη διάταξή μας τα ελατήρια είναι δύο και όχι ένα, όπως στο θεωρητικό μοντέλο, είναι ακριβώς όμοια ($k_1 = k_2 = k/2$) και συνδεδεμένα σε σειρά. Συνεπώς, το πλάτος F_0 της εναλλασσόμενης δύναμης που ασκείται στο σώμα είναι

$$F_0 = k_1\, y_0 = \frac{k}{2}\, y_0 \tag{22.18}$$

Η αντικατάσταση της Εξ. (22.16) στην Εξ. (22.14) δίνει για το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης στον συντονισμό:

$$A_{\max} = Q\, \frac{y_0}{2} \tag{22.19}$$

22.3.1. Μέτρηση του συντελεστή ποιότητας και της ιδιοσυχνότητας του συστήματος

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή ποιότητας Q, αρκεί να μετρήσουμε τον αριθμό N των ταλαντώσεων που απαιτούνται για να μειωθεί το πλάτος της ταλάντωσης κατά έναν παράγοντα $e^{1/2}$ της αρχικής του τιμής και να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (22.8).

Για τη μέτρηση της ιδιοσυχνότητας, ω_0 ή f_0, του συστήματος, πρέπει να μετρήσουμε τη συχνότητα, ω ή f, των ελεύθερων (μη διεγειρόμενων και χωρίς πρόσθετη εξωτερική απόσβεση) ταλαντώσεών του, μετρώντας την περίοδο ταλάντωσής του με ένα χρονόμετρο, και να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (22.10).

22.3.2. Ρύθμιση του συντελεστή ποιότητας Q

Έστω ότι θέλουμε να ρυθμίσουμε το Q σε μια τιμή ίση με 40. Σύμφωνα με την Εξ. (22.19), στον συντονισμό το πλάτος ταλάντωσης του βαγονιού είναι $Q/2$ φορές μεγαλύτερο από εκείνο του διεγέρτη. Για να ρυθμίσουμε λοιπόν το Q, διεγείρουμε στο σύστημα μια ταλάντωση στη συχνότητα συντονισμού ω_σ, ρυθμίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του διεγέρτη y_0, π.χ. στην τιμή 1 mm, και ρυθμίζουμε το ρεύμα των πηνίων του ηλεκτρομαγνήτη έως ότου το πλάτος της ταλάντωσης του βαγονιού $A_{\max}$ γίνει $Q/2 = 20$ φορές την τιμή του y_0, στη συγκεκριμένη περίπτωση 20 mm. Οπότε $Q = 2 \times A_{\max}/y_0 = 2 \times 20 = 40$.

22.3.3. Καταγραφή της καμπύλης συντονισμού του συστήματος για ορισμένη τιμή του Q

Αφού πρώτα γίνει ρύθμιση της επιθυμητής τιμής του Q, στη συνέχεια γίνεται μέτρηση των πλατών ταλάντωσης του βαγονιού A, συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης ω, γύρω από την τιμή της συχνότητας συντονισμού ω_σ, την οποία προσδιορίζουμε με τη βοήθεια της Εξ, (22.17). (Στην περιοχή 0-10 Hz το πλάτος ταλάντωσης του διεγέρτη είναι σταθερό και δεν είναι απαραίτητος ο έλεγχός του.)

22.3.4. Μέτρηση της φάσης ταλάντωσης του βαγονιού ως προς αυτήν του διεγέρτη (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)

Όπως φαίνεται στο Σχ. 22.5.β, όταν η συχνότητα διέγερσης ω διαφέρει από εκείνη του συντονισμού ω_σ, υπάρχει μια διαφορά φάσης φ μεταξύ της απομάκρυνσης της μάζας από τη θέση ισορροπίας της και της διεγείρουσας δύναμης F (Εξ. 22.14). Με άλλα λόγια, οι ταλαντώσεις του βαγονιού υστερούν σε σχέση με εκείνες του διεγέρτη. Η υστέρηση αυτή μπορεί να μετρηθεί πειραματικά με τη μέτρηση της χρονικής διαφοράς Δt μεταξύ της διέλευσης του διεγέρτη και του βαγονιού από τα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας τους. Από την τιμή του Δt μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης φ σε μοίρες, σύμφωνα με τη σχέση

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T}\, 360 \tag{22.20}$$

όπου $T = 2\pi/\omega$ είναι η περίοδος των ταλαντώσεων. Όταν η χρονική υστέρηση είναι $T/4$, δηλαδή στον συντονισμό, τα σώματα κινούνται με διαφορά φάσης 90°. Η χρονική διαφορά Δt μετριέται με τη βοήθεια δύο φωτοπυλών, όπως θα δούμε παρακάτω.

22.3.5. Μέτρηση της ταχύτητας του βαγονιού σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)

Ο προσδιορισμός της ταχύτητας του βαγονιού γίνεται με τη μέτρηση του χρόνου που απαιτείται για να περάσει μπροστά από μια φωτεινή δέσμη μια μικρή «σημαία», γνωστού πλάτους, που είναι συνδεδεμένη πάνω στο βαγόνι. Η μέτρηση αυτής της χρονικής διάρκειας γίνεται με τη βοήθεια μιας φωτοπύλης, όπως θα δούμε παρακάτω.

22.4. Πειραματική διάταξη

Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο και όπως απεικονίζεται στο Σχ. 22.6, η πειραματική διάταξη αποτελείται από ένα βαγόνι από αλουμίνιο, που μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε μια αεροτροχιά, πρακτικά χωρίς τριβές.

Το βαγόνι συνδέεται με τη βοήθεια δύο όμοιων ελατηρίων αφενός με ένα σταθερό τοίχωμα, αφετέρου με το άκρο ενός διεγέρτη, ο οποίος διεγείρει τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις στο σύστημα. Ο διεγέρτης αυτός τροφοδοτείται από μια γεννήτρια, με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να ρυθμίσουμε το πλάτος και τη συχνότητα των ταλαντώσεών του στις επιθυμητές τιμές. Η τιμή της επιλεγμένης συχνότητας αναγράφεται σε ψηφιακή μορφή στην πρόσοψη της γεννήτριας.

Η διάταξη περιλαμβάνει ακόμη έναν ηλεκτρομαγνήτη, ο οποίος φέρει ένα διάκενο στον πυρήνα του. Το βαγόνι κινείται μέσα στο διάκενο του πυρήνα, όπου δημιουργείται ισχυρό μαγνητικό πεδίο όταν ο ηλεκτρομαγνήτης διαρρέεται από ρεύμα. Το μαγνητικό αυτό πεδίο προκαλεί τις απώλειες λόγω τριβής του συστήματος και το μέγεθος της τριβής ελέγχεται με τη μεταβολή της έντασης του μαγνητικού πεδίου μέσα στο διάκενο. Το ρεύμα, από το οποίο εξαρτάται η ένταση του μαγνητικού πεδίου, ρυθμίζεται με τη μεταβολή της τάσης του τροφοδοτικού που τροφοδοτεί τα πηνία του ηλεκτρομαγνήτη. Δύο μετρητές, ένας της τάσης τροφοδότησης του ηλεκτρομαγνήτη και ένας του ρεύματος που διαρρέει τα πηνία, βρίσκονται στην πρόσοψη του τροφοδοτικού και επιτρέπουν τη μέτρηση των μεγεθών αυτών.

Οι μετρήσεις της ταχύτητας και της φάσης του βαγονιού γίνονται με τη μέτρηση διάφορων χρονικών διαστημάτων με τη βοήθεια δύο σημαιών και δύο φωτοπυλών

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Διευκρινίζεται ότι οι μετρήσεις αυτές γίνονται μόνο εφόσον διατίθεται αρκετός χρόνος, π.χ. στην περίπτωση 3ωρης ή 4ωρης εργαστηριακής εξάσκησης. Σε αντίθετη περίπτωση, οι φωτοπύλες δεν χρησιμοποιούνται, οπότε τα Σχ. 22.7 και 22.8, καθώς και το κείμενο που ακολουθεί εδώ, δεν λαμβάνονται υπόψη.

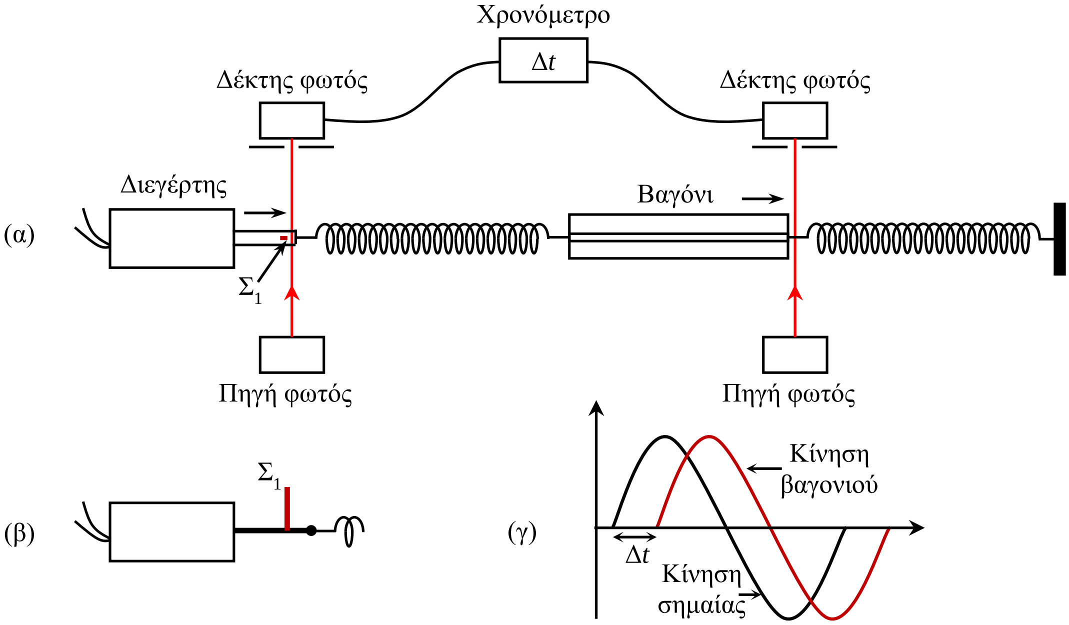
Υπάρχουν δύο σημαίες στερεωμένες πάνω στον διεγέρτη και το βαγόνι Η μία σημαία, η λεπτή (0,35 mm), Σ_1, είναι κολλημένη πάνω στον πίρο του διεγέρτη και η άλλη, η πλατιά (2 mm), Σ_2, πάνω στην προέκταση του βαγονιού.

ΠΡΟΣΟΧΗ: *Οι σημαίες αυτές είναι πολύ εύθραυστες και εύκολα μπορούν να καταστραφούν με το παραμικρό άγγιγμα. Συνεπώς, δεν πρέπει να τις αγγίζουμε.*

Η κάθε φωτοπύλη αποτελείται από μια πηγή υπέρυθρου φωτός και έναν δέκτη. Τη φωτοπύλη που περιλαμβάνει ένα χρονόμετρο θα την αποκαλούμε *μητρική*, ενώ τη δεύτερη *θυγατρική*. Για μια λεπτομερέστερη περιγραφή των φωτοπυλών και της λειτουργίας τους, καθώς επίσης και της αεροτροχιάς, παραπέμπουμε στην Άσκηση 7 (*Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι).

Οι θέσεις των φωτοπυλών ρυθμίζονται όταν ο διεγέρτης δεν λειτουργεί και το βαγόνι είναι ακίνητο. Για τον υπολογισμό της *φάσης ταλάντωσης* του βαγονιού ως προς αυτήν του διεγέρτη χρησιμοποιούνται *δύο φωτοπύλες*, οι οποίες πρέπει να βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας της σημαίας του διεγέρτη, Σ_1, (λεπτό σύρμα κολλημένο πάνω στον διεγέρτη) και του βαγονιού. Η φωτεινή δέσμη της μητρικής φωτοπύλης πρέπει να βρίσκεται απέναντι από την Σ_1, ενώ της θυγατρικής απέναντι από το άκρο του βαγονιού (Σχ. 22.7). Οι θέσεις των φωτοπυλών είναι ρυθμισμένες σωστά όταν η σημαία και το βαγόνι βρίσκονται πολύ κοντά στις δέσμες αλλά δεν τις φράζουν, κάτι που διαπιστώνεται από το κόκκινο λαμπάκι που βρίσκεται στο πάνω μέρος κάθε φωτοπύλης.

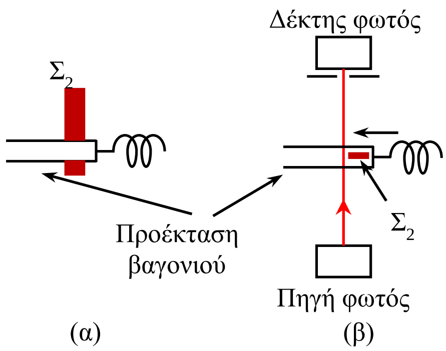
Η μέτρηση της χρονικής καθυστέρησης Δt γίνεται με τον επιλογέα λειτουργιών του χρονομέτρου στη θέση PULSE. Σε αυτή τη λειτουργία, το χρονόμετρο μετράει το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της διακοπής της δέσμης της μητρικής φωτοπύλης (διέλευση σημαίας Σ_1) μέχρι τη διακοπή της δέσμης της θυγατρικής φωτοπύλης (διέλευση άκρου βαγονιού).



Σχήμα 22.7. Τοποθέτηση των φωτοπυλών για τη μέτρηση της φάσης ταλάντωσης του βαγονιού ως προς αυτήν του διεγέρτη. (α) Κάτοψη της διάταξης, (β) Πλάγια όψη του διεγέρτη και (γ) Χρονοδιάγραμμα της ταλάντωσης σημαίας και βαγονιού.

Ο προσδιορισμός της *ταχύτητας του βαγονιού* γίνεται με *μία μόνο φωτοπύλη*. Η φωτεινή δέσμη της φωτοπύλης θα πρέπει να βρίσκεται απέναντι από τη σημαία Σ_2, που είναι κολλημένη πάνω στη προέκταση του βαγονιού (βλ. Σχ. 22.8), και το χρονόμετρο στη θέση GATE. Σε αυτή τη λειτουργία, το χρονόμετρο μετράει το χρονικό διάστημα κατά το οποίο διακόπτεται η δέσμη όταν ένα αντικείμενο που περνάει μπροστά της. Αν $\Delta\ell$ είναι το πλάτος της σημαίας Σ_2 και Δt ο χρόνος διακοπής της δέσμης, τότε η μέση ταχύτητα του βαγονιού είναι προφανώς

$$\upsilon = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \tag{22.21}$$



Σχήμα 22.8. Τοποθέτηση της φωτοπύλης για τη μέτρηση της ταχύτητας του βαγονιού. (α) Πλάγια όψη και (β) Κάτοψη.

Βιβλιογραφία

1. H. J. Pain, *Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων* (Αθήνα, 1991), 2.4-2.6.
2. C. Kittel et al., *Μηχανική (Μαθήματα Φυσικής Berkeley,* Τόμος 1) (Αθήνα, ^{2}1998), Κεφ. 7.
3. F. S. Crawford, *Κυματική (Μαθήματα Φυσικής Berkeley*, Τόμος 3) (Αθήνα, 1979), 3.2.
4. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, ^{4}2022), 14.7, 14.8
5. R. A. Serway, J. W. Jewett, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς: Μηχανική – Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα – Θερμοδυναμική – Σχετικότητα* (Αθήνα, 2012), Τ1.6, Τ1.7.
6. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής, Τόμος ΙΙ (Αθήνα, 2011),

22.5. Εκτέλεση

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(α) Στην άσκηση αυτή μελετάμε μόνο τη **μόνιμη ταλάντωση** του συστήματος, δηλαδή μετά το τέλος της μεταβατικής περιόδου. Για τον λόγο αυτό, κάθε φορά που γίνεται αλλαγή στην κατάσταση της διεγείρουσας δύναμης, θα πρέπει να περιμένουμε να φτάσει το σώμα στη νέα μόνιμη κατάστασή του, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα που μπορεί να είναι μικρό ή μεγάλο, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή ποιότητας Q. Για λόγους προστασίας, τα ελατήρια είναι χαλαρωμένα στο φυσικό τους μήκος όταν η αεροτροχιά δεν λειτουργεί.

(β) Επαναλαμβάνεται ότι οι μετρήσεις που αντιστοιχούν στα εδάφια. 22.5.4 και 22.5.5 γίνονται μόνο εφόσον διατίθεται αρκετός χρόνος.

22.5.1. Μέτρηση της συχνότητας των ελεύθερων ταλαντώσεων

1. Θέστε σε λειτουργία την αεροτροχιά και επιλέξτε μια ικανοποιητική παροχή αέρα με τον επιλογέα στροφών.

2. Με τη βοήθεια του επιβλέποντα, οριζοντιώστε προσεκτικά την αεροτροχιά με τους κοχλίες του διπλού υποστηρίγματος. Ένα βαγόνι πάνω στην αεροτροχιά μπορεί να κάνει μικρές μετακινήσεις, πότε προς τη μία και πότε προς την άλλη κατεύθυνση, δεν πρέπει όμως να επιταχύνεται σταθερά προς μια κατεύθυνση. Επίσης, ένα βαγόνι δεν πρέπει να κάθεται ασύμμετρα ως προς τις δύο πλευρές της αεροτροχιάς (χρησιμοποιήστε την αεροστάθμη).

3. Τεντώστε τα ελατήρια του βαγονιού, μετατοπίζοντας το στήριγμα των ελατηρίων έως ότου το δεξί (αριστερό) άκρο του βαγονιού να βρίσκεται στο σημείο 40 (160) cm.

4. Μετατοπίστε τον ηλεκτρομαγνήτη, έτσι ώστε το βαγόνι να βρίσκεται περίπου στο κέντρο του πυρήνα του. Μετακινήστε το βαγόνι κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και ελευθερώστε το, για να εκτελέσει ελεύθερες ταλαντώσεις. Μετρήστε τον χρόνο 50 ταλαντώσεων, T_{50}, εκτιμώντας και το σφάλμα της μέτρησης, δT_{50}. Επαναλάβετε τη μέτρηση αυτή άλλες δύο φορές.

Από τις τιμές αυτές και με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης $f = 1/T$, υπολογίστε την τιμή της συχνότητας f του συστήματος, λαμβάνοντας υπόψη ότι $T = T_{50}/50$

22.5.2. Μέτρηση του συντελεστή ποιότητας του συστήματος και προσδιορισμός της ιδιοσυχνότητας των ελεύθερων ταλαντώσεων όταν οι απώλειες είναι πολύ μικρές

1. Μετατοπίστε και πάλι το βαγόνι κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας, ελευθερώστε το, και μετρήστε τον αριθμό N των ταλαντώσεων κατά τη διάρκεια των οποίων το αρχικό τους πλάτος μειώνεται κατά έναν παράγοντα $e^{1/2}$ (δηλαδή το πλάτος γίνεται ίσο με το 60% της αρχικής του τιμής). Από την Εξ. (22.8) υπολογίστε τον συντελεστή ποιότητας Q του συστήματος και εκτιμήστε το σφάλμα του, δQ.

2. Με τη βοήθεια της Εξ. (22.10), προσδιορίστε την τιμή της ιδιοσυχνότητας του συστήματος, $\omega_0 \pm \delta\omega_0$ και $f_0 \pm \delta f_0$.

22.5.3. Μέτρηση της σταθεράς χρόνου της απόσβεσης των ελεύθερων ταλαντώσεων όταν οι απώλειες του συστήματος είναι πολύ μικρές

1. Μετατοπίστε και πάλι το βαγόνι κατά 5 cm και μετρήστε τη σταθερά χρόνου, $\tau \pm \delta\tau$, της απόσβεσης των ταλαντώσεων του συστήματος, δηλαδή τον χρόνο που απαιτείται ώστε να μειωθεί το πλάτος των ταλαντώσεων του βαγονιού στο $1/e = 0{,}37$ της αρχικής του τιμής (βλ. Σχ. 22.2).

Καταγράψτε επίσης την τιμή της μάζας του βαγονιού, $M \pm \delta M$, η οποία αναγράφεται επάνω του.

22.5.4. Μέτρηση της καμπύλης συντονισμού του συστήματος για δεδομένη τιμή του Q

ΠΡΟΣΟΧΗ: *Στο πείραμα αυτό η διάρκεια της μεταβατικής περιόδου είναι περίπου 30 s. Συνεπώς, μετά από κάθε αλλαγή της συχνότητας, η καταγραφή των τιμών πρέπει να γίνεται μετά από παρέλευση 30 δευτερολέπτων.*

1. Θέστε σε λειτουργία τη γεννήτρια του διεγέρτη (ο διακόπτης λειτουργίας βρίσκεται στο πίσω μέρος του οργάνου). Αμέσως, ο διεγέρτης τίθεται σε ταλάντωση με συχνότητα 1000 Hz, η οποία είναι πολύ υψηλή. Για να μειωθεί η τιμή της, πατήστε δύο φορές το κουμπί RANGE (το κάτω), που βρίσκεται στην πρόσοψη της γεννήτριας. Η συχνότητα των ταλαντώσεων θα γίνει τώρα 10 Hz. Το κουμπί AMPLITUDE δεν το πειράζουμε. Το πλάτος ταλάντωσης του διεγέρτη, y_0, είναι ρυθμισμένο από τον υπεύθυνο της άσκησης και είναι $2{,}0 \pm 0{,}1$ mm.

2. Από την τιμή της f_0 που προσδιορίσατε στο 22.5.2.2 και για δεδομένη τιμή του Q, υπολογίστε, με τη βοήθεια της Εξ. (22.17), τη συχνότητα συντονισμού f_σ του συστήματος και εφαρμόστε την τιμή αυτή στη γεννήτρια του διεγέρτη.

3. Για να ρυθμίσετε τον συντελεστή ποιότητας Q σε μια τιμή, θέστε σε λειτουργία το τροφοδοτικό του ηλεκτρομαγνήτη και ρυθμίστε την τιμή τού ρεύματος έως ότου, στον συντονισμό, το πλάτος της ταλάντωσης του βαγονιού, A_{max}, να είναι $Q/2$ φορές μεγαλύτερο από εκείνο του διεγέρτη, y_0 [βλ. Εξ. (22.19)].

4. Μετρήστε το πλάτος A των ταλαντώσεων του βαγονιού και καταγράψτε το στην πρώτη σειρά του Πίνακα Ι και του Πίνακα ΙΙ.

5. Επαναλάβετε τις μετρήσεις αυτές για αρκετές συχνότητες μέσα στο διάστημα 0,6-1,4 Hz, ακολουθώντας μια διαδικασία σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο καταγράφεται ο κλάδος των χαμηλών συχνοτήτων $(f_\sigma \to 0{,}6\ \text{Hz})$, ενώ στο δεύτερο ο κλάδος των υψηλών συχνοτήτων

$(f_\sigma \rightarrow 1{,}2\ \text{Hz})$. Και στα δύο στάδια η πρώτη μέτρηση γίνεται στη συχνότητα συντονισμού f_σ και ακολουθούν τέσσερις μετρήσεις με βήμα 0,005 Hz, τέσσερις με βήμα 0,01 Hz και οι υπόλοιπες με βήμα 0,02 Hz, ή και μεγαλύτερο, κατά την κρίση σας. Με τον τρόπο αυτό συμπληρώνονται οι Πίνακες Ι και ΙΙ.

Πίνακας Ι

f (Hz)	*A* (cm)

Πίνακας ΙΙ

f (Hz)	*A* (cm)

22.5.5. Μέτρηση της καμπύλης φάσης του συστήματος για δεδομένη τιμή του Q (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)

ΠΡΟΣΟΧΗ: *Και στο πείραμα αυτό η διάρκεια της μεταβατικής περιόδου είναι περίπου 30 s, επομένως, μετά από κάθε αλλαγή της συχνότητας, η καταγραφή των τιμών πρέπει να γίνεται μετά από παρέλευση 30 δευτερολέπτων.*

1. Θέστε σε λειτουργία τις φωτοπύλες και εξοικειωθείτε με τη λειτουργία τους. Ο επιλογέας λειτουργιών πρέπει να βρίσκεται στη θέση PULSE και ο μοχλός της μνήμης (MEMORY) κάθετος, στη θέση ON. Το βαγόνι και η σημαία Σ_1, που βρίσκεται πάνω στον πίρο του διεγέρτη, πρέπει να βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους και να είναι ακίνητα. Ρυθμίστε τη θέση της μητρικής φωτοπύλης, έτσι ώστε το άκρο της σημαίας Σ_1 του διεγέρτη να διακόπτει την υπέρυθρη δέσμη όταν η σημαία βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της. Η διακοπή της δέσμης πρέπει να γίνεται από τη πλευρά της σημαίας που βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση από το βαγόνι. Όταν η δέσμη διακόπτεται, το κόκκινο λαμπάκι που βρίσκεται στο πάνω μέρος της φωτοπύλης ανάβει.

2. Με τον ίδιο τρόπο ρυθμίστε τη θέση της θυγατρικής φωτοπύλης. Η δέσμη της πρέπει να διακόπτεται από το βαγόνι και όχι από τη λεπτή σημαία, Σ_2, που βρίσκεται στην προέκταση του βαγονιού. Οι φωτοπύλες είναι ρυθμισμένες σωστά όταν το εμπρός άκρο της σημαίας Σ_1 και το εμπρός άκρο του βαγονιού διακόπτουν τις δέσμες στα σημεία ισορροπίας τους.

3. Καθώς ο διεγέρτης και το βαγόνι ταλαντώνονται, θα ενεργοποιήσουν το χρονόμετρο και θα εμφανιστεί στην οθόνη του μια τυχαία τιμή. Αγνοήστε την τιμή αυτή. Για να φέρετε το χρονόμετρο σε κατάσταση ετοιμότητας, πατήστε το κόκκινο κουμπί RESET και κρατήστε το πατημένο. Η ένδειξη του οργάνου θα μηδενιστεί. Ελευθερώστε το κουμπί αυτό τη στιγμή που η σημαία Σ_1 του διεγέρτη βρίσκεται περίπου στη θέση της μέγιστης απόκλισης από τη θέση ισορροπίας. Μόλις ελευθερώσετε το κουμπί, καθώς η σημαία και το βαγόνι είναι σε κίνηση, θα διακόψουν διαδοχικά τις φωτεινές δέσμες των φωτοπυλών τους όταν βρεθούν στα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας τους. Η πρώτη διακοπή θα ενεργοποιήσει το χρονόμετρο, ενώ η δεύτερη θα το απενεργοποιήσει. Η χρονική διαφορά Δt μεταξύ αυτών των δυο γεγονότων θα εμφανιστεί στην οθόνη του χρονομέτρου (βλ. Σχ. 22.7). Καταγράψτε το Δt στην πρώτη σειρά του Πίνακα ΙΙΙ και του Πίνακα IV.

4. Επαναλάβετε τις μετρήσεις αυτές για αρκετές συχνότητες μέσα στο διάστημα 0,6-1,4 Hz, ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία με εκείνη που ακολουθήσατε για τη μέτρηση της καμπύλης συντονισμού (22.5.4.5) και συμπληρώστε τις δύο πρώτες στήλες των Πινάκων ΙΙΙ και IV.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: *Στη λειτουργία PULSE, το σύστημα αδυνατεί να μετρήσει χρονικά διαστήματα που είναι μικρότερα από μία ορισμένη τιμή (~ 30 ms). Στις συχνότητες που ο χρόνος καθυστέρησης είναι μικρότερος από την τιμή αυτή το σύστημα αρχίζει να μετρά την περίοδο των ταλαντώσεων και όχι τη χρονική καθυστέρηση. Τέτοιες τιμές χρόνου πρέπει να αγνοηθούν.*

Πίνακας III

f (Hz)	Δt (s)	φ (deg)

Πίνακας IV

f (Hz)	Δt (s)	φ (deg)

5. Μετά το τέλος αυτών των μετρήσεων, θέστε εκτός λειτουργίας τη γεννήτρια του διεγέρτη.

22.5.6. Μέτρηση της ταχύτητας του βαγονιού ως συνάρτηση της θέσης σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)

1. Μετατοπίστε τον ηλεκτρομαγνήτη προς τη πλευρά του βαγονιού στην οποία βρίσκεται η προέκταση με τη σημαία. Το βαγόνι πρέπει να βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο και να εξέχει από αυτό μόνο κατά ~ 1 mm. Με τη ρύθμιση αυτή το βαγόνι μπορεί να κινείται στο εσωτερικό του μαγνητικού πεδίου σε μια διαδρομή 10 cm.

2. Θέστε τον επιλογέα λειτουργιών της φωτοπύλης στη θέση GATE. Ο μοχλός της μνήμης (MEMORY) πρέπει να είναι κάθετος, στη θέση ON, και η διακριτική ικανότητα του χρονομέτρου πρέπει να είναι 0,1 ms.

3. Υψώστε τη θυγατρική φωτοπύλη, έτσι ώστε η δέσμη της να διακόπτεται από τη σημαία Σ_2, που βρίσκεται στην προέκταση του βαγονιού. Το πλάτος της σημαίας είναι 2,00 ± 0,01 mm. Εδώ το χρονόμετρο μετρά τον χρόνο φραγής της υπέρυθρης δέσμης από τη σημαία Σ_2 του βαγονιού. (Επειδή για τις μετρήσεις αρκεί μία φωτοπύλη, για κάθε ενδεχόμενο, απομακρύνετε τη μητρική φωτοπύλη από την αρχική της θέση κατά 2-3 εκατοστά για να μην διακοπεί η δέσμη της από τη σημαία του διεγέρτη).

4. Για να επιτύχετε την κρίσιμη απόσβεση, εφαρμόστε στον ηλεκτρομαγνήτη ρεύμα 1 A. Μετατοπίστε το βαγόνι κατά 10 cm προς την πλευρά της σημαίας, ελευθερώστε το και παρακολουθήστε την κίνησή του. Όταν η απόσβεση είναι κρίσιμη ή υπερκρίσιμη, το βαγόνι επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ταλάντωση, ασυμπτωτικά, ενώ όταν η απόσβεση είναι μικρότερη από την κρίσιμη, τότε η επιστροφή του γίνεται με ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας. Στην τελευταία περίπτωση, θα πρέπει να αυξήσετε το ρεύμα που διαρρέει τα πηνία του ηλεκτρομαγνήτη και να επαναλάβετε το πείραμα με το βαγόνι έως ότου, με διαδοχικές προσεγγίσεις, επιτύχετε την κρίσιμη απόσβεση των ταλαντώσεων.

5. Στο πείραμα αυτό, το βαγόνι μετατοπίζεται *κάθε φορά* από τη θέση ισορροπίας του κατά 10 cm και αφήνεται να επιστρέψει. Για να μετρήσετε την ταχύτητα του βαγονιού σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο, που απέχει π.χ. 4 cm από τη θέση ισορροπίας, μετατοπίστε το βαγονάκι κατά 4 cm και ρυθμίστε τη θέση της θυγατρικής φωτοπύλης, έτσι ώστε στο σημείο αυτό η δέσμη της να αρχίσει να διακόπτεται από τη σημαία Σ_2. Η δέσμη πρέπει να διακόπτεται από την πλευρά της σημαίας που βρίσκεται σε μικρότερη απόσταση από το βαγόνι, επειδή η πλευρά αυτή της σημαίας θα συναντήσει πρώτη τη δέσμη καθώς η σημαία θα κινείται προς τη θέση ισορροπίας (βλ. Σχ. 22.8).

6. Μετατοπίστε το βαγόνι κατά 10 cm και αφήστε το να επιστρέψει. Στην οθόνη του χρονομέτρου θα εμφανιστεί το χρονικό διάστημα, Δt, διακοπής της δέσμης στη θέση $x = 4$ cm. Σημειώστε την τιμή. Επαναλάβετε τη διαδικασία αυτή για διάφορα σημεία που βρίσκονται στο διάστημα 0-10 cm και απέχουν μεταξύ τους 0,5 cm, και καταγράψτε τα αποτελέσματά σας στον Πίνακα V.

Πίνακας V

x (cm)	Δt (s)	$\upsilon = \Delta\ell/\Delta t$ (cm/s)
0,5		
1,0		
1,5		
…		
9,0		
9,5		

7. Σβήστε όλα τα όργανα και χαλαρώστε τα ελατήρια.

ΠΡΟΣΟΧΗ: *Μην κλείσετε τον ηλεκτρομαγνήτη εάν προηγουμένως δεν έχετε μηδενίσει το ρεύμα που τον διαρρέει. Ο ηλεκτρομαγνήτης θερμαίνεται έντονα όταν τροφοδοτείται με ρεύματα της τάξης των 2-3 A και μπορεί να καεί αν ξεχάσετε να τον κλείσετε.*

22.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

22.6.1. Προσδιορισμός της σταθεράς των ελατηρίων, του συντελεστή εξασθένησης των ελεύθερων ταλαντώσεων και του συντελεστή ποιότητας του συστήματος, όταν οι απώλειες λόγω τριβής είναι πολύ μικρές

1. Από την τιμή της συχνότητας f_0 των ελευθέρων ταλαντώσεων που προσδιορίσατε στο 22.5.1 και από τη γνωστή τιμή της μάζας M, υπολογίστε με τη βοήθεια της Εξ. (22.3) τη σταθερά k των ελατηρίων του συστήματος. Υπολογίστε και τα σφάλματα αυτών των τιμών.

2. Δεδομένου ότι αντί για ένα, έχετε δύο ίδια ελατήρια σε σειρά, δηλαδή $k_1 = k_2 = k/2$, υπολογίστε τη σταθερά του κάθε ελατηρίου, $k_1 \pm \delta k_1$ και $k_2 \pm \delta k_2$.

3. Από την τιμή της σταθεράς χρόνου τ που μετρήσατε στο 22.5.3 και τη σχέση $\tau = 1/\gamma$, υπολογίστε την τιμή του συντελεστή εξασθένησης, $\gamma \pm \delta\gamma$.

4. Από την τιμή του γ και με βάση την Εξ. (22.9), υπολογίστε τον συντελεστή ποιότητας, $Q \pm \delta Q$, των ελεύθερων ταλαντώσεων με μικρή απόσβεση.

5. Συγκρίνετε την τιμή του Q που υπολογίσατε εδώ με εκείνη που προσδιορίσατε στο βήμα 22.5.2.1. Συμφωνούν οι δύο τιμές μεταξύ τους;

22.6.2. Χάραξη της καμπύλης συντονισμού του συστήματος για δεδομένη τιμή του Q

1. Με βάση τους Πίνακες I και II, σχεδιάστε σε γραφική παράσταση την πειραματική καμπύλη συντονισμού, δηλαδή το πλάτος ταλάντωσης A ως συνάρτηση της συχνότητας f για τη δεδομένη τιμή του Q. Συγκρίνετε την πειραματική καμπύλη με την αντίστοιχη θεωρητική που εικονίζεται στο Σχ. 22.5.α.

2. Συμπίπτει η τιμή της συχνότητας στην οποία το πλάτος παίρνει τη μέγιστη τιμή του με την τιμή f_σ που είχατε υπολογίσει; Πόσο (επί τοις εκατό) διαφέρει η f_σ από την f_0;

3. Από την πειραματική καμπύλη συντονισμού και την Εξ. (22.15) μπορείτε να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή ποιότητας, $Q_{\pi\epsilon\iota\rho} \pm \delta Q_{\pi\epsilon\iota\rho}$. Συμφωνεί η τιμή αυτή με εκείνη που επιβάλατε εσείς;

22.6.3 Χάραξη της καμπύλης φάσης του συστήματος για δεδομένη τιμή του Q (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)

1. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (22.20), συμπληρώστε τους Πίνακες III και IV.

2. Με βάση τους Πίνακες III και IV, σχεδιάστε σε γραφική παράσταση την πειραματική καμπύλη φάσης, δηλαδή τη διαφορά φάσης φ ως συνάρτηση της συχνότητας f για τη δεδομένη τιμή του Q.

3. Συγκρίνετε την πειραματική καμπύλη φάσης με την αντίστοιχη θεωρητική που εικονίζονται στο Σχ. 22.5.β.

22.6.4. Χάραξη της ταχύτητας του βαγονιού ως συνάρτηση της θέσης σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης (ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ)

1. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (22.21) ($\Delta\ell$ = 2 mm), συμπληρώστε τον Πίνακα V.

2. Χαράξτε τη γραφική παράσταση $\upsilon = f(x)$ και συγκρίνετε τη μορφή της με τη θεωρητική που δίνεται στο Σχ. Π22.2.

3. Ποια είναι η τιμή του γ στις συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης; (Βλ.. 22.2.2.)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Π22)

Π22.1. Ελεύθερες αρμονικές ταλαντώσεις χωρίς απώλεια ενέργειας

Έστω ότι η μάζα του σώματος είναι M, η σταθερά του ελατηρίου k και η θέση ισορροπίας του σώματος βρίσκεται στο σημείο $x = 0$ (Σχ. 22.1). Αν μετακινήσει κανείς το σώμα από τη θέση ισορροπίας του (κατά μία απόσταση μικρή σε σχέση με το μήκος του ελατηρίου) και στη συνέχεια το αφήσει ελεύθερο, το σώμα θα αρχίσει να εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας. Η περίπτωση αυτή είναι η πιο απλή και η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη κίνηση της μάζας είναι:

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\,kx \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{M}x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = 0 \tag{Π22.1}$$

όπου

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \tag{Π22.2}$$

Η λύση της Εξ. (22.1) είναι:

$$x = x_0\sin(\omega_\mathrm{o}t + \varphi) \tag{Π22.3}$$

όπου φ και x_0 είναι η αρχική φάση και μετατόπιση, αντίστοιχα, και ω_o η γωνιακή ή κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων που εκτελεί η μάζα.

Π22.2. Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση

Σε ένα σύστημα με απώλειες οι ταλαντώσεις σιγά-σιγά σβήνουν. Μία συνηθισμένη περίπτωση είναι αυτή στην οποία η δύναμη τριβής, που προκαλεί τις απώλειες, είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος. Τέτοια είναι η περίπτωση όπου το σώμα κινείται μέσα σε κάποιο υγρό ή αέριο, οπότε η κίνηση του σώματος γίνεται με τριβή τύπου Stokes, η τιμή της οποίας είναι ανάλογη της ταχύτητάς του. Όμοιο χαρακτήρα έχει και η κίνηση κάποιου αγώγιμου σώματος, όταν αυτό διασχίζει της γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Στην περίπτωση αυτή, τα ρεύματα Foucault που επάγονται στο σώμα δημιουργούν μαγνητικό πεδίο που επιβραδύνει την κίνηση. Έτσι, η μαγνητική αυτή αλληλεπίδραση συμβάλλει στην εμφάνιση μιας τριβής, η τιμή της οποίας είναι ανάλογη των επαγόμενων ρευμάτων, επομένως της ταχύτητας του σώματος.

Στην ανάλυση που ακολουθεί θεωρούμε ότι η επιφάνεια πάνω στην οποία γίνεται η κίνηση του σώματος δεν προβάλλει αντίσταση τριβής. Στο μοντέλο μας, η τριβή δημιουργείται λόγω κίνησης του σώματος μέσα σε κάποιο μαγνητικό πεδίο ή κάποιο υγρό ή αέριο. Συνεπώς, για τη δύναμη τριβής μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$F_{\tau\rho} = -\,b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{Π22.4}$$

όπου b είναι η σταθερά τριβής. Η διαφορική εξίσωση κίνησης του σώματος που κινείται με τριβές τύπου Stokes είναι:

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\,b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{M}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{M}x = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = 0 \tag{Π22.5}$$

όπου $\gamma = b/2M$ είναι μια σταθερά με διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου. Αν δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $x(t) = A\,\mathrm{e}^{pt}$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση της Εξ. (Π22.5) είναι η

$$p^2 + 2\,\gamma\,p + \omega_0^2 = 0 \qquad (\Pi 22.6)$$

με ρίζες

$$\rho_1 = -\,\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad \text{και} \qquad \rho_2 = -\,\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (\Pi 22.7)$$

Ο χαρακτήρας της κίνησης εξαρτάται από το πρόσημο τις υπόρριζης ποσότητας και ξεχωρίζουν τρεις περιπτώσεις:

1) ασθενής απόσβεση, όταν $\gamma < \omega_0$
2) κρίσιμη απόσβεση, όταν $\gamma = \omega_0$
3) ισχυρή απόσβεση, όταν $\gamma > \omega_0$

Π22.2.1 Ασθενής απόσβεση ($\gamma < \omega_0$)

Στην περίπτωση αυτή, η μιγαδική ρίζα οδηγεί σε συζυγείς μιγαδικούς εκθέτες:

$$\rho_1 = -\,\gamma + i\omega \qquad \text{και} \qquad \rho_2 = -\,\gamma - i\omega \qquad (\Pi 22.8)$$

όπου $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}$. Η γενική λύση στην περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης είναι της μορφής

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (\Pi 22.9)$$

και παριστάνει μια ταλάντωση το πλάτος της οποίας μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Εδώ η συχνότητα είναι μικρότερη από τη συχνότητα ω_0 κατά έναν παράγοντα $\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}$

Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $x = x_0$ και $\upsilon = \upsilon_0$, τότε

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad \text{και} \qquad \upsilon_0 = -\,A\,(\gamma\cos\varphi + \omega\sin\varphi) \qquad (\Pi 22.10)$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$A = \left(\sqrt{\omega^2 x_0^2 + (\upsilon_0 + \gamma x_0)^2}\right)\Big/\omega \qquad \text{και} \qquad \tan\varphi = -(\upsilon_0 + \gamma x_0)/x_0\,\omega \qquad (\Pi 22.11)$$

Π.22.2.1.1 Ο συντελεστής ποιότητας, Q

Ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος που περιλαμβάνει τα μεγέθη ω και γ και χρησιμοποιείται ευρύτατα είναι ο συντελεστής ποιότητας Q του συστήματος. Ο συντελεστής αυτός εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο φθίνει η ενέργεια του ταλαντωτή και ορίζεται ως ο αριθμός των ακτινίων κατά τον οποίο πρέπει να ταλαντωθεί το σύστημα για να μειωθεί η ενέργειά του κατά έναν παράγοντα e από την αρχική της τιμή. Επειδή η ενέργεια του ταλαντωτή είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους, στο διάστημα αυτό το πλάτος των ταλαντώσεων μειώνεται κατά $\mathrm{e}^{1/2}$ (Σχ. Π22.1). Συνεπώς,

$$Q = 2\pi N \qquad (\Pi 22.12)$$

όπου N είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων κατά τον οποίο το πλάτος μειώνεται στο 60% ($1/\mathrm{e}^{1/2} \sim 0{,}6$) της αρχικής του τιμής

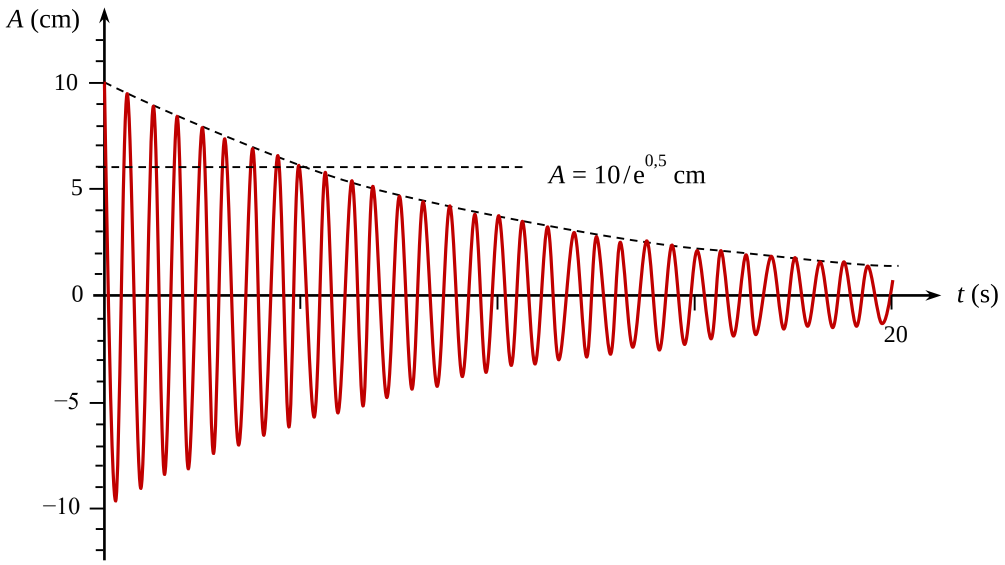
Το Q μπορεί να υπολογιστεί και ως το γινόμενο του 2π επί το πηλίκο της «στιγμιαίας» ενέργειας του συστήματος προς την απώλεια ενέργειας ανά περίοδο. Η συνολική ενέργεια είναι μια αρκετά σύνθετη συνάρτηση του χρόνου, αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα μέτρο της ενέργειας του συστήματος, σε κάθε περίοδο, είναι το τετράγωνο του στιγμιαίου πλάτους, δηλαδή $E \sim A^2\, e^{-2\gamma t}$ [βλ. Εξ. (Π22.9)]. Συνεπώς,

$$Q = 2\pi \frac{E}{\left|\frac{dE}{dt}\right| T} = 2\pi \frac{E}{2\gamma E \frac{2\pi}{\omega}}$$

οπότε προκύπτει τελικά η σχέση

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma} \tag{Π22.13}$$

Στα ηλεκτρικά κυκλώματα LC, ο συντελεστής ποιότητας είναι της τάξης του 10^2 έως 10^3, στα μέταλλα 10^3 έως 10^4, ενώ σε πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους χαλαζία, από τους οποίους είναι κατασκευασμένοι ο βηματοδότες τον ρολογιών, είναι της τάξης του 10^5 έως 10^6.



Σχήμα Π22.1. Η μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης A ως συνάρτηση του χρόνου t για ασθενή απόσβεση. Εδώ $N = 8$ είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων για να μειωθεί το πλάτος A κατά έναν παράγοντα $e^{1/2}$ από την αρχική του τιμή, οπότε $Q = 2\pi \times 8 \approx 50$.

Π22.2.2. Κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = \omega_0$)

Η περίπτωση αυτή υλοποιείται στις αναρτήσεις των αυτοκινήτων, στους ζυγούς, στο βαλλιστικό γαλβανόμετρο και σε διάφορους αναλογικούς μετρητές ρεύματος και τάσης που έχουν δείκτη από βελόνα.

Εδώ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μία διπλή ρίζα

$$\rho = \rho_1 = \rho_2 = -\gamma = -\omega_0 \tag{Π22.14}$$

Οπότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης παίρνει τη μορφή:

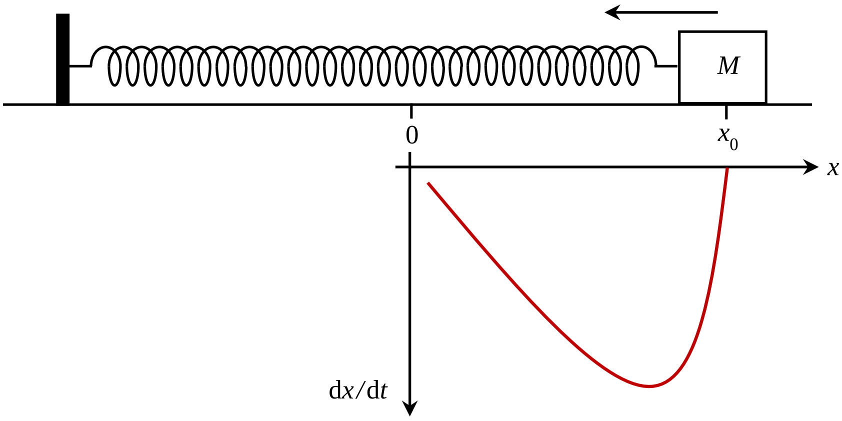
$$x(t) = (C_1 + C_2\, t)\exp(-\omega_0\, t) \tag{Π22.15}$$

Αν το σώμα ισορροπεί στο σημείο $x = 0$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x(0) = x_0$ και $\upsilon(0) = 0$, τότε η τελευταία σχέση απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$x(t) = x_0\,(1 + \omega_0\, t)\exp(-\omega_0\, t) \tag{Π22.16}$$

Η συνάρτηση $x(t)$ δεν αλλάζει πρόσημο για οποιαδήποτε τιμή του $t \geqslant 0$, συνεπώς σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης το σώμα τείνει προς τη θέση ισορροπίας ασυμπτωτικά, χωρίς ταλάντωση.

Αν απομακρύνει κανείς το σώμα από τη θέση ισορροπίας και στη συνέχεια το ελευθερώσει, σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης αυτό θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας αλλά, κατά τη διαδρομή, η ταχύτητα του σώματος θα διαγράψει την καμπύλη που δίνεται στο Σχ. Π22.2. Η καμπύλη αυτή μπορεί να υπολογιστεί από την Εξ. (Π22.16) και την παράγωγό της. Όμοια είναι και η κίνηση της βελόνας των αναλογικών οργάνων, όπως π.χ. του αμπερομέτρου, όταν αυτή επιστρέφει στο σημείο «μηδέν».



Σχήμα Π22.2. Η ταχύτητα του σώματος, $\upsilon = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, ως συνάρτηση της απόστασης x από τη θέση ισορροπίας του (0) στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης.

Π22.2.3. Ισχυρή απόσβεση ($\gamma > \omega_0$)

Η περίπτωση αυτή υλοποιείται όταν ένα σώμα μετακινείται από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται να εκτελέσει ταλάντωση π.χ. μέσα στο μέλι. Όπως ξέρουμε από την πείρα μας, το σώμα θα τείνει προς τη θέση ισορροπίας ασυμπτωτικά.

Εδώ έχουμε δύο πραγματικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$\rho_1 = -\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \equiv -\mu_1 \quad \text{και} \quad \rho_2 = -\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \equiv -\mu_2 \qquad (\Pi 22.17)$$

Η γενική λύση της Εξ. (Π22.5) έχει τη μορφή

$$x(t) = C_1 \exp(-\mu_1 t) + C_2 \exp(-\mu_2 t) \qquad (\Pi 22.18)$$

όπου οι σταθερές C_1 και C_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες, $x(0) = x_0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$. Έτσι έχουμε:

$$C_1 = \frac{\mu_2 x_0 + \upsilon_0}{\mu_2 - \mu_1} \qquad \text{και} \qquad C_2 = \frac{\mu_1 x_0 + \upsilon_0}{\mu_1 - \mu_2} \qquad (\Pi 22.19)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\upsilon(0) = 0$, η Εξ. (Π22.18) παίρνει την απλή μορφή

$$x(t) = \frac{x_0}{\mu_1 - \mu_2}\left[\mu_1 \exp(-\mu_2 t) - \mu_2 \exp(-\mu_1 t)\right] \qquad (\Pi 22.20)$$

Επειδή ο δεύτερος όρος εξασθενεί με τον χρόνο πιο γρήγορα από τον πρώτο, η κίνηση του σώματος δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$x(t) = \frac{x_0\,\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\exp\left(-\mu_2\, t\right) \tag{Π22.21}$$

Αν συγκρίνει κανείς τους χρόνους επιστροφής του σώματος στη θέση ισορροπίας στις περιπτώσεις $\gamma = \omega_0$ και $\gamma > \omega_0$, θα διαπιστώσει ότι ο χρόνος αυτός είναι ελάχιστος σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης.

Π22.3. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση – Συντονισμός

Οι ελεύθερες ταλαντώσεις με τριβές αργά ή γρήγορα σβήνουν. Για να διατηρηθεί το πλάτος των ταλαντώσεων σταθερό με το χρόνο, το σύστημα θα πρέπει να τροφοδοτείται περιοδικά με ενέργεια. Στα μηχανικά συστήματα αυτό επιτυγχάνεται με την άσκηση μιας περιοδικής δύναμης πάνω στο σώμα (Σχ. 22.4), συνήθως ημιτονικής μορφής, αν και αυτό δεν είναι απαραίτητο, καθώς η μορφή της διεγείρουσας δύναμης μπορεί να είναι π.χ. του τύπου τριγωνικών ή τετραγωνικών παλμών. Οι ταλαντώσεις που διεγείρονται στο σύστημα υπό την επίδραση κάποιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης είναι τώρα εξαναγκασμένες.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος που εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση είναι

$$M\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = F(t) \qquad \text{ή} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = \frac{F(t)}{M} \tag{Π22.22}$$

όπου

$$\omega_0 = \frac{k}{M} \qquad \text{και} \qquad \gamma = \frac{b}{2M} \tag{Π22.23}$$

ενώ $F(t)$ είναι η διεγείρουσα δύναμη που ασκείται στο σώμα.

Η σχέση αυτή είναι μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης και, όπως είναι γνωστό, η λύση της είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς [$F(t) = 0$], περίπτωση που είδη αναλύθηκε, και μιας λύσης της πλήρους εξίσωσης (του λεγόμενου ειδικού ολοκληρώματος). Η λύση της ομογενούς εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\,[C_1\,\exp(i\omega t) + C_2\,\exp(-i\omega t)] \tag{Π22.24}$$

Από την άλλη πλευρά, το ειδικό ολοκλήρωμα της πλήρους εξίσωσης εξαρτάται από τη συνάρτηση $F(t)$ και, όταν αυτή είναι αρμονική, έχει δηλαδή τη μορφή $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, τότε είναι φυσικό να εξετασθεί ένα ειδικό ολοκλήρωμα με μορφή αρμονικών συναρτήσεων με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{Π22.25}$$

Η αντικατάσταση της $x(t)$ στην Εξ. (Π22.22) δίνει:

$$\begin{aligned}&\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A\cos\varphi - 2\gamma\omega A\sin\varphi - F_0/M\right]\cos(\omega t) + \\ &+\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A\sin\varphi + 2\gamma\omega A\cos\varphi\right]\sin(\omega t) \equiv 0\end{aligned} \tag{Π22.26}$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνο όταν οι αγκύλες στη σχέση αυτή είναι και οι δύο ίσες με μηδέν. Συνεπώς,

$$A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\varphi - 2\gamma\omega\sin\varphi = F_0/M\right] \tag{Π22.27}$$

$$\tan\varphi = -\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{Π22.28}$$

Για τις σταθερές A και φ έχουμε τελικά:

$$A = \frac{F_0/M}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \quad \text{και} \quad \tan\varphi = -\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (\Pi22.29\alpha,\beta)$$

Δεν πρέπει να μας διαφύγει το γεγονός ότι η Εξ. (Π22.25) είναι λύση της *μόνιμης κατάστασης*. Κατά τη μεταβατική περίοδο η κίνηση του σώματος είναι πιο σύνθετη και όταν η «διεγείρουσα» συχνότητα διαφέρει *λίγο* από την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή (ω_0), ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, στις ταλαντώσεις του σώματος παρατηρούνται διακροτήματα, τα οποία σιγά-σιγά (σε Q περιόδους) εξαφανίζονται και το πλάτος ταλάντωσης σταθεροποιείται στην τιμή που δίνεται από την Εξ. (Π22.29α).

Η συχνότητα συντονισμού ω_σ προσδιορίζεται από το ακρότατο του παρονομαστή της Εξ. (Π22.29α) και η τιμή της είναι

$$\omega_\sigma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \ \ (\mathrm{rad/s}) \qquad \text{ή} \qquad f_\sigma = \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{2\pi^2}} \ \ (\mathrm{Hz}) \qquad (\Pi22.30)$$

Βλέπουμε ότι, στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, η συχνότητα συντονισμού ω_σ είναι μικρότερη από τη ω_0 με την οποία ταλαντώνεται ένα σύστημα χωρίς τριβές. Επίσης, είναι μικρότερη και από τη συχνότητα που παρατηρείται στα συστήματα που εκτελούν ελεύθερες ταλαντώσεις με μικρή απόσβεση όπου, όπως είδαμε, η συχνότητα αυτή είναι $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Σε κατάσταση συντονισμού, την τιμή του μέγιστου πλάτους την υπολογίζουμε θέτοντας στην Εξ. (Π22.29α) $\omega = \omega_\sigma$:

$$A_{\max} = \frac{F_0/M}{2\gamma\omega_\sigma} \qquad (\Pi22.31)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον συντελεστή ποιότητας

$$Q = \frac{\omega_\sigma}{2\gamma} \sim \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{M\omega_0}{b} \qquad (\Pi22.32)$$

η έκφραση για το μέγιστο πλάτος γίνεται

$$A_{\max} = Q\,\frac{F_0}{M\omega_0^2} = Q\,\frac{F_0}{k} = QA_0 \qquad (\Pi22.33)$$

όπου A_0 είναι η στατική απομάκρυνση του σώματος ($\omega = 0$) όταν του ασκείται δύναμη F_0. Συνεπώς, στον συντονισμό, η απομάκρυνση του σώματος σε ταλάντωση είναι Q φορές μεγαλύτερη από τη στατική, με άλλα λόγια το Q εκφράζει την ενίσχυση της απομάκρυνσης σε κατάσταση συντονισμού από τη στατική απομάκρυνση για το ίδιο σύστημα.

Τέλος, είναι χρήσιμη και η σχέση που περιλαμβάνει τα μεγέθη ω_σ, ω_0 και Q. Έτσι, από τις Εξ. (Π22. 30) και (Π22.13), έχουμε:

$$\omega_\sigma = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad \text{και} \qquad f_\sigma = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad (\Pi22.34)$$

Π22.4. Εφαρμογή εξωτερικής δύναμης

Στα πειράματα που εκτελούνται στην εργασία αυτή, η εξωτερική δύναμη ασκείται στο σώμα με την αρμονική μεταβολή του σημείου στήριξης του αριστερού ελατηρίου (Σχ. 22.6). Με την κίνηση του άκρου του ελατηρίου ασκείται πάνω στο σώμα μια εναλλασσόμενη δύναμη, η οποία επιδρά στο σύστημα με τον ίδιο τρόπο όπως και στο θεωρητικό μοντέλο. Επειδή αυτό δεν είναι προφανές, θα το δείξουμε με τους ακόλουθους απλούς συλλογισμούς.

Έστω ότι το σώμα ισορροπεί στο σημείο $x = 0$, ενώ το σημείο στήριξης του αριστερού ελατηρίου ισορροπεί στο σημείο $y = 0$. Έστω ακόμα ότι τη χρονική στιγμή t η μάζα M κινείται προς τις θετικές τιμές του x και είναι $x > 0$ και $y > 0$ (Σχ. 22.6). Αν το σημείο στήριξης ταλαντώνεται γύρω από σημείο $y = 0$ σύμφωνα με τη σχέση $y = y_0 \cos(\omega t)$, τότε, για τη μάζα M, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση

$$M\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\,b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - k_1(x-y) - k_2 x \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{M}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{M}\,x = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t) \qquad (\Pi 22.29)$$

όπου $k = k_1 + k_2$ είναι η *ελαστική σταθερά* του συστήματος και $F_0 = k_1\,y_0$ είναι το πλάτος της εναλλασσόμενης δύναμης που ασκείται στο σώμα. Η Εξ. (Π22.29) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{M}\cos(\omega t) \qquad (\Pi 22.35)$$

όπου $2\gamma = b/M$ και $\omega_0^2 = k/M$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η Εξ. (Π22.35) είναι όμοια με την Εξ. (Π22.22), που προκύπτει από την ανάλυση του θεωρητικού μοντέλου. Συνεπώς όλο το μαθηματικό υπόβαθρο και τα συμπεράσματα του προηγούμενου εδαφίου μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση όπου το σημείο στήριξης του ενός από τα δύο ελατήρια ταλαντώνεται αρμονικά.