Άσκηση 23

Μελέτη των κανονικών τρόπων ταλάντωσης με αεροτροχιά

23.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή θα μελετηθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ενός συστήματος με δύο ή τρία βαγόνια συζευγμένα μεταξύ τους με ελατήρια, που κινούνται με αμελητέα τριβή πάνω σε ευθύγραμμη αεροτροχιά. Θα δημιουργηθούν διακροτήματα, τα οποία θα καταγραφούν και θα προσδιοριστούν οι σταθερές των ελατηρίων του συστήματος. Τέλος, θα υπολογιστούν οι θεωρητικές τιμές των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και των διακροτημάτων και θα συγκριθούν με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές που προέκυψαν από τις μετρήσεις.

23.2. Γενικά

23.2.1. Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Όταν δύο ή περισσότερα σώματα (που θα ονομάζουμε παρακάτω και ταλαντωτές) είναι συζευγμένα μεταξύ τους, έτσι ώστε να μπορούν να ανταλλάσσουν ενέργεια και να αποτελούν ένα ευσταθές σύστημα, η γενική κίνηση του συστήματος είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και κανένας από τους ταλαντωτές δεν εκτελεί εν γένει αρμονική ταλάντωση.

Από την ατελείωτη ποικιλία τρόπων κίνησης με τους οποίους μπορεί να ταλαντωθεί ένα τέτοιο σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών, υπάρχουν ορισμένοι τρόποι στους οποίους η κίνηση ολόκληρου του συστήματος είναι αρμονική. Σε αυτούς τους τρόπους κίνησης, που λέγονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** (**ΚΤΤ**), όλοι οι ταλαντωτές εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με την ίδια γωνιακή συχνότητα, περνούν από τη θέση ισορροπίας τους την ίδια χρονική στιγμή και η διαφορά φάσης μεταξύ οποιωνδήποτε δύο ταλαντωτών είναι 0° ή 180°. Υπάρχουν τόσοι ΚΤΤ όσο είναι και το πλήθος των συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών. Σε κάθε ΚΤΤ αντιστοιχεί, εν γένει, μια διαφορετική γωνιακή συχνότητα συλλογικής κίνησης και ένας διαφορετικός «σχηματισμός» του συστήματος, δηλαδή μια διαφορετική σχέση φάσης 0° ή 180° και πλατών μεταξύ των διάφορων ταλαντωτών.

Αν ένα σύστημα n συζευγμένων ταλαντωτών ταλαντώνεται σε κάποιον από τους n ΚΤΤ του, με **γωνιακή συχνότητα** ω, τότε η απομάκρυνση κάθε ταλαντωτή i από τη θέση ισορροπίας του, κατά τη χρονική στιγμή t, μπορεί να γραφεί ως

$$y_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{23.1}$$

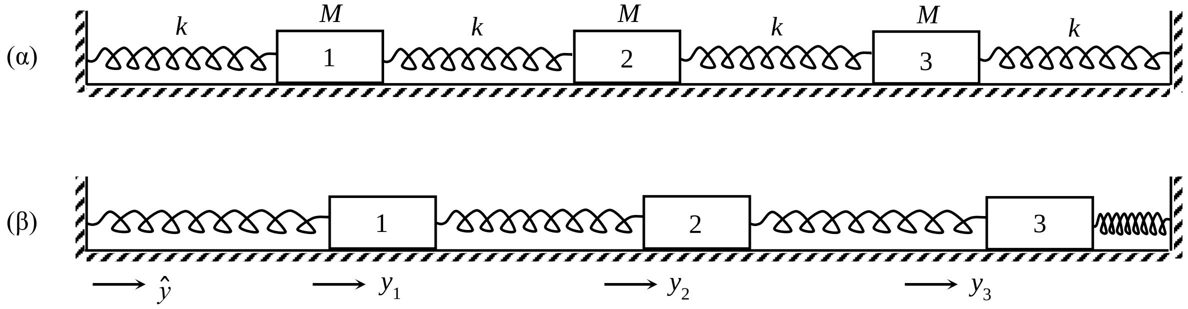
όπου A_i τα **πλάτη ταλάντωσης**.

Οι συχνότητες των διάφορων ΚΤΤ εξαρτώνται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος (π.χ. τη μάζα των ταλαντωτών και τη σταθερά k των ελατηρίων). Με κατάλληλες αρχικές συνθήκες μπορούμε να κάνουμε το σύστημα να ταλαντώνεται με έναν από τους ΚΤΤ.

Για την αναλυτική μελέτη της κίνησης χωρίς τριβές τριών συζευγμένων ταλαντωτών, παραπέμπουμε στο Παράρτημα, στο τέλος αυτής της άσκησης.

23.2.2. Σύστημα με τρεις συζευγμένους ταλαντωτές

Το Σχ. 23.1 δείχνει ένα σύστημα τριών σωμάτων, 1, 2 και 3, με την ίδια μάζα M, συζευγμένων μεταξύ τους και με τα ακλόνητα τοιχώματα με ελατήρια της ίδιας σταθεράς k.



Σχήμα 23.1. Σύστημα τριών συζευγμένων ταλαντωτών. (α) Κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, (β) Απομάκρυνση των τριών μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους κατά y_1, y_2 και y_3, αντίστοιχα.

Από την αναλυτική μελέτη προκύπτει ότι οι γωνιακές συχνότητες των 3 ΚΤΤ του συστήματος αυτού είναι

$$\omega_1 = \sqrt{2\text{-}\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{M}} \tag{23.2}$$

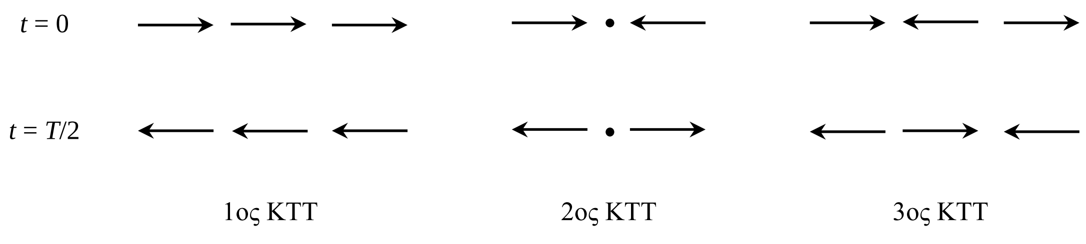
ενώ οι σχέσεις μεταξύ των πλατών, A_1, A_2, A_3, των τριών σωμάτων, για κάθε έναν από τους ΚΤΤ, είναι:

$$1\text{ος ΚΤΤ } (\omega_1){:}\ A_1 = A_3, \quad A_2 = +\sqrt{2}A_1 \tag{23.3α}$$

$$2\text{ος ΚΤΤ } (\omega_2){:}\ A_1 = -A_3, \quad A_2 = 0 \tag{23.3β}$$

$$3\text{ος ΚΤΤ } (\omega_3){:}\ A_1 = A_3, \quad A_2 = -\sqrt{2}A_1 \tag{23.3γ}$$

Οι Εξ. (23.3) υποδεικνύουν ότι, για να διεγερθεί ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης (i = 1, 2, ή 3), αρκεί οι αρχικές απομακρύνσεις, A_1, A_2 και A_3, να ικανοποιούν την αντίστοιχη Εξ. (23.3). Οι τρεις ΚΤΤ απεικονίζονται σχηματικά στο Σχ. 23.2, για χρόνους t = 0 και t = T/2, αντίστοιχα, όπου τα βέλη υποδεικνύουν τη φορά κίνησης του κάθε σώματος. Το $T = 2\pi/\omega$ είναι η **περίοδος της ταλάντωσης**, ο χρόνος δηλαδή που απαιτείται για την εκτέλεση μιας πλήρους ταλάντωσης.



Σχήμα 23.2. Σχηματική παράσταση των 3 ΚΤΤ του συστήματος που απεικονίζεται στο Σχ. 23.1.

23.2.3. Σύστημα με δύο συζευγμένους ταλαντωτές – Διακροτήματα

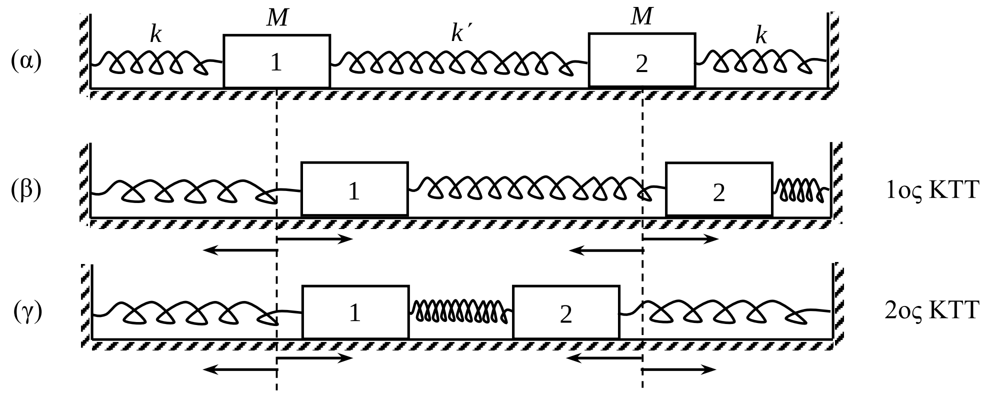
Το Σχ. 23.3 δείχνει ένα σύστημα δύο σωμάτων, 1 και 2, με την ίδια μάζα M, συζευγμένων μεταξύ τους με ένα *μαλακό ελατήριο* σταθεράς k', ενώ με τα απέναντι τοιχώματα είναι σταθερά συνδεδεμένα με δύο *σκληρά ελατήρια* σταθεράς k. Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία, όπως εκείνη του εδαφίου Π.23.1.1, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι οι γωνιακές συχνότητες των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος είναι

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{M}} \tag{23.4}$$

ενώ οι αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ των πλατών ταλάντωσης των δύο σωμάτων είναι

$$1\text{ος ΚΤΤ } (\omega_1)\text{: } A_1 = A_2 \qquad (\text{Σχ. } 23.3.\beta)$$

$$2\text{ος ΚΤΤ } (\omega_2)\text{: } A_1 = -A_2 \qquad (\text{Σχ. } 23.3.\gamma) \tag{23.5}$$



Σχήμα 23.3. Σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών. (α) Θέση ισορροπίας του συστήματος, (β) 1ος ΚΤΤ και (γ) 2ος ΚΤΤ.

Ο χαρακτηριστικός τρόπος κίνησης των δύο μαζών στους δύο ΚΤΤ υποδεικνύεται με τα βέλη στο Σχ. 23.3, ενώ οι απομακρύνσεις των δυο σωμάτων στους δύο ΚΤΤ δίνονται [βλ. Εξ. (23.1)] από τις σχέσεις:

$$1\text{ος ΚΤΤ } (\omega_1)\text{: } y_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad y_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$2\text{ος ΚΤΤ } (\omega_2)\text{: } y_1(t) = A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{και} \quad y_2(t) = -A_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{23.6}$$

Σε έναν γενικό (ακανόνιστο) τρόπο κίνησης του συστήματος, οι απομακρύνσεις $y_1(t)$ και $y_2(t)$ των δύο σωμάτων δίνονται από μια γραμμική επαλληλία των απομακρύνσεων $A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ και $A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ στους δύο ΚΤΤ:

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{23.7}$$

Καθεμία από τις Εξ. (23.7) εκφράζει υπέρθεση δύο ταλαντώσεων, οι οποίες γίνονται με τις συχνότητες ω_1 και ω_2 των δύο ΚΤΤ.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι τα πλάτη A_1 και A_2 με τα οποία συνεισφέρουν οι δύο ΚΤΤ είναι ίσα και ότι οι αρχικές φάσεις τους είναι $-\pi/2$ ($\varphi_1 = \varphi_2 = -\pi/2$), οι Εξ. (23.7) δίνουν

$$y_1(t) = \left[2A_1 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t\right] \sin \omega_{\text{avg}} t \tag{23.8}$$

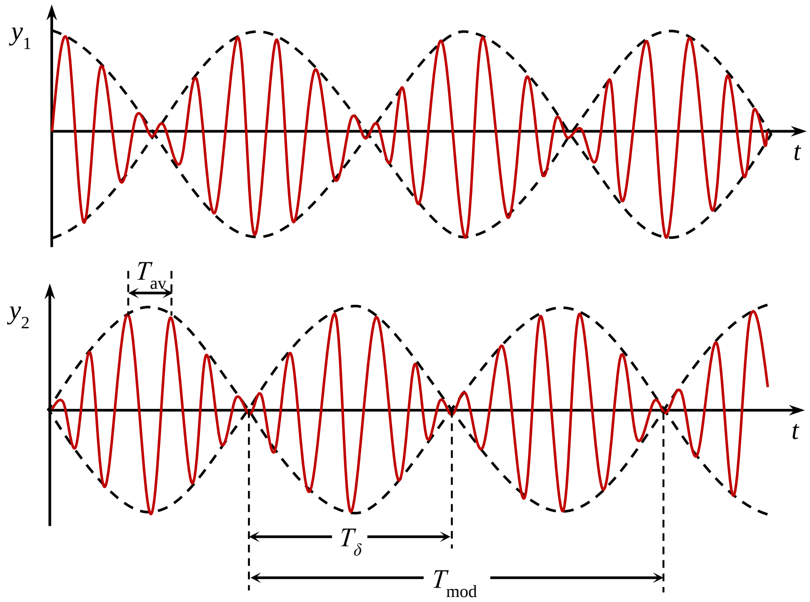
$$y_2(t) = \left[2A_1 \sin\frac{\Delta\omega}{2} t\right] \cos \omega_{\text{avg}} t$$

όπου

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \equiv \omega_\delta \quad \text{και} \quad \omega_{\text{avg}} = (\omega_1 + \omega_2)/2 \tag{23.9}$$

Οι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ αποδίδονται στο Σχ. 23.4 συναρτήσει του χρόνου. Αναγνωρίζουμε τη χαρακτηριστική μορφή των **διακροτημάτων** που συναντήσαμε και στην Άσκηση 15 (*Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι), κατά τη μελέτη της σύνθεσης δύο ηλεκτρικών ταλαντώσεων που έχουν λίγο διαφορετικές συχνότητες μεταξύ τους. Υπενθυμίζεται ότι, όπως φαίνεται και στο Σχ. 23.4, στο διακρότημα ο κάθε ταλαντωτής ταλαντώνεται με τη **μέση γωνιακή συχνότητα** ω_{avg}, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης διαμορφώνεται με τη **γωνιακή συχνότητα του διακροτήματος** ω_δ. Έχουμε επίσης:

$$\begin{aligned} &\text{Περίοδος διακροτήματος:} && T_\delta = 2\pi/\omega_\delta = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1) \\ &\text{Περίοδος διαμόρφωσης:} && T_{\text{mod}} = 2T_\delta = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1) \\ &\text{Μέση περίοδος ταλάντωσης:} && T_{\text{avg}} = 4\pi/(\omega_2 + \omega_1) \end{aligned} \tag{23.10}$$



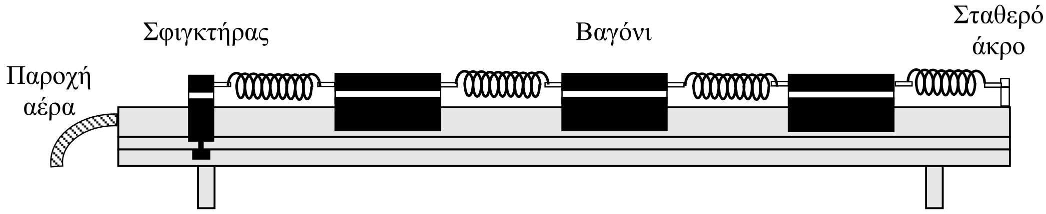
Σχήμα 23.4. Η απομάκρυνση συναρτήσει του χρόνου για δύο πανομοιότυπους συζευγμένους ταλαντωτές, με το ίδιο αρχικό πλάτος ταλάντωσης, όταν οι δύο συχνότητες των ταλαντώσεων διαφέρουν κατά μικρή ποσότητα (δηλαδή $\omega_\delta \ll \omega_{\text{avg}}$). Η μορφή αυτής της ταλάντωσης ονομάζεται διακρότημα.

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί κάθε ταλαντωτής με γωνιακή συχνότητα ω_{avg} δεν παραμένει σταθερό, $2A_1$, αλλά διαμορφώνεται από την παράσταση $\cos(\omega_\delta\, t/2)$ για τον έναν και $\sin(\omega_\delta\, t/2)$ για τον άλλον ταλαντωτή και περιγράφεται από τη διακεκομμένη γραμμή στο Σχ. 23.4 (έχει σχεδιαστεί και η συμμετρική της ως προς τον άξονα του χρόνου, t). Επειδή τα πλάτη διαμόρφωσης των δύο ταλαντωτών έχουν μεταξύ τους διαφορά φάσης $\pi/2$ και επειδή η ενέργεια είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους ταλάντωσης του κάθε ταλαντωτή, αντιλαμβανόμαστε ότι ανταλλάσσεται ενέργεια μεταξύ των δύο ταλαντωτών κατά τον ακόλουθο τρόπο: κατά τη διάρκεια του ενός τετάρτου της περιόδου διαμόρφωσης το πλάτος διαμόρφωσης του ενός ταλαντωτή ελαττώνεται, ενώ του άλλου αυξάνεται, οπότε η ενέργεια μεταφέρεται από τον πρώτο ταλαντωτή στον δεύτερο· κατά τη διάρκεια του επομένου τετάρτου της περιόδου διαμόρφωσης η ροή της ενέργειας έχει αντίθετη φορά, κ.ο.κ. Αυτή η ανταλλαγή ενέργειας είναι πλήρης μόνον όταν οι δύο μάζες είναι ίσες και ο λόγος $(\omega_1 + \omega_2)/(\omega_1 - \omega_2)$

είναι ακέραιος αριθμός. Διαφορετικά, καμία από τις δύο μάζες δεν ακινητοποιείται ποτέ τελείως.

23.3. Μέθοδος

Στο **πρώτο πείραμα** μετριέται η περίοδος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ενός συστήματος τριών ίδιων συζευγμένων βαγονιών, που μπορούν να ολισθαίνουν με πολύ μικρή τριβή πάνω σε οριζόντια αεροτροχιά. Τα τρία βαγόνια συνδέονται μεταξύ τους και με τα σταθερά άκρα της αεροτροχιάς με ελατήρια που έχουν την ίδια σταθερά k (Σχ. 23.5). Κάθε κανονικός τρόπος ταλάντωσης διεγείρεται ξεχωριστά, με την επιλογή κατάλληλων αρχικών απομακρύνσεων των τριών βαγονιών που μετριούνται πάνω στην αεροτροχιά. Σε ένα βοηθητικό πείραμα (βλέπε τρίτο πείραμα παρακάτω) μετριέται η σταθερά, k, των ελατηρίων. Οι γωνιακές συχνότητες των ΚΤΤ, που βρίσκονται από τις περιόδους των ΚΤΤ, συγκρίνονται με τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές [Εξ. (23.2)].



Σχήμα 23.5. Διάταξη με τρία συζευγμένα βαγόνια πάνω στην αεροτροχιά (όχι υπό κλίμακα).

Στο **δεύτερο πείραμα** μετριέται η περίοδος των ΚΤΤ δύο συζευγμένων βαγονιών που διεγείρονται κατάλληλα. Γίνεται χρήση τμήματος της αεροτροχιάς με σταθερά άκρα (με τη βοήθεια και ενός κινητού σφιγκτήρα), ενώ το ελατήριο που συνδέει τα δύο βαγόνια είναι πολύ «μαλακότερο» (μικρότερο k) από τα άλλα δύο, που συνδέουν τα βαγόνια με τα άκρα (Σχ. 23.3). Ακολούθως προκαλούνται διακροτήματα στο σύστημα, με κατάλληλες αρχικές απομακρύνσεις, και μετριέται η περίοδος των διακροτημάτων. Οι γωνιακές συχνότητες των ΚΤΤ και των διακροτημάτων, που προσδιορίζονται πειραματικά από τις περιόδους των ΚΤΤ και των διακροτημάτων, συγκρίνονται με τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές [Εξ. (23.4), (23.9) και (23.10)].

Τέλος, σε **ένα τρίτο πείραμα**, μετριούνται οι σταθερές k και k' των σκληρών και των μαλακών ελατηρίων. Χρησιμοποιείται ένα τμήμα της αεροτροχιάς με σταθερά άκρα και ένα μόνο από τα βαγόνια, το οποίο συνδέεται, με όμοια ελατήρια, με τα σταθερά άκρα της αεροτροχιάς. Από την περίοδο ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή υπολογίζεται κάθε φορά η σταθερά του αντίστοιχου ελατηρίου.

23.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη (Σχ. 23.5) αποτελείται από μία αεροτροχιά με τα διάφορα εξαρτήματά της, τρία ειδικά βαγόνια, η μάζα των οποίων αναγράφεται πάνω σε αυτά, και ένα χρονόμετρο. Στην άσκηση υπάρχει επίσης μια συλλογή ελατηρίων, 4 σκληρών και 2 μαλακών, καθώς και ορισμένοι ακροδέκτες και βιδωτοί σφιγκτήρες, για τη σύνδεση των ελατηρίων με τα βαγόνια και με τα σταθερά άκρα της αεροτροχιάς.

ΠΡΟΣΟΧΗ: *Προσέξτε να μην χτυπήσετε ή χαράξετε την αεροτροχιά, γιατί κάθε παραμόρφωση μπορεί να προκαλέσει μόνιμο εμπόδιο στην κίνηση ενός βαγονιού. Επίσης, μην ανταλλάσσετε τα* *ελατήρια δύο διαφορετικών ασκήσεων, γιατί είναι έτσι ομαδοποιημένα, κατόπιν μετρήσεων, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά μεταξύ των σταθερών τους.*

Βιβλιογραφία

1. F. S. Crawford, *Κυματική (Μαθήματα Φυσικής Berkeley*, Τόμος 3) (Αθήνα, 1979), 1.4, 1.5.
2. H. J. Pain, *Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων* (Αθήνα, 1991), 3.2-3.4.
3. M. Alonso και E.J. Finn, *Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική*, Τόμος Ι: *Μηχανική και Θερμοδυναμική* (Αθήνα 1981), 12.10.
4. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική: Βασικές αρχές*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 2021), 16.5, 17.6.
5. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος ΙΙ (Αθήνα, 2011), σ. 53-68, 287-289.

23.5. Εκτέλεση

23.5.1. Τρεις συζευγμένοι αρμονικοί ταλαντωτές

1. Ανοίξτε το τροφοδοτικό και επιλέξτε μια ικανοποιητική παροχή αέρα με τον επιλογέα στροφών.

2. Με τη βοήθεια του επιβλέποντα, οριζοντιώστε προσεκτικά την αεροτροχιά με τους κοχλίες του διπλού υποστηρίγματος. Ένα βαγόνι πάνω στην αεροτροχιά μπορεί να κάνει μικρές μετακινήσεις, πότε προς τη μία και πότε προς την άλλη κατεύθυνση, λόγω ασυμμετρίας ή διακύμανσης της ροής του αέρα κάτω από το βαγόνι, δεν πρέπει όμως να επιταχύνεται σταθερά προς μια κατεύθυνση. Επίσης, ένα βαγόνι δεν πρέπει να κάθεται ασύμμετρα ως προς τις δύο πλευρές της αεροτροχιάς (χρησιμοποιήστε την αεροστάθμη).

3. Συνδέστε τα άκρα των τεσσάρων σκληρών ελατηρίων με τους ακροδέκτες των βαγονιών. Χειριστείτε τα ελατήρια με προσοχή, χωρίς να τα πιέζετε ή να τα εκτείνετε υπερβολικά. (Η δουλειά αυτή να γίνει *πάνω στον πάγκο* και *όχι πάνω στην αεροτροχιά*.)

4. Με συντονισμένη συνεργασία τριών χεριών, σηκώστε τη διάταξη και τοποθετήστε την πάνω στην αεροτροχιά με προσοχή, ώστε να μην την χτυπήσετε. Τοποθετήστε ακροδέκτες στα άκρα της αεροτροχιάς και συνδέστε με αυτά τα άκρα των ελατηρίων που είναι ελεύθερα. Ο κάθε ταλαντωτής κινείται τώρα πολύπλοκα πέρα-δώθε, με πολύ μικρή τριβή.

5. Συγκρατήστε με προσοχή τα βαγόνια (συνεργασία τριών πάντοτε χεριών) και φέρτε τα στη θέση ισορροπίας τους (όπου το μήκος των τεσσάρων ελατηρίων είναι το ίδιο). Με τη μετρική κλίμακα της αεροτροχιάς, σημειώστε τη θέση ισορροπίας των τριών βαγονιών, y_{01}, y_{02}, y_{03} (του αντίστοιχου άκρου τους).

6. Απομακρύνετε, κατά το ίδιο μήκος (περίπου 5 cm) και προς την ίδια κατεύθυνση, τα δύο ακραία βαγόνια, και κατά ένα μήκος ίσο με $\sqrt{2} \times 5$ cm το μεσαίο βαγόνι [Εξ. (23.3α)]. Αφήστε τα ταυτόχρονα να ταλαντωθούν. Θα πρέπει να βλέπετε τώρα τον 1ο ΚΤΤ του συστήματος (Σχ. 23.2).

7. Μετρήστε το χρονικό διάστημα n = 10 πλήρων ταλαντώσεων και καταχωρήστε την τιμή στον Πίνακα Ι στη στήλη nT_1.

8. Επαναλάβετε το βήμα 7 άλλες 4 φορές, καθώς το σύστημα ταλαντώνεται συνεχώς, και συμπληρώστε τη στήλη nT_1 του Πίνακα Ι. Εκτιμήστε το σφάλμα του χρονομέτρου.

Πίνακας Ι

$n = 10$

Α/Α	nT_1 (s)	nT_2 (s)	nT_3 (s)
1			
2			
3			
4			
5			

9. Στη συνέχεια, διεγείρετε τον 2ο ΚΤΤ: Συγκρατήστε με προσοχή τα βαγόνια και φέρτε τα πάλι στη θέση ισορροπίας τους. Πιέστε ελαφρά το μεσαίο στα πλάγια ώστε να παραμείνει ακίνητο και απομακρύνετε τα άλλα δύο σε αντίθετες κατευθύνσεις κατά το ίδιο μήκος (περίπου 5 cm) [Εξ. (23.3β)]. Συγκρατήστε τα ακίνητα για λίγο και μετά αφήστε τα ελεύθερα ταυτόχρονα. Θα πρέπει να βλέπετε τώρα τον 2ο ΚΤΤ του συστήματος (Σχ. 23.2).

10. Καθώς το σύστημα ταλαντώνεται συνεχώς, μετρήστε το χρονικό διάστημα $n = 10$ πλήρων ταλαντώσεων και καταχωρήστε την τιμή στον Πίνακα Ι στη στήλη nT_2.

11. Επαναλάβετε το βήμα 10 άλλες 4 φορές, καθώς το σύστημα ταλαντώνεται συνεχώς, και συμπληρώστε τη στήλη nT_2 του Πίνακα Ι.

12. Τέλος, διεγείρετε τον 3ο ΚΤΤ. Συγκρατήστε με προσοχή τα βαγόνια και φέρτε τα στη θέση ισορροπίας τους. Κρατήστε το μεσαίο ακίνητο, πιέζοντάς το ελαφρά, και απομακρύνετε τα δύο ακραία κατά το ίδιο μήκος (περίπου 5 cm) και προς την ίδια κατεύθυνση. Κρατήστε τα δύο ακραία ακίνητα στην νέα τους θέση. Απομακρύνετε τώρα το μεσαίο (με το τρίτο χέρι) προς την αντίθετη κατεύθυνση κατά μία απόσταση ίση με $\sqrt{2} \times 5$ cm [Εξ. (23.3γ)]. Περιμένετε λίγο και αφήστε ταυτόχρονα τα τρία βαγόνια. Θα πρέπει να βλέπετε τώρα τον 3ο ΚΤΤ του συστήματος (Σχ. 23.2).

13. Μετρήστε το χρονικό διάστημα $n = 10$ πλήρων ταλαντώσεων και καταχωρήστε την τιμή στον Πίνακα Ι στη στήλη nT_3.

14. Εκτελέστε το βήμα 13 άλλες 4 φορές και συμπληρώστε τη στήλη nT_3 του Πίνακα Ι.

15. Συγκρατήστε με προσοχή τα βαγόνια και φέρτε τα περίπου στη θέση ισορροπίας τους. Αποσυνδέστε τα ακραία ελατήρια από τα άκρα της αεροτροχιάς. Με συγχρονισμένες κινήσεις κατεβάστε το σύστημα προσεκτικά πάνω στον πάγκο και αποσυνδέστε το μεσαίο βαγόνι από τα άλλα δύο, τα οποία θα χρησιμοποιήσετε στο επόμενο πείραμα. (Αφήστε ένα ελατήριο συνδεδεμένο με καθένα από αυτά τα δύο βαγόνια.)

16. Σημειώστε τις τιμές της μάζας των τριών βαγονιών, M_1, M_2, M_3, που αναγράφονται πάνω τους (περιλαμβάνονται και οι ακροδέκτες), καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα.

23.5.2. Δύο συζευγμένοι αρμονικοί ταλαντωτές – Διακροτήματα

1. Συνδέστε μεταξύ τους τα δύο βαγόνια (που έχουν από ένα σκληρό ελατήριο συνδεδεμένο) με ένα μαλακό ελατήριο (έχει μικρότερη διάμετρο από το σκληρό) πάνω στον πάγκο. Μεταφέρετε μαζί τα δύο βαγόνια και τοποθετήστε τα πάνω στην αεροτροχιά, προς το άκρο της που δεν συνδέεται με την παροχή αέρα (αυτό θερμαίνεται λιγότερο). Συνδέστε το ένα σκληρό ελατήριο με το άκρο αυτό.

2. Συνδέστε έναν ακροδέκτη με τον ειδικό βιδωτό σφιγκτήρα και τοποθετήστε τον επάνω στην αεροτροχιά και σε απόσταση περίπου 110 cm από το προηγούμενο άκρο της. Σφίξτε ελαφρά τον κοχλία που βρίσκεται πάνω στον σφιγκτήρα, ώστε το εξάρτημα αυτό να σταθεροποιηθεί. Συνδέστε το άλλο σκληρό ελατήριο της διάταξης με τον ακροδέκτη του σφιγκτήρα. Το σύστημα των δύο συζευγμένων ταλαντωτών θα ταλαντώνεται τώρα ακανόνιστα.

3. Συγκρατήστε με προσοχή τα βαγόνια και φέρτε τα στη θέση ισορροπίας τους. Σημειώστε τις θέσεις ισορροπίας, y_{01} και y_{02} (αντίστοιχα άκρα των βαγονιών).

4. Απομακρύνετε τα δύο βαγόνια κατά την ίδια απόσταση (περίπου 1 cm) και προς την ίδια κατεύθυνση. Συγκρατήστε τα για λίγο και μετά αφήστε τα ελεύθερα ταυτόχρονα. Θα πρέπει να βλέπετε τον 1ο ΚΤΤ του συστήματος (Σχ. 23.3.β).

5. Μετρήστε το χρονικό διάστημα $n = 10$ πλήρων ταλαντώσεων. Καταχωρήστε την τιμή στη στήλη nT_1 του Πίνακα ΙΙ.

6. Επαναλάβετε το βήμα 5 άλλες 4 φορές, καθώς το σύστημα ταλαντώνεται συνεχώς, και συμπληρώστε τη στήλη nT_1.

Πίνακας ΙΙ

$n = 10$, $n_\delta = 8$

Α/Α	nT_1 (s)	nT_2 (s)	$n_\delta T_\delta$ (s)
1			
2			
3			
4			
5			

7. Στη συνέχεια, διεγείρετε τον 2ο ΚΤΤ: Συγκρατήστε με προσοχή τα βαγόνια και φέρτε τα στη θέση ισορροπίας τους. Απομακρύνετέ τα κατά την ίδια απόσταση αλλά σε αντίθετες κατευθύνσεις. Συγκρατήστε τα για λίγο ακίνητα και μετά αφήστε τα ελεύθερα. Βεβαιωθείτε ότι τα ακραία ελατήρια δεν συσπειρώνονται εντελώς στο αρχικό τους μήκος. Θα πρέπει να βλέπετε τον 2ο ΚΤΤ (Σχ. 23.3.γ).

8. Μετρήστε το χρονικό διάστημα $n = 10$ πλήρων ταλαντώσεων. Καταχωρήστε την τιμή στη στήλη nT_2 του Πίνακα ΙΙ.

9. Εκτελέστε συνολικά πέντε φορές το βήμα 8, καθώς το σύστημα ταλαντώνεται συνεχώς, και συμπληρώστε τη στήλη nT_2.

10. Φέρτε τα βαγόνια στη θέση ισορροπίας τους. Στη συνέχεια θα μετρήσετε την περίοδο διακροτημάτων. Συγκρατήστε το ένα βαγόνι στη θέση ισορροπίας του και απομακρύνετε το άλλο περί τα 3 cm. Αφήστε το ελεύθερο και παρακολουθήστε την κίνησή του επί αρκετές ταλαντώσεις, για να διαπιστώσετε τα διακροτήματα και να εξοικειωθείτε με τη συμπεριφορά τους, ιδιαίτερα όταν το πλάτος της ταλάντωσής τους μηδενίζεται.

11. Μετρήστε το χρονικό διάστημα $n_\delta = 8$ περιόδων διακροτημάτων (δηλαδή μεταξύ μηδενισμών της μετατόπισης της μίας μάζας) και καταχωρήστε την τιμή στην τελευταία στήλη του Πίνακα ΙΙ.

12. Επαναλάβετε τα βήματα 10 και 11 άλλες 4 φορές, καθώς το σύστημα εκτελεί διακροτήματα, και συμπληρώστε την τελευταία στήλη του Πίνακα ΙΙ.

13. Σημειώστε τις τιμές της μάζας, M_1 και M_2, των δύο βαγονιών που χρησιμοποιήσατε, καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα.

23.5.3. Μέτρηση των σταθερών k και k΄ των ελατηρίων

1. Φέρτε τα δύο βαγόνια στη θέση ισορροπίας τους. Αποσυνδέστε το βαγόνι που είναι συνδεδεμένο με τον σφιγκτήρα και αφήστε πάνω στην αεροτροχιά μόνο το άλλο βαγόνι, συνδεδεμένο με το σταθερό άκρο της αεροτροχιάς. Αποσυνδέστε το σκληρό ελατήριο από το βαγόνι που απομακρύνατε και αφήστε το μαλακό συνδεδεμένο.

2. Χαλαρώστε τον σφιγκτήρα και μετακινήστε τον προς το βαγόνι, ώστε η απόστασή του από το σταθερό άκρο να είναι περίπου 60 cm. Σταθεροποιήστε τον, σφίγγοντας ελαφρά τον κοχλία. Συνδέστε το σκληρό ελατήριο (που αποσυνδέσατε προηγουμένως) μεταξύ του σφιγκτήρα και του βαγονιού. Ο αρμονικός ταλαντωτής που ετοιμάσατε ταλαντώνεται τώρα ελεύθερα πάνω στην αεροτροχιά, με δύο σκληρά ελατήρια.

3. Φέρτε τον ταλαντωτή στη θέση ισορροπίας του και απομακρύνετέ τον από αυτήν γύρω στα 5 cm. Αφήστε τον ελεύθερο να ταλαντωθεί για λίγο και μετρήστε το χρονικό διάστημα $n = 10$ ταλαντώσεών του. Καταχωρήστε το αποτέλεσμα στον Πίνακα ΙΙΙ στη στήλη nT.

4. Εκτελέστε το βήμα 3 άλλες 4 φορές και συμπληρώστε τη στήλη nT.

Πίνακας ΙΙΙ

$n = 10$

Α/Α	nT (s)	nT' (s)
1		
2		
3		
4		
5		

5. Φέρτε τον ταλαντωτή στη θέση ισορροπίας του, αποσυνδέστε τον από τα σταθερά άκρα της διάταξης και τοποθετήστε τον στον πάγκο.

6. Συνδέστε τώρα το άλλο μαλακό ελατήριο με το άλλο βαγόνι, τοποθετήστε το βαγόνι αυτό με τα δύο μαλακά ελατήρια πάνω στην αεροτροχιά και επαναλάβετε τα βήματα 3 και 4 για τα μαλακά ελατήρια. Συμπληρώστε τη στήλη nT'.

7. Σημειώστε τις μάζες, M και M', των βαγονιών που χρησιμοποιήσατε, καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα.

8. Φέρτε τον ταλαντωτή στη θέση ισορροπίας του, αποσυνδέστε τα ελατήρια από τα σταθερά άκρα της διάταξης και τοποθετήστε το βαγόνι πάνω στον πάγκο.

9. Αποσυνδέστε με προσοχή τα ελατήρια και τοποθετήστε τα στις αρχικές τους θέσεις, μέσα στο κουτί που υπάρχει για τον σκοπό αυτό.

23.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

23.6.1. Υπολογισμός των σταθερών των ελατηρίων

1. Από τις μετρήσεις του Πίνακα III υπολογίστε τις μέσες τιμές $\overline{nT}$ και $\overline{nT'}$ και, από αυτές, τις μέσες περιόδους, $\overline{T}$ και $\overline{T'}$, των δύο ταλαντωτών, καθώς και το στατιστικό σφάλμα τους, $\delta\overline{T}$ και $\delta\overline{T'}$, αντίστοιχα. Συγκρίνετε τα σφάλματα αυτά με το σφάλμα του χρονομέτρου και χρησιμοποιήστε ως δT και $\delta T'$ το μεγαλύτερο από τα δύο.

2. Από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2k}} \qquad (23.11)$$

που δίνει την περίοδο ταλάντωσης για αρμονικό ταλαντωτή συνδεδεμένο με δύο ελατήρια σταθεράς k, και την τιμή της μάζας του βαγονιού που χρησιμοποιήσατε κάθε φορά, βρείτε τις σταθερές $k \pm \delta k$ και $k' \pm \delta k'$ των σκληρών και των μαλακών ελατηρίων, αντίστοιχα.

23.6.2. Υπολογισμός των συχνοτήτων των ΚΤΤ και της ω_δ

1. Χρησιμοποιώντας τις τιμές που μετρήσατε για τις k (σκληρό ελατήριο) και M (που εδώ είναι η μέση τιμή των μαζώνM_1, M_2, M_3), υπολογίστε [Εξ. (23.2)] τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές των γωνιακών συχνοτήτων των τριών ΚΤΤ, καθώς και τα σφάλματά τους, για το σύστημα με τρεις ταλαντωτές.

2. Από τις μετρήσεις του Πίνακα I, βρείτε τις μέσες τιμές και τα σφάλματα των περιόδων, $\overline{T} \pm \delta\overline{T}$, των τριών ΚΤΤ. Από τις τιμές αυτές βρείτε τις αντίστοιχες μέσες γωνιακές συχνότητες, καθώς και τα σφάλματά τους, και συγκρίνετε με τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές του προηγούμενου βήματος.

3. Επαναλάβετε τα βήματα 1 και 2 για το σύστημα των δύο ταλαντωτών, χρησιμοποιώντας τις τιμές του Πίνακα II και τις Εξ. (23.4).

4. Από την τελευταία στήλη του Πίνακα II, προσδιορίστε την περίοδο των μηχανικών διακροτημάτων, $\overline{T_\delta} \pm \delta\overline{T_\delta}$, και την αντίστοιχη γωνιακή συχνότητα, $\overline{\omega_\delta} \pm \delta\overline{\omega_\delta}$, και συγκρίνετε με τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή (Εξ. 23.9).

5. Ποια είναι η συχνότητα ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ των δύο ταλαντωτών; (Βλ. και Σχ. 23.4.)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Π23)

Π23.1. Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Από τη θεωρητική μελέτη της κίνησης χωρίς τριβές n συζευγμένων ταλαντωτών, προκύπτει ότι, αν οι εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές, τότε η πιο γενική κίνηση που μπορεί να εκτελέσει ο οποιοσδήποτε i από τους n ταλαντωτές, σε έναν τυχόντα γενικό (ακανόνιστο) τρόπο κίνησης του συστήματος, μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos\left(\omega_j t + \varphi_j\right), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{Π23.1}$$

Η σχέση αυτή μάς λέει ότι η απομάκρυνση $y_i(t)$ από τη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή i, τη χρονική στιγμή t, μπορεί να γραφεί ως γραμμική επαλληλία (υπέρθεση) n ανεξάρτητων αρμονικών κινήσεων, που εκτελούνται με τις συχνότητες ω_j των ΚΤΤ και με πλάτη A_{ij} και φάσεις φ_j. Τα A_{ij} και φ_j εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή από την απομάκρυνση και την ταχύτητα των διάφορων συζευγμένων ταλαντωτών τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Η Εξ. (Π23.1) δίνει τη δυνατότητα μελέτης της κίνησης του καθενός ξεχωριστού μέρους του συστήματος, όταν αυτό εκτελεί μια γενική κίνηση.

Π23.1.1. Σύστημα με τρεις συζευγμένους ταλαντωτές

Το Σχ. 23.1 δείχνει σχηματικά ένα μηχανικό σύστημα τριών σωμάτων με την ίδια μάζα M, συζευγμένων μεταξύ τους με ελατήρια που έχουν την ίδια σταθερά k και αμελητέα μάζα. Τα σώματα μπορούν να κινούνται κατά μήκος της διάταξης χωρίς τριβές. Αν y_1, y_2 και y_3 είναι οι αντίστοιχες απομακρύνσεις των μαζών 1, 2, και 3 από τη θέση ισορροπίας τους τη στιγμή t, τότε, εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στο κάθε σώμα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
M_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= -k y_1 + k\left(y_2 - y_1\right) \\
M_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= -k\left(y_2 - y_1\right) + k\left(y_3 - y_2\right) \\
M_3 \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} &= -k\left(y_3 - y_2\right) - k y_3
\end{aligned} \tag{Π23.2}$$

Εφόσον $M_1 = M_2 = M_3 = M$, διαιρώντας και τις τρεις εξισώσεις με το M και απλοποιώντας, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= -\frac{2k}{M} y_1 + \frac{k}{M} y_2 \\
\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= \frac{k}{M} y_1 - \frac{2k}{M} y_2 + \frac{k}{M} y_3 \\
\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} &= \frac{k}{M} y_2 - \frac{2k}{M} y_3
\end{aligned} \tag{Π23.3}$$

Αν το σύστημα ταλαντώνεται σε κάποιον ΚΤΤ με γωνιακή συχνότητα ω, τότε η απομάκρυνση κάθε σώματος του συστήματος από τη θέση ισορροπίας κατά τη χρονική στιγμή t μπορεί να γραφεί ως

$$y_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi), \quad i = 1, 2, 3 \tag{Π23.4}$$

Στην Εξ. (Π23.4) οι διαφορές φάσης 0° ή 180° μεταξύ των ταλαντωτών έχουν απορροφηθεί στα πρόσημα των συντελεστών A_i. Αντικαθιστώντας τις Εξ. (Π23.4) στις. (Π23.3), παίρνουμε ένα σύστημα ομογενών εξισώσεων, που έχει λύση μόνο για τιμές του ω που μηδενίζουν την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων,

$$\begin{vmatrix} \frac{2k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{M} & \frac{2k}{M} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{Π23.5}$$

Λύνοντας την Εξ. (Π23.5) ως προς ω, βρίσκουμε για τις γωνιακές συχνότητες των τριών ΚΤΤ:

$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{M}} \tag{Π23.6}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (Π23.4) και (Π23.6) στις Εξ. (Π23.3) παίρνουμε τις εξής σχέσεις μεταξύ των πλατών, χαρακτηριστικές για κάθε έναν από τους ΚΤΤ:

$$\begin{gathered} \text{1ος ΚΤΤ } (\omega_1)\text{: } A_1 = A_3, \quad A_2 = +\sqrt{2}A_1 \\ \text{2ος ΚΤΤ } (\omega_2)\text{: } A_1 = -A_3, \quad A_2 = 0 \\ \text{3ος ΚΤΤ } (\omega_3)\text{: } A_1 = A_3, \quad A_2 = -\sqrt{2}A_1 \end{gathered} \tag{Π23.7}$$

Οι Εξ. (Π23.7) υποδεικνύουν ότι, για να διεγερθεί ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης i, αρκεί οι αρχικές απομακρύνσεις A_i να ικανοποιούν την αντίστοιχη Εξ. (Π23.7). Οι τρεις ΚΤΤ απεικονίζονται σχηματικά στο Σχ. 23.2.