

# Άσκηση 29

## Μέτρηση της ταχύτητας του ήχου στα υγρά

### 29.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση της ταχύτητας του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη, με τη μέθοδο ενός στάσιμου υπερηχητικού κύματος που γίνεται ορατό με οπτικές μεθόδους, καθώς και ο προσδιορισμός του συντελεστή συμπιεστότητας του συγκεκριμένου υγρού.

### 29.2. Γενικά

#### 29.2.1. Εισαγωγικά

Η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων  $v_l$  μέσα σε ένα υλικό με διαστάσεις πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος  $\lambda$  των κυμάτων αυτών, δίνεται από τη σχέση

$$v_l = \sqrt{\frac{\frac{1}{k} + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (29.1)$$

όπου  $k$  είναι ο συντελεστής συμπιεστότητας του υγρού,  $G$  το μέτρο διάτμησης και  $\rho$  η πυκνότητα του υλικού.

Αντίστοιχα, η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων  $v_s$  μέσα σε οποιοδήποτε υλικό δίνεται από τη σχέση

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (29.2)$$

Επειδή στα ρευστά (υγρά, αέρια) το μέτρο διάτμησης είναι μηδέν ( $G = 0$ ), αυτό σημαίνει ότι:

- δεν διαδίδονται εγκάρσια κύματα στα ρευστά,
- η Εξ. (29.1) για τα διαμήκη κύματα απλοποιείται στην ακόλουθη:

$$v = \sqrt{\frac{1}{k_{ad} \rho}} \quad (29.3)$$

Το  $k_{ad}$  είναι, στην περίπτωση αυτή, ο **αδιαβατικός συντελεστής συμπιεστότητας**, επειδή στα ηχητικά κύματα (ιδιαίτερα στους υπερήχους) έχουμε γρήγορες εναλλαγές μεταξύ συμπίεσεων και εκτονώσεων, επομένως δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για τη μεταφορά θερμότητας από τις συμπιεζόμενες περιοχές προς τις εκτονούμενες, και αντίστροφα, με αποτέλεσμα οι διαδικασίες να είναι αδιαβατικές.

Στην Εξ. (29.3) ο συντελεστής  $k_{ad}$ , καθώς και η πυκνότητα του υγρού  $\rho$ , εξαρτώνται από τη θερμοκρασία ( $\theta$  σε  $^{\circ}\text{C}$  ή  $T$  σε  $\text{K}$ ), γεγονός που σημαίνει ότι και η ταχύτητα του ήχου μέσα στο υγρό εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

Σε όλα τα υγρά ο λόγος  $\Delta v / \Delta \theta = \Delta v / \Delta T$  έχει αρνητική τιμή (π.χ για τη γλυκερίνη έχουμε  $\Delta v / \Delta \theta = -1,8 \text{ ms}^{-1}/^{\circ}\text{C}$  και για την αιθυλική αλκοόλη  $\Delta v / \Delta \theta = -3,6 \text{ ms}^{-1}/^{\circ}\text{C}$ ), εκτός από την

περίπτωση του νερού, όπου ο λόγος αυτός είναι θετικός, με τιμή  $+2,5 \text{ ms}^{-1}/^\circ\text{C}$ . Αυτό σημαίνει ότι καθώς η θερμοκρασία του νερού αυξάνει, αυξάνει και η ταχύτητα του ήχου, αλλά μόνο μέχρι τους  $74^\circ\text{C}$ , όπου η  $v$  έχει τη μεγαλύτερη τιμή ( $1557 \text{ m/s}$ ). Στις υψηλότερες θερμοκρασίες η ταχύτητα του ήχου στο νερό αρχίζει να ελαττώνεται καθώς η θερμοκρασία αυξάνει.

### 29.2.2. Στάσιμα ηχητικά κύματα

Τα στάσιμα κύματα δημιουργούνται από τη συμβολή δύο κυμάτων που συνυπάρχουν στον ίδιο χώρο, διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, έχουν ίσο μήκος κύματος και ίσο, ή περίπου ίσο, πλάτος ταλάντωσης. Τέτοιες συνθήκες δημιουργούνται όταν ένα επίπεδο ακουστικό κύμα προσπίπτει κάθετα στην επίπεδη επιφάνεια ενός στερεού.

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο ακουστικό κύμα που, χωρίς να εξασθενεί, διαδίδεται σε ένα υγρό, προς τις αρνητικές τιμές του άξονα  $z$  (Σχ. 29.2). Έστω ότι η διακύμανση της πίεσης (ακουστική πίεση) δίνεται από τη σχέση  $p_1(z, t) = p_0 \sin(\omega t + kz + a)$ , όπου  $k = 2\pi/\lambda$  είναι ο κυματικός αριθμός,  $\omega$  η κυκλική συχνότητα και  $a$  είναι η αρχική φάση της ταλάντωσης στο σημείο  $z = 0$ , όπου το κύμα προσπίπτει στον πυθμένα του γυάλινου δοχείου που περιέχει το υγρό, ο οποίος λειτουργεί ως ανακλαστήρας.

Επειδή οι ακουστικές αντιστάσεις ( $Z = \rho c$ ) του υγρού,  $Z_1$ , και του γυαλιού,  $Z_2$ , διαφέρουν πολύ ( $Z_1 \ll Z_2$ ), ο συντελεστής ανάκλασης της πίεσης  $R_p$  είναι σχεδόν 1 (βλ. Άσκηση 28, Π28.5), επομένως το ανακλώμενο κύμα θα είναι  $p_2(z, t) = R_p p_1(z, t) = p_0 \sin(\omega t - kz + a)$

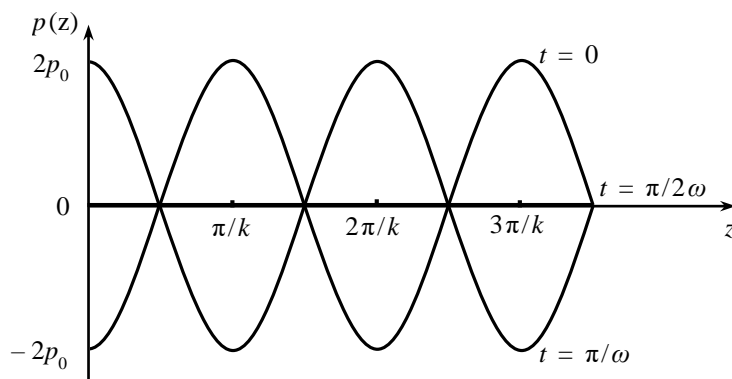
Η συμβολή των δύο κυμάτων δίνει

$$\begin{aligned} p(z, t) &= p_1 + p_2 = p_0 \sin(\omega t + kz + a) + p_0 \sin(\omega t - kz + a) \\ &= 2 p_0 \cos kz \sin(\omega t + a) \end{aligned} \quad (29.4)$$

Η Εξ. (29.4) είναι η κλασική συνάρτηση στάσιμου κύματος και μπορεί να γραφεί σε μορφή γινομένου δύο συναρτήσεων, μίας συναρτήσεως μόνο του  $z$  και μίας άλλης μόνο του  $t$ :

$$p(z, t) = p_1 + p_2 = P(z) f(t) \quad (29.5)$$

όπου  $f(t)$  είναι μια αρμονική συνάρτηση του χρόνου και  $P(z)$  η λεγόμενη συνάρτηση κατανομής των πλατών.



**Σχήμα 29.1.** Στιγμαία κατανομή της ακουστική πίεσης ως συνάρτηση της θέσης,  $z$ , για τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Όπως φαίνεται και στο Σχ. 29.1, στον πυθμένα του δοχείου ( $z = 0$ ) και σε μερικά άλλα σημεία, η ακουστική πίεση έχει τιμή διπλάσια από εκείνη του προσπίπτοντος κύματος (**κοιλίες**

πίεσης), ενώ υπάρχουν σημεία όπου η ακουστική πίεση είναι πάντα μηδέν, δηλαδή η πίεση παραμένει αμετάβλητη (δεσμοί πίεσης).

Οι δεσμοί και οι κοιλίες προφανώς ορίζονται από τα μηδενικά και τα ακρότατα της συνάρτησης  $P(z) = 2 p_0 \cos kz$ , επομένως οι κοιλίες της πίεσης βρίσκονται στα σημεία  $z_k$ , για τα οποία ισχύει

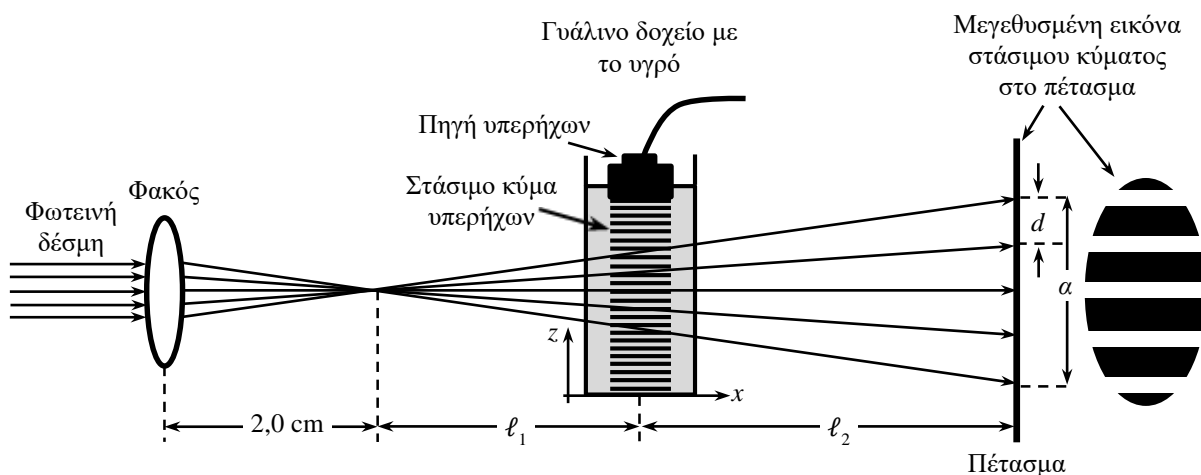
$$k z_k = n \pi \quad \text{ή} \quad z_k = n \lambda / 2 \quad \text{όπου } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (29.6)$$

ενώ οι δεσμοί της πίεσης βρίσκονται στα σημεία  $z_\delta$ , για τα οποία ισχύει

$$k z_\delta = \pi / 2 + n \pi \quad \text{ή} \quad z_\delta = \lambda / 2 (1/2 + n) \quad \text{όπου } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (29.7)$$

### 29.3. Μέθοδος

Στην παρούσα εργασία θα μετρηθεί η ταχύτητα του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη με τη μέθοδο του στάσιμου ηχητικού κύματος. Για την πραγματοποίηση της μεθόδου χρησιμοποιείται η διάταξη που απεικονίζεται στο Σχ. 29.2.



Σχίμα 29.2. Διάταξη για τη μέτρηση της ταχύτητας του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη.

Ένα γυάλινο δοχείο είναι γεμάτο με αιθυλική αλκοόλη. Μια επίπεδη πηγή υπερήχων στέλνει ένα σχεδόν επίπεδο ηχητικό κύμα το οποίο, ανακλώμενο στον πυθμένα του δοχείου, δημιουργεί ένα στάσιμο κύμα κατά μήκος του άξονα  $z$ . Με τη βοήθεια ενός λέιζερ και ενός συγκεντρωτικού φακού, φωτίζουμε το γυάλινο δοχείο με μια αποκλίνουσα φωτεινή δέσμη, η οποία καταλήγει σε ένα πέτασμα. Με αυτό τον τρόπο, η εικόνα που προβάλλεται στο πέτασμα είναι μεγεθυσμένη κατά

$$M = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1} \quad (29.8)$$

όπου  $\ell_1$  είναι η απόσταση μεταξύ της εστίας του φακού και του μέσου του γυάλινου δοχείου και  $\ell_2$  η απόσταση από το μέσο του δοχείου μέχρι το πέτασμα.

Στο Παράρτημα (Π29), στο τέλος της άσκησης, εξετάζονται λεπτομερέστερα οι γενικότερες συνθήκες υπό τις οποίες παρατηρείται εκτροπή του φωτός όταν αυτό διέρχεται μέσα από οπτικώς ανομοιογενή μέσα. Εντός του υγρού στο δοχείο, η διακύμανση της πίεσης μεταβάλλει την πυκνότητά του, κατά συνέπεια επηρεάζει και μεταβάλλει την τιμή του δείκτη διάθλασης, με αποτέλεσμα να διαμορφωθεί και αυτός ελαφρώς κατά μήκος του άξονα  $z$ , ακολουθώντας την κατανομή της ακουστικής πίεσης μέσα στο υγρό. Επομένως, δημιουργείται

μια βαθμίδα στον δείκτη διάθλασης του υγρού η οποία, σύμφωνα με την εξίσωση Lorenz-Lorentz, είναι:

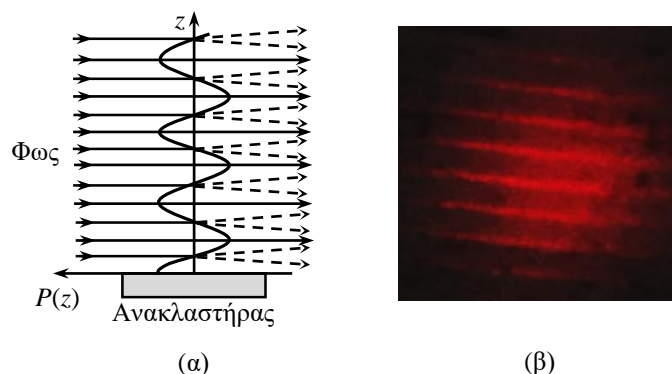
$$\frac{dn}{dz} = \frac{1}{6n} k_{ad} (n^2 - 1)(n^2 + 2) \frac{dp}{dz} \quad (29.9)$$

Από τις Εξ. (29.4) και (29.9) έχουμε

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{1}{6n} k_{ad} (n^2 - 1)(n^2 + 2) 2k p_0 \sin kz \cos(\omega t + \alpha) \quad (29.10)$$

Με άλλα λόγια, στις κοιλίες της πίεσης [Εξ. (29.6)], η βαθμίδα  $dn/dz$  μηδενίζεται, δηλαδή ο δείκτης διάθλασης παραμένει σταθερός με τον χρόνο. Αντίθετα, στους δεσμούς της πίεσης [Εξ. (29.7)], η βαθμίδα  $dn/dz$  μεταβάλλεται με τον χρόνο, εναλλάσσοντας το πρόσημό της με πλάτος  $(1/3n) k_{ad} (n^2 - 1)(n^2 + 2) k p_0$ .

Κατά συνέπεια, στο στάσιμο ηχητικό πεδίο υπάρχουν σημεία (κοιλίες πίεσης) που δεν εκτρέπουν τις φωτεινές ακτίνες, οπότε αυτές συνεχίζουν την πορεία τους και αφήνουν στο πέτασμα ένα λαμπρό φωτεινό ίχνος. Όμως, υπάρχουν και σημεία (δεσμοί πίεσης) που εκτρέπουν έντονα το φως, με αποτέλεσμα το φωτεινό ίχνος των ακτίνων που διέρχονται από τα σημεία αυτά να έχει την ελάχιστη λαμπρότητα. Με τον τρόπο αυτό το στάσιμο ηχητικό πεδίο μέσα στο υγρό γίνεται ορατό στο πέτασμα, με τη μορφή φωτεινών και σκοτεινών περιοχών (κροσσών), η απόσταση των οποίων μπορεί εύκολα να μετρηθεί (Σχ. 29.2 και 29.3).



**Σχήμα 29.3.** (α) Η εκτροπή των φωτεινών ακτίνων από στάσιμο ηχητικό πεδίο, (β) Η εικόνα στο πέτασμα.

Σε ένα στάσιμο κύμα, η απόσταση μεταξύ δύο δεσμών ή δύο κοιλιών ισούται με  $\lambda/2$ , όπου  $\lambda$  είναι το μήκος κύματος του διαδιδόμενου κύματος. Επομένως, αν μετρηθεί στο πέτασμα η απόσταση  $d$  μεταξύ π. χ. δύο φωτεινών κροσσών, τότε θα ισχύει

$$\lambda = \frac{2d}{M} \quad (29.11)$$

Επειδή η συχνότητα  $f$  της ηχητικής πηγής είναι γνωστή, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ήχου  $v$  μέσα στο εξεταζόμενο υγρό από τη γνωστή σχέση

$$v = \lambda f \quad (29.12)$$

Στην πράξη, για να μειωθεί το σφάλμα στη μέτρηση της απόστασης πάνω στο πέτασμα, μετριέται η συνολική απόσταση  $a$  μεταξύ ενός αριθμού  $n$  φωτεινών κροσσών, οπότε προκύπτει

$$d = \frac{a}{n-1} \quad (29.13)$$

## 29.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη φαίνεται στο Σχ. 29.2 και περιλαμβάνει:

- Μία γεννήτρια υπερηχητικών συχνοτήτων (δεν απεικονίζεται). Η γεννήτρια αυτή παρέχει εναλλασσόμενη υψηλή τάση συχνότητας 800 kHz και, επιπλέον, προσφέρει τη δυνατότητα ελέγχου της τιμής της τάσης εξόδου.
- Μία επίπεδη πηγή υπερήχων από χαλαζία (πιεζοκρύσταλλο) που, όταν τροφοδοτηθεί από τη γεννήτρια, παράγει υπερήχους της ίδιας συχνότητας με εκείνη της πηγής (800 kHz).
- Ένα γυάλινο δοχείο που περιέχει την αιθυλική αλκοόλη. Μέσα στο υγρό αυτό δημιουργείται το στάσιμο υπερηχητικό πεδίο από την πηγή υπερήχων.
- Ένα λέιζερ He-Ne ισχύος 2-3 mW (δεν απεικονίζεται).
- Έναν συγκεντρωτικό φακό εστιακής απόστασης 2,0 cm.
- Ένα πέτασμα με χαρτί μιλιμετρέ, πάνω στο οποίο, με τη βοήθεια του φακού, προβάλλεται η εικόνα του στάσιμου κύματος που δημιουργείται στο υγρό.
- Έναν χάρακα για τη μέτρηση των διάφορων αποστάσεων (δεν απεικονίζεται).
- Ένα θερμόμετρο για τη μέτρηση της θερμοκρασίας του υγρού (δεν απεικονίζεται).

## Βιβλιογραφία

1. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, <sup>4</sup>2022), 11.4, 15.1, 15.2, 16.1, 16.2, 16.4· Τόμος Β': *Ηλεκτρομαγνητισμός – Οπτική – Σύγχρονη Φυσική*. (Αθήνα, <sup>4</sup>2022), 33.2, 33.7.
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική: Βασικές αρχές*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 2021), 16.1, 16.7, 17.1, 17.2· Τόμος Β': *Ηλεκτρομαγνητισμός – Οπτική – Σύγχρονη Φυσική* (Αθήνα, 2021), 34.1.
3. R. A. Serway, J. W. Jewett, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς: Μηχανική – Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα – Θερμοδυναμική – Σχετικότητα* (Αθήνα, 2012), T3.1, T3.2, T4.2, T4.4, T4.5.
4. H. J. Pain, *Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων* (Αθήνα, 1991), 5.1, 5.2, 5.5, 5.8, 5.9.
5. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος ΙΙ (Αθήνα, 2011), σ. 145-152, 317-321.

## 29.5. Εκτέλεση

1. Γεμίστε το γυάλινο δοχείο με αιθυλική αλκοόλη, έως 1 cm κάτω από το χείλος του.
2. Θέστε σε λειτουργία το λέιζερ και φροντίστε ώστε η φωτεινή δέσμη να περνάει από το κέντρο του φακού και, στη συνέχεια, 1-2 cm κάτω από την επιφάνεια του υγρού, καταλήγοντας στο πέτασμα.
3. Βυθίστε την πηγή των υπερήχων κατά 2 mm μέσα στο υγρό.

4. Θέστε σε λειτουργία την πηγή υπερήχων και ρυθμίστε την τάση εξόδου με το κουμπί «Amplitude».

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Να μην υπερβείτε την ένδειξη που σημειώνεται με ένα θαυμαστικό (!) στο τέλος της μαύρης ζώνης.

5. Εάν όλα έχουν γίνει σωστά, με κατάλληλη ρύθμιση του πλάτους της ταλάντωσης, θα παρατηρήσετε πάνω στο πέτασμα έναν αριθμό εναλλασσόμενων φωτεινών και σκοτεινών κροσσών. Η εικόνα αυτή είναι η προβολή (υπό μεγέθυνση) του στάσιμου υπερηχητικού πεδίου. Αν η εικόνα δεν είναι ικανοποιητικά καθαρή, ανεβάστε λίγο τη βάση του δοχείου (με τη βοήθεια του πλευρικού κοχλίου), ωσότου πετύχετε μια καθαρή εικόνα.

6. Μετρήστε έναν αριθμό  $n$  φωτεινών κροσσών, καθώς και την απόσταση  $a$  μεταξύ του πρώτου και του  $n$ -στού κροσσού και εκτιμήστε το σφάλμα  $\delta a$ .

7. Μετρήστε τη θερμοκρασία  $\theta$  του υγρού.

8. Μετρήστε την απόσταση  $\ell_1$  από την εστία του φακού (η εστία του φακού βρίσκεται στα 2 cm από τον φακό) μέχρι το μέσο του γυάλινου δοχείου και την απόσταση  $\ell_2$  από το μέσο του γυάλινου δοχείου μέχρι το πέτασμα (βλ. Σχ. 29.2). Εκτιμήστε τα αντίστοιχα σφάλματα  $\delta \ell_1$  και  $\delta \ell_2$ .

9. Κλείστε όλα τα όργανα και αδειάστε το γυάλινο δοχείο, μεταφέροντας την αιθυλική αλκοόλη πίσω στο αρχικό της δοχείο.

#### 29.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Από την Εξ. (29.13), υπολογίστε τη μέση απόσταση,  $d \pm \delta d$ , μεταξύ δύο γειτονικών φωτεινών κροσσών στο πέτασμα.

2. Με τη βοήθεια των Εξ. (29.8) και (29.11), υπολογίστε το μήκος κύματος,  $\lambda \pm \delta \lambda$ , του στάσιμου υπερηχητικού κύματος.

3. Από την Εξ. (29.12), υπολογίστε την ταχύτητα του ήχου,  $v \pm \delta v$ , θεωρώντας αμελητέο το σφάλμα της συχνότητας.

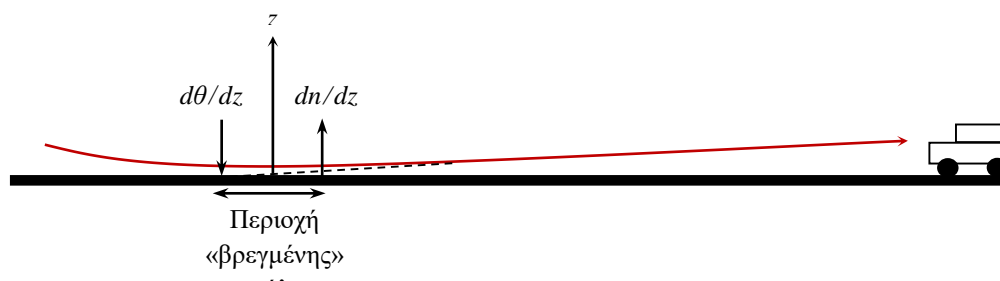
4. Συγκρίνετε την τιμή της ταχύτητας του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη που μετρήσατε με την τιμή που δίνεται στη βιβλιογραφία. Αν η τιμή δεν αναφέρεται στη ίδια θερμοκρασία, να συγκρίνετε τις δύο τιμές αφού γίνουν οι σχετικές διορθώσεις.

5. Από την Εξ. (29.3), υπολογίστε τον αδιαβατικό συντελεστή συμπίεστικότητας,  $k_{ad} \pm \delta k_{ad}$ , της αιθυλικής αλκοόλης και συγκρίνετε με την τιμή που δίνεται στη βιβλιογραφία.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Π29)

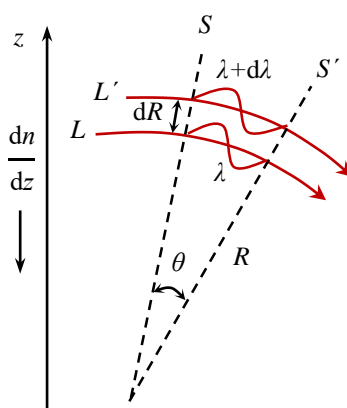
### Π29.1 Διάδοση του φωτός σε οπτικώς ανομοιογενή μέσα

Αν ένα φωτεινό κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης  $n$ , ο οποίος μεταβάλλεται π.χ. κατά τη διεύθυνση  $z$ , υπάρχει δηλαδή μια βαθμίδα  $dn/dz$ , τότε οι ακτίνες του φωτός καμπυλώνονται και το φως οδεύει προς την περιοχή όπου ο δείκτης διάθλασης αυξάνεται (αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν κατά μήκος του άξονα  $z$  ελαττώνεται η θερμοκρασία). Έτσι δημιουργείται το γνωστό φαινόμενο του αντικατοπτρισμού (*mirage*), της οπτικής απάτης δηλαδή που παρατηρείται συνήθως το καλοκαίρι πάνω από την άμμο της ερήμου ή από ασφαλτοστρωμένους δρόμους. Πράγματι, σε μεγάλη απόσταση από τον παρατηρητή («ξυστή» γωνία παρατήρησης), η άσφαλτος φαίνεται να είναι βρεγμένη, ενώ στην πραγματικότητα ο οδηγός βλέπει ένα τμήμα του ουρανού. Το φαινόμενο οφείλεται ακριβώς στην καμπύλωση των φωτεινών ακτίνων, που διαθλώνται σε στρώματα αέρα με αυξανόμενο προς τα πάνω δείκτη διάθλασης, επειδή η θερμοκρασία του αέρα ελαττώνεται με την απομάκρυνση από το έδαφος (Σχ. Π29.1).



Σχήμα Π29.1. Καμπύλωση φωτεινής ακτίνας πάνω από την πυρακτωμένη άσφαλτο.

Ας εξετάσουμε μια απλή απόδειξη που αναφέρεται στον υπολογισμό της ακτίνας καμπυλότητας ενός φωτεινού κύματος, το οποίο διαδίδεται μέσα σε οπτικό μέσο, ο δείκτης διάθλασης του οποίου μεταβάλλεται κατά την κατεύθυνση  $z$  (Σχ. Π29.2).



Σχήμα Π29.2. Διάδοση φωτεινού κύματος σε ανομοιογενές μέσο.

Έστω ότι δύο πολύ κοντινές φωτεινές ακτίνες  $L$  και  $L'$  κινούνται προς τα δεξιά, σε χώρο όπου ο δείκτης διάθλασης αυξάνεται προς τις αρνητικές τιμές του  $z$ . Αν θεωρήσουμε δύο ισοφασικές επιφάνειες  $S$  και  $S'$  (δηλαδή τις δύο κοντινότερες επιφάνειες στις οποίες το κύμα έχει την ίδια φάση), τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με το μήκος κύματος. Εφόσον ο δείκτης διάθλασης  $n$  του μέσου μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση  $z$ , θα μεταβάλλεται και η

ταχύτητα διάδοσης του φωτός  $c$  στο μέσο κατά τη διεύθυνση αυτή, επομένως και το μήκος κύματος  $\lambda$  του φωτός, δοθέντος ότι

$$\lambda(n) = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{nf} \quad (\text{Π29.1})$$

όπου  $c_0$  είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και  $f$  η συχνότητά του φωτεινού κύματος.

Έστω ότι  $\lambda$  και  $\lambda + d\lambda$  είναι τα μήκη κύματος των δύο ακτίνων  $L$  και  $L'$ , αντίστοιχα. Από το Σχ. Π29.2 παρατηρούμε ότι

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (\text{Π29.2})$$

ή

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dR} = \frac{d \ln \lambda}{dR} \quad (\text{Π29.3})$$

Αν λογαριθμίσουμε την Εξ. (Π29.1), παίρνουμε

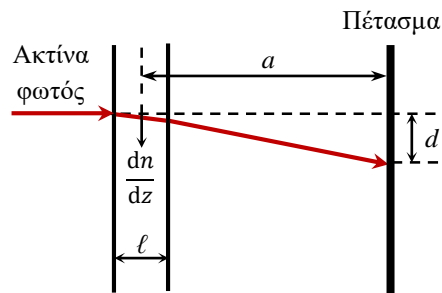
$$\ln \lambda = \ln c_0 - \ln n - \ln f \quad (\text{Π29.4})$$

που, σε συνδυασμό με την Εξ. (Π29.3), δίνει

$$\frac{1}{R} = - \frac{d \ln n}{dR} = - \frac{1}{n} \frac{dn}{dR} \quad (\text{Π29.5})$$

δοθέντος ότι  $d \ln c_0 = 0$  και  $d \ln f = 0$ , αφού τα  $c_0$  και  $f$  είναι σταθερά μεγέθη, ανεξάρτητα από το δείκτη διάθλασης.

Ας θεωρήσουμε τώρα (Σχ. Π29.3) έναν διαφανή κύλινδρο διαμέτρου  $\ell$ , κατασκευασμένο από ένα υλικό με ανομοιογένεια  $dn/dz$  στον δείκτη διάθλασης.



**Σχήμα Π29.3.** Εκτροπή της ακτίνας πάνω στο πέτασμα, εξαιτίας της μεταβολής του δείκτη διάθλασης κατά την κατεύθυνση  $z$ .

Όταν μια ακτίνα φωτός διαπερνά τον κύλινδρο διαμετρικά, η εκτροπή  $d$  του ίχνους της ακτίνας πάνω σε ένα πέτασμα που απέχει απόσταση  $a$  από τον κύλινδρο, αποδεικνύεται ότι είναι, με καλή προσέγγιση,

$$d = a \ell \frac{dn}{dz} \quad (\text{Π29.6})$$

όταν οι γωνίες είναι μικρές και  $a \gg \ell$ . Σημειώνεται ότι η αλλαγή του προσήμου της  $dn/dz$  συνεπάγεται και αλλαγή του προσήμου της εκτροπής.