

# Άσκηση 31

## Θερμιονική εκπομπή ηλεκτρονίων

### 31.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή μελετάται το φαινόμενο της θερμιονικής εκπομπής και ελέγχονται οι δύο βασικοί νόμοι του φαινομένου, ο νόμος του Langmuir ή νόμος «3/2» (τριών δευτέρων) και ο νόμος του Richardson. Προσδιορίζεται επίσης το έργο εξόδου των ηλεκτρονίων από το βολφράμιο με τη μέθοδο Richardson.

### 31.2. Γενικά

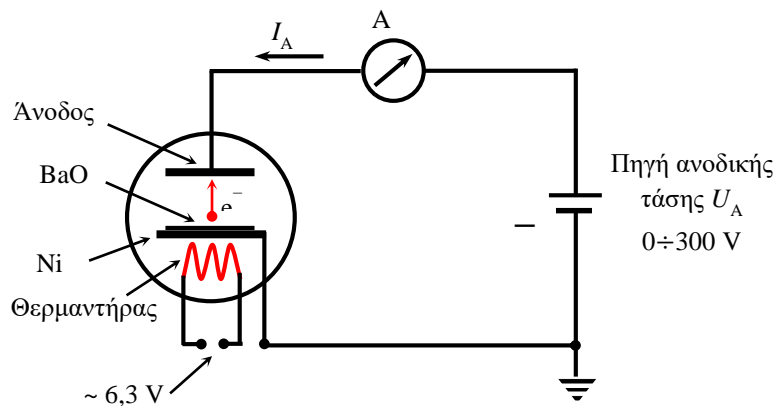
#### 31.2.1. Το φαινόμενο της θερμιονικής εκπομπής

Όπως είναι γνωστό, στις υψηλές θερμοκρασίες τα μέταλλα εκπέμπουν ηλεκτρόνια. Αν τα ηλεκτρόνια αυτά δεν συλλέγονται από άλλον αγωγό, θα σχηματιστεί πάνω από τη θερμή επιφάνεια ένα νέφος ηλεκτρονίων, οι ροές των οποίων, από και προς την επιφάνεια, θα είναι ίσες. Αν όμως κοντά στη θερμή επιφάνεια τοποθετηθεί ένας αγωγός, στον οποίο εφαρμόζεται θετικό δυναμικό σε σχέση με τη θερμή μεταλλική επιφάνεια, ένα μέρος των ηλεκτρονίων του νέφους θα οδηγηθεί προς τον αγωγό αυτό. Η θερμή επιφάνεια βρίσκεται συνήθως σε χώρο υψηλού κενού, ώστε να προστατεύεται από τις οξειδώσεις και να διευκολύνεται η κίνηση των ηλεκτρονίων. Στις ηλεκτρονικές διατάξεις, η θερμή επιφάνεια λειτουργεί ως πηγή ηλεκτρονίων και ονομάζεται **κάθοδος**. Ο δεύτερος αγωγός, συνήθως υπό μορφή μεταλλικού δίσκου ή κυλίνδρου, λειτουργεί ως συλλέκτης ηλεκτρονίων και ονομάζεται **άνοδος**. Τα δύο ηλεκτρόδια, άνοδος και κάθοδος, τοποθετημένα σε χώρο υψηλού κενού, συγκροτούν την ονομαζόμενη **δίοδο κενού** και αποτελούν τα βασικότερα στοιχεία των ηλεκτρονικών λυχνιών, καθοδικών σωλήνων των παλμογράφων, ραντάρ, τηλεοράσεων και οθονών υπολογιστών, κλειστρών, πηγών ακτίνων X, ηλεκτρονικών μικροσκοπίων κ.λπ.

#### 31.2.2. Θέρμανση της καθόδου – Ανοδικό ρεύμα

Η θέρμανση της καθόδου μπορεί να γίνει είτε άμεσα είτε έμμεσα. Στην κάθοδο άμεσου θερμάνσεως, όπως είναι η κάθοδος της διόδου της άσκησης (Σχ. 31.3), η κάθοδος θερμαίνεται άμεσα μέσω διοχέτευσης ενός σχετικά μεγάλου ρεύματος θέρμανσης της τάξης των 2-2,5 A, οπότε επιτυγχάνεται η θέρμανση της καθόδου στους 1700-2500 K. Στην κάθοδο έμμεσου θερμάνσεως (Σχ. 31.1), για τη θέρμανση (1000-1100 K) χρησιμοποιείται ένας θερμαντήρας, ο οποίος τροφοδοτείται από μια ξεχωριστή πηγή τάσης 6,3 V, AC. Πηγή ηλεκτρονίων είναι ένα λεπτό στρώμα οξειδίου του βαρίου (BaO) που βρίσκεται πάνω σε φύλλο νικελίου. Ο θερμαντήρας θερμαίνει το νικέλιο και, ακολούθως, θερμαίνεται το οξείδιο. Στις θερμοκρασίες 1000-1100 K, το BaO έχει τη μεγαλύτερη απόδοση εκπομπής, ίση με 100 mA/cm<sup>2</sup>, και χρησιμοποιείται σχεδόν σε όλες τις ηλεκτρονικές διατάξεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Όταν στην άνοδο εφαρμόζεται θετικό δυναμικό σε σχέση με την κάθοδο, η ροή των ηλεκτρονίων που καταφθάνουν στην άνοδο δημιουργεί ένα ρεύμα, το λεγόμενο ανοδικό ρεύμα  $I_A$ , το οποίο μπορεί να μετρηθεί, αρκεί η σύνδεση της ανόδου με τον θετικό πόλο της πηγής ανοδικής τάσης  $U_A$  να γίνει μέσω ενός ευαίσθητου μετρητή ρεύματος (A).

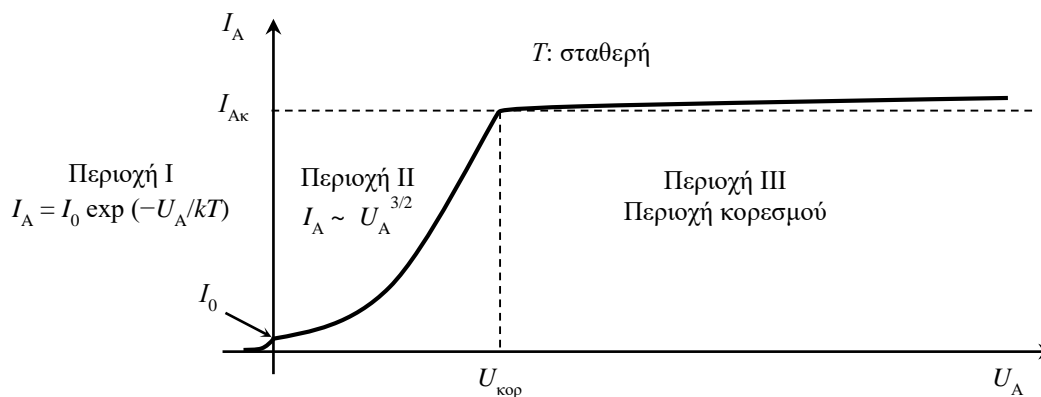


Σχήμα 31.1. Κύκλωμα τροφοδότησης διόδου κενού με κάθοδο εμμέσου θερμάνσεως.

### 31.2.3. Ο ρόλος της ανοδικής τάσης – Νόμος του Langmuir ή νόμος των «3/2»

Το ανοδικό ρεύμα είναι μια περίπλοκη συνάρτηση της ανοδικής τάσης  $U_A$  και της θερμοκρασίας  $T$  της καθόδου. Στο Σχ. 31.2 δίνεται η γραφική παράσταση του ανοδικού ρεύματος  $I_A$ , συναρτήσει της ανοδικής τάσης  $U_A$ , για μια δίοδο, η κάθοδος και η άνοδος της οποίας είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό και η θερμοκρασία της καθόδου διατηρείται σταθερή. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $I_A = f(U_A)$  μπορεί να χωριστεί σε τρεις περιοχές:

- Περιοχή επιβράδυνσης των ηλεκτρονίων ( $U_A < 0$ ),
- Περιοχή φορτίων χώρου του νέφους ηλεκτρονίων ( $0 < U_A < U_{\text{κορ}}$ ), όπου  $U_{\text{κορ}}$  είναι η **τάση κορεσμού**,
- Περιοχή κορεσμού ( $U_A > U_{\text{κορ}}$ ).



Σχήμα 31.2. Η καμπύλη ρεύματος-τάσης της δίοδου όταν η θερμοκρασία  $T$  της καθόδου είναι σταθερή.

Στη συνέχεια θα εξεταστεί κάθε περιοχή χωριστά.

- I. Στην πρώτη περιοχή το ανοδικό ρεύμα είναι εκθετική συνάρτηση της τάσης και είναι συγκριτικά πολύ μικρότερο απ' ό,τι στις άλλες δύο περιοχές. Οφείλεται σε ηλεκτρόνια που εγκαταλείπουν την κάθοδο με μεγάλες αρχικές ταχύτητες και, παρά το γεγονός ότι η άνοδος τα απωθεί, εκείνα που έχουν θερμική ενέργεια μεγαλύτερη από  $eU_A$  συγκρούονται με την άνοδο και δημιουργούν το ανοδικό ρεύμα. Το ανοδικό ρεύμα ακολουθεί τον νόμο  $I_A = I_0 \exp(-U_A/kT)$

II. Στη δεύτερη περιοχή της καμπύλης το ανοδικό ρεύμα επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από το ηλεκτρικό πεδίο του νέφους ηλεκτρονίων που δημιουργείται πάνω από την επιφάνεια της καθόδου και υπακούει στον νόμο:

$$I_A = I_0 + B \times U_A^{3/2} \approx B \times U_A^{3/2}, \quad \text{επειδή } I_0 \approx 0, \quad (31.1)$$

όπου  $B$  μια σταθερά. Η Εξ. (31.1) αποτελεί τον πρώτο σπουδαίο νόμο της θερμοϊονικής εκπομπής και ονομάζεται **νόμος του Langmuir** ή **νόμος των «3/2»** (νόμος των τριών δευτέρων). Πρώτος ο Langmuir εξήγαγε θεωρητικά τον νόμο αυτό, με την προσέγγιση ότι οι αρχικές ταχύτητες των ηλεκτρονίων είναι μηδέν (βλ. Π31.3 στο Παράρτημα, στο τέλος της άσκησης).

III. Στην τρίτη περιοχή, ή **περιοχή κορεσμού**, το ανοδικό ρεύμα ( $I_{Ak}$ ) παραμένει σχεδόν αμετάβλητο. Στην περιοχή αυτή οι μεγάλες ανοδικές τάσεις απορροφούν πλήρως το νέφος και επιβάλλουν σε όλα τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο να κινηθούν προς την άνοδο. Η μικρή αύξηση του ανοδικού ρεύματος, που παρατηρείται καθώς αυξάνεται η ανοδική τάση, οφείλεται στη μείωση του έργου εξόδου που προκαλεί η ανοδική τάση και ονομάζεται **φαινόμενο Schottky** (βλ. Π31.4).

#### 31.2.4. Ο ρόλος της θερμοκρασίας – Νόμος του Richardson

Το ρεύμα κορεσμού της ανόδου εξαρτάται πολύ έντονα από τη θερμοκρασία  $T$ , αλλά εξίσου έντονα και από το **έργο εξόδου των ηλεκτρονίων**,  $\varphi$ , από το μέταλλο, το οποίο ορίζεται ως η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να απελευθερωθούν τα ηλεκτρόνια από την επιφάνεια του μετάλλου. Στο Παράρτημα (Πίνακας I), δίνονται οι τιμές του  $\varphi$  για μερικά μέταλλα, όπως μετρήθηκαν πειραματικά.

Η θερμοκρασιακή εξάρτηση του ρεύματος κορεσμού  $I_{Ak}$  μελετήθηκε πρώτα πειραματικά, και αποδείχθηκε αργότερα θεωρητικά από τους Richardson και Dushman (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον). Στη βιβλιογραφία ο νόμος αυτός αποκαλείται **νόμος Richardson-Dushman** ή **νόμος του Richardson**. Είναι ο δεύτερος σπουδαίος νόμος της θερμοϊονικής εκπομπής και έχει τη μορφή:

$$I_{Ak} = CT^2 \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \quad (31.2)$$

όπου  $T$  η θερμοκρασία της καθόδου σε βαθμούς kelvin (K),  $\varphi$  το έργο εξόδου,  $k$  η σταθερά του Boltzmann και  $C$  μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το υλικό του μετάλλου (βλ. Π31.2).

#### 31.2.5. Μείωση του έργου εξόδου – Φαινόμενο Schottky

Για τη μείωση  $\Delta\varphi$  του έργου εξόδου στην περιοχή III του Σχ. 31.2, οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν (βλ. Π31.4):

$$\Delta\varphi = \sqrt{\frac{e^3 \mathcal{E}}{4 \pi \epsilon_0}} \quad (31.3)$$

όπου  $\mathcal{E}$  είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της καθόδου και  $\epsilon_0$  η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Επειδή στον νόμο Richardson το έργο εξόδου βρίσκεται στον εκθέτη, ακόμα και μια μικρή μεταβολή του (για  $\mathcal{E} = 10^7$  V/m έχουμε  $\Delta\varphi = 0,12$  eV) επηρεάζει αισθητά το ρεύμα κορεσμού.

Στη δίοδο υψηλής τάσης, για παράδειγμα στις πηγές ακτίνων X, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συχνά είναι της τάξης  $10^7$  V/m. Αν η κάθοδος της λυχνίας είναι κατασκευασμένη από πολυκρυσταλλικό βολφράμιο ( $\varphi = 4,5$  eV,  $T = 2500$  K), τότε το μεγάλο ηλεκτρικό πεδίο θα επιφέρει αύξηση του ανοδικού ρεύματος κατά 80%, επομένως, η μείωση του  $\varphi$  θα πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνεται υπόψη. Συνεπώς, τα μεγάλα ηλεκτρικά πεδία τροποποιούν τη σχέση Richardson στη μορφή:

$$I_{Ak} = CT^2 \exp\left(-\frac{\varphi - \Delta\varphi}{kT}\right) \quad (31.4)$$

### 31.3. Μέθοδος

Η μελέτη της θερμοϊονικής εκπομπής γίνεται με τη βοήθεια μιας διόδου υψηλού κενού, που απεικονίζεται στο Σχ. 31.3.

Η πειραματική επαλήθευση του εκθέτη  $3/2$  στον νόμο του Langmuir γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Βλέπουμε ότι αν λογαριθμίσουμε την Εξ. (31.1), βρίσκουμε τη σχέση:

$$\ln I_A = \ln B + (3/2) \ln U_A \quad (31.5)$$

Επομένως, αν καταγράψουμε τη σχέση μεταξύ ανοδικού ρεύματος  $I_A$  και ανοδικής τάσης  $U_A$ , και σχεδιάσουμε τις τιμές του  $\ln I_A$  ως συνάρτηση του  $\ln U_A$ , θα πρέπει να βρούμε μια ευθεία με κλίση ίση με  $3/2$ . Για την καταγραφή αυτή θα πρέπει να εφαρμόσουμε στο νήμα της καθόδου ένα σταθερό ρεύμα θέρμανσης και, μεταβάλλοντας σταδιακά την ανοδική τάση, να μετράμε το ανοδικό ρεύμα.

Για τη μέτρηση του έργου εξόδου χρησιμοποιείται η σχέση του Richardson [Εξ. (31.2)], που μας δίνει το ρεύμα κορεσμού της λυχνίας ως συνάρτηση της θερμοκρασίας  $T$  και του έργου εξόδου  $\varphi$  του μετάλλου. Πράγματι, αν λογαριθμίσουμε τη σχέση αυτή, βρίσκουμε

$$\ln\left(\frac{I_A}{T^2}\right) = \ln C - \frac{\varphi}{k} \cdot \frac{1}{T} \quad (31.6)$$

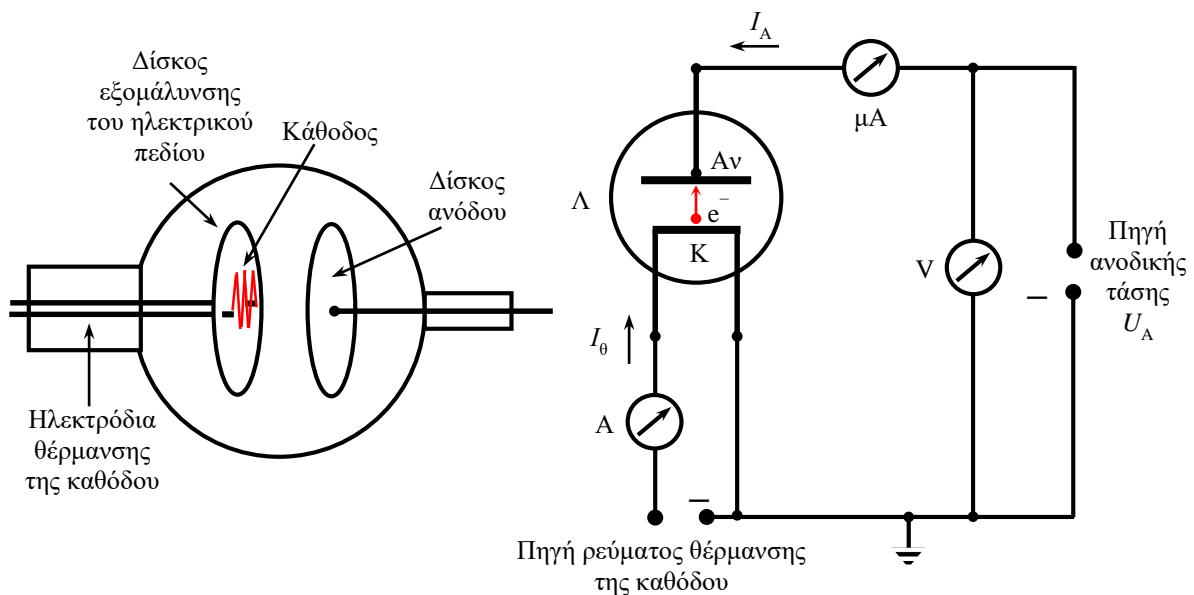
Η Εξ. (31.6) δείχνει ότι η γραφική παράσταση του  $y = \ln(I_A/T^2)$  ως συνάρτηση του  $x = 1/T$  είναι μια ευθεία που τέμνει τον άξονα των  $y$  στο σημείο  $\ln C$ , ενώ η κλίση της είναι  $-\varphi/k$ . Η μέτρηση του ανοδικού ρεύματος κορεσμού σε διαφορετικές θερμοκρασίες της καθόδου δίνει επομένως τη δυνατότητα προσδιορισμού της κλίσης  $-\varphi/k$  της ευθείας της Εξ. (31.6) και, από αυτήν, του έργου εξόδου  $\varphi$  σε eV, εφόσον χρησιμοποιηθεί για τη σταθερά του Boltzmann η τιμή  $k = 8,617 \times 10^{-5}$  eV/K.

### 31.4. Πειραματική διάταξη

Η μελέτη της θερμοϊονικής εκπομπής γίνεται με τη βοήθεια μιας διόδου υψηλού κενού, η κάθοδος της οποίας είναι κατασκευασμένη από πολυκρυσταλλικό βολφράμιο, υπό μορφή λεπτού σύρματος σε σχήμα «ζικ-ζακ», και είναι αμέσου θερμάνσεως (Σχ. 31.3α). Αριστερά και πίσω από την κάθοδο βρίσκεται ένας μεταλλικός δίσκος, προορισμός του οποίου είναι να εξομαλύνει και να ομογενοποιεί το πεδίο μεταξύ καθόδου και ανόδου. Η κάθοδος, με μήκος 70 mm και διάμετρο 0,16 mm, θερμαίνεται με ένα σχετικά μεγάλο ρεύμα θέρμανσης της τάξης των 2-2,5 A. Η θερμοκρασία της καθόδου προσδιορίζεται έμμεσα από την τιμή του ρεύματος θέρμανσης  $I_\theta$  που την διαρρέει, με τη βοήθεια του πίνακα που είναι αναρτημένος στη βάση της λυχνίας (βλ. και Παράρτημα, Πίνακας III).

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει ακόμα:

- το τροφοδοτικό, το οποίο παρέχει δύο ρυθμιζόμενες τάσεις, 0–50 V DC (δεν χρησιμοποιείται) και 0–300 V DC για την τροφοδότηση της διόδου με την ανοδική τάση, καθώς και μία ξεχωριστή πηγή ρυθμιζόμενου και καλά σταθεροποιημένου ρεύματος για τη θέρμανση της καθόδου.
- ένα πολύμετρο (V), για τη μέτρηση της ανοδικής τάσης  $U_A$ .
- ένα πολύμετρο ( $\mu\text{A}$ ), για τη μέτρηση του ανοδικού ρεύματος  $I_A$ .
- ένα πολύμετρο μεγάλης ακρίβειας και διακριτικής ικανότητας (A), για τη μέτρηση του ρεύματος θέρμανσης  $I_\theta$  της καθόδου.



**Σχήμα 31.3.** (α) Σχηματική παράσταση της λυχνίας της άσκησης. (β) Η συνδεσμολογία της λυχνίας (Λ) με την πηγή ανοδικής τάσης (K: κάθοδος, An: άνοδος).

## Βιβλιογραφία

1. F. Mandl, *Στατιστική Φυσική* (Αθήνα, χ. χ.), 11.4.1.
2. A. C. Melissinos, *Experiments in Modern Physics* (New York, 1966), σ. 65-78.
3. A. J. Dekker, *Solid State Physics* (London, 1964), 9.2, 9.3, 9.6.
4. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος II (Αθήνα, 2011), 169-180, 323-335.

### 31.5. Εκτέλεση

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Στην άσκηση αυτή χρησιμοποιείται συνεχής τάση μέχρι 300 V, που είναι επικίνδυνη για τη ζωή. Επομένως, όταν συναρμολογούμε το ηλεκτρικό κύκλωμα της άσκησης, θα πρέπει να έχουμε **κλειστό** το τροφοδοτικό και να έχουμε μηδενίσει όλες τις τάσεις του, στρέφοντας **τέρμα αριστερά** τα αντίστοιχα ποτενσιόμετρα που τις ρυθμίζουν. Το τροφοδοτικό τίθεται σε λειτουργία μόνο μετά τον έλεγχο του κυκλώματος από τον επιβλέποντα της άσκησης.

### 31.5.1. Πειραματικός προσδιορισμός του εκθέτη στον νόμο του Langmuir

1. Βεβαιωθείτε ότι το τροφοδοτικό δεν βρίσκεται σε λειτουργία και ότι οι τάσεις των τριών πηγών του τροφοδοτικού είναι ρυθμισμένες στο μηδέν. Στη συνέχεια συναρμολογήστε το ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχ. 31.3.β.
2. Μετά τον έλεγχο του κυκλώματος από τον επιβλέποντα της άσκησης, θέστε σε λειτουργία το τροφοδοτικό.
3. Αργά και με προσοχή, εφαρμόστε στην κάθοδο το ρεύμα θέρμανσης  $I_\theta$  που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία των 2100 K, βάσει του πίνακα που είναι αναρτημένος στη βάση στήριξης της διόδου.
4. Συμπληρωματικά, μετρήστε και την τάση θέρμανσης της καθόδου  $U_\theta$ , καθώς θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η πτώση τάσης κατά μήκος της καθόδου (βλ. Σημείωση παρακάτω).
5. Καταγράψτε τις τιμές του ανοδικού ρεύματος  $I_A$ , συναρτήσει της ανοδικής τάσης  $U_A$ , όταν αυτή μεταβάλλεται από 6 έως 20 V, με βήμα 2 V, και συμπληρώστε τις δύο πρώτες στήλες του Πίνακα I.

**Πίνακας I**

$$T = 2100 \text{ K}, \quad I_\theta = \dots\dots \text{ mA}, \quad U_\theta = \dots\dots \text{ V}$$

$U_A$ (V)	$I_A$ ( $\mu\text{A}$ )	$U_A - (U_\theta/2)$ (V)	$\ln[U_A - (U_\theta/2)]$	$\ln I_A$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Σημειώνεται ότι, στο πείραμα αυτό, η ανοδική τάση  $U_A$  που μετρήθηκε πρέπει να μειωθεί κατά έναν παράγοντα  $U_\theta/2$ , δεδομένου ότι η εκπομπή των ηλεκτρονίων γίνεται κυρίως από το κέντρο της καθόδου, όπου η θερμοκρασία της είναι λίγο υψηλότερη, ενώ το δυναμικό της είναι θετικότερο του μηδενός κατά  $U_\theta/2$ . Συνεπώς, η πραγματική διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου δεν είναι  $U_A$ , που δείχνει το βολτόμετρο, αλλά  $U_A - (U_\theta/2)$ . Επειδή  $U_\theta \approx 5-6 \text{ V}$ , στο διάστημα 6–20 V ο παράγοντας  $U_\theta/2$  δεν είναι αμελητέος.

### 31.5.2. Καταγραφή των καμπυλών $I_A = f(U_A)$ για τρεις θερμοκρασίες της καθόδου

1. Για τη θερμοκρασία της καθόδου που ρυθμίσατε προηγουμένως, προσδιορίστε τις τιμές του ανοδικού ρεύματος  $I_A$ , συναρτήσει της ανοδικής τάσης  $U_A$ , όταν αυτή μεταβάλλεται από 0 έως 300 V, με βήμα 10 V, και καταγράψτε τις στον Πίνακα II.

**Πίνακας II**

$T = 2000 \text{ K}$		$T = 2050 \text{ K}$		$T = 2100 \text{ K}$	
$U_A$ (V)	$I_A$ ( $\mu\text{A}$ )	$U_A$ (V)	$I_A$ ( $\mu\text{A}$ )	$U_A$ (V)	$I_A$ ( $\mu\text{A}$ )

2. Επαναλάβετε τις μετρήσεις του προηγούμενου βήματος για θερμοκρασίες 2050 K και 2000 K, συμπληρώνοντας τον Πίνακα II

### 31.5.3. Έλεγχος του νόμου του Richardson και μέτρηση του έργου εξόδου του βολφραμίου

1. Ρυθμίστε την ανοδική τάση στα 300 V.
2. Καταγράψτε τις τιμές του ανοδικού ρεύματος κορεσμού  $I_{AK}$ , συναρτήσει της θερμοκρασίας  $T$  της καθόδου, όταν αυτή μεταβάλλεται από 2100 K έως 1700 K, με βήμα 50 K.

Πίνακας III

$T$ (K)	$I_{AK}$ ( $\mu A$ )	$1/T$ ( $K^{-1}$ )	$\ln(I_{AK}/T^2)$

### 31.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

#### 31.6.1. Πειραματικός προσδιορισμός του εκθέτη στον νόμο του Langmuir

1. Συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του Πίνακα I.
2. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του  $\ln I_A$  ως συνάρτηση του  $\ln[U_A - (U_\theta/2)]$  και προσδιορίστε την τιμή της κλίσης της ευθείας, καθώς και το σφάλμα της.
3. Για να ισχύει ο νόμος του Langmuir, η κλίση αυτή θα πρέπει να είναι ίση με τον εκθέτη της Εξ. (31.1). Αν η τιμή που μετρήσατε διαφέρει από την τιμή 3/2, ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το αίτιο που προκαλεί τη διαφορά αυτή;

#### 31.6.2. Καταγραφή των καμπύλων $I_A = f(U_A)$ για τρεις θερμοκρασίες της καθόδου

1. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις του  $I_A$  ως συνάρτηση του  $U_A$  για τις τρεις θερμοκρασίες της καθόδου που μετρήσατε. (Εδώ ο παράγοντας  $U_\theta/2$  μπορεί να αγνοηθεί.)
2. Συγκρίνετε τις δικές σας καμπύλες με αυτή που δίνεται στο Σχ. 31.2 και σχολιάστε το αποτέλεσμα. Γιατί ο κορεσμός δεν είναι απότομος;

#### 31.6.3. Έλεγχος του νόμου του Richardson και μέτρηση του έργου εξόδου του βολφραμίου

1. Συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του Πίνακα III.
2. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του  $y = \ln(I_{AK}/T^2)$  συναρτήσει του  $x = 1/T$  και προσδιορίστε την κλίση της ευθείας, καθώς και το σφάλμα της.
3. Από την τιμή της κλίσης αυτής, και βάσει της Εξ. (31.6), υπολογίστε το έργο εξόδου των ηλεκτρονίων από το βολφράμιο  $\phi \pm \delta\phi$ .
4. Η αποδεκτή τιμή για το έργο εξόδου του πολυκρυσταλλικού βολφραμίου είναι 4,5 eV. Αν η τιμή του  $\phi$  που μετρήσατε διαφέρει σημαντικά από αυτήν, ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το κυριότερο αίτιο που προκάλεσε αυτή τη διαφορά;

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Π31)

### Π31.1. Το μέσο εσωτερικό δυναμικό $U$ , η ενέργεια Fermi $E_F$ και το έργο εξόδου $\varphi$

Η κβαντική θεωρία των μετάλλων, στην απλούστερή της μορφή, θεωρεί ότι τα ηλεκτρόνια που προκαλούν την ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι ελεύθερα να κινηθούν στο εσωτερικό του μετάλλου. Από την απαγορευτική αρχή του Pauli προκύπτει ότι, ακόμη και στη θερμοκρασία  $T = 0$  K, αυτά τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν «παγώνουν» ως προς την κίνησή τους. Πράγματι, τη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη μπορούν να καταλάβουν μόνο δύο ηλεκτρόνια, ενώ τα υπόλοιπα θα καταναμεθούν σε ενεργειακές στάθμες κατά ζεύγη, σε μια περιοχή ενεργειακών σταθμών που εκτείνεται από το μηδέν έως κάποια μέγιστη τιμή, η οποία ονομάζεται ενέργεια Fermi και συμβολίζεται με  $E_F$ . Για την τιμή της ενέργειας Fermi, οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν

$$E_F = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{8m\pi^2} \quad (\text{Π31.1})$$

όπου  $\hbar$  είναι η σταθερά του Planck,  $m$  η μάζα του ηλεκτρονίου και  $n$  ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου του στερεού. Η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων ανά μονάδα ενέργειας και ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \sqrt{E} \quad (\text{Π31.2})$$

Ο ζητούμενος αριθμός  $dN$  των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ  $E$  και  $E + dE$  είναι ανάλογος της πυκνότητας των ενεργειακών καταστάσεων  $\rho(E)$  αλλά και της πιθανότητας  $f(E)$  να είναι κατειλημμένη η κατάσταση με ενέργεια  $E$ . Η τελευταία προκύπτει από τη στατιστική Fermi-Dirac και είναι ίση με

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (\text{Π31.3})$$

Επομένως, ο αριθμός  $dN$  είναι:

$$dN = \rho(E) f(E) dE = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \frac{\sqrt{E} dE}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (\text{Π31.4})$$

Υπό κανονικές συνθήκες, τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας είναι μεν ελεύθερα στο εσωτερικό του μετάλλου, βρίσκονται όμως εγκλωβισμένα μέσα στο μέταλλο, εντός ενός πηγαδιού δυναμικού βάθους  $U$ , αν θεωρήσουμε μηδενική την ενέργειά τους όταν αυτά έχουν απελευθερωθεί από την επιφάνεια του μετάλλου και είναι ακίνητα (στάθμη κενού) (βλ. Σχ. Π31.1α). Το  $U$  ονομάζεται **μέσο εσωτερικό δυναμικό** του μετάλλου και ορίζεται ως η ελάχιστη ενέργεια που καταβάλλεται στο «ακίνητο» ηλεκτρόνιο προκειμένου αυτό να εξέλθει στο κενό.

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, για να εξέλθει στο κενό ένα ηλεκτρόνιο που έχει ενέργεια ίση με την ενέργεια Fermi  $E_F$ , στους 0 K, θα πρέπει να προσλάβει μια ελάχιστη πρόσθετη ενέργεια  $\varphi$ , που ονομάζεται **έργο εξόδου**, τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση

$$U = E_F + \varphi \quad (\text{Π31.5})$$

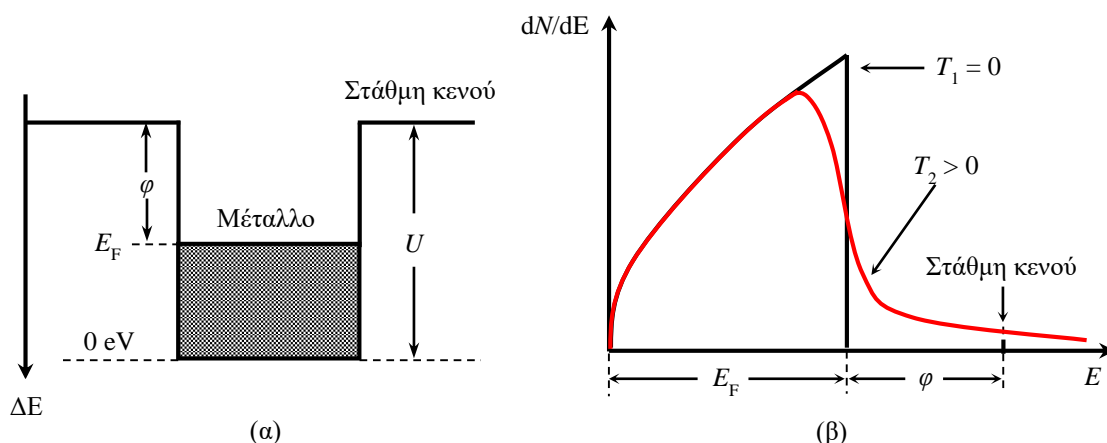
Για παράδειγμα, στο βολφράμιο, στο οποίο  $U = 10,2$  eV, η  $E_F$  στους 0 K είναι 5,7 eV. Επομένως, το έργο εξόδου του είναι  $\varphi = 10,2 - 5,7 = 4,5$  eV.



Στον Πίνακα I δίνονται οι τιμές των μεγεθών  $U$ ,  $E_F$  και  $\phi$  για μερικά μέταλλα, όπως μετρήθηκαν πειραματικά.

**Πίνακας I**

Μέταλλο	Li	Na	K	Cu	Ag	Au	Ca	W	Al
$U$ (eV)	6,9	5,0	3,9	11,1	10,2	10,3	7,5	10,2	14,7
$E_F$ (eV)	4,7	3,1	2,1	7,0	5,5	5,5	4,3	5,7	11,7
$\phi$ (eV)	2,2	1,9	1,8	4,1	4,7	4,8	3,2	4,5	3,0



**Σχήμα Π31.1.** (α) Γραφική παράσταση του πηγαδιού δυναμικού στο εσωτερικό ενός μετάλλου στη θερμοκρασία  $T = 0$  K. (β) Η ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων μέσα σε ένα μέταλλο στη θερμοκρασία  $T_1 = 0$  K και σε μια θερμοκρασία  $T_2 > 0$ .

Στο Σχ. Π31.1.β δίνεται η γραφική παράσταση της Εξ. (Π31.4), που αποδίδει την ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων μέσα στα μέταλλα. Βλέπουμε ότι, σε θερμοκρασίες  $T > 0$ , στην ενεργειακή κατανομή εμφανίζεται μια εκθετική «ουρά», η οποία εκτείνεται έως το άπειρο. Προφανώς, στη θερμοϊονική εκπομπή συμμετέχουν τα ηλεκτρόνια της εκθετικής ουράς, που κινούνται προς την επιφάνεια του στερεού και οι κινητικές τους ενέργειες ξεπερνούν το άθροισμα  $E_F + \phi$ . Σχολαστικός υπολογισμός του συνολικού τους αριθμού (βλ. επόμενο εδάφιο) οδηγεί τελικά στη σχέση Richardson,

$$J = \frac{I}{S} = \frac{(1 - D) 4\pi e m k^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{\phi}{kT}} \quad (\text{Π31.6})$$

όπου  $D$  είναι ο μέσος συντελεστής ανάκλασης των ηλεκτρονίων από το σκαλοπάτι δυναμικού της επιφάνειας, ενώ η σταθερά  $4\pi e m k^2/h^3$  είναι ίση με  $120,4 \times 10^4$  A/m<sup>2</sup>K<sup>2</sup> και σε μερικά μέταλλα η τιμή αυτή βρίσκεται πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

### Π31.2. Ο νόμος του Richardson

Έστω ότι η επιφάνεια της καθόδου είναι κάθετη στον άξονα  $x$  ενός συστήματος αναφοράς  $x, y, z$ . Έστω ακόμη ότι  $dN$  είναι ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων με συνιστώσες  $x$  των ταχυτήτων μεταξύ  $v_x$  και  $v_x + dv_x$ . Θεωρούμε ότι οι συνιστώσες των ταχυτήτων έχουν κατεύθυνση από το εσωτερικό του μετάλλου προς το εξωτερικό. Με την προϋπόθεση ότι η

ενέργειες  $E$  των ηλεκτρονίων αυτών είναι μεγαλύτερες από το άθροισμα  $E_F + \varphi$  (Σχ. Π31.3.β) και ότι τα ηλεκτρόνια δεν ανακλώνται στο σκαλοπάτι δυναμικού της επιφάνειας αλλά εξέρχονται όλα στο κενό, η συνεισφορά αυτών των ηλεκτρονίων στην πυκνότητα του θερμοϊονικού ρεύματος  $dJ_x$  είναι:

$$dJ_x = ev_x dN \quad (\text{Π31.7})$$

όπου  $e$  είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου συνδέεται με την ορμή του  $p$  μέσω των σχέσεων:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \quad (\text{Π31.8})$$

$$p = \sqrt{2mE} \quad (\text{Π31.9})$$

Έτσι, σύμφωνα με την κατανομή Fermi-Dirac, ο αριθμός  $dN_p$  των ηλεκτρονίων που έχουν συνιστώσες ορμής μεταξύ  $p_x, p_y, p_z$  και  $p_x + dp_x, p_y + dp_y$  και  $p_z + dp_z$ , αντίστοιχα, είναι

$$dN_p = \frac{2}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{\exp\left(\frac{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - E_F}{kT}\right) + 1} \quad (\text{Π31.10})$$

Ο αριθμός  $dN_p$  των ηλεκτρονίων που έχουν συνιστώσες  $x$  των ορμών τους μεταξύ  $p_x$  και  $p_x + dp_x$ , αλλά με οποιεσδήποτε τιμές των συνιστωσών  $p_y$  και  $p_z$  είναι

$$dN_{p_x} = \frac{2}{h^3} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{\exp\left(\frac{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - E_F}{kT}\right) + 1} \quad (\text{Π31.11})$$

Ολοκληρώνοντας και συμβολίζοντας το  $p_x^2/2m$  με  $E_x$ , βρίσκουμε ότι

$$dN_{p_x} = \frac{2\pi m}{h^3} \left(\frac{2m}{E_x}\right)^{1/2} kT \ln\left[1 + \exp\left(\frac{E_F - E_x}{kT}\right)\right] dE_x \quad (\text{Π31.12})$$

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που βομβαρδίζουν τη μονάδα της επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου είναι

$$d\omega = v_x dN_{p_x} = \left(\frac{2E_x}{m}\right)^{1/2} dN_{p_x} \quad (\text{Π31.13})$$

ή

$$d\omega = \frac{4\pi m}{h^3} kT \ln\left[1 + \exp\left(\frac{E_F - E_x}{kT}\right)\right] dE_x \quad (\text{Π31.14})$$

Για όλα τα υλικά, και για την υψηλότερη θερμοκρασία που μπορεί να αντέξει το πιο πυρίμαχο υλικό, έχουμε  $\varphi \gg kT$ , δηλαδή  $E_x - E_F \gg kT$ .

Συνεπώς, το εκθετικό στην Εξ. (Π31.14) είναι πολύ μικρότερο της μονάδας. Η προσέγγιση  $\ln(1+x) \approx x$  δίνει για την Εξ. (Π31.14)

$$d\omega = \frac{4\pi m}{h^3} kT \exp\left(-\frac{E_x - E_F}{kT}\right) dE_x \quad (\text{Π31.15})$$

Στη θερμοϊονική εκπομπή συμβάλλουν μόνον εκείνα τα ηλεκτρόνια για τα οποία ισχύει  $E \geq U$  (βλ. Σχ. Π31.1.β). Συνεπώς, η ολική πυκνότητα ρεύματος που διασχίζει την επιφάνεια της καθόδου είναι:

$$J_x = e \int_U^\infty d\omega = \int_U^\infty \frac{4\pi em}{h^3} kT \exp\left(-\frac{E_x - E_F}{kT}\right) dE_x \quad (\text{Π31.16})$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση, και επειδή  $U - E_F = \varphi$  (Σχ. Π31.1), γενικεύοντας έχουμε τελικά ότι

$$J = \frac{4\pi em}{h^3} k^2 T^2 \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \quad (\text{Π31.17})$$

όπου  $J$  είναι η ολική πυκνότητα ρεύματος. Η σταθερά  $A_0 = 4\pi emk^2/h^3$  ονομάζεται σταθερά του Sommerfeld και είναι ίση με  $120,4 \times 10^4 \text{ A/m}^2 \text{ K}^2$ .

Είναι γνωστό από την Κβαντομηχανική ότι ένα ποσοστό των ηλεκτρονίων θα ανακλαστεί από το σκαλοπάτι δυναμικού (Σχ. Π31.1.α), έστω και αν αυτά έχουν αρκετή ενέργεια για να το υπερβούν. Ο συντελεστής ανάκλασης εξαρτάται από την ενέργεια των ηλεκτρονίων, όπως επίσης και από το σχήμα του σκαλοπατιού, το οποίο γενικά είναι άγνωστο. Αν  $D$  είναι ο μέσος συντελεστής ανάκλασης, τότε ο νόμος του Richardson μπορεί να γραφεί ως

$$J = (1 - D)A_0 T^2 \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \quad (\text{Π31.18})$$

Σημειώνεται ότι η πειραματική τιμή του  $D$  για το πολυκρυσταλλικό βολφράμιο είναι περίπου 0,15.

### Π31.3. Ο νόμος του Langmuir ή νόμος των «3/2»

Έστω δίοδος κενού με επίπεδα και παράλληλα ηλεκτρόδια, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $d$ , πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους. Έστω ακόμη ότι η επίπεδη κάθοδος είναι θερμή και ότι η ανοδική τάση είναι πάντα μικρότερη της τάσης κορεσμού. Στον χώρο μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων θα δημιουργείται επομένως ένα νέφος ηλεκτρονίων και, κατ' επέκταση, ένα φορτίο χώρου. Θεωρούμε ότι ο άξονας  $x$  είναι κάθετος στην επιφάνεια της καθόδου και ότι το σημείο  $x = 0$  αντιστοιχεί στην επιφάνειά της. Αν τα ηλεκτρόνια εγκαταλείπουν την κάθοδο με μηδενικές αρχικές ταχύτητες τότε, στον χώρο μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων και σε απόσταση  $x$  από την κάθοδο, το δυναμικό  $U(x)$  θα ικανοποιεί τη γνωστή από τον ηλεκτρομαγνητισμό εξίσωση Poisson σε μία διάσταση:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad (\text{Π31.19})$$

όπου  $\rho$  είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα όγκου).

Η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων που έχουν ταχύτητα  $v_x$ , φορτίο  $e$  και συγκέντρωση φορέων  $n$ , δημιουργεί μια πυκνότητα ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας)  $J_x$ , ίση με

$$J_x = nev_x \quad (\text{Π31.20})$$

Η πυκνότητα φορτίου  $\rho$  και η συγκέντρωση φορέων  $n$  συνδέονται με τη σχέση

$$\rho = ne \quad (\text{Π31.21})$$

ενώ η ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο σημείο  $x$ , όπου το δυναμικό είναι  $U(x)$ , είναι

$$v_x = \sqrt{2 \frac{e}{m} U(x)} \quad (\text{Π31.22})$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (Π31.19) τις Εξ. (Π31.20)–(Π31.22) βρίσκουμε ότι

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{J_x}{\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U(x)}} \quad (\text{Π31.23})$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $2 (dU/dx)$  και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\left( \frac{dU}{dx} \right)^2 = 4 \frac{J_x}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} U + \text{σταθ.} \quad (\text{Π31.24})$$

Στην επιφάνεια της καθόδου ( $x = 0$ ) έχουμε  $U(x) = 0$  αλλά και  $dU/dx = 0$ , από όπου προκύπτει ότι η σταθερά στην Εξ. (Π31.24) είναι μηδέν. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{4}{9} U^{3/2} = J_x \frac{x^2}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad (\text{Π31.25})$$

Έστω ότι η άνοδος βρίσκεται σε απόσταση  $x = d$  από την κάθοδο και έχει δυναμικό  $U_A$ . Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην Εξ. (Π31.25) βρίσκουμε την πυκνότητα ρεύματος στην άνοδο:

$$J_{x=d} = \frac{4\varepsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U_A^{3/2} \quad (\text{Π31.26})$$

Όταν η άνοδος και η κάθοδος αποτελούν ένα σύστημα ομόκεντρων κυλίνδρων, το ρεύμα ανά μονάδα μήκους της διόδου δίνεται από τη σχέση

$$J_{x=d} = \frac{8\varepsilon_0}{9r_A \beta^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U_A^{3/2} \quad (\text{Π31.27})$$

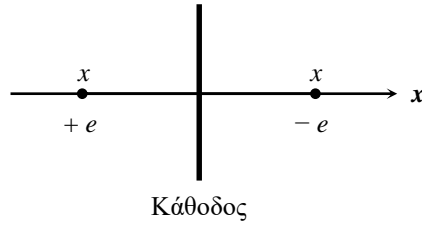
όπου  $r_A$  είναι η ακτίνα της ανόδου και  $\beta$  ένας αδιάστατος αριθμός, που εξαρτάται από τον λόγο των ακτίνων ανόδου  $r_A$  και καθόδου  $r_K$ . Όταν  $r_A > 10 r_K$ ,  $\beta \approx 1$ . Η Εξ. (Π31.27) αποτελεί τον πρώτο σπουδαίο νόμο της θερμοϊονικής εκπομπής και ονομάζεται **νόμος του Langmuir**, από το όνομα εκείνου που τον εξήγαγε πρώτος θεωρητικά, ή νόμος των «3/2».

Σημειώνεται ότι, πριν εφευρεθεί το τρανζίστορ, όλες οι ηλεκτρονικές λυχνίες ενίσχυσης και επεξεργασίας του ηλεκτρικού σήματος λειτουργούσαν στην περιοχή των 3/2, με έμμεση θέρμανση της καθόδου σε θερμοκρασία 1100 K.

#### Π31.4. Το φαινόμενο Schottky

Όταν ένα ηλεκτρόνιο, με φορτίο  $-e$ , απομακρύνεται από την επιφάνεια της καθόδου (Σχ. Π31.2), το επαγόμενο σε αυτήν θετικό φορτίο έλκει το ηλεκτρόνιο με μια δύναμη ίση με εκείνη που θα ασκούσε πάνω του ένα θετικό φορτίο  $+e$  σε θέση κατοπτρική του ηλεκτρονίου, δηλαδή

$$F(x) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2} \quad (\text{Π31.28})$$



**Σχήμα Π31.2.** Όταν ένα ηλεκτρόνιο, με φορτίο  $-e$ , απομακρύνεται από την επιφάνεια της καθόδου, το επαγόμενο σε αυτήν θετικό φορτίο έλκει το ηλεκτρόνιο προς τα πίσω.

Από την άλλη πλευρά, το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathcal{E}$  που δημιουργεί η ανοδική τάση, έλκει το ηλεκτρόνιο προς την αντίθετη κατεύθυνση και, σε κάποια απόσταση  $x_0$ , οι δύο αυτές δυνάμεις εξισώνονται, θα έχουμε δηλαδή

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2x_0)^2} = e\mathcal{E} \quad (\text{Π31.29})$$

Λύνοντας ως προς  $x_0$ , βρίσκουμε

$$x_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0\mathcal{E}} \right)^{1/2} \quad (\text{Π31.30})$$

Σε αποστάσεις συγκρίσιμες με τις ατομικές αποστάσεις του στερεού, η μαθηματική έκφραση της ελκτικής δύναμης  $F(x)$  είναι πολύ πιο περίπλοκη από την Εξ. (Π31.28) και παραμένει ακόμα άγνωστη. Αν όμως ζητείται ο υπολογισμός της μεταβολής του έργου εξόδου και όχι της τιμής του, τότε η γνώση της  $F(x)$  δεν είναι απαραίτητη.

Όταν το ηλεκτρικό πεδίο απουσιάζει, το έργο εξόδου ισούται εξ ορισμού με το έργο απομάκρυνσης του ηλεκτρονίου από την επιφάνεια στο άπειρο. Εάν όμως υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο  $\mathcal{E}$ , το έργο εξόδου θα ισούται με το έργο απομάκρυνσης του ηλεκτρονίου από την επιφάνεια έως το σημείο  $x_0$ :

$$\varphi(\mathcal{E}) = \int_0^{x_0} [F(x) - e\mathcal{E}]dx = \int_0^\infty F(x)dx - \int_{x_0}^\infty F(x)dx - e\mathcal{E}x_0 \quad (\text{Π31.31})$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της Εξ. (Π31.31) εκφράζει εξ ορισμού το έργο εξόδου απουσία ηλεκτρικού πεδίου και είναι ίσο με  $\varphi$ . Στο δεύτερο ολοκλήρωμα, για αποστάσεις  $x > x_0$ , η συνάρτηση  $F(x)$  αποδίδεται αρκετά καλά από την Εξ. (Π31.28) (για  $\mathcal{E} \leq 10^5$  V/m,  $x_0 \geq 60$  nm), συνεπώς

$$\varphi(\mathcal{E}) = \varphi - \int_{x_0}^\infty \frac{e^2 dx}{4\pi\epsilon_0 4x^2} - e\mathcal{E}x_0 = \varphi - e\mathcal{E}x_0 + \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x_0} \quad (\text{Π31.32})$$

Αντικαθιστώντας το  $x_0$  από την Εξ. (Π31.30), έχουμε τελικά ότι

$$\varphi(\mathcal{E}) = \varphi - \left( \frac{e^3 \mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad \text{ή} \quad \varphi - \varphi(\mathcal{E}) = \Delta\varphi = \left( \frac{e^3 \mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (\text{Π31.33})$$

που μας δίνει τη μείωση του έργου εξόδου  $\varphi$  στην περιοχή κορεσμού (Σχ. 31.2) εξαιτίας του φαινομένου Schottky.

### Π31.5. Η θερμοκρασία της καθόδου και η κατανομή της

Η θέρμανση της καθόδου της λυχνίας της άσκησης γίνεται άμεσα, με τη διοχέτευση ρεύματος της τάξης των 2-2,5 A. Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι να υπολογιστεί η τιμή και η κατανομή της θερμοκρασίας στην κάθοδο.

Έστω ότι η κάθοδος έχει τη μορφή ενός ευθύγραμμου λεπτού σύρματος, το μήκος και η διάμετρος του οποίου είναι  $L$  και  $d$ , αντίστοιχα. Έστω ακόμη ότι το σύρμα αυτό διαρρέεται από ένα συνεχές ρεύμα θέρμανσης  $I_\theta$ . Αν εξετάσουμε ένα τμήμα της καθόδου που έχει μήκος  $dx$  και βρίσκεται «πολύ μακριά» από τα ψυχρά άκρα της, εξισώνοντας την παραγόμενη από το ρεύμα θερμική ισχύ με την ακτινοβολούμενη ισχύ, βρίσκουμε ότι

$$\frac{I_\theta^2 \rho(T) dx}{\frac{\pi}{4} d^2} = \pi d \sigma \varepsilon(T) T^4 dx \quad (\text{Π31.34})$$

όπου  $\rho(T)$  και  $\varepsilon(T)$  είναι η ειδική αντίσταση και ο συντελεστής εκπομπής του βολφραμίου, αντίστοιχα, σε θερμοκρασία  $T$ , ενώ  $\sigma$  είναι η σταθερά των Stefan-Boltzmann. Η Εξ. (Π31.34) μπορεί να γραφτεί και ως

$$\frac{I_\theta}{d^{3/2}} = \frac{\pi}{2} T^2 \sqrt{\frac{\varepsilon(T)}{\rho(T)}} \quad (\text{Π31.35})$$

όπου το δεξί μέλος της Εξ. (Π31.35) είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας.

Για την περίπτωση του βολφραμίου, η σχέση μεταξύ  $I_\theta$  και  $T$  έχει μελετηθεί εκτενώς και δίνεται στον Πίνακα II (για κάθοδο με διάμετρο 1 cm και «άπειρο» μήκος), ενώ στον Πίνακα III δίνονται οι τιμές της θερμοκρασίας που δημιουργούνται σε σύρμα βολφραμίου με διάμετρο 0,16 mm και άπειρο μήκος.

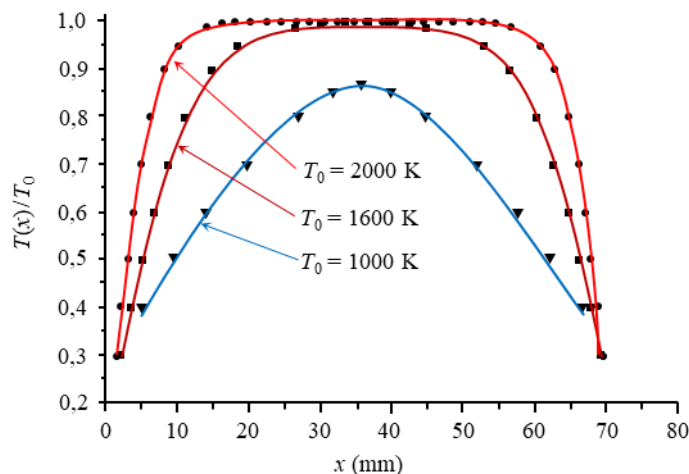
**Πίνακας II**

$\frac{I_\theta}{d^{3/2}} \left( \frac{\text{A}}{\text{cm}^{3/2}} \right)$ ( $d = 1 \text{ cm}$ )	$T_0 \text{ (K)}$
580,6	1500
662,2	1600
747,3	1700
836,0	1800
927,4	1900
1022	2000
1119	2100
1217	2200
1310	2300
1422	2400
1526	2500
1632	2600

**Πίνακας III**

$I_\theta \text{ (A)}$ ( $d = 0,16 \text{ mm}$ )	$T_0 \text{ (K)}$
1,3402	1600
1,5124	1700
1,6022	1750
1,6919	1800
1,7844	1850
1,8769	1900
1,9726	1950
2,0684	2000
2,1666	2050
2,2674	2100
2,3639	2150
2,4630	2200

Επειδή, όμως, η κάθοδος της άσκησης δεν έχει άπειρο μήκος, η παρουσία των ψυχρών άκρων της συντελεί στη διαμόρφωση μιας κατανομής θερμοκρασίας, με μέγιστο στο κέντρο, και η τιμή του μεγίστου αυτού είναι εν γένει μικρότερη από τις τιμές του Πίνακα III. Η διαφορά αυτή είναι τόσο μικρότερη όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος μήκους προς διάμετρο του σύρματος και όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία.



**Σχήμα Π31.3.** Η κατανομή της θερμοκρασίας  $T$  κατά μήκος μιας καθόδου από βολφράμιο, μήκους 70 mm και διαμέτρου 0,160 mm, ως συνάρτηση της απόστασης  $x$  από τα άκρα της, για τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες. Το  $T_0$  αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή της θερμοκρασίας που δημιουργείται σε σύρμα βολφραμίου με την ίδια διάμετρο αλλά με άπειρο μήκος.

Στο Σχ. Π31.3 δίνεται η λύση της διαφορικής εξίσωσης (Π31.34), που υπολογίστηκε με αριθμητικές μεθόδους, για τρεις θερμοκρασίες της καθόδου από βολφράμιο, το μήκος και η διάμετρος της οποίας είναι 70 και 0,160 mm, αντίστοιχα, είναι δηλαδή όμοια με την κάθοδο που χρησιμοποιείται στη λυχνία της άσκησης.

Σχολιάζοντας τις καμπύλες που δίνονται στο Σχ. Π31.3 μπορούμε να πούμε ότι:

- στην κεντρική περιοχή της καθόδου, όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο λιγότερο διαφέρει η κατανομή από εκείνη μιας καθόδου με άπειρο μήκος,
- για μια κάθοδο από βολφράμιο με μήκος 70 mm και διάμετρο 0,160 mm, η θερμοκρασία της κεντρικής περιοχής της καθόδου διαφέρει ελάχιστα από τη θερμοκρασία  $T_0$  που θα είχε μια «άπειρη» σε μήκος κάθοδος, υπό την προϋπόθεση ότι  $T_0 > 1600$  K.

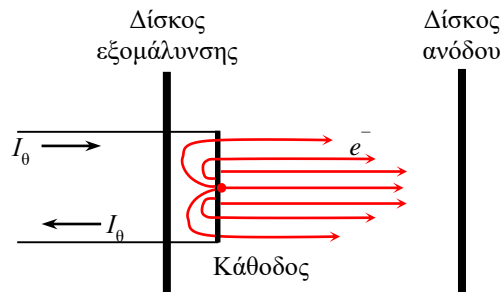
Τέλος, αξ σημειωθεί ότι, αν η διάμετρος της καθόδου διαφέρει από την τιμή των 0,160 mm, οι πραγματικές θερμοκρασίες της καθόδου θα διαφέρουν από εκείνες που αναγράφονται στη βάση της λυχνίας.

### Π31.6. Μερικές ατέλειες της διόδου κενού

Να επισημανθούν μερικές κατασκευαστικές ατέλειες της λυχνίας της άσκησης:

- Η κάθοδος είναι αμέσου θερμάνσεως, οπότε η επιφάνειά της δεν είναι ισοδυναμική, λόγω πτώσης τάσης κατά μήκος της καθόδου. Στις μικρές ανοδικές τάσεις, αυτό εισάγει μια αοριστία στη διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου.
- Το σχήμα της καθόδου δεν είναι ευθύγραμμο, αλλά έχει τη μορφή «ζικ-ζακ».
- Η άνοδος βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από την κάθοδο.

- Ο δίσκος που βρίσκεται πίσω από την κάθοδο κάπως εξομαλύνει το ηλεκτρικό πεδίο, αλλά όχι αρκετά, με αποτέλεσμα το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ανόδου και καθόδου να μην είναι ομογενές και να απέχει πολύ από τα ηλεκτρικά πεδία των θεωρητικών μοντέλων. Έτσι, σε μικρές αποστάσεις από την κάθοδο, το ηλεκτρικό πεδίο είναι σχεδόν κυλινδρικό, ενώ σε μεγαλύτερες είναι σχεδόν επίπεδο κ.λπ.
- Το ηλεκτρικό πεδίο της ανόδου δεν δρα ομοιόμορφα σε ολόκληρη την επιφάνεια της καθόδου. Δρα έντονα στην επιφάνεια που είναι στραμμένη προς την άνοδο, αλλά σχεδόν καθόλου προς την πίσω επιφάνεια, που είναι στραμμένη προς τον δίσκο εξομάλυνσης. Επακόλουθο αυτού είναι ο μη απότομος κορεσμός του ρεύματος στη λυχνία. Πράγματι, καθώς η ανοδική τάση αυξάνεται, πρώτα κορεννυται το τμήμα του ρεύματος που οφείλεται σε ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την πλευρά της καθόδου που «βλέπει την άνοδο», στη συνέχεια η περιοχή του κορεσμένου ρεύματος σιγά-σιγά αγκαλιάζει όλο και μεγαλύτερο μέρος της επιφάνειας, έως ότου κορεστεί και το τμήμα που εξέρχεται από το πίσω μέρος της καθόδου (Σχ. Π31.4).



**Σχήμα Π31.4.** Ο κορεσμός του ανοδικού ρεύματος επέρχεται βαθμιαία, καθώς αυξάνει η ανοδική τάση.

- Τέλος, οι γεωμετρικές ατέλειες της λυχνίας παίζουν σημαντικό ρόλο όταν μελετάται ο νόμος των «3/2», αλλά δεν παίζουν ρόλο όταν μελετάται η σχέση Richardson, καθώς το ρεύμα κόρου εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία, αρκεί η τιμή της ανοδικής τάσης να διασφαλίζει κορεσμό όλης της επιφάνειας της καθόδου, να απορροφά δηλαδή και το νέφος ηλεκτρονίων που υπάρχει στο «πίσω» μέρος της καθόδου.