Άσκηση 38

Νόμος των Wiedemann-Franz

38.1 Σκοπός

Σκοπός της άσκησης αυτής είναι η μέτρηση της σταθεράς Lorentz σε δύο διαφορετικά μέταλλα οι ιδιότητες των οποίων διαφέρουν σημαντικά. Η σταθερά του Lorentz μετράται μέσω της μέτρησης του λόγου της θερμικής αγωγιμότητας προς την αντίστοιχη ηλεκτρική. Οι μετρήσεις θα γίνουν στον χαλκό που αντιπροσωπεύει τους καλούς αγωγούς θερμότητας και ηλεκτρικού ρεύματος και στο νικέλιο που αντιπροσωπεύει τους κακούς αγωγούς.

38.2 Γενικά

Είναι γνωστό ότι η θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων είναι εκατοντάδες φορές μεγαλύτερη από αυτήν των διηλεκτρικών υλικών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια που είναι υπεύθυνα για την ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων είναι υπεύθυνα και για τη θερμική τους αγωγιμότητα. Έτσι, όσο μεγαλύτερη είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μετάλλου, τόσο μεγαλύτερη είναι η θερμική του αγωγιμότητα. Στα μέταλλα, η ομοιότητα στους μηχανισμούς διάδοσης του ηλεκτρικού φορτίου και της θερμότητας βρίσκει την έκφρασή της στον αρχικά πειραματικά διαπιστωμένο νόμο των Wiedemann-Franz (1853), σύμφωνα με τον οποίο, σε θερμοκρασία δωματίου (σωστότερα, σε θερμοκρασίες όχι πολύ χαμηλές, άνω της θερμοκρασίας Debye), στα μέταλλα*, η θερμική αγωγιμότητά* (λ) *είναι ανάλογη προς την αντίστοιχη ηλεκτρική* (σ). Δηλαδή, $\lambda \sim \sigma$ ή $\lambda/\sigma = \text{σταθ.}$ Παρατηρήθηκε ακόμη ότι ο λόγος λ/σ εξαρτάται από τη θερμοκρασία και η εξάρτηση αυτή είναι της μορφής:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = LT \tag{38.1}$$

όπου T ($T > T_{\text{Debye}}$) είναι η απόλυτη θερμοκρασία του μετάλλου και L είναι ένας σταθερός αριθμός, ίδιος για όλα τα μέταλλα και ονομάζεται σταθερά του Lorentz. Συνεπώς, στα μέταλλα, ο λόγος $\lambda/\sigma T$ αναμένεται να είναι σταθερός.

Πίνακας 38.1

Μέταλλο	σ ($10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$)	λ ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)	L ($10^{-8}\ W\ \Omega\ K^{-2}$)
Ag	6,15	423	2,45
Cu	5,82	387	2,27
Al	3,55	210	2,02
Na	2,1	135	2,18
Cd	1,3	102	2,64
Fe	1,00	67	2,31
Ni	1,46	91,5	2,14
Pb	0,45	34	2,56

Στον Πίνακα 38.1 δίνονται οι τιμές της ηλεκτρικής, (σ) και θερμικής (λ) αγωγιμότητας μερικών μετάλλων στους 293 K ($T = T_{\delta o\mu}$) καθώς και η πειραματική τιμή του αριθμού Lorentz στα υλικά αυτά.

38.2.1 Η σταθερά του Lorentz.σε κλασική και κβαντομηχανική προσέγγιση

Ο νόμος των Wiedemann-Franz έπαιξε μεγάλο ρόλο στη διαμόρφωση της θεωρίας των μετάλλων αφού αποτέλεσε την πειραματική βάση και στήριγμα της υπόθεσης περί του "αερίου των ελεύθερων ηλεκτρονίων στα υλικά". Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, τα ηλεκτρόνια στα οποία οφείλεται η ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων, παρά το ότι είναι εγκλωβισμένα εντός του στερεού, είναι κατά τα άλλα απολύτως ελεύθερα και έχουν ιδιότητες όμοιες με αυτές που έχει ένα ιδανικό αέριο. Έτσι, η ηλεκτρική και η θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων αποδίδονται σε φαινόμενα μεταφοράς όταν, για κάποιον λόγο, στο ιδιόμορφο αυτό αέριο ηλεκτρονίων δημιουργείται βαθμίδα θερμοκρασίας ή ηλεκτρικού δυναμικού.

Για το λόγο λ/σ η σχετική ανάλυση δίνει

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k^2}{e^2} T \qquad (38,3)$$

όπου k είναι η σταθερά του Boltzmann και e είναι του φορτίο του ηλεκτρονίου.
Επομένως, στην κλασσική προσέγγιση η σταθερά Lorentz έχει την τιμή

$$L = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k^2}{e^2} = 1{,}9 \times 10^{-8} \quad \mathrm{W\Omega K^{-2}} \qquad (38.4)$$

Στην κβαντομηχανική προσέγγιση, στο μοντέλο του αερίου Fermi, ο λόγος λ/σ είναι

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{k^2}{e^2} T \qquad (38,5)$$

ενώ για τη σταθερά Lorentz προκύπτει η τιμή

$$L = \frac{\pi^2}{3} \frac{k^2}{e^2} = 2{,}45 \times 10^{-8} \quad \mathrm{W\Omega K^{-2}} \qquad (38.6)$$

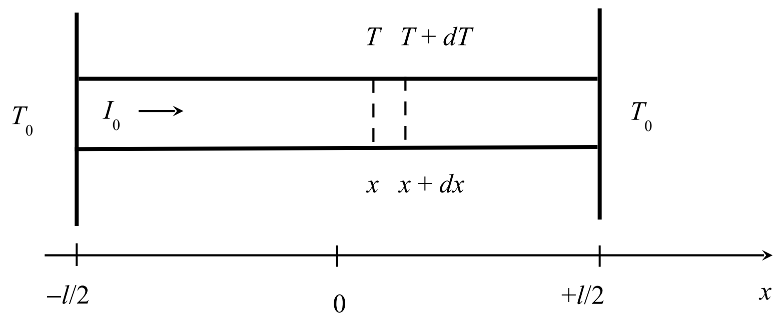
που είναι πιο κοντά στις πειραματικές τιμές.

Στο μοντέλο αυτό, η διάδοση της θερμότητας αποδίδεται εξολοκλήρου στο αέριο των ηλεκτρονίων. Ο ρόλος του κρυσταλλικού πλέγματος αγνοείται, μια και στα μέταλλα η πλεγματική συνιστώσα της θερμικής αγωγιμότητας είναι περίπου 1% της ολικής. Επιπλέον, αγνοούνται οι ενεργειακές ζώνες και θωρείται ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι ίση με αυτήν στο κενό.
Είναι άξιο προσοχής το γεγονός ότι για τη σταθερά του Lorentz η κλασική ($8k^2/\pi e^2$) και η κβαντική προσέγγιση ($\pi^2 k^2/3e^2$) δίνουν σχεδόν την ίδια τιμή.

38.3 Η μέθοδος μέτρησης του λόγου λ/σ

Λόγω διαφορετικής φύσεως των μεγεθών λ και σ, οι τεχνικές μέτρησης των μεγεθών αυτών διαφέρουν και η μέτρησή τους συνήθως γίνεται σε δύο ξεχωριστά πειράματα. Στη μέθοδο που ακολουθεί θα παρακαμφθεί αυτή η διαδικασία και η μέτρηση του λόγου λ/σ θα γίνει άμεσα σε ένα ενιαίο πείραμα. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε μία μεταλλική ράβδο η οποία διαπερνάται από ηλεκτρικό ρεύμα I_0 και τα δύο άκρα της οποίας διατηρούνται στη θερμοκρασία περιβάλλοντος T_0 (Σχ. 38.1). Η ανάλυση θα απλοποιηθεί σε μεγάλο βαθμό αν δεχτούμε ότι η θερμότητα, η οποία εκλύεται εντός της ράβδου, άγεται μόνο προς τα ψυχρά της άκρα και συνεπώς, θεωρήσουμε αμελητέες τις απώλειες από την πλευρική της επιφάνεια. Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας στη ράβδο και, ακολούθως, η θερμοκρασία στο κέντρο της, συναρτήσει των μεγεθών I_0, λ και σ.

Η διατύπωση της μαθηματικής σχέσης που καθορίζει την αγωγή της θερμότητας στη ράβδο θα γίνει με τη βοήθεια ενός μικρού της τμήματος ή λεπτής φέτας, οι βάσεις της οποίας βρίσκονται στα σημεία x και $x+dx$ και η οποία έχει πάχος dx. Το σημείο $x = 0$ επιλέγεται στο κέντρο της ράβδου. Το εμβαδόν της διατομής της ράβδου είναι s, και το μήκος της l. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t στη θέση x η θερμοκρασία της ράβδου είναι $T(x,t)$. Έστω ακόμα ότι η διέλευση του ρεύματος I_0 προκαλεί έκλυση θερμότητας εντός της ράβδου με ένα ρυθμό ανά μονάδα όγκου ίσο με $f(x)$.



Σχήμα 38.1

Για το ισοζύγιο των ενεργειών που εκλύονται, απορροφούνται ή διασχίζουν το στοιχείο της ράβδου μεταξύ x και $x + dx$ μπορούμε να πούμε ότι η θερμότητα Q_1 η οποία εισέρχεται σε αυτό από την αριστερή επιφάνεια (σημείο x), συν η θερμότητα Q_2 που εκλύεται εντός του στοιχείου όγκου *ισούται* με τη θερμότητα Q_3 που εξέρχεται από τη δεξιά επιφάνεια (σημείο $x+dx$) συν τη θερμότητα Q_4 που απορροφάται από το υλικό, δηλαδή

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 \qquad \text{ή} \qquad Q_4 = Q_2 + Q_1 - Q_3 \tag{38.7α,β}$$

Η θερμότητα Q_2 η ποία εκλύεται εντός του στοιχείου όγκου dV είναι:

$$Q_2 = f(x)\, dV\, dt \qquad \text{ή} \qquad Q_2 = f(x)\, s\, dx\, dt. \tag{38.8α,β}$$

Η θερμότητα Q_4 η οποία απορροφάται από το στοιχείο όγκο είναι

$$Q_4 = C\, dm\, dT \qquad \text{ή} \qquad Q_4 = C\,\rho\, s\, dx\, \frac{\partial T}{\partial t}\, dt, \tag{38.9α,β}$$

όπου ρ και C είναι η πυκνότητα και η ειδική θερμότητα του υλικού της ράβδου και $\partial T/\partial t$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του στοιχειώδους όγκου με τον χρόνο.

Ας εξετάσουμε τώρα την διαφορά $Q_1 - Q_3$ που υπάρχει στην Εξ. (38.7). Η θερμότητα Q_1 που εισέρχεται στο στοιχείο όγκο από αριστερά (σημείο x) σύμφωνα με τον νόμο της αγωγής θερμότητας, είναι

$$Q_3 = -\lambda \left.\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right|_x s\, dt. \tag{38.10}$$

Η θερμότητα Q_3 που εξέρχεται από το στοιχείο όγκο από τη δεξιά της επιφάνεια (σημείο $x+dx$) είναι

$$Q_1 = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+dx} sdt \tag{38.11}$$

Επομένως, η διαφορά $Q_1 - Q_3$ είναι

$$Q_1 - Q_3 = \lambda \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x} \right) sdt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dxsdt . \tag{38.12}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (38.12β) και απαλείφοντας τον κοινό όρο $s\,dx$ έχουμε

$$\frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{f}{\lambda} . \tag{38.13}$$

Η Εξ. (38.13) είναι γνωστή ως εξίσωση αγωγής της θερμότητας σε μία διάσταση.

Στη μόνιμη κατάσταση, η θερμοκρασία δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο και συνεπώς

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 . \tag{38.14}$$

Η Εξ. (38.13) γίνεται

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{f(x)}{\lambda} = 0 . \tag{38.15}$$

Στην περίπτωση που το κέντρο της ράβδου είναι θερμότερο μόνο κατά 2 ^{0}C, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι ιδιότητες του υλικού της είναι ίδιες σε όλα της τα σημεία και συνεπώς η συνάρτηση $f(x)$ είναι ένας σταθερός αριθμός, η τιμή του οποίου είναι:

$$f = \frac{W}{V} = \frac{I_0^2 R}{sl} \tag{38.16}$$

όπου R είναι η ηλεκτρική αντίσταση της ράβδου και $V = sl$ είναι ο ολικός της όγκος. Ολοκληρώνοντας την Εξ.(38.15) έχουμε

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{f}{\lambda} x + A , \tag{38.17}$$

όπου A είναι μία σταθερά.

Προφανώς, η θερμοκρασία έχει τη μέγιστή της τιμή στη μέση της ράβδου, δηλαδή στη θέση $x = 0$. Στο σημείο αυτό έχουμε, επομένως,

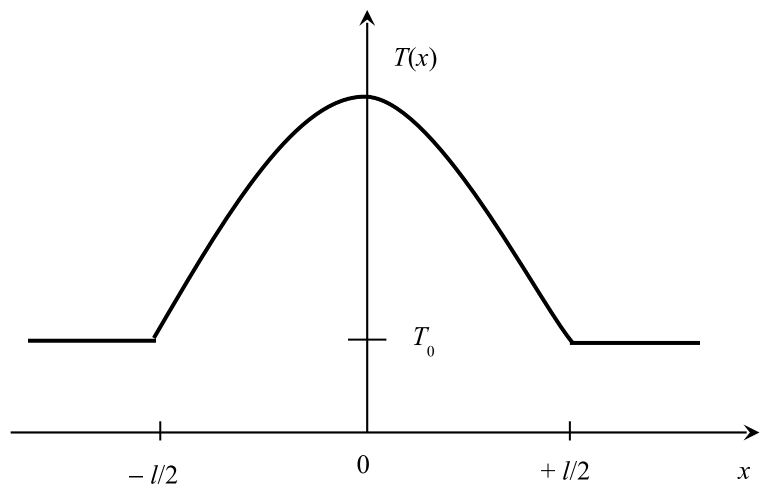
$$\frac{dT}{dx} = 0 , \tag{38.18}$$

που σημαίνει ότι η σταθερά A στην Εξ.(38.17) είναι μηδέν. Η ολοκλήρωση της Εξ. (38.17) δίνει:

$$T(x) = -\frac{f}{2\lambda} x^2 + B . \tag{38.19}$$

Τη σταθερά *B* θα την βρούμε θέτοντας $T(-l/2) = T(l/2) = T_0$. Η συνθήκη αυτή οδηγεί στη σχέση:

$$T(x) = \frac{f}{2\lambda}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) + T_0 . \tag{38.20}$$



Σχήμα 38.2

Συνεπώς, στη ράβδο θα διαμορφωθεί μία παραβολική κατανομή θερμοκρασίας το μέγιστο της οποίας βρίσκεται στο κέντρο (Σχ. 38.2). Την τιμή της μέγιστης θερμοκρασίας τη βρίσκουμε θέτοντας $x = 0$,

$$T(0) = T_0 + \frac{f}{2\lambda}\frac{l^2}{4} . \tag{38.21}$$

Η Εξ. (38.16) μπορεί να τροποποιηθεί και να γραφτεί ως:

$$f = \frac{U^2}{Rsl} \tag{38.22}$$

όπου $U = I_0 R$ είναι η πτώση τάσης που δημιουργεί το ρεύμα I_0 στα άκρα της ράβδου. Από την άλλη πλευρά, η σχέση που ορίζει την αντίσταση μιας μεταλλικής ράβδου είναι:

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{s} . \tag{38.23}$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ. (38.21) και (38.23), μπορούμε να γράψουμε:

$$T(0) - T_0 = \frac{\sigma}{8\lambda}U^2 \qquad \text{ή} \qquad \Delta T = \frac{\sigma}{8\lambda}U^2 . \tag{38.24α,β}$$

Η ΔT δείχνει κατά πόσο το κέντρο της ράβδου είναι θερμότερο από τα άκρα του, που έχουν τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Είναι βολικότερο η Εξ.(38.24β) να γραφτεί σε άλλη μορφή:

$$U^2 = \frac{8\lambda}{\sigma}\Delta T \tag{38.25}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για τη μέτρηση του λόγου λ/σ πρέπει να μετρήσει κανείς την πτώση τάσης στη ράβδο συναρτήσει της θερμοκρασίας που αναπτύσσεται στο κέντρο της. Συνεπώς, ο λόγος λ/σ μπορεί να μετρηθεί άμεσα ως το 1/8 της κλίσης της πειραματικής ευθείας (38.25) που προκύπτει από τη μέτρηση των μεγεθών U^2 και ΔT. Το ρεύμα I_0 δεν εμφανίζεται στην τελική σχέση και για τον λόγο αυτό η μέτρησή του δεν είναι απαραίτητη. Όταν η διαφορά $\Delta T = T(0) - T_0$ είναι της τάξης 1 – 2 ^{0}C, τότε η μέση θερμοκρασία της ράβδου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $(T(0) + T_0)/2$.

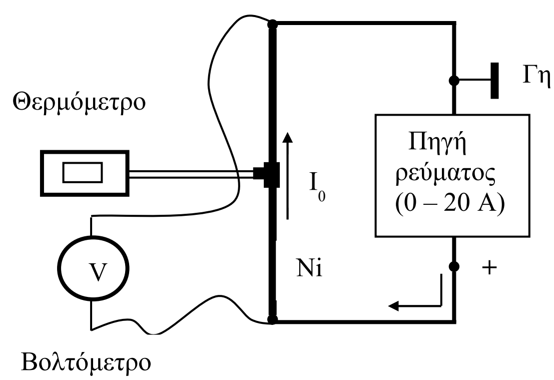
Τελικά, η σταθερά του Lorentz υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = \frac{\lambda}{\sigma\,\overline{T}} \tag{38.26}$$

όπου $\overline{T}$ είναι η μέση θερμοκρασία της ράβδου.

38.3 Η πειραματική διάταξη

Για τις μετρήσεις χρησιμοποιούνται δυο ράβδοι ή σωστότερα σύρματα, ένα από χαλκό και ένα από νικέλιο, η διάμετρος και το μήκος των οποίων είναι 2,00 και 80,0 mm αντίστοιχα.



Σχήμα 38. 3

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από μία ρυθμιζόμενη πηγή σταθερού ρεύματος (0 – 20A), δυο θερμόμετρα και ένα βολτόμετρο, για τη μέτρηση της τάσης που αναπτύσσεται στα σύρματα. Η θερμοκρασία μετράται στο κέντρο των συρμάτων όπου βρίσκονται δυο λεπτά μεταλλικά <<ταυ>> ο προορισμός των οποίων είναι να βελτιώσουν τη θερμική επαφή των συρμάτων με τους αισθητήρες των θερμομέτρων. Στο Σχ. 38.3 δίνεται μόνο το μισό μέρος της πειραματικής διάταξης στην οποία γίνονται περάματα με το νικέλιο. Όμοιο κύκλωμα συναρμολογείται για τις μετρήσεις στο χαλκό.

Βιβλιογραφία

1. M.A. Omar. *Elementary Solid State Physics*: *Principle and Applications*. (Addison – Wesley, London 1975).

2. C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*,7 *th. Edn.*. (J. Wiley, N.York 1995).
3. Ε.Ν. Οικονόμου. *Φυσική Στερεάς Κατάστασης*. (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1977).
4. Σ.Κ. Παπαδόπουλος. *Εισαγωγή στη Φυσική Στερεάς Κατάστασης.* (Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα 1990).

38.5 Εκτέλεση του πειράματος

Πρώτα μελετάται το νικέλιο. Για τον σκοπό αυτό:

1) Θέσατε σε λειτουργία την πηγή ρεύματος και το ψηφιακό βολτόμετρο και περιμένετε 5 λεπτά έως ότου σταθεροποιηθούν οι λειτουργίες τους. Σημειώστε τη θερμοκρασία T_0 των ψυχρών άκρων του νικελίου ή ισοδύναμα, την αρχική θερμοκρασία του νικελίου στο κέντρό του, όταν αυτό δεν διαρρέεται από το ηλεκτρικό ρεύμα.
2) Συναρμολογήστε το κύκλωμα όπως στο Σχ. 38.3. Η πηγή ρεύματος στο βήμα αυτό πρέπει να είναι ρυθμισμένη στο μηδέν.
3) Αυξήστε την τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα τόσο ώστε να προκληθεί πτώση τάσης 1 mV στο νικέλιο. Περιμένετε ένα λεπτό και κατόπιν σημειώστε την τιμή της θερμοκρασίας στο κέντρο του σύρματος.
4) Επαναλάβατε το βήμα (3) για πτώση τάσης 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9, 10, 11 και 12 mV.
5) Ρυθμίστε την πηγή ρεύματος στο μηδέν και συναρμολογήστε το κύκλωμα ξανά προκειμένου να εκτελέσετε μετρήσεις στο χαλκό. Σημειώστε τη θερμοκρασία T_0 στο κέντρο του χάλκινου σύρματος όταν αυτό δεν δια από το ηλεκτρικό ρεύμα.
6) Αυξήστε την τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα τόσο ώστε να προκληθεί πτώση τάσης 1 mV στο χαλκό. Περιμένετε ένα λεπτό και κατόπιν σημειώστε την τιμή της θερμοκρασίας που αναπτύσσεται στο κέντρο του χάλκινου σύρματος.
7) Επαναλάβατε το βήμα (6) για πτώση τάσης 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και 10 mV.

Πίνακας 38.2

Πτώση τάσης U (mV)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ni: ΔT (^{0}C)												
Cu: ΔT (^{0}C)												

8) Ρυθμίστε την πηγή ρεύματος στο μηδέν και κλείστε τα όργανα.

38.6 Επεξεργασία των μετρήσεων

1) Από τις τιμές του Πίνακα 2, υπολογίστε τις τιμές U^2. Με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, υπολογίστε την κλίση της πειραματικής ευθείας $U^2 = a + b\Delta T$, όπου $\Delta T = T(0) - T_0$, και στη συνεχεία τον λόγο λ/σ, στο νικέλιο και στον χαλκό. Υπολογίστε επίσης τα σφάλματα των τιμών αυτών.
2) Σχεδιάστε σε γραφική παράσταση τα πειραματικά σημεία και τη βέλτιστη ευθεία της σχέσης $U^2 = a + b\Delta T$,
3) Υπολογίστε τη σταθερά Lorentz και το σφάλμα της, στο νικέλιο και στον χαλκό. Ποιοι είναι οι κυριότεροι παράγοντες που θα μπορούσαν να προκαλέσουν αλλαγή της μετρούμενης τιμής.