

# Άσκηση 42

## Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας

### 42.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή θα μελετηθεί η ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων από την επιφάνεια του βολφραμίου και, μέσω αυτής, το κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας και ο νόμος των Fowler-Nordheim.

### 42.2. Γενικά

#### 42.2.1. Εισαγωγή

Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου είναι παγιδευμένα σε αυτό και υπό κανονικές συνθήκες δεν μπορούν να εξέλθουν, κάτι που μπορεί να συμβεί μόνο όταν αυτά με κάποιον τρόπο διεγερθούν και αποκτήσουν πρόσθετη κινητική ενέργεια.

Υπάρχουν πέντε βασικά είδη εκπομπής ηλεκτρονίων από τα μέταλλα, που τυγχάνουν ευρείας εφαρμογής στην επιστημονική έρευνα και υψηλή τεχνολογία. Στις τέσσερις περιπτώσεις ο ρόλος της θερμοκρασίας είναι ασήμαντος, επομένως τα φαινόμενα αυτά μπορούν να παρατηρηθούν και σε θερμοκρασία 0 K. Σε μία ειδική περίπτωση, η θερμοκρασία παίζει αποφασιστικό ρόλο και η εκπομπή λαμβάνει χώρα μόνο σε υψηλές θερμοκρασίες της τάξης των 1000-2500 K.

Καθώς τα πέντε είδη εκπομπής σχετίζονται με τον τρόπο διέγερσης του μετάλλου, αυτά συσχετίζονται με πέντε φαινόμενα που είναι γνωστά ως:

- **Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο:** χρησιμοποιείται στα φωτόμετρα, στα φωτοστοιχεία, στους φωτοπολλαπλασιαστές, στους φασματογράφους κ.λπ.
- **Φαινόμενο δευτερογενούς εκπομπής ηλεκτρονίων από προσπίπτοντα ηλεκτρόνια:** χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική μικροσκοπία (SEM-Secondary Electron Microscope), στους φωτοπολλαπλασιαστές, στους πολλαπλασιαστές ηλεκτρονίων, στις διόπτρες νυκτός κ.λπ.
- **Φαινόμενο δευτερογενούς εκπομπής ηλεκτρονίων από προσπίπτοντα ιόντα:** χρησιμοποιείται στους ενδεικτικούς λαμπτήρες νέου, στους οικονομικούς λαμπτήρες φθορισμού, στους λέιζερ αερίου κ.λπ.
- **Φαινόμενο θερμοϊονικής εκπομπής ηλεκτρονίων:** χρησιμοποιείται στις οθόνες των τηλεοράσεων και υπολογιστών, στους καθοδικούς σωλήνες των παλμογράφων, στους φούρνους μικροκυμάτων, στις πηγές ακτινών X, σε ηλεκτρονικές λυχνίες μεγάλης ισχύος κ.λπ.
- **Φαινόμενο ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων (cold emission):** χρησιμοποιείται στην ηλεκτρονική μικροσκοπία, στις νέες οθόνες υπολογιστών και τηλεοράσεων, στη μικροσκοπία ατομικής κλίμακας (Tunneling Atomic Force Microscope) κ.λπ.

Αντικείμενο μελέτης της άσκησης είναι το πέμπτο φαινόμενο, δηλαδή η ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων, πίσω από το οποίο κρύβεται το κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην ψυχρή εκπομπή, αλλά και στα τέσσερα άλλα φαινόμενα, μεγάλο ρόλο παίζει το έργο εξόδου  $\phi$  του ηλεκτρονίου, το οποίο ορίζεται ως η ελάχιστη ενέργεια που

δαπανάται για να εξέλθει το ηλεκτρόνιο από το μέταλλο. Η θερμοκρασία και το έργο εξόδου επηρεάζουν έντονα τη θερμοϊονική εκπομπή ηλεκτρονίων, αλλά επηρεάζουν ελαφρώς και την ψυχρή εκπομπή όταν η θερμοκρασία του μετάλλου είναι υψηλή.

#### 42.2.1.1. Θερμοϊονική εκπομπή ηλεκτρονίων

Η εκπομπή ηλεκτρονίων αυτού του είδους παρατηρείται όταν σε συνθήκες υψηλού κενού το μέταλλο θερμαίνεται σε θερμοκρασίες της τάξης των 1000-2500 K. Η θερμοϊονική εκπομπή επηρεάζεται πολύ έντονα από το έργο εξόδου και τη θερμοκρασία του μετάλλου και υπακούει στη σχέση Richardson

$$I = C T^2 \exp\left(-\frac{\varphi}{kT}\right) \quad (42.1)$$

όπου  $C$  είναι μια σταθερά,  $\varphi$  το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου από το μέταλλο,  $T$  η απόλυτη θερμοκρασία και  $k$  η σταθερά του Boltzmann.

Να σημειωθεί ότι, σε επιφάνειες με μικρό έργο εξόδου (1-1,5 eV), ασθενής θερμοϊονική εκπομπή παρατηρείται ακόμη και σε θερμοκρασία δωματίου. Για παράδειγμα, σε ένα φωτοστοιχείο ή φωτοπολλαπλασιαστή, σε θερμοκρασία δωματίου, η φωτοευαίσθητη ουσία της φωτοδιόδου εκπέμπει περίπου 100-1000 ηλεκτρόνια ανά δευτερόλεπτο, τα οποία δημιουργούν το λεγόμενο ρεύμα σκότους (dark current), από το οποίο εξαρτάται το κατώφλι ευαισθησίας του φωτομετρητή.

#### 42.2.1.2. Ψυχρή εκπομπή ηλεκτρονίων

Ο όρος «ψυχρή εκπομπή» σχετίζεται με το γεγονός ότι η εκπομπή αυτή λαμβάνει χώρα σε θερμοκρασία δωματίου. Το φαινόμενο παρατηρείται όταν στην επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται πολύ ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο, της τάξης των  $10^9$ - $10^{10}$  V/m, και χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιαιτερότητες:

(α) Σε αντίθεση με τα τέσσερα άλλα είδη εκπομπής που αναφέραμε, στην ψυχρή εκπομπή τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το μέταλλο δίχως αυτά προηγουμένως να διεγερθούν.

(β) Η ένταση της εκπομπής δεν εξαρτάται σχεδόν καθόλου από τη θερμοκρασία και παραμένει σχεδόν αμετάβλητη στο θερμοκρασιακό διάστημα 0-300 K.

(γ) Στην ψυχρή εκπομπή παρατηρούνται ασυνήθιστα υψηλές τιμές πυκνότητας του ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας του μετάλλου), που είναι 4-5 τάξεις υψηλότερες από αυτές της θερμοϊονικής εκπομπής. Την ψυχρή εκπομπή την αποκαλούν συχνά και εκπομπή πεδίου (field emission), λόγω συσχέτισης του φαινομένου με το ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο.

#### 42.2.1.3. Σύντομη ιστορική αναδρομή

Στις πρώτες προσπάθειες ερμηνείας του φαινομένου ξεχώρισε η πρόταση Schottky, ο οποίος πρότεινε την άποψη ότι η εκπομπή πεδίου είναι ένα ξεχωριστό είδος θερμοϊονικής εκπομπής, όπου το ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο μειώνει το έργο εξόδου σε μηδενικά επίπεδα, δηλαδή είναι θερμοϊονική εκπομπή από επιφάνεια με σχεδόν μηδενικό έργο εξόδου.

Με σχετικά απλούς συλλογισμούς (βλ. Άσκηση 31, «Θερμοϊονική Εκπομπή Ηλεκτρονίων») έδειξε ότι ένα ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του μετάλλου μειώνει το έργο εξόδου του ηλεκτρονίου κατά έναν παράγοντα

$$\Delta\varphi = \sqrt{\frac{e^3 F}{4 \pi \epsilon_0}} \quad (42.2)$$

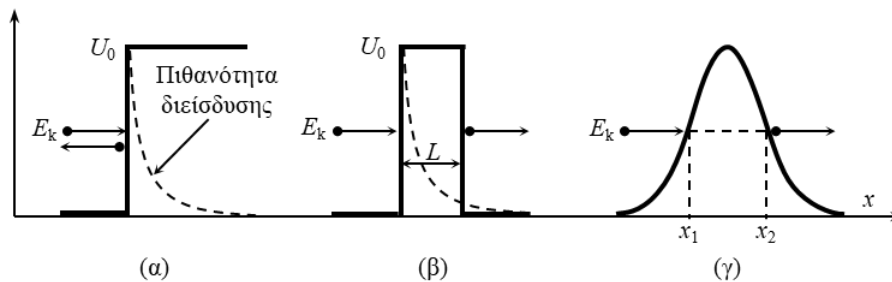
όπου  $F$  είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (V/m),  $\epsilon_0$  η διηλεκτρική σταθερά του κενού και  $e$  το φορτίο του ηλεκτρονίου. Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, σε ισχυρά ηλεκτρικά πεδία της τάξης των  $10^9$  V/m, η μείωση του έργου εξόδου είναι περίπου 1 eV.

Η υπόθεση Schottky ελέγχθηκε στα πειράματα θερμοϊονικής εκπομπής, όπου διαπιστώθηκε η ορθότητά της, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο πράγματι μειώνει το έργο εξόδου και η μείωση αυτή ακολουθεί την Εξ. (42.2). Ωστόσο, η ιδέα του Schottky δεν μπορούσε να ερμηνεύσει την ανεξαρτησία της ψυχρής εκπομπής από τη θερμοκρασία. Προβληματική ήταν και η μείωση του έργου εξόδου, καθώς από την πειραματική μελέτη προέκυπτε το συμπέρασμα ότι, σε πεδία της τάξης των  $10^9$  V/m, το έργο εξόδου πρέπει σχεδόν να μηδενίζεται, ενώ η Εξ. (42.2) δίνει μείωση μόνο κατά  $\sim 1$  eV (ακριβέστερα,  $1,9 \times 10^{-19}$  J). Σημειώνεται ότι στο βολφράμιο, με το οποίο γίνονταν τα περισσότερα πειράματα ψυχρής εκπομπής, το έργο εξόδου είναι 4,5 eV. Επίσης, το μοντέλο Schottky αδυνατούσε να ερμηνεύσει τη μεγάλη πυκνότητα ρεύματος που παρατηρείται στην ψυχρή εκπομπή

Σταδιακά εδραιώθηκε η πεποίθηση ότι η μείωση του έργου εξόδου σε ισχυρά ηλεκτρικά πεδία όντως λαμβάνει χώρα, αλλά η μείωση αυτή δεν επεκτείνεται μέχρι τον μηδενισμό του έργου εξόδου. Επομένως, η ψυχρή εκπομπή είναι ένα νέο φαινόμενο, ανεξάρτητο από εκείνο της θερμοϊονικής εκπομπής. Μεγάλη και ουσιαστική πρόοδος στην ερμηνεία της ψυχρής εκπομπής σημειώθηκε με το μοντέλο που προτάθηκε από τους Fowler-Nordheim (1928), οι οποίοι πρότειναν την υπόθεση ότι πίσω από την εκπομπή πεδίου κρύβεται το κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας.

#### 42.2.2. Κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας – Κβαντομηχανικός φορμαλισμός

Το κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας παρατηρείται όταν ένα ηλεκτρόνιο προσπίπτει κάθετα σε ένα φράγμα δυναμικού («ενεργειακό εμπόδιο»), όπου είτε θα ανακλαστεί είτε θα το διαπεράσει. Πρέπει να διακρίνεται το φράγμα δυναμικού (Σχ. 42.1.β, γ) από το σκαλοπάτι (βήμα) δυναμικού, που έχει άπειρο πλάτος (Σχ. 42.1.α).



Σχήμα 42.1. (α) Σκαλοπάτι (βήμα) δυναμικού, (β) και (γ) φράγματα δυναμικού.

Σύμφωνα με τις αρχές της Κλασικής Φυσικής, το ηλεκτρόνιο προσπερνά το σκαλοπάτι δυναμικού μόνο όταν η κινητική του ενέργεια είναι μεγαλύτερη από το «ύψος» αυτού του δυναμικού, ενώ το ηλεκτρόνιο με μικρότερη ενέργεια ανακλάται. Σύμφωνα, όμως, με τις αρχές της Κβαντικής Μηχανικής, το ηλεκτρόνιο μπορεί να διεισδύσει στην απαγορευμένη ενεργειακά περιοχή, αλλά η πιθανότητα αυτής της διείσδυσης είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση του βάρους διείσδυσης.

Όταν το ηλεκτρόνιο προσπίπτει σε φράγμα δυναμικού «μικρού» πλάτους, το ηλεκτρόνιο είτε θα ανακλαστεί είτε θα το διαπεράσει, καθώς έχει μη μηδενική πιθανότητα να το διαπεράσει ακόμη και όταν η κινητική του ενέργεια είναι μικρότερη από το «ύψος» του φράγματος. Αυτοί είναι οι όροι με τους οποίους περιγράφεται το φαινόμενο σήραγγας, το οποίο οφείλεται στις

κυματικές ιδιότητες των ηλεκτρονίων. Υπενθυμίζεται ότι η διείσδυση των κυμάτων στην απαγορευμένη περιοχή παρατηρείται ακόμη και σε πειράματα της κλασικής Οπτικής (βλ. Π42.1 στο Παράρτημα, στο τέλος της άσκησης).

Η πιθανότητα εμβολισμού του δυναμικού φράγματος αυξάνει σημαντικά όταν το πλάτος του φράγματος έχει διαστάσεις ίδιας τάξης με το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου. Στα μέταλλα, για παράδειγμα, ακόμη και σε θερμοκρασία 0 K, το μεγαλύτερο μέρος των ελεύθερων ηλεκτρονίων κινείται με τη λεγόμενη ενέργεια Fermi,  $E_F$ , που στο βολφράμιο είναι 5,7 eV. Τα ηλεκτρόνια που κινούνται με τις ενέργειες αυτές έχουν μήκος κύματος de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_F}} = 5,13 \times 10^{-10} \text{ m} \approx 5,1 \text{ \AA}$$

όπου  $h$  είναι η σταθερά του Planck και  $m_e$  η μάζα του ηλεκτρονίου ( $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ,  $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ ). Επομένως, στο βολφράμιο, για να είναι σχετικά μεγάλη η πιθανότητα εμβολισμού του δυναμικού φράγματος, το πλάτος του πρέπει να είναι της τάξης των  $5 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

Γενικότερα, υπό κανονικές συνθήκες και απουσία εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να εξέλθουν από το μέταλλο, καθώς, ακόμη και αυτά που κινούνται με ενέργεια Fermi, στην επιφάνεια του μετάλλου αντιμετωπίζουν ένα σκαλοπάτι δυναμικού που είναι υψηλότερο από την ενέργεια Fermi κατά 4,5 eV (έργο εξόδου,  $\phi$ ). Έτσι, στο βολφράμιο, το «ύψος» του σκαλοπατιού δυναμικού (σε V) είναι  $U_0 = 5,7 \text{ V} + 4,5 \text{ V} = 10,2 \text{ V}$ . Προκειμένου να εξέλθει από το μέταλλο το ηλεκτρόνιο που κινείται με την ενέργεια Fermi, πρέπει να του καταβληθεί πρόσθετη ενέργεια της τάξης του  $\phi$ . Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο η πρόσθετη ενέργεια καταβάλλεται από τα φωτόνια, στη θερμοϊονική εκπομπή από τη θερμότητα κ.λπ. Αλλά στο «σκοτάδι» και σε θερμοκρασία 0 K το ηλεκτρόνιο μπορεί να εξέλθει από το μέταλλο μόνο μέσω του φαινομένου σήραγγας.

Προκειμένου να εκδηλωθεί το φαινόμενο σήραγγας, το σκαλοπάτι δυναμικού, άπειρου πλάτους, πρέπει με κάποιον τρόπο να μετατραπεί σε φράγμα δυναμικού, σχετικά μικρού «πλάτους», της τάξης των 5 Å. Η μετατροπή αυτή πραγματοποιείται μέσω εφαρμογής ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου.

Στα ζητήματα αυτού του είδους, εισάγεται η έννοια της διαπερατότητας του φράγματος δυναμικού,  $D(E_k)$ , η οποία εξαρτάται από το «ύψος» και το πλάτος του φράγματος, αλλά και την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, και ορίζεται ως

$$D(E_k) = \frac{I_D}{I_0} \quad (42.3)$$

όπου  $I_D$  και  $I_0$  είναι οι εντάσεις του κύματος de Broglie που διαπέρασε το φράγμα και του προσπίπτοντος, αντίστοιχα. Ουσιαστικά, η διαπερατότητα ορίζει το ποσοστό των ηλεκτρονίων που διαπερνά το φράγμα.

Για ένα ορθογώνιο φράγμα, όπως αυτό που εικονίζεται στο Σχ. 42.1.β, όταν  $E_k < U_0$ , η διαπερατότητα ορίζεται από τη σχέση

$$D(E_k) = 16 \frac{E_k}{U_0} \left(1 - \frac{E_k}{U_0}\right) \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_k)}\right) \quad (42.4)$$

όπου  $L$  και  $U_0$  είναι το πλάτος και το ύψος του φράγματος δυναμικού, αντίστοιχα, ενώ  $m$  και  $E_k$  είναι η μάζα και η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Όταν το φράγμα δυναμικού έχει περιπλοκότερο σχήμα (Σχ. 42.1.γ), οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν τη σχέση

$$D(E_k) = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - E_k]} dx\right) \quad (42.5)$$

όπου  $D_0$  είναι ο παράγοντας πριν από το εκθετικό στην Εξ. (42.4).

Από την Εξ. (42.4) προκύπτει το συμπέρασμα ότι η διαπερατότητα του φράγματος δυναμικού είναι εκθετική συνάρτηση του πλάτους ή «μήκους της ενεργειακής σήραγγας»,  $L$ , και της διαφοράς  $U_0 - E_k$ , δηλαδή εξαρτάται έντονα και από τις κινητικές ενέργειες των ηλεκτρονίων. Επομένως, το φαινόμενο σήραγγας συνδέεται άμεσα με την ενεργειακή κατάσταση των ηλεκτρονίων μέσα στο μέταλλο, το «μήκος της σήραγγας», αλλά και το ύψος του φράγματος δυναμικού που αυτά αντιμετωπίζουν στην επιφάνεια του μετάλλου.

### 42.2.3. Ενεργειακή κατάσταση των ελεύθερων ηλεκτρονίων στα μέταλλα

#### 42.2.3.1. Κβαντομηχανική προσέγγιση

Καθώς το φαινόμενο σήραγγας δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία, η σχετική ανάλυση γίνεται σε θερμοκρασία 0 K. Ακολούθως θα εξεταστούν τυχόν διαφοροποιήσεις που δημιουργούνται σε θερμοκρασίες δωματίου.

Η κβαντική θεωρία των μετάλλων, στην απλούστερη μορφή της, θεωρεί ότι τα ηλεκτρόνια που προκαλούν την ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι ελεύθερα. Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο περιγράφεται με ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται χωρίς σκέδαση και ανακλάται μόνο στην επιφάνεια του μετάλλου. Έτσι, διαμορφώνεται ένα σύστημα στάσιμων κυμάτων με διακριτό φάσμα, όμοιο με αυτό των στάσιμων ακουστικών κυμάτων. Η μεγάλη πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων επιτρέπει την αντικατάσταση του διακριτού φάσματος με ένα συνεχές, όπου η σχετική μαθηματική ανάλυση είναι ευκολότερη.

Από την απαγορευτική αρχή του Pauli προκύπτει ότι, ακόμη και σε θερμοκρασία 0 K, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν «παγώνουν» την κίνησή τους. Τη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη μπορούν να καταλάβουν μόνο δύο ηλεκτρόνια, ενώ τα υπόλοιπα κατανέμονται σε ενεργειακές στάθμες κατά ζεύγη, από τις χαμηλότερες προς τις υψηλότερες. Έτσι, τα ηλεκτρόνια είναι αναγκασμένα να καταλάβουν μια περιοχή ενεργειακών σταθμών που εκτείνεται από το μηδέν έως κάποια μέγιστη τιμή  $E_{\max}$ , που φέρει ειδική ονομασία και ονομάζεται ενέργεια Fermi,  $E_F$ .

Για την τιμή της ενέργειας Fermi οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν

$$E_F = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{8m_e \pi^2} \quad (42.6)$$

όπου  $\hbar$  είναι η σταθερά του Planck,  $m_e$  η μάζα του ηλεκτρονίου και  $n$  ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου.

Η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων ανά μονάδα ενέργειας και ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m_e^3} \sqrt{E} \quad (42.7)$$

ενώ ο αριθμός  $dN$  των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ  $E$  και  $E + dE$  είναι ανάλογος της πυκνότητας των ενεργειακών καταστάσεων και της πιθανότητας  $f(E)$  να είναι κατειλημμένη η κατάσταση με ενέργεια  $E$ . Η τελευταία προκύπτει από τη στατιστική Fermi-Dirac και είναι

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (42.8)$$

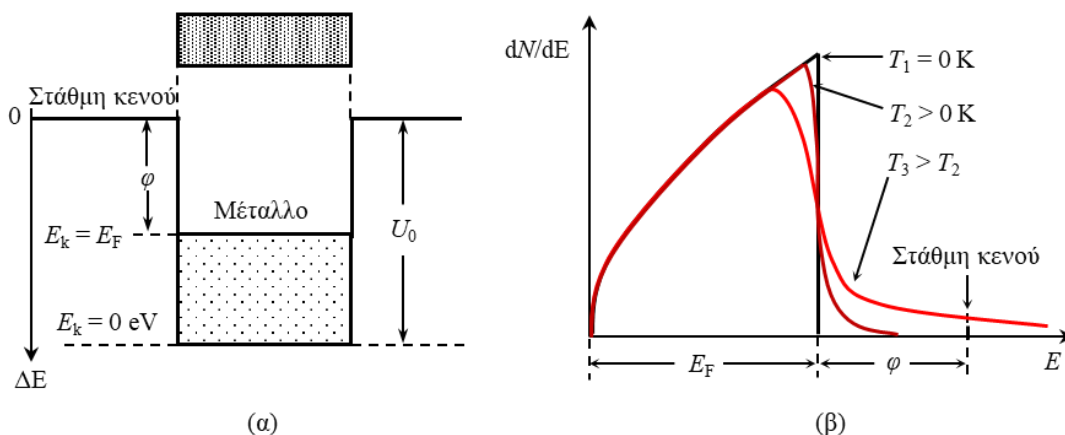
Έτσι, ο αριθμός  $dN$  είναι

$$dN = \rho(E)f(E) dE = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m_e^3} \frac{\sqrt{E} dE}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

Επομένως, η πυκνότητα των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ  $E$  και  $E + dE$  είναι

$$\frac{dN}{dE} = \rho(E)f(E) = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m_e^3} \frac{\sqrt{E}}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (42.9)$$

Στο Σχ. 42.2 δίνεται η γραφική παράσταση της ενεργειακής κατανομής των ηλεκτρονίων σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες, δηλαδή όταν αυτά διεγείρονται θερμομικρά. Προφανώς, στη θερμομική εκπομπή συμμετέχουν μόνο τα ηλεκτρόνια της εκθετικής «ουράς», που κινούνται προς την επιφάνεια του στερεού και οι κινητικές τους ενέργειες υπερβαίνουν το άθροισμα  $E_F + \phi$ , δηλαδή το ύψος του σκαλοπατιού δυναμικού  $U_0$ . Στην ψυχρή εκπομπή, αντιθέτως, τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το μέταλλο απευθείας από τη στάθμη Fermi, ακόμη και σε θερμοκρασία 0 K.



**Σχήμα 42.2.** (α) Γραφική παράσταση του πηγαδιού δυναμικού στο εσωτερικό ενός μετάλλου στη θερμοκρασία  $T = 0$  K. (β) Η ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων μέσα σε μέταλλο σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες  $T_1 = 0$  K,  $T_2 > 0$  K και  $T_3 > T_2$ .

#### 42.2.3.2. Μετατροπή του σκαλοπατιού δυναμικού σε φράγμα

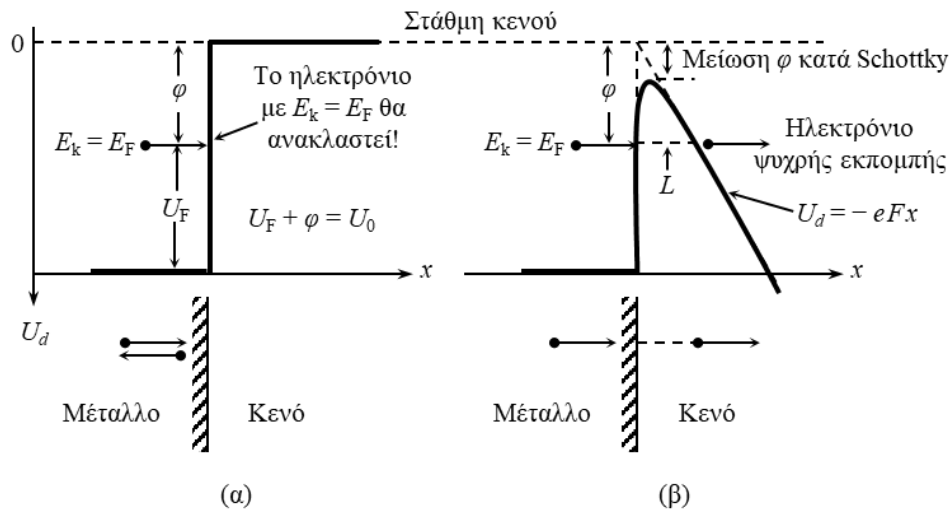
Σύμφωνα με την απλουστευμένη εικόνα του φαινομένου, σε θερμοκρασία 0 K, τα «ελεύθερα» ηλεκτρόνια του μετάλλου, κινούμενα με ενέργειες Fermi κάθετα προς την επιφάνεια και προσκρούοντας στο σκαλοπάτι δυναμικού με «ύψος» ( $U_0$ ) μεγαλύτερο από την ενέργεια Fermi, ανακλώνται πλήρως προς το εσωτερικό. Για παράδειγμα, αναφέρθηκε παραπάνω ότι για το βολφράμιο έχουμε  $\phi = 4,5$  eV και  $E_F = 5,7$  eV, επομένως το ύψος του σκαλοπατιού δυναμικού (σε βολτ) θα είναι  $U_0 = 10,2$  V. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ακόμη και τα πιο ενεργά ελεύθερα ηλεκτρόνια, που κινούνται με ενέργειες Fermi, υπό κανονικές συνθήκες δεν μπορούν να εξέλθουν στο κενό. Στην εικόνα αυτή η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου έξω από το μέταλλο θεωρείται σταθερή και, συνήθως, η τιμή της επιλέγεται ίση με μηδέν (Σχ. 42.3.α). Η τιμή αυτή αποκαλείται συχνά στάθμη κενού ή στάθμη αναφοράς.

Η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου έξω από το μέταλλο μπορεί να διαφοροποιηθεί, όταν στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου δημιουργηθεί ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο  $F$  (Σχ. 42.3.β).

Παρουσία αυτού του πεδίου, η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου μειώνεται γραμμικά, υπακούοντας στη σχέση

$$U_d = -eFx \quad (42.10)$$

όπου  $x$  είναι η απόσταση του ηλεκτρονίου από την επιφάνεια του μετάλλου.



Σχήμα 42.3. Μετατροπή του σκαλοπατιού δυναμικού (α) σε φράγμα δυναμικού (β).

Η ένταση του φαινομένου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το «μήκος της ενεργειακής σήραγγας»  $L$  που «βλέπουν» τα ηλεκτρόνια όταν κινούνται με ενέργειες Fermi, καθώς στο μέταλλο το μεγαλύτερο μέρος των ηλεκτρονίων κινείται με την ενέργεια αυτή. Προφανώς, το μήκος αυτό εξαρτάται από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Το μήκος αυτό υπολογίζεται από το «τριγωνικό φράγμα δυναμικού», με κάθετες πλευρές  $\phi$  και  $L$ , που φαίνεται στο Σχ. 42.3.β. Σε απόσταση  $L$  έξω από το μέταλλο, η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου μειώνεται κατά  $\phi$ , δηλαδή ισχύει  $-\phi = -eFL$ . Επομένως,

$$L = \frac{\phi}{eF} \quad (42.11)$$

Βλέπουμε ότι το «μήκος της ενεργειακής σήραγγας»  $L$  είναι αντιστρόφως ανάλογο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου  $F$ , αλλά εξαρτάται και από το έργο εξόδου  $\phi$ .

Σημειώνεται ότι στην ψυχρή εκπομπή συμμετέχουν και ηλεκτρόνια που οι ενέργειές τους είναι μικρότερες από την ενέργεια Fermi, αλλά η ποσοστιαία συμμετοχή τους μειώνεται σημαντικά, καθώς αντιμετωπίζουν «σήραγγα» μεγαλύτερου μήκους, όπως φαίνεται στο Σχ. 42.3.β.

#### 42.2.4. Νόμος των Fowler-Nordheim

Το 1928, οι R. H. Fowler και L. Nordheim υπολόγισαν την πυκνότητα του ρεύματος ηλεκτρονίων που διαπερνούν το φράγμα δυναμικού μέσω του φαινομένου σήραγγας και εξέρχονται από το μέταλλο στο κενό όταν, σε θερμοκρασία 0 K, στην εξωτερική επιφάνεια του μετάλλου δημιουργείται ένα κάθετο ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο  $F$ . Οι σχετικοί υπολογισμοί κατέληξαν στη σχέση

$$j_e = P \frac{e^2}{2\pi h} \cdot \frac{F^2}{\phi} \exp\left(-\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3he} \cdot \frac{\phi^{3/2}}{F}\right) \quad (42.12)$$

όπου  $e$  και  $m$  είναι το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου, αντίστοιχα,  $h$  η σταθερά του Planck,  $\phi$  το έργο εξόδου και  $P$  μια σταθερά του μετάλλου που δίνεται από τη σχέση

$$P = \frac{\sqrt{\varphi U_F}}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{U_F}} \quad (42.13)$$

όπου το  $U_F$  παριστάνει το δυναμικό Fermi σε V (Σχ. 43.3.α).

Στο βολφράμιο, για παράδειγμα,  $\varphi = 4,5$  και  $U_F = 5,7$  (V), επομένως η σταθερά αυτού του μετάλλου είναι

$$P = \frac{\sqrt{\varphi U_F}}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{U_F}} = \frac{\sqrt{4,5 \times 5,7}}{\sqrt{4,5} + \sqrt{5,7}} = 1,12 \quad (\sqrt{V})$$

η οποία, όπως βλέπουμε, διαφέρει ελάχιστα από τη μονάδα.

Διευκρινίζεται ότι οι δύο ερευνητές δεν έλαβαν υπόψη την ελαφρά μείωση του έργου εξόδου λόγω φαινομένου Schottky. Επομένως, στην Εξ. (42.12) το  $\varphi$  παριστάνει την τιμή του έργου εξόδου απουσία του ηλεκτρικού πεδίου. Υπό την έννοια αυτή, η Εξ. (42.12) είναι προσεγγιστική, αλλά σε επόμενες εργασίες διαπιστώθηκε ότι, σε γενικές γραμμές, η σχέση αυτή αποδίδει σωστά την εξέλιξη του φαινομένου, δηλαδή η ψυχρή εκπομπή υπακούει σε μια σχέση του τύπου

$$j = C F^2 \exp\left(-\frac{B}{F}\right) \quad (42.14)$$

όπου  $C$  και  $B$  είναι σταθερές.

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (42.12) τα μεγέθη  $m$ ,  $e$ , και  $h$  με τις αντίστοιχες τιμές τους στο SI ( $m = 9,109 \times 10^{-31}$  kg,  $e = 1,602 \times 10^{-19}$  C,  $h = 6,6256 \times 10^{-34}$  J·s) και επιλέγοντας για το έργο εξόδου τη μονάδα eV, η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$j = P \times 6,168 \times 10^{-2} \frac{F^2}{\varphi} \exp\left(-6,827 \times 10^9 \frac{\varphi^{3/2}}{F}\right) \quad (\text{A/m}^2) \quad (42.15)$$

όπου η πυκνότητα του ρεύματος είναι σε μονάδες A/m<sup>2</sup>, το  $\varphi$  σε V και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε V/m.

#### 42.2.4.1. Επίδραση της θερμοκρασίας στο φαινόμενο της ψυχρής εκπομπής

Στα πειράματα ψυχρής εκπομπής παρατηρήθηκε μια ασθενής εξάρτηση του φαινομένου από τη θερμοκρασία, δηλαδή μια ελαφρά ενίσχυση της ψυχρής εκπομπής σε υψηλότερες θερμοκρασίες. Η εξάρτηση αυτή ερμηνεύεται εύκολα αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι, σε θερμοκρασίες  $T > 0$ , στην ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων πάνω από την στάθμη Fermi εμφανίζεται μια εκθετική «ουρά». Τα ηλεκτρόνια της ουράς, που έχουν κινητικές ενέργειες  $E_k > E_F + \varphi$ , είναι υπεύθυνα για τη θερμοϊονική εκπομπή. Τα ηλεκτρόνια, όμως, που κινούνται με κινητικές ενέργειες  $E_F < E_k < E_F + \varphi$  δεν μπορούν να εξέλθουν θερμοϊονικά και για τον λόγο αυτό το μεγαλύτερο μέρος τους ανακλάται στο εσωτερικό του μετάλλου. Ωστόσο, ένα μικρό μέρος εξέρχεται από το μέταλλο μέσω φαινομένου σήραγγας, καθώς για τα ηλεκτρόνια αυτά το μήκος της σήραγγας είναι μικρότερο από αυτό στη στάθμη Fermi. Βέβαια, το ποσοστό αυτών των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρό και επηρεάζει ελάχιστα τον συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων που εξέρχονται από τη στάθμη Fermi.

#### 42.2.5. Έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim

Παρά τις πειραματικές δυσκολίες, ο νόμος Fowler-Nordheim μελετήθηκε ποιοτικά και ποσοτικά, και διαπιστώθηκε καλή συμφωνία μεταξύ θεωρίας και πειράματος. Η δυσκολία των πειραμάτων αυτών πηγάζει από την ανάγκη χρησιμοποίησης ηλεκτρικών πεδίων της τάξης των



$10^9$ - $10^{10}$  V/m. Τα ισχυρά αυτά ηλεκτρικά πεδία δημιουργούνται συνήθως μέσα σε μια δίοδο υψηλού κενού, στα ηλεκτρόδια της οποίας εφαρμόζεται σχετικά μεγάλη τάση. Το ηλεκτρόδιο που πολώνεται αρνητικά κατασκευάζεται από μέταλλο με πολύ μεγάλη καμπυλότητα (λεπτό σύρμα ή ακίδα). Το δεύτερο ηλεκτρόδιο, που πολώνεται θετικά, έχει συνήθεις διαστάσεις και λειτουργεί ως συλλέκτης των ηλεκτρονίων της ψυχρής εκπομπής.

Στις πειραματικές διατάξεις, τα αναγκαία ηλεκτρικά πεδία στην επιφάνεια του μετάλλου επιτυγχάνονται με τάσεις της τάξης των 3-10 kV. Για παράδειγμα, σε έναν ομοαξονικό κυλινδρικό πυκνωτή, που αποτελείται από ένα λεπτό μεταλλικό σύρμα, ακτίνας  $r$ , και έναν κούλο μεταλλικό κύλινδρο που το περιβάλλει, ακτίνας  $R$ , η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του λεπτού σύρματος είναι

$$F = \frac{U}{r} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (42.16\alpha)$$

Έτσι, στο κυλινδρικό σύστημα ηλεκτροδίων με  $r = 1 \mu\text{m}$  και  $R = 10 \text{ cm}$ , στην επιφάνεια του λεπτού σύρματος το ηλεκτρικό πεδίο είναι  $2 \times 10^9 \text{ V/m}$  σε τάση 11,5 kV.

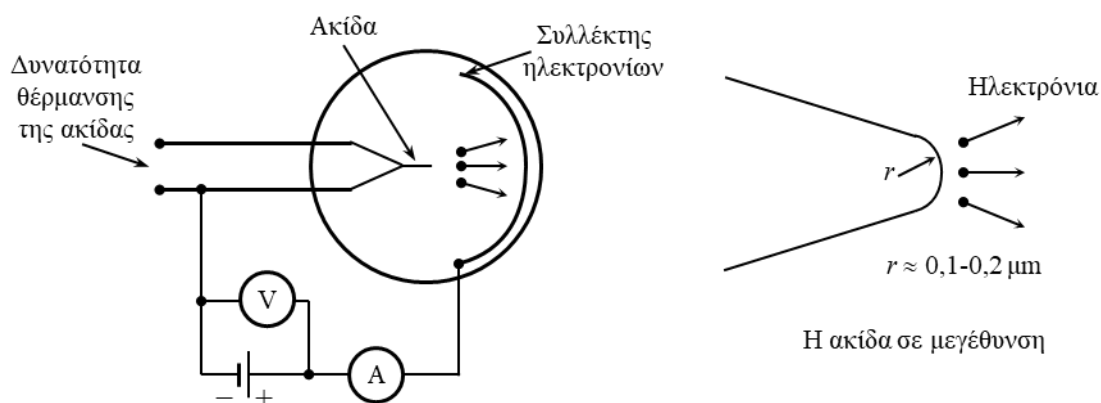
Στον ομόκεντρο σφαιρικό πυκνωτή, η αντίστοιχη σχέση είναι

$$F = \frac{U}{r} \times \frac{R}{R-r} \quad (42.16\beta)$$

ενώ στην κορυφή του παραβολοειδούς εκ περιστροφής, το οποίο σε ικανοποιητικό βαθμό αποδίδει μια ακίδα, ισχύει

$$F = \frac{U}{r} \times \frac{2}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)} \quad (42.17)$$

Στην παρούσα άσκηση χρησιμοποιείται μια λυχνία υψηλού κενού με δύο ηλεκτρόδια, τύπου ακίδα-σφαίρα (Σχ. 42.4). Στο κέντρο της σφαίρας τοποθετείται η ακίδα, που λειτουργεί ως πηγή των ηλεκτρονίων, και μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων εφαρμόζεται υψηλή τάση μερικών kV, δηλαδή σχετικά μικρή τάση, μιας και η κορυφή της ακίδας κατασκευάζεται σκόπιμα με ακτίνα περίπου 0,1-0,2  $\mu\text{m}$ . Το δεύτερο ηλεκτρόδιο, που πολώνεται θετικά, έχει συνήθεις διαστάσεις (μερικά εκατοστά) και λειτουργεί ως συλλέκτης των ηλεκτρονίων. Έξω από τη λυχνία συνδέεται ένας ευαίσθητος μετρητής ρεύματος, καθώς τα μετρούμενα ρεύματα είναι της τάξης των  $10^{-6}$ - $10^{-9}$  A.



**Σχήμα 42.4.** Βασική διάταξη μελέτης της ψυχρής εκπομπής ηλεκτρονίων.

Σε μια τέτοια λυχνία, η Εξ. (42.17) μόνο κατά προσέγγιση αποδίδει το ηλεκτρικό πεδίο στην κορυφή της ακίδας, καθώς η ακριβής γεωμετρία της είναι άγνωστη. Λόγω μικρών

γεωμετρικών διαστάσεων της ακίδας, το ρεύμα των ηλεκτρονίων αποκτά μετρήσιμες τιμές σε σχετικά μικρές τάσεις, γεγονός που συνιστά μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των συσκευών. Στο κυλινδρικό σύστημα, οι εφαρμοζόμενες τάσεις είναι πολύ υψηλότερες, ενώ δεν είναι εύκολο να κατασκευαστεί σύρμα με διάμετρο 1  $\mu\text{m}$ .

Στα μειονεκτήματα των συσκευών τύπου ακίδα-σφαίρα πρέπει να αναφερθεί η αβεβαιότητα της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας ( $\approx 30\%$ ). Η αβεβαιότητα αυτή προέρχεται αφενός από την αβεβαιότητα στην τιμή της διαμέτρου της κορυφής της, καθώς είναι δύσκολο να μετρηθεί με ακρίβεια, αφετέρου από το ακαθόριστο γεωμετρικό σχήμα της. Αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι, στην κορυφή της ακίδας, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης τάσης και, κατ' εκτίμηση, αποδίδεται από την Εξ. (42.17). Επομένως, στις διατάξεις αυτές είναι σχετικά δύσκολος ο ποσοτικός έλεγχος του νόμου, ωστόσο προσφέρονται για τον ποιοτικό έλεγχο του.

### 42.3. Μέθοδος – Ποιοτικός έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim

Ο ακριβής προσδιορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας δεν είναι απαραίτητος όταν ο νόμος ελέγχεται ποιοτικά. Σε αυτή την περίπτωση, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας ορίζεται ως

$$F = \xi U \quad (42.18)$$

όπου  $U$  είναι η τάση που εφαρμόζεται μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων, ενώ  $\xi$  είναι ο γεωμετρικός παράγοντας της ακίδας:

$$\xi = \frac{1}{r} \times \frac{2}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)}$$

Η Εξ. (42.12) μπορεί να γραφτεί ως

$$I_{\psi} = C U^2 \exp\left(-\frac{B}{U}\right) \quad (\text{A}) \quad (42.19)$$

όπου  $I_{\psi}$  είναι το συνολικό ρεύμα της ψυχρής εκπομπής,  $S$  το «μέσο» εμβαδόν της ακίδας, ενώ οι σταθερές  $C$  και  $B$  είναι:

$$C = \frac{SP\xi^2 \times 10^{-2}}{\varphi} \quad (\text{A}\cdot\text{V}^{-2}) \quad (42.20)$$

και

$$B = \frac{6,83 \times 10^9 \varphi^{3/2}}{\xi} \quad (\text{V}) \quad (42.21)$$

Λογαριθμίζοντας την Εξ. (42.19), προκύπτει τελικά

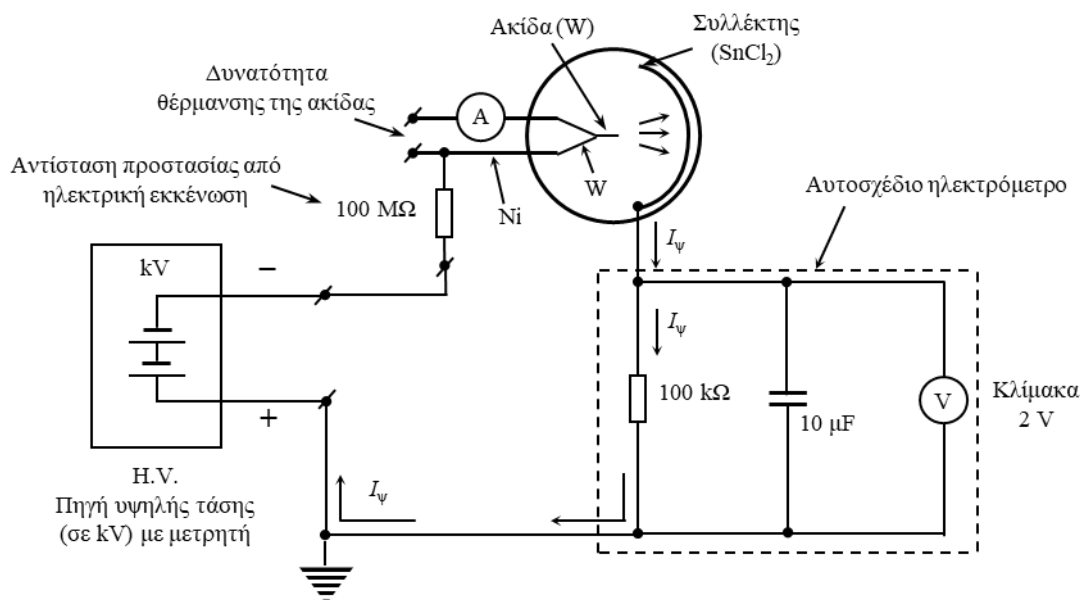
$$\ln\left(\frac{I_{\psi}}{U^2}\right) = \ln C - \frac{B}{U} \quad (42.22)$$

Θέτοντας  $x = 1/U$  και  $y = \ln(I_{\psi}/U^2)$ , η γραφική παράσταση της Εξ. (42.22) παριστάνει μια ευθεία που τέμνει τον άξονα  $y$  στο σημείο  $\ln C$ , ενώ η κλίση της είναι ίση με  $-B$ . Μετρώντας το ρεύμα της ακίδας ως συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης, μπορεί να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της μεταβλητής  $y$  συναρτήσει της  $x$ . Στο βαθμό που ο νόμος Fowler-Nordheim ισχύει, τα επεξεργασμένα πειραματικά σημεία αναμένεται να πέσουν πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση  $B$ . Από την τιμή της τελευταίας και την Εξ. (42.21) μπορεί να υπολογιστεί ο

γεωμετρικός παράγοντας  $\zeta$  της ακίδας και ακολούθως να υπολογιστεί (εκτιμηθεί) η ακτίνα καμπυλότητας  $r$  της κορυφής της ακίδας (βλ. Π42.3).

#### 42.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη (Σχ. 42.5) αποτελείται από μια βάση όπου στηρίζεται μια γυάλινη λυχνία-δίοδος υψηλού κενού. Η διάταξη περιλαμβάνει πηγή υψηλής τάσης, με ψηφιακό μετρητή, καθώς επίσης και ένα αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο (βλ. Π42.2).



Σχήμα 42.5. Η πειραματική διάταξη της άσκησης.

Η ακίδα βρίσκεται στο δεξί άκρο ενός λεπτού ευθύγραμμου σύρματος από βολφράμιο, μήκους περίπου 4 mm, το οποίο είναι κολλημένο στο κέντρο άλλου σύρματος, επίσης από βολφράμιο, σε σχήμα «>>», που σε άλλα πειράματα μπορεί να θερμανθεί με μεγάλα ρεύματα, της τάξης των 1-2 A, κατά συνέπεια να θερμανθεί και η ακίδα. Η διάμετρος του ευθύγραμμου σύρματος είναι σχετικά μεγάλη (50  $\mu\text{m}$ ), αλλά με μια ειδική ηλεκτροχημική κατεργασία το δεξί άκρο του απέκτησε σχήμα κώνου, με κορυφή ένα μικρό ημισφαίριο ακτίνας περίπου 0,1- 0,2  $\mu\text{m}$ . Η ακίδα βρίσκεται στο κέντρο μιας γυάλινης σφαίρας με διάμετρο 8,0 cm.

Ο συλλέκτης των ηλεκτρονίων, με μορφή λεπτού και διαφανούς αγωγίμου στρώματος από χλωριούχο κασσίτερο ( $\text{SnCl}_2$ ), έχει ημισφαιρικό σχήμα και βρίσκεται απέναντι από την ακίδα, στην εσωτερική επιφάνεια της γυάλινης σφαίρας. Το λεπτό στρώμα του συλλέκτη βρίσκεται σε ηλεκτρική επαφή με τα ηλεκτρόδια τροφοδοσίας ενός φούρνου (δεν εικονίζεται στο σχήμα), που προορίζεται για την εξάχνωση των ατόμων βαρίου στην επιφάνεια της ακίδας. Μέσω των ηλεκτροδίων αυτού του φούρνου, τα ηλεκτρόνια της ψυχρής εκπομπής οδηγούνται έξω από τη γυάλινη σφαίρα και, μέσω της μετρητικής αντίστασης 100 k $\Omega$  του ηλεκτρομέτρου, καταλήγουν στον θετικό πόλο της πηγής υψηλής τάσης.

Για λόγους ασφάλειας, ο μετρητής ρεύματος προτιμάται να βρίσκεται στο δυναμικό της Γης, δηλαδή στο δυναμικό που βρίσκεται και ο πειραματιστής. Ουσιαστικά, μέσω της μετρητικής αντίστασης 100 k $\Omega$ , το δυναμικό του συλλέκτη βρίσκεται πρακτικά στο δυναμικό της Γης, ενώ μεγάλη αρνητική τάση εφαρμόζεται στην ακίδα, μέσω της προστατευτικής αντίστασης 100 M $\Omega$ .

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Τυχόν παράκαμψη της προστατευτικής αντίστασης των 100 MΩ θα προκαλέσει *άμεση καταστροφή της ακίδας*, καθώς η παρουσία της αποτρέπει τη δημιουργία ηλεκτρικού τόξου μεταξύ της ακίδας και του συλλέκτη. Λόγω πολύ μεγάλης έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή της ακίδας, το ηλεκτρικό τόξο δημιουργείται ακόμη και σε συνθήκες υψηλού κενού. Αν για κάποιον λόγο αυτό συμβεί, τα θετικά ιόντα του τόξου, που βομβαρδίζουν την ακίδα με ενέργειες μερικών χιλιάδων eV, θα προκαλέσουν εξάχνωση του υλικού της (spattering), οδηγώντας αναπόφευκτα σε σημαντική αύξηση της διαμέτρου της. Αυτό θα προκαλέσει μείωση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της ακίδας, επομένως μείωση του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής σε επίπεδα μικρότερα από τη διακριτική ικανότητα του μετρητή ρεύματος. Η κατάσταση αυτή, με δεδομένη πηγή υψηλής τάσης, ισοδυναμεί με καταστροφή της ακίδας!

Τονίζεται ότι μικρή και αργή καταστροφή της ακίδας γίνεται και δίχως το ηλεκτρικό τόξο, λόγω της κίνησης των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό της λυχνίας, η οποία προκαλεί παραγωγή θετικών ιόντων που βομβαρδίζουν την ακίδα. Η παραγωγή αυτών των ιόντων εξαρτάται από την πίεση των αερίων στο εσωτερικό της λυχνίας, που δεν την ελέγχουμε, αλλά και από τον αριθμό των ηλεκτρονίων που κινούνται από την ακίδα προς τον συλλέκτη, δηλαδή από την ένταση του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής, την οποία μπορούμε να ελέγξουμε. Έτσι, για να παραταθεί η διάρκεια ζωής της ακίδας, είναι σκόπιμο το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής να μην υπερβαίνει τα 1000 nA. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, πρέπει να συντομεύουμε τη χρονική διάρκεια των καταστάσεων όπου το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι μεγάλο.

Στην πηγή υψηλής τάσης, η τάση εξόδου ρυθμίζεται με ένα ποτενσιόμετρο 10 στροφών, ο άξονας του οποίου βρίσκεται στην πρόσοψη του οργάνου. Στην πηγή είναι ενσωματωμένος ένας ψηφιακός μετρητής της παραγόμενης υψηλής τάσης, η ακρίβεια του οποίου είναι μικρή ( $\pm 3\%$ , με διακριτική ικανότητα 0,1 kV).

Η πειραματική διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλα πειράματα, καθώς παρέχει τις δυνατότητες θέρμανσης της ακίδας, επικάλυψης της ακίδας με άτομα βαρίου, όπως επίσης και λειτουργία της συσκευής ως ηλεκτρονικό μικροσκόπιο με μεγέθυνση  $R_{\text{σολ}}/r_{\text{ακ}} \approx 10^6$ . Για τον σκοπό αυτό, η εσωτερική επιφάνεια του συλλέκτη είναι καλυμμένη με λεπτό στρώμα φθορίζουσας ουσίας (ZnS), η οποία εκπέμπει φως όταν βομβαρδίζεται από ηλεκτρόνια με ενέργειες 5-10 keV. Η δυνατότητες αυτές δεν αξιοποιούνται στην παρούσα άσκηση και παραμένουν ανενεργές.

## Βιβλιογραφία

1. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος Β': *Ηλεκτρομαγνητισμός – Οπτική – Σύγχρονη Φυσική*. (Αθήνα, 2022), 40.4, 42.5.
2. R. A. Serway, C. J. Moses, C. A. Moyer, *Σύγχρονη Φυσική* (Ηράκλειο, 2000), Κεφ. 6.
3. Σ. Τραχανάς, *Κβαντομηχανική I* (Ηράκλειο, 2009), Κεφ. 6.
4. R. H. Fowler, L. Nordheim, "Electron Emission in Intense Electric Fields", *Proceedings of the Royal Society A* 119 (1928): 173-181.

## 42.5. Εκτέλεση

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Στην άσκηση χρησιμοποιούνται υψηλές τάσεις (έως 10 kV) που είναι επικίνδυνες για τη ζωή. Για τον λόγο αυτό:

- δεν επιτρέπεται στον σπουδαστή να θέτει σε λειτουργία την πηγή της υψηλής τάσης,
- η συναρμολόγηση του ηλεκτρικού κυκλώματος της άσκησης πρέπει να γίνεται **αυστηρά με κλειστή** την πηγή υψηλής τάσης και μόνο με ειδικά καλώδια ασφαλείας.
- την πηγή της υψηλής τάσης τη θέτει σε λειτουργία *μόνο ο επιβλέπων* της άσκησης, εφόσον βεβαιωθεί πρώτα ότι το ηλεκτρικό κύκλωμα είναι συναρμολογημένο σωστά.

Στην άσκηση αυτή θα γίνουν δύο πειράματα: ένα δοκιμαστικό και το κύριο. Στο **δοκιμαστικό πείραμα** γίνεται η μέτρηση του ρεύματος ως συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης, καθώς η τάση αυξάνει με βήμα 400 V. Επειδή στις μικρές τάσεις (0-3 kV) το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι πολύ μικρό, το μετρούμενο ρεύμα ουσιαστικά αποτελείται από το *ρεύμα διαρροής* που δημιουργείται στην εξωτερική επιφάνεια της λυχνίας μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων. Διαχωρίζεται εύκολα από το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής, καθώς εξαρτάται από την υγρασία του αέρα και αυξάνει *γραμμικά* με την εφαρμοζόμενη τάση. Αντιθέτως, στο ρεύμα της ψυχρής εκπομπής η εξάρτηση από την τάση είναι *απότομη και εκθετική*. Έτσι, αποστολή του δοκιμαστικού πειράματος είναι να εντοπιστεί η τάση  $U_\alpha$  (3-4 kV) στην οποία το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής αρχίζει να γίνεται μεγαλύτερο από εκείνο της διαρροής, γεγονός που παρατηρείται όταν το μετρούμενο ρεύμα *αρχίζει να αυξάνει απότομα*, ακολουθώντας μια εκθετική συνάρτηση.

1. Συναρμολογήστε το ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχ. 42.5.
2. Όταν ο επιβλέπων της άσκησης θέσει σε λειτουργία την πηγή υψηλής τάσης, ρυθμίστε την τάση εξόδου στο μηδέν. Το ψηφιακό πολύμετρο του ηλεκτρομέτρου πρέπει να λειτουργεί ως μετρητής τάσης στην κλίμακα 2 V.

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Για να μην καταστραφεί η ακίδα, το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής πρέπει να είναι πάντα μικρότερο από 1000 nA.

3. Αυξάνοντας σταδιακά την τάση της πηγής, με βήμα 400 V, εντοπίστε εκείνη την τάση  $U_\alpha$  στην οποία το ρεύμα αρχίζει να αυξάνει απότομα. Το μικρό ρεύμα (μερικά nA) που παρατηρείται πριν την απότομη άνοδο είναι το ρεύμα διαρροής  $I_\delta$ . (Δοκιμαστικό πείραμα.)
4. Ξεκινώντας από την τάση  $U_\alpha$  που εντοπίσατε, αυξήστε την τάση, με βήμα 200 V, και καταγράψτε το ρεύμα συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης, συμπληρώνοντας τις στήλες  $U_1$  και  $I_1$  του Πίνακα I. Οι μετρήσεις συνεχίζονται μέχρι την τάση  $U_{\max}$ , όπου το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής γίνεται περίπου 1000 nA.

**Πίνακας I**

$U_1$ (V)	$I_1$ (nA)	$U_2$ (V)	$I_2$ (nA)	$I_{\text{μέσο}}$ (nA)	$I_\psi = I_\mu - I_\delta$ (nA)
$U_\alpha + 200$ V		$U_\alpha + 200$ V			
$U_\alpha + 400$ V		$U_\alpha + 400$ V			
$U_\alpha + 600$ V		$U_\alpha + 600$ V			
...		...			
$U_{\max}$		$U_{\max}$			

5. Δίχως καθυστέρηση και χρονοτριβή, μιας και τα μεγάλα ρεύματα φθείρουν την ακίδα, μετρήστε ξανά το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής για τις ίδιες τιμές της εφαρμοζόμενης τάσης, αλλά αυτή τη φορά στην «κάθοδο» της τάσης, από την  $U_{\max}$  έως την  $U_\alpha$ , συμπληρώνοντας τις στήλες  $U_2$  και  $I_2$  του Πίνακα I.

6. Στις μετρήσεις αυτές, το ρεύμα αποτελεί άθροισμα δύο ρευμάτων: του ρεύματος της ψυχρής εκπομπής  $I_\psi$  και του ρεύματος διαρροής  $I_\delta$ . Το τελευταίο πρέπει να μετρηθεί, επειδή στην επεξεργασία θα πρέπει να αφαιρεθεί. Για τον σκοπό αυτό, μετρήστε το ρεύμα στην τάση  $U_\alpha - 300 \text{ V}$ , στην οποία το ρεύμα της ψυχρής εκπομπής είναι πολύ μικρό και μπορεί να αγνοηθεί, οπότε το ρεύμα που μετριέται αποτελείται ουσιαστικά μόνο από το ρεύμα διαρροής.

#### 42.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του Πίνακα I.
2. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της σχέσης  $I_\psi = f(U)$  για το διάστημα τάσεων από  $U_\alpha$  έως  $U_{\max}$ .
3. Για το ίδιο διάστημα τάσεων, υπολογίστε τις τιμές  $1/U$  και  $\ln(I_\psi/U^2)$  και συμπληρώστε τον Πίνακα II.

Πίνακας II

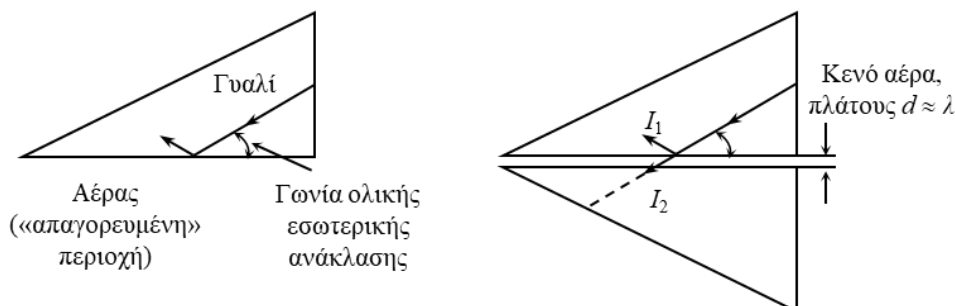
$U$ (V)	$I_\psi$ (nA)	$1/U$ (V <sup>-1</sup> )	$\ln(I_\psi/U^2)$
$U_\alpha + 200 \text{ V}$			
$U_\alpha + 400 \text{ V}$			
$U_\alpha + 600 \text{ V}$			
...			
$U_{\max}$			

4. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση  $\ln(I_\psi/U^2) = f(1/U)$ .
5. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, υπολογίστε την κλίση της πειραματικής ευθείας  $B \pm \delta B$ .
6. Από την Εξ. (42.21), υπολογίστε τον γεωμετρικό παράγοντα της ακίδας  $\xi \pm \delta\xi$ , θεωρώντας ότι το έργο εξόδου του βολφραμίου δεν επηρεάστηκε από το ηλεκτρικό πεδίο και ήταν 4,5 eV.
7. Υπολογίστε (βλ. Π42.3) την ακτίνα της κορυφής της ακίδας, και συγκρίνετε την τιμή που υπολογίσατε με αυτή που δηλώνει η κατασκευάστρια εταιρεία. Υπολογίστε επίσης και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην κορυφή της ακίδας, όταν η εφαρμοζόμενη τάση μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων είναι  $U_\alpha$ .
8. Σχολιάστε τα αποτελέσματα του πειράματος.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Π42)

### Π42.1. Φαινόμενο σήραγγας στην κλασική οπτική

Η διείσδυση του ηλεκτρονίου στην ενεργειακά απαγορευμένη περιοχή οφείλεται στην κυματική του φύση. Παρόμοια διείσδυση παρατηρείται και με τα κύματα του φωτός κατά την ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλί-αέρας (Σχ. Π42.1).



Σχήμα Π42.1. Διείσδυση του φωτός στην «απαγορευμένη» περιοχή.

Υπενθυμίζεται ότι στην ολική εσωτερική ανάκλαση του φωτός που παρατηρείται στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλί-αέρας, ο αέρας είναι «απαγορευμένη» περιοχή για την προσπίπτουσα ακτίνα. Ωστόσο, στο σημείο εσωτερικής ανάκλασης, μέρος του προσπίπτοντος φωτός διεισδύει στον αέρα, σε βάθος περίπου  $\lambda$ . Η διείσδυση αυτή μπορεί να γίνει ορατή με ένα δεύτερο πρίσμα που τοποθετείται σε μικρή απόσταση ( $d \approx \lambda$ ) από το πρώτο. Τότε, στο σημείο ανάκλασης, η προσπίπτουσα ακτίνα διαχωρίζεται σε δύο συνιστώσες: στην ανακλώμενη  $I_1$  και στην  $I_2$ , η οποία διεισδύει στον αέρα και διαδίδεται στο δεύτερο πρίσμα στην ίδια κατεύθυνση με αυτήν της προσπίπτουσας ακτίνας. Η ένταση της ακτίνας  $I_2$  εξαρτάται από την απόσταση  $d$  και ενισχύεται σε βάρος της  $I_1$ , καθώς το άθροισμα  $I_1 + I_2$  είναι σταθερό. Αυτή η ουσιώδης ιδιότητα χρησιμοποιήθηκε στη δεκαετία του 1960 για τη διαμόρφωση της έντασης της φωτεινής δέσμης με ακουστικές συχνότητες, προκειμένου να αξιοποιηθεί στις συσκευές οπτικής τηλεπικοινωνίας.

### Π42.2. Το αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο

Για τις ανάγκες του πειράματος είναι απαραίτητος ένας ευαίσθητος μετρητής ρεύματος στην κλίμακα 1-1000 nA. Μικρά ρεύματα της τάξης των 1  $\mu$ A-1 pA μετριοούνται συνήθως με ηλεκτρόμετρα, το κόστος των οποίων είναι πολύ μεγάλο. Ωστόσο, η μέτρηση ρευμάτων της τάξης των 1-1000 nA μπορεί να γίνει με ικανοποιητική ακρίβεια και με ένα κοινό πολύμετρο 4,5 ψηφίων που χρησιμοποιείται στην εργαστηριακή πρακτική.

Αν το πολύμετρο αυτό χρησιμοποιηθεί κανονικά, δηλαδή ως μετρητής ρεύματος, στην πιο ευαίσθητη κλίμακα των ρευμάτων η ευαισθησία ή διακριτική ικανότητα (resolution) του οργάνου είναι 0,1  $\mu$ A ή 100 nA, η οποία δεν επαρκεί στην παρούσα άσκηση. Με το ίδιο όργανο μπορούμε να μετρήσουμε ρεύματα ακόμη και 0,01 nA, δηλαδή ρεύματα 10000 φορές μικρότερα από τα 100 nA, αρκεί αυτό να μετατραπεί σε υποτυπώδες αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο, αλλάζοντας απλώς τον τρόπο χρήσης του οργάνου.

Από την αρχή λειτουργίας του ηλεκτρομέτρου γνωρίζουμε ότι το μετρούμενο ρεύμα  $I$  οδηγείται σε μια μετρητική αντίσταση  $R_{\mu}$ , μεγάλης ακρίβειας, προκαλώντας πτώση τάσης στην αντίσταση αυτή. Ακολούθως η τάση αυτή μετρείται με ένα βολτόμετρο, η αντίσταση εισόδου του οποίου είναι πολύ μεγαλύτερη της μετρητικής. Στη μέθοδο αυτή, το ρεύμα υπολογίζεται

από τη σχέση  $I = u/R_{\mu}$ , όπου  $u$  είναι η μετρούμενη τάση (ένδειξη του πολυμέτρου). Στην πράξη, προκειμένου να διευκολυνθεί η χρήση του οργάνου, ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ ρεύματος και τάσης,  $1/R_{\mu}$ , ενσωματώνεται συνήθως στην κλίμακα του οργάνου, με κατάλληλη βαθμονόμηση της κλίμακας σε μονάδες A.

Επομένως, για να συναρμολογηθεί ένα ηλεκτρόμετρο, είναι απαραίτητη μια μετρητική αντίσταση  $R_{\mu}$ , καθώς και ένα ευαίσθητο βολτόμετρο με αντίσταση εισόδου εκατοντάδες ή ακόμη και χιλιάδες φορές μεγαλύτερη από αυτή της μετρητικής ( $R_{imp} \gg R_{\mu}$ ), ώστε να μην αλλοιώνεται η τιμή της μετρητικής. Το κοινό πολύμετρο 4,5 ψηφίων διαθέτει αυτά τα δύο σημαντικά στοιχεία, αρκεί να χρησιμοποιηθεί ως μετρητής τάσης και όχι ρεύματος. Ως μετρητική αντίσταση μπορεί να αξιοποιηθεί η ωμική αντίσταση εισόδου του ίδιου του οργάνου, η οποία είναι μεγάλης ακρίβειας (0,1 %) και η τιμή της είναι 10 MΩ. Έτσι, στη μέθοδο αυτή, το πολύμετρο τίθεται σε λειτουργία βολτομέτρου, ενώ το μετρούμενο ρεύμα εισάγεται στην είσοδο του οργάνου άμεσα, ώστε να μετρηθεί η πτώση τάσης που το ρεύμα δημιουργεί στη μετρητική αντίσταση.

Στο πολύμετρο της άσκησης, στην πιο ευαίσθητη κλίμακα των τάσεων, η διακριτική ικανότητα είναι 0,01 mV ή  $10^{-5}$  V. Έτσι, όταν στην οθόνη του οργάνου το τελευταίο ψηφίο μεταβάλλεται κατά 1 μονάδα, η μεταβολή  $10^{-5}$  V προκαλείται από συνεχές ρεύμα  $\Delta I$ , η τιμή του οποίου είναι:

$$\Delta I = \frac{\Delta u}{R_{\mu}} = \frac{0,01 \text{ mV}}{10 \text{ M}\Omega} = \frac{10^{-5} \text{ V}}{10^7 \Omega} = 10^{-12} \text{ A} = 1 \text{ pA!}$$

Στην παρούσα άσκηση τόσο μεγάλη ευαισθησία είναι περιττή, καθώς για τις ανάγκες του πειράματος είναι αρκετή η διακριτική ικανότητα 1 nA. Για τον λόγο αυτό, η ευαισθησία του ηλεκτρόμετρου μειώνεται 1000 φορές ως ακολούθως:

- 10 φορές μέσω αλλαγής της κλίμακας μέτρησης από 200 mV σε 2 V, όπου η διακριτική ικανότητα είναι 0,0001 V ή 0,1 mV,
- 100 φορές μέσω μείωσης της μετρητικής αντίστασης από 10 MΩ σε 100 kΩ ( $10^5 \Omega$ ). Αυτή η αλλαγή γίνεται με μια βοηθητική αντίσταση των 100 kΩ ( $\pm 1 \%$ ), που συνδέεται παράλληλα στην είσοδο του ψηφιακού οργάνου, η αντίσταση εισόδου του οποίου είναι 100 φορές μεγαλύτερη.

Με τις αλλαγές αυτές, η διακριτική ικανότητα 0,1 mV της τάσης και η μετρητική αντίσταση  $10^5 \Omega$  παράγουν την διακριτική ικανότητα του ρεύματος:

$$\Delta I = \frac{\Delta u}{R_{\mu}} = \frac{0,1 \text{ mV}}{100 \text{ k}\Omega} = \frac{10^{-4} \text{ V}}{10^5 \Omega} = 10^{-9} \text{ A} = 1 \text{ nA}$$

Έτσι, διευκολύνεται η ανάγνωση της τιμής του ρεύματος, σε nA, δίχως την εμπλοκή πρόσθετου πολλαπλασιαστικού παράγοντα στις μετρήσεις. Για παράδειγμα, η ένδειξη 0,0281 V σημειώνεται ως 281 nA.

#### ***Π42.2.1. Προστασία του ηλεκτρομέτρου από τις ηλεκτρικές παρεμβολές***

Το υποτυπώδες αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο είναι ευάλωτο στις ηλεκτρικές παρεμβολές, επειδή τα καλώδια συναρμολόγησης του ηλεκτρικού κυκλώματος έχουν μεγάλο μήκος και δεν είναι προστατευμένα (θωρακισμένα). Υπενθυμίζεται ότι τα θωρακισμένα καλώδια περιβάλλονται από μια εύκαμπτη χάλκινη πλεξούδα («μπλεντάζ»), το οποίο συνήθως γειώνεται.



Οι ηλεκτρικές παρεμβολές στα καλώδια συναρμολόγησης προκαλούν γρήγορες και άτακτες μεταβολές του τελευταίου ψηφίου κατά μερικές μονάδες, γεγονός που δυσκολεύει τις μετρήσεις. Οι άτακτες αυτές μεταβολές μειώνονται δεκάδες φορές όταν στη μετρητική αντίσταση συνδεθεί παράλληλα ένας πυκνωτής των 10  $\mu\text{F}$ , ο οποίος «βραχυκυκλώνει» και εξουδετερώνει τις γρήγορες μεταβολές της τάσης και του ρεύματος, αλλά δεν επηρεάζει τη μέση τιμή που μετριέται τελικά. Η μοναδική αρνητική επίπτωση της παρουσίας του πυκνωτή είναι η μεγάλη αδράνεια του μετρητή, η οποία χαρακτηρίζεται από τη σταθερά χρόνου  $\tau = RC = 10^5 \Omega \times 10^{-5} \text{F} = 1 \text{s}$ .

Επομένως, στο προστατευμένο με πυκνωτή ηλεκτρόμετρο, κάθε νέα ένδειξη της τιμής σταθεροποιείται μετά από παρέλευση χρόνου  $3\tau$ , ή περίπου 3 δευτερολέπτων, γεγονός που επιβάλλει η νέα ένδειξη του οργάνου να σημειώνεται μετά από παρέλευση περίπου τριών δευτερολέπτων.

### Π42.3. Υπολογισμός της ακτίνας καμπυλότητας της κορυφής της ακίδας

Με δεδομένη την τιμή του γεωμετρικού παράγοντα  $\zeta$ , η ακτίνα καμπυλότητας της κορυφής της ακίδας,  $r$ , για το παραβολοειδές εκ περιστροφής υπολογίζεται από τη σχέση

$$\zeta = \frac{1}{r} \times \frac{2}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)}$$

όπου  $R = 4,0 \text{ cm}$  είναι η απόσταση μεταξύ της ακίδας και του συλλέκτη ηλεκτρονίων.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$R\zeta = \frac{2R}{r} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{2R}{r}\right)} \quad (\text{Π42.1})$$

ή

$$R\zeta \times \ln x = x \quad (\text{Π42.2})$$

όπου

$$x = \frac{2R}{r} \quad (\text{Π42.3})$$

Πρέπει να αναζητηθεί προσεγγιστική λύση της Εξ. (Π42.2), ωστόσο είναι χρήσιμο να εξεταστεί πρώτα ένα αριθμητικό παράδειγμα με  $x = 10^6$ , που είναι κοντά στην πειραματική τιμή. Έτσι, για  $R = 5 \text{ cm}$  και  $r = 10^{-7} \text{ m}$ , έχουμε  $x = 10^6$  και  $\ln x = 13,8$ , επομένως εδώ  $R\zeta = 72382$  και  $\ln R\zeta \approx 11,2$ . Αν στην Εξ. (Π42.2) αγνοηθεί ο λογάριθμος, δηλαδή θέσουμε  $\ln x = 1$ , αυτό θα προκαλέσει σφάλμα στο  $x$  της τάξης του 1380 %, που είναι εξαιρετικά μεγάλο.

Το υπολογιστικό σφάλμα στο  $x$  μπορεί να μειωθεί σε επίπεδα μικρότερα του 19 %, αν το  $\ln x$  αντικατασταθεί με το  $\ln R\zeta$ , η τιμή του οποίου είναι επίσης μεγάλη, αλλά γνωστή. Η αντικατάσταση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της παραμέτρου  $x$  από την προσεγγιστική εξίσωση

$$R\zeta \times \ln R\zeta = x$$

Επομένως, θέτοντας  $x = R\zeta$ , στο  $x$  εισάγεται ένα ποσοστιαίο σφάλμα:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\ln x - \ln R\zeta}{\ln x} = \frac{13,8 - 11,2}{13,8} = 0,188 < 0,19$$

Από την Εξ. (Π42.2) προκύπτει η ισότητα

$$\ln R\xi + \ln(\ln x) = \ln x$$

η οποία μπορεί επίσης να αξιοποιηθεί. Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι το υπολογιστικό σφάλμα στην τιμή του  $x$  μπορεί να μειωθεί σε επίπεδα μικρότερα του 1,6 %, αν στην Εξ. (Π42.2) θέσουμε  $\ln x \approx \ln R\xi + \ln(\ln R\xi)$ . Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το  $x$  από την προσεγγιστική εξίσωση:

$$R\xi \times [\ln R\xi + \ln(\ln R\xi)] = x$$

Ακολουθώντας την ίδια τακτική, το υπολογιστικό σφάλμα στο  $x$  μπορεί να μειωθεί σε επίπεδα μικρότερα του 0,11 %, αν στην Εξ. (Π42.2) θέσουμε  $\ln x \approx \ln R\xi + \ln[\ln R\xi + \ln(\ln R\xi)]$ , όπου η προσέγγιση είναι πολύ καλύτερη. Επομένως, με ακρίβεια της τάξης του 0,11 %, η παράμετρος  $x$  μπορεί να υπολογιστεί από την προσεγγιστική εξίσωση

$$R\xi \times \{\ln R\xi + \ln[\ln R\xi + \ln(\ln R\xi)]\} = x$$

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία, το υπολογιστικό σφάλμα μπορεί να μειωθεί σε επίπεδα πολύ μικρότερα του 0,11 %, ωστόσο, στον βαθμό που στο πείραμα τα σφάλματα των οργάνων είναι περίπου 3 %, η περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού σφάλματος είναι περιττή.

#### Π42.4. Ζητήματα ακρίβειας στη μέτρηση του ρεύματος

Καθώς στο αυτοσχέδιο ηλεκτρόμετρο το ρεύμα υπολογίζεται από τη σχέση  $I = u/R_\mu$ , το σφάλμα στο ρεύμα εξαρτάται από τα σφάλματα των μεγεθών  $u$  και  $R_\mu$ . Δεδομένου ότι πρόκειται για το πηλίκο δύο μεγεθών που προέρχονται από άμεσες μετρήσεις, γνωρίζουμε ότι για τα σχετικά σφάλματα ισχύει η σχέση

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\delta R_\mu}{R_\mu} + \frac{\delta u}{u}$$

Η μετρητική αντίσταση της άσκησης ανήκει στην κατηγορία 1 %, δηλαδή  $\delta R_\mu/R_\mu = 0,01$ . Για το πολύμετρο, η κατασκευάστρια εταιρεία δηλώνει ότι, στην κλίμακα 2 V, το σφάλμα είναι 0,05 % + 3D, όπου D είναι η μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης της παριστάμενης στην οθόνη τιμής, δηλαδή στην περίπτωσή μας  $D = 0,0001$  V. Ωστόσο, ακόμα και για τη μέγιστη τιμή του ρεύματος, ο πρώτος όρος σε αυτή την παράσταση είναι πολύ μικρότερος από τον δεύτερο:

$$0,05 \% \times u_{\max} = 0,05 \% \times I_{\max} \times R_\mu = 5 \times 10^{-4} \times 1000 \text{ nA} \times 10^5 \Omega = 0,00005 \text{ V} \ll 0,0003 \text{ V}$$

Επομένως, με καλή προσέγγιση, το σφάλμα στην τάση  $u$  δεν υπερβαίνει τα 0,0003 V

Έτσι, για το σφάλμα στο ρεύμα θα έχουμε:

$$\delta I = I \left( 0,01 + \frac{\delta u}{u} \right) = I \left( 0,01 + \frac{3 \times 10^{-4}}{IR_\mu} \right) = 0,01 \times I + \frac{3 \times 10^{-4}}{IR_\mu} = 0,01 \times I + 3 \times 10^{-9} \text{ (A)}$$

Τελικά, το σφάλμα στο ρεύμα του ηλεκτρομέτρου υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta I = 0,01 \times I + 3 \times 10^{-9} \text{ (A)}$$

Για παράδειγμα, στην ένδειξη 0,0281 V, που σημειώνεται ως 281 nA, το σφάλμα είναι

$$\delta I = 0,01 \times 281 \times 10^{-9} + 3 \times 10^{-9} \text{ A} = 5,8 \text{ nA} \cong 6 \text{ nA}$$

Συνεπώς, θα γράψουμε τελικά:  $I = 281 \pm 6 \text{ nA}$ .

#### Π42.5. Υπολογισμός του $\Delta b_{\text{οργ}}$ στην κλίση της πειραματικής ευθείας

Όπως είδαμε, ο έλεγχος του νόμου Fowler-Nordheim θα γίνει μέσω της Εξ. (42.22):

$$y = \ln C - Bx \quad \text{με} \quad x = \frac{1}{U} \quad \text{και} \quad y = \ln\left(\frac{i}{U^2}\right)$$

όπου  $i$  είναι το ρεύμα ηλεκτρονίων της ψυχρής εκπομπής και  $U$  η εφαρμοζόμενη τάση. Αν ο νόμος περιγράφει σωστά την εξέλιξη του φαινομένου, αναμένουμε τα πειραματικά σημεία να πέσουν πάνω σε μια ευθεία με κλίση  $-B$

Στο πείραμα, οι μετρητές του ρεύματος και της τάσης είναι ψηφιακοί, με παραμέτρους ακρίβειας

$$\text{Accuracy } (i): \gamma_i (\%) + h_i r_i = 0,05 \% + 3d$$

και

$$\text{Accuracy } (U): \gamma_U (\%) + h_U r_U = 3 \% + (?)$$

Καθώς οι δύο μετρητές είναι ψηφιακοί, σε άμεσες μετρήσεις των  $x_i$  και  $y_i$ , η συνεισφορά των δύο οργάνων στο σφάλμα της κλίσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Delta b_{\text{οργ}} = b (\gamma_y + \gamma_x)$$

(βλ. Συμπληρωματικές σημειώσεις Β. Πέογλου, σελ. 74). Υπενθυμίζεται ότι οι δύο σταθεροί όροι των σφαλμάτων,  $h_i r_i$  και  $h_U r_U$ , δεν επηρεάζουν (συμβάλλουν) το (στο) σφάλμα της κλίσης.

Για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των οργάνων στο σφάλμα της κλίσης, πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα  $\gamma_y + \gamma_x$  συναρτήσει των παραμέτρων  $\gamma_i$  και  $\gamma_U$  των δύο ψηφιακών οργάνων, δεδομένου ότι τα ποσοστιαία σφάλματα  $\gamma_x$  και  $\gamma_y$  αναφέρονται σε παραγόμενα μεγέθη και όχι στα όργανα.

Καθώς  $x = 1/U$ , προκύπτει ότι

$$\delta x = \left| -\frac{\delta U}{U^2} \right| = x \left| \frac{\delta U}{U} \right| = x \gamma_U, \quad \text{άρα} \quad \gamma_x = \frac{\delta x}{x} = \gamma_U = 3 \%$$

Συνεπώς, στις τιμές των  $x$  το ποσοστιαίο σφάλμα είναι όσο εκείνο του μετρητή της τάσης.

Ο υπολογισμός του ποσοστιαίου σφάλματος στο  $y$  είναι δυσκολότερος. Θα αποδείξουμε ακολούθως ότι αυτό το ποσοστιαίο σφάλμα ισούται με μηδέν ( $\gamma_y = 0$ ). Με κεφαλαία γράμματα συμβολίζονται οι πραγματικές (ακριβείς) τιμές, ενώ με τα πεζά οι ενδείξεις των δύο οργάνων.

Εστω ότι  $\gamma_x > 0$  και  $\gamma_y > 0$ . Καθώς οι πραγματικές και οι προσεγγιστικές τιμές συνδέονται μέσω των σχέσεων  $I = i + i \gamma_i$  και  $U = u + u \gamma_U$ , για την πραγματική τιμή του λογαρίθμου προκύπτει ότι

$$Y = \ln \frac{I}{U^2} = \ln \frac{i + i \gamma_i}{(u + u \gamma_U)^2} = \ln \frac{i (1 + \gamma_i)}{u^2 (1 + \gamma_U)^2} = \ln \frac{i}{u^2} + \ln(1 + \gamma_i) - 2 \ln(1 + \gamma_U) =$$
$$y + \ln(1 + \gamma_i) - 2 \ln(1 + \gamma_U) \approx y + (\gamma_i - 2\gamma_U)$$

με τη βοήθεια της προσεγγιστικής σχέσης  $\ln(1 + z) \approx z$  για  $z \ll 1$ .

Τελικά, για τις πραγματικές και τις προσεγγιστικές τιμές των λογαρίθμων προκύπτει η σχέση

$$Y = y + (\gamma_i - 2\gamma_U) = y + \delta y$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι οι πραγματικές τιμές των λογαρίθμων  $Y_k$  είναι μετατοπισμένες (εσφαλμένες) έναντι των μετρημένων  $y_k$ , ωστόσο *όλες στον ίδιο βαθμό*, δηλαδή κατά

$$\delta y = \gamma_i - 2\gamma_U$$

Με άλλα λόγια, αυτή η σταθερή αλλοίωση των πραγματικών τιμών δημιουργεί την *πραγματική ευθεία*, η οποία είναι παράλληλη προς την *πειραματική*, αλλά μετατοπισμένη προς μεγαλύτερες ή μικρότερες τιμές, αναλόγως της *τιμής* και του *προσήμου* του αθροίσματος  $\gamma_i - 2\gamma_U$ . Συνεπώς, στις τιμές των  $y_k$  *απουσιάζει* ο ποσοστιαίος όρος του σφάλματος, γεγονός που μας επιτρέπει να τον θεωρήσουμε ίσο με μηδέν.

Από καθαρά μαθηματική σκοπιά, η συνθήκη  $\gamma_y = 0$  προκύπτει από το γεγονός ότι στην παραπάνω σχέση για τις πραγματικές τιμές των λογαρίθμων λείπει ο όρος του σφάλματος που θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως ανάλογος του  $y$ , δηλαδή οι όροι τύπου  $\gamma\gamma_i$ ,  $\gamma\gamma_U$ ,  $\gamma(\gamma_i - \gamma_U)$ ,  $\gamma(\gamma_i + \gamma_U)$  κ.ο.κ.

Τελικά, τα ποσοστιαία σφάλματα των μεταβλητών  $x$  και  $y$  είναι

$$\gamma_x = \gamma_U \quad \text{και} \quad \gamma_y = 0,$$

από τα οποία προκύπτει το σφάλμα στην κλίση που προκαλούν τα ποσοστιαία σφάλματα των δύο οργάνων:

$$\Delta b_{οργ} = b(\gamma_y + \gamma_x) = b\gamma_U$$

Στο σφάλμα που προκαλούν τα δύο όργανα,  $\Delta b_{οργ}$ , μένει να προστεθεί η αβεβαιότητα της *μέσης κλίσης* (βλ. μοντέλο της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, Συμπληρωματικές σημειώσεις Β. Πέογλου, σελ. 63), δηλαδή ο όρος  $\Delta b_{tw}$ , καθώς στο πείραμα οι τιμές των  $y_k$  υφίστανται διασπορά. Ο όρος αυτός υπολογίζεται κανονικά ως *αβεβαιότητα της μέσης κλίσης*, πολλαπλασιασμένη με τον κατάλληλο συντελεστή Student:

$$\Delta b_{ολικό} = \Delta b_{οργ} + \Delta b_{tw} = b\gamma_U + t_{n,p} \sqrt{\frac{n}{n \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} \cdot \frac{\sum d_k^2}{n-2}}, \quad P \geq 99,7\%$$

όπου  $b$  είναι η *μέση κλίση*, όπως υπολογίζεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων,  $t_{n,p}$  ο συντελεστής Student, ενώ οι αποκλίσεις  $d_k$  υπολογίζονται από τη σχέση  $d_k = y_k - a - b x_k$ .