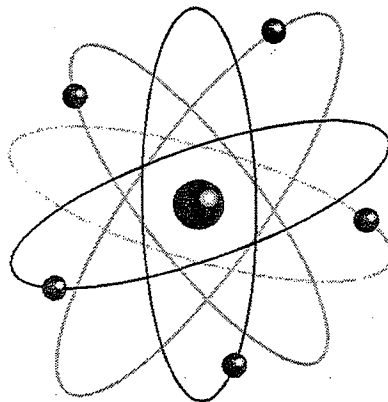


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ



ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2008-2009

Πρόλογος

Το τεύχος αυτό περιλαμβάνει μια σειρά τεσσάρων ασκήσεων που θα συνοδεύει και θα συμπληρώνει το μάθημα “Πυρηνική Φυσική και Στοιχειώδη Σωματίδια” που διδάσκεται στο 7ο εξάμηνο της κατεύθυνσης Φυσικής στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ.

Σε δυο ασκήσεις, τις 1 και 3, θα χρησιμοποιηθούν πειραματικές διατάξεις με ανιχνευτές NaI και Geiger-Muller, αντίστοιχα και ηλεκτρονικούς υπολογιστές για on line λήψη δεδομένων από ραδιενεργές πηγές. Οι συσκευές έχουν πολλαπλότητα τέσσερα και είναι εγκατεστημένες στην αίθουσα Εργαστηρίων 201 στον Β' όροφο του κτιρίου Φυσικής. Στις ασκήσεις αυτές οι φοιτητές θα εργάζονται σε ομάδες δυο ή τριών ατόμων. Στις υπόλοιπες δύο ασκήσεις, τις 2α, β και 4, θα χρησιμοποιηθούν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές του ομότιτλου εργαστηρίου (PC Lab) της Σχολής που στεγάζεται στο κτίριο Β. Εδώ, ο κάθε φοιτητής θα εργάζεται μόνος του, με την καθοδήγηση του επιβλέποντα.

Στο Παράρτημα I αυτού του τεύχους ο φοιτητής θα βρει χρήσιμα διαγράμματα αποδιέγερσης ραδιοϊσοτόπων και στο Παράρτημα II κατάλογο των ακτίνων-γ και των αντίστοιχων μητρικών ραδιοϊσοτόπων. Τα δεδομένα των δυο Παραρτημάτων προέρχονται από το βιβλίο “Experimental γ -Ray Spectroscopy and Investigations of Environmental Radioactivity” του R.S.Peterson. Περισσότερες πληροφορίες για όλα τα ισότοπα των στοιχείων μπορεί κανείς να πάρει χρησιμοποιώντας τον κώδικα Nuclide Navigator (Πλοηγός των Ραδιοϊσοτόπων) που είναι φορτωμένος στους υπολογιστές σας. Για την επεξεργασία των πειραματικών σας δεδομένων (γραφικές παραστάσεις, προσαρμογές κλπ.) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε σχετικό κώδικα.

Θα ήθελα τέλος να αναφέρω και να ευχαριστήσω όλους τους συντελεστές που συνέβαλαν στην ανάπτυξη και λειτουργία αυτού του Εργαστηρίου. Ένα μεγάλο μέρος του κειμένου των ασκήσεων 1, 2α β βασίζεται στο κείμενο των αντίστοιχων ασκήσεων που περιέχονται στο βιβλίο “Εικονικά Εργαστήρια Σύγχρονης Φυσικής” του Αναπλ. Καθηγητή του Τομέα Φυσικής Ε.Ν.Γαζή, που παρακολουθήσατε στα πλαίσια του μαθήματος “Ατομική και Μοριακή Φυσική”. Στο ίδιο βιβλίο θα βρείτε και οδηγίες για τη χρήση και τις δυνατότητες του “Πλοηγού των Ραδιοϊσοτόπων” καθώς και για τη

λειτουργία του λογισμικού που θα χρησιμοποιήσετε στην άσκηση 1 για τη συλλογή και καταγραφή των πειραματικών δεδομένων. Την άσκηση 1 ανέπτυξε ο Αναπλ. Καθ. Κ.Παπαδόπουλος. Την άσκησή 4 ανέπτυξε και επιμελήθηκε η Δρ Αικ. Τζαμαριουδάκη, η οποία επιμελήθηκε και την άσκηση 3. Στις ασκήσεις 1 και 2α, β βοήθησαν ο κ. Ι.Θεοδώνης και Δρ Αθ. Κόντος, αντίστοιχα. Ειδικά για την άσκηση 2α, β, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Δρα Κων/νο Κάλφα, Διευθυντή Ερευνών του Ινστιτούτου Πυρηνικής Φυσικής του ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος», ο οποίος ανέπτυξε τους κώδικες SIMULATE και SPECTR για ερευνητικούς σκοπούς και στη συνέχεια τους προσαρμοσε κατάλληλα και τους παρεχώρησε ευγενώς για τις ανάγκες των Εκπαιδευτικών Εργαστηρίων του Τομέα Φυσικής.

Το παρόν τεύχος έχει συμπεριλάβει κάποιες διορθώσεις και βελτιώσεις σε σχέση με την πρώτη έκδοση. Παρόλα αυτά, κάθε επιπλέον υπόδειξη από τους φοιτητές και τους επιβλέποντες, για διορθώσεις και βελτιώσεις θα είναι πολύτιμη.

Η υπεύθυνη για την επιμέλεια του κειμένου,
Ρόζα Βλαστού-Ζάννη

Άσκηση 1 : ΣΚΕΔΑΣΗ COMPTON

Σκοπός

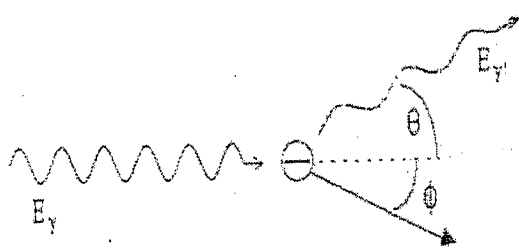
Χρησιμοποιώντας τα φάσματα ακτίνων-γ από διάφορες ραδιενεργές πηγές και με τη βοήθεια του φαινομένου Compton, θα μετρήσετε τη μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου καθώς και την μεταβολή της κινητικής και ολικής σχετικιστικής ενέργειας συναρτήσει της ταχύτητας του ηλεκτρονίου.

Εισαγωγή

Το φαινόμενο Compton αφορά στη σκέδαση φωτονίων από ατομικά ηλεκτρόνια. Μετά τη σκέδαση ένα μέρος της ενέργειας του φωτονίου E_γ μεταφέρεται στο ηλεκτρόνιο με τη μορφή κινητικής ενέργειας. Το φωτόνιο αποκτά διαφορετική συχνότητα, και επομένως ενέργεια $E_{\gamma'}$. Κατά την αλληλεπίδραση ισχύει η διατήρηση της σχετικιστικής μάζας-ενέργειας και ορμής. Η σχέση μεταξύ της ενέργειας των φωτονίων πριν και μετά την κρούση δίδεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{E_{\gamma'}} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} \quad (1.1)$$

όπου $m_e c^2$ είναι η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου (511 keV) και θ η γωνία σκέδασης του φωτονίου. Ένα διάγραμμα της σκέδασης Compton φαίνεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1 : Σκέδαση Compton μεταξύ προσπίπτοντος φωτονίου E_γ και ακίνητου ηλεκτρονίου.

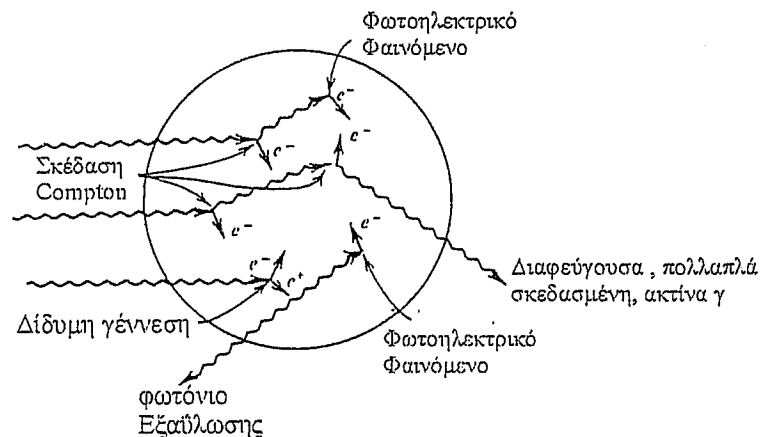
Η κρούση έχει ως αποτέλεσμα ένα χαμηλότερης ενέργειας φωτόνιο $E_{\gamma'}$ το οποίο σκεδάζεται υπό γωνία θ , και ένα ηλεκτρόνιο που σκεδάζεται υπό γωνία φ .

Μέθοδος

Στην εργαστηριακή σας άσκηση, τα φωτόνια είναι ακτίνες-γ από την αποδιέγερση ραδιενεργών πηγών. Για την ανίχνευση των ακτίνων-γ χρησιμοποιείται κρύσταλλος σπινθιρισμών NaI με τον οποίο οι ακτίνες-γ αλληλεπιδρούν (μέσω φωτοηλεκτρικού φαινομένου, φαινομένου Compton και δίδυμης γέννησης) και παράγουν ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτόνια αυτά διανύουν μια μικρή ακανόνιστη τροχιά στον κρύσταλλο, συγκρούονται με πολλά άτομα του κρυστάλλου και μετατρέπουν την

ενέργειά τους σε ορατά φωτόνια. Όσο μεγαλύτερη ενέργεια έχει η ακτίνα γάμμα, τόσο περισσότερα φωτόνια παράγονται. Στη συνέχεια ο φωτοπολλαπλασιαστής (PMT) μετατρέπει κάθε φωτόνιο σε ένα μικρό ρεύμα, και επειδή τα φωτόνια φθάνουν στον φωτοπολλαπλασιαστή την ίδια περίπου χρονική στιγμή, τα στοιχειώδη ρεύματα αθροίζονται και δίνουν ένα συνιστάμενο ηλεκτρικό παλμό. Αυτός ο παλμός μετατρέπεται σε παλμό τάσης, το μέγεθος του οποίου είναι ανάλογο με την ενέργεια της αρχικής ακτίνας γάμμα.

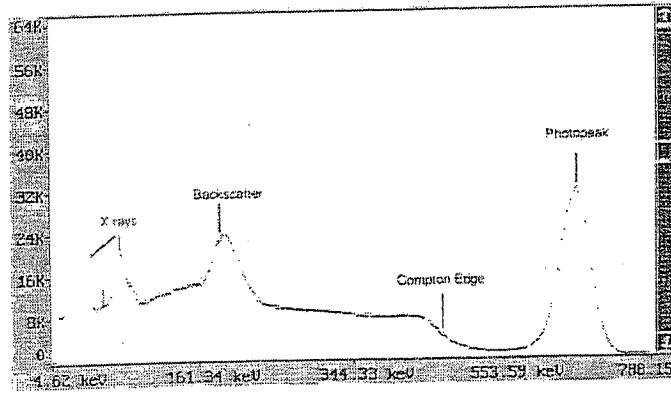
Στην περίπτωση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, όλη η ενέργεια της ακτίνας-γ μεταφέρεται σε ένα ηλεκτρόνιο, ενώ στο φαινόμενο Compton το παραγόμενο ηλεκτρόνιο έχει μικρότερη ενέργεια και η σκεδαζόμενη ακτίνα-γ μπορεί να επαναλάβει την ίδια διαδικασία ή και να διαφύγει από τον κρύσταλλο, με αποτέλεσμα τα παραγόμενα ηλεκτρόνια Compton να εμφανίζουν μια κατανομή ενέργειας. Παράδειγμα τέτοιων αλληλεπιδράσεων που μπορεί να συμβούν όταν μια ακτίνα-γ προσπέσει σε κρύσταλλο σπινθηρισμών NaI, παρουσιάζεται στο Σχ.1.2.



Σχήμα 1.2 Σχηματική παράσταση των αλληλεπιδράσεων που μπορούν να συμβούν κατά την ανίχνευση ακτίνων-γ από κρύσταλλο σπινθηρισμών NaI.

Εαν για παράδειγμα πάρετε το φάσμα μιας πηγής ^{137}Cs , εφόσον το ^{137}Cs εκπέμπει μόνο μια ακτίνα γ, το φάσμα θα πρέπει να έχει μόνο μια φωτοκορυφή στα 661.6 KeV. Στην πραγματικότητα όμως, όπως φαίνεται και στο Σχ. 1.3 υπάρχουν και κάποιες άλλες κορυφές στο φάσμα, όπως μια αιχμή στα 477 KeV περίπου, που έχει σημειωθεί ως αιχμή Compton (Compton edge).

Ποιά είναι η προέλευση της κορυφής Compton στα 477 KeV; Μία ακτίνα γ μπαίνει στον κρύσταλλο του ανιχνευτή και ελευθερώνει με Compton ένα ηλεκτρόνιο. Αν η σκεδαζόμενη ακτίνα γ εγκαταλείψει τον κρύσταλλο, τότε η ανιχνεύσιμη ενέργεια είναι η κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο. Η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά το



Σχήμα 1.3. Φάσμα πηγής ^{137}Cs . Ο οριζόντιος άξονας δίδεται σε keV.

ηλεκτρόνιο, E_{max}^e προκύπτει από μετωπική σύγκρουση του ηλεκτρονίου με την ακτίνα γ , που έχει σαν αποτέλεσμα την οπισθοσκέδαση της ακτίνας γ κατά γωνία $\theta=180^\circ$. Από την εξίσωση 1.1 η μέγιστη προσλαμβανόμενη ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι:

$$E_{max}^e = E_\gamma - E_{\gamma'} = \frac{2E_\gamma^2}{2E_\gamma + m_e c^2} \quad (1.2)$$

Η αιχμή *Compton* αναπαριστά αυτή την μέγιστη ενέργεια που μεταφέρεται στο ηλεκτρόνιο. Βέβαια, το ηλεκτρόνιο μπορεί να υπόκειται σε μια πιά ήπια κρούση, και να έχει μικρότερη ενέργεια από την E_{max}^e μετά την κρούση. Από τις διαδικασίες αυτές προκύπτει μια ευρεία κατανομή γεγονότων σε ενέργειες μικρότερες από την αιχμή *Compton* που εμφανίζονται στο φάσμα σαν υψηλό υπόβαθρο.

Στο φάσμα όμως του Σχ.1.3 εμφανίζονται άλλες δυο κορυφές, η μια προέρχεται από τις ακτίνες-X που παράγονται από τον θυγατρικό πυρήνα ^{137}Ba και η άλλη, που εμφανίζεται στα $\sim 185\text{keV}$, οφείλεται στη σκέδαση *Compton* των ακτίνων- γ με τα ηλεκτρόνια των υλικών που περιβάλλουν τον κρύσταλλο NaI. Η δεύτερη αυτή κορυφή ονομάζεται κορυφή οπισθοσκέδασης *Compton* και στο φάσμα αναγράφεται ως backscatter. Στην περίπτωση αυτή για γωνίες σκέδασης *Compton* περί τις 180° , τα ηλεκτρόνια οπισθοσκεδάζονται και διαφεύγουν εκτός του κρυστάλλου, ενώ οι ακτίνες- γ μέσω φωτοηλεκτρικού φαινομένου ανιχνεύονται από τον κρύσταλλο και δίνουν στο φάσμα τη φωτοκορυφή οπισθοσκέδασης *Compton* χαμηλής ενέργειας E_{BS} .

Οι δυο αυτές ειδικές περιπτώσεις σκέδασης *Compton* σε γωνίες 180° που προαναφέρθηκαν, είναι συμμετρικές μεταξύ τους. Κατά τη διαδικασία που αντιστοιχεί στην αιχμή *Compton* η ακτίνα- γ οπισθοσκεδάζεται και εγκαταλείπει τον κρύσταλλο, ενώ το ηλεκτρόνιο αποκτά ενέργεια E_{max}^e η οποία και ανιχνεύεται. Στη διαδικασία της οπισθοσκέδασης *Compton* το ηλεκτρόνιο οπισθοσκεδάζεται και εγκαταλείπει τον κρύσταλλο, ενώ η ακτίνα- γ ανιχνεύεται με ενέργεια E_{BS} . Είναι προφανές επομένως ότι :

$$E_{BS} + E_{max}^e = E_{\gamma} \quad (1.3)$$

Εξοπλισμός

1. Ανιχνευτής $NaI(Tl)$ με MCA
2. Ραδιενεργές πηγές: ^{54}Mn , ^{65}Zn , ^{137}Cs , ^{22}Na , ^{60}Co

Πειραματική διαδικασία

1. Βαθμονομείστε τον ανιχνευτή με τις πηγές ^{22}Na και ^{54}Mn . Ρυθμίστε την ενίσχυση για να συμπεριλάβετε τη μέγιστη ενέργεια που είναι περίπου 1400 KeV. Επιβεβαιώστε την βαθμονόμησή σας με την πηγή ^{137}Cs .
2. Τοποθετείστε μια ραδιενεργό πηγή κοντά στον ανιχνευτή. Συλλέξτε το φάσμα της και καταγράψτε σε πίνακα την ενέργεια της κύριας φωτοκορυφής, της αιχμής *Compton* και της οπισθοσκέδασης *Compton*. Η αιχμή *Compton* προσδιορίζεται περίπου στο μισό του μέγιστου του βήματος στο φάσμα, ενώ η ενέργεια της κορυφής οπισθοσκέδασης αντιστοιχεί στη χαμηλότερη περιοχή του μέγιστου της κορυφής, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.1. Συνεχίστε με τις υπόλοιπες διαθέσιμες πηγές. Καταγράψτε σε πίνακα τις ενέργειες που προσδιορίσατε καθώς και τα σφάλματα που εκτιμήσατε.

Επεξεργασία των δεδομένων

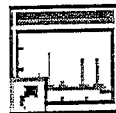
1. Να ελέγξετε τις μετρήσεις ενέργειας E_{γ} , E_{max}^e και E_{BS} σε κάθε φάσμα και να επιβεβαιώσετε τη σχέση 1.3. Καταγράψτε τις τιμές σας σε πίνακα.
2. Να αποδείξετε την εξίσωση 1.2 και να τη λύσετε ως προς $m_e c^2$ συναρτήσει των E_{γ} και E_{max}^e .
3. Χρησιμοποιώντας την ενέργεια της φωτοκορυφής και την ενέργεια της αιχμής *Compton* υπολογίστε την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου για όλες τις φωτοκορυφές. Βρείτε τη μέση τιμή της ενέργειας ηρεμίας και την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής και συγκρίνετε το αποτέλεσμα σας με την αναμενόμενη τιμή.
4. Από την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων E_{max}^e που μετρήσατε και την ενέργεια ηρεμίας που προσδιορίσατε πειραματικά, υπολογίστε την ολική σχετικιστική ενέργεια των ηλεκτρονίων για κάθε περίπτωση, καθώς και την ταχύτητα $\beta=v/c$. Επίσης υπολογίστε την κλασικά αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων και καταγράψτε τις τιμές σας σε πίνακα.
5. Παραστείστε γραφικά την εξάρτηση της ολικής σχετικιστικής ενέργειας, της κινητικής ενέργειας και της κλασικής κινητικής ενέργειας από την ταχύτητα. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Άσκηση 2

Εικονικά Πειράματα Πυρηνικής Φασματοσκοπίας



Simulate.lnk



Spectr.pif

Πρόγραμμα 1 : *SIMULATE*
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ- γ

Πρόγραμμα 2 : *SPECTR*
ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ- γ

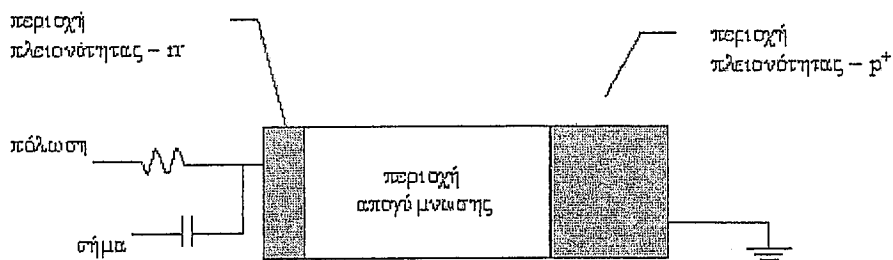
2.1 Σκοπός

Σκοπός των ασκήσεων αυτών είναι η μελέτη των ενεργειακών φασμάτων ακτίνων- γ που λαμβάνονται από έναν ανιχνευτή Γερμανίου υψηλής καθαρότητας [$Ge(HP)$] και η εξοικείωση με τις μεθόδους ανάλυσής τους χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα ανάλυσης φασμάτων *SPECTR*. Επίσης η μελέτη των τεχνικών χαρακτηριστικών των ανιχνευτών ακτίνων- γ Ge και NaI καθώς και η σύγκριση μεταξύ τους. Οι ανιχνευτές Γερμανίου έχουν πολύ υψηλό κόστος (μερικές δεκάδες χιλιάδες ευρώ) και είναι ιδιαίτερα ευαίσθητοι, ακατάλληλοι επομένως για εκπαιδευτικά εργαστήρια. Γι' αυτό και τα φάσματα που θα χρησιμοποιηθούν στην άσκηση δεν προέρχονται από πραγματικό πείραμα αλλά από προσομοίωση μέσω του προγράμματος *SIMULATE*.

2.2 Γενικά

2.2.1 Εισαγωγή

Οι ανιχνευτές Γερμανίου, Ge, αποτελούνται από μια επαφή $p-i-n$. Η επαφή αυτή κατασκευάζεται από έναν κρύσταλλο ημιαγωγού Ge υψηλής καθαρότητας (*High Purity*), ο οποίος εμπλουτίζεται ώστε να γίνει τύπου p^+ (ή n^-) από τη μία μεριά και τύπου n^- (ή p^+) από την άλλη. Εφαρμόζοντας τάση στα άκρα του κρυστάλλου, δημιουργείται στο κεντρικό τμήμα μια εκτεταμένη περιοχή χωρίς ηλεκτρόνια ή οπές, η λεγόμενη *περιοχή απογύμνωσης*, ενώ ελαχιστοποιούνται οι περιοχές πλειονότητας στα άκρα του κρυστάλλου με μεγάλες συγκεντρώσεις p^+ και n^- , όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1.



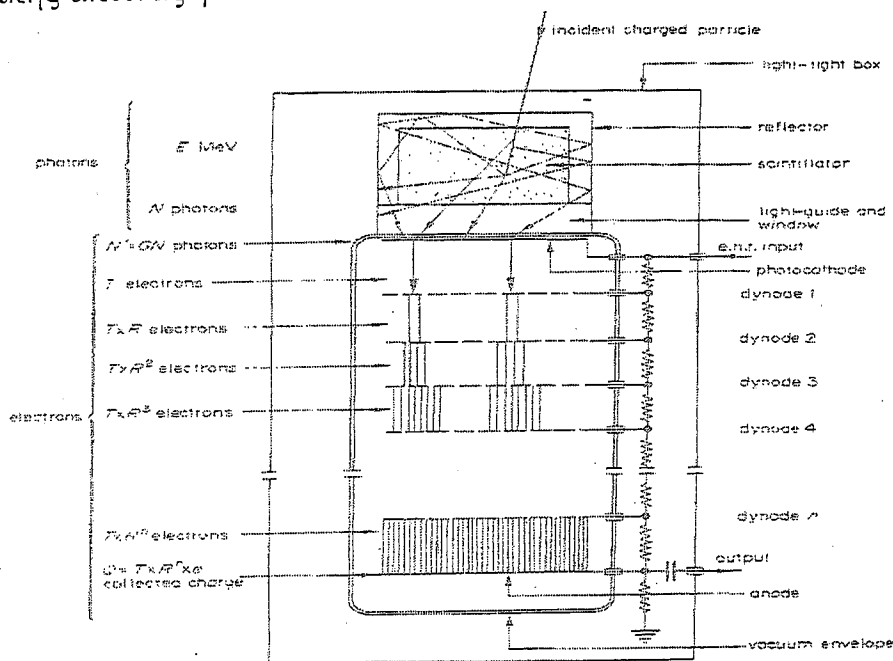
Σχήμα 2.1 : Επαφή $p-i-n$

Η περιοχή απογύμνωσης αποτελεί και τον *ενεργό όγκο* (*active volume*) του ανιχνευτή, όπου η ιοντίζουσα ακτινοβολία δημιουργεί ζεύγη ηλεκτρονίων-οπών τα οποία συλλέγονται από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο που εφαρμόζεται στις επαφές $p-n$.

Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του, ο κρύσταλλος είναι απαραίτητο να διατηρείται σε χαμηλή θερμοκρασία. Διαφορετικά δημιουργείται

ποσότητα ηλεκτρονίων-οπών στην περιοχή απογύμνωσης, με αποτέλεσμα να αυξάνεται ο θόρυβος (λόγω των ελεύθερων φορέων). Έτσι, ο ανιχνευτής Ge διατηρείται μέσα σε δοχείο Dewar το οποίο περιέχει υγρό άζωτο (77 °K).

Οι ανιχνευτές NaI αποτελούνται από ένα κρύσταλλο σπινθηρισμού όπου οι ακτίνες-γ αλληλεπιδρούν (μέσω φωτοηλεκτρικού φαινομένου, φαινομένου Compton και δίδυμης γένεσης) και παράγουν ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια αυτά διανύουν μια μικρή ακανόνιστη τροχιά στον κρύσταλλο, συγκρούονται με πολλά άτομα του κρυστάλλου και μετατρέπουν την ενέργειά τους σε ορατά φωτόνια (σπινθήρες). Όσο μεγαλύτερη ενέργεια έχει η ακτίνα-γ, τόσο περισσότερα φωτόνια παράγονται. Στη συνέχεια ο φωτοπολλαπλασιαστής (PMT), που είναι σε επαφή με τον κρύσταλλο σπινθηρισμών NaI, μετατρέπει κάθε φωτόνιο σε ένα στοιχειώδες ρεύμα. Τα φωτόνια φθάνουν στον φωτοπολλαπλασιαστή την ίδια περίπου χρονική στιγμή οπότε τα στοιχειώδη ρεύματα αθροίζονται και δίνουν έναν ηλεκτρικό παλμό που μετατρέπεται σε παλμό τάσης με μέγεθος ανάλογο προς την ενέργεια της αρχικής ακτίνας-γ.



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση ανιχνευτή σπινθηρισμών NaI, όπου αναδεικνύονται τα διαφορετικά στάδια της διαδικασίας ανίχνευσης και ενίσχυσης του παλμού (από το βιβλίο του J.B.A.England: *Techniques in Nuclear Structure Physics*).

2.2.2 Τεχνικά χαρακτηριστικά των ανιχνευτών

Ανιχνευτική ικανότητα

Η ανιχνευτική ικανότητα είναι μέτρο της ικανότητας του ανιχνευτή να ανιχνεύει όσο το δυνατό μεγαλύτερο ποσοστό της εκπεμπόμενης από μια

πηγή ακτινοβολίας ανά μονάδα χρόνου σε μία συγκεκριμένη απόσταση. Για φωτόνια η ανιχνευτική ικανότητα εξαρτάται από την ενέργεια των ακτίνων γ , από τον τύπο του κρυστάλλου του ανιχνευτή και από τη γεωμετρία του συστήματος, δηλαδή το μέγεθος του κρυστάλλου, τις διαστάσεις της πηγής και τη σχετική θέση πηγής – κρυστάλλου.

Απόλυτη ή Ολική απόδοση κορυφής (Absolute ή total efficiency) ϵ_a

Είναι ο λόγος $\frac{N_{\text{κορυφής}}}{N_{\text{εκπεμπόμενα}}}$ του αριθμού των φωτονίων που συνεισφέρουν

στη δημιουργία της φωτοκορυφής (*photopeak*) μιας ακτίνας- γ σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα προς τον αριθμό των συνολικών φωτονίων που εξέπεμψε η πηγή το ίδιο χρονικό διάστημα. Ο λόγος αυτός εξαρτάται από τη γεωμετρία της πηγής και του ανιχνευτή.

Εσωτερική Απόδοση Κορυφής (Internal peak efficiency) ϵ_{es}

Είναι ο λόγος $\frac{N_{\text{κορυφής}}}{N_{\text{εισερχόμενα}}}$ του αριθμού των φωτονίων που συνεισφέρουν

στη δημιουργία της φωτοκορυφής μιας ακτίνας- γ σ' ένα ορισμένο χρονικό διάστημα προς τον αριθμό των φωτονίων που εισέρχονται στον ανιχνευτή στο διάστημα αυτό.

Οι δυο αποδόσεις, για ισοτροπική πηγή, συνδέονται με την απλή σχέση

$$\epsilon_{es} = \epsilon_a 4\pi/\Omega \quad (2.1)$$

όπου Ω είναι η στερεά γωνία μεταξύ πηγής και ανιχνευτή.

Λόγος Κορυφής ως προς το Σύνολο (Peak - to - Total ratio)

Είναι ο λόγος $\frac{N_{\text{κορυφής}}}{N_{\text{ανιχνευόμενα}}}$ του αριθμού των φωτονίων που συνεισφέρουν

στη δημιουργία της κορυφής (*photopeak*) του φάσματος, σ' ένα χρονικό διάστημα, προς τον αριθμό των φωτονίων που γενικά ανιχνεύονται στο διάστημα αυτό. Αποτελεί ένα μέτρο σύγκρισης μεταξύ της χρήσιμης φωτοκορυφής και του υποβάθρου στο φάσμα.

Ανιχνευτική ικανότητα Ge σε σχέση με σπινθηριστή NaI

Επειδή η ϵ_a ενός ανιχνευτή, όπως αναφέραμε πιο πάνω, εξαρτάται από τη γεωμετρία του συστήματος, δεν έχει απόλυτο χαρακτήρα και δεν χαρακτηρίζει ένα ανιχνευτή. Έτσι, συχνά χρησιμοποιείται η έννοια της σχετικής ανιχνευτικής ικανότητας ενός ανιχνευτή Ge σε σχέση με την ανιχνευτική ικανότητα ενός κρυστάλλου NaI διαστάσεων 3"×3" τοποθετημένου σε απόσταση 25 cm από μια πηγή ^{60}Co και για την φωτοκορυφή 1332.5keV ακτίνας- γ του ^{60}Co , ώστε να έχουμε μια απλή και σαφή εικόνα της απόδοσης του ανιχνευτή Ge. Ο ανιχνευτής

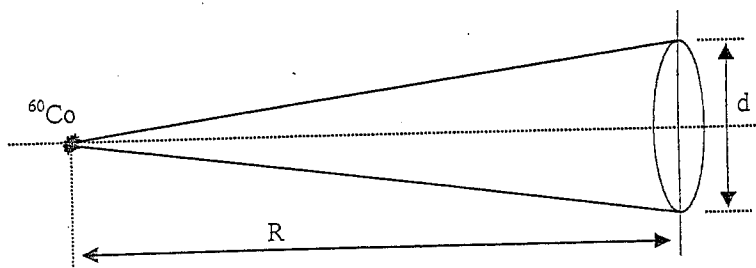
ημιαγωγού τοποθετείται και αυτός στην ίδια απόσταση από την πηγή, οπότε μπορεί να υπολογισθούν πειραματικά τα μεγέθη ε_a του Ge και ε_a του ανιχνευτή NaI . Με τη βοήθεια αυτών των ποσοτήτων ορίζεται η σχετική ανιχνευτική ικανότητα (*relative efficiency*) $\varepsilon_{σχ}$ του Ge , σύμφωνα με τον τύπο:

$$\varepsilon_{σχ} = \frac{\varepsilon_a(Ge)}{\varepsilon_a(NaI)} = \frac{N_{\text{κορυφής}}(Ge)}{N_{\text{κορυφής}}(NaI)} \quad (2.2)$$

όπου η συγκεκριμένη κορυφή είναι η 1332.5keV του ^{60}Co .

Η $\varepsilon_{εσ}$ ενός κρυστάλλου NaI διαστάσεων 3"×3" (7.62 cm × 7.62 cm), όταν τοποθετηθεί σε απόσταση 25 cm από ραδιενεργό πηγή ^{60}Co , είναι «σταθερά» του ανιχνευτή και έχει την τιμή 0.21, ενώ η στερεά γωνία Ω (σε στερακτίνια) που σχηματίζουν τα εισερχόμενα φωτόνια, για μικρές γωνίες, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{\pi d^2}{4R^2}$$



Σχήμα 2.3 : Γεωμετρία ραδιενεργού σημειακής πηγής και ανιχνευτή με επιφάνεια S σε απόσταση R , ορίζοντας στερεά γωνία $\Omega = S/R^2$

Εφόσον $R = 25$ cm και $d = 7.62$ cm, βρίσκουμε ότι $\Omega = 72.8 \times 10^{-3}$ sr, οπότε για τον ανιχνευτή NaI , από τη σχέση (2.1) προκύπτει ότι :

$$\varepsilon_a(NaI) \approx 1.2 \times 10^{-3}$$

Για να βρεί κανείς λοιπόν, από τη σχέση (2.2), τη σχετική ανιχνευτική ικανότητα ενός ανιχνευτή Ge ως προς αυτήν ενός κρυστάλλου NaI , διαιρεί την απόλυτη ανιχνευτική του ικανότητα (που βρίσκεται με παρόμοιο τρόπο πειραματικά) με την τιμή 1.2×10^{-3} , και την εκφράζει σε ποσοστό επί τοις εκατό. Η τιμή της κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 10-120%, μικρότερη δηλαδή ή συγκρίσιμη με αυτήν ενός ανιχνευτή σπινθηρισμών.

Ενεργειακή Διακριτική ή Διαχωριστική ικανότητα (Resolution)

Είναι η ικανότητα του ανιχνευτή να «βλέπει» την ενεργειακή διαφορά δύο φωτονίων, των οποίων οι ενέργειες διαφέρουν ελάχιστα. Μέτρο της διακριτικής ικανότητας ενός ανιχνευτή είναι το *FWHM* (*Full Width Half Maximum*), δηλαδή το εύρος ΔE μιας κορυφής του φάσματος στο μέσον του ύψους της. Η ενεργειακή διακριτική ικανότητα R ορίζεται σαν ο λόγος του *FWHM* που παρουσιάζει μια οποιαδήποτε κορυφή του φάσματος μιας ραδιενεργού πηγής προς την τιμή της ενέργειας E στην οποία αντιστοιχεί η κορυφή αυτή. Έτσι έχουμε:

$$R = \frac{\Delta E}{E} \quad (2.3)$$

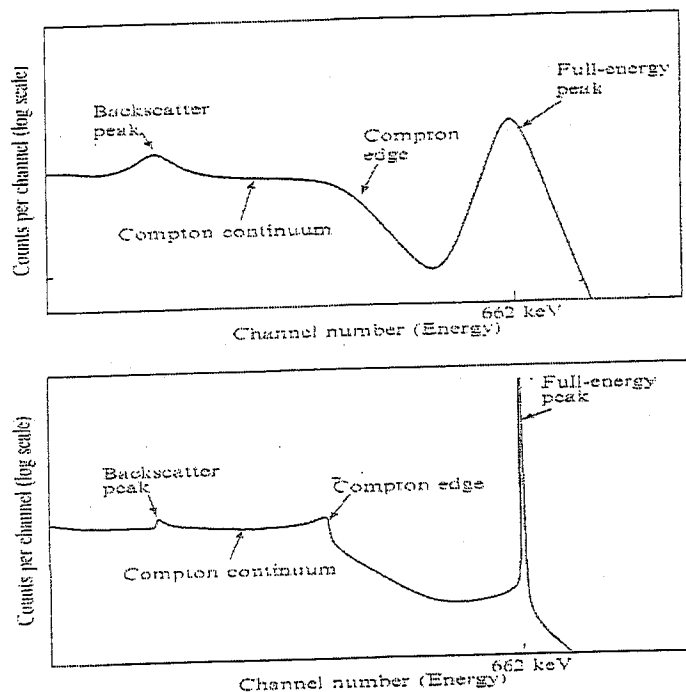
Οι παλμοί εξόδου σ' ένα ανιχνευτικό σύστημα μονοχρωματικής ακτινοβολίας δεν έχουν όλοι το ίδιο ύψος παρόλο που προέρχονται από σωματίδια της ίδιας ενέργειας. Αυτό συνεπάγεται, η αντίστοιχη φωτοκορυφή στο φάσμα να έχει ένα ενεργειακό εύρος ΔE , το οποίο εξαρτάται από την ενεργειακή διασπορά και την ελλιπή συλλογή φορτίου μέσα στον ανιχνευτή, το «θόρυβο» των ηλεκτρονικών συσκευών μέσα στο ανιχνευτικό σύστημα και το φυσικό εύρος Γ της στάθμης που αποδιεγείρεται ($\Gamma \Delta t \sim \hbar$). Η ενεργειακή διασπορά μέσα στον ανιχνευτή, είναι ανάλογη της διασποράς ΔN των φορτισμένων φορέων που δημιουργούνται στον ανιχνευτή και αποτελεί τον βασικότερο παράγοντα στη διαμόρφωση της τελικής διακριτικής ικανότητας R του ανιχνευτικού συστήματος.

$$R = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Οι ανιχνευτές ημιαγωγού (*Ge*) δημιουργούν φορτισμένους φορείς (ηλεκτρόνια-οπές) ενέργειας $\varepsilon=2-3\text{eV}$, ενώ οι ανιχνευτές σπινθηρισμών (*NaI*) δημιουργούν e^- λόγω ιονισμού, ενέργειας $\varepsilon=20-30\text{keV}$. Επομένως για φωτόνια ενέργειας E_γ οι ανιχνευτές *Ge* δημιουργούν περισσότερους φορείς $N=E_\gamma/\varepsilon$ απ' ό,τι οι ανιχνευτές *NaI* και η ενεργειακή διακριτική τους ικανότητα R είναι πολύ μικρότερη, καλύτερη δηλ. από αυτήν των ανιχνευτών *NaI* (βλέπε Σχήμα 2.4).

Στους ανιχνευτές σπινθηρισμών, το *FWHM* μιας κορυφής είναι ανάλογο της ενέργειας στην οποία αντιστοιχεί η κορυφή. Έτσι ο λόγος που ορίστηκε προηγουμένα - η διακριτική ικανότητα - παραμένει σταθερός για ένα συγκεκριμένο ανιχνευτή.

Αντίθετα από ό,τι συμβαίνει με τους ανιχνευτές σπινθηρισμών, για τους ανιχνευτές *Ge* το *FWHM* μιας κορυφής δεν είναι ανάλογο της ενέργειας της κορυφής. Γι' αυτό ορίζεται η διακριτική ικανότητα ενός *Ge* σαν το *FWHM* της κορυφής 1332.5keV της πηγής του ^{60}Co .



Σχήμα 2.4. Σχηματική αναπαράσταση φάσματος της ακτίνας- γ 662 keV του ραδιενεργού ισότοπου ^{137}Cs από ανιχνευτή NaI (άνω) και Ge (κάτω) (Από το βιβλίο του John Lilley : *Nuclear Physics-Principles and Applications*).

2.3 Μέθοδος

2.3.1 Περιγραφή του προγράμματος *Simulate*

Το *Simulate* είναι ένα πρόγραμμα προσομοίωσης του φάσματος ακτίνων γ μιας ραδιενεργού πηγής που συλλέγει ένας ανιχνευτής.

Το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να παράγει φάσματα από πέντε, το πολύ, πηγές ταυτόχρονα, τις οποίες μπορεί να επιλέξει από 56 διαφορετικά ισότοπα. Επίσης, μπορεί να επιλέξει και τον ανιχνευτή με τον οποίο θα συλλεχθεί το φάσμα.

Η εκκίνηση του προγράμματος γίνεται από το *Start > Programs > Simulate*. Φυσικά, η εκκίνηση του προγράμματος μπορεί να γίνει και από το αντίστοιχο εικονίδιο. Αναλυτικά το πρόγραμμα δουλεύει με τα εξής *dialog boxes*:

- *Ανιχνευτής (Detector)*:

Στο *Type of Detector* ορίζεται ο ανιχνευτής, που μπορεί να είναι κρύσταλλος σπινθηριστού (NaI ή BaF) ή κρύσταλλος Ge. Ταυτόχρονα με την επιλογή του ανιχνευτή ορίζονται από το πρόγραμμα και οι αρχικές τιμές των παραμέτρων *Peak/Total Relative Ratio* και *Detector Resolution*. Ωστόσο, οι τιμές αυτές μπορούν να αλλάξουν από το χρήστη.

Η παράμετρος *Peak/Total Ratio* έχει σχέση με το πόσο μεγάλο ποσοστό των φωτονίων που ανιχνεύονται είναι αυτά της φωτοκορυφής. Η παράμετρος που παίρνει το πρόγραμμα είναι τροποποιημένη για τις ανάγκες του προγράμματος και μπορεί να πάρει τιμές από 0.2 έως 5. Για τις ανάγκες της άσκησης, συνιστάται η τιμή 1.

Η παράμετρος *Detector Resolution* είναι δεδομένη (default) για τον κάθε ανιχνευτή (% για τους σπινθηριστές, σε keV για τον κρύσταλλο *Ge*), αλλά μπορεί να αλλάξει παίρνοντας οποιαδήποτε τιμή επιθυμεί ο χρήστης.

- **Παράμετροι βαθμονόμησης (*Calibration Parameters*):**

Στο *Calibration Parameters* ορίζονται οι τιμές των a , b και c της εξίσωσης $y = a + bx + cx^2$, όπου με y δηλώνεται η τιμή της ενέργειας και με x το κανάλι του φάσματος που αυτή αντιστοιχεί. Η εξίσωση αυτή είναι συνήθως γραμμική (δηλαδή $c = 0$), αλλά πολλές φορές ο ανιχνευτής *Ge* εμφανίζει μια μη γραμμική συμπεριφορά στις υψηλές ενέργειες φωτονίων η οποία μπορεί να προσεγγιστεί από την παραπάνω εξίσωση επιλέγοντας μικρές τιμές του c . Οι τιμές των a , b και c μπορούν να πληκτρολογηθούν σε κατάλληλο παράθυρο επιλέγοντας το *Enter Manually* ή να διαβαστούν από κάποιο υπάρχον αρχείο φάσματος (*.spe*) το οποίο επιλέγεται μέσω του *Browse*. Αν το αρχείο αυτό δεν έχει προβλέψει τιμή για την παράμετρο c τότε αυτή είναι 0.

- **Δείγμα (*Sample*):**

Στο *Sample* ορίζονται τα ισότοπα των οποίων τα φωτόνια ανιχνεύουμε και το ποσοστό συμμετοχής του καθενός στο φάσμα. Τα ισότοπα επιλέγονται στη στήλη του *Detected Isotope(s)*, ενώ τα ποσοστά γράφονται στην αντίστοιχη διπλανή θέση της στήλης *Contribution Percentage*. Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε το ισότοπο ^{152}Eu με ποσοστό 93 (%) και το ισότοπο ^{154}Eu με ποσοστό 7 (%), που είναι και η συνήθης σύσταση μιας πηγής *Eu*. Στο φάσμα θα μπορούμε να δούμε τις φωτοκορυφές και των δύο ισωτόπων, όπου όμως αυτές του ^{154}Eu θα έχουν πολύ μικρότερο αριθμό φωτονίων.

Στη θέση *Detected photons* επιλέγουμε τον αριθμό των φωτονίων που καταγράφονται στο φάσμα. Ο αριθμός αυτός έχει την ενδεικτική τιμή των 2 000 000 γεγονότων, αλλά φυσικά μπορεί να αλλάξει ανάλογα με τις ανάγκες του χρήστη.

- **Αρχείο εξόδου (*Output Filename*):**

Στη θέση αυτή ορίζεται το όνομα του αρχείου στο οποίο θα αποθηκευτεί το φάσμα. Ενδεικτικά έχει δοθεί το όνομα *Outfile.sth*, αλλά συστήνεται στο χρήστη να αλλάζει το όνομα του αρχείου αυτού κάθε φορά που τρέχει το πρόγραμμα, ανάλογα με το ποια πηγή (ή πηγές) χρησιμοποιεί.

Η παραγωγή του φάσματος γίνεται σε ένα παράθυρο του *DOS* που εμφανίζεται μόλις ο χρήστης επιλέξει *Ok*. Εκεί, μπορεί κανείς να παρακολουθήσει τη διαδικασία της δημιουργίας του φάσματος όπως την

αναγνώριση όλων ισοτόπων και των φωτοκορυφών τους που θα εμφανίζονται στο φάσμα.

Όταν το πρόγραμμα τελειώσει, έχει δημιουργηθεί το αρχείο του φάσματος με το όνομα που έχει επιλέξει ο χρήστης και έχει αποθηκευθεί στο *directory* *C:\program-files\SIMULATE\SPECTRA*. Μπορεί κανείς να δει το φάσμα αυτό χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα *SPECTR*, το οποίο ενεργοποιείται αυτόματα για το συγκεκριμένο αρχείο. Φυσικά, μπορεί κανείς να ενεργοποιήσει αυτόνομα το πρόγραμμα *SPECTR* για να μελετήσει τα υπάρχοντα φάσματα, με τη διαφορά ότι δεν συνδέεται αυτόματα με το *directory* στο οποίο έχουν αποθηκευθεί τα φάσματα.

2.3.2 Σύντομη περιγραφή του προγράμματος *SPECTR*

Το *SPECTR* είναι ένα πρόγραμμα που χρησιμοποιείται για την ανάλυση φασμάτων ακτίνων- γ ή ακτίνων- X μιας ραδιενεργού πηγής που συλλέγει ένας ανιχνευτής. Ο χρήστης επιλέγει το όνομα του φάσματος που πρόκειται να αναλύσει (*ENTER FILENAME*) από τη διεύθυνση που το έχει αποθηκεύσει (*LIST DIRECTORY*) και ξεκινά την ανάλυση (*START ANALYSIS*).

Το πρόγραμμα δίνει τη δυνατότητα απεικόνισης φασμάτων στην οθόνη (*DiSplay*), επιλογής και μεγέθυνσης περιοχής του φάσματος (*EXpand*) και επιστροφής στο αρχικό φάσμα (*REFresh*), μετακίνησης του φάσματος δεξιά-αριστερά με τα αντίστοιχα βέλη " \rightarrow ", ταυτόχρονης απεικόνισης μέχρι και 6 φασμάτων σε ανεξάρτητα πλαίσια (*ADD*) ή σε κοινό πλαίσιο (*OVerLay*), απομάκρυνσης ενός φάσματος από την οθόνη (*ReMoVe*), εκτύπωσης του φάσματος (*COPY*), μεταβολής του κατακόρυφου άξονα (*YSCale*), αφαίρεσης υποβάθρου (*BackGRound*), ολοκλήρωσης του εμβαδού και εύρεση του κεντροειδούς μιας φωτοκορυφής (*Integrate Peak*) ή προσαρμογή και ανάλυση σύνθετων φωτοκορυφών με συναρτήσεις Gauss (*FIT*). Για όλες αυτές τις ενέργειες δίνονται αναλυτικές οδηγίες στην οθόνη κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της εντολής. Το πρόγραμμα παρέχει και πολλές άλλες δυνατότητες που μπορεί να επιλέξει ο χρήστης από το *MENU*, ζητώντας τις ανάλογες πληροφορίες και οδηγίες στην οθόνη με τη βοήθεια της εντολής " $?$ ". Το πρόγραμμα επιτρέπει επίσης την ταυτοποίηση φωτοκορυφών ακτίνων- X με ταυτόχρονη απεικόνιση όλων των σχετικών γραμμών εκπομπής (K_{α} , K_{β} , L_{α} , κλπ) του αντίστοιχου χημικού στοιχείου, καθώς και ακτίνων- γ που προέρχονται από οποιοδήποτε ραδιενεργό ισότοπο με χρόνο ημιζωής (του ίδιου ή του μητρικού του) που επιτρέπει την ανίχνευσή του.

2.4 Εκτέλεση και επεξεργασία των μετρήσεων

2.4.1 Μελέτη της απόδοσης ανιχνευτή *Ge(HP)*

Υποθέστε ότι το εργαστήριο διαθέτει ένα ανιχνευτή *Ge(HP)* διαμέτρου 7cm, διακριτικής ικανότητας 2.2 keV (μετρούμενη στα 1332.5keV) και *Peak/Total ratio* ίσο με τη μονάδα (σχετικά με το θεωρητικά προβλεπόμενο).

1. Με τη βοήθεια του προγράμματος *SIMULATE* δημιουργείτε ένα φάσμα ακτίνων γ που εκπέμπει μια ραδιενεργός πηγή αποτελούμενη από τα ισότοπα ^{152}Eu και ^{154}Eu με αναλογία 93% και 7% αντίστοιχα, τοποθετημένη σε απόσταση 25cm από τον ανιχνευτή. Το φάσμα θα πρέπει να περιέχει 3 εκατομμύρια γεγονότα, ώστε να έχει αρκετή στατιστική. Για τις υπόλοιπες παραμέτρους χρησιμοποιείτε τις δεδομένες (default) τιμές. Η βαθμονόμηση του φάσματος (αν δεν είναι ήδη βαθμονομημένο) να γίνει με τις δεδομένες τιμές μέσω της εντολής *Enter Manually*. Καταγράψτε το φάσμα που δημιουργήσατε με το όνομα "*Eu152.sth*".
2. Σας δίδεται ο πίνακας των 10 πλέον ισχυρών φασματικών γραμμών του ^{152}Eu με τις αντίστοιχες εντάσεις τους. Συμβουλευτείτε το διάγραμμα αποδιέγερσης του ^{152}Eu για τον έλεγχο αυτών των ακτίνων- γ . Με τη βοήθεια του προγράμματος *SPECTR* (το οποίο ενεργοποιείται αυτόματα) αναλύστε τις 10 φωτοκορυφές στο φάσμα που δημιουργήσατε (εύρεση εμβαδών με την εντολή *Integrate Peak*) και κατόπιν διαιρέστε τα εμβαδά με τις σχετικές εντάσεις του πίνακα και κανονικοποιείτε τις τιμές ώστε στην ενέργεια 121.78keV να αντιστοιχεί στη μονάδα (κανονικοποίηση εντάσεων). Κατόπιν σχεδιάστε την κανονικοποιημένη ένταση ως συνάρτηση της ενέργειας των φωτονίων σε κλίμακα λογαριθμική-λογαριθμική (log-log). Η καμπύλη αυτή αναπαριστά τη μεταβολή της απόλυτης απόδοσης ϵ_a του ανιχνευτή σας σε σχέση με την ενέργεια των ανιχνευομένων φωτονίων.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ (keV)	ΣΧΕΤ. ΕΝΤΑΣΗ (ανά 100 διασπάσεις)	ΘΥΓΑΤΡΙΚΟΣ ΠΥΡΗΝΑΣ
121.78	28.4	^{152}Sm
244.69	7.51	^{152}Sm
344.28	26.6	^{152}Gd
443.98	2.8	^{152}Sm
778.90	12.98	^{152}Gd
867.39	4.21	^{152}Sm
964.13	14.5	^{152}Sm
1085.91	9.94	^{152}Sm
1112.12	13.6	^{152}Sm
1408.01	20.8	^{152}Sm

3. Για τον προσδιορισμό της απόλυτης απόδοσης του ανιχνευτή σας, απαιτείται μια απόλυτα βαθμονομημένη πηγή. Θεωρήστε λοιπόν ότι

έχετε μια πηγή ^{60}Co με ενεργότητα $1.3\mu\text{C}$ ($1\text{C} = 3.7 \times 10^{10}$ διασπάσεις ανά sec) και από το φάσμα που λαμβάνετε με έναν πραγματικό ανιχνευτή Γερμανίου για χρόνο 5000sec, κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες με το φάσμα *Eu152.sth*, προκύπτουν 123.080 ± 350 κρούσεις για την κορυφή 1332.5keV του ^{60}Co . Ποια είναι η απόλυτη απόδοση του ανιχνευτή σας.

4. Προσδιορίστε τη σχετική ανιχνευτική ικανότητα του ανιχνευτή Γερμανίου που χρησιμοποιήσατε για το φάσμα προσομοίωσης, σε σχέση με την ανιχνευτική ικανότητα ενός κρυστάλλου NaI διαστάσεων 3"x3" σε απόσταση 25cm από πηγή ^{60}Co , σε ποσοστό %.

2.4.2 Σύγκριση φασμάτων ακτίνων-γ από ανιχνευτές Ge και NaI

Υποθέστε ότι το εργαστήριο διαθέτει έναν ανιχνευτή Ge διακριτικής ικανότητας 1.9 keV (μετρούμενη στα 1332.5 keV) και έναν ανιχνευτή NaI διακριτικής ικανότητας 7% (μετρούμενη στα 661 keV). Θεωρείστε ότι για όλους τους ανιχνευτές το *Peak/Total Ratio* είναι ίσο με τη μονάδα (σχετικά με το θεωρητικά προβλεπόμενο).

1. Με τη βοήθεια του προγράμματος *SIMULATE* δημιουργήστε φάσματα ακτίνων-γ που εκπέμπει μία ραδιενεργός πηγή αποτελούμενη από τα ισότοπα ^{207}Bi (60%) και ^{22}Na (40%) – ένα για κάθε ανιχνευτή. Το ^{207}Bi εκπέμπει δυο ισχυρές ακτίνες-γ στα 569.7 και 1063.7 keV, ενώ το ^{22}Na στα 511.0 και 1274.5 keV. Οι συντελεστές βαθμονόμησης των φασμάτων είναι $a = 0.0$, $b = 0.45$ και $c = 0.0$, ενώ το κάθε φάσμα περιέχει 4 000 000 γεγονότα. Απεικονίστε τα δυο φάσματα σε κοινό πλαίσιο στην οθόνη σας (εντολή *OverLay* ή εντολή *ADD*) και εκτυπώστε τα.

2. Συγκρίνετε ποιοτικά τα δυο φάσματα και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

3. Αναλύστε και στα δυο φάσματα τις φωτοκορυφές μέσω προσαρμογής με συνάρτηση Gauss (εντολή *FIT*) για να βρείτε το εύρος τους ΔE_γ (*FWHM*) για κάθε ενέργεια E_γ των φωτοκορυφών. Υπολογίστε τη διακριτική ικανότητα των δυο ανιχνευτών Ge και NaI για τις ενέργειες E_γ και καταγράψτε τις τιμές σε πίνακα. Σχεδιάστε τις τιμές της διακριτικής ικανότητας των δυο ανιχνευτών ως συνάρτηση της ενέργειας των ακτίνων-γ και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Άσκηση 3

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ-β

Σκοπός της εργαστηριακής αυτής άσκησης είναι η μελέτη της εμβέλειας των σωματίων β.

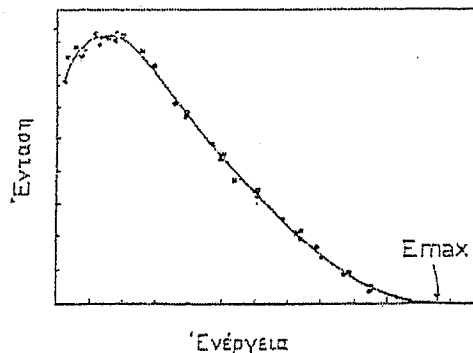
3.1 Γενικά

Είναι πειραματικά δεδομένο ότι στις διασπάσεις ορισμένων ραδιενεργών πυρήνων εκπέμπονται ηλεκτρόνια ή ποζιτρόνια τα οποία ονομάζονται **σωματίδια-β**. Η πιο απλή διαδικασία αυτού του είδους είναι η διάσπαση β του νετρονίου σε πρωτόνιο, με ταυτόχρονη εκπομπή ενός ηλεκτρονίου και ενός αντι-νετρίνου, σύμφωνα με την αντίδραση



Η διάσπαση βήτα ανήκει στις **ασθενείς αλληλεπιδράσεις**. Μπορεί να γίνει και προς τις δύο κατευθύνσεις και ονομάζεται β⁻ ή β⁺ για εκπομπή ηλεκτρονίου ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) ή ποζιτρονίου ($p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$) αντίστοιχα. Το πρωτόνιο είναι σταθερό σωματίο επομένως η β⁺ διάσπαση είναι δυνατή μόνο στο πεδίο άλλων νουκλεονίων, ώστε να επιτρέπεται ενεργειακά.

Η β-διάσπαση (π.χ. β⁻) είναι δυνατή μόνον εάν $m_{\text{πυρ}}(A,Z) > m_{\text{πυρ}}(A,Z+1) + m_e$ (αφού η μάζα του αντινετρίνου είναι εξαιρετικά μικρή). Το γινόμενο της περίσσειας αυτής μάζας Δm επί την ταχύτητα του φωτός στο τετράγωνο είναι η σταθερή διαθέσιμη από την αντίδραση ενέργεια E_m , η οποία μοιράζεται ανάμεσα στο ηλεκτρόνιο και το αντινεutrino (υπό μορφή κινητικής ενέργειας – Q-value). Για το λόγο αυτό τα ηλεκτρόνια της β-διάσπασης δεν εκπέμπονται με σταθερή ενέργεια αλλά εμφανίζουν ένα συνεχές ενεργειακό φάσμα που εκτείνεται από την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου μέχρι τη διαθέσιμη από την αντίδραση ενέργεια E_m όπως φαίνεται στο *Σχήμα 3.1*.



Σχήμα 3.1 : Τυπικό ενεργειακό φάσμα ακτίνων β.

Τα σωματίδια β περνώντας μέσα από την ύλη χάνουν ενέργεια. Η απώλεια ενέργειας των β οφείλεται:

α) - ιδιαίτερα για τα β χαμηλής ενέργειας - στις ανελαστικές τους κρούσεις με τα ατομικά ηλεκτρόνια, αποτέλεσμα των οποίων είναι ο ιονισμός και, κυρίως η διέγερση των ατόμων του υλικού που διασχίζουν. Άλλα σχετιζόμενα φαινόμενα είναι ο φθορισμός των ατόμων μετά τη διέγερσή τους. Το χαρακτηριστικό αυτής της διαδικασίας είναι ότι η ενέργεια που μεταβιβάζεται στα άτομα σε κάθε κρούση είναι πολύ μικρή (μερικά eV) και επομένως η ολική απώλεια ενέργειας ενός ηλεκτρονίου, που διασχίζει ένα φύλλο υλικού, είναι το αποτέλεσμα ενός πολύ μεγάλου αριθμού μικρών απωλειών. Όταν τα ηλεκτρόνια (γενικώς φορτισμένα σωματίδια) κινούνται μέσα σε ένα υλικό με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός στο υλικό αυτό, τότε εκπέμπουν ακτινοβολία **Cherenkov**.

β) Τα ηλεκτρόνια ή ποζιτρόνια υψηλής ενέργειας (μερικών MeV και πάνω) μπορούν να χάσουν ενέργεια και με το μηχανισμό της ακτινοβολίας πέδησης (Bremsstrahlung). Σύμφωνα με την κλασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού ένα επιταχυνόμενο φορτισμένο σωματίδιο εκπέμπει ακτινοβολία. Τα ηλεκτρόνια στο πεδίο Coulomb του πυρήνα μπορούν να έχουν μεγάλη επιτάχυνση εξαιτίας της μικρής τους μάζας. Η επιτάχυνση αυτή είναι ανάλογη του ατομικού αριθμού Z και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του σωματίου. Ο λόγος της απώλειας ενέργειας από ακτινοβολία, $(\frac{dE}{dx})_r$, και από

ιονισμό, $(\frac{dE}{dx})_c$, ακολουθεί τη σχέση [3] :

$$\frac{(dE/dx)_r}{(dE/dx)_c} = \frac{EZ}{800} \quad (3.2)$$

όπου E η ενέργεια σε μονάδες MeV. Έτσι σε μόλυβδο (Z=82) στα 10 MeV οι δύο μηχανισμοί συνεισφέρουν εξίσου στην απώλεια ενέργειας, ενώ πάνω από 10 MeV η απώλεια λόγω ακτινοβολίας επικρατεί. Το μήκος της διαδρομής των σωματιδίων β (μέσα σε ένα υλικό) ονομάζεται εμβέλεια των σωματιδίων β (στο συγκεκριμένο υλικό).

Ο πειραματικός προσδιορισμός της εμβέλειας των σωματιδίων β περιπλέκεται από το γεγονός ότι η εκπομπή τους συνοδεύεται συνήθως από εκπομπή ακτίνων γ (σκληρή συνιστώσα). Ο αριθμός των σωματιδίων N που καταγράφονται από έναν απαριθμητή (π.χ. G-M) αρχικά μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του πάχους του απορροφητή, σύμφωνα με τη σχέση :

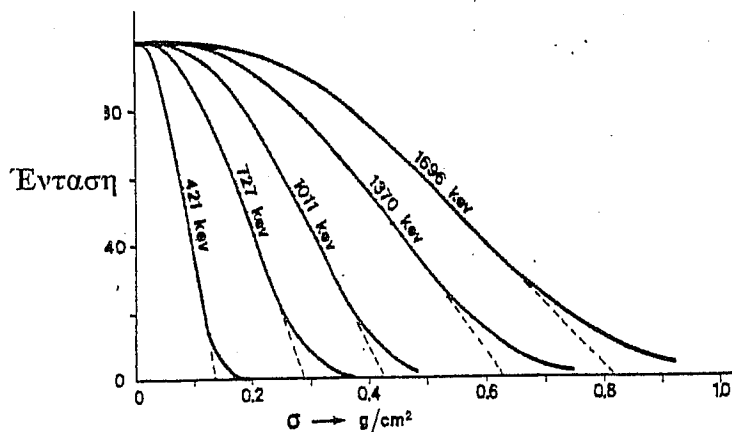
$$N = N_0 e^{-\mu x} \quad (3.3)$$

όπου μ είναι ο συντελεστής απορρόφησης των βήτα και x η επιφανειακή πυκνότητα του απορροφητή σε mg/cm². Για μεγάλα πάχη απορροφητή, ο απαριθμητής μετρά μόνο το υπόστρωμα και την ακτινοβολία γάμμα της πηγής.

Εξάλλου με το μηχανισμό της ακτινοβολίας πέδησης εκπέμπονται ακτίνες-X, στις οποίες οφείλεται ο παραμένον αριθμός κρούσεων στην ουρά της καμπύλης απορροφήσεως. Τέλος, το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης αλλοιώνει και αυτό τη μορφή της καμπύλης.

Τυπικές καμπύλες απορροφήσεως ηλεκτρονίων ως συνάρτηση του πάχους του απορροφητή δίνονται στο *Σχήμα 3.2*. Η ακριβής ανάλυση μιας τέτοιας καμπύλης παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες.

Παρόλο που οι διαδικασίες που περιγράψαμε είναι τόσο πολύπλοκες, ένα μεγάλο πλήθος από μετρήσεις της εμβέλειας των ηλεκτρονίων ως συνάρτηση της μέγιστης ενέργειάς τους E_m έδειξε ότι τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται με μια γραμμική σχέση. Ας δούμε ένα τυπικό παράδειγμα απορρόφησης σωματιδίων β από καθαρό αργίλιο (Al). Τα Σχήματα 3.3 και 3.4 εικονίζουν την καμπύλη απορρόφησης σωματιδίων β σε γραμμική κλίμακα και σε ημιλογαριθμικό διάγραμμα αντίστοιχα.



Σχήμα 3.2 : Τυπικές καμπύλες απορρόφησης εκπεμπομένων ηλεκτρονίων από β -διάσπαση ραδιενεργού πηγής ως συνάρτηση της επιφανειακής πυκνότητας φύλλων αργιλίου (Al).

Στην περίπτωση ύπαρξης σκληρής συνιστώσας (ακτίνες γάμμα), επιβάλλεται να χαραχθεί αρχικά το διάγραμμα του ρυθμού των κρούσεων ως συνάρτηση του πάχους του απορροφητή (Σχ. 3.3), όπου η κλίμακα του ρυθμού να είναι λογαριθμική ώστε να αναδειχθεί η περιοχή του χαμηλού ρυθμού κρούσεων. Με το διάγραμμα αυτό βρίσκεται η σκληρή συνιστώσα και αφαιρείται από τις ακτίνες βήτα. Στη συνέχεια, από το διάγραμμα που προκύπτει βρίσκεται με καλή προσέγγιση η εμβέλεια R (σημείο τομής με τα γεγονότα υποβάθρου).

Από την εμβέλεια R των ηλεκτρονίων μέσα στο αλουμίνιο μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη ενέργειά τους, E_m , χρησιμοποιώντας την εμπειρική σχέση του Flammersfeld [3] :

$$R = 0.11 \cdot \left(\sqrt{1 + 22.4 \cdot E_{\max}^2} - 1 \right) \quad \text{για } 0 < E_{\max} < 3 \text{ MeV}$$

όπου το R εκφράζεται σε g/cm^2 και το E_m σε MeV.

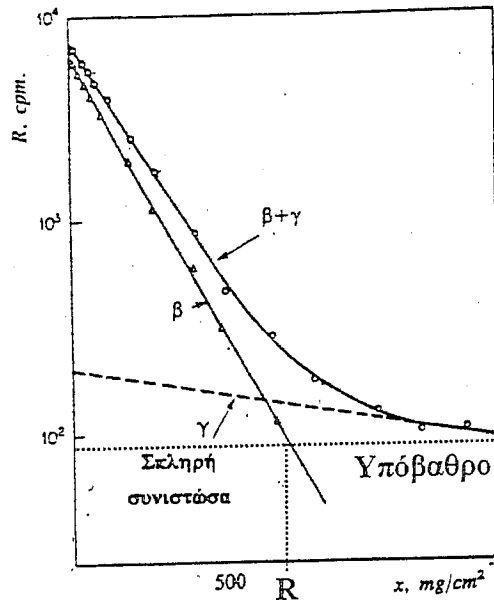
3.2 Μέθοδος

3.2.1. Πειραματική διάταξη

Για να πραγματοποιήσουμε το πείραμα χρειαζόμαστε:

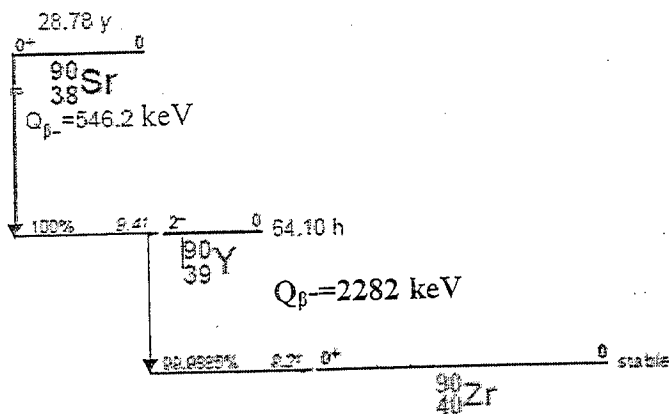
1. Έναν απαριθμητή G.M.
2. Μια μονάδα επικοινωνίας H/Y με G.M.

3. Ένα προσωπικό H/Y



Σχήμα 3.3: Προσδιορισμός της μέγιστης εμβέλειας σωματιδίων β. Η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα είναι λογαριθμική.

4. Πηγή σωματιδίων β: ^{90}Sr . Το διάγραμμα αποδιέγερσης της πηγής ^{90}Sr αποδίδεται γραφικά ως εξής:



5. Απορροφητές αργιλίου πάνω στους οποίους αναφέρεται το ισοδύναμο πάχος σε mgr/cm^2 ή gr/cm^2 .

6. Μια πλαστική βάση για τη στήριξη του G.M. των απορροφητών και της πηγής.

7. Μια λαβίδα για ραδιενεργές πηγές.

8. Ένα χάρακα.

Η λειτουργία του απαριθμητή G.M. και η μέθοδος καταγραφής των μετρήσεων στον Η.Υ. περιγράφεται στην Άσκηση 28.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σ. Χαραλάμπους, Εργαστηριακές Ασκήσεις Ατομικής και Πυρηνικής Φυσικής, Θεσσαλονίκη 1983, β' έκδοση.
2. A. Melissinos, EXPERIMENTS IN MODERN PHYSICS, Pergamon Press, 1968, σελ. 14-20.
3. W. Price, NUCLEAR RADIATION DETECTION, McGraw-Hill, 1964, σελ. 14-20.
4. Κ. Αλεξόπουλος, Τόμος 3, ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, 1963, σελ. 160-163.
5. M. Alonso-Finn, Vol. 3, FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS, σελ. 340-348.
6. W.N. Cottingham, D.A. Greenwood, Εισαγωγή στην Πυρηνική Φυσική, σελ. 180-105 μετάφραση Κ.Σαρηγιάννης.

3.2.2. Εκτέλεση του πειράματος

ΠΡΟΣΟΧΗ : Μην αγγίζετε ποτέ τις ραδιενεργές πηγές με τα χέρια. Χρησιμοποιείτε πάντα τη λαβίδα.

1. Μετρήστε την ακτινοβολία του υποστρώματος για 6 min. Υπενθυμίζεται ότι ως υπόστρωμα ορίζεται το σύνολο των γεγονότων που προέρχονται από όλα τα άλλα αίτια, εκτός από τις υπό μέτρηση πηγές και οφείλεται κυρίως στην κοσμική ακτινοβολία και τη ραδιενέργεια του περιβάλλοντος.

2. Τοποθετήστε, με τη λαβίδα, την πηγή β (^{90}Sr) στην κατάλληλη υποδοχή, στον πυθμένα της πλαστικής βάσης και μετρήστε τον αριθμό κρούσεων K_{β} επί 3 min. Η πηγή θα πρέπει να τοποθετείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να καταμετράται ο μέγιστος δυνατός αριθμός κρούσεων.

3. Παρεμβάλλετε μεταξύ πηγής και απαριθμητή το λεπτότερο φύλλο αργιλίου και μετρήστε και πάλι τον αριθμό κρούσεων επί 3 min.

Συνεχίστε με τον ίδιο τρόπο προσθέτοντας διαδοχικά φύλλα Al (προτεινόμενο βήμα $\sim 100 \text{ mg/cm}^2$) και πάρτε μετρήσεις για διάφορα πάχη x μέχρις ότου οι μετρήσεις σταθεροποιηθούν στον αριθμό κρούσεων του υποστρώματος N_{β} . Μη σταματήσετε τις μετρήσεις αν δεν έχετε φθάσει τουλάχιστον 1400 mgr/cm^2 . Συμπληρώστε τις μετρήσεις σας στον Πίνακα I.

Πίνακας I

Φύλλα Al	x_{Al}	K_{β}	N_{β}	$N_{\beta}-N_{\beta}$	$\Delta(N_{\beta}-N_{\beta})$

4. Να σημειώσετε την ενεργότητα της πηγής ^{90}Sr που χρησιμοποιήσατε (σε $\mu\text{Ci}=0,37 \times 10^5$ διασπάσεις/s) καθώς και το χρόνο κατασκευής της. Έχοντας υπόψη ότι αυτά τα σωματίδια-β εκπέμπονται ισότροπα σε όλο το χώρο, να μετρήσετε (εκτιμήσετε) τη διάμετρο του παραθύρου του G.M. (χωρίς να τον μετακινήσετε από τη θέση του) καθώς και την απόσταση πηγής-απαριθμητή.

3.3 Ανάλυση Πειραματικών Δεδομένων

3.3.1 Προσδιορισμός μέγιστης εμβέλειας και μέγιστης ενέργειας των σωματιδίων-β.

1. Από τους αριθμούς κρούσεων για 3 min, K_β , υπολογίστε τους ρυθμούς κρούσεων ανά min N_β , και συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες του ΠΙΝΑΚΑ I.
2. Να αποδώσετε γραφικά τη συνάρτηση $\ln(N_\beta - N_b) = f(x_{AI})$. Θα πρέπει να λάβετε υπόψη και τα αντίστοιχα σφάλματα και να χαράξετε την καλύτερη δυνατή ευθεία προσαρμογής με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.
3. Από την ευθεία που χαράζατε, βρείτε το σημείο τομής με την αντίστοιχη σταθερά του υποβάθρου ($y = \ln N_b$), προσδιορίστε τη μέγιστη εμβέλεια R και εκτιμήστε το σφάλμα δR .
4. Υπολογίστε τη μέγιστη κινητική ενέργεια E_m των σωματιδίων β και το σφάλμα δE_m με βάση τη σχέση (3.4).
5. Να υπολογίσετε τα ποσοστά απώλειας ενέργειας των σωματιδίων βήτα από ακτινοβολία και από συγκρούσεις από την πηγή ^{90}Sr που χρησιμοποιήσατε, με βάση τη σχέση (3.2) και το ενεργειακό διάγραμμα αποδιέγερσης του ^{90}Sr . Μπορεί πραγματικά η σκληρή συνιστώσα να θεωρηθεί αμελητέα στην περίπτωση του ^{90}Sr ; Επιβεβαιώνεται κάτι τέτοιο από τα πειραματικά σας δεδομένα;
6. Με δεδομένο το ενεργειακό διάγραμμα αποδιέγερσης του ^{90}Sr και με τη χρήση του λογισμικού Monte-Carlo ESTAR που διατίθεται ελεύθερα στο διαδίκτυο, το οποίο δίδει αξιόπιστες θεωρητικές προβλέψεις, συγκρίνετε την αναμενόμενη εμβέλεια των σωματιδίων βήτα του ^{90}Sr στο αλουμίνιο με την πειραματική τιμή που προσδιορίσατε στο ερώτημα 3. Είναι η πειραματική τιμή μικρότερη και κατά πόσο; Πού αποδίδετε τη διαφορά αυτή;
7. Με βάση το βήμα (4) εκτέλεσης των μετρήσεων (γεωμετρία πειραματικής διάταξης και στοιχεία πηγής), να υπολογίσετε τον αριθμό M_β των σωματιδίων-β που αναμένονται θεωρητικά να εισέλθουν στον ανιχνευτή ανά min κατά την ημερομηνία που πραγματοποιήσατε τις μετρήσεις. Με βάση την τιμή αυτή και την τιμή N_β χωρίς απορροφητή (στην ίδια απόσταση) και υποθέτοντας ότι δεν απορροφώνται καθόλου σωματίδια-β από τον αέρα και το παράθυρο, να υπολογίσετε το συντελεστή απόδοσης η του απαριθμητή G.M. ($\eta = \text{λόγος πειραματικά ανιχνευόμενων προς θεωρητικά αναμενόμενων}$).

Άσκηση 4

Η μέθοδος Monte Carlo ή μέθοδος των τυχαίων αριθμών

Σκοπός της εργαστηριακής αυτής άσκησης είναι η εξοικείωση με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo και γενικότερα της μεθόδου τυχαίων αριθμών.

4.1.1 Γενικά

Η μέθοδος Monte Carlo είναι μια αριθμητική τεχνική που εφαρμόζεται για τον υπολογισμό πιθανοτήτων καθώς και διαφόρων ποσοτήτων σχετικών με πιθανότητες, χρησιμοποιώντας σειρές τυχαίων αριθμών. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου η χρήση αναλυτικών μεθόδων ή άλλων αριθμητικών προσεγγίσεων είναι ανεπαρκής. Η μέθοδος συνίσταται στο ότι, αντί να γίνει αναλυτική ή αριθμητική επίλυση του προβλήματος, δημιουργείται αρχικά μια ακολουθία τυχαίων αριθμών x_1, x_2, \dots , η κατανομή των οποίων αντιστοιχεί στη συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ που θέλουμε να υπολογίσουμε. Οι τιμές του x μπορούν να θεωρηθούν προσομοιωμένες μετρήσεις και από αυτές να υπολογιστούν οι πιθανότητες να λάβουν τιμές σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να υπολογιστεί πρακτικά το ολοκλήρωμα της $f(x)$. Το πραγματικό πλεονέκτημα της τεχνικής αυτής φαίνεται σε προβλήματα πολλαπλών διαστάσεων, όπου ολοκλήρωση μιας συνάρτησης πιθανότητας $f(x,y,z,\dots)$ σε μια περίπλοκη περιοχή μπορεί να μην είναι εφικτή με άλλες μεθόδους. Στα επόμενα δίνεται η αρχή της μεθόδου καθώς και μερικές εφαρμογές.

Ένα χαρακτηριστικό του συστήματος ονομάζεται "τυχαίο" όταν δεν είναι γνωστό ή δε μπορεί να προβλεφθεί με απόλυτη ακρίβεια. Ο βαθμός της τυχειότητας μπορεί να δοθεί ποσοτικά με την έννοια της "πιθανότητας". Η μαθηματική θεωρία των πιθανοτήτων είχε αρχίσει πριν το 17^ο αιώνα και μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί πολλοί ορισμοί της πιθανότητας. Στα επόμενα θα χρησιμοποιηθεί ο ορισμός που δόθηκε το 1933 από τον Kolmogorov. Θεωρείστε ένα σύνολο S που ονομάζεται "χώρος δειγμάτων" και αποτελείται από έναν ορισμένο αριθμό στοιχείων. Σε κάθε υποσύνολο A του S ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός $P(A)$ που ονομάζεται πιθανότητα και ορίζεται από τα ακόλουθα αξιώματα:

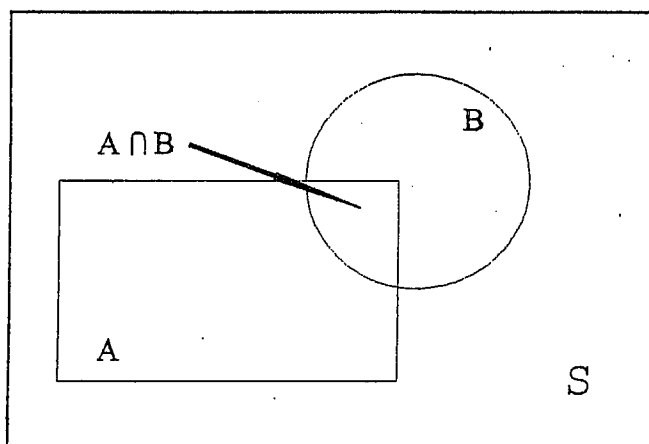
1. Για κάθε υποσύνολο A του S ισχύει $P(A) \geq 0$.
2. Για οποιαδήποτε δύο υποσύνολα A και B που δεν έχουν κοινά στοιχεία ($A \cap B = \emptyset$), η πιθανότητα $P(A \cup B)$ είναι το άθροισμα των δύο αντίστοιχων πιθανοτήτων, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. Η πιθανότητα που ορίζεται για ολόκληρο το χώρο δειγμάτων είναι 1, $P(S) = 1$.

Μια μεταβλητή που παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε στοιχείο του συνόλου S λέγεται “τυχαία μεταβλητή”.

Θεωρείται ένας χώρος δειγμάτων S που περιέχει τα υποσύνολα A και B . Αν $P(B) \neq 0$, ορίζεται η “υπό συνθήκη πιθανότητα” $P(A|B)$ ως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (4.1)$$

Η σχέση μεταξύ των συνόλων A , B και S φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 : Σχέση μεταξύ των υποσυνόλων A , B και S στον ορισμό της “υπό συνθήκη πιθανότητας”.

Δύο υποσύνολα A και B είναι “ανεξάρτητα” αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Τα ανεξάρτητα υποσύνολα δεν πρέπει να συγχέονται με τα υποσύνολα που δεν έχουν κοινά στοιχεία όπου δηλ. $A \cap B = \emptyset$.

Από τον ορισμό της υπό συνθήκη πιθανότητας προκύπτει η πιθανότητα $P(B|A)$ (θεωρώντας $P(A) \neq 0$),

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (4.2)$$

Αφού $A \cap B$ είναι το ίδιο με το $B \cap A$, από τις (4.1) και (4.2) προκύπτει ότι

$$P(B \cap A) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

ή

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (4.3)$$

Η (4.3) που σχετίζει τις υπό συνθήκη πιθανότητες $P(A|B)$ και $P(B|A)$, αποτελεί το **θεώρημα του Bayes**.

Ας υποθεθεί ότι ο χώρος δειγμάτων S μπορεί να διαμελιστεί σε ανεξάρτητα υποσύνολα A_i τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία, δηλαδή $S = \cup A_i$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$. Ας θεωρηθεί ακόμα ότι $P(A_i) \neq 0$ για κάθε i . Ένα τυχαίο υποσύνολο B μπορεί να εκφραστεί ως $B = B \cap S = B \cap (\cup A_i) = \cup (B \cap A_i)$. Αφού τα υποσύνολα $B \cap A_i$ δεν έχουν κοινά στοιχεία, οι πιθανότητες τους αθροίζονται, δίνοντας

$$P(B) = P(\cup (B \cap A_i)) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i). \quad (4.4)$$

Η σχέση (4.4) ονομάζεται “νόμος της ολικής πιθανότητας”. Συνδυάζοντας τη σχέση (4.4) με το θεώρημα του Bayes προκύπτει ότι:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)} \quad (4.5)$$

όπου το A μπορεί να είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του S , και να περιέχει, για παράδειγμα, ένα από τα A_i .

Σαν παράδειγμα ας θεωρηθεί η περίπτωση μιας αρρώστιας η οποία είναι γνωστό ότι έχει φορείς το 0,1% του πληθυσμού, δηλαδή οι αρχικές πιθανότητες να έχει ή όχι κάποιος την αρρώστια είναι:

$$P(\text{αρρώστια}) = 0,001,$$

$$P(\text{χωρίς αρρώστια}) = 0,999.$$

Ο πληθυσμός υποβάλλεται σε ένα τεστ το οποίο έχει πιθανότητα 98% να δώσει θετικό αποτέλεσμα για άτομα που είναι φορείς της αρρώστιας δηλαδή:

$$P(+|\text{αρρώστια}) = 0,98,$$

$$P(-|\text{αρρώστια}) = 0,02.$$

Υπάρχει όμως και μια πιθανότητα 3% να αποκτηθεί θετικό αποτέλεσμα για ένα άτομο που δεν είναι φορέας της αρρώστιας,

$$P(+|\text{χωρίς αρρώστια}) = 0,03,$$

$$P(-|\text{χωρίς αρρώστια}) = 0,97.$$

Ποια η πιθανότητα κάποιος να έχει την αρρώστια όταν το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό;

$$\begin{aligned} P(\text{αρρώστια} | +) &= \frac{P(+|\text{αρρώστια})P(\text{αρρώστια})}{P(+|\text{αρρώστια})P(\text{αρρώστια}) + P(+|\text{χωρίς αρρώστια})P(\text{χωρίς αρρώστια})} \\ &= \frac{0,98 \times 0,001}{0,98 \times 0,001 + 0,03 \times 0,999} = 0,032 \end{aligned}$$

Η πιθανότητα κάποιος να είναι φορέας της αρρώστιας όταν το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό είναι μόνο 3,2%. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να φαίνεται πολύ μικρό αφού η πιθανότητα το τεστ να δώσει λάθος αποτέλεσμα είναι μόλις 2% αν κάποιος είναι

φορέας της αρρώστιας και 3% αν δεν είναι. Αλλά η αρχική πιθανότητα είναι πολύ μικρή, 0,1%, και συνεπώς η τελική πιθανότητα προκύπτει 3,2%.

4.1.2 Πως ερμηνεύεται η πιθανότητα;

Υπάρχουν κυρίως δύο ερμηνείες της πιθανότητας που συναντώνται συνήθως στη βιβλιογραφία. Η πιο σημαντική είναι αυτή της “σχετικής συχνότητας”, που εκτός των άλλων χρησιμοποιείται και για την απόδοση στατιστικών σφαλμάτων σε μετρήσεις. Μια άλλη ερμηνεία είναι της “υποκειμενικής” πιθανότητας, που χρησιμοποιείται για παράδειγμα για τον καθορισμό του μεγέθους της αβεβαιότητας εξαιτίας των συστηματικών σφαλμάτων.

Κατά την ανάλυση δεδομένων, η πιθανότητα κυρίως ερμηνεύεται ως “περιοριστική σχετική συχνότητα”. Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία του συνόλου S αντιστοιχούν στην πιθανή έκβαση μιας μέτρησης, η οποία θεωρείται (τουλάχιστον υποθετικά) ότι μπορεί να επαναληφθεί. Ένα υποσύνολο A του S αντιστοιχεί στην εύρεση οποιουδήποτε αποτελέσματος στο υποσύνολο. Ένα τέτοιο υποσύνολο ονομάζεται “γεγονός”, το οποίο λέγεται ότι βρίσκεται αν το αποτέλεσμα μιας μέτρησης βρίσκεται στο υποσύνολο.

Ένα υποσύνολο του S που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο δηλώνει ένα μόνο στοιχειώδες συμβάν. Η πιθανότητα για ένα στοιχειώδες συμβάν A προσδιορίζεται από το πόσες φορές το αποτέλεσμα είναι A θεωρώντας ότι η μέτρηση επαναλαμβάνεται άπειρες φορές.

Η ισχύς των αποδιδόμενων τιμών πιθανότητας μπορούν να δοκιμαστούν πειραματικά. Η ερμηνεία της σχετικής συχνότητας είναι κατάλληλη, για παράδειγμα, στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων, όπου επαναλαμβανόμενες συγκρούσεις σωματιδίων αποτελούν επαναλήψεις ενός πειράματος. Η ιδέα της σχετικής πιθανότητας είναι πιο δύσκολο να εφαρμοστεί στην περίπτωση μοναδικών φαινομένων όπως είναι το “big bang”. Στην περίπτωση αυτή η ερμηνεία ως συχνότητα μπορεί να αποδοθεί θεωρώντας ένα μεγάλο αριθμό από παρόμοια σύμπαντα, σε κάποια από τα οποία συμβαίνει ένα συγκεκριμένο γεγονός, πράγμα το οποίο φυσικά δεν είναι εφικτό.

Μια άλλη ερμηνεία της πιθανότητας είναι αυτή της “υποκειμενικής” (ή Bayesian) πιθανότητας. Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία του χώρου των δειγμάτων αντιστοιχούν σε “υποθέσεις”, δηλαδή προτάσεις που είναι ή σωστές ή λάθος. Έτσι η ερμηνεία της πιθανότητας σχετίζεται με μια υπόθεση, σαν το μέγεθος της αξιοπιστίας της υπόθεσης αυτής. Ο ισχυρισμός ότι από μια μέτρηση θα προκύψει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα για έναν ορισμένο αριθμό δόκιμων μπορεί να θεωρηθεί σαν υπόθεση, οπότε ο σκελετός της υποκειμενικής πιθανότητας περιέχει την ερμηνεία της σχετικής πιθανότητας.

Η χρήση της υποκειμενικής πιθανότητας σχετίζεται στενά με το θεώρημα Bayes και αποτελεί τη βάση της Bayesian στατιστικής. Το υποσύνολο A που εμφανίζεται στο θεώρημα Bayes (σχέση (4.3)) μπορεί να ερμηνευτεί σαν την υπόθεση ότι μια συγκεκριμένη θεωρία είναι σωστή, και το υποσύνολο B μπορεί να είναι η υπόθεση ότι από ένα πείραμα θα προκύψει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Το θεώρημα του Bayes παίρνει τη μορφή:

$$P(\text{θεωρία} \mid \text{πειραματικά δεδομένα}) \propto P(\text{πειραματικά δεδομένα} \mid \text{θεωρία}) \cdot P(\text{θεωρία}).$$

Εδώ η $P(\text{θεωρία})$ αντιστοιχεί στην αρχική πιθανότητα ότι η θεωρία ισχύει και η $P(\text{πειραματικά δεδομένα}|\text{θεωρία})$, που ονομάζεται πιθανοφάνεια (likelihood), είναι η πιθανότητα, θεωρώντας ότι η θεωρία είναι σωστή, να παρατηρηθούν τα δεδομένα που προκύπτουν στην πράξη. Η τελική πιθανότητα να είναι σωστή η θεωρία όταν είναι γνωστό το αποτέλεσμα του πειράματος εκφράζεται από την $P(\text{θεωρία} | \text{πειραματικά δεδομένα})$.

4.1.3 Αναμενόμενες τιμές

Ας θεωρηθεί ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα χαρακτηρίζεται από μια συνεχή μεταβλητή x . Ο χώρος δειγμάτων αντιστοιχεί στο σύνολο των πιθανών τιμών που μπορεί να λάβει η μεταβλητή x . Η πιθανότητα να παρατηρηθεί μια τιμή μέσα σε ένα διάστημα $[x, x+dx]$ δίνεται από τη “συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας” (probability density function, ή όπως αναφέρεται συνήθως για λόγους συντομίας p.d.f.) $f(x)$:

πιθανότητα να παρατηρηθεί το x στο διάστημα $[x, x+dx] = f(x)dx$.

Ακολουθώντας την ερμηνεία της σχετικής συχνότητας, η $f(x)dx$ δηλώνει πόσες φορές η x παίρνει τιμές στο διάστημα $[x, x+dx]$ στο όριο που ο αριθμός των παρατηρήσεων τείνει στο άπειρο. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ κανονικοποιείται έτσι ώστε η ολική πιθανότητα (δηλαδή η πιθανότητα να έχει κάποιο αποτέλεσμα) να είναι ίση με ένα δηλαδή,

$$\int_S f(x)dx = 1, \quad (4.6)$$

όπου η περιοχή της ολοκλήρωσης S αναφέρεται στην ολική έκταση της x , δηλαδή στον ολικό χώρο δειγμάτων.

Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση η μεταβλητή x να παίρνει διάκριτες τιμές x_i για $i=1, \dots, N$. Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή x_i με πιθανότητες $P(x_i)$, η αθροιστική κατανομή ορίζεται ως η πιθανότητα να παρατηρηθούν τιμές μικρότερες ή ίσες με την τιμή του x ,

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i) \quad (4.7)$$

Η “αναμενόμενη τιμή” $E[x]$ μιας τυχαίας μεταβλητής x η κατανομή της οποίας ακολουθεί τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, συμβολίζεται συνήθως με μ και ορίζεται ως:

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (4.8)$$

Ας σημειωθεί ότι η $E[x]$ δεν είναι συνάρτηση της x , αλλά εξαρτάται από την κατανομή της p.d.f. $f(x)$. Αν η p.d.f. $f(x)$ είναι συγκεντρωμένη κυρίως σε μια περιοχή, τότε η $E[x]$ αντιπροσωπεύει την περιοχή στην οποία είναι πιθανό να βρεθούν οι τιμές της x . Αν όμως η $f(x)$ αποτελείται από δύο κορυφές που απέχουν αρκετά μεταξύ τους, τότε η $E[x]$ είναι στο μέσον, όπου σπάνια θα βρεθεί η x .

Η “διασπορά” (variance) σ^2 ή $V[x]$ της x δίνεται από την:

$$\sigma^2 = V[x] = E[(x - E[x])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \quad (4.9)$$

Η διασπορά αποτελεί μέτρο του πλάτους της έκτασης γύρω από τη μέση τιμή. Συνήθως χρησιμοποιείται η τετραγωνική ρίζα της διασποράς που δηλώνει την “τυπική απόκλιση” (standard deviation).

4.1.4 Εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo για ολοκλήρωση

Σαν παράδειγμα έστω το προς υπολογισμό ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{z_-}^{z_+} \int_{y_-}^{y_+} \int_{x_-}^{x_+} f(x, y, z) dx dy dz \approx V \langle f \rangle \quad (4.10)$$

όπου το ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η μέση τιμή της $f(x, y, z)$, $\langle f \rangle$, στο χώρο ολοκλήρωσης, επί το χώρο $V = (z_+ - z_-)(y_+ - y_-)(x_+ - x_-)$. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του $f(x, y, z)$ αρκεί η τυχαία συλλογή σημείων από το χώρο ολοκλήρωσης και ο υπολογισμός της μέσης τιμής.

Θεωρούνται N τυχαία σημεία r_i ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ένα πολυδιάστατο χώρο V , δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (p.d.f.) είναι μια σταθερά. Με τη μέθοδο monte carlo υπολογίζεται το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f :

$$I = \int f dV \approx V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \quad (4.11)$$

Εδώ το σύμβολο $\langle \rangle$ δηλώνει το αριθμητικό μέσο των N σημείων του δείγματος:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(r_i) \quad (4.12)$$

Έστω το ολοκλήρωμα $I = \int_{x_-}^{x_+} f(x) dx$ για μια συγκεκριμένη συνάρτηση $f(x)$. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο το σφάλμα ΔI ελαττώνεται με τη ρίζα του αριθμού των σημείων: \sqrt{N} . Επίσης η ακρίβεια είναι μεγαλύτερη όσο

μικρότερη είναι η μέση απόκλιση $\sigma_f = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}$, δηλαδή όσο πιο ομαλή είναι η συνάρτηση $f(x)$. Θα εξεταστεί η περίπτωση που η $f(x)$ είναι παντού 0 εκτός από μια πολύ στενή κορυφή γύρω από κάποια περιοχή του x . Αν οι τιμές x_i έχουν την ίδια πιθανότητα να βρίσκονται οπουδήποτε μεταξύ x_- και x_+ , είναι πιθανό ότι οι περισσότερες θα βρίσκονται εκτός της κορυφής της $f(x)$, και μόνο ελάχιστες θα έχουν $f(x_i) \neq 0$, γεγονός που οδηγεί σε φτωχό προσδιορισμό του I .

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας γενικός κανόνας για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου. Χρησιμοποιώντας μια θετική συνάρτηση βάρους $w(x)$, η οποία είναι κανονικοποιημένη ώστε $\int_{x_-}^{x_+} w(x) dx = 1$, το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί:

$$I = \int_{x_-}^{x_+} w(x) \frac{f(x)}{w(x)} dx \quad (4.13)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε

$$y(x) = \int_{x_-}^x w(x') dx', \quad \text{ώστε} \quad \frac{dy}{dx} = w(x), \quad y(x_-) = 0, \quad y(x_+) = 1,$$

το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_0^1 \frac{f(x(y))}{w(x(y))} dy.$$

Η ανάπτυξη του ολοκληρώματος με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo γίνεται παίρνοντας το μέσο των τιμών της $\frac{f}{w}$ σε ένα τυχαίο δείγμα σημείων y_i ομοιόμορφα κατανομημένων στο διάστημα $[0,1]$:

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x(y_i))}{w(x(y_i))}.$$

Με αυτό τον τρόπο το όρισμα $\frac{f(x)}{w(x)}$ μπορεί να γίνει ομαλό, με αποτέλεσμα να μειωθεί η διασπορά $\sigma_{f/w}$ του υπολογισμού του με Monte Carlo.

4.1.5 Τυχαίοι αριθμοί

Η δημιουργία μιας ακολουθίας από ομοιόμορφα κατανομημένους τυχαίους αριθμούς θα μπορούσε κατά κανόνα να γίνει χρησιμοποιώντας μια τυχαία φυσική διαδικασία, όπως η επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός νομίσματος (ή ζαριών). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε πραγματικά τυχαίους αριθμούς. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις οι τυχαίοι αριθμοί δημιουργούνται με ένα αλγόριθμο στον υπολογιστή που ονομάζεται "γεννήτορας τυχαίων αριθμών". Ένας συνήθης τύπος γεννήτορα τυχαίων αριθμών βασίζεται στον ακόλουθο αλγόριθμο. Αρχίζοντας από έναν ακέραιο αριθμό n_0 (που ονομάζεται seed), παράγεται μια ακολουθία ακέραιων αριθμών n_1, n_2, \dots σύμφωνα με τον κανόνα

$$n_{i+1} = (\alpha n_i) \bmod (m)$$

όπου οι ακέραιοι αριθμοί α και m είναι σταθεροί. Για την απόκτηση τιμών ομοιόμορφα καταναμημένων στο διάστημα $(0,1)$ χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $r_i = n_i/m$. Η αρχική τιμή n_0 και οι δύο σταθερές α και m προσδιορίζουν ολόκληρη την ακολουθία αριθμών, οι οποίοι φυσικά δεν είναι πραγματικά τυχαίοι, αλλά αντίθετα είναι αυστηρά καθορισμένοι. Οι αριθμοί που προκύπτουν ονομάζονται συνεπώς ψευδοτυχαίοι. Για όλες τις εφαρμογές αυτοί μπορούν να θεωρηθούν ισότιμοι των πραγματικά τυχαίων αριθμών, με τη διαφορά ότι μπορούν να αναπαραχθούν, αν επαναληφθεί η διαδικασία χρησιμοποιώντας την ίδια τιμή για n_0 (seed).

4.2.1 Πειραματικό μέρος

1. Δημιουργείστε μια σειρά «τυχαίων», ομοιόμορφα καταναμημένων αριθμών τρέχοντας το πρόγραμμα `example1.m`, και στη συνέχεια μια σειρά «τυχαίων» αριθμών που έχουν κανονική (Gaussian) κατανομή (πρόγραμμα `example2.m`). Δοκιμάστε να αλλάξετε τον αριθμό των τυχαίων αριθμών που παίρνετε καθώς και να τους ομαδοποιήσετε σε στήλες διαφορετικού εύρους (bins) στο ιστόγραμμα. Καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας. Αν x_i είναι τυχαίοι αριθμοί με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$ τότε τι δίνει ο μετασχηματισμός $y_i = 1 - x_i$;

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα (πρόγραμμα `pi1.m`)

$$\pi/4 = \int_R \varepsilon(1-x^2-y^2) dx dy, \quad R \in [0,1] \quad x \in [0,1] \quad \varepsilon(z) = 1, \quad z \geq 0$$

$$R \in [0,1] \quad y \in [0,1] \quad \varepsilon(z) = 0, \quad z < 0$$

Η ε είναι η «συνάρτηση βήματος».

Υπόδειξη: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι αντίστοιχα:

$$\langle \pi/4 \rangle = n/N, \quad \text{και} \quad \delta \langle \pi/4 \rangle = \frac{1}{N} \sqrt{n(N-n)/N-1},$$

όπου n ο αριθμός των ζευγαριών με $x^2 + y^2 \leq 1$.

Χρησιμοποιείστε 50, 100, 500, 1000, 10000 και 100000 τυχαίους αριθμούς. Πως συγκρίνονται οι τιμές του $\pi/4$ που βρίσκετε και πως συγκρίνονται τα σφάλματα $\delta \langle \pi/4 \rangle$;

3. Ο αριθμός $N(t)$ των πυρήνων που έχουν απομείνει μετά από χρόνο t στο προηγούμενο βήμα μπορεί να βρεθεί και σαν άθροισμα:

$$\langle N(t) \rangle = \sum_i f_i(t) = N_0 \sum_i f_i(t) / N_0, \quad (4.16)$$

όπου $f_i(t) = 1$ αν ο πυρήνας δεν έχει διασπαστεί μέχρι το χρόνο t και $f_i(t) = 0$ αν έχει διασπαστεί. Σύμφωνα με την (4.15) κάθε πυρήνας

- i. Έχει διασπαστεί αν $P(t) = 1 - e^{-t/\tau} > x_i$,
- ii. Δεν έχει διασπαστεί αν $P(t) = 1 - e^{-t/\tau} < x_i$,

όπου x_i είναι μια ακολουθία N_0 τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$.

Να σχεδιαστεί η $\langle N(t) \rangle$ όπως προκύπτει από τη σχέση (4.16) (πρόγραμμα radiodec2.m). Ποια προσέγγιση θεωρείτε ότι είναι καλύτερη; Σχολιάστε την απάντησή σας.

B.2 Επιπλέον επεξεργασία

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα (προσκομίστε το αντίστοιχο πρόγραμμα)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi/4$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Monte Carlo ολοκλήρωσης.

Υπόδειξη: Η μέση τιμή είναι:

$$\langle \pi/4 \rangle = \frac{1}{N} \sum \frac{1}{1+x^2}.$$

Υπολογίστε το σφάλμα και χρησιμοποιήστε 50, 100, 500, 1000, 10000 και 100000 τυχαίους αριθμούς. Πως συγκρίνονται οι τιμές του $\pi/4$ που βρίσκετε και πως συγκρίνονται τα σφάλματα $\delta \langle \pi/4 \rangle$;

5. Αν x_i είναι τυχαίοι αριθμοί με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$ τότε τι δίνει ο μετασχηματισμός $y_i = 1 + x_i^2$; Δικαιολογήστε προσάπτοντας το αντίστοιχο πρόγραμμα και τις κατανομές που προκύπτουν για x_i, y_i .

6. Επαναλάβετε το βήμα 5. χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση βάρους

$$w(x) = \frac{4-2x}{3}$$

Έχει η συνάρτηση αυτή τις σωστές ιδιότητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Η νέα μεταβλητή είναι η $y = x(4-x)/3$. Ποια είναι η τιμή που προκύπτει για $\langle \pi/4 \rangle$ χρησιμοποιώντας 10 και 50 τυχαίους αριθμούς και ποια η αντίστοιχη αβεβαιότητα; Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του βήματος 5.

Πρόγραμμα example1.m

```
% το πρόγραμμα αυτό είναι ένα παράδειγμα
% ομοιόμορφα κατανεμημένοι τυχαίοι αριθμοί μεταξύ 0 και 1
%
Iseed1 = input('Enter random number seed: ');
Nrand = input('number of random numbers to be generated: ');
Nbins = input('Enter number of bins for the histo: ');
%
rand('seed', Iseed1);
l1 = rand(1, Nrand);
```

```

if Nbins < 10
    Nbins = 10;
end
subplot(2,1,1),hist(l1,Nbins),title('distribution of random
numbers'),...
    xlabel('x_i '),...
subplot(2,1,2),hist((1-l1),Nbins),xlabel('1-x_i ')
    m01 = mean(l1);
    sd1 = std(l1);
    var1 = var(l1);
    s12 = 0;
    s22 = 0;
    s23 = 0;
    for j=1:Nbins
        athr1(j) = 0;
    end
    for k=1:Nrand
        s12 = s12 + (((l1(k))-m01)^2) ;
        ibin1 = (round(l1(k) * Nbins)) ;
        ibin2 = (round((l1(k)+(0.5/Nbins)) * Nbins)) ;
        if ibin1 >= ibin2;
            ibin = ibin1;
        else
            ibin = ibin2;
        end
        athr1(ibin) = athr1(ibin) + 1;
    end
    s1 = s12/(Nrand -1) ;
subplot;
for j=1:Nbins
    s22 = s22 + athr1(j);
end
s2 = s22/Nbins;
for j=1:Nbins
    s23 = s23 + (((athr1(j))-s2)^2) ;
end
s3 = sqrt(s23)/(Nbins -1) ;
vary = std(athr1);
sigy = s3;
sigpery = s3/s2;
fprintf('meany = %f \n', s2);
fprintf('sigy = %f \n', s3);
fprintf('percent = %f \n', sigpery);

```

```

%   χρήσιμες εντολές:

```

```

%

```

```

%   disp('κείμενο')           για να δείτε το κείμενο   ή
%   disp(μεταβλητή)         για να δείτε την τιμή της μεταβλητής
%   fprintf('text %f \n',variable);   για να τυπώσετε

```

Πρόγραμμα example2.m

```

% τυχαίοι αριθμοί με gaussian κατανομή μεταξύ 0 και 1
%
Iseed = input('Enter random number seed: ');
Nrand = input('number of random numbers to be generated: ');
Nbins = input('Enter number of bins for the histo: ');
%
randn('seed',Iseed);
l1 = randn(1,Nrand);
if Nbins < 10
    Nbins = 10;
end
hist(l1,Nbins),title('distribution of gaussian distributed
random numbers')
    mol = mean(l1);
    sd1 = std(l1);
fprintf('mean = %f \n',mol);
fprintf('standard deviation = %f \n',sd1);

```

Πρόγραμμα pi1.m

```

% υπολογισμός της τιμής του π
%
Iseed1 = input('Enter random number seed: ');
Iseed2 = input('random number seed for second series: ');
Nrand = input('number of random numbers to be generated: ');
%
rand('seed',Iseed1);
l1 = rand(1,Nrand);
rand('seed',Iseed2);
l2 = rand(1,Nrand);
rand('seed',Iseed1);
coun1 = 0;
for k = 1:Nrand
    athr = ((l1(k))^2 + (l2(k))^2);
    if athr <= 1
        coun1 = coun1 + 1;
    end
end
pi4 = coun1/Nrand;
erpi4 = (1/Nrand)*(sqrt((coun1*(Nrand-coun1)/Nrand) - 1));
fprintf('<pi/4> = %f \n',pi4);
fprintf('delata<pi/4> = %f \n', erpi4);

```

Πρόγραμμα radiodec2.m

```

% neutron decay
%
N0=input('Number of neutrons at t=0: ');
Iseed = input('Random number seed: ');
end_time = input('Enter time t: ');
Nrand = input('Number of random numbers to be generated: ');
%
rand('seed',Iseed);

```

```
Irاند = rand(1,Nrand);
Nund = 0;
Nd = 0;
tend = end_time;
Probt = 1 - exp(-(tend/886.7));
for k = 1:Nrand
    if Probt <= Irاند(k)
        Nund = Nund + 1;
    else
        Nd = Nd + 1;
    end
end
Nundec = round(Nund*N0/Nrand);
fprintf('Number of undecayed neutrons after %i seconds: %i
\n',end_time,Nundec);
```

Άσκηση 5: Μέτρηση του χρόνου ζωής $\tau_{1/2}$ του μιονίου

1.1 Εισαγωγή

Το μίονιο λεπτόνιο και είναι ένας από τους θεμελιώδεις δομικούς λίθους της ύλης. Παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με το ηλεκτρόνιο, εκτός από τη μάζα του που είναι περίπου 210 φορές μεγαλύτερη, γεγονός που το καθιστά ασταθές. Ανακαλύφθηκε το 1937 από τους C.W. Anderson και S.H. Neddermayer¹, όταν αυτοί εξέθεσαν έναν θάλαμο Wilson (cloud chamber)² στην κοσμική ακτινοβολία. Πρώτος ο F. Rasetti³ το 1941 έδειξε ότι το μίονιο έχει πεπερασμένο χρόνο ζωής και έδωσε μία πρώτη εκτίμηση του χρόνου αυτού.

Η πειραματική διάταξη που περιγράφεται σε αυτόν τον οδηγό επιτρέπει τη μέτρηση του μέσου χρόνου ζωής μιονίων σε πλαστικό σπινθηριστή και της σχετικής ροής μιονίων, ενώ παρέχει και τη δυνατότητα μίας ποιοτικής διαπίστωσης του φαινομένου της διαστολής του χρόνου όπως αυτό προβλέπεται από την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Σκοπός της άσκησης αυτής είναι η εισαγωγή των φοιτητών στη φυσική μιονίων, η εξοικείωση με την αρχή λειτουργίας του ανιχνευτή και ο πειραματικός προσδιορισμός του μέσου χρόνου ζωής των κοσμικών μιονίων.

1.2 Θεωρία

1.2.1 Η πηγή μιονίων...

Τα ανώτερα στρώματα της γήινης ατμόσφαιρας βομβαρδίζονται συνεχώς από φορτισμένα σωματίδια υψηλής ενέργειας, τη λεγόμενη κοσμική ακτινοβολία (υπερ)υψηλής ενέργειας ((Ultra)High-Energy Cosmic Rays). Τα σωματίδια αυτά παράγονται σε διάφορες πηγές στο σύμπαν μέσω μηχανισμών που δεν είναι ακόμα πλήρως κατανοητοί. Η κοσμική ακτινοβολία απαρτίζεται κατά 98% περίπου από πρωτόνια και σωματίδια-α (περίπου 87% πρωτόνια και 12% σωματίδια-α) και κατά 2% από ηλεκτρόνια, ακτίνες-γ, νετρίνα και βαρύτερους πυρήνες που προέρχονται από πυρηνοσύνθεση στο εσωτερικό άστρων, αν και πρέπει να σημειωθεί ότι οι αναλογίες αυτές μεταβάλλονται με την ενέργεια των σωματιδίων.

Η σύγκρουση της κοσμικής ακτινοβολίας με τους πυρήνες των αερίων της ατμόσφαιρας (κυρίως πυρήνες άζωτου και οξυγόνου) παράγει καταιγισμούς (showers) σωματιδίων που περιλαμβάνουν πρωτόνια, νετρίνα, πόνια (φορτισμένα και ουδέτερα), καόνια, φωτόνια, ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.1.

Αυτά τα δευτερεύοντα σωματίδια υφίστανται διάφορες ηλεκτρομαγνητικές και πυρηνικές αλληλεπιδράσεις που έχουν ως αποτέλεσμα την παραγωγή επιπλέον σωματιδίων σε μια διαδικασία καταιγισμού. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα φορτισμένα πόνια που παράγονται. Μερικά από αυτά θα αλληλεπιδράσουν ισχυρά με μόρια της ατμόσφαιρας, αλλά ένα μέρος τους θα διασπαστεί αυθόρμητα μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης σε ένα μίονιο και ένα (αντι)νετρίνο.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu \quad (1.1)$$

και αντίστοιχα,

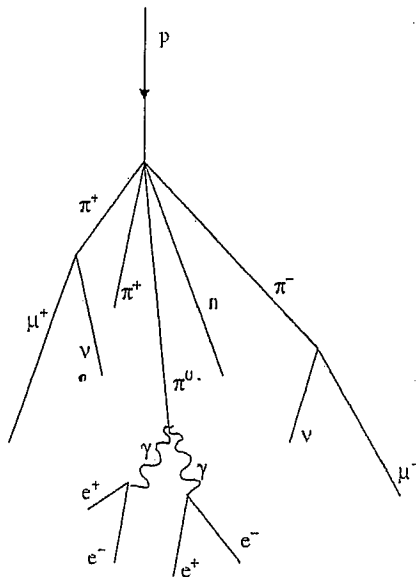
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu} \quad (1.2)$$

Τα μίονια αυτά είναι και η πηγή μιονίων που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτό το πείραμα!

¹S.H. Neddermayer, C.W. Anderson, Phys. Rev. 51, 884
<http://web.ihep.su/dbserve/compas/src/neddermayer37/eng.pdf>

²Ο θάλαμος Wilson των Anderson και Neddermayer:
<http://www.orau.org/PTP/collection/Miscellaneous/cloudchamber.htm>

³F. Rasetti, Phys. Rev. 59, 613
<http://web.ihep.su/dbserve/compas/src/rasetti41/eng.pdf>



Σχήμα 1.1: Καταιγισμός σωματιδίων (shower) από αλληλεπίδραση πρωτονίου κοσμικής ακτινοβολίας με πυρήνα ενός ατμοσφαιρικού μορίου

Τα σωματίδια που παράγονται στην ανώτερη ατμόσφαιρα δε φτάνουν όλα στην επιφάνεια της γης λόγω της αλληλεπίδρασής τους με τους ατμοσφαιρικούς πυρήνες και της αυθόρμητης τους διάσπασης. Η ροή μιονίων στο επίπεδο της θάλασσας είναι περίπου 1 μόνιο ανά λεπτό ανά cm^2 με μέση κινητική ενέργεια περί τα $4GeV$ και αντιπροσωπεύει το μεγαλύτερο μέρος της ροής φορτισμένων σωματιδίων κοντά στην επιφάνεια της Γης.

Η προσεκτική μελέτη του φαινομένου δείχνει ότι το μέσο υψόμετρο παραγωγής των μιονίων που ανιχνεύονται στο επίπεδο της θάλασσας είναι τα $15km$ περίπου. Κινούμενα σχεδόν με την ταχύτητα του φωτός, χάνουν περίπου $2GeV$ κινητικής ενέργειας λόγω ιονισμού μέχρι να φτάσουν στην επιφάνεια της γης μετά από χρόνο περί τα $50 \mu s$. Δεδομένου ότι ο χρόνος ζωής μιονίων σε ηρεμία είναι 20 φορές περίπου μικρότερος, η ανίχνευση ροής μιονίων στην επιφάνεια της γης αποτελεί συνέπεια του φαινομένου της σχετικιστικής διαστολής του χρόνου.

1.2.2 Κατανομή του χρόνου διάσπασης μιονίων

Η μαθηματική περιγραφή του χρόνου διάσπασης των μιονίων είναι απλή. Υποθέτουμε ότι έχουμε $N(t)$ μιονία τη χρονική στιγμή t . Τότε, αν λ είναι η σταθερά διάσπασης των μιονίων, η πιθανότητα να διασπαστεί ένα μόνιο σε μικρό χρόνο dt είναι $\lambda \cdot dt$, με επακόλουθη μείωση του πληθυσμού κατά $dN = -N(t) \cdot \lambda \cdot dt$, ή αλλιώς:

$$\frac{dN}{N(t)} = -\lambda dt \quad (1.3)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.3) κανείς έχει:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1.4)$$

όπου N_0 ο πληθυσμός μιονίων τη χρονική στιγμή $t = 0$. Παρατηρούμε ότι η ανάλυση αυτή ταυτίζεται με την περιγραφή των ραδιενεργών διασπάσεων. Ο μέσος χρόνος ζωής τ των μιονίων ορίζεται ως το αντίστροφο της σταθεράς διάσπασης, δηλαδή $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Για να ανταποκρίνεται, ωστόσο, η περιγραφή αυτή στην ανιχνευτική μας διάταξη πρέπει να λάβουμε υπόψιν το γεγονός ότι εδώ δεν έχουμε έναν δεδομένο πληθυσμό μιονίων περιορισμένο εντός του όγκου του ανιχνευτή,

αλλά ανιχνεύουμε διασπάσεις μιονίων που εισέρχονται στον ανιχνευτή σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Αυτό δεν αλλάζει φυσικά το γεγονός ότι ο χρόνος διάσπασης ακολουθεί τον απλό νόμο της εκθετικής μείωσης που περιγράφηκε παραπάνω. Οδηγούμαστε, όμως, στο να θεωρήσουμε ένα νέο μέγεθος, την κατανομή του χρόνου διάσπασης $D(t)$ (decay time distribution), όπου η ποσότητα $D(t) \cdot dt$ εκφράζει τη χρονοεξαρτώμενη πιθανότητα πραγματοποίησης μιας διάσπασης στο χρόνο μεταξύ t και $t + dt$.

Διαφορίζοντας το νόμο της εκθετικής μείωσης (σχέση (1.4)) παίρνουμε:

$$-dN = N_0 \lambda e^{-\lambda t} dt \Rightarrow -\frac{dN}{N_0} = \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (1.5)$$

όπου ο λόγος $\frac{dN}{N_0}$ εκφράζει το μέρος του αρχικού πληθυσμού μιονίων N_0 που διασπάται μεταξύ χρόνου t και $t + dt$. Προκύπτει έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ότι $D(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$. Παρατηρούμε ότι η $D(t)$ είναι ανεξάρτητη του αρχικού πληθυσμού μιονίων N_0 καθώς και ότι η κατανομή είναι επίσης εκθετική με τον ίδιο εκθετικό παράγοντα που περιγράφει τον επιζώντα πληθυσμό μιονίων. Όπως και παραπάνω, τον μέσο χρόνο ζωής των μιονίων εκφράζει η ποσότητα $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Σημειώνεται πως το γεγονός ότι τα μίονια των οποίων ανιχνεύουμε τη διάσπαση δεν παράγονται μέσα στον ανιχνευτή, αλλά υψηλότερα στην ατμόσφαιρα, δεν παίζει ρόλο στις μετρήσεις μας, αφού ο χρόνος διάσπασης των μιονίων ακολουθεί εκθετική κατανομή: η μορφή της εκθετικής μείωσης είναι η ίδια ανεξαρτήτως του χρόνου στον οποίο την παρατηρούμε.⁴

1.2.3 Η αρχή λειτουργίας του ανιχνευτή

Ο ενεργός όγκος του ανιχνευτή είναι ένας πλαστικός σπινθηριστής κυλινδρικού σχήματος, διαμέτρου 15 cm και ύψους 12.5 cm τοποθετημένος στον πυθμένα του μαύρου κυλίνδρου ανοδιομένου κράμματος αλουμινίου. Ο πλαστικός σπινθηριστής είναι ένα διαφανές οργανικό υλικό που κατασκευάζεται με ανάμιξη ενός ή περισσότερων φθοριτών με έναν στερεό πλαστικό διαλύτη με δομή αρωματικού δακτυλίου.

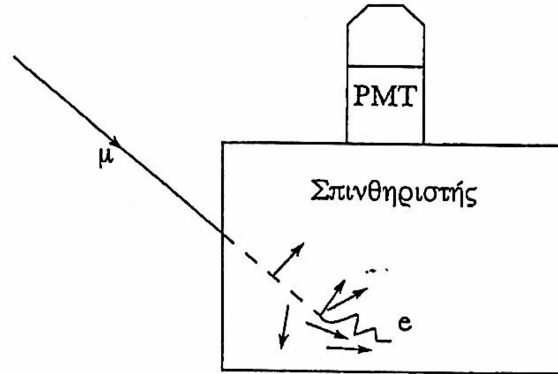
Ένα φορτισμένο σωματίδιο που διέρχεται από τον σπινθηριστή χάνει μέρος της κινητικής του ενέργειας λόγω ιονισμού ή/και διεγέρσης των ατόμων του σπινθηριστή. Μέρος της ενέργειας αυτής μεταφέρεται στα άτομα των φθοριτών, τα ηλεκτρόνια των οποίων διεγείρονται σε υψηλότερες ηλεκτρονιακές στάθμες. Η επακόλουθη αποδιέγερσή τους οδηγεί στην εκπομπή φωτονίων στο μπλε και ιώδες τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος με χαρακτηριστικούς χρόνους αποδιέγερσης των μερικών ns. Τυπική τιμή της απόδοσης ενός πλαστικού σπινθηριστή είναι εκπομπή ενός οπτικού φωτονίου ανά 100 eV αποτιθέμενης ενέργειας.

Για τη μέτρηση του χρόνου ζωής του μιονίου μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε μόνο εκείνα τα μίονια που εισέρχονται, επιβραδύνονται, σταματούν και διασπώνται εντός του ανιχνευτή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.2. Τα μίονια αυτά έχουν κατά την είσοδό τους στον ανιχνευτή κινητική ενέργεια μέχρι περίπου 160 MeV, αφού μίονια με μεγαλύτερη ενέργεια θα διαφύγουν από τον ανιχνευτή πριν εναποθέσουν όλη τους την ενέργεια. Καθώς το μίονιο επιβραδύνεται και σταματά, ο διεγερμένος σπινθηριστής εκπέμπει φωτόνια που ανιχνεύονται από τον φωτοπολλαπλασιαστή (PMT) προκαλώντας ένα λογικό σήμα που εκκινεί ένα χρονόμετρο (βλ. παράγραφο 3.1). Το μίονιο σε ηρεμία διασπάται μετά από ένα μικρό χρόνο σε ένα ηλεκτρόνιο ή ποζιτρόνιο, ένα νεutrino και ένα αντινεutrino (βλ. επόμενη ενότητα). Λόγω της πολύ μικρότερης του μάζας ($m_\mu/m_e \cong 210$), το ηλεκτρόνιο είναι πολύ πιο ενεργητικό και προκαλεί σπινθηρισμούς πρακτικά καθ' όλο το μήκος της διαδρομής του. Φυσικά, μέρος της ενέργειας του μιονίου προσλαμβάνεται από τα (αντι)νεutrino, η ανίχνευση, ωστόσο, των οποίων είναι εντελώς αδύνατη με τον ανιχνευτή αυτόν. Τα φωτόνια που παράγονται από τα ηλεκτρόνια ανιχνεύονται από τον φωτοπολλαπλασιαστή προκαλώντας με τη σειρά τους ένα σήμα που σταματά το χρονόμετρο. Το σύστημα καταγραφής καταχωρεί τις χρονικές διαφορές μεταξύ δύο διαδοχικών

⁴Πιο αυστηρά, αυτή η ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης μπορεί να εκφραστεί ως εξής: ο χρόνος που χρειάζεται ώστε η τιμή της να μειωθεί e -φορές είναι ο ίδιος και ίσος με τ ανεξαρτήτως από το χρονικό διάστημα στο οποίο την μελετάμε. Πράγματι:

$$\frac{N_0}{e} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow t = 1/\lambda \equiv \tau, \forall t$$

ενεργοποιήσεων και απενεργοποιήσεων του χρονομέτρου που αντιστοιχούν πρακτικά στο χρόνο διάσπασης των αντίστοιχων μιονίων.



Σχήμα 1.2: Η αλληλεπίδραση μιονίου - ανιχνευτή

1.2.4 Αλληλεπίδραση των μιονίων με την ύλη

Είναι προφανές ότι η ανίχνευση των μιονίων προϋποθέτει την αλληλεπίδρασή τους με το υλικό του ενεργού όγκου του ανιχνευτή, κάτι που φυσικά ισχύει για κάθε ανιχνευτικό σύστημα σωματιδίων. Πώς όμως αλληλεπιδρούν τα μίονια με την ύλη;

Τα μίονια χάνουν ενέργεια κυρίως μέσω ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων, δηλαδή μέσω ιονισμού, ακτινοβολίας πέδησης (bremsstrahlung), δημιουργία ζευγών ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου (pair production) και φωτοπυρηνικών αλληλεπιδράσεων. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.3, για ενέργειες κάτω από 100 GeV υπερισχύει ο μηχανισμός απώλειών ενέργειας μέσω ιονισμού. Οι απώλειες αυτές περιγράφονται από τη γνωστή εξίσωση Bethe-Bloch που δίνει για σωματίδιο δεδομένης αρχικής ενέργειας την απώλεια ενέργειας ανά μονάδα μήκους διαδρομής dE/dx εντός δεδομένου υλικού. Από την εξίσωση Bethe-Bloch μπορεί κανείς να εξάγει την εμβέλεια των μιονίων μέσα στο σπινθηριστή ώστε να καταλήξει στη μέγιστη τιμή που δώσαμε παραπάνω για την κινητική ενέργεια των μιονίων που θα εναποθέσουν όλη τους την ενέργεια μέσα στον ανιχνευτή.

Η διάσπαση των μιονίων πραγματοποιείται κυρίως μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης:

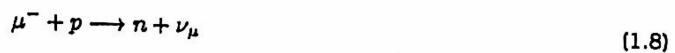


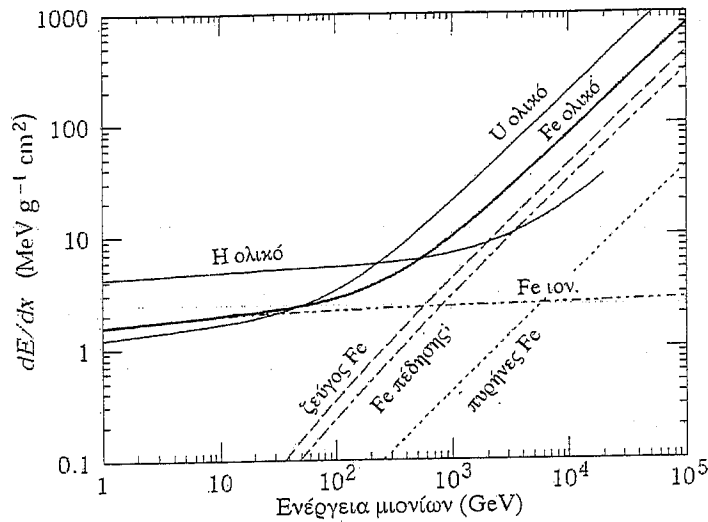
και:



Ενώ, όμως, τα θετικά φορτισμένα μίονια απλώς «περιμένουν» να διασπαστούν από την ώρα που θα σταματήσουν μέσα στον ανιχνευτή, τα αρνητικά μίονια είναι δυνατόν να δεσμευτούν από άτομα του ανιχνευτή και να δημιουργήσουν μιονικά άτομα καταλαμβάνοντας θέση σε κάποια ηλεκτρονιακή στιβάδα.

Η απαγορευτική αρχή του Pauli δεν απαγορεύει την κατάληψη από μίονιο στάθμης ήδη κατειλημμένης από ατομικό ηλεκτρόνιο. Ένα τέτοιο δέσμιο αρνητικό μίονιο έχει λόγω της μεγάλης του μάζας μία ακτίνα Bohr περίπου 200 φορές μικρότερη από αυτήν του ηλεκτρονίου και έτσι, έχοντας φτάσει σε σχετικά σύντομο -ως προς το χρόνο ζωής του- χρόνο στην K-στιβάδα, ενδέχεται να αλληλεπιδράσει ασθενώς με ένα πρωτόνιο του πυρήνα προτού διασπαστεί:





Σχήμα 1.3: Εμβέλεια των μιονίων συναρτήσει της ενέργειας. (Πηγή: *Review of Particle Physics, Particle Data Group*, <http://pdg.lbl.gov/2008/download/rpp-2008-plB667.pdf>)

Η πιθανότητα ένα μίονιο να βρεθεί εντός του πυρήνα είναι ανάλογη του κύβου του ατομικού αριθμού Z , ενώ η πιθανότητα το μίονιο να συναντήσει ένα πρωτόνιο εντός του πυρήνα είναι ανάλογη του αριθμού των πρωτονίων. Συνολικά, επομένως, η πιθανότητα ένα μίονιο να αλληλεπιδράσει με ένα πρωτόνιο του πυρήνα είναι ανάλογη του Z^4 .

Η ύπαρξη δύο καναλιών (τρόπων) διάσπασης των αρνητικών μιονίων σε αντίθεση με το μοναδικό κανάλι διάσπασης των θετικών έχει ως αποτέλεσμα ο χρόνος ζωής των αρνητικών μιονίων να είναι κατά τι μικρότερος του χρόνου ζωής των θετικών. Η πειραματική μας διάταξη, ωστόσο, δεν είναι σε θέση να κάνει αυτόν το διαχωρισμό και έτσι ο χρόνος ζωής που θα προσδιοριστεί θα αποτελεί έναν μέσο όρο επί του φορτίου και θα είναι μικρότερος από την αποδεκτή τιμή του χρόνου ζωής του μιονίου στο κενό $\tau_\mu = 2.19703 \pm 0.00004$ μs.

1.2.5 Ο λόγος φορτίου μ^+/μ^- στην επιφάνεια της γης

Όπως είδαμε παραπάνω, η μέτρηση του μέσου χρόνου ζωής των μιονίων μέσα στον πλαστικό σπινθηριστή είναι ουσιαστικά η μέτρηση της μέσης τιμής του χρόνου ζωής των θετικά και αρνητικά φορτισμένων μιονίων. Τα μ^- έχουν μέσο χρόνο ζωής λίγο μικρότερο από τα μ^+ λόγω των ασθενών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μ^- και των πρωτονίων των πυρήνων του σπινθηριστή (βλ. παράγραφο 2.5). Η πιθανότητα της αλληλεπίδρασης αυτής είναι ανάλογη του Z^4 , συνεπώς ο μέσος χρόνος ζωής των αρνητικών μιονίων μέσα στον σπινθηριστή (τ^-) πρέπει να είναι περίπου ίσος με τον μέσο χρόνο ζωής τους μέσα σε άνθρακα (βλ. παράγραφο 2.4) ο οποίος έχει μετρηθεί ίσος με $\tau_c = 2.043 \pm 0.003$ μs.⁵

Είναι εύκολο να καθοριστεί ο αναμενόμενος μέσος χρόνος ζωής τ_{obs} των θετικών και αρνητικών μιονίων μέσα στον σπινθηριστή. Έστω λ^- , λ^+ οι σταθερές διάσπασης των αρνητικών και θετικών μιονίων αντίστοιχα, μέσα σε πλαστικό σπινθηριστή. Αν N^- και N^+ είναι αντίστοιχα ο αριθμός των αρνητικών και θετικών μιονίων που προσπίπτουν στον πλαστικό σπινθηριστή στη μονάδα του χρόνου, τότε η μέση σταθερά διάσπασης $\langle \lambda \rangle$ που παρατηρείται δίνεται από τον τύπο:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{N^+ \lambda^+ + N^- \lambda^-}{N^+ + N^-} \quad (1.9)$$

⁵R.A. Reiter et al., Precise Measurements of the Mean Lives of μ^+ and μ^- Mesons in Carbon, *Phys. Rev. Lett.* 5, 22 - 23 (1960)
http://prola.aps.org/abstract/PRL/v5/i1/p22_1

Θέτοντας στην εξίσωση (1.9) $\rho \equiv N^+/N^-$ εύκολα καταλήγει κανείς ότι ο αντίστοιχος μέσος χρόνος ζωής των μιονίων δίνεται από τον τύπο:

$$\tau_{obs} = (1 + \rho) \cdot \left(\frac{1}{\tau^-} + \frac{\rho}{\tau^+} \right)^{-1} \quad (1.10)$$

όπου $\tau^- \equiv (\lambda^-)^{-1}$ και $\tau^+ \equiv (\lambda^+)^{-1}$ είναι ο μέσος χρόνος ζωής των αρνητικών και θετικών μιονίων αντίστοιχα μέσα στον ανιχνευτή.

Όπως προαναφέρθηκε, μπορεί να θεωρηθεί $\tau^- = \tau_c$ και όσον αφορά στον τ^+ , μπορεί να τεθεί ίσος με τον μέσο χρόνο ζωής των μιονίων στον κενό χώρο, τ_μ , αφού τα θετικά μίονια δε συλλαμβάνονται από τους πυρήνες του σπινθηριστή.

Για να προσδιοριστεί το ρ για το εύρος των ορμών των μιονίων που σταματούν μέσα στον σπινθηριστή, μπορεί να λυθεί ως προς ρ η σχέση (1.10), οπότε θα έχουμε:

$$\rho = -\frac{\tau^+}{\tau^-} \left(\frac{\tau^- - \tau_{obs}}{\tau^+ - \tau_{obs}} \right) \quad (1.11)$$

1.2.6 Υπόβαθρο

Ο ανιχνευτής μπορεί να ανιχνεύσει μόνο τα σωματίδια τα οποία ξεπερνούν ένα ενεργειακό κατώφλι κατά την πρόσπασή τους στον σπινθηριστή. Τα σωματίδια αυτά μπορεί να είναι είτε φορτισμένα, όπως ηλεκτρόνια (e^-) ή μίονια (μ), είτε ουδέτερα, όπως τα φωτόνια, τα οποία «παράγουν» άλλα φορτισμένα σωματίδια όταν αλληλεπιδρούν με το υλικό του σπινθηριστή. Είναι προφανές ότι ο ανιχνευτής δεν είναι δυνατόν να έχει άμεση γνώση του αν ένα σωματίδιο σταματά ή όχι μέσα στον σπινθηριστή, και επομένως, δεν μπορεί να διαχωρίσει μεταξύ των μιονίων τα οποία εισέρχονται και διασπώνται μέσα στον σπινθηριστή, και των μιονίων τα οποία διέρχονται μέσα από όλη τη διάταξη και απομακρύνονται, χωρίς να διασπαστούν.

Αυτή η-πολύ σημαντική πηγή «γεγονότων υποβάθρου» (background events) μπορεί να υπολογιστεί και να αφαιρεθεί από τους υπολογισμούς με δύο τρόπους:

- Αφενός, μπορούμε να περιορίσουμε το χρονικό διάστημα στο οποίο αναμένουμε τους δύο χαρακτηριστικούς διαδοχικούς παλμούς στον φωτοπολλαπλασιαστή
- Αφετέρου, μπορούμε να εκτιμήσουμε το υπόβαθρο παρατηρώντας το ιστόγραμμα μας στην περιοχή μεγάλων χρόνων, όπου δε θα υπάρχουν πραγματικά γεγονότα.

1.2.7 Σταθερά σύζευξης Fermi

Τα μίονια διασπώνται μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Η **σταθερά σύζευξης Fermi** είναι ένα μέτρο της έντασης της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Σε μια καλή προσέγγιση, η σχέση ανάμεσα στο χρόνο ημιζωής του μιονίου, τ , και την σταθερά σύζευξης Fermi, G_F , είναι:

$$\tau = \frac{192 \cdot \pi^3 \hbar^7}{G_F m^5 c^4} \quad (1.12)$$

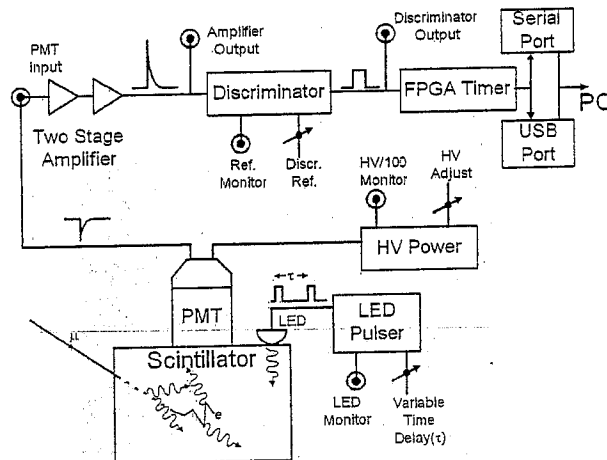
όπου η μάζα m είναι η μάζα του μιονίου, η οποία μπορεί να βρεθεί στη διεθνή βιβλιογραφία⁶ ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα είναι γνωστά.

⁶Για παράδειγμα στη διεύθυνση <http://pdg.lbl.gov/>

1.3 Πειραματική Διάταξη

1.3.1 Ηλεκτρονικά

Ένα σχηματικό διάγραμμα της ηλεκτρονικής διάταξης ανάγνωσης, συνοδευόμενο από τη μορφή των αντίστοιχων εμφανιζόμενων παλμών εξόδου, παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.4. Η λογική της επεξεργασίας του σήματος είναι απλή. Το φως του σπινθηριστή ανιχνεύεται από ένα φωτοπολλαπλασιαστή (PMT) του οποίου το σήμα εξόδου τροφοδοτεί έναν ενισχυτή. Στην συνέχεια η έξοδος του ενισχυτή τροφοδοτεί με την σειρά της έναν διευκρινιστή με ρυθμιζόμενο κατώφλι. Ο διευκρινιστής παράγει έναν TTL⁷ παλμό εξόδου για σήματα εισόδου πάνω από το εκάστοτε κατώφλι και αυτός ο παλμός ενεργοποιεί ένα FPGA⁸ κύκλωμα χρόνου (timing circuit). Ένας δεύτερος TTL παλμός που φτάνει στην είσοδο FPGA, εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος, θα κλείσει το κύκλωμα χρόνου και θα το επαναφέρει στις αρχικές του συνθήκες (για την επαναφορά αυτή απαιτείται περίπου 1 ms και κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος ο ανιχνευτής δεν λειτουργεί (dead time)). Το χρονικό διάστημα μεταξύ της έναρξης και της λήξης του παλμού (παλμοί «start» και «stop») είναι η πληροφορία που αποστέλλεται στον υπολογιστή και η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του χρόνου ζωής των μιονίων. Στην περίπτωση που δεν φτάσει ένας δεύτερος TTL παλμός μέσα στο χρονικό διάστημα που έχουμε εμείς ορίσει, τότε το κύκλωμα χρόνου θα σβήσει από την μνήμη του τον πρώτο παλμό και θα αναμένει την επόμενη μέτρηση.



Σχήμα 1.4: Σχηματικό διάγραμμα της ηλεκτρονικής ανάγνωσης μιονίων. Τα σήματα εξόδου του ενισχυτή (Amplifier) και του διευκρινιστή (Discriminator) είναι διαθέσιμα στον κεντρικό πίνακα επιλογών του κιβωτίου ηλεκτρονικής. Η πηγή υψηλής τάσης (HV) είναι ενσωματωμένη στο σωλήνα ανίχνευσης.

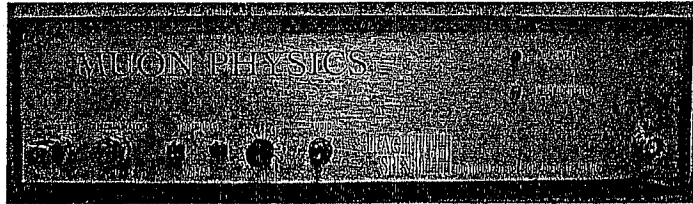
Η μπροστινή πλευρά του κιβωτίου ηλεκτρονικών παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.5. Την έξοδο του ενισχυτή την λαμβάνουμε μέσω του BNC υποδοχέα που ονομάζεται «Amplifier output». Ομοίως, την έξοδο του διευκρινιστή την λαμβάνουμε μέσω του BNC υποδοχέα που ονομάζεται «Discriminator output». Η τάση του διευκρινιστή που ορίζει το κατώφλι της μέτρησης, καθορίζεται μέσω του ρυθμιστή «Threshold control». Μπορούμε να ελέγξουμε την τιμή της τάσης κάθε στιγμή με την χρήση ενός πολυμέτρου, το οποίο συνδέουμε με τον κόκκινο και μαύρο υποδοχέα. Ο διακόπτης (Audio/OFF) ελέγχει έναν βομβητή (beeper), που ηχεί όταν ένα σήμα του ενισχυτή είναι πάνω από το κατώτατο όριο του διευκρινιστή. Το beeper μπορεί και να απενεργοποιηθεί.

Η πίσω πλευρά του κιβωτίου ηλεκτρονικών παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.6. Μια πρόσθετη ασφάλεια είναι τοποθετημένη μέσα στο διακόπτη τάσης.

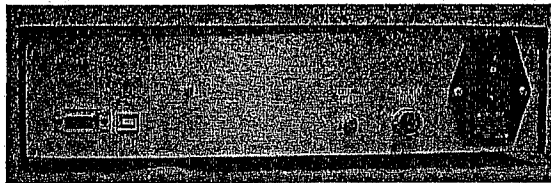
Η Εικόνα 1.7 παρουσιάζει την κορυφή του κυλινδρικού ανιχνευτή. Ο ανιχνευτής τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση μέσω του κουτιού των ηλεκτρονικών με τον υποδοχέα DC Power. Η υψηλή τάση (HV) του φωτοπολλαπλασιαστή ρυθμίζεται γυρνώντας τον προσαρμογέα που βρίσκεται στο πάνω μέρος του ανιχνευτή (HV adj). Μπορούμε και πάλι να ελέγξουμε την τιμή της τάσης με την χρήση ενός πολυμέτρου, το οποίο

⁷ Transistor-transistor logic (TTL)

⁸ field-programmable gate array (FPGA)

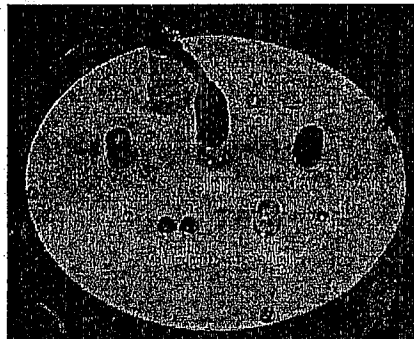


Σχήμα 1.5: Μπροστινή πλευρά του κιβωτίου ηλεκτρονικών.



Σχήμα 1.6: Πίσω πλευρά του κιβωτίου ηλεκτρονικών. Οι θύρες (σειριαλ/ΥΣΒ) επικοινωνίας με το PC φαίνονται αριστερά. Χρησιμοποιήστε μόνο την μία.

συνδέουμε με τον κόκκινο και μαύρο υποδοχέα. **ΠΡΟΣΟΧΗ: Η τάση που παρατηρούμε είναι το 1/100 της υψηλής τάσης που εφαρμόζουμε στον φωτοπολλαπλασιαστή.**



Σχήμα 1.7: Πάνω μέρος του καπακιού του ανιχνευτή. Εδώ βρίσκονται τα ποτενσιόμετρα ρύθμισης HV και οι θύρες ελέγχου για το PMT.

Ένας παλμικός ταλαντωτής ενεργοποιεί μια φωτοδίοδο (LED) που βρίσκεται ενσωματωμένη στο σωλήνα ανίχνευσης του σπινθηριστή. Ενεργοποιείται από το διακόπτη παλμών (pulser) στην κορυφή του ανιχνευτή. Η παλμική φωτοδίοδος παράγει ζευγάρια παλμών σε σταθερή συχνότητα 100Hz, ενώ ο χρόνος μεταξύ των δύο παλμών του ζεύγους, ρυθμίζεται με τον ρυθμιστή «Time Adj». Η τάση εξόδου του ταλαντωτή μπορεί να παρατηρηθεί στην έξοδο «Pulse Output».

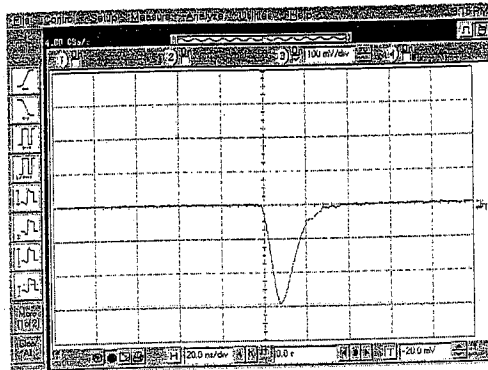
Παράδειγμα σήματος εξόδου κατευθείαν από το PMT σε ένα φόρτο 50Ω φαίνεται στην Εικόνα 1.8.

Η Εικόνα 1.9 παρουσιάζει παλμούς εξόδου του ενισχυτή και του διευκρινιστή αντίστοιχα.

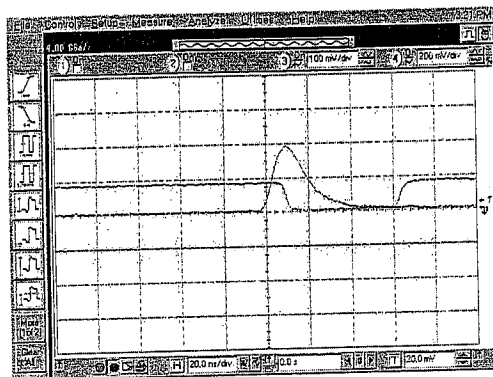
1.3.2 Το λογισμικό και το περιβάλλον αλληλεπίδρασης με το χρήστη

Γενικές Πληροφορίες

Το λογισμικό χρησιμοποιείται για τον έλεγχο των οργάνων, την καταγραφή και την επεξεργασία των δεδομένων. Υπάρχει επίσης λογισμικό για την προσομοίωση δεδομένων μιονικών διασπάσεων. Όλο το



Σχήμα 1.8: Άμεσα παραγόμενος από το PMT παλμός σε αντίσταση 50Ω. Η οριζόντια κλίμακα είναι 20 ns/div και η κάθετη κλίμακα είναι 100 mV/div.



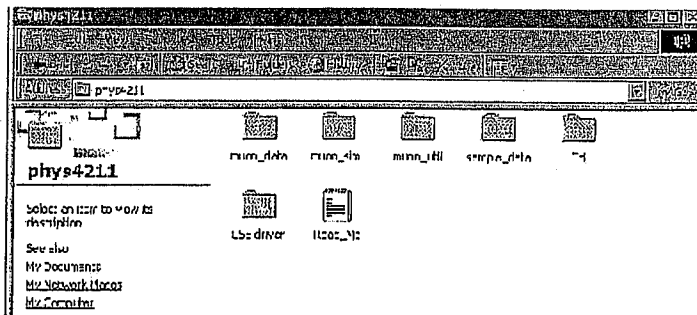
Σχήμα 1.9: Παλμός εξόδου ενισχυτή από το σήμα εισόδου της Εικόνας 1.8 και ο αντίστοιχος παραγόμενος παλμός εξόδου του διευκρινιστή. Η οριζόντια κλίμακα είναι 20 ns/div και η κάθετη είναι 100 mV/div (έξοδος ενισχυτή) και 200 mV/div (έξοδος διευκρινιστή)

λογισμικό περιλαμβάνεται στο CD που συνοδεύει τα όργανα και μπορεί επίσης να αποκτηθεί ελεύθερα από το <http://www.muon.edu>. (για λειτουργικά Microsoft Windows και Linux). Ο πηγαίος κώδικας για το περιβάλλον αλληλεπίδρασης με το χρήστη και το λογισμικό προσαρμογής γραμμής τάσης (fitting) των δεδομένων έχει γραφεί σε γλώσσα προγραμματισμού Tcl/Tk, που παρέχεται. Εντός του CD θα πρέπει να βρείτε τους φακέλους και υποκαταλόγους που παρουσιάζονται στην Εικόνα 1.10.

Όλο το λογισμικό μπορεί να εκτελεσθεί είτε απευθείας από το CD είτε αντιγράφοντάς τα περιεχόμενά του CD στο δίσκο του υπολογιστή. Το λογισμικό προσομοίωσης διάσπασης μιονίων μπορεί να εκτελεσθεί και χωρίς την ύπαρξη ανιχνευτή. Πρέπει να αντιγράψετε και τους έξι φακέλους του CD σε έναν κατάλληλο φάκελο. Στον Πίνακα 1.1 απαριθμούνται οι φάκελοι και περιγράφεται το λογισμικό που περιέχουν.

Όνομα Φακέλου	Περιγραφή
muon_data	Κυρίως εκτελέσιμο και αρχεία δεδομένων
muon_simu	Πρόγραμμα προσομοίωσης και προσομοιωμένα δεδομένα
muon_util	Χρήσιμα προγράμματα
sample_data	Αρχείο/α δεδομένων μέτρησης
Tcl	Πηγαίος κώδικας περιβάλλοντος αλληλεπίδρασης με το χρήστη
USB Driver	Οδηγοί USB για επικοινωνία με το PC

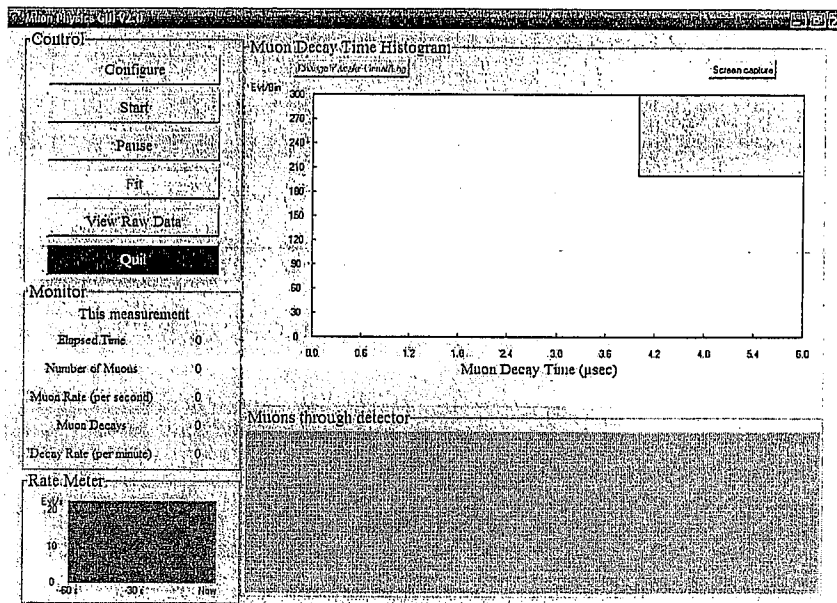
Πίνακας 1.1: Περιγραφή των φακέλων στο CD



Σχήμα 1.10: Φάκελοι του CD: Muon Physics

Περιγραφή του προγράμματος

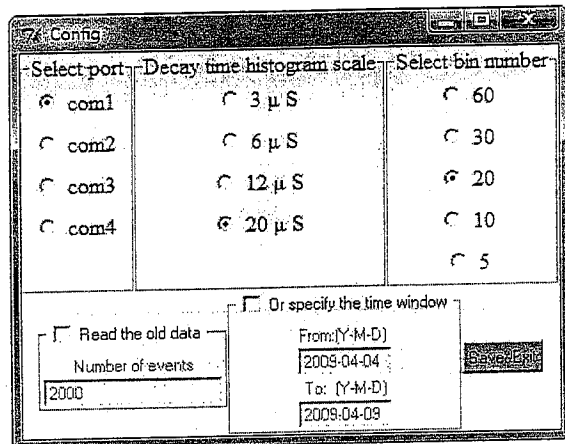
Εκτελώντας το αρχείο μυον.exe έχουμε τη βασική κονσόλα του προγράμματος. Αυτή, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 1.11, χωρίζεται στα επιμέρους τμήματα: Control, Monitor, Rate Meter και στο τμήμα με τα ιστογράμματα (των μιονίων που απλά πέρασαν από τον ανιχνευτή και αυτών που διασπάρστηκαν μέσα στο ενεργό υλικό του ανιχνευτή).



Σχήμα 1.11: Η βασική κονσόλα του προγράμματος

Από το control (βλέπε Εικόνα 1.12) μπορούμε να παραμετροποιήσουμε το πρόγραμμα. Στην αρχή διαλέγουμε το port επικοινωνίας, ενώ στη δεύτερη στήλη διαλέγουμε την κλίμακα που θέλουμε να έχουμε στον οριζόντιο άξονα.

Από μόνο του το πρόγραμμα έχει προεπιλεγμένη την τιμή 20 μs . Στην τελευταία στήλη διαλέγουμε το bin size για το ιστόγραμμα. Με το Start κουμπί ξεκινάει η λήψη μετρήσεων. Αν το πρόγραμμα έχει συνδεθεί με τον ανιχνευτή θα πρέπει να δούμε κινητικότητα στο Rate Meter. Με το Pause σταματάμε προσωρινά τη λήψη μετρήσεων δίχως να κλείνουμε το αρχείο, ενώ η επανέναρξη γίνεται ξανά με το Pause. Το fit για να χρησιμοποιηθεί θέλει να εισάγετε τον κωδικό «μυον». Τα δεδομένα στο Decay Time Histogram προσαρμόζονται (fit) και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην πάνω δεξιά γωνία του ιστογράμματος. Κάθε φορά που το πρόγραμμα λαμβάνει μια νέα μέτρηση υπολογίζει εκ νέου το fit αυτόματα. Με το Quit σταματάει η μέτρηση



Σχήμα 1.12: Η Εικόνα του control

και ο χρήστης επιλέγει αν θέλει να αποθηκευτούν τα δεδομένα. Η κατάληξη του αρχείου-output είναι .data.

Τα δεδομένα που αποθηκεύονται μετά από κάθε μέτρηση είναι οργανωμένα σε δυο στήλες. Η πρώτη στήλη αποτελείται από θετικούς ακέραιους αριθμούς. Αν ο αριθμός είναι μικρότερος από το 40000 τότε είναι ο μετρούμενος χρόνος διάσπασης σε ns. Μόνο αυτοί οι χρόνοι εισέρχονται στο ιστόγραμμα του χρόνου διάσπασης. Αν ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από 40000 τότε δηλώνει απλά ότι πέρασε σωματίδιο αλλά δε διασπάστηκε. Η δεύτερη στήλη δηλώνει το χρόνο που συνέζη η μέτρηση, μετρούμενο σε δευτερόλεπτα από την 1 Ιανουαρίου του 1970 (00:00:00 1970 – 01 – 01 UTC) (Unix Time).

Χρήσιμα Προγράμματα

Ο φάκελος muon_util περιέχει πολλά χρήσιμα προγράμματα που διευκολύνουν την ανάλυση των δεδομένων διάσπασης. Το εκτελέσιμο αρχείο **sift.exe** διατρέχει ένα αρχείο δεδομένων με χρόνους διασπάσεων και καταγράφει σε ένα αρχείο της επιλογής σας μόνο τα αρχεία που περιγράφουν δυνατές διασπάσεις μιονίων. Αγνοεί τα αρχεία που περιγράφουν γεγονότα χρονικά ασυμβίβαστα με πραγματικές διασπάσεις μιονίων.

Το εκτελέσιμο αρχείο **merge.exe** συγχωνεύει δύο αρχεία δεδομένων της επιλογής σας σε ένα ενιαίο αρχείο της επιλογής σας. Τα δεδομένα των αρχείων είναι χρόνοι, που διατάσσονται σύμφωνα με την ημερομηνία της αρχικής καταγραφής, έτσι ώστε όσο παλαιότερο είναι ένα αρχείο τόσο ναρίτερα εμφανίζεται στο συγχωνευμένο αρχείο.

Το εκτελέσιμο αρχείο **ratecalc.exe** υπολογίζει το μέσο ποσοστό ενεργοποίησης του ανιχνευτή (ανά δευτερόλεπτο) και το ποσοστό μιονικών διασπάσεων (ανά λεπτό) από ένα αρχείο δεδομένων της επιλογής σας. Τα λάθη που επιστρέφονται είναι στατιστικά.

Το εκτελέσιμο **freewrap.exe** είναι ο μεταγλωττιστής (compiler) για κάθε Tcl / Tk κώδικα που έχετε γράψει ή τροποποιήσει. Αν τροποποιήσετε ένα Tcl / Tk κώδικα (script), πρέπει πριν το εκτελέσετε (run) να του κάνετε μεταγλώττιση (compile). Σε λειτουργικό Windows αυτό το κάνετε με το άνοιγμα ενός παραθύρου εντολών DOS, και πηγαίνοντας στο φάκελο **muon_util**. Στη συνέχεια εκτελείτε την εντολή:

```
freewrap όνομα_αρχείου.tcl
```

όπου «όνομα_αρχείου.tcl» είναι το όνομα του Tcl / Tk κώδικα (script). Μην ξεχάσετε την επέκταση «.tcl» διότι διαφορετικά η εντολή δεν θα εκτελεστεί.

1.4 Εκτέλεση του Πειράματος

1.4.1 Συνδεσμολογία της διάταξης

1. Συνδέστε το καλώδιο ισχύος και το καλώδιο σήματος με το κουτί των ηλεκτρονικών και στη συνέχεια με τον ανιχνευτή, προσέχοντας να οι συνδέσεις να γίνουν στις σωστές υποδοχές. Συνδέστε το καλώδιο επικοινωνίας USB στο πίσω μέρος του κουτιού ηλεκτρονικών και σε κάποια από τις θύρες USB του υπολογιστή.
2. Ανοίξτε την ισχύ στο κουτί ηλεκτρονικών. (Ο διακόπτης βρίσκεται στο πίσω μέρος). Το κόκκινο LED θα πρέπει τώρα να είναι αναμμένο σταθερά. Το πράσινο LED μπορεί να αναβοσβήνει.
3. Ανεβάστε την υψηλή τάση (HV) περίπου στα 1100 με 1200 Volts χρησιμοποιώντας το ρυθμιστή υψηλής τάσης που βρίσκεται στο πάνω μέρος του σωλήνα ανίχνευσης. Η ακριβής ρύθμιση δεν είναι κρίσιμη και η τάση μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας τις υποδοχές για ακροδέκτες πολύμετρου που βρίσκονται δίπλα στο ρυθμιστή.

Αν είστε περίεργοι, μπορείτε να δείτε το σήμα εξόδου του φωτοπολλαπλασιαστή χρησιμοποιώντας την έξοδο PMT του σωλήνα ανίχνευσης και έναν παλμογράφο (κατά προτίμηση ψηφιακό). Τερματίστε την είσοδο με αντίσταση τερματισμού 50 Ω, αλλιώς το σήμα σας θα παραμορφωθεί. Θα πρέπει να δείτε ένα σήμα που μοιάζει με την Εικόνα 1.8.

4. Χρησιμοποιώντας ένα καλώδιο BNC, συνδέστε την έξοδο PMT του ανιχνευτή με την είσοδο PMT στο κουτί ηλεκτρονικών. Ρυθμίστε το κατώφλι (threshold) στο κουτί ηλεκτρονικών ούτως ώστε να είναι την περιοχή 180 – 220 mV. Για να το πετύχετε αυτό, τοποθετήστε τους ακροδέκτες του πολυμέτρου στις υποδοχές δίπλα στο ρυθμιστή του κατωφλίου, και χρησιμοποιήστε τον μέχρι να φτάσετε στη ζητούμενη τάση. Το πράσινο LED στο μπροστινό μέρος του κουτιού θα πρέπει τώρα να αναβοσβήνει.

Μπορείτε να δείτε τα σήματα εξόδου του ενισχυτή και του διευκρινιστή χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη έξοδο στο μπροστινό μέρος του κουτιού και έναν παλμογράφο. Όπως και προηγουμένως, η είσοδος θα πρέπει να τερματιστεί με αντίσταση 50 Ω. Η Εικόνα 1.9 απεικονίζει τυπικά σήματα για τις εξόδους του ενισχυτή και του διευκρινιστή σε κοινό γράφημα.

1.4.2 Εκτέλεση του προγράμματος καταμέτρησης

1. Αν δεν έχει γίνει εγκατάσταση του προγράμματος καταμέτρησης, εισάγετε το CD με το πρόγραμμα στον υπολογιστή και αντιγράψτε όλους τους φακέλους σε έναν φάκελο στον υπολογιστή.
2. Ανοίξτε το φάκελο muon_data και εκτελέστε το πρόγραμμα muon.exe (Τα Windows μπορεί να κρύβουν την κατάληξη .exe). Θα πρέπει τώρα να βλέπετε το user interface του προγράμματος, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.11.
3. Όπως περιγράφεται στην παράγραφο 10.2.1, ρυθμίστε τη θύρα (port) του υπολογιστή, τις επιλογές του ιστογράμματος και κάντε κλικ στο Save/Exit.
4. Για να ξεκινήσετε τη συλλογή δεδομένων, κάντε κλικ στο «Start». Θα πρέπει να βλέπετε το ρυθμό συλλογής γεγονότων στην κάτω αριστερή πλευρά της οθόνης. Ο μέσος ρυθμός πρέπει να είναι γύρω στα 6 Hz.

1.5 Ερωτήματα - Επεξεργασία Μετρήσεων

Με βάση όλα τα παραπάνω, καλείστε (όπως και μεις, τότε!) να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που πήρατε μετά την εκτέλεση του πειράματος και κάνοντας «fit» με τη βοήθεια μιας εκθετικής συνάρτησης (προγράμματα Origin / Root / άλλο) να δώσετε μια εκτίμηση για το χρόνο ζωής των μιονίων, καθώς και για το σφάλμα του. Στη συνέχεια, να συγκρίνετε το χρόνο αυτό με το χρόνο που χρειάζεται ένα μίονιο που παράγεται στην ατμόσφαιρα (15 km) για να φτάσει στην επιφάνεια

της θάλασσας (θεωρώντας ότι η ταχύτητά του είναι περίπου ίση με την ταχύτητα του φωτός). Αναφερθείτε στο φαινόμενο της διαστολής το χρόνου σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας. Μπορείτε ακόμα να συγκρίνετε την **πειραματική σας τιμή** για το χρόνο ζωής των μιονίων, με το χρόνο ζωής που δίνεται στην διεθνή βιβλιογραφία. Το σφάλμα που υπολογίσατε δικαιολογεί αυτή τη διαφορά; Αν όχι, εξηγήστε πού μπορεί να οφείλεται. Τέλος, από τη μέτρηση του χρόνου ζωής και την τιμή της μάζας των μιονίων να υπολογίσετε τη σταθερά σύζευξης Fermi. Συγκρίνετε την τιμή αυτή με την τιμή που δίνεται από τη βιβλιογραφία.

2. Αν θεωρήσουμε ότι $\rho = 1$ και με βάση τις παραδοχές που έγιναν στη θεωρία, **υπολογίστε** το μέσο χρόνο ζωής των μιονίων που αναμένεται να παρατηρηθεί μέσα στον σπινθηριστή (τ_{obs}).

3. Με δεδομένο ότι η κατανομή του χρόνου ζωής των μιονίων ακολουθεί την κατανομή Poisson, και ενώ γνωρίζουμε ότι ο ανιχνευτής ανιχνεύει περίπου ένα μίονιο ανά λεπτό, να υπολογίσετε:

(α) Την πιθανότητα να **μη δούμε 1 μίονιο σε χρόνο 1 λεπτού**

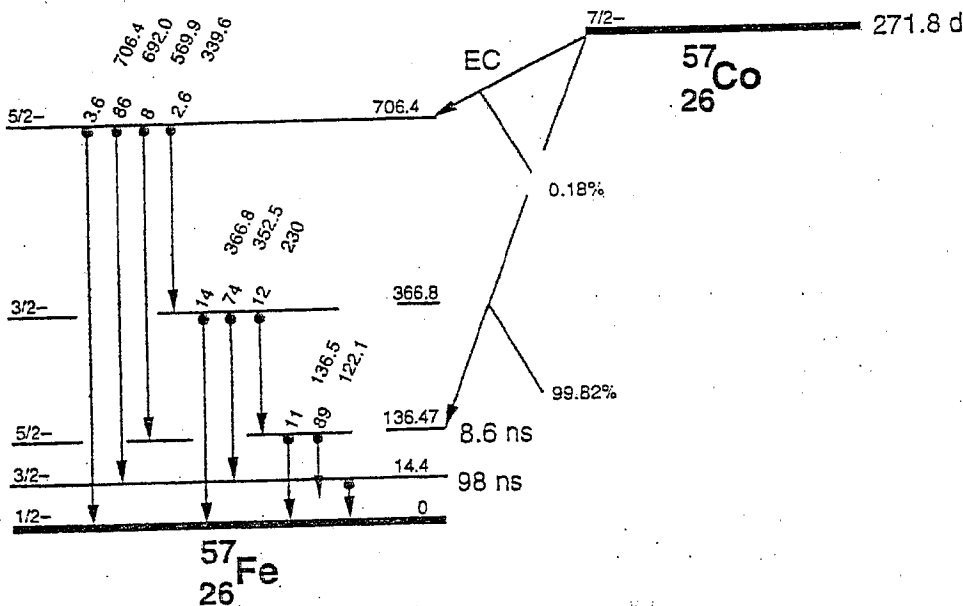
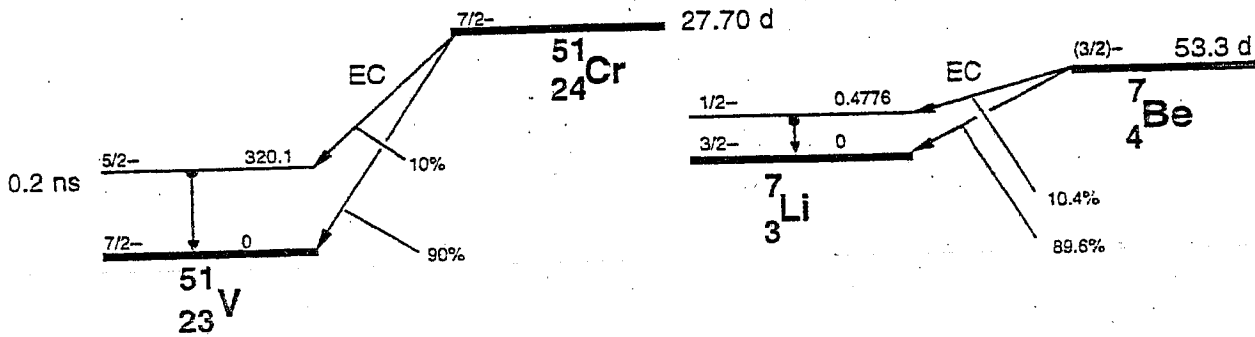
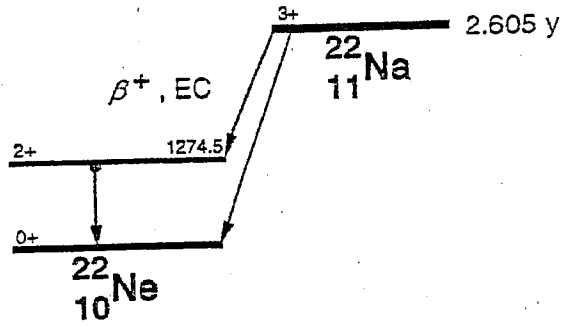
(β) Την πιθανότητα να **μη δούμε 1 μίονιο σε χρόνο 4 λεπτών**

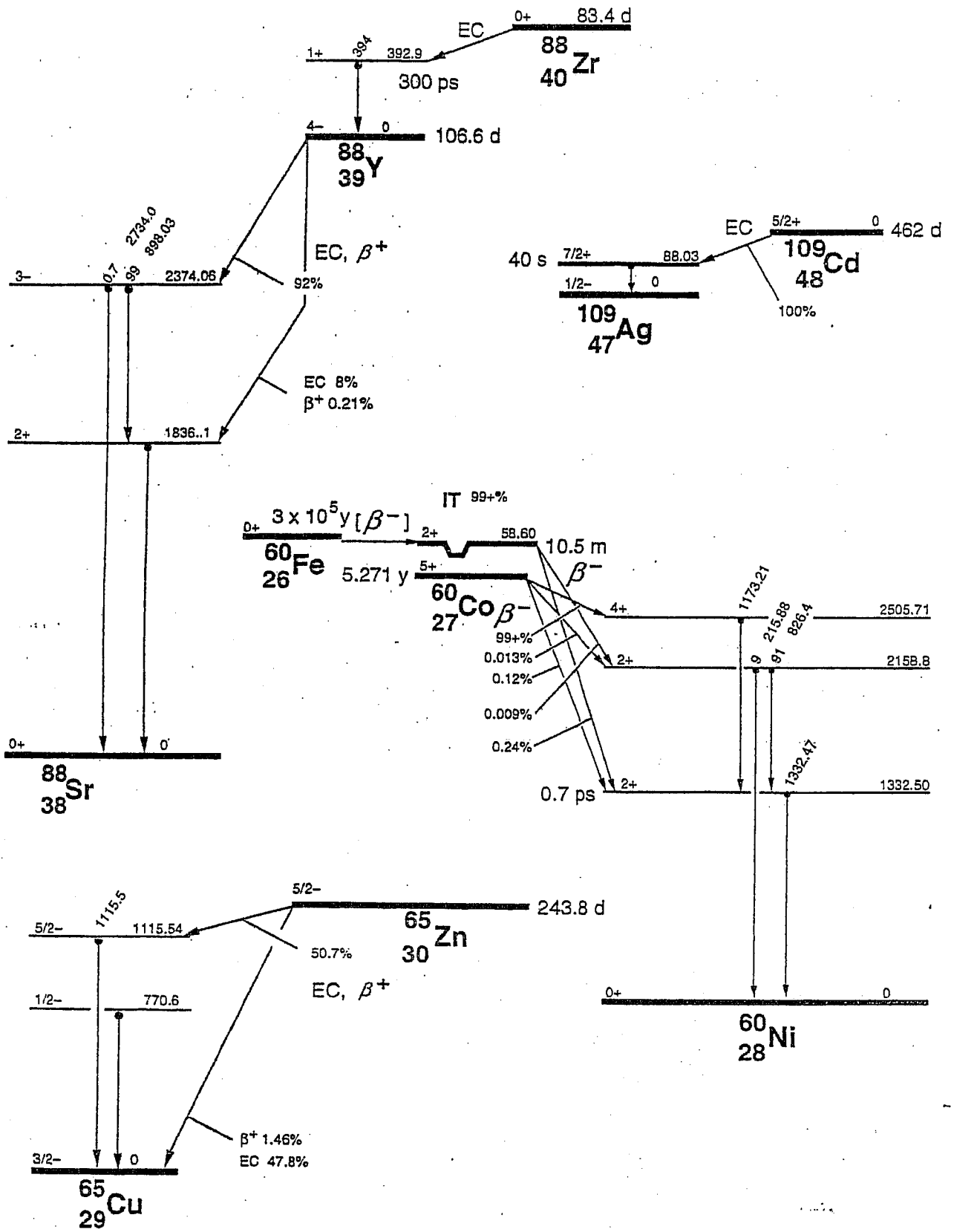
4. Τα μίονια, των οποίων το χρόνο ζωής μετράμε σε αυτό το πείραμα, γεννιούνται στην ατμόσφαιρα και συνεπώς «ξοδεύουν» ένα άγνωστο κομμάτι του χρόνου ζωής τους **έξω** από τον ανιχνευτή. Έτσι, δεν μετράμε ποτέ τον πραγματικό χρόνο ζωής των μιονίων. Παρόλα αυτά ισχυριζόμαστε ότι τον μετράμε. Πώς δικαιολογείται αυτό;

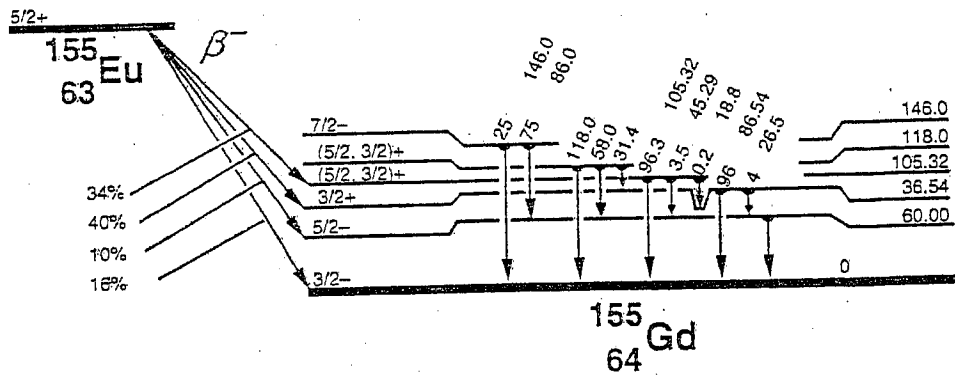
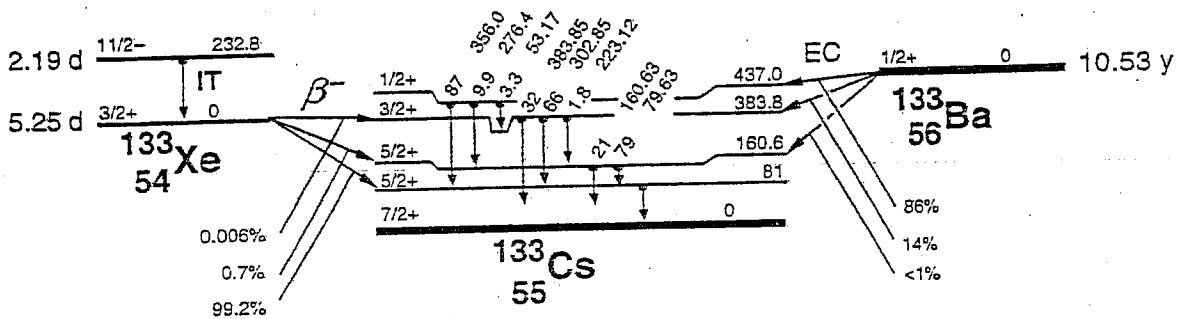
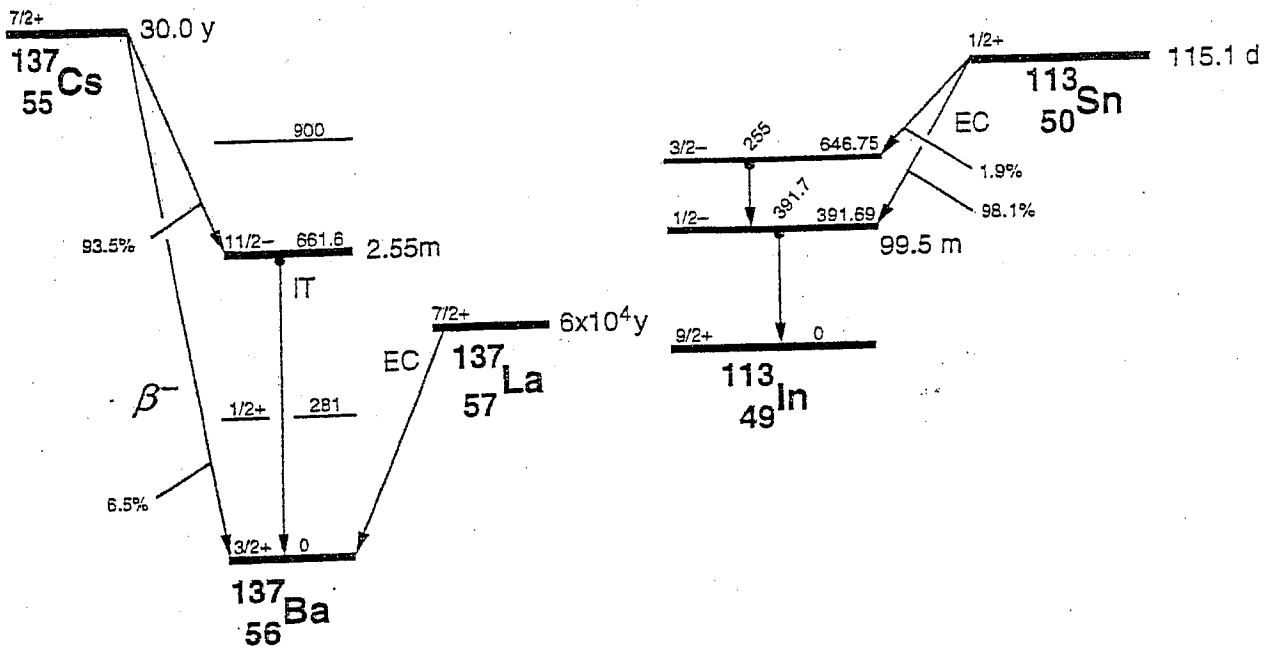
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

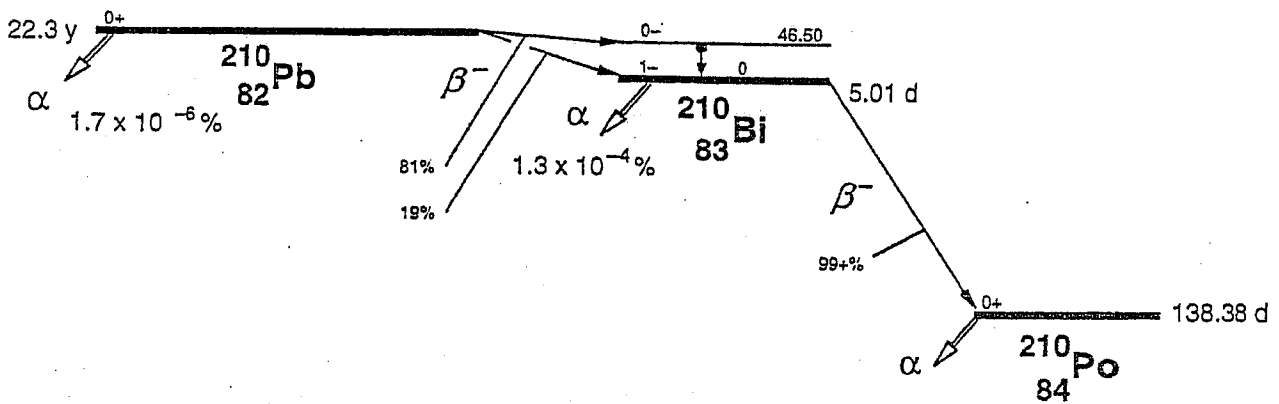
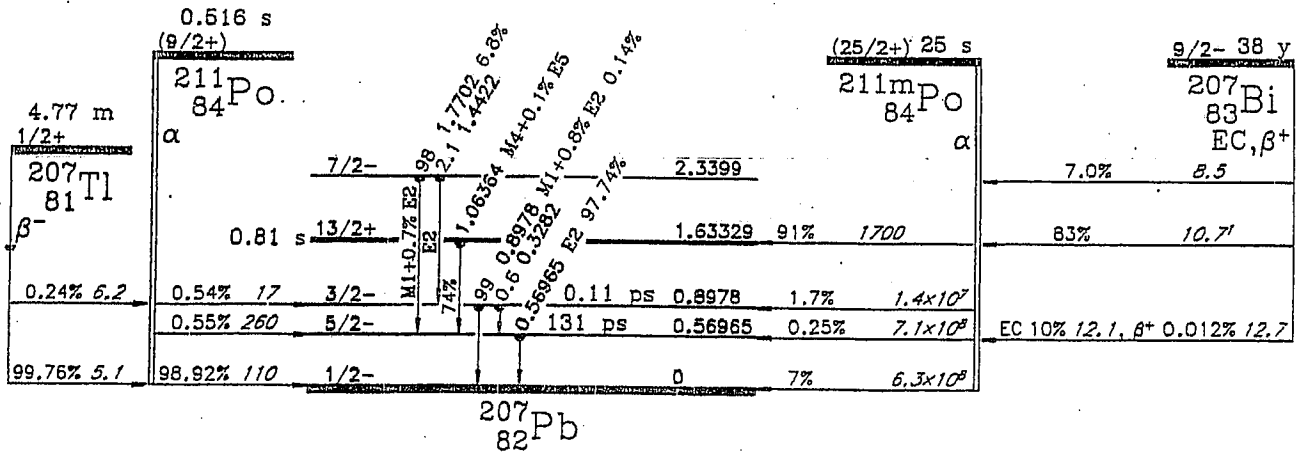
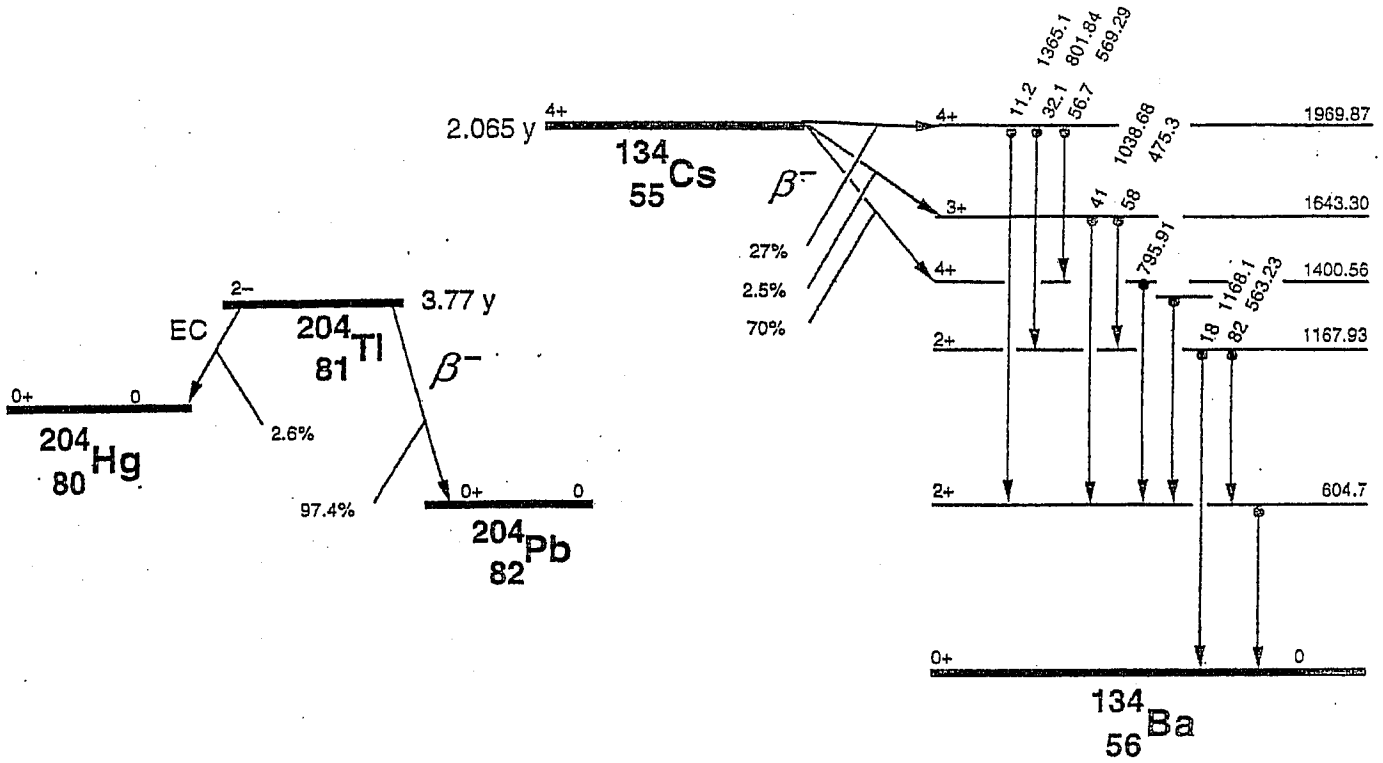
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΑΠΟΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΡΑΔΙΟΪΣΟΤΟΠΩΝ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΑΠΟΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΡΑΔΙΟΪΣΟΤΟΠΩΝ









ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ-γ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΙΣΧΥΡΟΤΕΡΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ-γ

που παρατηρούνται κατά την αποδιέγερση ραδιοϊσοτόπων

Οι ακτίνες-γ που περιέχονται στον πίνακα είναι τοποθετημένες κατά αύξουσα ενέργεια σε keV. Στις διπλανές στήλες εμφανίζεται το αντίστοιχο μητρικό ισότοπο, ο χρόνος ημιζωής του καθώς και οι υπόλοιπες σημαντικές ακτίνες-γ που εκπέμπονται κατά την αποδιέγερσή του. Η πιο ισχυρή ακτίνα-γ κάθε ισότοπου συνοδεύεται από έναν αστερίσκο. Κάθε ραδιοϊσότοπο εμφανίζεται μια φορά στον πίνακα μαζί με όλες τις ισχυρές ακτίνες-γ που συνοδεύουν την αποδιέγερσή του. Στον πίνακα, δίπλα από τις ενέργειες των ακτίνων-γ, εμφανίζεται σε παρένθεση το επί τοις εκατό ποσοστό εμφάνισης της κάθε ακτίνας-γ ανά αποδιέγερση του μητρικού πυρήνα.

Energy	Element	Half Life	Associated gammas
35.5 (4.1)	Sb-125		427.9*(30)
44.8 (31)	Pu-241		148.6*(96)
46.5*(3.9)	Pb-210	22.3 y	(U-238)
56.3 (9)	Pu-241		148.6*(96)
59.5*(35)	Am-241	433 y	26.3
63.3 (3.8)	Th-234		(U-238) 92.6*(5.4)
67.8 (42)	Ta-182		1221.4*(27)
69.7 (2.6)	Gd-153		97.4*(31)
79.1 (7.1)	Ag-108m		722.9*(91)
80.1 (2)	Ce-144		133.5*(11)
81.0 (33)	Ba-133		356.0*(62)
84.4*(1.2)	Th-228	1.913 y	(Th-232)
86.5*(31)	Eu-155	4.71 y	105.3
88.0*(3.7)	Cd-109	462.0 d	
88.4 (13)	La-138		1435.8*(68)
92.6*(5.4)	Th-234	24.1 d	(U-238) 63.3
93.3*(38)	Ga-67	3.260 d	184.6 300.2 393.5 209
93.4 (3.5)	Ac-228		(Th-232) 911.1*(27.7)
97.4*(31)	Gd-153	241.6 d	103.2 69.7
98.9*(11)	Au-195	186.12 d	129.8
100.1 (14)	Ta-182		1221.4*(27)
103.2 (22)	Gd-153		97.4*(31)
103.7 (30)	Pu-241		148.6*(96)
105.3 (20)	Eu-155		86.5*(31)
121.1 (17)	Se-75		264.7*(60)
121.8 (28)	Eu-152		1408.0*(21)
122.1*(86)	Co-57	271.8 d	136.5 14.4
123.1*(40)	Eu-154	8.59 y	1274.5 723.3 1004.8 873.2 996.3 247.9
129.8 (0.8)	Au-195		98.9*(11)
133.5*(11)	Ce-144	284.6 d	80.1 696.5 (Pr-144)
136 (57)	Se-75		264.7*(60)
136.5 (11)	Co-57		122.1*(86)
140.5*(90)	Tc-99m	6.01 h	
148.6*(94)	Pu-241	14.4 y	44.8 103.7 44.2 56.3
176.3 (6.9)	Sb-125		427.9*(30)
184.6 (20)	Ga-67	3.260 d	93.3*(38)
185.7*(54)	U-235	7.04 x 10 ⁸ y	194.9 205.3 163.4
190.3*(16)	In-114 m	49.51 d	558.4 725.2
192.3 (3.1)	Fe-59		1099.2*(56)

Energy	Element	Half Life	Associated gammas
645.9 (7.3)	Sb-124		602.7* (98)
657.8 (4.4)	Ag-110	24.6 s	
661.6*(90)	Ba-137m	2.55 m	
661.6*(85)	Cs-137	30.17 y	
696.5 (1.5)	Pr-144	17.3 m	133.5*(11) (Ce-144)
722.8 (11)	Sb-124		602.7* (98)
722.9*(91)	Ag-108m	130 y	614.4 433.9 79.2
722.9 (1.8)	I-131		364.5* (81)
723.3 (19)	Eu-154		123.1* (40)
725.2 (4.5)	In-114 m		190.3* (16)
727.2*(11.8)	Bi-212	60.6 m	(Th-232)
778.9 (13)	Eu-152		1408.0* (21)
788.7 (32)	La-138	1.05 x 10 ¹¹ y	
795.8*(85.4)	Cs-134	2.065 y	604.7 801.9 569.3 563.3
801.9 (8.7)	Cs-134		795.8* (85.4)
810.8*(99)	Co-58	70.88 d	863.9 511
818.7 (15)	In-116	54.2 m	1293.6* (75)
834.8*(100)	Mn-54	312.2 d	
860.4 (12.5)	Tl-208		(Th-232) 2614.7*(100)
863.9 (1.8)	Co-58		810.8* (99)
873.2 (12)	Eu-154		123.1* (40)
889.3 (100)	Sc-46		1120.5*(100)
898.0 (93)	Y-88		1836.0*(99)
911.1*(27.7)	Ac-228	6.15 h	(Th-232) 969.1 338.3 209.3 93.4
964.0 (15)	Eu-152		1408.1*(21)
969.1 (16.6)	Ac-228		(Th-232) 911.1*(27.7)
996.3 (11)	Eu-154		123.1*(40)
1004.8 (18)	Eu-154		123.1*(40)
1063.6 (75)	Bi-207		569.7*(98)
1085.8 (10)	Eu-152		1408.0*(21)
1097.3 (54)	In-116		1293.6*(75)
1099.2*(56)	Fe-59	44.51 d	1291.6 192.3
1112.0 (13)	Eu-152		1408.0*(21)
1115.5*(50.8)	Zn-65	243.8 d	511
1120.3 (15.1)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
1120.5 (100)	Sc-46		889.3*(100)
1121.3 (35)	Ta-182		1221.4*(27)
1173.2 (100)	Co-60		1332.5*(100)
1189.1 (16)	Ta-182		1221.4*(27)
1221.4*(27)	Ta-182	114.43 d	67.8 1121.3 1189.1 100.1 222.1 1230.9
1238.1 (5.9)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
1274.5*(100)	Na-22	2.605 y	511
1274.5 (36)	Eu-154		123.1*(40)
1291.6 (43)	Fe-59		1099.2*(56)
1293.6*(75)	In-116	54.2 min	1097.3 416.9 2112.1 818.7 1507
1332.5*(100)	Co-60	5.271 y	1173.2*(100)
1368.2 (2.5)	Sb-124		602.7*(98)
1408.0*(21)	Eu-152	13.48 y	121.8 344.3 964 1112 778.9 1085.8 244.7
1434.1*(100)	V-52	3.76 m	
1435.8*(68)	La-138	1.05 x 10 ¹¹ y	88.4 788.7
1460.8*(11)	K-40	1.28 x 10 ⁹ y	
1507.4 (10)	In-116	54.2 m	1293.6*(75)
1691*(49)	Sb-124		602.7*(98)
1764.5 (15.8)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
1770.2 (6.8)	Bi-207		569.7*(98)
1779*(100)	Al-28	2.25 m	
1836.1*(99)	Y-88	106.6 d	898.1
2091 (5.7)	Sb-124	60.2 d	602.7*(98)
2112.1 (18)	In-116		1293.6*(75)
2204.2 (5)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
2614.7*(100)	Tl-208	183 s	(Th-232) 583.1 510.8 860.5 277.4
2677.9 (2)	Rb-88		1836.0*

Energy	Element	Half Life	Associated gammas
201.3 (84)	Lu-176		308.9*(93)
209 (2.2)	Ga-67		93.3*(38)
209.3 (4.4)	Ac-228		(Th-232) 911.1*(27.7)
210.6 (11.3)	Th-227		(U-235) 236*(11.5)
222.1 (7.6)	Ta-182		1221.4*(27)
236*(11.5)	Th-227	18.72 d	(U-235) 210.6
238.6*(45)	Pb-212	10.64 h	(Th-232)
241.0*(4)	Ra-226	3.66 d	(Th-232)
244.7 (7)	Eu-152		1408.0*(21)
247.9 (6.6)	Eu-154		123.1*(40)
255.1*(1.9)	Sn-113	115.1 d	391.7 (In-113m)
264.7*(60)	Se-75	119.78 d	121.1 136 279.5 400.7
269.5*(13.6)	Ra-223	11.435 d	(U-235)
271.2*(10.6)	Rn-219	3.96 s	(U-235) 401.8
276.4 (6.9)	Ba-133		356.0*(62)
277.4 (6.8)	Tl-208		(Th-232) 2614.7*(100)
279.2*(77)	Hg-203	46.61 d	
279.5 (25)	Se-75		264.7*(60)
284.3 (6)	I-131		364.5*(81)
295.2 (19.2)	Pb-214		(U-238) 351.9*(37.2)
300.1 (4)	Th-228		2614.5*
300.2 (16)	Ga-67		93.3*(38)
302.8 (19)	Ba-133		356.0*(62)
308.9*(93)	Lu-176	3.6 x 10 ¹⁰ y	201.8
320.1*(9.8)	Cr-51	27.7 d	
338.3 (11.4)	Ac-228		(Th-232) 911.1*(27.7)
344.3 (27)	Eu-152		1408.0*(21)
351.1*(12.9)	Bi-211	2.14 m	(U-235)
352.0*(37.2)	Pb-214	26.8 m	(U-238) 295.2
356.0*(62)	Ba-133	10.53 y	81 302.8 383.9 276.4
364.5*(81)	I-131	8.04 d	637 284.3 722.9
383.9 (8.7)	Ba-133		356.0*(62)
391.7*(65)	In-113m	1.658 hr	
393.5 (4.5)	Ga-67		93.3*(38)
400.7 (12)	Se-75		264.7*(60)
401.8 (6.5)	Rn-219		(U-235) 271.2*(10.6)
416.9 (32)	In-116		1293.6*(75)
427.9*(30)	Sb-125	2.758 y	600.6 635.9 463.4 176.3 35.5 606.6
433.9 (90)	Ag-108m		722.9*(91)
442.9*(16)	I-128	25 m	526.6
463.4 (10)	Sb-125		427.9*(30)
477.6 (10)	Be-7*	53.3 d	
510.8 (21.6)	Tl-208		(Th-232) 2614.7*(100)
511.0 (180)	Na-22		1274.5*(100)
511.0 (30)	Co-58		810.8*(99)
511.0 (2.8)	Zn-65		1115.5*(50.8)
511.0 (0.6)	Ag-108		633*(1.8)
526.6 (1.5)	I-128		442.9*(16)
558.4 (4.5)	In-114 m		190.3*(16)
563.2 (8.4)	Cs-134		795.8*(85.4)
569.3 (15.4)	Cs-134		795.8*(85.4)
569.7*(98)	Bi-207	38.0 y	1063.6 1770.2
583.1 (84.2)	Tl-208		(Th-232) 2617.5*(100)
600.6 (18)	Sb-125		427.9*(30)
602.7*(98)	Sb-124	60.2 d	1691 722.8 645.9 2091 1368.2
604.7 (97.6)	Cs-134		795.8*(85.4)
606.6 (5)	Sb-125		427.9*(30)
609.3*(46.3)	Bi-214	19.9 m	(U-238) 1764.5 1120.3 1238.1 2204.2
614.4 (91)	Ag-108m		722.9*(91)
633*(1.8)	Ag-108	2.39 m	433.9 511
635.9 (11)	Sb-125		427.9*(30)
637.0 (7.3)	I-131		364.5*(81)

Energy	Element	Half Life	Associated gammas
645.9 (7.3)	Sb-124		602.7*(98)
657.8 (4.4)	Ag-110	24.6 s	
661.6*(90)	Ba-137m	2.55 m	
661.6*(85)	Cs-137	30.17 y	
696.5 (1.5)	Pr-144	17.3 m	133.5*(11) (Ce-144)
722.8 (11)	Sb-124		602.7*(98)
722.9*(91)	Ag-108m	130 y	614.4 433.9 79.2
722.9 (1.8)	I-131		364.5*(81)
723.3 (19)	Eu-154		123.1*(40)
725.2 (4.5)	In-114 m		190.3*(16)
727.2*(11.8)	Bi-212	60.6 m	(Th-232)
778.9 (13)	Eu-152		1408.0*(21)
788.7 (32)	La-138	1.05 x 10 ¹¹ y	
795.8*(85.4)	Cs-134	2.065 y	604.7 801.9 569.3 563.3
801.9 (8.7)	Cs-134		795.8*(85.4)
810.8*(99)	Co-58	70.88 d	863.9 511
818.7 (15)	In-116	54.2 m	1293.6*(75)
834.8*(100)	Mn-54	312.2 d	
860.4 (12.5)	Tl-208		(Th-232) 2614.7*(100)
863.9 (1.8)	Co-58		810.8*(99)
873.2 (12)	Eu-154		123.1*(40)
889.3 (100)	Sc-46		1120.5*(100)
898.0 (93)	Y-88		1836.0*(99)
911.1*(27.7)	Ac-228	6.15 h	(Th-232) 969.1 338.3 209.3 93.4
964.0 (15)	Eu-152		1408.1*(21)
969.1 (16.6)	Ac-228		(Th-232) 911.1*(27.7)
996.3 (11)	Eu-154		123.1*(40)
1004.8 (18)	Eu-154		123.1*(40)
1063.6 (75)	Bi-207		569.7*(98)
1085.8 (10)	Eu-152		1408.0*(21)
1097.3 (54)	In-116		1293.6*(75)
1099.2*(56)	Fe-59	44.51 d	1291.6 192.3
1112.0 (13)	Eu-152		1408.0*(21)
1115.5*(50.8)	Zn-65	243.8 d	511
1120.3 (15.1)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
1120.5 (100)	Sc-46		889.3*(100)
1121.3 (35)	Ta-182		1221.4*(27)
1173.2 (100)	Co-60		1332.5*(100)
1189.1 (16)	Ta-182		1221.4*(27)
1221.4*(27)	Ta-182	114.43 d	67.8 1121.3 1189.1 100.1 222.1 1230.9
1238.1 (5.9)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
1274.5 *(100)	Na-22	2.605 y	511
1274.5 (36)	Eu-154		123.1*(40)
1291.6 (43)	Fe-59		1099.2*(56)
1293.6 *(75)	In-116	54.2 min	1097.3 416.9 2112.1 818.7 1507
1332.5*(100)	Co-60	5.271 y	1173.2*(100)
1368.2 (2.5)	Sb-124		602.7*(98)
1408.0*(21)	Eu-152	13.48 y	121.8 344.3 964 1112 778.9 1085.8 244.7
1434.1*(100)	V-52	3.76 m	
1435.8*(68)	La-138	1.05 x 10 ¹¹ y	88.4 788.7
1460.8*(11)	K-40	1.28 x 10 ⁹ y	
1507.4 (10)	In-116	54.2 m	1293.6*(75)
1691*(49)	Sb-124		602.7*(98)
1764.5 (15.8)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
1770.2 (6.8)	Bi-207		569.7*(98)
1779*(100)	Al-28	2.25 m	
1836.1*(99)	Y-88	106.6 d	898.1
2091 (5.7)	Sb-124	60.2 d	602.7*(98)
2112.1 (18)	In-116		1293.6*(75)
2204.2 (5)	Bi-214		(U-238) 609.3*(46.3)
2614.7*(100)	Tl-208	183 s	(Th-232) 583.1 510.8 860.5 277.4
2677.9 (2)	Rb-88		1836.0*

