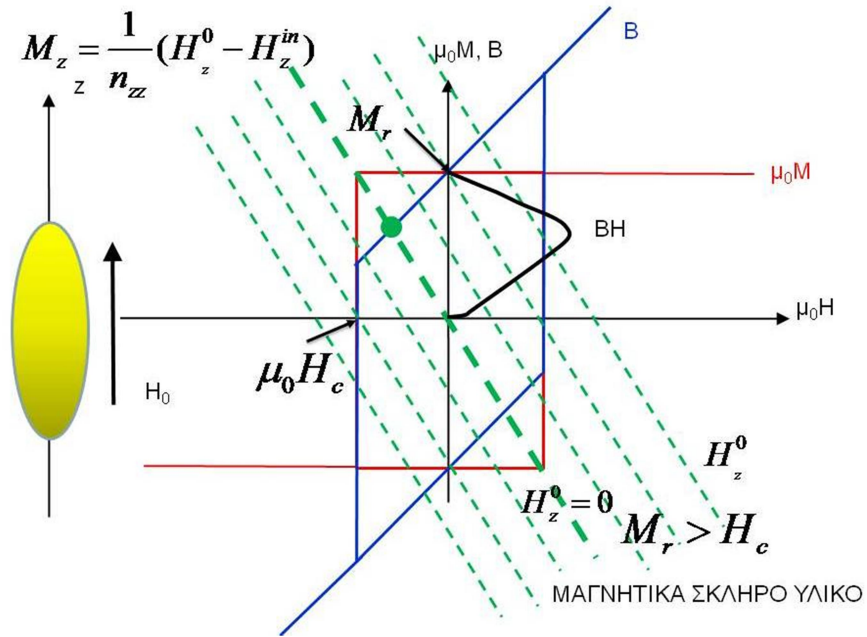
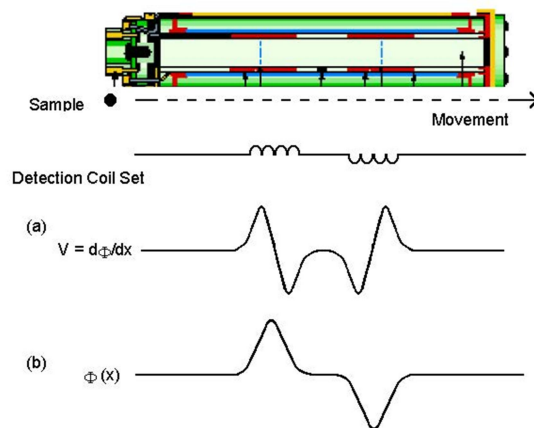


ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος»

Μαγνητικές μετρήσεις υλικών



DC measurement protocol



Μ. Πίσσας Ερευνητής Α'
Αθήνα 22/3/2017

Πίνακας περιεχομένων

1) ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ	5
3) Η ΚΑΤΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΑΤΟΜΙΚΩΝ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ	7
4) ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ	9
4β) ΣΙΔΗΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ	15
(4γ) ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ-ΒΡΟΓΧΟΣ ΥΣΤΕΡΗΣΗΣ	16
(4Δ) ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ	19
(4Ε) ΑΝΤΙΣΙΔΗΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΙΔΗΡΙΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ	22
(4Ζ) ΥΠΕΡΑΓΩΓΙΜΑ ΥΛΙΚΑ	23
(4 ^η) Ηλεκτροδυναμική υπεραγωγών με μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου-πυκνότητας ρεύματος.....	25
5) ΜΑΓΝΗΤΟΜΕΤΡΟ ΤΑΛΑΝΤΕΥΟΜΕΝΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ (VIBRATING SAMPLE MAGNETOMETER).....	32
6) ΜΑΓΝΗΤΟΜΕΤΡΟ SQUID (SUPERCONDUCTING QUANTUM INTERFERENCE DEVICE)	35
6) ΔΙΑΤΑΞΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ (PPMS).....	39
7) Βιβλιογραφία	46
8) Πειραματικές ασκήσεις.....	47
Άσκηση 1	47
Άσκηση 2	47

ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

Για την κατανόηση της άσκησης κρίνεται σκόπιμο να οριστούν κάποια φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με τις μαγνητικές ιδιότητες των υλικών. Θεωρούμε μία κατανομή ρεύματος με χωρική πυκνότητα $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Σαν **διπολική μαγνητική** ροπή της κατανομής ρεύματος ορίζουμε το διάνυσμα [1]

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV . \quad (1)$$

Η **μαγνητική επαγωγή** $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ στο εσωτερικό ενός υλικού ορίζεται ως ο μέσος όρος του μικροσκοπικού μαγνητικού πεδίου \mathbf{b} , σε μία περιοχή γύρω από το σημείο \mathbf{r} , με διαστάσεις τέτοιες ώστε να είναι μικρότερες από τις διαστάσεις του δείγματος, αλλά μεγαλύτερες από τις διαστάσεις στις οποίες το μικροσκοπικό μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται αισθητά. Η μαγνητική επαγωγή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}) \rangle \quad (2)$$

(το σύμβολο $\langle \dots \rangle$ σημαίνει μέσος όρος στη μικροσκοπική περιοχή). Έξω από το δείγμα θεωρούμε $\mathbf{B} = \mathbf{b}$. Σε μικροσκοπική κλίμακα το \mathbf{b} ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad (4)$$

όπου $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ είναι η τοπική πυκνότητα ρεύματος (ίση με το γινόμενο της πυκνότητας φορτίου και της ταχύτητας των ηλεκτρονίων) και $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tesla m/A (N/A^2) η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Αν πάρουμε το μέσο όρο της εξίσωσης 3, η μαγνητική επαγωγή θα ικανοποιεί την ίδια εξίσωση,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

Στην περίπτωση της εξίσωσης (4) ο μέσος όρος της χρονικής παραγώγου του μικροσκοπικού ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, εξ υποθέσεως. Άρα, η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} θα ικανοποιεί την εξίσωση $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \langle \rho \mathbf{v} \rangle$. Γενικά η μέση τιμή της μικροσκοπικής πυκνότητας ρεύματος είναι διάφορη του μηδενός τόσο σε αγώγιμα όσο και σε διηλεκτρικά υλικά. Αν ένας αγωγός μεταφέρει μη μηδενικό ρεύμα, η μέση πυκνότητα ρεύματος μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \rho \mathbf{v} \rangle \equiv \nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{J} \quad (6)$$

Η ποσότητα \mathbf{J} ονομάζεται πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας. Η καθαρή μεταφορά φορτίου μέσω της διατο-

μής του σώματος δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{f}$, όπου $d\mathbf{f}$ είναι απειροστό στοιχείο επιφάνειας. Η ποσότητα $\nabla \times \mathbf{M}$ είναι αποτέλεσμα της μαγνήτισης του μέσου και δεν συνεισφέρει στο συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα. Το άνυσμα \mathbf{M} ονομάζεται μαγνήτιση του υλικού. Ας εξετάσουμε τη σχέση της μαγνήτισης με τη μαγνητική ροπή. Εξ ορισμού η μαγνητική ροπή λόγω της κίνησης των φορτισμένων σωματιδίων δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{m} \rangle &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \langle \rho \mathbf{v} \rangle dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \text{curl} \mathbf{M} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV. \end{aligned} \quad (7)$$

Αν λάβουμε υπόψη τη σχέση

$$\int_V \mathbf{r} \times \text{curl} \mathbf{M} dV = 2\mathbf{M},$$

τότε παίρνουμε:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \int_V \mathbf{M} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV. \quad (8)$$

Συνεπώς το χωρικό ολοκλήρωμα της μαγνήτισης ισοσταύει με τη μαγνητική ροπή απουσία ελεύθερων ρευμάτων. Αντικαθιστώντας την εξίσωση 6 στον νόμο του Ampere ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \langle \rho \mathbf{v} \rangle$) παίρνουμε:

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \mathbf{M} / \mu_0) = \mathbf{J}. \quad (9)$$

Αν ορίσουμε ένα νέο διανυσματικό πεδίο \mathbf{H} , το οποίο ονομάζεται μαγνητικό πεδίο, με τη βοήθεια της εξίσωσης:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (10)$$

η εξίσωση (9) γίνεται:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (11)$$

Άρα οι μακροσκοπικές εξισώσεις του Maxwell στα πλαίσια της μαγνητοστατικής γίνονται:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Με βάση αυτές τις εξισώσεις το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική επαγωγή θα πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{1,2} = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{1,2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}_{1,2}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια που χωρίζει το μέσο 1 από το μέσο 2 και έχει κα-

τεύθυνση από το μέσο 1 προς το μέσο 2. \mathbf{K} είναι η επιφανειακή κατανομή ρεύματος. Για τη λύση κάθε μαγνητοστατικού προβλήματος καθώς και την ερμηνεία των στατικών μαγνητικών μετρήσεων αρκούν αυτές οι εξισώσεις αρκεί να θεωρήσουμε μία σχέση που συνδέει τη μαγνητική επαγωγή και το μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ ή ισοδύναμα μία σχέση της μαγνήτισης με το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{M}(\mathbf{H})$. Προτού ασχοληθούμε με τις μαγνητικές ιδιότητες των υλικών θα αναφερθούμε στο μαγνητοστατικό πρόβλημα ελλειψοειδούς, σε σταθερό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Θεωρούμε ένα ελλειψοειδές, το οποίο βρίσκεται σε ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}^0 . Μπορούμε να αποδείξουμε, ανεξάρτητα από τη σχέση της μαγνητικής επαγωγής και του μαγνητικού πεδίου ($\mathbf{B}(\mathbf{H})$), στο εσωτερικό του η μαγνήτιση, η μαγνητική επαγωγή και το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενή διανύσματα (είναι σταθερά σε όλο τον όγκο του ελλειψοειδούς) και ικανοποιούν τις σχέσεις:

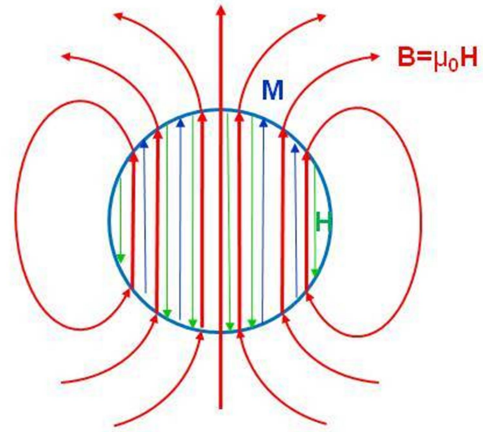
$$\begin{aligned} H_x^{\text{in}} + n_{xx} M_x &= H_x^0 \\ H_y^{\text{in}} + n_{yy} M_y &= H_y^0 \\ H_z^{\text{in}} + n_{zz} M_z &= H_z^0 \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{B}^{\text{in}} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}^{\text{in}})$. Προφανώς, η συνολική μαγνητική επαγωγή και το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{tot}}^{\text{in}} &= \mathbf{B}^{\text{in}} + \mu_0 \mathbf{H}^0 \\ \mathbf{H}_{\text{tot}}^{\text{in}} &= \mathbf{H}^{\text{in}} + \mathbf{H}^0 \end{aligned}$$

Οι συντελεστές n_{xx} , n_{yy} και n_{zz} ονομάζονται «συντελεστές απομαγνήτισης» (demagnetizing factors). Μπορεί να δειχθεί ότι ικανοποιούν τη σχέση $n_{xx} + n_{yy} + n_{zz} = 1$. Οι συντελεστές απομαγνήτισης για σφαίρα θα είναι ίσοι με $n_{xx} = n_{yy} = n_{zz} = 1/3$, για κύλινδρο άπειρου μήκους $n_{xx} = n_{yy} = 1/2$, $n_{zz} = 0$ (αν $\mathbf{H}^0 \parallel z$ -axis τότε $H_z^{\text{in}} = H_z^0$) και για πλάκα άπειρης έκτασης στο επίπεδο xy : $n_{xx} = n_{yy} = 0$, $n_{zz} = 1$.

Σαν παράδειγμα παραθέτουμε τις σχέσεις για την περίπτωση μόνιμα μαγνητισμένης σφαίρας με τη μαγνήτιση της παράλληλη στον άξονα- z ($\mathbf{M} = M \hat{\mathbf{e}}_z$). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μας χρειάζεται ο συντελεστής απομαγνήτισης $n_{zz} = 1/3$.



Σχήμα 1 Μόνιμα μαγνητισμένη σφαίρα με τη μαγνήτιση της παράλληλη στον άξονα z . Στο εσωτερικό της σφαίρας το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} έχει αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με τη μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} και τη μαγνήτιση. Στο εξωτερικό της σφαίρας οι δυναμικές γραμμές των δύο πεδίων ταυτίζονται και η μαγνητική επαγωγή είναι ίση με αυτή σημειακού μαγνητικού δίπολου που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας με διπολική ροπή $\mathbf{m} = 4\pi R^3 \mathbf{M} / 3$.

$$H_z^{\text{in}} + n_{zz} M_z = H_z^0 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}^{\text{in}} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}^{\text{in}} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}^{\text{in}}) = \mu_0 \frac{2}{3} \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}^{\text{out}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right), \text{ όπου } \mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{M}$$

Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής φαίνονται στο σχήμα 1. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η κάθετη συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής είναι συνεχής στην επιφάνεια της σφαίρας. Αν η μόνιμα μαγνητισμένη σφαίρα βρεθεί σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}_0 , το συνολικό μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό και στον εξωτερικό χώρο της σφαίρας θα είναι ίσα με την υπέρθεση της προηγούμενης λύσης και του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, δηλαδή:

$$\mathbf{H}^{\text{in}} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{3} \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}^{\text{in}} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}^{\text{in}}) = \mu_0 \mathbf{H}_0 + \mu_0 \frac{2}{3} \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}^{\text{out}} = \mu_0 \mathbf{H}_0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

$$\mathbf{H}^{\text{out}} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right).$$

Η ΚΑΤΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΑΤΟΜΙΚΩΝ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ

Σύμφωνα με την κλασική στατιστική μηχανική και το θεώρημα Bohr-van Leeuwen: **Σε ένα κλασικό σύστημα στη θερμοδυναμική ισορροπία, η μαγνήτιση πρέπει να ισούται με μηδέν.** Θεωρούμε την κλασική συνάρτηση επιμερισμού, N φορτισμένων σωματιδίων με Hamiltonian $E(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N)$

$$Z = \int \exp(-E(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) / k_B T) \prod_{i=1}^N d^3 \mathbf{r}_i d^3 \mathbf{p}_i$$

$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ (J/K) είναι η σταθερά Boltzmann και T η απόλυτη θερμοκρασία. Η παρουσία του μαγνητικού πεδίου λαμβάνεται υπόψη με αντικατάσταση των τροχιακών ορμών με $\mathbf{p}_{i,0} \rightarrow \mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}$, όπου q_i είναι το φορτίο του i σωματιδίου, \mathbf{A} το διανυσματικό δυναμικό που αντιστοιχεί στη μαγνητική επαγωγή, $\mathbf{p}_{i,0}$ η τροχιακή ορμή και \mathbf{p}_i η κανονική ορμή. Αν τα όρια της ολοκλήρωσης της συνάρτησης επιμερισμού είναι από το μείον άπειρο έως το συν άπειρο, η μετατόπιση της αρχής των αξόνων ως προς τη μεταβλητή της ορμής δεν τροποποιεί τις ολοκληρώσεις ως προς τις συνιστώσες της ορμής. Άρα η συνάρτηση επιμερισμού και η ελεύθερη ενέργεια ($F = E - TS$, E είναι η εσωτερική ενέργεια και S η εντροπία) δεν εξαρτώνται από τη μαγνητική επαγωγή, με αποτέλεσμα η μαγνήτιση

$$M = -\partial F / \partial B = N k_B T (\partial \ln Z / \partial B)_{T,V}$$

να ισούται με μηδέν. Συνεπώς, η ύπαρξη μόνιμης μαγνήτισης στην ύλη είναι ένα καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο.

Κατά κύριο λόγο, η μαγνητική ροπή των ατόμων οφείλεται στο σπίν των ηλεκτρονίων. Το σπίν του ηλεκτρονίου είναι μία ενδογενής ιδιότητα του, η οποία του προσδίδει μία μαγνητική διπολική ροπή που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{m}_e = g \frac{q_e}{2m_e} \mathbf{s}$$

Η σταθερά $g \approx 2.002$ ονομάζεται **συντελεστής g** (προσδιορίζεται από την κβαντική ηλεκτροδυναμική) και ο λόγος $q_e/2m_e$ **γυρομαγνητικός** λόγος. $q_e = -|e|$, m_e το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου, αντίστοιχα. \mathbf{s} είναι ο τελεστής του σπίν με ιδιοτιμές:

$$s_z \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \pm \hbar \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Το σπίν προβλέπεται θεωρητικά από την σχετικιστική εξίσωση Dirac για το ηλεκτρόνιο. Ο τελεστής της συνολι-

κής μαγνητικής ροπής λόγω σπίν των ηλεκτρονίων ενός ατόμου, με ατομικό αριθμό Z , θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{m}_s = -g \frac{|e| \hbar}{2m_e} \sum_{i=1}^Z \mathbf{s}_i = -\left(\frac{g \mu_B}{\hbar} \right) \mathbf{S},$$

όπου \mathbf{S} είναι ο τελεστής του συνολικού σπίν και $\mu_B = \hbar |q_e| / 2m_e = 9.274 \times 10^{-24}$ J/T η μαγνητόνη Bohr. Σημειώνουμε ότι επειδή το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι αρνητικό, το σπίν έχει αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με τη μαγνητική ροπή.

Η Hamiltonian ενός ατόμου με ατομικό αριθμό Z , μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 = \mu_0 H_0 \hat{\mathbf{e}}_z$, που μπορεί να προέλθει από το διανυσματικό δυναμικό

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}$$

μπορεί να γραφτεί [2]

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{i=1}^Z \frac{[\mathbf{p}_i + |e| \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i)]^2}{2m_e} + U - \mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B}_0 \\ &= \sum_{i=1}^Z \frac{p_i^2}{2m_e} + |e| \sum_{i=1}^Z \left[\frac{-i\hbar \nabla_i \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) - \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) \cdot (-i\hbar \nabla_i)}{2m_e} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_B}{\hbar} g \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0 \end{aligned} \quad (14)$$

όπου U η ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση των ηλεκτρονίων και των ηλεκτρονίων με τον πυρήνα και δίνεται από τη σχέση:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^Z \sum_{j>i}^Z \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (14\alpha)$$

Ο όρος $-\mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B}_0$ εκφράζει την ενέργεια αλληλεπίδρασης της μαγνητικής ροπής των ηλεκτρονίων λόγω σπίν με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Αν λάβουμε υπόψη ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) \Psi) - \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i \Psi &= \\ = (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i)) \Psi + \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i \Psi - \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i \Psi & \quad (14b) \\ = -i\hbar \nabla \cdot \mathbf{A}_0 \Psi = 0. \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος της σχέσης 14b μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned}
|e| \frac{\mathbf{p}_i}{2m_e} \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) - \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{2m_e} &= \frac{|e|}{m_e} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i \\
&= \frac{|e|}{m_e} \frac{1}{2} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i = \frac{|e|}{2m_e} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{B}_0 \\
&= \frac{|e|}{2m_e} \mathbf{L}_i \cdot \mathbf{B}_0
\end{aligned}$$

Με βάση τα προηγούμενα η Hamiltonian παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}_0 + \frac{e^2}{8m_e} \sum_{i=1}^Z (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}_i)^2 \quad (15)$$

\hat{H}_0 είναι η Hamiltonian του ατόμου απουσία μαγνητικού πεδίου. Ο δεύτερος όρος ονομάζεται παραμαγνητικός όρος ενώ ο τρίτος “διαμαγνητικός”. \mathbf{L} και \mathbf{S} αντιστοιχούν στους τελεστές της συνολικής τροχιακής στροφορμής και του συνολικού σπίν των ηλεκτρονίων, του ατόμου, αντίστοιχα. Σύμφωνα μ’ αυτή τη Hamiltonian ο τελεστής

$$\mathbf{m} = -\frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}). \quad (16)$$

αντιστοιχεί στον τελεστή της συνολικής μαγνητικής ροπής του ατόμου. Άρα, η μαγνητική ροπή των ατόμων οφείλεται στη τροχιακή στροφορμή και το σπίν των ηλεκτρονίων. Αν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι ασθενές, έτσι ώστε η ποσότητα $\mu_B \mu_0 H_0$ να είναι μικρή, σε σύγκριση με την απόσταση μεταξύ των ενεργειακών επιπέδων του ατόμου, απουσία μαγνητικού πεδίου τότε, οι δύο τελευταίοι όροι, της σχέσης 15, μπορούν να θεωρηθούν σαν διαταραχή. Σ’ αυτή την περίπτωση το μαγνητικό πεδίο προκαλεί διαχωρισμό των ατομικών επιπέδων και άρση του εκφυλισμού σε σχέση με τη διεύθυνση της συνολικής στροφορμής (φαινόμενο Zeeman). Όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό η \hat{H}_0 είναι αναλλοίωτη κάτω από στροφές. Άρα, οι ιδιοτιμές της \hat{H}_0 που αντιστοιχούν σε μία καθορισμένη τιμή του J εμφανίζουν εκφυλισμό $2J+1$. Η μετατόπιση των εκφυλισμένων ενεργειακών επιπέδων λόγω του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου θα δίνεται από τα στοιχεία του πίνακα

$$\langle E_0 J M_J | \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}_0 | E_0 J M_J \rangle$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Wigner-Eckart θα ισχύει

$$\langle E_0 J' M_J' | \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}_0 | E_0 J M_J \rangle = g_J \mu_B M_J B_0 \delta_{M_J M_J'}$$

Άρα, η «μαγνητική» διαταραχή αφαιρεί πλήρως τον $2J+1$ εκφυλισμό και τα νέα ενεργειακά επίπεδα θα δίνονται από τη σχέση ¹

$$E(M_J) = E_0 + \mu_B g_J M_J B_0.$$

M_J είναι οι ιδιοτιμές ($M_J = -J, -J+1, \dots, J$) του τελεστή $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$. Η σταθερά

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

ονομάζεται παράγοντας Lande. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε σαν μαγνητική ροπή του ατόμου στο ενεργειακό επίπεδο $|J, M_J\rangle$, τη μέση τιμή του τελεστή της μαγνητικής ροπής. Εύκολα βρίσκουμε

$$\langle J, M_J | m_z | J, M_J \rangle = -\frac{\partial (E_{J, M_J} - E_0)}{\partial B_0} = -g \mu_B M_J.$$

Άρα η μέγιστη μαγνητική ροπή του ατόμου αναμένεται στη βασική κατάσταση, με ιδιοτιμή της συνολικής στροφορμής $M_J = -J$. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η μαγνητική ροπή προσανατολίζεται παράλληλα με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Αν το συνολικό σπίν και η στροφορμή του ατόμου ισούνται με το μηδέν ($S = L = 0$) τότε ο δεύτερος όρος της εξίσωσης 15 δεν δίνει μετατόπιση των ενεργειακών επιπέδων σε πρώτη προσέγγιση. Σ’ αυτή την περίπτωση η επίδραση του μαγνητικού πεδίου προέρχεται από τον τρίτο όρο. Σε πρώτη προσέγγιση η μετατόπιση της ενέργειας της βασικής κατάστασης θα δίνεται από την σχέση:

$$\Delta E = \frac{e^2}{8m} \langle 0 | \sum_i (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}_i)^2 | 0 \rangle.$$

Επειδή η κυματοσυνάρτηση της κατάστασης με ($S = L = 0$) είναι σφαιρικά συμμετρική μπορούμε να δειξουμε ότι [2]:

$$\Delta E_0 = \frac{e^2 B_0^2}{12m} \sum_{i=1}^Z \langle 0 | r_i^2 | 0 \rangle.$$

Για ένα υλικό με N ιόντα σε όγκο V η μαγνήτιση εξ αιτίας του διαμαγνητικού όρου θα ισούται:

¹ Ελπίζουμε να μην προκληθεί σύγχυση με τη χρήση του γράμματος m , για το συμβολισμό της μαγνητικής ροπής.

$$M = -\frac{\partial F}{\partial B_0} = -\frac{N}{V} \frac{\partial \Delta E_0}{\partial B_0}$$

$$= -\frac{Ne^2}{V6m_e} \sum_{i=1}^Z \langle 0 | r_i^2 | 0 \rangle \mu_0 H_0$$

και η μαγνητική επιδεκτικότητα

$$\chi = -\frac{\partial M}{\partial H_0} = -\mu_0 \frac{\partial^2 F}{\partial B_0^2} = -\mu_0 \frac{Ne^2}{V6m_e} \sum_{i=1}^Z \langle 0 | r_i^2 | 0 \rangle$$

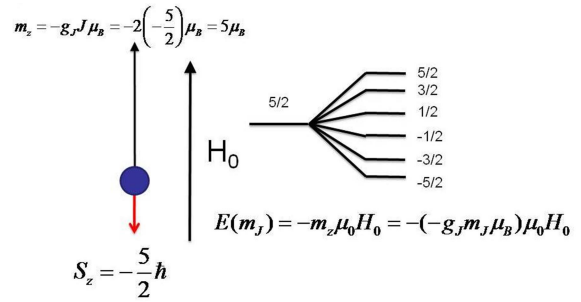
Άρα η διαμαγνητική επιδεκτικότητα είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας.

Συμπερασματικά, ένα άτομο μπορεί να αποκτήσει μαγνητική ροπή (θετική παραμαγνητική συμπεριφορά ή αρνητική διαμαγνητική συμπεριφορά σε σχέση με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο) ανάλογα με τις μέσες τιμές των τελεστών $\hat{S}, \hat{L}, \hat{J}$. Στα μόρια ή τη συμπυκνωμένη ύλη έχουμε αλληλεπίδραση των μαγνητικών ροπών των ατόμων λόγω των αλληλεπιδράσεων ανταλλαγής, οι οποίες προκαλούν μαγνητικές καταστάσεις της ύλης όπως ο σιδηρομαγνητισμός και αντισιδηρομαγνητισμός.

Για τη μέτρηση των μαγνητικών ιδιοτήτων της ύλης χρησιμοποιούνται ειδικά όργανα που ονομάζονται μαγνητόμετρα, τα οποία μετρούν τη μαγνητική ροπή του δείγματος από την επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη που προκαλείται σε ένα σύστημα πηνίων από την ταλάντωση ή κίνηση του δείγματος. Εξ αιτίας της προόδου που σημειώθηκε στον τομέα της υπεραγωγιότητας την δεκαετία του 60 και έπειτα από την ανακάλυψη του φαινόμενου Josephson, κατασκευάστηκαν μαγνητόμετρα με πολύ μεγάλη ευαισθησία (10^{-7} emu) τα οποία χρησιμοποιούνται στην πλειονότητα των εργαστηρίων που ασχολούνται με το μαγνητισμό και την υπεραγωγιότητα. Ανάλογα με τη συμπεριφορά των υλικών εντός μαγνητικού πεδίου τα χωρίζουμε σε παραμαγνητικά, σιδηρομαγνητικά, αντισιδηρομαγνητικά, σιδηριμαγνητικά, διαμαγνητικά και υπεραγωγίμα. Για να χαρακτηριστεί ένα υλικό μαγνητικά χρειαζόμαστε μετρήσεις της μαγνητικής ροπής του σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου, σε σταθερή θερμοκρασία καθώς και μετρήσεις της μαγνητικής ροπής σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας.

ΠΑΡΑΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Έστω ένα μαγνητικό άτομο σε ισορροπία με δεξαμενή θερμότητας το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί από τον κβαντικό αριθμό της συνολικής στροφορμής J . Το μαγνητικό άτομο βρίσκεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο έντασης H_0 το οποίο είναι παράλληλο με τον άξονα z .



Σχήμα 1. (αριστερά) Μαγνητική ροπή, μαγνητικού ατόμου με $J = 5/2$, προβολή του σπίν της βασικής κατάστασης σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{e}_z$, στο απόλυτο μηδέν. (δεξιά) Ενεργειακό διάγραμμα των ηλεκτρονιακών σταθμών.

Έχουμε αναφέρει ότι η βασική κατάσταση ενός ατόμου με $L, S \neq 0$ μπορεί να χαρακτηριστεί από τον κβαντικό αριθμό της συνολικής στροφορμής J . Ο τελεστής που αντιστοιχεί στη μαγνητική ροπή θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{m} = -g_J \mu_B \mathbf{J} / \hbar$$

όπου

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

Η αλληλεπίδραση της μαγνητικής ροπής με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{e}_z$ περιγράφεται από τον τελεστή

$$\hat{H} = -\mathbf{m} \cdot \mu_0 \mathbf{H}_0$$

με ιδιοτιμές²:

$$E(J_z) = g_J \mu_0 \mu_B H_0 J_z$$

όπου $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}$ Am² (J/Tesla) είναι η μαγνητόνη του Bohr, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tesla m/A η διαπερατότητα του κενού και $J_z = -J, -J+1, \dots, J$. Σε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο η βασική κατάσταση του μαγνητικού ατόμου θα είναι αυτή με $J_z = -J$ μ' αντίστοιχη προβολή μαγνητική ροπή στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

$$\max m_z = m_z^{GS} = g_J J \mu_B$$

Οι προβολές του σπίν και της μαγνητικής ροπής θα είναι προσανατολισμένες αντιπαράλληλα, αντίστοιχα παράλληλα, με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

² Επειδή ενσωματώσαμε την σταθερά $\hbar/2\pi$ στη μαγνητόνη Bohr, η προβολή της συνολικής στροφορμής θα είναι αδιάστατη, π.χ. $J_z = -J, -J+1, -J+2, \dots, J$.

Αν το μαγνητικό άτομο βρίσκεται σε ισορροπία με δεξαμενή θερμότητας τότε η μέση τιμή της προβολής της μαγνητικής ροπής του ατόμου σε θερμοκρασία T θα δίνεται από τη γνωστή σχέση της στατιστικής μηχανικής

$$\langle m_z \rangle_T = k_B T \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial B_0} = k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial B_0} = - \frac{\partial F}{\partial B_0}.$$

όπου $x = \mu_0 g \mu_B H_0 / k_B T$, $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ η μαγνητική επαγωγή, $F = -k_B T \ln Z$ η ελεύθερη ενέργεια $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ (J/K) η σταθερά του Boltzmann και Z είναι η συνάρτηση επιμερισμού η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \sum_{m_J=-J}^J \exp(-\mu_0 g \mu_B M_J H_0 / k_B T) = \sum_{m_J=-J}^J \exp(-M_J x).$$

Η συνάρτηση επιμερισμού είναι μία γεωμετρική πρόοδος $2J+1$ όρων με πρώτο όρο $\exp(-xJ)$ και βήμα $\exp(x)$, της οποίας το άθροισμα θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} Z &= \frac{a_1 - a_{1+n}}{1 - \omega} \\ &= \frac{\exp(xJ) - \exp[-x(J+1)]}{1 - \exp(-x)} \\ &= \frac{\exp[x(J+1/2)] - \exp[-x(J+1/2)]}{\exp[x/2] - \exp[-x/2]} \\ &= \frac{\sinh[x(J+1/2)]}{\sinh[x/2]} \end{aligned}$$

Η μέση θερμική τιμή της προβολής της μαγνητικής ροπής στην κατεύθυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, μπορεί να υπολογιστεί από την παράγωγο της συνάρτησης επιμερισμού

$$\begin{aligned} \langle m_z \rangle_T &= k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial B_0} = k_B T \frac{\partial}{\partial B_0} \ln \left[\frac{\sinh[x(J+1/2)]}{\sinh[x(1/2)]} \right] \\ &= k_B T \frac{\partial}{\partial B_0} \ln(\sinh[x(J+1/2)]) - \frac{\partial}{\partial B_0} (\sinh[x(1/2)]) \\ &= k_B T \left\{ \left(J + \frac{1}{2} \right) \frac{\cosh[x(J+1/2)]}{\sinh[x(J+1/2)]} - \frac{1}{2} \frac{\cosh[x(1/2)]}{\sinh[x(1/2)]} \right\} \frac{\partial x}{\partial B_0} \\ &= g_J \mu_B \left\{ \left(J + \frac{1}{2} \right) \coth[x(J+1/2)] - \frac{1}{2} \coth[x(1/2)] \right\} \\ &= g_J \mu_B J B_J(y), \end{aligned}$$

όπου

$$y = \frac{g_J \mu_B J B_0}{k_B T} = xJ$$

και

$$B_J(y) = \left\{ \left(\frac{2J+1}{2J} \right) \coth \left[\left(\frac{2J+1}{2J} \right) y \right] - \frac{1}{2J} \coth \left(\frac{1}{2J} y \right) \right\}$$

$$B_J(y \gg 1) \approx 1$$

$$B_J(y \ll 1) \approx \frac{1+J}{3} y$$

η συνάρτηση Brillouin. Άρα η μαγνητική ροπή ανά μαγνητικό άτομο και μαγνητόνη Bohr, παραμαγνητικού δείγματος, θα δίνεται από τη σχέση

$$\langle m_z \rangle_T / \mu_B = g_J J B_J(y),$$

Συλλογή N μη αλληλοεπιδρώντων μαγνητικών ροπών σε ισορροπία με δεξαμενή θερμότητας.

Αν υποθέσουμε ότι το σύστημα μας αποτελείται από N μη αλληλοεπιδρούσες, διακρίσιμες μαγνητικές ροπές³, η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{tot} = \left(\sum_{m_J=-J}^J \exp(-E_J / k_B T) \right)^N = Z^N$$

Η εσωτερική και η ελεύθερη ενέργεια του συστήματος θα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$U = - \frac{\partial Z_{tot}}{\partial \beta},$$

$$F = -Nk_B T \ln Z.$$

Η μέση θερμική προβολή της μαγνητικής ροπής του δείγματος θα ισούται με την αρνητική παράγωγο της ελεύθερης ενέργειας του συστήματος:

$$\begin{aligned} \langle m_z \rangle_T &= - \frac{\partial F}{\partial B_0} = \frac{\partial (-Nk_B T \ln Z)}{\partial B_0} \\ &= Nk_B T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial B_0} \right) \\ &= Nk_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial B_0} = N g_J \mu_B J B_J(y) \end{aligned}$$

Αν το σύστημα καταλαμβάνει όγκο V , η μαγνήτιση θα ισούται με:

³ Για N distinguishable particles (πχ στις θέσεις ενός κρυσταλλικού πλέγματος) η συνάρτηση επιμερισμού θα δίνεται από τη σχέση $Z_{tot}=(Z)^N$. Ενώ, αν έχουμε N non-distinguishable magnetic particles (τέλειο κλασσικό αέριο) τότε η συνάρτηση επιμερισμού θα δίνεται από την σχέση $Z_{tot}=(Z)^N/N!$.

$$M = \frac{\langle m_z \rangle_T}{V}.$$

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που η ενέργεια αλληλεπίδρασης της μαγνητικής ροπής με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι πολύ μικρότερη από τη θερμική ενέργεια ($y \ll 1$). Χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική σχέση για την συνάρτηση Brillouin για $y \ll 1$, η μαγνήτιση του δείγματος γίνεται:

$$M = \frac{N}{V} \frac{g_J^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T} \mu_0 H_0$$

$$\left[\frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{αριθμός ροπών} (\text{Am}^2)^2}{\text{m}^3 \text{ Joule}} \text{T} \right]$$

Η προηγούμενη εξίσωση είναι γνωστή στο μαγνητισμό σαν νόμος Curie, σύμφωνα με τον οποίο, για σχετικά μικρές τιμές του μαγνητικού πεδίου η μαγνήτιση παραμαγνητικού δείγματος είναι ανάλογη του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και αντιστρόφως ανάλογη της θερμοκρασίας. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά αποτελεί τη βάση για τον ποιοτικό αλλά και ποσοτικό μαγνητικό χαρακτηρισμό μίας παραμαγνητικής ένωσης.

Η μαγνητική επιδεκτικότητα παραμαγνητικού δείγματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$\chi = \frac{dM}{dH_0} = \mu_0 \frac{N}{V} \frac{g_J^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T}$$

Η μαγνητική επιδεκτικότητα είναι καθαρός αριθμός.

Στις μαγνητικές μετρήσεις χρησιμοποιούμε την επιδεκτικότητα όγκου η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\chi_V = \frac{dm}{dH_0} = \mu_0 N \frac{g_J^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T}$$

και έχει μονάδες m^3 .

Χρησιμοποιείται επίσης η επιδεκτικότητα μάζας η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \chi_\rho &= \frac{d(m/w)}{dH_0} \\ &= \frac{d(m/\rho V)}{dH_0} \\ &= \frac{\chi}{\rho} \\ &= \mu_0 \frac{N}{V\rho} \frac{g_J^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T} \end{aligned}$$

όπου w , ρ η πυκνότητα και η μάζα του δείγματος, αντίστοιχα.

Τέλος χρησιμοποιείται η επιδεκτικότητα ανά mol η οποία θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \chi_{\text{mol}} &= \frac{d(m/n_{\text{mol}})}{dH_0} \\ &= \frac{d(m/w/fw)}{dH_0} \\ &= \frac{dm}{dH_0} \frac{fw}{\rho V} \\ &= \chi_\rho fw \end{aligned}$$

όπου n_{mol} , fw ο αριθμός των mol και η σχετική μάζα του χημικού τύπου της ένωσης, αντίστοιχα. Επειδή

$$fw = w_{fu} / (1/N_A) = w_{fu} N_A$$

$$\chi_{\text{mol}} = \chi_\rho w_{fu} N_A = \chi_1 N_A$$

όπου w_{fu} η μάζα του χημικού τύπου και χ_1 η μαγνητική επιδεκτικότητα για ένα μαγνητικό ιόν.

Η μαγνητική επιδεκτικότητα ανά mol μπορεί επίσης να οριστεί πιο απλά, θεωρώντας τη μαγνητική ροπή N_A μαγνητικών ιόντων, καθώς ένα mol περιέχει N_A μαγνητικά ιόντα, άρα

$$m_{\text{mol}} \approx N_A \frac{(g\mu_B)^2 J(J+1)}{k_B T} \mu_0 H_0,$$

άρα

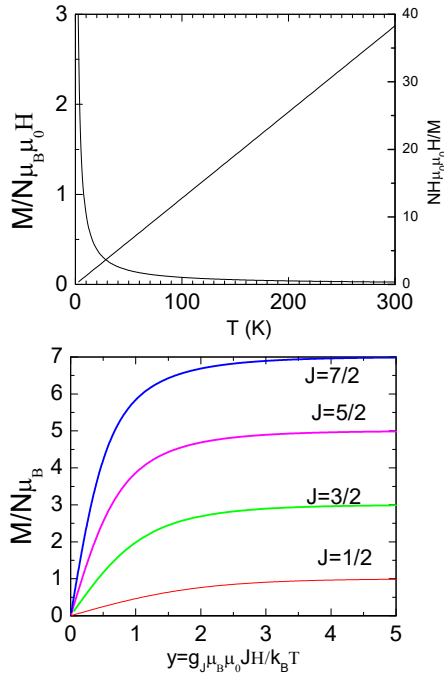
$$\chi_{\text{mol}} = \frac{dm_{\text{mol}}}{dH_0} \approx \frac{N_A \mu_0 (g\mu_B)^2 J(J+1)}{k_B T}.$$

Αν ο χημικός τύπος περιέχει ν μαγνητικά ιόντα με παράγοντα Lande g_i και ολικό στροφορμή J_i για το i ιόν, τότε η επιδεκτικότητα ανά mol θα δίνεται από τη σχέση:

$$\chi_{\text{mol}} = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_0 N_A \frac{g_i^2 \mu_B^2 J_i(J_i+1)}{3k_B T}.$$

Η μαγνητική επιδεκτικότητα για ένα mol μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά (από μετρήσεις σε ένα μαγνητόμετρο) από τη μαγνητική ροπή για ορισμένη μάζα δείγματος, αν την διαιρέσουμε με τον αριθμό των mol του δείγματος και το μαγνητικό πεδίο που πραγματοποιήθηκε η μέτρηση.

$$\chi_{\text{mol}} = \frac{\text{Μαγνητική ροπή}}{(\text{Μάζα/Μοριακόβάρως}) \times H_0}.$$



Σχήμα 2. (πάνω σχήμα) Μεταβολή της μαγνητικής επιδεκτικότητας και της αντίστροφης επιδεκτικότητας σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας για ένα παραμαγνητικό υλικό. (κάτω σχήμα) Μεταβολή της μαγνήτισης σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου για σταθερή θερμοκρασία για παραμαγνητικά υλικά με κβαντικό αριθμό της συνολικής στροφορμής $J=1/2, 3/2, 5/2$ και $7/2$.

Αν σχεδιάσουμε την ποσότητα $1/\chi$ σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας παίρνουμε μία ευθεία της οποίας η κλίση συνδέεται με τον κβαντικό αριθμό της συνολικής στροφορμής του μαγνητικού ατόμου. Για να είναι πλήρης ο χαρακτηρισμός ενός παραμαγνητικού υλικού θα πρέπει να ελεγχθεί αν η μαγνητική ροπή του δείγματος σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου ακολουθεί τη **συνάρτηση Brillouin**. Στο σχήμα 2 φαίνεται η μεταβολή με τη θερμοκρασία και το μαγνητικό πεδίο της μαγνητικής ροπής παραμαγνητικού δείγματος. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι παραμαγνητική συμπεριφορά (θετική μαγνητική επιδεκτικότητα) εμφανίζουν και μη μαγνητικά αγώγιμα υλικά σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Η συμπεριφορά αυτή έχει ερμηνευθεί από τον Pauli και ονομάζεται παραμαγνητισμός Pauli. Κύριο χαρακτηριστικό του παραμαγνητισμού Pauli είναι η θερμοκρασιακά ανεξάρτητη θετική μαγνητική επιδεκτικότητα.

Σ' αυτή την παράγραφο θα παραθέσουμε κάποιες σχέσεις οι οποίες είναι χρήσιμες για την ερμηνεία μαγνητικών μετρήσεων σε παραμαγνητικά υλικά. Η μαγνητική επιδεκτικότητα ανά mol στο CGS για ένα σπιν ανά μόριο θα δίνεται από τη σχέση:

$$\chi_{\text{mol}} = N_A \frac{g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T} = \frac{C}{T} = \frac{C_0 g^2 J(J+1)}{3T}$$

όπου C είναι η σταθερά Curie. Η τιμή της σταθερής C_0 θα ισούται με

$$C_0 = \frac{N_A \mu_B^2}{3k_B} = \frac{(6.23 \times 10^{23} \text{ ion/mol})(9.274 \times 10^{-21} \text{ erg/G})^2}{3 \times 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}} \\ \approx 0.1294 \frac{\text{erg} \times \text{K}}{\text{mol} \times \text{G}^2} = 0.1294 (\text{cm}^3 \text{ mol}^{-1} \text{ K})$$

Αρα θα ισχύει

$$\chi T = 0.1294 g^2 J(J+1) [\text{cm}^3 \text{ mol}^{-1} \text{ K}].$$

Στον **Πίνακα I** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές των σταθερών που χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις, στο SI και CGS. Τέλος στον **Πίνακα II** παραθέτουμε τους συντελεστές μετατροπής των φυσικών μεγεθών που σχετίζονται με τις μαγνητικές μετρήσεις από το CGS/EMU στο SI.

Για αναφορά παραθέτουμε τις σχέσεις

$$\chi_g = \chi / \rho$$

$$\chi_{\text{mol}} = FW \chi_g$$

$$\chi^{\text{SI}} = 4\pi \chi^{\text{CGS}}$$

Όπου ρ FW είναι η πυκνότητα και η μοριακή μάζα της ένωσης.

Πίνακας Ι Τιμές φυσικών σταθερών στο CGS και SI σύστημα μονάδων.

ΣΤΑΘΕΡΑ	SI	CGS
$\hbar = h/2\pi$	1.054×10^{-34} J s	1.054×10^{-27} erg s
q_e (φορτίο ηλεκτρονίου)	1.60×10^{-19} C	4.8×10^{-10} SC
M_e (Μάζα ηλεκτρονίου)	9.1×10^{-31} Kg	
μ_B (Μαγνητόνη Bohr)	9.274×10^{-24} JT ⁻¹	9.274×10^{-21} ergG ⁻¹
k_B (Σταθερά Boltzmann)	1.380×10^{-23} JK ⁻¹	1.380×10^{-16} ergK ⁻¹
μ_0 (διαπερατότητα του κενού)	$4\pi \times 10^{-7}$ NA ⁻²	1
N_A	6.022×10^{23}	6.022×10^{23}
1eV	1.60×10^{-19} J	

Πίνακας Ι Πίνακας μετατροπής φυσικών μεγεθών που σχετίζονται με τις μαγνητικές μετρήσεις από το CGS στο SI.

Φυσικό μέγεθος	SI	CGS	CGS-SIx	SI-CGSx
B (μαγνητική επαγωγή)	Tesla=T	Gauss=G	10^{-4}	10^4
H (μαγνητικό πεδίο)	A/m	Oe	$10^3/4\pi$	$4\pi/10^3$
M (μαγνήτιση)	A/m	emu/cm ³	10^3	10^{-3}
m (μαγνητική ροπή)	Am ²	emu	10^{-3}	10^3
$m_o = m/mass$ (μαγνητική ροπή ανά μονάδα μάζας)	Am ² /Kg	emu/g	1	
	$B = \mu_0(M+H)$	$B = H + 4\pi M$		
$\chi = dM/dH$ (επιδεκτικότητα)	χωρίς διαστάσεις(1)	emu cm ³ Oe ⁻¹	4π	1/4π
$\chi_p = m_o/H = \chi/\rho$	m ³ /Kg	cm ³ /g	$4\pi \times 10^{-3}$	$10^3/4\pi$
$\chi_{mol} = m/(mass \times H/fw)$	m ³ /mol	cm ³ /mol	$4\pi \times 10^{-6}$	$10^6/4\pi$
μ (διαπερατότητα)			$4\pi \times 10^{-7}$	1/ μ_0
Πυκνότητα ενέργειας	erg/cm ³	J/m ³	10^{-1}	10
χ	$\chi = \frac{N}{V} \frac{g_J \mu_B^2 J(J+1)B}{3k_B T}$	$\chi = \mu_0 \frac{N}{V} \frac{g_J \mu_B^2 J(J+1)B}{3k_B T}$		
M	$M = \frac{N}{V} g_J \mu_B J B_J \left(\frac{g_J \mu_B J B}{k_B T} \right)$	$M = \frac{N}{V} g_J \mu_B J B_J \left(\frac{g_J \mu_B J B}{k_B T} \right)$		

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι διαστάσεις της μαγνήτισης στο CGS ταυτίζονται με αυτές του μαγνητικού πεδίου αλλά ένα emu/cm³ δεν είναι αριθμητικά ίσο με ένα Oe ($B=4\pi M+H$).

Ειδική Θερμότητα

Η εντροπία και η ειδική θερμότητα, για σταθερό μαγνητικό πεδίο, θα δίνεται από τις σχέσεις

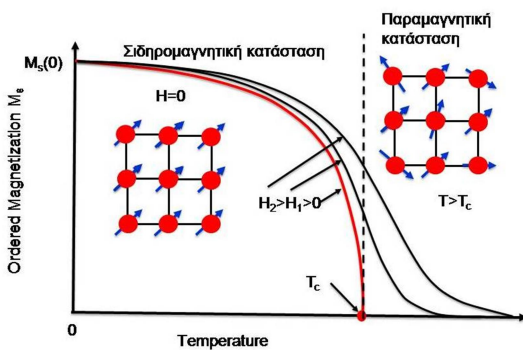
$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{H_0}$$

$$C_H = -T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{H_0}$$

ΣΙΔΗΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Σιδηρομαγνητικά ονομάζονται τα υλικά που εμφανίζουν μη μηδενική μαγνήτιση ανεξάρτητα από την παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου όταν $T > 0$. Η μαγνήτιση μηδενίζεται απότομα σε μία συγκεκριμένη θερμοκρασία η οποία ονομάζεται θερμοκρασία Curie (η κρίσιμη θερμοκρασία T_c). Σκέδαση νετρονίων σε σιδηρομαγνητικά υλικά αποκάλυψε ότι ο σιδηρομαγνητισμός οφείλεται στη διάταξη των ατομικών μαγνητικών ροπών σε μεγάλη εμβέλεια (long range order), λόγω των αλληλεπιδράσεων ανταλλαγής, υπερανταλλαγής και διπλής ανταλλαγής, ανάλογα με το υλικό.

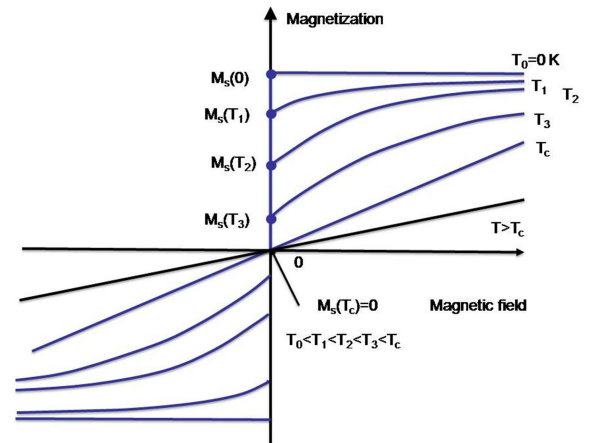
Σε ένα παραμαγνητικό υλικό οι ατομικές μαγνητικές ροπές είναι πλήρως ασυσχέτιστες χωρικά. Με τη βοήθεια των μαγνητικών μετρήσεων μπορούμε να αναγνωρίσουμε αν ένα μαγνητικό υλικό εμφανίζει σιδηρομαγνητική συμπεριφορά. Στο σχήμα 3 φαίνεται η μεταβολή της μαγνήτισης με τη θερμοκρασία, για μηδενικό και μη μηδενικό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Στο απόλυτο μηδέν και σε μηδενικό μαγνητικό πεδίο λόγω των αλληλεπιδράσεων των ατομικών μαγνητικών ροπών αυτές διατάσσονται παράλληλα σε όλο τον όγκο του κρυστάλλου δίνοντας μη μηδενική μαγνήτιση. Καθώς η θερμοκρασία αυξάνει συλλογικές διεγέρσεις που ονομάζονται κύματα του σπίν μειώνουν το μέγεθος των ατομικών ροπών (που είναι μεταξύ τους παράλληλες) και σε ένα πολύ στενό εύρος θερμοκρασιών, απότομα η μαγνήτιση μηδενίζεται.



Σχήμα 3. Μεταβολή με τη θερμοκρασία της μαγνήτισης για $H=0$, για ένα σιδηρομαγνητικό υλικό. Η μαγνήτιση μηδενίζεται απότομα στη θερμοκρασία Curie. Όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι μη μηδενικό τότε η μαγνήτιση μειώνεται σημαντικά για $T > T_c$, μετατρέποντας τη θερμοδυναμική μετάβαση σε μία απότομη αλλαγή.

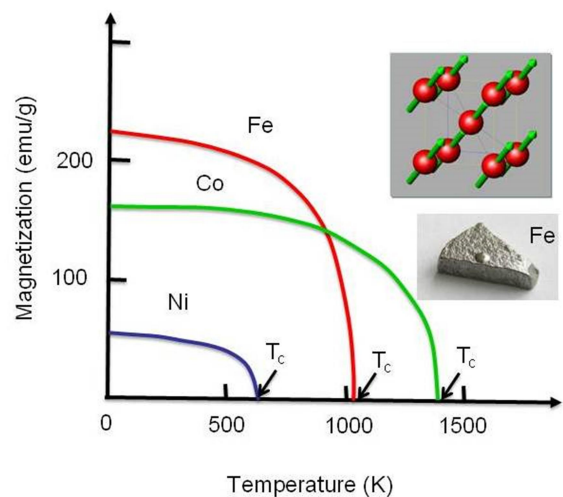
Η μετάβαση από τη σιδηρομαγνητική στην παραμαγνητική κατάσταση στις περισσότερες των περιπτώσεων είναι μία θερμοδυναμική μετάβαση δεύτερης τάξης. Όταν το εξωτερικό μαγνητικό είναι μη μηδενικό αντί η μαγνητική ροπή να μηδενιστεί απότομα στην κρίσιμη θερμοκρασία μειώνεται δραστικά σε εκτεταμένο διάστημα

θερμοκρασιών, αλλάζοντας τη μετάβαση σε απότομη μεταβολή. (δες σχήμα 3)



Σχήμα 4. Μεταβολή της μαγνήτισης σιδηρομαγνητικού υλικού σαν συνάρτηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Χαρακτηριστικό γνώρισμα της σιδηρομαγνητικής κατάστασης είναι η μη μηδενική μαγνήτιση για μηδενικό μαγνητικό πεδίο. Στην κρίσιμη θερμοκρασία η καμπύλη μαγνήτισης διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η μεταβολή της μαγνήτισης για $H \rightarrow 0$, όταν $T < T_c$, γίνεται ασυνεχώς, γεγονός που σημαίνει μετάβαση πρώτης τάξης (σχήμα 4). Στο σχήμα 5 φαίνονται τυπικές καμπύλες μεταβολής της «τακτοποιημένης» μαγνήτισης των στοιχειακών σιδηρομαγνητικών ενώσεων α -Fe, Co και του Ni.



Σχήμα 5 Μεταβολή με τη θερμοκρασία της «τακτοποιημένης» μαγνήτισης ανά μονάδα μάζας (ordered magnetic moment) του Fe, Co και του Ni σε μηδενικό μαγνητικό πεδίο. Η πειραματική εκτίμηση αυτής της μαγνήτισης μπορεί να γίνει άμεσα με σκέδαση νετρονίων και έμμεσα με κατάλληλη ανάλυση μαγνητικών μετρήσεων.

ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ-ΒΡΟΓΧΟΣ ΥΣΤΕΡΗΣΗΣ

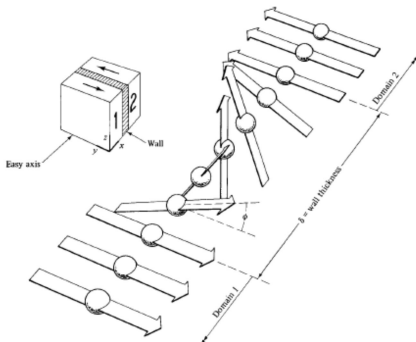
Όπως προαναφέρθηκε η σιδηρομαγνητική κατάσταση χαρακτηρίζεται από «αυθόρμητη» μαγνήτιση η οποία αλλάζει απότομα προσανατολισμό ανάλογα με τη φορά του εξωτερικού πεδίου. Η μαγνητοστατική ενέργεια μόνιμα μαγνητισμένου σώματος όγκου V ισούται με την ενέργεια που απαιτείται για να «χτίσουμε» το μαγνητισμένο σώμα με μαγνήτιση \mathbf{M} , φέρνοντας από το άπειρο στοιχειώδη “μαγνητάκια” μέχρι να κατασκευαστεί η τελική κατανομή μαγνητικής ροπής. Αυτή η ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$W_m = -(\mu_0 / 2) \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} dV$$

όπου \mathbf{H} είναι το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στη μαγνήτιση. Όπως έχουμε αναφέρει στην περίπτωση ομοιόμορφα μαγνητισμένης σφαίρας, με μόνιμη μαγνήτιση \mathbf{M} , στο εσωτερικό της θα ισχύει $\mathbf{H} = -\mathbf{M}/3$, άρα $W_m = -(\mu_0 / 2) \int_V \mathbf{M} \cdot (-\mathbf{M}/3) dV = (\mu_0 / 2)(4\pi R^3 / 3)M^2$.

Προφανώς αυτή η ενέργεια αυξάνει ανάλογα με τον όγκο της σφαίρας. Αν κάποιος λάβει υπόψη την ενέργεια των αλληλεπιδράσεων ανταλλαγής, την ενέργεια μαγνητικής ανισοτροπίας των ατομικών μαγνητικών ροπών και το μέγεθος του δείγματος, η μαγνητοστατική ενέργεια W_m ενός σιδηρομαγνητικού υλικού που αποτελείται από μία μαγνητική περιοχή, για όγκο μεγαλύτερο από ένα «κρίσιμο όγκο», ελαχιστοποιείται όταν η περιοχή χωριστεί σε μαγνητικές περιοχές, ίδιου μέτρου μαγνήτισης αλλά διαφορετικού προσανατολισμού.

Ο προσανατολισμός της μαγνήτισης των διαφόρων περιοχών είναι τέτοιος ώστε η συνολική μαγνητική ροπή του δείγματος να είναι μηδέν. Από μια μαγνητική περιοχή σε άλλη, η μαγνήτιση αλλάζει συνεχώς κατεύθυνση, σε πεπερασμένη απόσταση η οποία ονομάζεται μαγνητικός «τοίχος» (magnetic domain wall). Η κατάσταση που περιγράψαμε παραπάνω φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 6.



Σχήμα 6. Δομή ενός 180° μαγνητικού τοίχου. Το σχήμα το λήφθηκε από το βιβλίο του Cullity [5] όπου ο αναγνώστης μπορεί να βρει μία πλήρη περιγραφή των μαγνητικών υλικών.

Ας συζητήσουμε ποσοτικά το ισοζύγιο ενέργειας σε ένα σιδηρομαγνήτη παρουσία ενός μαγνητικού τοίχου 180° , σαν αυτό του σχήματος 6. Θεωρούμε μία συστοιχία από μαγνητικά άτομα τα οποία απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση a τα οποία αλληλοεπιδρούν σύμφωνα με τη Hamiltonian ανταλλαγής

$$E_{\text{exch}} = -2|J| \sum_i S_i S_{i+1} \cos(\theta_{i,i+1}),$$

όπου $\theta_{i,i+1}$ είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο γειτονικά σπίν. Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι αυτή για την οποία $\theta_{i,i+1} = 0$. Υποθέτουμε ότι η αντιστροφή της κατεύθυνσης της μαγνήτισης γίνεται μέσα σε ένα μαγνητικό τοίχο πάχους $\delta = Na$ με διαδοχική στροφή των γειτονικών σπίν κατά γωνία $\theta_{i,i+1} = \Delta\theta = \pi / N$. Κάθε στροφή των διαδοχικών σπίν επιφέρει αύξηση της ενέργειας λόγω των αλληλεπιδράσεων ανταλλαγής κατά την ποσότητα

$$\begin{aligned} E_{i,i+1}(\Delta\theta) - E_{i,i+1} &= \Delta E \\ &= -2JS - [-2JS(1 - (\Delta\theta)^2 / 2 + \dots)] \\ &\approx JS(\Delta\theta)^2 \end{aligned}$$

Συνεπώς το συνολικό ενεργειακό «κόστος» ανά μονάδα επιφάνειας του μαγνητικού τοίχου θα ισούται

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{exch}} &= \frac{E_{\text{exch}}}{a^2} \\ &= \frac{NJS^2(\pi / N)^2}{a^2} \\ &= JS^2 \frac{\pi^2}{Na^2} \\ &= JS^2 \frac{\pi^2}{\delta a} \end{aligned}$$

όπου $\delta = Na$ είναι το πάχος του τοίχου. Ο λόγος που διαιρέσαμε με a^2 για να βρούμε την ενέργεια του τοίχου, ανά μονάδα επιφάνειας είναι ότι μια γραμμή από σπίν σε ένα κυβικό πλέγμα, καταλαμβάνει εγκάρσια επιφάνεια a^2 . Σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι αυτή που ο μαγνητικός τοίχος έχει άπειρο πάχος. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο διότι η στροφή των σπίν αυξάνει την ενέργεια ανταλλαγής σε σχέση με την κατάσταση όπου όλα τα σπίν είναι παράλληλα. Για να «συμφέρει» ενεργειακά η δημιουργία ενός μαγνητικού τοίχου πρέπει κάποιος άλλος φυσικός μαγνητισμός να εμποδίζει την αύξηση του πάχους του τοίχου. Αυτός είναι η μαγνητοκρυσταλλική ανισοτροπία. Η ενέργεια ανισοτροπίας των ατομικών μαγνητικών ροπών προέρχεται πρωτίστως από την αλληλεπίδραση σπίν-τροχιάς και δευτερευόντως από το μηδενισμό της τροχιακής στροφορμής του μαγνητικού ατόμου

όταν αυτός βρίσκεται στο κρυσταλλικό πλέγμα. Το εύρος τιμών της ενέργειας ανιστροπίας είναι από 10^2-10^7 J/m³ ή $10^{-8}-10^{-3}$ eV/άτομο. Στην περίπτωση που η μαγνητοκρυσταλλική ανιστροπία είναι αξονική, η πυκνότητα της ενέργειας ανιστροπίας μπορεί να αναπαρασταθεί από την εξίσωση

$$E_{\text{anis}} = K \sin^2 \theta$$

όπου $K > 0$ είναι η σταθερά ανιστροπίας και θ η γωνία του σπίν με τον άξονα εύκολής μαγνήτισης. Αν τώρα συμπεριλάβουμε στη μεταβολή της ενέργειας ενός μαγνητικού τοίχου και την ενέργεια ανιστροπίας η μεταβολή ενέργεια γίνεται

$$E_{\text{anis}} = a^3 \sum_{i=1}^N K \sin^2 \theta_i \approx \frac{N}{\pi} \int_0^\pi K \sin^2 \theta d\theta = a^3 \frac{NK}{2}$$

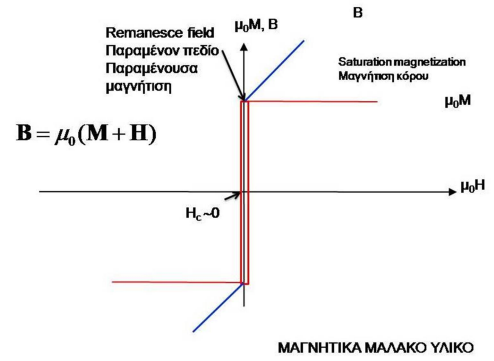
Η συνολική ενέργεια του μαγνητικού τοίχου ανά μονάδα επιφάνειας του συνολικά θα ισούται

$$\sigma_{\text{BW}} = \frac{E_{\text{exch}}}{a^2} + \frac{E_{\text{anis}}}{a^2} = JS^2 \frac{\pi^2}{\delta a} + K \frac{\delta}{2}$$

Το πάχος του μαγνητικού τοίχου θα προκύψει από την ελαχιστοποίηση της επιφανειακής ενέργειας

$$\frac{d\sigma_{\text{BW}}}{d\delta} = -JS^2 \frac{\pi^2}{\delta^2 a} + K \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \delta = \pi S \sqrt{\frac{2J}{Ka}}$$

Με βάση αυτή την εικόνα η μαγνήτιση σιδηρομαγνητικού υλικού σχετίζεται με την κίνηση των μαγνητικών περιοχών ή και την περιστροφή τους. Δεν πρέπει να διαφύγει της προσοχής μας ότι στην περίπτωση σιδηρομαγνητικού υλικού με πολλαπλές μαγνητικές περιοχές για να ορίσουμε τα μαγνητοστατικά μεγέθη της μαγνήτισης, μαγνητικής επαγωγής και μαγνητικού πεδίου του σώματος θα πρέπει να πάρουμε ένα επιπρόσθετο μέσο όρο ως προς όλα τις μαγνητικές περιοχές. Πολλές φορές η μεγάλη μαγνητική ανιστροπία ορισμένων μαγνητικών ατόμων, διάφορα είδη ατελειών και τα όρια των κρυσταλλιτών σε ένα πολυκρυσταλλικό υλικό μπορούν να εμποδίσουν τη μετακίνηση των μαγνητικών περιοχών λόγω της αυξημένης ενέργειας που απαιτείται για αυτό. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται «κάρφωμα» των μαγνητικών «τοίχων» (pinning of the domain walls). Η δέσμευση των μαγνητικών τοίχων σε ατέλειες ή στα όρια των κρυσταλλιτών είναι υπεύθυνη για τη μαγνητική υστέρηση των σιδηρομαγνητικών υλικών.



Σχήμα 7. Καμπύλη μαγνήτισης μαγνητικά «μαλακού» υλικού. Η μαγνήτιση του υλικού αντιστρέφεται σε σχετικά μικρό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Η κίνηση/περιστροφή και δέσμευση των μαγνητικών τοίχων καθορίζει τη μορφή του βρόγχου υστέρησης των σιδηρομαγνητικών υλικών. Τα σημαντικότερα σημεία του βρόγχου υστέρησης είναι:

(α) Η μαγνήτιση κόρου (M_s , saturation magnetization) που αποκτά ένα σιδηρομαγνητικό υλικό όταν το τοποθετήσουμε σε μαγνητικό πεδίο μεγάλης έντασης έτσι ώστε να υπάρχουν μαγνητικές περιοχές με μαγνήτιση παράλληλη στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Όταν το σιδηρομαγνητικό υλικό βρίσκεται στον κόρο η μαγνήτιση παραμένει σταθερή και δεν αλλάζει με το μαγνητικό πεδίο.

(β) Η παραμένουσα μαγνήτιση (M_r , remanence magnetization), η οποία ισούται με τη μαγνήτιση που αποκτά ένα σιδηρομαγνητικό υλικό όταν μηδενιστεί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο αφού πρώτα το έχουμε φέρει σε κατάσταση κόρου.

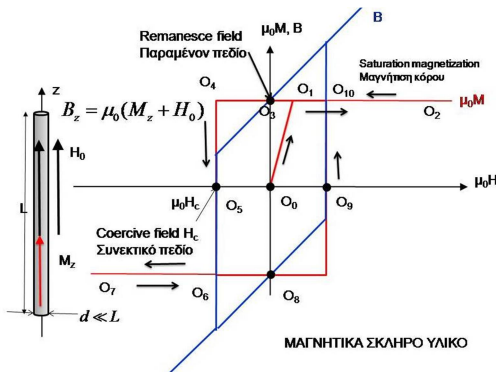
(γ) Το συνεκτικό πεδίο H_c (coercive field) το οποίο ισούται με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο για το οποίο η μαγνήτιση μηδενίζεται.

(δ) Η ενέργεια ανά μονάδα όγκου που απαιτείται για τη μαγνήτιση σιδηρομαγνητικού δείγματος. Αυτή ισούται με το εμβαδόν που ορίζεται από την ευθεία $B = B_{\text{max}}$ και την καμπύλη «παρθενικής μαγνήτισης» $H(B)$ αμαγνήτιστου δείγματος ($W = \int_0^{B_{\text{max}}} H(B) dB$).

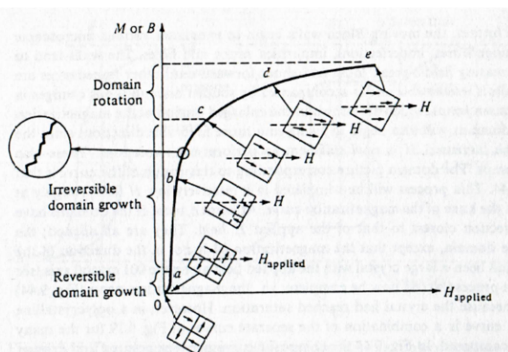
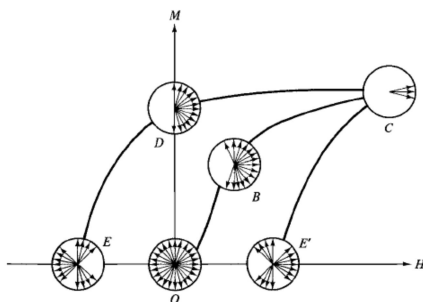
(ε) Η απώλεια ενέργειας για ένα πλήρη βρόγχο, η οποία ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται στο βρόγχο υστέρησης της μαγνητικής επαγωγής.

Στους παραπάνω ορισμούς θεωρήσαμε ότι το σχήμα του δείγματος είναι κύλινδρος μεγάλου μήκους, σε σχέση με την ακτίνα του και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα του κυλίνδρου. Θυμίζουμε ότι σ

αυτή την περίπτωση ο συντελεστής απομαγνήτισης είναι ίσος με το μηδέν ($n_{zz} \approx 0$), έτσι ώστε μέσα στο υλικό να ισχύει $H_{in} = H_0$. Ο βρόγχος υστέρησης της μαγνητικής επαγωγής μπορεί να υπολογιστεί από το βρόγχο υστέρησης της μαγνήτισης με τη βοήθεια της σχέσης $B_{in} = \mu_0(M + H_0)$. Ανάλογα με το συνεκτικό πεδίο τα σιδηρομαγνητικά υλικά χωρίζονται σε «μαλακά» και «σκληρά» μαγνητικά υλικά. Στα σχήματα 7 και 8 φαίνονται βρόγχοι υστέρησης της μαγνήτισης και της μαγνητικής επαγωγής για ένα μαγνητικά «μαλακό» και «σκληρό» υλικό, αντίστοιχα.



Σχήμα 8. Βρόγχος υστέρησης της μαγνήτισης και της μαγνητικής επαγωγής μαγνητικά σκληρού υλικού. Ο βρόγχος αφορά δείγμα μηδενικού συντελεστή απομαγνήτισης ($H = H_0$).



Σχήμα 9. (α) Κατανομή των μαγνητικών περιοχών σιδηρομαγνητικού υλικού σε διάφορα σημεία του βρόγχου υστέρησης (το σχήμα το πήραμε από το βιβλίο του Chikazumi [6] στο οποίο ο αναγνώστης μπορεί να βρει μία πλήρη περιγραφή της φυσικής του σιδηρομαγνητισμού).

Το σχήμα 9 δείχνει πως αλλάζει η πολική κατανομή των μαγνητικών περιοχών σε διάφορες διαδρομές του βρόγχου υστέρησης για ένα πολυκρυσταλλικό σιδηρομαγνητικό δείγμα, στο οποίο οι ατομικές μαγνητικές ροπές έχουν μία προτιμητέα κατεύθυνση σε σχέση με τους κρυσταλλογραφικούς άξονες. Θεωρούμε σαν αρχικό σημείο του βρόγχου υστέρησης την κατάσταση μηδενικής μαγνήτισης (σημείο O στο σχήμα 9) όπου η κατανομή είναι ισοτροπική (η κατανομή των κατευθύνσεων της μαγνήτισης στην επιφάνεια μίας σφαίρας είναι ομοιόμορφη). Καθώς το εξωτερικό πεδίο αυξάνει οι περιοχές με μαγνήτιση που έχει κατεύθυνση αντίθετη με το πεδίο, μειώνονται έτσι ώστε να έχουμε αύξηση των περιοχών με μαγνήτιση στην κατεύθυνση του εξωτερικού πεδίου. Οι περιοχές των οποίων η μαγνήτιση βρίσκεται στο θετικό ημισφαίριο αυξάνονται (σημείο B στο σχήμα 9). Για μεγάλες τιμές του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου οι μαγνήτιση όλων των περιοχών γίνεται σχεδόν παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο (σημείο C στο σχήμα 9).

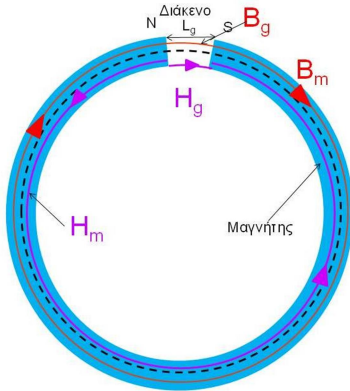
(β) Φυσικοί μηχανισμοί που λαμβάνουν μέρος στη μαγνήτιση πολυκρυσταλλικού, αρχικά αμαγνήτιστου, σιδηρομαγνητικού υλικού. Κάθε κρυσταλλίτης αποτελείται από πολλές μαγνητικές περιοχές. Αρχικά οι μαγνητικές περιοχές έχουν τέτοια διάταξη έτσι ώστε να δίνουν μηδενική μαγνήτιση. Καθώς το μαγνητικό πεδίο αυξάνει, συμβαίνει μετακίνηση των τοίχων Bloch με αποτέλεσμα το μέγεθος κάποιων περιοχών να αυξάνει σε βάρος των υπολοίπων. Σε μικρά πεδία αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει με αντιστεπτό τρόπο. Για ενδιάμεσες τιμές του μαγνητικού πεδίου, η κίνηση των τοίχων Bloch γίνεται με απότομα άλματα -γνωστά σαν άλματα Barkhausen- τα οποία συνιστούν μία μη αντιστρεπτή διεργασία. Αυτά τα άλματα σχετίζονται με την υπερπήδηση μικροσκοπικών ατελειών (χημικές ανομοιογένειες, όρια των κρυσταλλιτών κενά). Όταν εξαντληθεί η δυνατότητα για κίνηση των τοίχων Bloch, τότε ενεργοποιείται ο μηχανισμός της στροφής της μαγνήτισης των μη προσανατολισμένων μαγνητικών περιοχών, στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο [Plonus].

Αυτή η κατάσταση ονομάζεται «κατάσταση κόρου» (saturated state). Όταν το πεδίο μειώνεται, κάθε μαγνητική περιοχή στρέφεται στην πλησιέστερη θετική εύκολη κατεύθυνση, έτσι ώστε στο σημείο D (κατάσταση με παραμένουσα μαγνήτιση) η κατανομή των μαγνητίσεων των μαγνητικών περιοχών του δείγματος να καταλαμβάνεται το θετικό ημισφαίριο. Όταν το μαγνητικό πεδίο αντιστραφεί, τότε η μαγνήτιση των περιοχών με μαγνήτιση αντίθετη με αυτή του εξωτερικού πεδίου αντιστρέφεται και αποκτούν φορά στην κατεύθυνση του εξωτερικού πεδίου. Οι περιοχές με σχεδόν κάθετη μαγνήτιση παραμένουν αμετάβλητες. Μ' αυτό τον τρόπο παίρνουμε την κατανομή μαγνητίσεων του σημείου E. Σ' αυτό το σημείο η μέση μαγνήτιση του δείγματος ισούται με μηδέν. Το μέτρο το μαγνητικού πεδίου που προκαλεί την κατάσταση μηδενικής

μαγνήτισης του δείγματος ονομάζεται συνεκτικό πεδίο (coercive field). Επιπρόσθετη αύξηση του μαγνητικού πεδίου προκαλεί κόρο στην αρνητική κατεύθυνση. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να περιγράψουμε οποιοδήποτε σημείο του βρόγχου υστέρησης αρκεί να ξέρουμε τη διαδρομή που οδηγεί σ' αυτό.

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Αν κάποιος θέλει να χαρακτηρίσει ένα μαγνητικό υλικό χρειάζεται να πρώτα να μετρήσει τον βρόγχο υστέρησης της μαγνήτισης του και μετά να εκτιμήσει το συνεκτικό πεδίο και την παραμένουσα μαγνήτιση. Από τον βρόγχο υστέρησης μπορούμε υπολογίσουμε μία επιπρόσθετη παράμετρο η οποία ονομάζεται γινόμενο ενέργειας. Οι δύο πρώτες παράμετροι χαρακτηρίζουν γενικά ένα «σκληρά» μαγνητικό υλικό ενώ το γινόμενο ενέργειας σχετίζεται με τη λειτουργία ενός μαγνήτη σε ένα μαγνητικό κύκλωμα. Για να κατανοήσουμε τη φυσική σημασία του γινόμενου ενέργειας θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Θεωρούμε ένα κυκλικό δακτύλιο (κυκλικό σωληνοειδές) με εμβαδόν διατομής A , από μαγνητικό υλικό στον οποίο έχει αφαιρεθεί ένα μικρό τμήμα μήκους $L_g \ll L$ (L είναι το συνολικό μήκος του δακτύλιου) έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα διάκενο (δες σχήμα 10). Η συγκεκριμένη γεωμετρία είναι ισοδύναμη με αυτή ενός δείγματος με μηδενικό συντελεστή απομαγνήτισης.



Σχήμα 10 Ανοικτό μαγνητικό κύκλωμα μαγνητικού υλικού. Το μαγνητικό υλικό αποτελείται από ένα δακτύλιο, στον οποίο έχει αφαιρεθεί ένα μικρό τμήμα έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα διάκενο. Το μήκος και η διατομή του μαγνήτη και του διακένου είναι L_m, A και L_g, A , αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με (H_g, B_g) και (H_m, B_m) τα μέτρα του μαγνητικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής στο διάκενο και μέσα στο μαγνητικό υλικό, αντίστοιχα. Αν η ακτίνα του δακτύλιου θεωρηθεί πολύ μεγαλύτερη από τη μεγαλύτερη διάσταση της διατομής του μπορούμε να θεωρήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του δακτύλιου είναι ομογενές. Επιπρόσθετα, επειδή το μήκος του διακένου είναι πολύ μι-

κρότερο σε σχέση με το συνολικό μήκος του δακτύλιου θεωρούμε ότι οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου δεν εξέρχονται από το διάκενο. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere και λαμβάνοντας υπόψη ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην περιφέρεια ομόκεντρου κύκλου με το δακτύλιο (δες διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 10) που περνά από το μέσο του πάχους του δακτύλιου θα είναι ίσο με το μηδέν. Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Ampere παίρνουμε:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \int_A \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{H}_g \cdot \hat{\mathbf{e}}_t L_g + \mathbf{H}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}_t L_m = 0 \Rightarrow H_g L_g - H_m L_m = 0.$$

$L_m = L - L_g$ είναι το μήκος του μαγνήτη και $\hat{\mathbf{e}}_t$ το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στον δακτύλιο. Επομένως, το μαγνητικό πεδίο στο διάκενο, θα έχει αντίθετη φορά σε σχέση με τη φορά του μαγνητικού πεδίου μέσα στο μαγνητικό υλικό. Επίσης, λόγω της εξίσωσης $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ συνεπάγεται ότι η κάθετη συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής στη διεπιφάνεια μαγνήτη-διάκενο θα πρέπει να είναι συνεχής. Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση που κάναμε ότι μόνο η εφαπτομενική συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής και του μαγνητικού πεδίου είναι μη μηδενική (αυτό ισχύει με μεγάλη ακρίβεια στο κέντρο της διατομής) καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathbf{B}_g \cdot \hat{\mathbf{e}}_t = \mathbf{B}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}_t \Rightarrow B_g = B_m.$$

Επειδή στη διάκενο ισχύει $B_g = \mu_0 H_g$ λύνοντας ως προς H_g τις προηγούμενες σχέσεις και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$\mu_0 H_g^2 V_g / 2 = H_m B_m V_m / 2$$

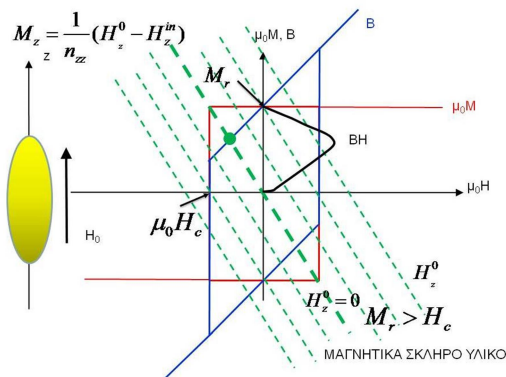
$V_m = AL_m, V_g = AL_g$ είναι ο όγκος του μαγνήτη και του διακένου αντίστοιχα. Η προηγούμενη σχέση περιέχει ένα σημαντικό συμπέρασμα. **Ο όγκος του μαγνήτη που απαιτείται για παραγωγή ένα συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο στο διάκενο είναι ελάχιστος όταν το γινόμενο BH στο μαγνήτη γίνεται μέγιστο. Το γινόμενο BH ονομάζεται ενεργειακό γινόμενο και μαζί με το συνεκτικό πεδίο την παραμένουσα μαγνήτιση και το βρόγχο υστέρησης χαρακτηρίζουν πλήρως ένα μόνιμο μαγνήτη.**

Επιπλέον η ποσότητα $W_g = \mu_0 H_g^2 V_g / 2$ είναι ίση με τη μαγνητοστατική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο διάκενο του μαγνητικού κυκλώματος.

Στα σχήματα 11 και 12 φαίνονται οι βρόγχοι μαγνητικής υστέρησης δύο μαγνητικών υλικών με $M_r > H_c$ και

$M_r < H_c$ (κόκκινο χρώμα) και των αντίστοιχων βρόγχων μαγνητικής επαγωγής (μπλε χρώμα). Θεωρούμε ότι οι βρόγχοι έχουν μετρηθεί από ένα δείγμα στο οποίο ο συντελεστής απομαγνήτισης, κατά μήκος του εξωτερικού πεδίου, ισούται με μηδέν. Η μεταβολή του γινόμενου ενέργειας, σαν συνάρτηση της μαγνητικής επαγωγής, μπορεί να εκτιμηθεί από το δεύτερο τεταρτημόριο του βρόγχου υστέρησης της μαγνητικής επαγωγής σχεδιάζοντας το γινόμενο $B|H|$ σαν συνάρτηση της μαγνητικής επαγωγής για $-H_c \leq H \leq 0$. Το γινόμενο ενέργειας σαν συνάρτηση της μαγνητικής επαγωγής φαίνεται σχηματικά στα σχήματα 11 και 12 με μαύρη έντονη γραμμή.

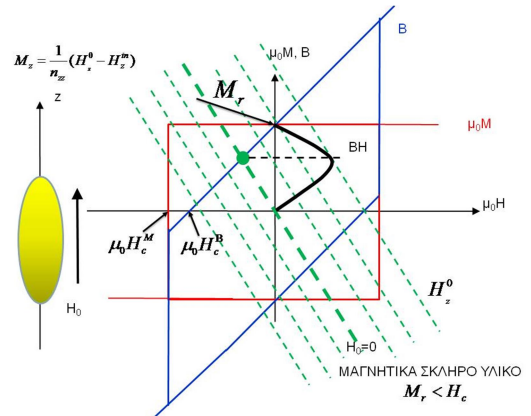
Θα εξετάσουμε τώρα πώς θα προσδιορίσουμε το σημείο λειτουργίας μόνιμου μαγνήτη, με συγκεκριμένο συντελεστή απομαγνήτισης, εάν γνωρίζουμε το βρόγχο υστέρησης από το ίδιο σιδηρομαγνητικό υλικό, ο οποίος έχει μετρηθεί σε δείγμα μηδενικού συντελεστή απομαγνήτισης.



Σχήμα 11. Βρόγχος υστέρησης της μαγνήτισης και της μαγνητικής επαγωγής σιδηρομαγνητικού υλικού για το οποίο ισχύει $M_r > H_c$ και έχει μετρηθεί σε ένα δείγμα με μηδενικό συντελεστή απομαγνήτισης. Σ' αυτή την περίπτωση $H_c(M=0) = H(B=0)$. Η μαύρη καμπύλη δείχνει τη μεταβολή του ενεργειακού γινομένου με τη μαγνητική επαγωγή. Οι πράσινες διακεκομμένες γραμμές είναι η γραφική παράσταση των ευθειών $M_z = (H_z^0 - H_z^{in}) / n_{zz}$ με παράμετρο το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και αφορούν ένα δείγμα με σχήμα ελλειψοειδούς με συντελεστή απομαγνήτισης για τον άξονα-z, n_{zz} . Οι διακεκομμένες ευθείες γίνονται κάθετες στον άξονα-H για κύλινδρο με ($L \gg D$) και οριζόντιες γραμμές για πλάκα με το πεδίο κάθετο στην επιφάνεια της.

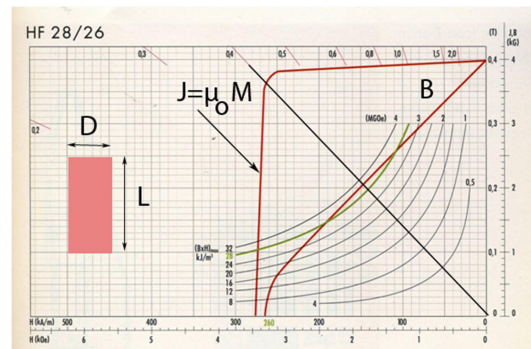
Υποθέτουμε ότι το σχήμα του μαγνήτη μπορεί να προσομοιωθεί με ελλειψοειδές με συγκεκριμένους συντελεστές απομαγνήτισης. Οι διακεκομμένες πράσινες γραμμές, στα σχήματα 11 και 12, αντιπροσωπεύουν τη σχέση $H_z^0 = H_z^{in} + n_{zz}M_z \Rightarrow M_z = (H_z^0 - H_z^{in}) / n_{zz}$ για διάφορες τιμές του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων αντιστοιχεί σε μηδενικό εξωτερικό πεδίο. Συνεπώς, **το σημείο λειτουργίας του μαγνήτη σε μηδενικό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο,**

είναι το σημείο τομής της συγκεκριμένης ευθείας, με το δεύτερο τεταρτημόριο του βρόγχου υστέρησης.



Σχήμα 12. Βρόγχος υστέρησης της μαγνήτισης και της μαγνητικής επαγωγής σιδηρομαγνητικού υλικού για το οποίο ισχύει $M_r < H_c$ και έχει μετρηθεί σε ένα δείγμα με μηδενικό συντελεστή απομαγνήτισης. Σ' αυτή την περίπτωση $H_c(M=0) \neq H(B=0)$. Η μαύρη καμπύλη δείχνει τη μεταβολή του ενεργειακού γινομένου με τη μαγνητική επαγωγή. Οι πράσινες διακεκομμένες γραμμές είναι η γραφική παράσταση των ευθειών $M_z = (H_z^0 - H_z^{in}) / n_{zz}$ με παράμετρο το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και αφορούν ένα δείγμα με σχήμα ελλειψοειδούς με συντελεστή απομαγνήτισης για τον άξονα-z, n_{zz} .

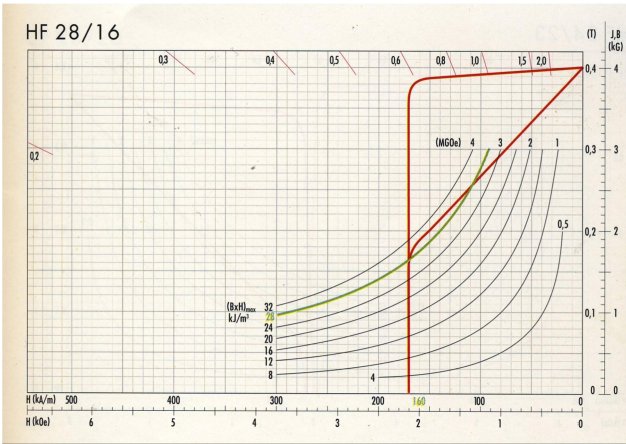
Προφανώς, για να εκμεταλλευτούμε πλήρως το μαγνήτη θα πρέπει το σχήμα του να αντιστοιχεί σε συντελεστή απομαγνήτισης που δίνει ευθεία λειτουργίας που τέμνει το βρόγχο εκεί που το ενεργειακό γινόμενο γίνεται μέγιστο.



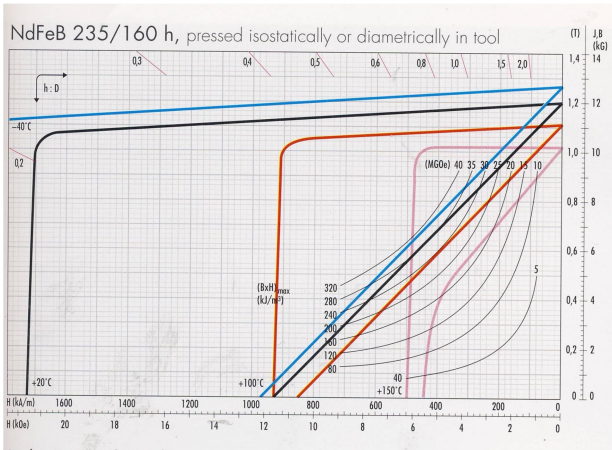
Σχήμα 13 Καμπύλη απομαγνήτισης της ένωσης $SrFe_{12}O_{19}$. Στα διαγράμματα υπάρχουν κλίμακες με μονάδες στο SI και CGS των ποσοτήτων B, H και $J = \mu_0 M$. Τα μικρά ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν στην ευθεία $M_z = -H_z^{in} / n_{zz}$ για κυλινδρικό δείγμα με για διάφορες τιμές του λόγου L / D .

Στα σχήματα 13-16 φαίνονται οι καμπύλες απομαγνήτισης (το 2 τεταρτημόριο του βρόγχου υστέρησης) για εμπορικούς μαγνήτες της εταιρίας Magnetfabrik για να

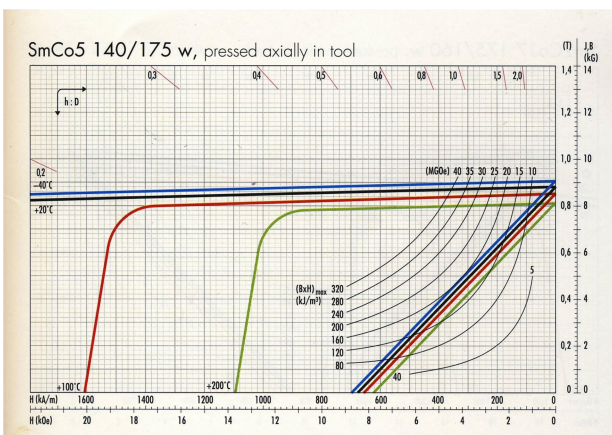
έχουμε μία ιδέα των πραγματικών τιμών των παραμέτρων μαγνητικού υλικού.



Σχήμα 14 Καμπύλη απομαγνήτισης της ένωσης $BaFe_{12}O_{19}$



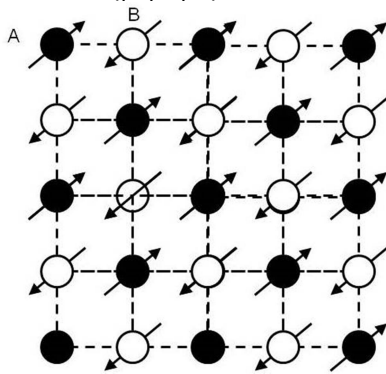
Σχήμα 15 Καμπύλη απομαγνήτισης της ένωσης $Nd_2Fe_{14}B$



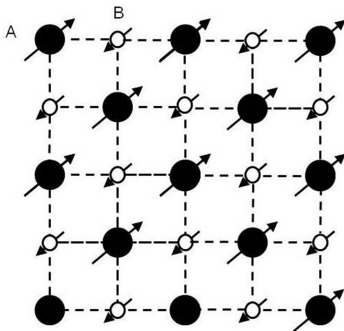
Σχήμα 16 Καμπύλη απομαγνήτισης της ένωσης $SmCo_5$

ΑΝΤΙΣΙΔΗΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΙΔΗΡΙΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Μία άλλη κατηγορία μαγνητικών υλικών τα οποία παρουσιάζουν τάξη των μαγνητικών ροπών σε μεγάλη εμβέλεια (long range order) είναι τα αντισιδηρομαγνητικά υλικά και τα σιδηριμαγνητικά υλικά. Σε ένα απλό αντισιδηρομαγνητικό υλικό υπάρχουν δύο μαγνητικά υποπλέγματα, έστω A και B. Σε κάθε μαγνητικό υπόπλεγμα οι ατομικές μαγνητικές ροπές είναι παράλληλες με την ίδια κατεύθυνση (σιδηρομαγνητικά συζευγμένες). Οι μαγνητικές ροπές των δύο υποπλεγμάτων είναι μεταξύ τους αντιπαράλληλες. Συνεπώς η συνολική μαγνήτιση για ένα αντισιδηρομαγνητικό υλικό είναι μηδέν. Στο σχήμα 17 φαίνεται η διεύθυνση των ατομικών μαγνητικών ροπών σε ένα απλό αντισιδηρομαγνητικό υλικό.



Σχήμα 17 Διάταξη των ατομικών μαγνητικών ροπών σε ένα απλό αντισιδηρομαγνητικό υλικό



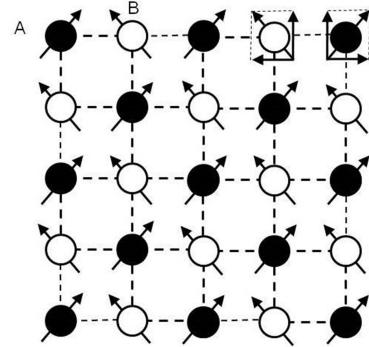
Σχήμα 18 Σιδηριμαγνητικό υλικό με διαφορετικά μέτρα των ατομικών μαγνητικών ροπών των δύο υποπλεγμάτων.

Όπως και στα σιδηρομαγνητικά υλικά η αντισιδηρομαγνητική αλληλεπίδραση των ατομικών μαγνητικών ροπών

$$E = \sum_{i,j} |J_{ij}| \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

επιφέρει μετάβαση από την παραμαγνητική στην αντισιδηρομαγνητική κατάσταση στην κρίσιμη θερμοκρασία η οποία ονομάζεται θερμοκρασία Neel T_N . Στην περίπτωση των σιδηριμαγνητικών υλικών διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση (σχήμα 18) στο σιδηριμα-

γνητικό υλικό υπάρχουν δύο αντιπαράλληλα υποπλέγματα, αλλά σ' αυτά οι ατομικές μαγνητικές ροπές δεν έχουν ίσα μέτρα.



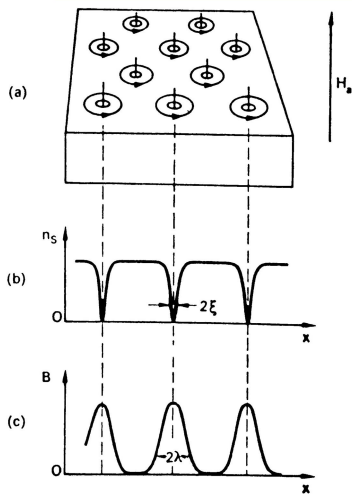
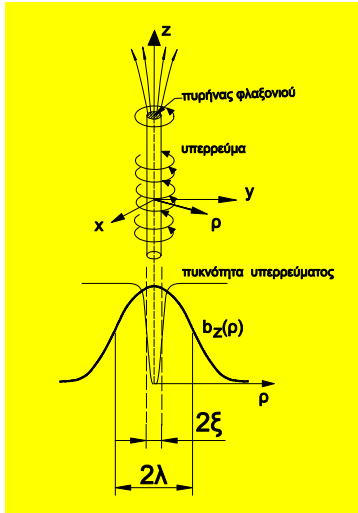
Σχήμα 19 Σιδηριμαγνητικό υλικό με ίσα μέτρα ατομικών μαγνητικών ροπών των οποίων η γωνία είναι διαφορετική από 180° (canted antiferromagnet).

Αυτή η ανισότητα επιφέρει στο υλικό μη μηδενική μαγνήτιση για θερμοκρασίες μικρότερες από την θερμοκρασία Neel.

Στη δεύτερη περίπτωση (σχήμα 19) αν και τα μέτρα των μαγνητικών ροπών των δύο υποπλεγμάτων είναι ίσα αυτά δεν είναι αντιπαράλληλα, με αποτέλεσμα συνολικά, να έχουμε μη μηδενική μαγνήτιση. Θα μπορούσαμε να έχουμε σιδηριμαγνητικά υλικά με συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων όπως και υλικά με ελικοειδή διεύθυνση των ατομικών μαγνητικών ροπών. Η παρουσία αυτών των περιπτώσεων καθώς και όλων των λεπτομερειών σχετικά με στατιστική μηχανική και την μορφή των καμπύλων μαγνήτισης αυτών των υλικών ξεφεύγει από το σκοπό αυτών των σημειώσεων. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες λεπτομέρειες στην σχετική βιβλιογραφία.

(4ζ) ΥΠΕΡΑΓΩΓΙΜΑ ΥΛΙΚΑ

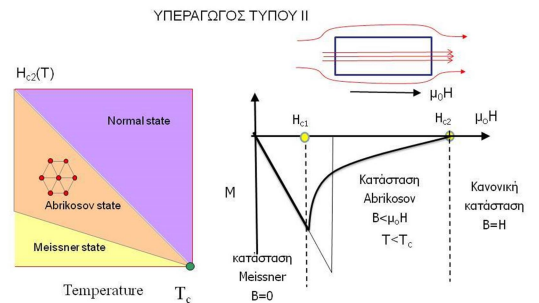
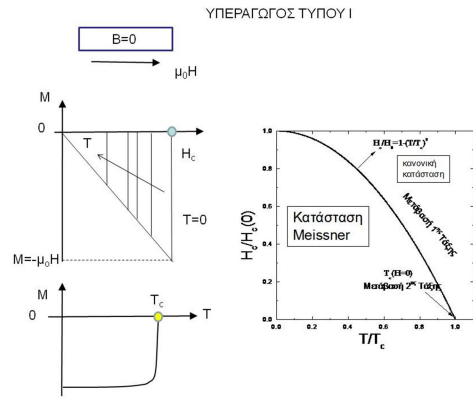
Οι υπεραγωγοί χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, (τύπου I και II) όσον αφορά τη συμπεριφορά τους μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Η σημαντικότερη κατηγορία είναι οι υπεραγωγοί τύπου II στους οποίους, σε αντίθεση με τους υπεραγωγούς τύπου I, το μαγνητικό πεδίο εισέρχεται στο εσωτερικό τους υπό μορφή σωλήνων μαγνητικής ροής με διάμετρο της τάξης του μήκους διείσδυσης λ οι οποίοι ονομάζονται φλαξόνια (δες σχήμα 1).



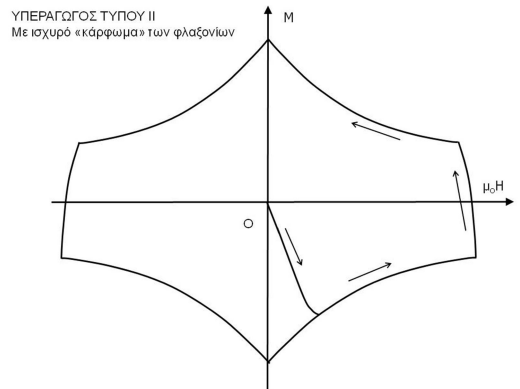
Σχήμα 1 (Κάτω) Κατάσταση Abrikoson σε υπεραγωγό δευτέρου είδους. (Πάνω) Δομή φλαξονίου.

Το μήκος λ αντιπροσωπεύει το χαρακτηριστικό μήκος διείσδυσης του μαγνητικού πεδίου σε ένα υπεραγωγό και είναι αντιστρόφως ανάλογο της πυκνότητας των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων. Τα φλαξόνια δημιουργούνται από δίνες υπερρεύματος (ηλεκτρικό ρεύμα από ζευγαρωμένα ηλεκτρόνια) οι οποίες έχουν διάμετρο της τάξης του ξ . Το ξ είναι ανάλογο του μήκους συσχέτισης του υπεραγωγού $\xi \propto \hbar v_F / \Delta$. Τα φλαξόνια σε ιδανικό υπεραγωγό τύπου II διατάσσονται σε εξαγωγικό πλέγμα

(κατάσταση Abrikoson). Αν δοκιμάσουμε να περάσουμε ηλεκτρικό ρεύμα ενώ ο υπεραγωγός είναι στην κατάσταση Abrikoson τότε η κίνηση των φλαξονίων λόγω της δύναμης Lorentz, θα προκαλέσει απώλεια ενέργειας με αποτέλεσμα ο υπεραγωγός να χάσει την ιδιότητα του ιδανικού αγωγού ($\rho = 0$). Αυτό το γεγονός θα καθιστούσε του υπεραγωγούς ακατάλληλους για πρακτικές εφαρμογές. Αν εισάγουμε ατέλειες, τάξης μεγέθους του μήκους συσχέτισης ξ , σε ένα υπεραγωγό δευτέρου είδους, αυτές προκαλούν δέσμευση των φλαξονίων. Αυτό έχει σαν συνέπεια ο υπεραγωγός παρουσία μαγνητικού πεδίου να συμπεριφέρεται σαν ένας μη γραμμικός αγωγός του ηλεκτρικού ρεύματος. Δηλαδή η σχέση ρεύματος-ηλεκτρικού πεδίου γίνεται μία ισχυρά μη γραμμική συνάρτηση, $E = E_0 (J / J_c)^n$, $n \gg 1$.



Σχήμα 2 Καμπύλες μαγνήτισης ιδανικών υπεραγωγών τύπου I και II



Σχήμα 3. Βρόγχος υστέρησης της μαγνήτισης υπεραγωγού τύπου II με ισχυρό «κάρφωμα» των φλαξονίων.

Στην προηγούμενη σχέση E, J, J_c είναι το ηλεκτρικό πεδίο, η πυκνότητα ρεύματος και η κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος, αντίστοιχα. Όταν ο εκθέτης γίνει πολύ μεγάλος τότε η σχέση $E(J)$ μπορεί να προσεγγιστεί με τη συνάρτηση βήματος ($E=0$ όταν $J < J_c$ και $E=E_o$ όταν $J > J_c$). Συνεπώς όταν ένας υπεραγωγός δευτέρου είδους βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο $H > H_p > H_{c1}$ τα φλαξόνια θα καταναμηθούν με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε ο υπεραγωγός να διαρρέεται από πυκνότητα ρεύματος J_c . Όπως και στα σιδηρομαγνητικά υλικά ένας υπεραγωγός με ισχυρό «κάρφωμα» των φλαξονίων εμφανίζει μαγνητική υστέρηση. Στο σχήμα 2 φαίνονται οι καμπύλες μαγνήτισης ιδανικών υπεραγωγών τύπου I και II ενώ στο σχήμα 3 η καμπύλη μαγνήτισης υπεραγωγού τύπου II με ισχυρό «κάρφωμα».

Στην περίπτωση των μετρήσεων υπεραγωγίων δειγμάτων επειδή το σχήμα τους είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, το κρίσιμο ρεύμα θα κινείται παράλληλα στις πλευρές του παραλληλεπιπέδου με μέτρο J_c . Η μαγνητική ροπή που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη κατανομή ρεύματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}_c dV$$

Επειδή η πυκνότητα ρεύματος είναι ανεξάρτητη από τις συντεταγμένες μπορούμε να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση και να πάρουμε το αποτέλεσμα σε κλειστή μορφή:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}_c dV \Rightarrow \mathbf{m} = -\frac{J_c}{4} Va \left(1 - \frac{a}{3b}\right) \mathbf{e}_z .)$$

Με βάση αυτή τη σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα κρίσιμου ρεύματος του υπεραγωγού εφόσον γνωρίζουμε τις διαστάσεις του και τη μαγνητική ροπή.

(4^η) Ηλεκτροδυναμική υπεραγωγών με μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου-πυκνότητας ρεύματος

Ένας υπεραγωγός παρουσία κέντρων καρφώματος των φλαξονίων για $H_{c1}=0$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας αγωγός με μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου ρεύματος. Για χάρη της απλότητας θα υποθέσουμε ότι ο υπεραγωγός είναι μια άπειρη πλάκα παράλληλη στο επίπεδο yz, πάχους d. Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα z. Η δύναμη Lorentz που ασκείται στα φλαξόνια από ένα ηλεκτρικό ρεύμα προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο το οποίο δίνεται από τη σχέση

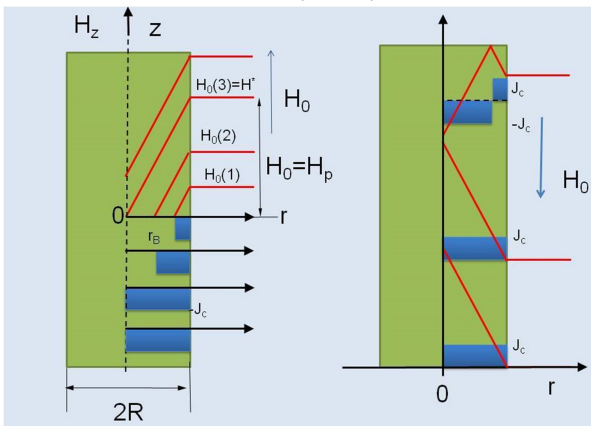
$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Η ταχύτητα των φλαξονίων μπορεί να υπολογιστεί από μία σχέση τύπου Arrhenius

$$u = \exp(-E/k_B T)$$

Είναι λογικό να υποθέσουμε επιπρόσθετα ότι ο ενεργειακός φραγμός εξαρτάται από την πυκνότητα ρεύματος. Στη βιβλιογραφία έχει προταθεί μία λογαριθμική σχέση $U = U_0 \ln(J/J_c)$, η οποία μπορεί να προκύψει από τη θεωρία συλλογικού καρφώματος των φλαξονίων. Μετά από αντικατάσταση στη σχέση 2 παίρνουμε:

$$E = E_c (J/J_c)^n .$$



Σχήμα 1. Κατανομή του μαγνητικού πεδίου και της πυκνότητας ρεύματος υπεραγωγίμου κυλίνδρου άπειρου μήκους και ακτίνας R για διάφορες τιμές του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου H $|z$ -άξονα. Με την κόκκινη γραμμή αναπαρίσταται η μαγνητική επαγωγή για διαφορές τιμές του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Στο αριστερό σχήμα φαίνονται οι χωρικές μεταβολές του $h(r)$ για αύξηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ενώ το δεξιό σχήμα αφορά την περίπτωση μείωσης του εξωτερικού πεδίου. Η τιμή $H_0(3)$ αντιστοιχεί σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο για το οποίο η μαγνητική επαγωγή διεισδύει στο κέντρο του κυλίνδρου.

Το πρότυπο Bean περιγράφει την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά, υπεραγωγού δευτέρου είδους με ισχυρή δέσμευση φλαξονίων και λέμε ότι ο υπεραγωγός βρίσκεται σε κρίσιμη κατάσταση όσον αφορά την χωρική κατα-

νομή των φλαξονίων. Το πρότυπο Bean μπορεί να περιγραφεί ποσοτικά με μία τροποποιημένη μορφή του νόμου του Ampere θεωρώντας ότι η πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσεται στο εσωτερικό του υπεραγωγού λόγω της παρουσίας εξωτερικού μαγνητικού πεδίου εξαρτάται από την «ιστορία» μεταβολής του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου σύμφωνα με τη σχέση (υποθέτουμε ότι $H_{c1} \approx 0$ άρα θα ισχύει $\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}$)

$$\nabla \times \mathbf{b} = \pm \mu_0 \mathbf{J} \quad (1)$$

όπου $|\mathbf{J}| = J_c$ και \mathbf{b} η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του μαγνητικού πεδίου. Το πρόσημο μείον (αντίστοιχα συν) αφορά την περίπτωση αύξησης (αντίστοιχα μείωση) του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Στη κρίσιμη κατάσταση ο υπεραγωγός θα διαρρέεται από ρεύμα με κατεύθυνση που τείνει να αναιρέσει τη διείσδυση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η κατανομή της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό του υπεραγωγού και η μεταβολή της στην κρίσιμη κατάσταση μοιάζει με αυτή που έχει ένας σωρός με άμμο. Όση άμμο και αν προσθέτουμε στον σωρό η κλίση των πρανών του λόφου παραμένει σταθερή και ίση με τη γωνία εσωτερικής τριβής των κόκκων της άμμου. Για απλότητα των υπολογισμών των ηλεκτρομαγνητικών ποσοτήτων υπεραγωγού που βρίσκεται στην κρίσιμη κατάσταση επιλέγουμε το δείγμα να είναι ένας κύλινδρος άπειρου μήκους και ακτίνας R (δες σχήμα 1), με τον άξονα του παράλληλο στον άξονα z (μονοδιάστατο πρόβλημα). Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο H_0 είναι επίσης παράλληλο στον άξονα z . Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση 1 σε κυλινδρικές συντεταγμένες γίνεται

$$\left| \frac{\partial h_z(r)}{\partial r} \right| = J_\theta \quad (2)$$

όπου $h \equiv h_z$. Σύμφωνα με τη σχέση 2 όταν αυξάνουμε το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ο υπεραγωγός θα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής πυκνότητας, ομόρροπο με τους δείκτες του ρολογιού για $r_B \leq r \leq R$, $\mathbf{J} = -\hat{e}_\theta J_c$. Το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται γραμμικά στο διάστημα $r_B \leq r \leq R$ ενώ είναι μηδέν για $r \leq r_B$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2) για $0 \leq H_0 \leq H^*$ παίρνουμε

$$\int_0^H dh = \int_{r_B}^r dr J_c \Leftrightarrow h = J_c (r - r_B) \quad (3)$$

Η συνέχεια της συνιστώσας H_z στην επιφάνεια του υπεραγωγού (δεν υπάρχει ρεύμα παράλληλα στον άξονα z) δίνει $r_B = (H^* - H_0) / J_c$. Το μήκος r_B ονομάζεται μήκος διείσδυσης. Το μαγνητικό πεδίο $H^* = J_c R$ είναι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που απαιτείται για διεισδύσει πλήρως το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του κυλίνδρου. Για τιμές του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου μεγαλύτερες από το H^* το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας θα δίνεται από τη σχέση

$$h = J_c r + H_0 - H^*, \quad 0 \leq r \leq R \quad (4)$$

Η μαγνητική ροπή του κυλίνδρου για $H_0 \leq H^*$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} L \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} r dr d\phi \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{2} L 2\pi J_c \int_{r_B}^R r^2 dr \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_z L \pi J_c \frac{R^3 - r_B^3}{3} \end{aligned} \quad (5)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $R = H^* / J_c$ και $r_B = (H^* - H_0) / J_c$ η μαγνητική ροπή γίνεται

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= -\hat{\mathbf{e}}_z \pi \frac{L J_c}{3} \left(\left(\frac{H^*}{J_c} \right)^3 - \left(\frac{H^* - H_0}{J_c} \right)^3 \right) \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_z \pi \frac{L J_c}{3} \left(\frac{H^*}{J_c} \right)^3 \left(1 - \left(1 - \frac{H_0}{H^*} \right)^3 \right) \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_z \pi \frac{L J_c R^3}{3} \left(3 \frac{H_0}{H^*} - 3 \left(\frac{H_0}{H^*} \right)^2 + \left(\frac{H_0}{H^*} \right)^3 \right) \\ &= -\hat{\mathbf{e}}_z \pi R^2 L H^* \left(\frac{H_0}{H^*} - \left(\frac{H_0}{H^*} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H_0}{H^*} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Αν ορίσουμε την συνάρτηση η μαγνητική ροπή του κυλίνδρου θα ισούται με

$$f(H) = -L \pi R^2 H^* \left(\frac{H}{H^*} - \left(\frac{H}{H^*} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H}{H^*} \right)^3 \right) \quad (7)$$

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{e}}_z f(H_0). \quad (8)$$

Για $H_0 > H^*$ θα ρέει ρεύμα J_c σε όλη την ακτίνα, συνεπώς η μαγνητική ροπή θα είναι σταθερή και θα ισούται με αυτή που αποκτά ο κύλινδρος για $H_0 = H^*$

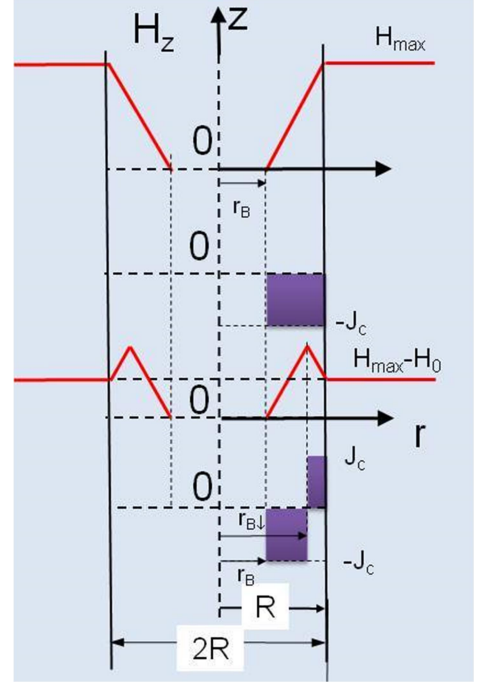
$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{e}}_z f(H^*) = -\hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{3} \pi R^3 L J_c. \quad (9)$$

Για το υπολογισμό του βρόγχου υστέρησης θα πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τη σχέση του μέγιστου μαγνητικού πεδίου που εφαρμόζουμε και του H^* . Η μαγνήτιση του βρόγχου υστέρησης για τα τμήματα αύξησης (αντίστοιχα μείωσης), του μαγνητικού πεδίου, μπορεί να υπολογιστεί από τις σχέσεις (5) και (6) χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις του πρότυπου Bean για τις περιπτώσεις αύξησης (αντίστοιχα μείωσης) του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Ας υπολογίσουμε πρώτα το βρόγχο για $H_{\max} \leq H^*$. Στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν με H_{\max} συμβολίζουμε το μέγιστο πεδίο που χρησιμοποιούμε και με H_0 το τρέχων εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Η «παρθενική» μαγνητική ροπή του υπεραγωγού θα δίνεται από τη σχέση (5). Η μαγνητική ροπή του υπεραγωγού όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μειώνεται στο διάστημα $-H_{\max} \leq H_0 \leq H_{\max}$ θα προέρχεται από μία κατανομή ρεύματος η οποία προσδιορίζεται από τις

υποθέσεις του πρότυπου Bean. Όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μειωθεί, στην επιφάνεια του υπεραγωγού θα προκληθεί αντιστροφή της φοράς του κρίσιμου ρεύματος σε βάθος που θα δίνεται από την διαφορική εξίσωση $|dh/dr| = J_c$ για $r_B \leq r \leq R$ και την συνθήκη συνέχειας του μαγνητικού πεδίου. Η συγκεκριμένη κατανομή ρεύματος θα δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{J} = \left[-J_c \Theta(r - r_{H_{\max}}) + 2J_c \Theta(r - r_{B\downarrow}) \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

(δες σχήμα 2)



Σχήμα 2 Μαγνητικό πεδίο και κατανομή ρεύματος μετά την μείωση του μαγνητικού πεδίου κατά $H_{\max} - H_0$.

Άρα η μαγνήτιση θα ισούται με το άθροισμα της μαγνητικής ροπής που έχει αποκτήσει ο υπεραγωγός για $H_0 = H_{\max}$ που δημιουργείται από κατανομή ρεύματος $\mathbf{J} = -J_c \Theta(r - r_B) \hat{\mathbf{e}}_\theta$, $m = f(H_{\max})$ και της θετικής μαγνητικής ροπής πυκνότητας ρεύματος

$$\mathbf{J} = 2J_c \Theta(r - r_{B\downarrow}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

το οποίο όμως ρέει στο κυλινδρικό δακτύλιο $r_{B\downarrow} \leq r \leq R$, όπου

$$\begin{aligned} r_{B\downarrow} &= R - (H_{\max} - H_0) / (2J_c) \\ &= H^* / J_c - (H_{\max} - H_0) / (2J_c) \end{aligned}$$

(θα πρέπει να προσέξουμε ότι η μεταβολή της κλίσης είναι διπλάσια, δες σχήμα 2). Η μαγνητική ροπή μπορεί να υπολογιστεί με όμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση της σχέσης 6, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} &= \frac{1}{2} L \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} r dr d\phi \\
&= \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{2} L 2\pi (2J_c) \int_{r_B}^R r^2 dr \\
&= \hat{\mathbf{e}}_z L \pi J_c \frac{R^3 - r_B^3}{3} \\
\mathbf{m} &= \hat{\mathbf{e}}_z \pi \frac{L 2J_c}{3} \left(\left(\frac{H^*}{J_c} \right)^3 - \left(\frac{H^* - H_{\max} - H_0}{2J_c} \right)^3 \right) \\
&= \hat{\mathbf{e}}_z \pi \frac{L J_c}{3} 2 \left(\frac{H^*}{J_c} \right)^3 \left(1 - \left(1 - \frac{H_{\max} - H_0}{2H^*} \right)^3 \right) \\
&= \hat{\mathbf{e}}_z \pi R^3 L \frac{2}{3} H^* \left[3 \frac{H_{\max} - H_0}{2H^*} - 3 \frac{(H_{\max} - H_0)^2}{(2H^*)^2} + \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{(2H^*)^3} \right] \\
&= 2 \hat{\mathbf{e}}_z \pi R^3 J_c L \left[\frac{H_{\max} - H_0}{2H^*} - \frac{(H_{\max} - H_0)^2}{(2H^*)^2} + \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{3(2H^*)^3} \right] \Leftrightarrow \\
\Delta m &= -2f \left(\frac{H_{\max} - H_0}{2} \right)
\end{aligned}$$

Άρα η συνολική μαγνητική ροπή θα ισούται

$$m_{\downarrow} = f(H_{\max}) - 2f \left(\frac{H_{\max} - H_0}{2} \right) \quad (10)$$

Ο υπολογισμός του τμήματος του βρόγχου υστέρησης που αφορά τη αύξηση του πεδίου από $-H_{\max} \leq H_0 \leq H_{\max}$ μπορεί να γίνει με όμοιο συλλογισμό ή να χρησιμοποιηθεί η σχέση συμμετρίας του βρόγχου

$$m_{\downarrow}(H_0, H_{\max}) = -m_{\uparrow}(-H_0, H_{\max}) \quad (11)$$

ή

$$m_{\uparrow} = -f(H_{\max}) + 2f \left(\frac{H_{\max} + H_0}{2} \right). \quad (12)$$

Ο υπολογισμός του βρόγχου της μαγνήτισης για $H_{\max} > H^*$ γίνεται με την ίδια μεθοδολογία. Το αποτέλεσμα για τον κλάδο μείωσης του πεδίου θα ισούται με

$$\begin{aligned}
H_{\max} - 2H^* \leq H_0 \leq H_{\max} \\
m_{\downarrow} = f(H^*) - 2f \left((H_{\max} - H_0) / 2 \right) \quad (13) \\
-H_{\max} \leq H_0 \leq H_{\max} - 2H^*
\end{aligned}$$

$$m_{\downarrow} = -f(H^*)$$

και ο κλάδος αύξησης του πεδίο με

$$\begin{aligned}
-H_{\max} \leq H_0 \leq H_{\max} - 2H^* \\
m_{\uparrow} = -f(H^*) + 2f \left((H_{\max} + H_0) / 2 \right) \quad (14) \\
H_{\max} - 2H^* \leq H_0 \leq H_{\max}
\end{aligned}$$

$$m_{\uparrow} = f(H^*)$$

Για μονοδιάστατα προβλήματα όπως του κυλίνδρου απείρους μήκους και της πλάκας απείρων διαστάσεων είναι βολικό να ορίσουμε δύο βοηθητικά μεγέθη την μακροσκοπική μαγνητική επαγωγή και τη μαγνήτιση, τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις

$$B_z = \frac{1}{V} \int b_z(\mathbf{x}) dx^3 \quad (15)$$

και

$$M_z = \frac{B_z}{\mu_0} - H_0 \quad (16)$$

Είναι προφανές ότι οι ίδιες σχέσεις (σχέσεις 5, 10, 12, και 13, 14) που ισχύουν για τη μαγνητική ροπή θα ισχύουν και για τη μαγνήτιση.

Για το πρόβλημα του κυλίνδρου η μαγνήτιση θα δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
M &= \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_{r_B}^R r dr (J_c r - H^* + H_0) - H_0 \\
&= \frac{2\pi}{\pi R^2} \left[J_c \frac{R^3}{3} - J_c \frac{r_B^3}{3} - H^* \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r_B^2}{2} \right) + H_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r_B^2}{2} \right) \right] - H_0 \Leftrightarrow \\
&= \frac{2\pi}{\pi R^2} \left[J_c \frac{R^3}{3} - J_c \frac{r_B^3}{3} - H^* \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r_B^2}{2} \right) + H_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r_B^2}{2} \right) \right] - H_0 \Leftrightarrow \\
&= J_c \frac{2R}{3} - J_c \frac{2r_B^3}{R^2 3} - J_c R + J_c R \frac{r_B^2}{R^2} + H_0 \frac{r_B^2}{R^2} - H_0 \\
&= J_c \frac{2R}{3} - J_c \frac{2r_B^3}{R^2 3} - J_c R + J_c R \frac{r_B^2}{R^2} - H_0 \frac{r_B^2}{R^2} \\
&= H^* \frac{2}{3} - H^* \frac{2}{3} \left(\frac{H^* - H_0}{H^*} \right)^3 - H^* + H^* \left(\frac{H^* - H_0}{H^*} \right)^2 - H_0 \left(\frac{H^* - H_0}{H^*} \right)^2 \\
&= H^* \frac{2}{3} - \frac{2}{3} H^* \left(\frac{H^* - H_0}{H^*} \right)^3 - H^* + H^* \left(\frac{H^* - H_0}{H^*} \right)^3 \\
&= \frac{1}{3} H^* \left(\frac{H^* - H_0}{H^*} \right)^3 - \frac{1}{3} H^* \\
&= -\frac{1}{3} H^* \left[1 - \left(1 - \frac{H_0}{H^*} \right)^3 \right] \\
&= -H^* \left[\frac{H_0}{H^*} - \left(\frac{H_0}{H^*} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H_0}{H^*} \right)^3 \right] = \frac{f(H_0)}{L\pi R^2} = \frac{m}{V}
\end{aligned}$$

Όμοια οι μαγνητίσεις των κλάδων μείωσης ή αύξησης του μαγνητικού πεδίου για $-H_{\max} \leq H_0 \leq H_{\max} < H^*$ θα δίνονται από τις σχέσεις

$$M_{\downarrow} = \frac{1}{V} \left[f(H_{\max}) - 2f \left(\frac{H_{\max} - H_0}{2} \right) \right]$$

και

$$M_{\uparrow} = \frac{1}{V} \left[-f(H_{\max}) + 2f \left(\frac{H_{\max} + H_0}{2} \right) \right].$$

Ο υπολογισμός του βρόγχου της μαγνήτισης για $H_{\max} > H^*$ γίνεται με την ίδια μεθοδολογία. Το αποτέλεσμα για τον κλάδο μείωσης του πεδίου θα ισούται με

$$H_{\max} - 2H^* \leq H_0 \leq H_{\max}$$

$$M_{\downarrow} = \frac{1}{V} \left[f(H^*) - 2f\left(\frac{H_{\max} - H_0}{2}\right) \right]$$

$$-H_{\max} \leq H_0 \leq H_{\max} - 2H^*$$

$$M_{\downarrow} = -\frac{1}{V} f(H^*)$$

και για αύξηση του πεδίο με

$$-H_{\max} \leq H_0 \leq -H_{\max} + 2H^*$$

$$M_{\uparrow} = \frac{1}{V} \left[-f(H^*) + 2f\left(\frac{H_{\max} + H_0}{2}\right) \right]$$

$$-H_{\max} + 2H^* \leq H_0 \leq H_{\max}$$

$$M_{\uparrow} = \frac{1}{V} f(H^*)$$

Τέλος είναι χρήσιμο να διαπιστώσουμε ότι η μαγνητική επαγωγή θα ισούται

$$\begin{aligned} B_z &= \mu_0 \frac{1}{L\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int dz \int_0^R r dr h(r) \\ &= \mu_0 \frac{1}{L\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int dz \int_0^R r dr \int_{r_b}^r dr' J_c \Leftrightarrow \\ B_z &= \frac{1}{L\pi R^2} \int dz \Phi = \frac{\Phi}{\pi R^2} \end{aligned}$$

όπου Φ είναι η μαγνητική ροή.

Εφόσον αγνοούμε τον παρθετικό κλάδο της μαγνήτισης και το κρίσιμο ρεύμα δεν εξαρτάται από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ο μετασχηματισμός Fourier της μαγνήτισης δεν εξαρτάται από την τιμή του H_{dc} , άρα μπορούμε να θέσουμε $H_{dc} = 0$. Για τον υπολογισμό που θα ακολουθήσει χρειάζεται να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το πλάτος του εναλλασσόμενου εξωτερικού πεδίου και του πεδίου πλήρους διεύθυνσης στο εσωτερικό του υπεραγωγού.

$$\begin{aligned} M_1' &= \frac{1}{\pi V} \left[\int_0^{\pi} \left[f(H_{ac}) - 2f\left(\frac{H_{ac} - H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \right] \cos \phi d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} \left[-f(H_{ac}) + 2f\left(\frac{H_{ac} + H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \right] \cos \phi d\phi \right] \\ &= \frac{1}{V\pi} \left[f(H_{ac}) \left(\sin \phi \Big|_0^{\pi} - \sin \phi \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) - 2 \int_0^{\pi} f\left(\frac{H_{ac}(1 - \cos \phi)}{2}\right) \cos \phi d\phi - 2 \int_{\pi}^{2\pi} f\left(\frac{H_{ac}(1 + \cos \phi')}{2}\right) \cos \phi' d\phi' \right] \end{aligned}$$

Αν στο τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε την αντικατάσταση $\phi' = \phi - \pi$ διαπιστώνουμε ότι τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα. Συνεπώς,

$$M_1' = -\frac{4}{V\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{H_{ac} - H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \cos \phi d\phi$$

Εκτελώντας την ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} M_1'' &= \frac{1}{\pi V} \left[\int_0^{\pi} \left[f(H_{ac}) - 2f\left(\frac{H_{ac} - H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \right] \sin \phi d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} \left[-f(H_{ac}) + 2f\left(\frac{H_{ac} + H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \right] \sin \phi d\phi \right] \\ &= \frac{1}{\pi V} \left[f(H_{ac}) \left(-\cos \phi \Big|_0^{\pi} + \cos \phi \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) - 2 \int_0^{\pi} f\left(\frac{H_{ac} - H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \sin \phi d\phi - 2 \int_{\pi}^{2\pi} f\left(\frac{H_{ac} - H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \sin \phi d\phi \right] \\ &= \frac{4}{V\pi} \left[f(H_{ac}) - \int_0^{\pi} f\left(\frac{H_{ac} - H_{ac} \cos \phi}{2}\right) \sin \phi d\phi \right] \end{aligned}$$

(α) $H_{ac} < H^*$

Σ' αυτή την περίπτωση τα δεδομένα μας είναι

$$H_0 = H_{ac} \cos(\omega t)$$

$$H_{\max} = H_{ac}$$

$$M_{\downarrow} = \frac{1}{V} \left[f(H_{ac}) - 2f\left(\frac{H_{ac} - H_{ac} \cos \omega t}{2}\right) \right]$$

$$M_{\uparrow} = \frac{1}{V} \left[-f(H_{ac}) + 2f\left(\frac{H_{ac} + H_{ac} \cos \omega t}{2}\right) \right]$$

$$f(H) = -\pi R^3 L J_c \left[\frac{H}{H^*} - \left(\frac{H}{H^*}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H}{H^*}\right)^3 \right]$$

Η μαγνήτιση μπορεί να γραφτεί

$$M(t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[M_n' \cos(n\omega t) + M_n'' \sin(n\omega t) \right]$$

όπου

$$M_n' = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(t) \cos(n\phi) d\phi$$

$$M_n'' = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(t) \sin(n\phi) d\phi$$

Στο ανάπτυγμα Fourier ο συντελεστής του όρου $\cos(\omega t)$, ονομάζεται θεμελιώδης συνιστώσα της εναλλασσόμενης μαγνήτισης σε φάση με το εξωτερικό πεδίο, (ή πραγματικό μέρος της εναλλασσόμενης μαγνήτισης) ενώ ο συντελεστής του όρου $\sin(\omega t)$ θεμελιώδης συνιστώσα της εναλλασσόμενης μαγνήτισης με διαφορά φάσης με το εξωτερικό πεδίο $\pi/2$ (ή φανταστικό μέρος της εναλλασσόμενης μαγνήτισης). Η θεμελιώδης συνιστώσα σε φάση θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$M_1' = -H_{ac} \left(1 - \frac{H_{ac}}{H^*} + \frac{5}{16} \left(\frac{H_{ac}}{H^*}\right)^2 \right) \Rightarrow$$

$$\chi_1' = \frac{M_1'}{H_{ac}} = \left(-1 + \frac{H_{ac}}{H^*} - \frac{5}{16} \left(\frac{H_{ac}}{H^*}\right)^2 \right)$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την θεμελιώδη συνιστώσα με $\pi/2$ διαφορά φάσης. Πράγματι

$$\chi_1'' = \frac{M_1''}{H_{ac}} = \frac{1}{3\pi} \left[4 \frac{H_{ac}}{H^*} - 2 \left(\frac{H_{ac}}{H^*} \right)^2 \right]$$

Αν θέσουμε $x = H_{ac} / H^*$ οι θεμελιώδεις συνιστώσες της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας γράφονται

$$\begin{aligned} x &= H_{ac} / H^* \leq 1 \\ \chi_1' &= \frac{M_1'}{H_{ac}} = -1 + x - \frac{5}{16} x^2 \\ \chi_1'' &= \frac{M_1''}{H_{ac}} = \frac{4x - 2x^2}{3\pi} \end{aligned}$$

(β) $H_{ac} > H^*$

Τώρα η μαγνήτιση αποτελείται από δύο κλάδους και για το τμήμα αύξησης και μείωσης του μαγνητικού πεδίου. Οι εξισώσεις για τη μαγνήτιση δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} H_{\max} - 2H^* &\leq H_0 \leq H_{\max} \\ M_{\downarrow} &= \frac{1}{V} \left[f(H^*) - 2f\left(\frac{H_{\max} - H_0}{2}\right) \right] \\ -H_{\max} &\leq H_0 \leq H_{\max} - 2H^* \\ M_{\downarrow} &= -\frac{1}{V} f(H^*) \\ -H_{\max} &\leq H_0 \leq -H_{\max} + 2H^* \\ M_{\uparrow} &= \frac{1}{V} \left[-f(H^*) + 2f\left(\frac{H_{\max} + H_0}{2}\right) \right] \\ -H_{\max} + 2H^* &\leq H_0 \leq H_{\max} \\ M_{\uparrow} &= \frac{1}{V} f(H^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1'' &= \frac{1}{\pi V} \left[f(H^*) \left(\sin \phi_0^{\arccos(1-2/x)} - \sin \phi_{\arccos(1-2/x)}^{\pi} - \sin \phi_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} + \sin \phi_{\pi+\arccos(1-2/x)}^{2\pi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\arccos(1-2/x)} 2f\left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2}\right) \cos\phi d\phi + \int_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} 2f\left(\frac{H_{ac}(1+\cos\phi)}{2}\right) \cos\phi d\phi \right] \\ &= \frac{1}{\pi V} \left[f(H^*) \left(\frac{2}{x}(x-1)^{1/2} + \frac{2}{x}(x-1)^{1/2} + \frac{2}{x}(x-1)^{1/2} + \frac{2}{x}(x-1)^{1/2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\arccos(1-2/x)} 2f\left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2}\right) \cos\phi d\phi + \int_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} 2f\left(\frac{H_{ac}(1+\cos\phi)}{2}\right) \cos\phi d\phi \right] \end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\phi' = \phi - \pi$ μπορούμε να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα της προηγούμενης σχέσης είναι ίσα, άρα

$$\begin{aligned} M_1' &= -\frac{1}{\pi V} \left[\frac{VH^*}{3} \frac{8}{x} (x-1)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\arccos(1-2/x)} 4f\left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2}\right) \cos\phi d\phi \right] \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με κατάλληλο μετασχηματισμό. Επειδή όμως χρειάζονται

Για τον υπολογισμό των συνιστωσών Fourier, το ολοκληρώματα από 0 έως π πρέπει να χωριστεί σε δύο ολοκληρώματα. Το ένα από 0 έως ϕ_1 , όπου

$$H_{ac} \cos\phi_1 = H_{ac} - 2H^* \Rightarrow \phi_1 = \arccos(1 - 2H^* / H_{ac})$$

και το άλλο από ϕ_1 έως π . Το ολοκλήρωμα από π έως 2π θα πρέπει να χωριστεί από σε ένα από π έως $\pi + \phi_1$ και ένα δεύτερο από $\pi + \phi_1$ έως 2π . Αν λάβουμε υπόψη τις προφανείς ταυτότητες

$$\sin[\arccos(1 - 2/x)] = (2/x)(x-1)^{1/2}$$

$$\sin[\pi + \arccos(1 - 2/x)] = -(2/x)(x-1)^{1/2}$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} M_1' &= \frac{1}{\pi V} \left[\int_0^{\arccos(1-2/x)} \left[f(H^*) - 2f\left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2}\right) \right] \cos\phi d\phi \right. \\ &\quad \left. - \int_{\arccos(1-2/x)}^{\pi} f(H^*) \cos\phi d\phi \right] + \\ &\quad \left[\int_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} \left[-f(H^*) + 2f\left(\frac{H_{ac}(1+\cos\phi)}{2}\right) \right] \cos\phi d\phi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi+\arccos(1-2/x)}^{2\pi} f(H^*) \cos\phi d\phi \right] \end{aligned}$$

Μετά την εκτέλεση των ολοκληρώσεων προκύπτει

αρκετές πράξεις χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα Mathematica. Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} M_1' &= -\frac{8}{3} \frac{H_{ac}}{\pi} \frac{1}{x^2} \sqrt{x-1} \\ &\quad + \frac{H_{ac}}{\pi} \frac{2}{x} \sqrt{x-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{19}{24}x + \frac{5}{16}x^2 \right) \\ &\quad - \frac{H_{ac}}{\pi} \left(1 - x + \frac{5}{16}x^2 \right) \arccos\left(1 - \frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

Η σχέση απλοποιείται περεταίρω

$$M_1' = \frac{H_{ac}}{\pi} \left[\left(-\frac{19}{12} + \frac{5}{8}x + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x-1} + \left(-1 + x - \frac{5}{16}x^2 \right) \arccos \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right]$$

Το πραγματικό μέρος της θεμελιώδους εναλλασσόμενης επιδεκτικότητας γίνεται

$$\chi_1' = \frac{M_1'}{H_{ac}} = \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{19}{12} + \frac{5}{8}x + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x-1} + \left(-1 + x - \frac{5}{16}x^2 \right) \arccos \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right]$$

Ο υπολογισμός της φανταστικής θεμελιώδους εναλλασσόμενης μαγνήτισης μπορεί να υπολογιστεί με ανάλογα βήματα

$$M_1'' = \frac{1}{\pi V} \left[\int_0^{\arccos(1-2/x)} \left[f(H^*) - 2f \left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2} \right) \right] \sin\phi d\phi - \int_{\arccos(1-2/x)}^{\pi} f(H^*) \sin\phi d\phi \right] + \left[\int_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} \left[-f(H^*) + 2f \left(\frac{H_{ac}(1+\cos\phi)}{2} \right) \right] \sin\phi d\phi + \int_{\pi+\arccos(1-2/x)}^{2\pi} f(H^*) \sin\phi d\phi \right]$$

$$M_1'' = \frac{1}{\pi V} \left[f(H^*) \left(-\cos\phi \Big|_0^{\arccos(1-2/x)} + \cos\phi \Big|_{\arccos(1-2/x)}^{\pi} + \cos\phi \Big|_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} - \cos\phi \Big|_{\pi+\arccos(1-2/x)}^{2\pi} \right) - \int_0^{\arccos(1-2/x)} 2f \left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2} \right) \sin\phi d\phi + \int_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} 2f \left(\frac{H_{ac}(1+\cos\phi)}{2} \right) \sin\phi d\phi \right]$$

$$= \frac{1}{\pi V} \left\{ -4f(H^*) \left(1 - \frac{2}{x} \right) - \int_0^{\arccos(1-2/x)} 2f \left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2} \right) \sin\phi d\phi + \int_{\pi}^{\pi+\arccos(1-2/x)} 2f \left(\frac{H_{ac}(1+\cos\phi)}{2} \right) \sin\phi d\phi \right\}$$

$$= \left\{ \frac{4H_{ac}}{3\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) - \underbrace{\int_0^{\arccos(1-2/x)} \frac{4}{\pi V} f \left(\frac{H_{ac}(1-\cos\phi)}{2} \right) \sin\phi d\phi}_{\frac{2H_{ac}}{x^2\pi}} \right\} \Rightarrow$$

$$M_1'' = \frac{H_{ac}}{3\pi} \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Το μιγαδικό μέρος της θεμελιώδους εναλλασσόμενης επιδεκτικότητας για $H_{ac} > H^*$ τελικά δίνεται από την σχέση

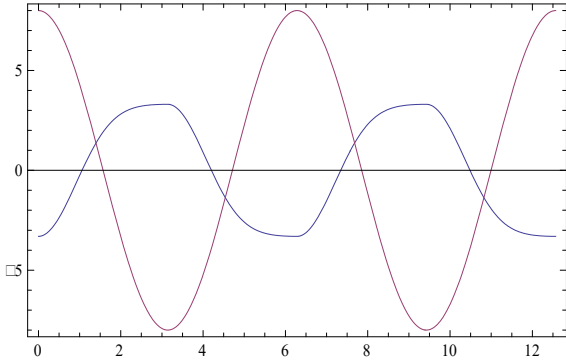
$$\chi_1'' = \frac{M_1''}{H_{ac}} = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$x = H_{ac} / H^* \geq 1$$

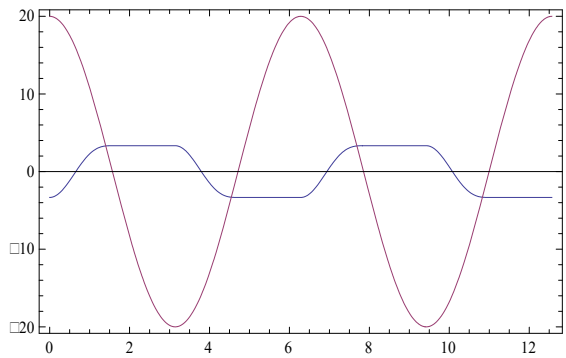
$$\chi_1' = \frac{M_1'}{H_{ac}} = \frac{1}{\pi} \left[\left(-1 + x - \frac{5}{16}x^2 \right) \arccos \left(1 - \frac{2}{x} \right) + \left(-\frac{19}{12} + \frac{5}{8}x + \frac{1}{x} - \frac{2}{3x^2} \right) (x-1)^{1/2} \right]$$

$$\chi_1'' = \frac{M_1''}{H_{ac}} = \frac{4/x - 2/x^2}{3\pi}$$

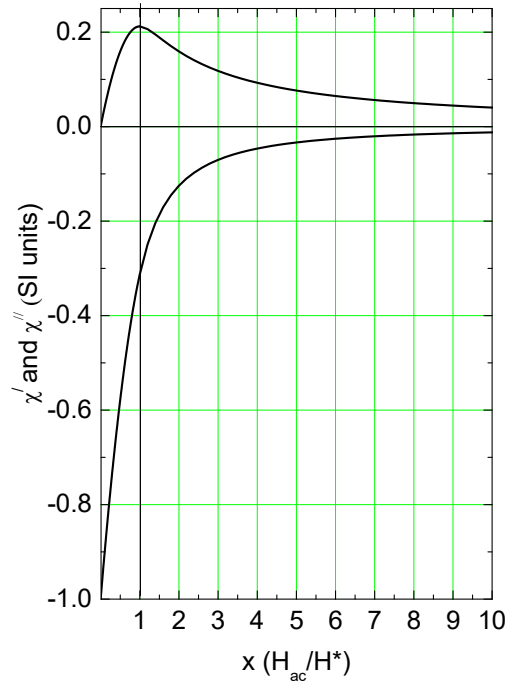
Στο σχήμα 5 φαίνεται η μεταβολή του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας σαν συνάρτηση της παραμέτρου x .



Σχήμα 3 Μεταβολή του εξωτερικού εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου και την μαγνητικής ροπής υπεραγωγού που περιγράφεται από το πρότυπο Bean. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει $H_{ac} < H^*$.

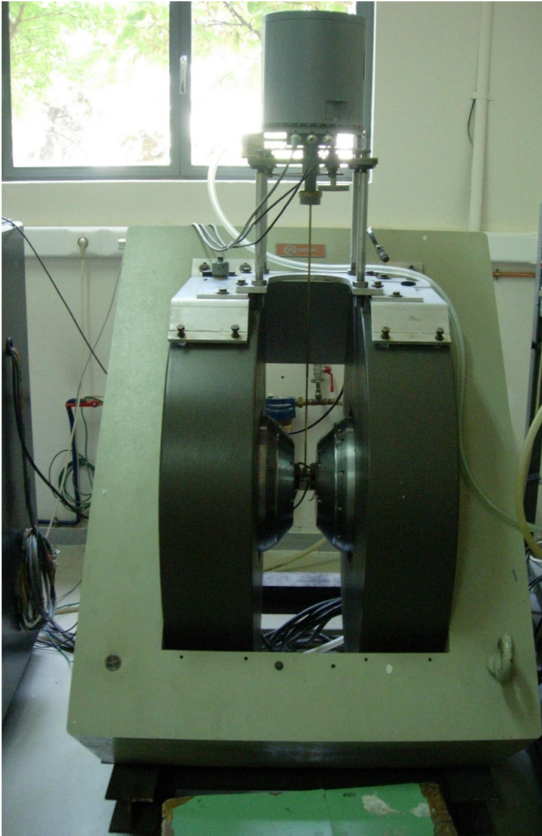


Σχήμα 4 Μεταβολή του εξωτερικού εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου και την μαγνητικής ροπής υπεραγωγού που περιγράφεται από το πρότυπο Bean. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει $H_{ac} > H^*$.



Σχήμα 5 Μεταβολή του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας υπεραγωγού που η συμπεριφορά του περιγράφεται από το πρότυπο Bean

5) ΜΑΓΝΗΤΟΜΕΤΡΟ ΤΑΛΑΝΤΕΥΟΜΕΝΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ (VIBRATING SAMPLE MAGNETOMETER)



Σχήμα 1 Μαγνητόμετρο ταλαντευόμενου δείγματος του ΙΕΥ.

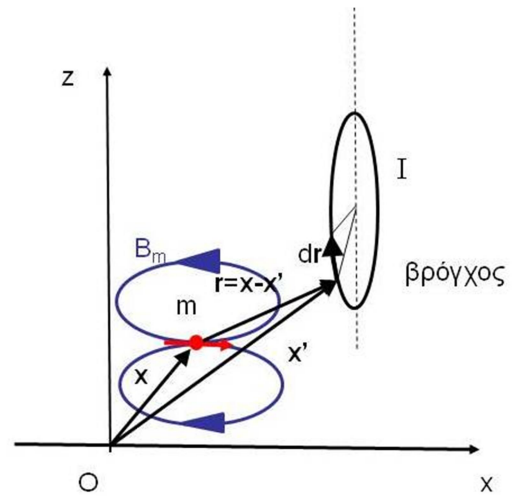
Το μαγνητόμετρο ταλαντευόμενου δείγματος (σχήμα 1) αποτελείται από (α) ένα ηλεκτρομαγνήτη ο οποίος δημιουργεί ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, (β) τα πηνία ανίχνευσης, (γ) το μηχανισμό ταλάντωσης του δείγματος και (δ) τις ηλεκτρονικές συσκευές για την καταγραφή της ηλεκτρεγερτικής δύναμης που προκαλεί η ταλάντωση του δείγματος (θεωρούμε ότι είναι ένα σημειακό μαγνητικό δίπολο) στα πηνία ανίχνευσης.

Για την κατανόηση της λειτουργίας των μαγνητόμετρων ταλαντευόμενου δείγματος είναι χρήσιμη η αρχή της αμοιβαιότητας (reciprocity principle). Η μαγνητική ροή Φ μαγνητικού πεδίου διπολικής μαγνητικής ροπής m σε ένα βρόγχο αυθαιρέτου σχήματος (σχήμα 2) ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της μαγνητικής ροπής και της μαγνητικής επαγωγής που δημιουργεί στο σημείο της μαγνητικής ροπής μοναδιαίο ρεύμα που ρέει στο βρόγχο

$$\Phi_m = \frac{\mathbf{B}_l \cdot \mathbf{m}}{I} \quad (1)$$

όπου \mathbf{B}_l είναι η μαγνητική επαγωγή που δημιουργεί ο βρόγχος ρεύματος στη θέση του μαγνητικού δίπολου.

\mathbf{m} είναι η διπολική μαγνητική ροπή. Η σχέση 1 μπορεί να αποδειχθεί με τους ακόλουθους συλλογισμούς.



Σχήμα 2 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά για την απόδειξη του θεωρήματος αμοιβαιότητας.

Η μαγνητική ροή που προκαλεί η μαγνητική επαγωγή του μαγνητικού δίπολο σε μία επιφάνεια που έχει σαν όριο το βρόγχο, σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes, μπορεί να υπολογιστεί από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού δυναμικού στην περιφέρεια του βρόγχου

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B}_m \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}_m) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A}_m \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση που δίνει το διανυσματικό δυναμικό μαγνητικού δίπολου που βρίσκεται στη θέση \mathbf{x}

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (3)$$

στη σχέση 2 παίρνουμε

$$\Phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot d\mathbf{r} \quad (4)$$

Σύμφωνα με το νόμο Biot και Savart η μαγνητική επαγωγή που προκαλεί ένας βρόγχος ο οποίος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, πυκνότητας $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ στο σημείο \mathbf{x} , θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (5)$$

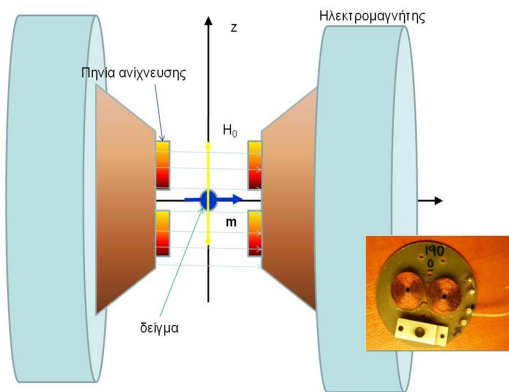
Όταν η διατομή του βρόγχου είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις του, τότε θα ισχύει $\mathbf{J}(\mathbf{x})d^3x = I d\mathbf{r}$, όπου I είναι το ρεύμα που διαρρέει το βρόγχο. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης

(5) με το διάνυσμα \mathbf{m} , λαμβάνοντας υπόψη την ισότητα $\mathbf{J}(\mathbf{x})d^3x = I d\mathbf{r}$ και την ταυτότητα

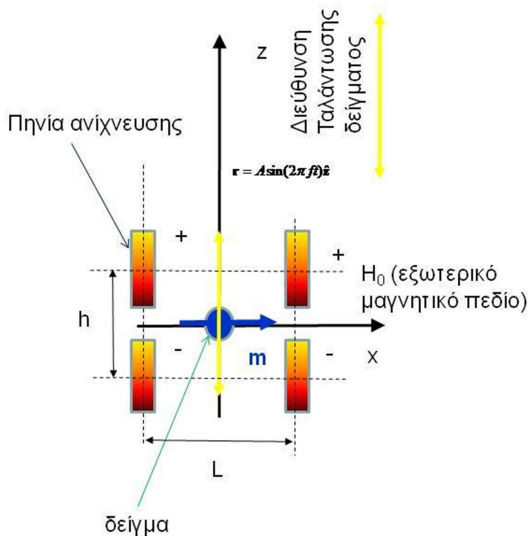
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

καταλήγουμε στην τελική σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \oint_C \frac{d\mathbf{r} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= I \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot d\mathbf{r} \quad (7) \\ &= I \Phi_m \Leftrightarrow \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= I \Phi_m \end{aligned}$$



Σχήμα 3. Γεωμετρία του ηλεκτρομαγνήτη και των πηνίων ανίχνευσης του μαγνητόμετρου ταλαντευόμενου δείγματος. Ο ηλεκτρομαγνήτης παράγει στο διάκενο του ομογενές μαγνητικό πεδίο με οριζόντια διεύθυνση. Το δείγμα ταλαντώνεται κατά μήκος του άξονα-z. Στο ένθετο φαίνεται μία κάτοψη των δύο από τα τέσσερα πηνία ανίχνευσης.



Σχήμα 4. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πηνίων ανίχνευσης του μαγνητόμετρου ταλαντευόμενου δείγματος

Ένα μαγνητόμετρο ταλαντευόμενου δείγματος μετρά την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται σε κατάλληλο πηνίο ανίχνευσης (ή πηνία ανίχνευσης), σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, που προκαλείται από την εναλλασσόμενη μαγνητική ροή που προκαλεί η ταλάντωση της μαγνητικής ροπής του δείγματος. Χρησιμοποιώντας την αρχή της αμοιβαιότητας η επαγόμενη τάση στα πηνία ανίχνευσης θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\mathbf{B}_j^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}}{I_j} \right) \\ &\cong -\sum_{j=1}^n \nabla \left(\frac{\mathbf{B}_j^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}}{I_j} \right)_{\mathbf{x}=0} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (8) \\ &= -\sum_{j=1}^n \nabla \left(\frac{\mathbf{B}_j^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}}{I_j} \right)_{\mathbf{x}=0} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Όπου $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ είναι η ταχύτητα κίνησης του δίπολου, και \mathbf{B}_j^j είναι η μαγνητική επαγωγή που θα προκαλούσε το j πηνίο ανίχνευσης αν διαρρεόταν από ρεύμα I . Στην περίπτωση του μαγνητόμετρου ταλαντευόμενου δείγματος αυτό αποτελείται από ένα ηλεκτρομαγνήτη ο οποίος παράγει ένα μαγνητικό πεδίο (-20 kOe έως 20 kOe) το οποίο μαγνητίζει το δείγμα. Η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι κατά μήκος του άξονα x (δες σχήμα 3). Στο διάκενο του μαγνήτη είναι τοποθετημένα 4 πηνία ανίχνευσης των οποίων τα κέντρα έχουν συντεταγμένες $(L/2, 0, h/2)$, $(L/2, 0, -h/2)$, $(-L/2, 0, h/2)$ και $(-L/2, 0, -h/2)$ (σχήμα 4). Το δείγμα ταλαντώνεται κατά μήκος του άξονα z με συχνότητα $f=80$ Hz και πλάτος $A=0.1$ mm, σύμφωνα με τη σχέση $\mathbf{x} = A \sin(2\pi ft)\hat{z}$. Λόγω της ημιτονοειδούς κίνησης της μαγνητικής ροπής η τάση στα πηνία ανίχνευσης θα ισούται

$$\begin{aligned} V &= -\left[\frac{\partial b_x(x-L/2, 0, z-h/2)}{\partial z} - \frac{\partial b_x(x-L/2, 0, z+h/2)}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial b_x(x+L/2, 0, z-h/2)}{\partial z} - \frac{\partial b_x(x+L/2, 0, z+h/2)}{\partial z} \right]_{\mathbf{x}=0} \\ &= m_x A (2\pi f) \cos(2\pi ft) \quad (9) \end{aligned}$$

b_x είναι η x -συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής στο σημείο του δείγματος η οποία θα δημιουργούσε ρεύμα 1Amp αν διέρρεε το πηνίο ανίχνευσης. Η συνάρτηση

$$S(\mathbf{x}) = - \left[\frac{\partial b_x \left(\left(x - \frac{L}{2} \right), y, z - \frac{h}{2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial b_x \left(\left(x - \frac{L}{2} \right), y, z + \frac{h}{2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial b_x \left(\left(x + \frac{L}{2} \right), y, z - \frac{h}{2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial b_x \left(\left(x + \frac{L}{2} \right), y, z + \frac{h}{2} \right)}{\partial z} \right] \quad (10)$$

ονομάζεται συνάρτηση «ευαισθησίας» του συστήματος των πηνίων ανίχνευσης. Για να επιτύχουμε το μέγιστο σήμα θα πρέπει οι διαστάσεις των πηνίων και η θέση τους να είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση $S(\mathbf{x})$ να έχει μέγιστο στο σημείο που βρίσκεται το δίπολο. Η επαγόμενη τάση στα πηνία ανίχνευσης τελικά γίνεται

$$V = m_x A (2\pi f) S(0) \cos(2\pi ft) = V_0 \cos(2\pi ft). \quad (11)$$

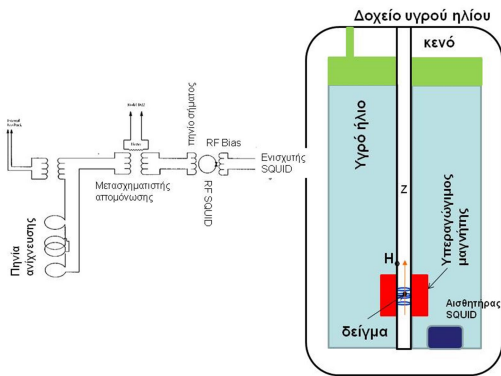
Για την ακριβή μέτρηση της τάσης που είναι ανάλογη με το $\cos(2\pi ft)$ χρησιμοποιείται ένας lock-in amplifier. Ο έλεγχος του τροφοδοτικού του ηλεκτρομαγνήτη και η καταγραφή των μετρήσεων γίνεται με H/Y. Αν και μπορούμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική ροπή m_x μετρώντας την τάση V χρησιμοποιώντας τη σχέση 11, στην πράξη βαθμονομούμε το μαγνητόμετρο με τη βοήθεια πρότυπου δείγματος, με γνωστή μαγνήτιση κόρου, καθορίζοντας τη σταθερά αναλογίας C ($V_0 = C m_x$) μεταξύ τάσης και της m_x για σταθερά A και f . Σύμφωνα με τη γεωμετρία που έχουμε επιλέξει το σημείο $(0,0,0)$ είναι ένα σαγματικό σημείο της τάσης ως προς (x, y, z) . Αυτή η ιδιότητα μας προσφέρει μία μέθοδο για να τοποθετήσουμε το δείγμα κέντρο των πηνίων ανίχνευσης. Αυτό επιτυγχάνεται αν το σήμα γίνεται μέγιστο όταν μετακινούμε το δείγμα κατά μήκος του άξονα z και του άξονα y και ελάχιστο κατά μήκος του άξονα x .

6) ΜΑΓΝΗΤΟΜΕΤΡΟ SQUID (SUPERCONDUCTING QUANTUM INTERFERENCE DEVICE)

Μία σημαντική κατηγορία μαγνητόμετρων είναι αυτά που βασίζονται στον αισθητήρα SQUID (superconducting quantum interference device)

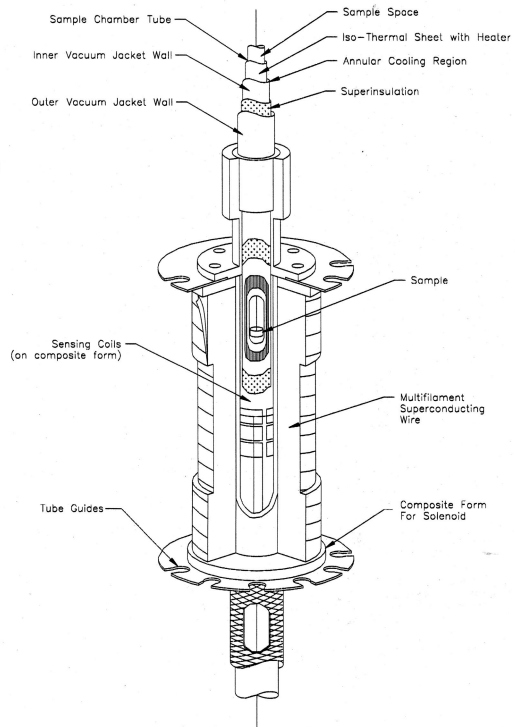


ΜΑΓΝΗΤΟΜΕΤΡΟ SQUID



Σχήμα 1 Σχηματικό διάγραμμα των σημαντικότερων εξαρτημάτων ενός μαγνητόμετρου SQUID. Το μαγνητόμετρο SQUID αποτελείται από (α) το πηνίο ανίχνευσης σε διάταξη δευτέρας παραγωγού, (β) το πηνίο σήματος και (γ) τον αισθητήρα SQUID.

Το μαγνητόμετρο SQUID, εκτός των άλλων, είναι εφοδιασμένο με υπεραγωγίμο πηνίο το οποίο μπορεί να παράξει μαγνητικό πεδίο έως 55 kOe. Επιπλέον, διαθέτει σύστημα χαμηλής κατανάλωσης υγρού ηλίου για τη μεταβολή της θερμοκρασίας του δείγματος. Η περιοχή θερμοκρασιών που μπορούμε να εκτελέσουμε μετρήσεις είναι 1.8-350 K. Στο σχήμα 2 φαίνεται μία τομή του μαγνητόμετρου στην περιοχή του υπεραγωγίμου μαγνήτη και των πηνίων ανίχνευσης.

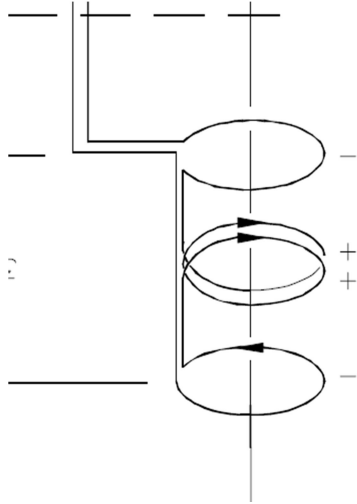


Σχήμα 2. Προοπτική τομή του υπεραγωγίμου μαγνήτη, των πηνίων ανίχνευσης και των σωληνώσεων για τη μεταβολή της θερμοκρασίας του μαγνητόμετρου SQUID.

Το σημαντικότερο εξάρτημα του μαγνητόμετρου SQUID είναι ο αισθητήρας SQUID. Ουσιαστικά ο αισθητήρας SQUID είναι ένας μετατροπέας μαγνητικής ροής σε ηλεκτρική τάση με πολύ μεγάλη διακριτική ικανότητα. Στο μαγνητόμετρο που θα χρησιμοποιήσουμε ο αισθητήρας SQUID είναι rf. Εκτός από τους rf αισθητήρες SQUID υπάρχουν και οι DC που αποτελούνται από ένα υπεραγωγίμο δακτύλιο ο οποίος διακόπτεται σε δύο σημεία με επαφές Josephson.

Ο αισθητήρας rf-SQUID αποτελείται από ένα υπεραγωγίμο δακτύλιο και μία ασθενή επαφή (επαφή Josephson). Η επαφή Josephson είναι μία περιοχή του δακτυλίου με μέγεθος της τάξης του μήκους συσχέτισης του υπεραγωγού, στην οποία οι υπεραγωγίμες ιδιότητες είναι υποβαθμισμένες. Βάση του φαινομένου Josephson, το υπερέυμα που διαρρέει το δακτύλιο με την ασθενή επαφή μπορεί να διαμορφωθεί με τη μαγνητική ροή που διαρρέει την επιφάνεια του δακτυλίου. Η μεταβολή του υπερέυματος με την εξωτερική μαγνητική ροή μοιάζει με την εικόνας συμβολής, με περίοδο μέγιστων το κβάντο μαγνητικής ροής, $\Phi_0 = 2.0 \times 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2$. Αυτό το γεγονός έχει σαν συνέπεια -αν το μέγεθος του δακτυλίου είναι αρκούτσως μικρό- να μπορούμε να ανιχνεύσουμε πολύ μικρές αλλαγές της μαγνητικής επαγωγής $B = 0.1 \Phi_0 / A$ (π.χ. για $A = 1 \text{ mm}^2$) $B = 0.1 \Phi_0 / A \approx 1 \times 10^{-6} \text{ Gauss} \approx 0.1 \text{ nT}$. Επειδή οι μαγνητικές μετρήσεις γίνονται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ο αισθητήρας SQUID δεν βρίσκεται σε άμεση επαφή

με το δείγμα. Η μεταφορά του μαγνητικού σήματος στον αισθητήρα SQUID γίνεται μέσω του κυκλώματος ανίχνευσης (δες σχήμα 1). Η μαγνητική ροή μαγνητικού δείγματος ανιχνεύεται από τέσσερις σπείρες τυλιγμένες σε διάταξη δευτέρας παραγωγού (δες κάτω δεξιά στα σχήματα 1 και 3).



Σχήμα 3 Διάταξη δευτέρας παραγωγού των πηνίων ανίχνευσης.

Αυτές οι σπείρες μαζί με τα πηνία της ανατροφοδότησης και του μετασχηματιστή αποτελούν το κύκλωμα ανίχνευσης. Το κύκλωμα ανατροφοδότησης χρησιμοποιείται για να επιτυγχάνεται μέγιστη σταθερότητα στην απόκριση του αισθητήρα SQUID. Ο μετασχηματιστής απομόνωσης χρησιμοποιείται για μείωση του θορύβου και σε συνδυασμό με την αντίσταση θερμάνσεως για να μειώνει το σήμα και να μην προκαλείται υπερφόρτωση του αισθητήρα SQUID. Αυτό το κύκλωμα δίνει τη δυνατότητα να γίνονται μετρήσεις δειγμάτων από 500 emu έως 10^{-6} emu.

Το κύκλωμα των πηνίων ανίχνευσης αποτελείται από υπεραγωγίμο καλώδιο. Επειδή σε ένα υπεραγωγίμο βρόγχο το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του καλωδίου είναι μηδέν (βασική ιδιότητα των υπεραγωγών στην κατάσταση Meissner (ή την κρίσιμη κατάσταση) σύμφωνα με το νόμο του Faraday η μαγνητική ροή θα πρέπει να παραμένει σταθερή. Πράγματι,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Στη δεύτερη σχέση το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα λαμβάνεται στο εσωτερικό του υπεραγωγίμου καλωδίου έτσι ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι μηδέν. Στις προηγούμενες σχέσεις λάβαμε υπόψη ότι ο βρόγχος μένει ακίνητος και μόνο η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται με το χρόνο. Η μαγνητική επαγωγή προέρχεται από δείγμα το οποίο θεωρούμε ως ένα σημειακό μαγνητικό δίπολο που

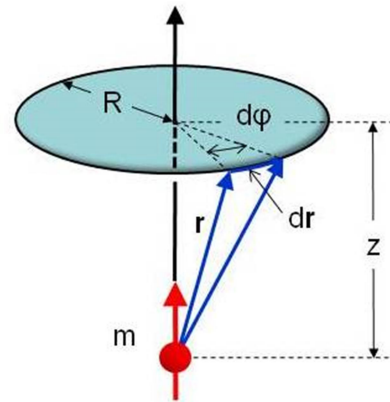
κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα συμμετρίας των πηνίων ανίχνευσης. Συνεπώς κάθε αλλαγή της μαγνητικής επαγωγής που περνά μέσα από τον υπεραγωγίμο βρόγχο θα επάγει ηλεκτρικό ρεύμα φοράς τέτοιας, ώστε η συνολική μαγνητική ροή που περνά από τα πηνία ανίχνευσης να παραμένει σταθερή. Η μαγνητική ροή βρόχου ρεύματος, αυτεπαγωγής L , ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I , σε εξωτερική μαγνητική επαγωγή \mathbf{B}_{ext} θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi = LI + \int \mathbf{B}_{ext} \cdot d\mathbf{a} = \text{σταθερά}.$$

Αν φέρουμε από το άπειρο ένα μαγνητικό δίπολο κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του υπεραγωγίμου βρόχου που δεν διαρρέεται από ρεύμα, το ρεύμα που θα επαχθεί για να μην αλλάξει η μαγνητική ροή θα ισούται με:

$$I = -\frac{1}{L} \int \mathbf{B}_{ext} \cdot d\mathbf{a}.$$

Με τη βοήθεια μετασχηματιστή απομόνωσης το συγκεκριμένο ρεύμα μεταφέρεται σε ένα υπεραγωγίμο πηνίο το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, ανάλογο με την ένταση της μαγνητικής ροπής του δείγματος, το οποίο εφαρμόζεται στο βρόγχο με την επαφή RF Josephson (δες σχήμα 1).



Σχήμα 4 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά δακτυλίου και σημειακού δίπολου, το οποίο βρίσκεται στον άξονα του δακτυλίου.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη μαγνητική ροή που προκαλεί ένα σημειακό μαγνητικό δίπολο που βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας πηνίου ανίχνευσης. Η συνολική ροή θα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των μαγνητικών ροών που περνούν από τις τέσσερις σπείρες του πηνίου ανίχνευσης. Η μαγνητική ροή που προκαλεί ένα σημειακό μαγνητικό δίπολο, που απέχει απόσταση z από το κέντρο της σπείρας, μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

άρα

$$\Phi = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{r}.$$

Αν \mathbf{e}_ϕ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην περιφέρεια της σπείρας (δες σχήμα 4) τότε θα ισχύουν $d\mathbf{r} = R d\phi \mathbf{e}_\phi$ και $\mathbf{m} \times \mathbf{r} = mr \sin \theta \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi mrR / r$. Άρα η μαγνητική ροή γίνεται:

$$\Phi(z) = \frac{\mu_0}{2} mR^2 \left(\frac{1}{(R^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2 + (z - z_1)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2 + (z + z_1)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (z + z_0)^2)^{3/2}} \right)$$

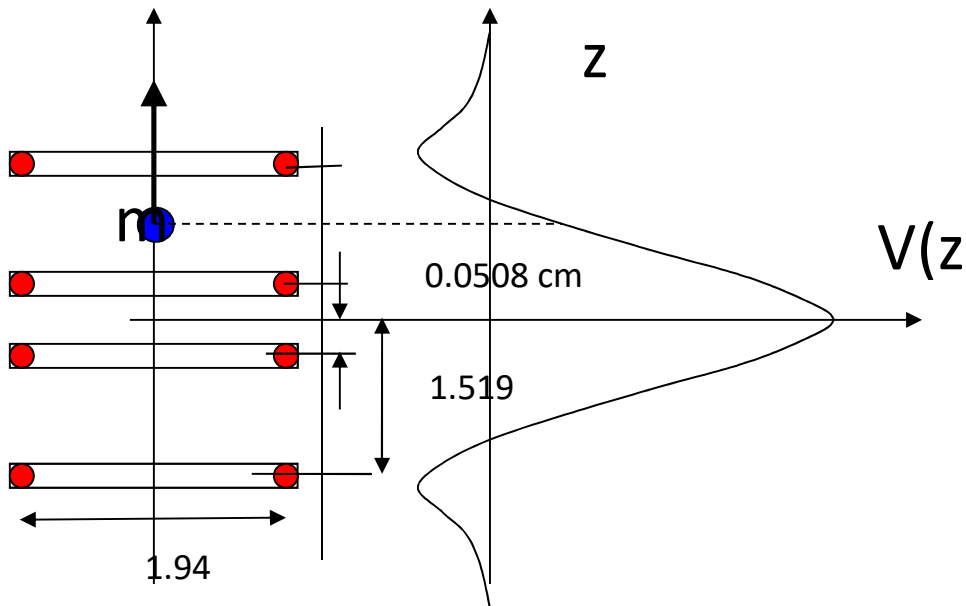
Ουσιαστικά, η συνολική μαγνητική ροή που διαρρέει τα πηνία ανίχνευσης (όταν το δείγμα βρίσκεται στο κέντρο) είναι ανάλογη της δευτέρας παραγώγου της κατανομής της μαγνητικής ροπής κατά μήκος του άξονα z. Για αυτό το λόγο η συγκεκριμένη διάταξη των πηνίων ανί-

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{mR^2}{r^4} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0}{2} \frac{mR^2}{r^3} \Leftrightarrow$$

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2} \frac{mR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη διάταξη των τεσσάρων δακτυλίων του πηνίου ανίχνευσης (δες σχήμα 3), η συνολική ροή θα δίνεται από τη σχέση $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4$ ή

χνευσης ονομάζεται βαθμιδόμετρο δευτέρας παραγώγου. Λόγω της παρουσίας της μαγνητικής ροπής δημιουργείται ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα ανίχνευσης ανάλογο της συνολικής μαγνητικής ροής που διέρχεται από τα πηνία ανίχνευσης.



Σχήμα 5. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πηνίων ανίχνευσης (αριστερό σχήμα), και μεταβολή του σήματος SQUID συναρτήσει της θέσης του δείγματος (δεξί σχήμα).

Το συγκεκριμένο ηλεκτρικό ρεύμα με τη σειρά του δημιουργεί μαγνητικό πεδίο το οποίο «αισθάνεται» ο αισθητήρας SQUID, ο οποίος παράγει στην έξοδο του ηλεκτρική τάση ανάλογη με τη μαγνητική ροή των πηνίων ανίχνευσης ή με άλλα λόγια:

$$V(z) \propto \Phi(z) \propto mf'(z).$$

Στο σχήμα 5 φαίνεται η μορφή της καμπύλης $V(z)$ (συνάρτηση απόκρισης) για το βαθμιδόμετρο δευτέρας παραγώγου και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πηνίων ανίχνευσης. Η μαγνητική ροπή του δείγματος εξάγε-

ται μετά από προσαρμογή με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων μεταξύ της πειραματικής συνάρτησης απόκρισης και της θεωρητικής συνάρτησης $\Phi(z)$ που υπολογίσαμε παραπάνω.

6) ΔΙΑΤΑΞΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ (PPMS)

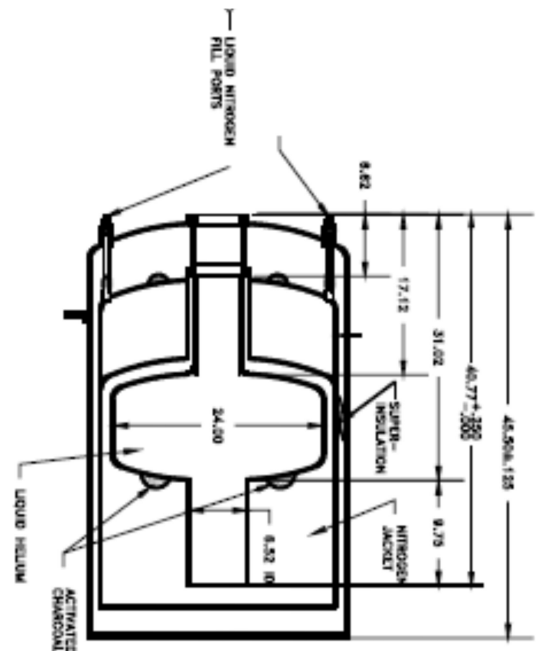
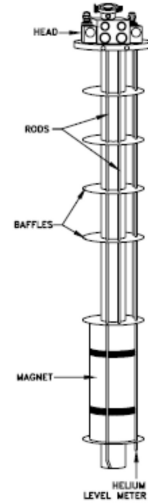


Σχήμα 1 Σύστημα μέτρησης φυσικών ιδιοτήτων

Το σύστημα μέτρησης φυσικών ιδιοτήτων (Σχήμα 1) (για συντομία θα το ονομάζουμε PPMS) της εταιρίας QUANTUM Designed είναι μία διάταξη ανοικτής αρχιτεκτονικής στην οποία μπορούν να εκτελεστούν μετρήσεις που αφορούν τις μαγνητικές ιδιότητες (εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα, μαγνήτιση), την ηλεκτρική αντίσταση, την μαγνητοαντίσταση, την αντίσταση Hall την ειδική θερμότητα και την θερμική αγωγιμότητα συμπαγών δοκιμίων. Οι μετρήσεις μπορούν να γίνουν από τους 1.8 K έως τους 400 K και για μαγνητικά πεδία από -9 έως 9 Tesla. Σημαντικό τμήμα του PPMS είναι η ο κρουστάτης και ο υπεραγώγιμος μαγνήτης (δες σχήμα 2). Ο κρουστάτης του PPMS είναι ένα κυλινδρικό δοχείο (σχήμα 2) με χωρητικότητα υγρού ηλίου 65 liter τα οποία χρησιμοποιούνται για την ψύξη του υπεραγώγιμου μαγνήτη και την επίτευξη μεταβλητής θερμοκρασίας στον χώρο του δείγματος. Για να διατηρηθεί το ήλιο σε υγρή κατάσταση και να έχουμε χαμηλή κατανάλωση υγρού ηλίου, το δοχείο που περιέχει το υγρό περιβάλλεται από ένα χώρο με κενό ενώ στην πάνω μεριά του δοχείου υπάρχει χώρος χωρητικότητας 45 liter για υγρό άζωτο με σκοπό την θερμική θωράκιση του χώρου που βρίσκεται το υγρό ήλιο. Στο δοχείο του υγρού εισάγεται η probe (δες σχήμα 2) η οποία αποτελείται από το χώρο του δείγματος και τον υπεραγώγιμο μαγνήτη.

Εδώ μας ενδιαφέρει η δυνατότητα του οργάνου για τη μέτρηση της εναλλασσόμενης μαγνήτισης. Το σύστημα μέτρησης της εναλλασσόμενης μαγνήτισης (ACMS) είναι μία τυπική γέφυρα Hartshorn οποία αποτελείται από ένα πλαστικό σωλήνα στον οποίο είναι τυλιγμένα με αντίθετη σχετική φορά δύο πηνία με ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά (αριθμός σπειρών N_s , μήκος L_s , διάμετρος D_s) τα ονομάζονται πηνία ανίχνευσης (ή δευτερεύοντα πηνία, detection coils). Αμέσως μετά είναι τυλιγμένα δύο πηνία (κύκλωμα πρωτεύοντος πηνίου) των οποίων το μήκος

καλύπτει το άθροισμα των μηκών των πηνίων ανίχνευσης σε αστατική διαμόρφωση με αριθμό σπειρών N_{p1} , N_{p2} και διαμέτρους D_{p1} , D_{p2} ($N_{p1}D_{p1}^2 = N_{p2}D_{p2}^2$). Αυτό το σύστημα πηνίων, παρέχει το εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο συχνότητας από 1-10 kHz και πλάτους 0.01-15 Oe και θωρακίζει το πηνία ανίχνευσης από παρασιτικά σήματα.



Σχήμα 2 Δοχείο υγρού ηλίου και χώρος του δείγματος με τον υπεραγώγιμο μαγνήτη.

Για να αυξηθεί η ακρίβεια της μέτρησης η μέτρηση επαναλαμβάνεται τρεις φορές. Η πρώτη γίνεται με το δείγμα να τοποθετείται στο κέντρο του κάτω πηνίου ανίχνευσης. Στην συνέχεια τοποθετείται στο κέντρο του πά-

νω πηνίου ανίχνευσης και έπειτα πάλι στο κέντρο του κάτω πηνίου ανίχνευσης. Τα σήματα που παράγονται από αυτές τις τρεις μετρήσεις, ενισχύονται, φιλτράρονται, ψηφιοποιούνται από έναν μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό σήμα. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πηνία ανίχνευσης ενισχύεται και μετά ψηφιοποιείται με τη βοήθεια ενός μετατροπέα αναλογικού-ψηφιακού σήματος. Κατόπιν ακολουθεί μέτρηση των συνιστωσών Fourier της παραγώγου της μαγνήτισης με

την βοήθεια ενός ανιχνευτή που μπορεί να ανίχνευση διαφορές στην φάση του σήματος σε σχέση με την φάση του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου του πρωτεύοντος. Αυτός ο ανιχνευτής είναι μέρος των ενισχυτών Lock-in. Εκτός των τριών μετρήσεων καταγράφεται η επαγομένη τάση στα δύο πηνία βαθμονόμησης για να καθοριστεί η φάση του εναλλασσόμενου εξωτερικού πεδίου.

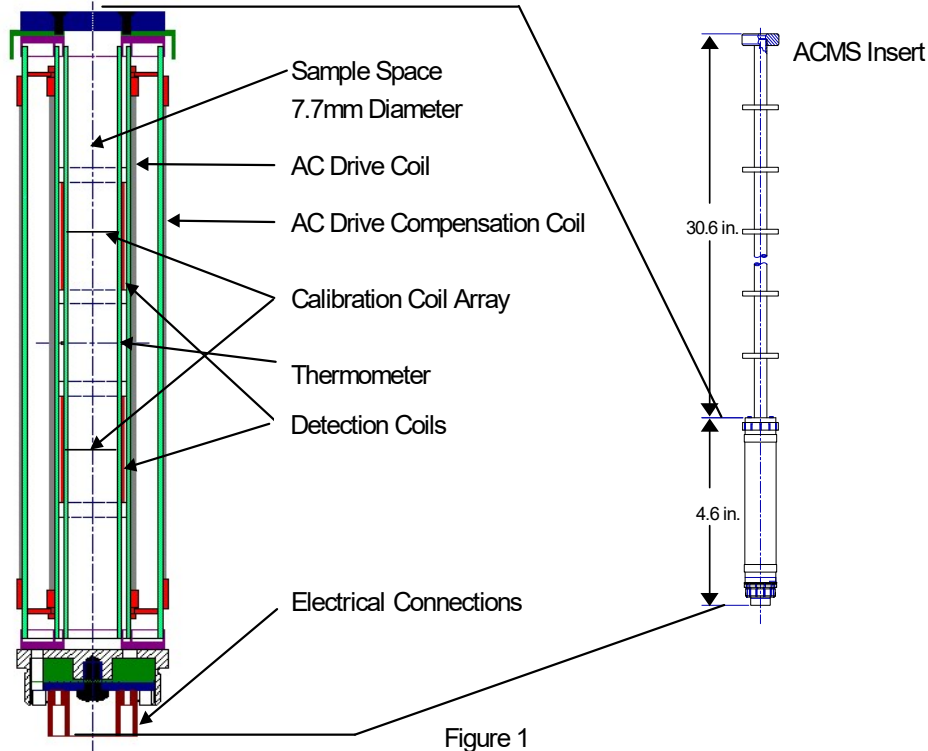


Figure 1

Σχήμα 3 Πηνία ανίχνευσης για την μέτρηση της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας του PPMS

Το σύστημα ανίχνευσης της διάταξης της εναλλασσόμενης επιδεκτικότητας αποτελείται από δύο ομοαξονικά όμοια πηνία μήκους L με N σπείρες ανά μονάδα μήκους, αντίθετα τυλιγμένα. Για απλοποίηση των υπολογισμών που ακολουθούν αγνοούμε την καμπύλωση των δυναμικών γραμμών στα άκρα των πηνίων. Επειδή τα δύο πηνία είναι «αντίθετα τυλιγμένα» και το πηνίο 1 είναι κενό ενώ το πηνίο 2 περιέχει το δείγμα, η συνολική μαγνητική ροή θα ισούται με τη διαφορά της ροής του εξωτερικού πεδίου $H_0 = B_0 / \mu_0$ στο πηνίο 1 και της ροής της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό του δεύτερου πηνίου. Η μαγνητική ροή στα δύο πηνία θα ισούται

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 \\ &= \int dz N \int dS \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \\ &= \int dz N \int dS (B_1 - B_2) \\ &= \int dz N \mu_0 \int dx^2 (\mu_0 H_0(t) - \mu_0 M(t) - \mu_0 H_0(t)) \Leftrightarrow \\ \Phi &= -NV \mu_0 M\end{aligned}$$

όπου V είναι ο όγκος των πηνίων. Οι ροές των δύο πηνίων είναι ετερόνομες διότι είναι αντίθετα τυλιγμένα. Η ολοκλήρωση ως προς z γίνεται για να λάβουμε υπόψη όλες τις σπείρες των πηνίων. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στα πηνία ανίχνευσης ισούται με την αρνητική χρονική παράγωγο της μαγνητικής ροής

$$\text{EMF} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 V N \frac{dM}{dt}$$

Αν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι μία περιοδική συνάρτηση του χρόνου $\chi H_0(t) = H_{dc} + H_{ac} \cos(\omega t)$, και αγνοήσουμε τον παρθενικό κλάδο της μαγνήτισης τότε η

μαγνήτιση και η χρονική παράγωγος της μαγνήτισης θα είναι περιοδικές συναρτήσεις με την ίδια περίοδο $T = 2\pi / \omega$. Επειδή η μαγνήτιση είναι περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier σύμφωνα με τη σχέση

$$M(t) = \frac{M_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [M_n' \cos(n\omega t) + M_n'' \sin(n\omega t)]$$

όπου

$$M_n' = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$M_n'' = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Οι συνιστώσες της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας σε φάση και με διαφορά φάσης 90° με το εξωτερικό πεδίο ορίζονται από τις σχέσεις

$$\chi_n' = \frac{M_n'}{H_{ac}}$$

$$\chi_n'' = \frac{M_n''}{H_{ac}}$$

Η χ_n' ονομάζεται και πραγματικό μέρος της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας, ενώ η χ_n'' φανταστικό μέρος. Η πρώτη συνιστώσα ($n=1$) ονομάζεται θεμελιώδης συνιστώσα της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας.

Αν γράψουμε το χρονομεταβαλλόμενο εξωτερικό πεδίο στη μορφή

$$H_0(t) = \text{Re}[H_{ac} \exp(j\omega t)] = \text{Re}[\mathbb{H}_0(t)],$$

τότε η i συνιστώσα της μαγνήτισης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} M_i(t) &= M_i' \cos(\omega t) + M_i'' \sin \omega t \\ &= H_{ac} \chi_i' \cos(\omega t) + H_{ac} \chi_i'' \sin \omega t \\ &= \text{Re}[\mathbb{H}_0(t)(\chi_i' - j\chi_i'')] \end{aligned}$$

Η ποσότητα

$$\chi = \chi_i' - j\chi_i''$$

ονομάζεται μιγαδική μαγνητική επιδεκτικότητα.

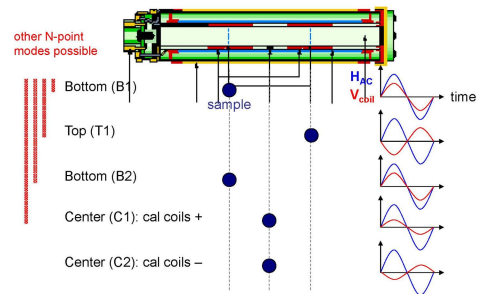
Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς η EMF στα πηνία ανίχνευσης μπορεί να γραφτεί

$$\text{EMF} = \mu_0 V N \frac{dM}{dt} \Leftrightarrow$$

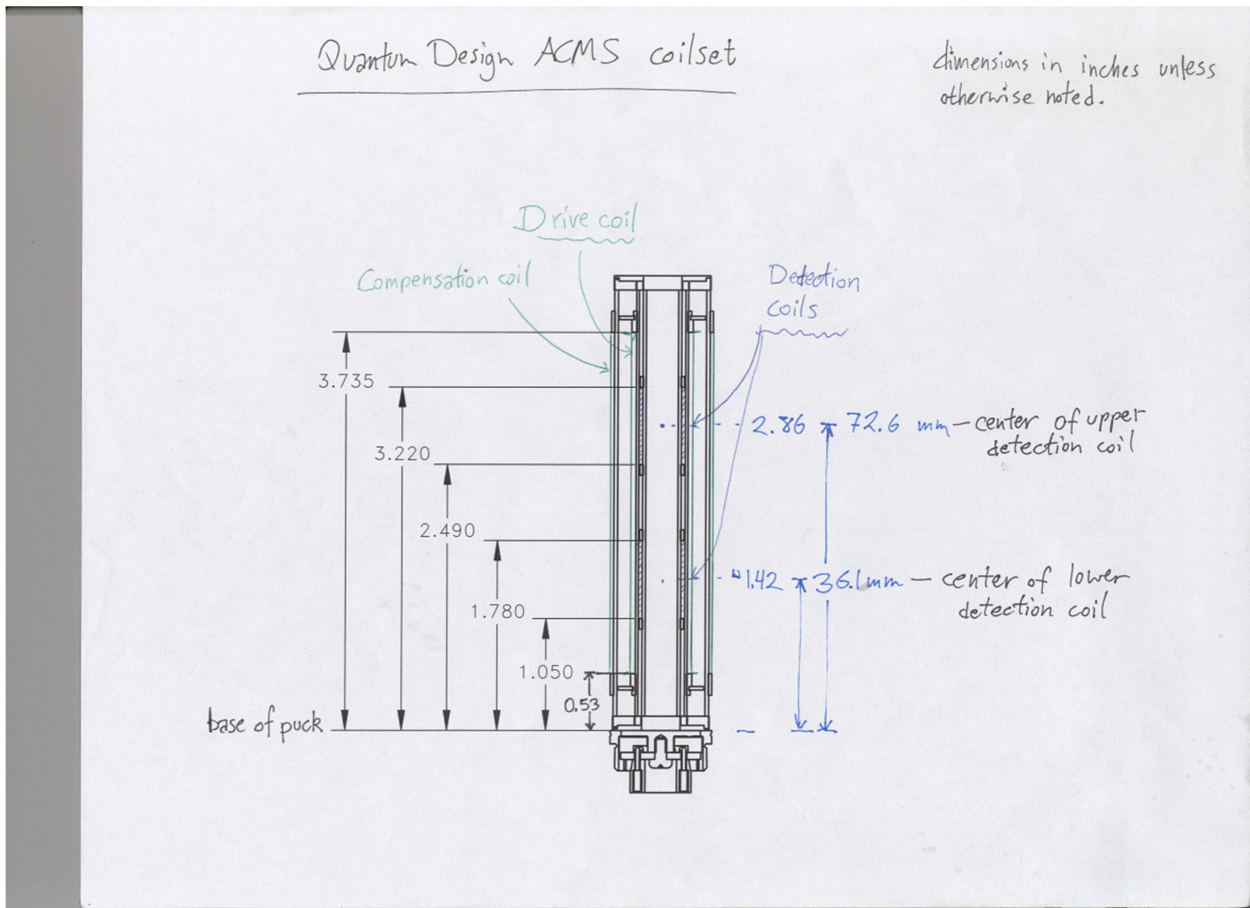
$$\text{EMF} = \mu_0 V N \sum_{n=1}^{\infty} [-H_{ac} \chi_n' n\omega \sin(n\omega t) + H_{ac} \chi_n'' n\omega \cos(n\omega t)]$$

Άρα το σήμα σε φάση με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι ανάλογο του φανταστικού μέρους της μιγαδικής επιδεκτικότητας και το σήμα με διαφορά φάσης 90° είναι ανάλογο με το φανταστικό μέρος.

AC measurement protocol:
5-point "BTBCC" is default



Σχήμα 4 Πρωτόκολλο μετρήσεων 5 σημείων για την εκτίμηση της ac-επιδεκτικότητας.



Σχήμα 5 Γεωμετρικά δεδομένα των πηνίων ανίχνευσης της ACSM επιλογής του PPMS.

Τα πηνία της ac-επιδεκτικότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της μαγνητικής ροπής μαγνητικού δείγματος. Αυτό μπορεί να γίνει με μέτρηση της ΗΓΔ που αναπτύσσεται στα πηνία ανίχνευσης αν κινήσουμε το δείγμα μέσα σ' αυτά.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΡΟΠΗΣ

Τα πηνία της ac-επιδεκτικότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της μαγνητικής ροπής μαγνητικού δείγματος. Αυτό μπορεί να γίνει με μέτρηση της ΗΓΔ που αναπτύσσεται στα πηνία ανίχνευσης αν κινήσουμε το δείγμα μέσα σ' αυτά. Για να αναλύσουμε θεωρητικά την επαγόμενη EMF που προκαλείται από το δείγμα το οποίο κινείται πάνω στον άξονα των πηνίων, θεωρούμε ένα σημειακό μαγνητικό δίπολο, μαγνητικής ροπής $\mathbf{m} = m\hat{e}_z$ το οποίο βρίσκεται στον άξονα z σε απόσταση z_i από την αρχή των αξόνων. Η θέση του δίπολου περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(t)$

$$z_m(t) = f(t) \quad (1)$$

Η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη λόγω της κίνησης του δείγματος μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του νόμου του Faraday,

$$V_{EMF} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dz} \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

όπου Φ είναι η μαγνητική ροή που περνά από την επιφάνεια του πηνίου ανίχνευσης. Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της επαγόμενης μαγνητικής ροής στα πηνία του συστήματος ACMS του PPMS θα κάνουμε τον υπολογισμό για ένα κυλινδρικό πηνίο με ομοιόμορφη περιέλιξη. Στην γενική περίπτωση η περιέλιξη του πηνίου μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση κατανομής $N(\rho, z)$ έτσι ώστε η ποσότητα

$$dN = N(\rho, z)2\pi\rho d\rho dz \quad (3)$$

να μας δίνει τον αριθμό των περιελίξεων που υπάρχουν στον κυλινδρικό φλοιό εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας ρ και $\rho+d\rho$ και μήκος μεταξύ z και $z+dz$. Στα επόμενα θεωρούμε ότι η συνάρτηση $N(\rho, z)$ είναι σταθερή $N(\rho, z) = N$.

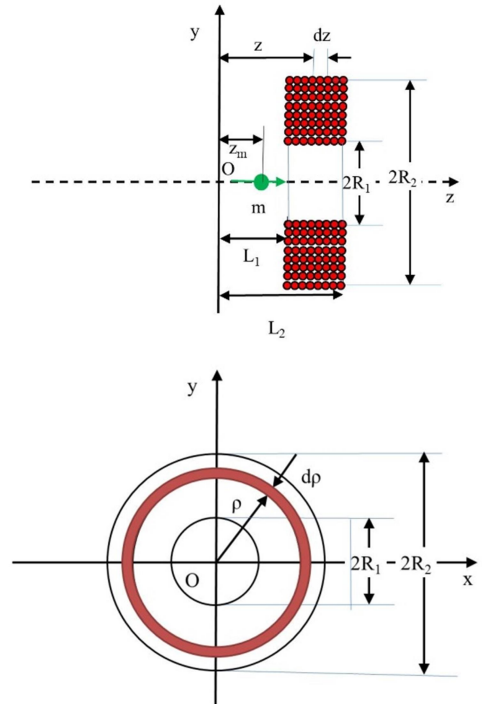
Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση που δίνει τη μαγνητική ροή σημειακού μαγνητικού δίπολου $\mathbf{m} = m \cdot \mathbf{e}_z$ σε δακτύλιο ακτίνας R (την έχουμε αποδείξει για το μαγνητόμετρο SQUID):

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2} \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{m\rho^2}{[\rho^2 + (z - z_m(t))^2]^{3/2}} N 2\pi\rho d\rho dz = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mathcal{Z} \pi N m \rho^2}{\mathcal{Z}} \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{[L_2 - z_m(t)]}{[\rho^2 + (L_2 - z_m(t))^2]^{1/2}} - \frac{[L_1 - z_m(t)]}{[\rho^2 + (L_1 - z_m(t))^2]^{1/2}} \right\} \rho d\rho \Rightarrow \quad (5)$$

$$\Phi = \mu_0 N \pi m \left\{ [L_2 - z_m(t)] \left(\sqrt{R_2^2 + (L_2 - z_m(t))^2} - \sqrt{R_1^2 + (L_2 - z_m(t))^2} \right) - [L_1 - z_m(t)] \left(\sqrt{R_2^2 + (L_1 - z_m(t))^2} - \sqrt{R_1^2 + (L_1 - z_m(t))^2} \right) \right\}$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε την επίδραση της μαγνητικής ροής μαγνητικών πεδίων που δεν σχετίζονται με το μαγνητικό δίπολο, χρησιμοποιούμε δύο όμοια, ομοαξονικά, πηνία μήκους L , απέχουν απόσταση L_0 , των οποίων οι άξονες ταυτίζονται με τον άξονα z , αλλά έχουν περιελι-

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2} \frac{mR^2}{[R^2 + (z - z_m(t))^2]^{3/2}} \quad (9)$$



Σχήμα 1 Γεωμετρικά στοιχεία για τον υπολογισμό της μαγνητικής ροής που προκαλεί σημειακό μαγνητικό δίπολο σε πηνίο εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας R_1, R_2 και μήκους L_2-L_1 .

η μαγνητική ροή σε πηνίο εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας R_1 και R_2 και ύψους $L=L_2-L_1$ μπορεί να υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα (δες **σχήμα 1**):

$$\Phi(z_m) = \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0}{2} \frac{m\rho^2}{[\rho^2 + (z - z_m(t))^2]^{3/2}} N 2\pi\rho d\rho dz \quad (4)$$

Η μαγνητική ροή μπορεί να υπολογιστεί [12] σε κλειστή μορφή για ένα πηνίο με σταθερή πυκνότητα.

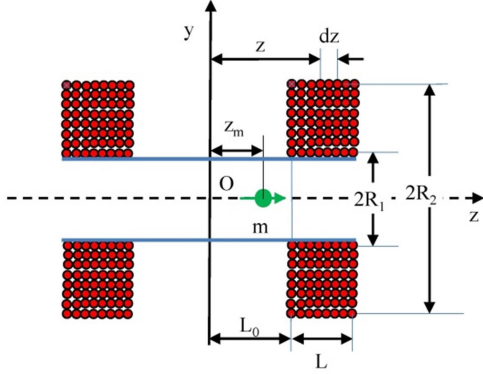
Πράγματι

χθεί με αντίθετη φορά (δες **σχήμα 2**). Η συνολική μαγνητική ροή που προκαλεί ένα σημειακό δίπολο στα δύο πηνία θα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των μαγνητικών ροών στα δύο πηνία. Οι μαγνητικές ροές μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση 5 με κατάλληλη επιλογή

των παραμέτρων που συνδέονται με την απόσταση του δίπολου από τα άκρα των πηνίων [$(-L_0-L, -L_0)$ για το αρι-

στερό και (L_0, L_0+L) για το δεξιό πηνίο] :

$$\begin{aligned} \Phi = \mu_0 N \pi m \left\{ [L_0 + L - z_m(t)] \left(\sqrt{R_2^2 + (L_0 + L - z_m(t))^2} - \sqrt{R_1^2 + (L_0 + L - z_m(t))^2} \right) \right. \\ \left. - [L_0 - z_m(t)] \left(\sqrt{R_2^2 + (L_0 - z_m(t))^2} - \sqrt{R_1^2 + (L_0 - z_m(t))^2} \right) \right\} \\ - \left\{ [-L_0 - z_m(t)] \left(\sqrt{R_2^2 + (-L_0 - z_m(t))^2} - \sqrt{R_1^2 + (-L_0 - z_m(t))^2} \right) \right. \\ \left. - [-L_0 - L - z_m(t)] \left(\sqrt{R_2^2 + (-L_0 - L - z_m(t))^2} - \sqrt{R_1^2 + (-L_0 - L - z_m(t))^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$



Στην περίπτωση του συστήματος PPMS το δείγμα (η μαγνητική ροπή) κινείται με σταθερή ταχύτητα συνεπώς η θέση του δίπολου θα δίνεται από τη σχέση:

$$z_m(t) = z_i + vt, \quad (7)$$

όπου $u=1$ m/s η ταχύτητα του δείγματος και z_i η αρχική θέση του δείγματος. Σύμφωνα με το νόμο του Faraday η στιγμιαία ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στα δύο πηνία τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_{EMF} = -\frac{d\Phi}{dt} \cong -\frac{d\Phi}{dz_m} \frac{dz_m}{dt} = -v \frac{d\Phi}{dz_m}. \quad (8)$$

Σχήμα 2 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πηνίων αντίχυνσης. Τα πηνία αντίχυνσης αποτελούνται από δύο όμοια ομοαξονικά πηνία μήκους L , των οποίων τα κέντρα απέχουν $2L_0+L$.

Αν συμβολίσουμε με G την παράγωγο $G=d\Phi/dz$ αυτή θα δίνεται από τη σχ

$$\begin{aligned} G = & \left(-\sqrt{R_1^2 + (-L_0 - z)^2} + \sqrt{R_2^2 + (-L_0 - z)^2} + \sqrt{R_1^2 + (-L - L_0 - z)^2} - \sqrt{R_2^2 + (-L - L_0 - z)^2} \right. \\ & - \sqrt{R_1^2 + (L_0 - z)^2} + \sqrt{R_2^2 + (L_0 - z)^2} + \sqrt{R_1^2 + (L + L_0 - z)^2} - \sqrt{R_2^2 + (L + L_0 - z)^2} \\ & \left. - \left(\frac{-L_0 - z}{\sqrt{R_1^2 + (-L_0 - z)^2}} - \frac{-L_0 - z}{\sqrt{R_2^2 + (-L_0 - z)^2}} \right) (-L_0 - z) \right. \\ & + \left(\frac{-L - L_0 - z}{\sqrt{R_1^2 + (-L - L_0 - z)^2}} - \frac{-L - L_0 - z}{\sqrt{R_2^2 + (-L - L_0 - z)^2}} \right) (-L - L_0 - z) \\ & - \left(\frac{L_0 - z}{\sqrt{R_1^2 + (L_0 - z)^2}} - \frac{L_0 - z}{\sqrt{R_2^2 + (L_0 - z)^2}} \right) (L_0 - z) \\ & \left. + \left(\frac{L + L_0 - z}{\sqrt{R_1^2 + (L + L_0 - z)^2}} - \frac{L + L_0 - z}{\sqrt{R_2^2 + (L + L_0 - z)^2}} \right) (L + L_0 - z) \right) \end{aligned}$$

τότε η ηλεκτρεγερτική δύναμη θα δίνεται από τη σχέση :

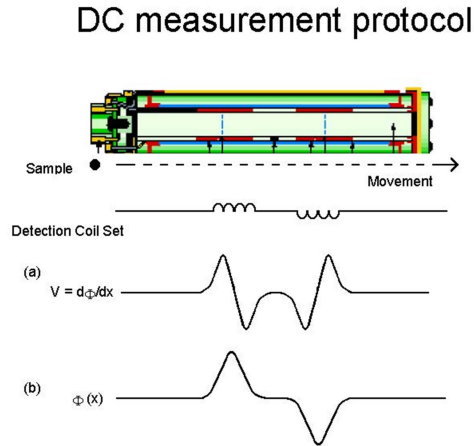
$$V_{EMF}^0 = -\mu_0 N m v G(R, L_0, L, z_m(t)) \quad (9).$$

Προφανώς η μαγνητική ροή μπορεί να υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα

$$\Phi(z_m) = -\int V_{EMF}^0 dt = -\int V_{EMF}^0 \frac{1}{v} dz_m \quad (10)$$

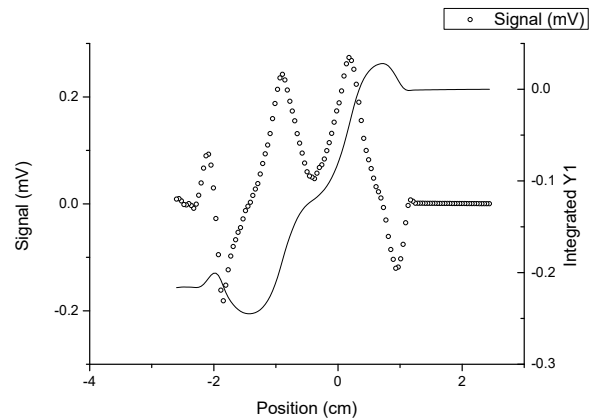
Στο **σχήμα 3** φαίνεται σχηματικά η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη και η μαγνητική ροή συναρτήσει της θέσης του δείγματος στο σύστημα πηνίων της μετρητικής ευκολίας ACSM του PPMS. Σύμφωνα με τον οδηγό χρήστη η κίνηση ξεκινά 2.8cm (πάνω) σε σχέση με την αρχή των αξόνων και ολοκληρώνεται -2.2 cm στο κάτω μέρος

των πηνίων. Μετά από ψηφιοποίηση της επαγόμενης τάσης ακολουθεί αριθμητική ολοκλήρωση για να υπολογιστεί η μαγνητική ροή. Η καμπύλη μαγνητικής ροής $\Phi(z)$ συγκρίνεται με τη θεωρητική σχέση έτσι ώστε με τη βοήθεια της σταθεράς βαθμονόμησης υπολογίζεται η μαγνητική ροπή του δείγματος.



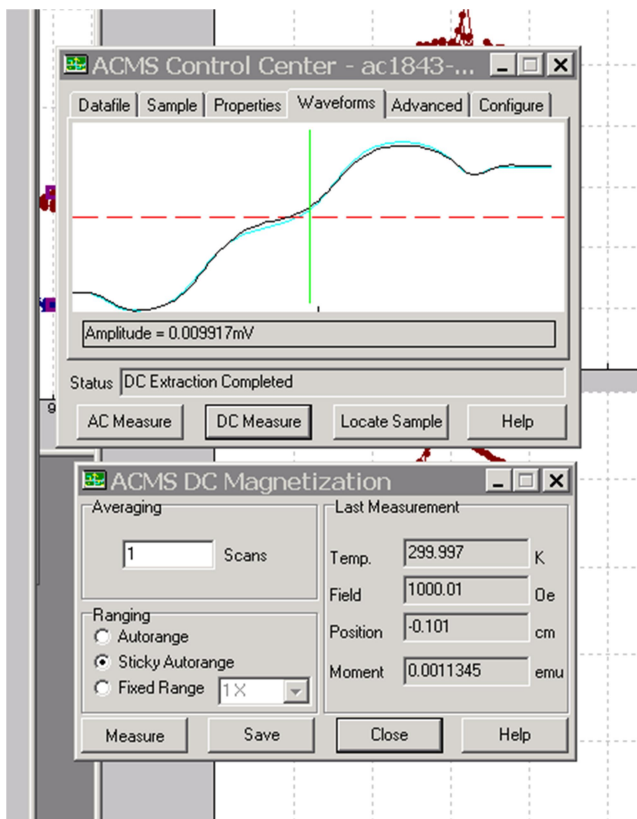
Σχήμα 3 Σχηματική μεταβολή της επαγόμενης ηλεκτρεγερτικής δύναμης και της μαγνητικής επαγωγής συναρτήσει της θέσης του δείγματος σε σχέση με τα πηνία ανίχνευσης της μετρητικής ευκολίας ACSM του PPMS.

Στο σχήμα 4 φαίνεται ένα στιγμιότυπο της θεωρητικής και της πειραματικής απόκρισης από τα πηνία ανίχνευσης για μία τυπική μέτρηση της dc μαγνητικής ροπής δείγματος.



Σχήμα 5 Μεταβολή των επαγόμενων τάσεων και της μαγνητικής ροής συναρτήσει της θέσης του δείγματος.

Στο σχήμα 5 φαίνεται η μεταβολή της επαγόμενης τάσης και της μαγνητικής ροής, στα πηνία ανίχνευσης, συναρτήσει της θέσης του δείγματος για μία μέτρηση της μαγνητικής ροπής. Η καμπύλη μαγνητικής ροής προέκυψε μετά από αριθμητική ολοκλήρωση της επαγόμενης τάσης.



Σχήμα 4 Στιγμιότυπο της καμπύλης απόκρισης μέτρησης της μαγνητικής ροπής

7) Βιβλιογραφία

Για τη συγγραφή των σημειώσεων χρησιμοποιήσαμε τα παρακάτω βιβλία:

[1] Classical Electrodynamics J. D. Jackson third edition, Wiley, page 181.

[2] Quantum Mechanics Volume 3. L. D. Landau and E. M. Lifshitz third edition page 453-466.

[3] Electrodynamics of continuous media, L. D. Landau E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, 2nd edition, Pergamon press, 19-26, 105-198

[4] Physics of Magnetism and Magnetic Materials, K.H. J. Buschow, and G. R. de Boer, Kluwer Academic Publishers

[5] Introduction to magnetic materials 2nd edition, D. D. Cullity, C. D. Craham, Wiley.

[6] Physics of ferromagnetism 2nd edition, Soshin Chikazumi, Clarendon press Oxford.

[7] Fundamentals of statistical and thermal physics Federick Reif, McGraw-Hill 1985.

Για του αισθητήρες SQUID και τα μαγνητόμετρα VSM

[8] The Physics of superconductors Introduction to fundamentals and applications, V. V. Schmidt, Springer 71-100.

[9] Measurements of magnetic materials, Fausto Fiorillo, Metrologia **47**, (2010), S114-S142.

[10] Applied Electromagnetics, Martin A. Plonus, McGraw- Hill.

[11] Οδηγός χρήσης SQUID magnetometer και PPMS (Quantum Design)

[12] Αθανάσιος Αναστασίου *Διπλωματική εργασία* ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ (2012).

8) Πειραματικές ασκήσεις

Άσκηση 1

Υπολογισμός του σπιν μαγνητικού ιόντος σε παραμαγνητική ένωση

1) Εισαγωγή

Σκοπός της άσκησης είναι ο υπολογισμός του σπιν μαγνητικού ιόντος, σε μαγνητική ένωση, χρησιμοποιώντας μετρήσεις της μαγνητικής ροπής του δείγματος. Οι μετρήσεις θα γίνουν στην ένωση $\text{Tris}(\text{acetylacetonato})\text{iron}(\text{III})$, $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_7\text{O}_2)_3$ (περιληπτικά $\text{FeIII}(\text{acac})_3$), χρησιμοποιώντας το όργανο μέτρησης φυσικών ιδιοτήτων (PPMS).

2) Πειραματική διαδικασία

Θα γίνει μία σύντομη περιγραφή του οργάνου PPMS και της φυσικής αρχής που βασίζεται η μέτρηση της μαγνητικής ροπής δείγματος. Στη συνέχεια θα συζητηθεί η κβαντική θεωρία του παραμαγνητισμού. Στο τέλος θα εκτελεστούν οι μετρήσεις.

3) Συγγραφή της τελικής αναφοράς, ανάλυση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

Η έκθεση θα περιλαμβάνει:

- (α) Μία σύντομη αναφορά στην κβαντική θεωρία του παραμαγνητισμού (έως 1 σελίδα).
- (β) Σύντομη περιγραφή της πειραματικής διάταξης, των βημάτων που ακολουθήθηκαν για τη μέτρηση και της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της μαγνητικής ροπής (έως 1 σελίδα).
- (γ) Γραφική παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε διάγραμμα: Μαγνητική ροπή ανά χημική μονάδα συναρτήσεται του εξωτερικού μαγνητικού.
- (δ) Προσδιορισμός του σπίν του ιόντος του σιδήρου της ένωσης $\text{Fe}(\text{acac})_3$ με προσαρμογή της καμπύλης μαγνήτισης σε σταθερή θερμοκρασία, στις πειραματικές μετρήσεις, με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Άσκηση 2

Μέτρηση μαγνήτισης κόρου μαλακού σιδηρομαγνητικών υλικών.

1) Εισαγωγή

Ο σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση της μαγνητικής ροπής, σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου, μαλακού σιδηρομαγνητικού υλικού για να εκτιμηθεί, η μαγνήτιση κόρου. Οι μετρήσεις θα γίνουν με τη βοήθεια του συστήματος μέτρησης φυσικών ιδιοτήτων (PPMS) με τη μέθοδο εξαγωγής της μαγνητικής ροπής από την EMF που αναπτύσσεται σε δύο ομοαξονικά όμοια πηνία, με αντίθετη

φορά περιέλιξης. Το δείγμα που θα μετρηθεί είναι ένα πολυκρυσταλλικό μεταλλικό υλικό.

2) Πειραματική διαδικασία και ανάλυση αποτελεσμάτων

- 2α) Μετάγγιση υγρού ηλίου.
- 2β) Μέτρηση της μάζας του δείγματος.
- 2γ) Τοποθέτηση του δείγματος στο δειγματοφορέα, εισαγωγή του δειγματοφορέα στο μαγνητόμετρο και κεντράρισμα του δείγματος.
- 2δ) Εκτέλεση των μετρήσεων.

3) Συγγραφή της τελικής αναφοράς, ανάλυση και συζήτηση των αποτελεσμάτων

Η έκθεση θα περιλαμβάνει:

- (α) Μία σύντομη αναφορά στα σιδηρομαγνητικά υλικά (έως 1 σελίδα).
- (β) Σύντομη περιγραφή της πειραματικής διάταξης, των βημάτων που ακολουθήθηκαν για τη μέτρηση και της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της μαγνητικής ροπής (έως 2 σελίδες).
- (γ) Γραφική παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε διαγράμματα: μαγνήτισης συναρτήσεται του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και μαγνητικής επαγωγής συναρτήσεται του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου (1 σελίδα).
- (δ) Διόρθωση της καμπύλης μαγνήτισης λόγω του πεδίου απομαγνήτισης (1 σελίδα).
- (ε) Προσδιορισμός του υλικού που μετρήθηκε με βάση τη μαγνήτιση κόρου.
- (ζ) Υπολογίστε θεωρητικά τη μαγνήτιση κόρου, χρησιμοποιώντας βιβλιογραφικά δεδομένα για την κρυσταλλική δομή και τη ροπή ανά άτομο του μετάλλου που μετρήσατε. Συμφωνεί αυτή η τιμή με αυτή που μετρήσατε; Αν όχι που αποδίδετε τη διαφορά;