Άσκηση 4

Η μέθοδος Monte Carlo ή μέθοδος των τυχαίων αριθμών

Σκοπός της εργαστηριακής αυτής άσκησης είναι η εξοικείωση με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo και γενικότερα της μεθόδου τυχαίων αριθμών.

4.1.1 Γενικά

Η μέθοδος Monte Carlo είναι μια αριθμητική τεχνική που εφαρμόζεται για τον υπολογισμό πιθανοτήτων καθώς και διαφόρων ποσοτήτων σχετικών με πιθανότητες, χρησιμοποιώντας σειρές τυχαίων αριθμών. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου η χρήση αναλυτικών μεθόδων ή άλλων αριθμητικών προσεγγίσεων είναι ανεπαρκής. Η μέθοδος συνίσταται στο ότι, αντί να γίνει αναλυτική ή αριθμητική επίλυση του προβλήματος, δημιουργείται αρχικά μια ακολουθία τυχαίων αριθμών $x_1, x_2, \ldots$, η κατανομή των οποίων αντιστοιχεί στη συνάρτηση πιθανότητας f(x) που θέλουμε να υπολογίσουμε. Οι τιμές του x μπορούν να θεωρηθούν προσομοιωμένες μετρήσεις και από αυτές να υπολογιστούν οι πιθανότητες να λάβουν τιμές σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να υπολογιστεί πρακτικά το ολοκλήρωμα της f(x). Το πραγματικό πλεονέκτημα της τεχνικής αυτής φαίνεται σε προβλήματα πολλαπλών διαστάσεων, όπου ολοκλήρωση μιας συνάρτησης πιθανότητας f(x,y,z,...) σε μια περίπλοκη περιοχή μπορεί να μην είναι εφικτή με άλλες μεθόδους. Στα επόμενα δίνεται η αρχή της μεθόδου καθώς και μερικές εφαρμογές.

Ένα χαρακτηριστικό του συστήματος ονομάζεται *"τυχαίο"* όταν δεν είναι γνωστό ή δε μπορεί να προβλεφθεί με απόλυτη ακρίβεια. Ο βαθμός της τυχαιότητας μπορεί να δοθεί ποσοτικά με την έννοια της *"πιθανότητας"*. Η μαθηματική θεωρία των πιθανοτήτων είχε αρχίσει πριν το 17° αιώνα και μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί πολλοί ορισμοί της πιθανότητας. Στα επόμενα θα χρησιμοποιηθεί ο ορισμός που δόθηκε το 1933 από τον Kolmogorov. Θεωρείστε ένα σύνολο S που ονομάζεται "χώρος δειγμάτων" και αποτελείται από έναν ορισμένο αριθμό στοιχείων. Σε κάθε υποσύνολο A του S ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός $P(A)$ που ονομάζεται πιθανότητα και ορίζεται από τα ακόλουθα αξιώματα:

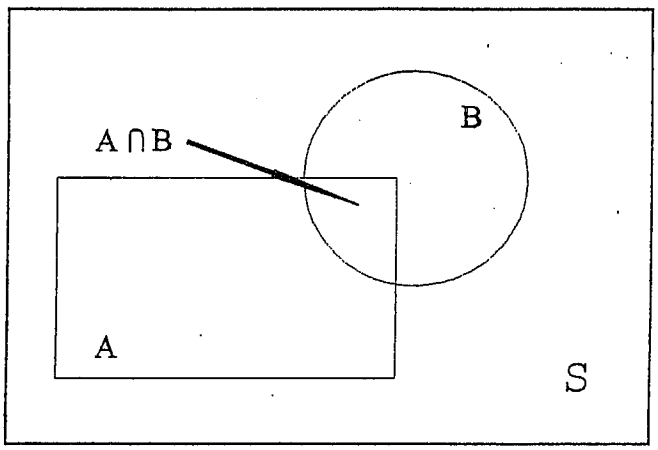
1. Για κάθε υποσύνολο A του S ισχύει $P(A) \geq 0$.
2. Για οποιαδήποτε δύο υποσύνολα A και B που δεν έχουν κοινά στοιχεία ($A \cap B = \varnothing$), η πιθανότητα $P(A \cup B)$ είναι το άθροισμα των δύο αντίστοιχων πιθανοτήτων, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. Η πιθανότητα που ορίζεται για ολόκληρο το χώρο δειγμάτων είναι 1, $P(S) = 1$.

Μια μεταβλητή που παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε στοιχείο του συνόλου S λέγεται *"τυχαία μεταβλητή"*.

Θεωρείται ένας χώρος δειγμάτων S που περιέχει τα υποσύνολα A και B. Αν $P(B) \neq 0$, ορίζεται η *"υπό συνθήκη πιθανότητα"* $P(A \mid B)$ ως:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4.1}$$

Η σχέση μεταξύ των συνόλων A, B και S φαίνεται στο *Σχήμα 4.1*.



Σχήμα 4.1 : *Σχέση μεταξύ των υποσυνόλων A, B και S στον ορισμό της "υπό συνθήκη πιθανότητας".*

Δύο υποσύνολα A και B είναι *"ανεξάρτητα"* αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Τα ανεξάρτητα υποσύνολα δεν πρέπει να συγχέονται με τα υποσύνολα που δεν έχουν κοινά στοιχεία όπου δηλ. $A \cap B = \varnothing$.

Από τον ορισμό της υπό συνθήκη πιθανότητας προκύπτει η πιθανότητα $P(B \mid A)$ (θεωρώντας $P(A) \neq 0$),

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \tag{4.2}$$

Αφού $A \cap B$ είναι το ίδιο με το $B \cap A$, από τις (4.1) και (4.2) προκύπτει ότι

$$P(B \cap A) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A),$$

ή

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \tag{4.3}$$

Η (4.3) που σχετίζει τις υπό συνθήκη πιθανότητες $P(A|B)$ και $P(B|A)$, αποτελεί το **θεώρημα** του **Bayes.**

Ας υποτεθεί ότι ο χώρος δειγμάτων S μπορεί να διαμελιστεί σε ανεξάρτητα υποσύνολα A_i τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία, δηλαδή $S = UA_i$ με $A_i \cap A_j = \varnothing$ για $i \neq j$. Ας θεωρηθεί ακόμα ότι $P(A_i) \neq 0$ για κάθε i. Ένα τυχαίο υποσύνολο B μπορεί να εκφραστεί ως $B = B \cap S = B \cap (UA_i) = U(B \cap A_i)$. Αφού τα υποσύνολα $B \cap A_i$ δεν έχουν κοινά στοιχεία, οι πιθανότητές τους αθροίζονται, δίνοντας

$$P(B) = P(U(B \cap A_i)) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i). \qquad \textbf{(4.4)}$$

Η σχέση (4.4) ονομάζεται "*νόμος της ολικής πιθανότητας*". Συνδυάζοντας τη σχέση (4.4) με το θεώρημα του Bayes προκύπτει ότι:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)} \qquad \textbf{(4.5)}$$

όπου το A μπορεί να είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του S, και να περιέχει, για παράδειγμα, ένα από τα A_i.

Σαν παράδειγμα ας θεωρηθεί η περίπτωση μιας αρρώστιας η οποία είναι γνωστό ότι έχει φορείς το 0,1% του πληθυσμού, δηλαδή οι αρχικές πιθανότητες να έχει ή όχι κάποιος την αρρώστια είναι:

$$P(\text{αρρώστια}) = 0{,}001,$$
$$P(\text{χωρίς αρρώστια}) = 0{,}999.$$

Ο πληθυσμός υποβάλλεται σε ένα τεστ το οποίο έχει πιθανότητα 98% να δώσει θετικό αποτέλεσμα για άτομα που είναι φορείς της αρρώστιας δηλαδή:

$$P(+|\text{αρρώστια}) = 0{,}98,$$
$$P(-|\text{αρρώστια}) = 0{,}02.$$

Υπάρχει όμως και μια πιθανότητα 3% να αποκτηθεί θετικό αποτέλεσμα για ένα άτομο που δεν είναι φορέας της αρρώστιας,

$$P(+|\text{χωρίς αρρώστια}) = 0{,}03,$$
$$P(-|\text{χωρίς αρρώστια}) = 0{,}97.$$

Ποια η πιθανότητα κάποιος να έχει την αρρώστια όταν το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό;

$$P(\text{αρρώστια}|+) = \frac{P(+|\text{αρρώστια})P(\text{αρρώστια})}{P(+|\text{αρρώστια})P(\text{αρρώστια}) + P(+|\text{χωρίς αρρώστια})P(\text{χωρίς αρρώστια})}$$
$$= \frac{0{,}98 \times 0{,}001}{0{,}98 \times 0{,}001 + 0{,}03 \times 0{,}999} = 0{,}032$$

Η πιθανότητα κάποιος να είναι φορέας της αρρώστιας όταν το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό είναι μόνο 3,2%. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να φαίνεται πολύ μικρό αφού η πιθανότητα το τεστ να δώσει λάθος αποτέλεσμα είναι μόλις 2% αν κάποιος είναι

φορέας της αρρώστιας και 3% αν δεν είναι. Αλλά η αρχική πιθανότητα είναι πολύ μικρή, 0,1%, και συνεπώς η τελική πιθανότητα προκύπτει 3,2%.

4.1.2 Πως ερμηνεύεται η πιθανότητα;

Υπάρχουν κυρίως δύο ερμηνείες της πιθανότητας που συναντώνται συνήθως στη βιβλιογραφία. Η πιο σημαντική είναι αυτή της *"σχετικής συχνότητας"*, που εκτός των άλλων χρησιμοποιείται και για την απόδοση στατιστικών σφαλμάτων σε μετρήσεις. Μια άλλη ερμηνεία είναι της *"υποκειμενικής"* πιθανότητας, που χρησιμοποιείται για παράδειγμα για τον καθορισμό του μεγέθους της αβεβαιότητας εξαιτίας των συστηματικών σφαλμάτων.

Κατά την ανάλυση δεδομένων, η πιθανότητα κυρίως ερμηνεύεται ως *"περιοριστική σχετική συχνότητα"*. Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία του συνόλου S αντιστοιχούν στην πιθανή έκβαση μιας μέτρησης, η οποία θεωρείται (τουλάχιστον υποθετικά) ότι μπορεί να επαναληφθεί. Ένα υποσύνολο A του S αντιστοιχεί στην εύρεση οποιουδήποτε αποτελέσματος στο υποσύνολο. Ένα τέτοιο υποσύνολο ονομάζεται *"γεγονός"*, το οποίο λέγεται ότι βρίσκεται αν το αποτέλεσμα μιας μέτρησης βρίσκεται στο υποσύνολο.

Ένα υποσύνολο του S που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο δηλώνει ένα μόνο στοιχειώδες συμβάν. Η πιθανότητα για ένα στοιχειώδες συμβάν A προσδιορίζεται από το πόσες φορές το αποτέλεσμα είναι A θεωρώντας ότι η μέτρηση επαναλαμβάνεται άπειρες φορές.

Η ισχύς των αποδιδόμενων τιμών πιθανότητας μπορούν να δοκιμαστούν πειραματικά. Η ερμηνεία της σχετικής συχνότητας είναι κατάλληλη, για παράδειγμα, στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων, όπου επαναλαμβανόμενες συγκρούσεις σωματιδίων αποτελούν επαναλήψεις ενός πειράματος. Η ιδέα της σχετικής πιθανότητας είναι πιο δύσκολο να εφαρμοστεί στην περίπτωση μοναδικών φαινομένων όπως είναι το "big bang". Στην περίπτωση αυτή η ερμηνεία ως συχνότητα μπορεί να αποδοθεί θεωρώντας ένα μεγάλο αριθμό από παρόμοια σύμπαντα, σε κάποια από τα οποία συμβαίνει ένα συγκεκριμένο γεγονός, πράγμα το οποίο φυσικά δεν είναι εφικτό.

Μια άλλη ερμηνεία της πιθανότητας είναι αυτή της *"υποκειμενικής"* (ή Bayesian) πιθανότητας. Σε αυτή την περίπτωση τα στοιχεία του χώρου των δειγμάτων αντιστοιχούν σε *"υποθέσεις"*, δηλαδή προτάσεις που είναι ή σωστές ή λάθος. Έτσι η ερμηνεία της πιθανότητας σχετίζεται με μια υπόθεση, σαν το μέγεθος της αξιοπιστίας της υπόθεσης αυτής. Ο ισχυρισμός ότι από μια μέτρηση θα προκύψει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα για έναν ορισμένο αριθμό δοκιμών μπορεί να θεωρηθεί σαν υπόθεση, οπότε ο σκελετός της υποκειμενικής πιθανότητας περιέχει την ερμηνεία της σχετικής πιθανότητας.

Η χρήση της υποκειμενικής πιθανότητας σχετίζεται στενά με το θεώρημα Bayes και αποτελεί τη βάση της Bayesian στατιστικής. Το υποσύνολο A που εμφανίζεται στο θεώρημα Bayes (σχέση (4.3)) μπορεί να ερμηνευτεί σαν την υπόθεση ότι μια συγκεκριμένη θεωρία είναι σωστή, και το υποσύνολο B μπορεί να είναι η υπόθεση ότι από ένα πείραμα θα προκύψει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Το θεώρημα του Bayes παίρνει τη μορφή:

$$P(\text{θεωρία} \mid \text{πειραματικά δεδομένα}) \propto P(\text{πειραματικά δεδομένα} \mid \text{θεωρία}) \cdot P(\text{θεωρία}).$$

Εδώ η P(θεωρία) αντιστοιχεί στην αρχική πιθανότητα ότι η θεωρία ισχύει, και η P(πειραματικά δεδομένα | θεωρία), που ονομάζεται πιθανοφάνεια (likelihood), είναι η πιθανότητα, θεωρώντας ότι η θεωρία είναι σωστή, να παρατηρηθούν τα δεδομένα που προκύπτουν στην πράξη. Η τελική πιθανότητα να είναι σωστή η θεωρία όταν είναι γνωστό το αποτέλεσμα του πειράματος εκφράζεται από την P(θεωρία | πειραματικά δεδομένα).

4.1.3 Αναμενόμενες τιμές

Ας θεωρηθεί ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα χαρακτηρίζεται από μια συνεχή μεταβλητή x. Ο χώρος δειγμάτων αντιστοιχεί στο σύνολο των πιθανών τιμών που μπορεί να λάβει η μεταβλητή x. Η πιθανότητα να παρατηρηθεί μια τιμή μέσα σε ένα διάστημα [x,x+dx] δίνεται από τη *"συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας"* (probability density function, ή όπως αναφέρεται συνήθως για λόγους συντομίας p.d.f.) f(x):

πιθανότητα να παρατηρηθεί το x στο διάστημα [x,x+dx] = f(x)dx.

Ακολουθώντας την ερμηνεία της σχετικής συχνότητας, η f(x)dx δηλώνει πόσες φορές η x παίρνει τιμές στο διάστημα [x,x+dx] στο όριο που ο αριθμός των παρατηρήσεων τείνει στο άπειρο. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) κανονικοποιείται έτσι ώστε η ολική πιθανότητα (δηλαδή η πιθανότητα να έχει κάποιο αποτέλεσμα) να είναι ίση με ένα δηλαδή,

$$\int_S f(x)dx = 1, \qquad (4.6)$$

όπου η περιοχή της ολοκλήρωσης S αναφέρεται στην ολική έκταση της x, δηλαδή στον ολικό χώρο δειγμάτων.

Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση η μεταβλητή x να παίρνει διάκριτες τιμές x_i για i=1,...,N. Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή x_i με πιθανότητες $P(x_i)$, η αθροιστική κατανομή ορίζεται ως η πιθανότητα να παρατηρηθούν τιμές μικρότερες ή ίσες με την τιμή του x,

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i) \qquad (4.7)$$

Η *"αναμενόμενη τιμή"* E[x] μιας τυχαίας μεταβλητής x η κατανομή της οποίας ακολουθεί τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x), συμβολίζεται συνήθως με μ και ορίζεται ως:

$$\mu = \mathrm{E}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (4.8)$$

Ας σημειωθεί ότι η E[x] δεν είναι συνάρτηση της x, αλλά εξαρτάται από την κατανομή της p.d.f. f(x).Αν η p.d.f. f(x) είναι συγκεντρωμένη κυρίως σε μια περιοχή, τότε η E[x] αντιπροσωπεύει την περιοχή στην οποία είναι πιθανό να βρεθούν οι τιμές της x. Αν όμως η f(x) αποτελείται από δύο κορυφές πού απέχουν αρκετά μεταξύ τους, τότε η E[x] είναι στο μέσον, όπου σπάνια θα βρεθεί η x.

Η "*διασπορά*" (variance) σ^2 ή $V[x]$ της x δίνεται από την:

$$\sigma^2 = \mathrm{V}[x] = \mathrm{E}[(x-\mathrm{E}[x])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx. \qquad \textbf{(4.9)}$$

Η διασπορά αποτελεί μέτρο του πλάτους της έκτασης γύρω από τη μέση τιμή. Συνήθως χρησιμοποιείται η τετραγωνική ρίζα της διασποράς πού δηλώνει την "*τυπική απόκλιση*" (standard deviation).

4.1.4 Εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo για ολοκλήρωση

Σαν παράδειγμα έστω το προς υπολογισμό ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{z_-}^{z_+}\int_{y_-}^{y_+}\int_{x_-}^{x_+} f(x,y,z)dxdydz \approx V\langle f\rangle \qquad \textbf{(4.10)}$$

όπου το ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η μέση τιμή της $f(x,y,z)$, $\langle f\rangle$, στο χώρο ολοκλήρωσης, επί το χώρο $V=(z_+-z_-)(y_+-y_-)(x_+-x_-)$. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του $f(x,y,z)$ αρκεί η τυχαία συλλογή σημείων από το χώρο ολοκλήρωσης και ο υπολογισμός της μέσης τιμής.

Θεωρούνται N τυχαία σημεία r_i ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ένα πολυδιάστατο χώρο V, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (p.d.f.) είναι μια σταθερά. Με τη μέθοδο monte carlo υπολογίζεται το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f:

$$I = \int f dV \approx V\langle f\rangle \pm V\sqrt{\frac{\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2}{N}} \qquad \textbf{(4.11)}$$

Εδώ το σύμβολο $\langle\ \rangle$ δηλώνει το αριθμητικό μέσο των N σημείων του δείγματος:

$$\langle f\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(r_i) \qquad \textbf{(4.12)}$$

Έστω το ολοκλήρωμα $I=\int_{x_-}^{x_+} f(x)dx$ για μια συγκεκριμένη συνάρτηση $f(x)$. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο το σφάλμα ΔI ελαττώνεται με τη ρίζα του αριθμού των σημείων: $\sqrt{N}$. Επίσης η ακρίβεια είναι μεγαλύτερη όσο

μικρότερη είναι η μέση απόκλιση $\sigma_f = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}$, δηλαδή όσο πιο ομαλή είναι η συνάρτηση $f(x)$. Θα εξεταστεί η περίπτωση που η $f(x)$ είναι παντού 0 εκτός από μια πολύ στενή κορυφή γύρω από κάποια περιοχή του x. Αν οι τιμές x_i έχουν την ίδια πιθανότητα να βρίσκονται οπουδήποτε μεταξύ x_- και x_+, είναι πιθανό ότι οι περισσότερες θα βρίσκονται εκτός της κορυφής της $f(x)$, και μόνο ελάχιστες θα έχουν $f(x_i) \neq 0$, γεγονός που οδηγεί σε φτωχό προσδιορισμό του I.

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας γενικός κανόνας για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου. Χρησιμοποιώντας μια θετική συνάρτηση βάρους $w(x)$, η οποία είναι κανονικοποιημένη ώστε $\int_{x_-}^{x_+} w(x)dx = 1$, το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί:

$$I = \int_{x_-}^{x_+} w(x) \frac{f(x)}{w(x)} dx \qquad \textbf{(4.13)}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε

$$y(x) = \int_{x_-}^{x} w(x')dx' \text{ , ώστε } \frac{dy}{dx} = w(x), \quad y(x_-) = 0, \quad y(x_+) = 1,$$

το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_0^1 \frac{f(x(y))}{w(x(y))} dy.$$

Η ανάπτυξη του ολοκληρώματος με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo γίνεται παίρνοντας το μέσο των τιμών της $\frac{f}{w}$ σε ένα τυχαίο δείγμα σημείων y_i ομοιόμορφα κατανεμημένων στο διάστημα [0,1]:

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x(y_i))}{w(x(y_i))}.$$

Με αυτό τον τρόπο το όρισμα $\frac{f(x)}{w(x)}$ μπορεί να γίνει ομαλό, με αποτέλεσμα να μειωθεί η διασπορά $\sigma_{f/w}$ του υπολογισμού του με Monte Carlo.

4.1.5 Τυχαίοι αριθμοί

Η δημιουργία μιας ακολουθίας από ομοιόμορφα κατανεμημένους τυχαίους αριθμούς θα μπορούσε κατά κανόνα να γίνει χρησιμοποιώντας μια τυχαία φυσική διαδικασία, όπως η επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός νομίσματος (ή ζαριών). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε πραγματικά τυχαίους αριθμούς. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις οι τυχαίοι αριθμοί δημιουργούνται με ένα αλγόριθμο στον υπολογιστή που ονομάζεται *"γεννήτορας τυχαίων αριθμών"*. Ένας συνήθης τύπος γεννήτορα τυχαίων αριθμών βασίζεται στον ακόλουθο αλγόριθμο. Αρχίζοντας από έναν ακέραιο αριθμό n_0 (που ονομάζεται seed), παράγεται μια ακολουθία ακέραιων αριθμών $n_1, n_2, \ldots$ σύμφωνα με τον κανόνα

$n_{i+1} = (\alpha\, n_i) \bmod (m)$

όπου οι ακέραιοι αριθμοί α και m είναι σταθεροί. Για την απόκτηση τιμών ομοιόμορφα κατανεμημένων στο διάστημα (0,1) χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $r_i = n_i/m$. Η αρχική τιμή n_0 και οι δύο σταθερές α και m προσδιορίζουν ολόκληρη την ακολουθία αριθμών, οι οποίοι φυσικά δεν είναι πραγματικά τυχαίοι, αλλά αντίθετα είναι αυστηρά καθορισμένοι. Οι αριθμοί που προκύπτουν ονομάζονται συνεπώς ψευδοτυχαίοι. Για όλες τις εφαρμογές αυτοί μπορούν να θεωρηθούν ισότιμοι των πραγματικά τυχαίων αριθμών, με τη διαφορά ότι μπορούν να αναπαραχθούν, αν επαναληφθεί η διαδικασία χρησιμοποιώντας την ίδια τιμή για n_0 (seed).

4.2.1 Πειραματικό μέρος

1. Δημιουργείστε μια σειρά «τυχαίων», ομοιόμορφα κατανεμημένων αριθμών τρέχοντας το πρόγραμμα example1.m, και στη συνέχεια μια σειρά «τυχαίων» αριθμών που έχουν κανονική (Gaussian) κατανομή (πρόγραμμα example2.m). Δοκιμάστε να αλλάξετε τον αριθμό των τυχαίων αριθμών που παίρνετε καθώς και να τους ομαδοποιήσετε σε στήλες διαφορετικού εύρους (bins) στο ιστόγραμμα. Καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας. Αν x_i είναι τυχαίοι αριθμοί με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1] τότε τι δίνει ο μετασχηματισμός $y_i = 1 - x_i$;

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα (πρόγραμμα pi1.m)
$$\pi/4 = \int_R \varepsilon(1 - x^2 - y^2)dxdy, \quad R \in [0,1] \quad x \in [0,1] \quad \varepsilon(z) = 1, \quad z \geq 0$$
$$R \in [0,1] \quad y \in [0,1] \quad \varepsilon(z) = 0, \quad z < 0$$
Η ε είναι η «συνάρτηση βήματος».
Υπόδειξη: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι αντίστοιχα:
$$\langle \pi/4 \rangle = n/N, \quad \text{και} \quad \delta\langle \pi/4 \rangle = \frac{1}{N}\sqrt{n(N-n)/N-1},$$
όπου n ο αριθμός των ζευγαριών με $x^2 + y^2 \leq 1$.
Χρησιμοποιείστε 50, 100, 500, 1000, 10000 και 100000 τυχαίους αριθμούς. Πως συγκρίνονται οι τιμές του $\pi/4$ που βρίσκετε και πως συγκρίνονται τα σφάλματα $\delta\langle \pi/4 \rangle$;

3. Ο αριθμός N(t) των πυρήνων που έχουν απομείνει μετά από χρόνο t στο προηγούμενο βήμα μπορεί να βρεθεί και σαν άθροισμα:
$$\langle \mathrm{N}(t) \rangle = \sum_i f_i(t) = \mathrm{N}_0 \sum f_i(t)/\mathrm{N}_0, \qquad \textbf{(4.16)}$$
όπου $f_i(t) = 1$ αν ο πυρήνας δεν έχει διασπαστεί μέχρι το χρόνο t και $f_i(t) = 0$ αν έχει διασπαστεί. Σύμφωνα με την (4.15) κάθε πυρήνας
   - **i.** Έχει διασπαστεί αν $P(t) = 1 - e^{-t/\tau} > x_i$
   - **ii.** Δεν έχει διασπαστεί αν $P(t) = 1 - e^{-t/\tau} < x_i$,

όπου x_i είναι μια ακολουθία N_0 τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1].
Να σχεδιαστεί η $\langle N(t) \rangle$ όπως προκύπτει από τη σχέση (4.16) (πρόγραμμα radiodec2.m). Ποια προσέγγιση θεωρείτε ότι είναι καλύτερη; Σχολιάστε την απάντησή σας.

B.2 Επιπλέον επεξεργασία

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα (προσκομίστε το αντίστοιχο πρόγραμμα)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi / 4$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Monte Carlo ολοκλήρωσης.
Υπόδειξη: Η μέση τιμή είναι:

$$\langle \pi / 4 \rangle = \frac{1}{N} \sum \frac{1}{1+x^2}.$$

Υπολογίστε το σφάλμα και χρησιμοποιείστε 50, 100, 500, 1000, 10000 και 100000 τυχαίους αριθμούς. Πως συγκρίνονται οι τιμές του $\pi / 4$ που βρίσκετε και πως συγκρίνονται τα σφάλματα $\delta \langle \pi / 4 \rangle$;

5. Αν x_i είναι τυχαίοι αριθμοί με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1] τότε τι δίνει ο μετασχηματισμός $y_i = 1 + x_i^2$; Δικαιολογείστε προσάπτοντας το αντίστοιχο πρόγραμμα και τις κατανομές που προκύπτουν για x_i, y_i.

6. Επαναλάβετε το βήμα 5. χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση βάρους

$$w(x) = \frac{4-2x}{3}$$

Έχει η συνάρτηση αυτή τις σωστές ιδιότητες; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. Η νέα μεταβλητή είναι η $y = x(4-x)/3$. Ποια είναι η τιμή που προκύπτει για $\langle \pi / 4 \rangle$ χρησιμοποιώντας 10 και 50 τυχαίους αριθμούς και ποια η αντίστοιχη αβεβαιότητα; Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του βήματος 5.

Πρόγραμμα example1.m

```
%   το πρόγραμμα αυτό είναι ένα παράδειγμα
%   ομοιόμορφα κατανεμημένοι τυχαίοι αριθμοί μεταξύ 0 και 1
%
Iseed1 = input('Enter random number seed: ');
Nrand = input('number of random numbers to be generated: ');
Nbins = input('Enter number of bins for the histo: ');
%
rand('seed',Iseed1);
l1 = rand(1,Nrand);
```

```
    if Nbins < 10
      Nbins = 10;
    end
    subplot(2,1,1),hist(l1,Nbins),title('distribution  of  random
numbers'),...
       xlabel('x_i '),...
    subplot(2,1,2),hist((1-l1),Nbins),xlabel( '1-x_i ')
         mo1 = mean(l1);
         sd1 = std(l1);
         var1 = var(l1);
         s12 = 0;
         s22 = 0;
         s23 = 0;
         for j=1:Nbins
          athr1(j) = 0;
         end
         for k=1:Nrand
           s12 = s12 + (((l1(k))-mo1)^2) ;
           ibin1 = (round(l1(k) * Nbins)) ;
           ibin2 = (round((l1(k)+(0.5/Nbins)) * Nbins)) ;
           if ibin1 >= ibin2;
             ibin = ibin1;
           else
             ibin = ibin2;
           end
           athr1(ibin) = athr1(ibin) + 1;
         end
         s1 = s12/(Nrand -1) ;
   subplot;
   for j=1:Nbins
   s22 = s22 + athr1(j);
   end
   s2 = s22/Nbins;
   for j=1:Nbins
   s23 = s23 + (((athr1(j))-s2)^2) ;
   end
   s3 = sqrt(s23)/(Nbins -1) ;
   vary = std(athr1);
   sigy = s3;
   sigpery = s3/s2;
   fprintf('meany = %f \n', s2);
   fprintf('sigy = %f \n', s3);
   fprintf('percent = %f \n', sigpery);


   %    χρήσιμες εντολές:
   %
   %  disp('κείμενο')      για να δείτε το κείμενο    ή
   %  disp(μεταβλητή)     για να δείτε την τιμή της μεταβλητής
   %  fprintf('text  %f \n',variable);      για να τυπώσετε
```

Πρόγραμμα example2.m

```
%     τυχαίοι αριθμοί με gaussian κατανομή μεταξύ 0 και 1
%
Iseed = input('Enter random number seed: ');
Nrand = input('number of random numbers to be generated: ');
Nbins = input('Enter number of bins for the histo: ');
%
randn('seed',Iseed);
l1 = randn(1,Nrand);
if Nbins < 10
  Nbins = 10;
end
hist(l1,Nbins),title('distribution  of  gaussian  distributed
random numbers')
     mo1 = mean(l1);
     sd1 = std(l1);
fprintf('mean = %f \n',mo1);
fprintf('standard deviation = %f \n',sd1);
```

Πρόγραμμα pi1.m

```
% υπολογισμός της τιμής του π
%
Iseed1 = input('Enter random number seed: ');
Iseed2 = input('random number seed for second series: ');
Nrand = input('number of random numbers to be generated: ');
%
rand('seed',Iseed1);
l1 = rand(1,Nrand);
rand('seed',Iseed2);
l2 = rand(1,Nrand);
rand('seed',Iseed1);
coun1 = 0;
for k = 1:Nrand
   athr = ((l1(k))^2 + (l2(k))^2);
   if athr <= 1
     coun1 = coun1 + 1;
   end
end
pi4 = coun1/Nrand;
erpi4 = (1/Nrand)*(sqrt((coun1*(Nrand-coun1)/Nrand) - 1));
fprintf('<pi/4> = %f \n',pi4);
fprintf('delata<pi/4> = %f \n', erpi4);
```

Πρόγραμμα radiodec2.m

```
% neutron decay
%
N0=input('Number of neutrons at t=0: ');
Iseed = input('Random number seed: ');
end_time = input('Enter time t: ');
Nrand = input('Number of random numbers to be generated: ');
%
rand('seed',Iseed);
```

```
Irand = rand(1,Nrand);
Nund = 0;
Nd = 0;
tend = end_time;
Probt = 1 - exp(-(tend/886.7));
for k = 1:Nrand
  if Probt <= Irand(k)
     Nund = Nund + 1;
  else
    Nd = Nd + 1;
  end
end
Nundec = round(Nund*N0/Nrand);
fprintf('Number of undecayed neutrons after %i seconds: %i
\n',end_time,Nundec);
```