

Ενότητα 7*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΟΠΤΙΚΗ FOURIER

Περιεχόμενα

1. Περιοδικές συναρτήσεις στο χρόνο και στο χώρο
2. Ανάλυση των περιοδικών συναρτήσεων σε σειρές Fourier
3. Μετασχηματισμοί Fourier
4. Γενίκευση μετασχηματισμού Fourier σε περισσότερες διαστάσεις
5. Μερικές βασικές ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier
6. Η συνθήκη «πραγματικότητας» (reality condition)
7. Συνάρτηση δέλτα του Dirac
8. Εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στη μελέτη της οπτικής περίθλασης Fraunhofer
9. Η σχέση του Parseval
10. Συνέλιξη

1. Περιοδικές συναρτήσεις στο χρόνο και στο χώρο

Μία συνάρτηση $f(t)$ που ορίζεται στο διάστημα $-\infty < t < +\infty$ λέγεται περιοδική με περίοδο T , αν για κάθε t στο πεδίο ορισμού της ισχύει

$$f(t + T) = f(t). \quad (\text{Π.1})$$

Το απλούστερο φυσικό παράδειγμα περιοδικής συνάρτησης είναι η στιγμιαία θέση ενός αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση, που δίνεται από μία εξίσωση της μορφής $x(t) = A \cos \omega t$, όπου t ο χρόνος, $\omega = 2\pi/T$ και T η σταθερή περίοδος της μεταβλητής. Αυτή είναι μία **περιοδική συνάρτηση ως προς το χρόνο**, αφού ικανοποιεί το κριτήριο (Π.1), δηλαδή

$$x(t + T) = A \cos \omega(t + T) = A \cos(\omega t + 2\pi) = A \cos \omega t = x(t).$$

Η περίοδος εδώ έχει το νόημα του χρονικού διαστήματος που απαιτείται για μία πλήρη ανακύκλωση του φαινομένου.

Άλλο φυσικό παράδειγμα είναι η δυναμική ηλεκτροστατική ενέργεια ενός κανονικού κρυστάλλου. Αυτή είναι μία περιοδική συνάρτηση στο χώρο, δηλαδή επαναλαμβάνεται η ίδια σε ίσα διαστήματα στο χώρο. Συναρτήσεις της μορφής $f(z) = e^{ikz}$, όπου $k = 2\pi/\lambda$, έχουν αυτήν την περιοδικότητα. Η σταθερά λ αποτελεί τη **χωρική περίοδο ή μήκος κύματος**, δηλαδή ισχύει $f(z + \lambda) = f(z)$. Πράγματι,

$$f(z + \lambda) = e^{ik(z+\lambda)} = e^{ikz} \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \lambda} = e^{ikz} = f(z),$$

αφού $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, σύμφωνα με τη σχέση του Euler.

Από τα δύο αυτά παραδείγματα βλέπουμε ότι η περιοδικότητα στη Φυσική μπορεί να αφορά, μεταξύ άλλων, χρονικές ή χωρικές μεταβολές. Το αντίστροφο της περιόδου πολλαπλασιασμένο επί 2π ορίζει την **κυκλική συχνότητα** ω και τον **κυματικό αριθμό ή κυκλική χωρική συχνότητα** k της περιοδικής μεταβολής, αντίστοιχα. Οι μονάδες των δύο αυτών κυκλικών συχνοτήτων θα είναι **ακτίνια ανά μονάδα χρόνου και κύκλοι ανά μονάδα μήκους**, αντίστοιχα.

2. Ανάλυση των περιοδικών συναρτήσεων σε σειρές Fourier

Μία περιοδική συνάρτηση του χρόνου $f(t)$, που ικανοποιεί μερικές αρκετά γενικές (για τα προβλήματα της Φυσικής) συνθήκες, μπορεί να αναλυθεί σε ένα άπειρο άθροισμα ημιτονικών και συνημιτονικών περιοδικών όρων, που ο καθένας έχει συχνότητα ίση προς ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της βασικής συχνότητας $\omega = 2\pi/T$. Η ανάλυση είναι της μορφής

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (\text{Π.2})$$

και λέγεται **ανάπτυξη της συνάρτησης $f(t)$ σε σειρά Fourier**. Οι σταθερές a_n και b_n λέγονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τις σχέσεις

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{Π.3})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n=1,2,3,\dots \quad (\text{Π.4})$$

Οι ολοκληρώσεις καλύπτουν μία μόνο περίοδο και η παράμετρος t_0 επιλέγεται αυθαίρετα. Σχέσεις ανάλογες των (Π.2) - (Π.4) ισχύουν και στην περίπτωση συναρτήσεων που είναι περιοδικές στο χώρο, αρκεί να θέσουμε $k = 2\pi/\lambda$, z, z_0 και λ στη θέση των $\omega = 2\pi/T$, t, t_0 και T , αντίστοιχα.

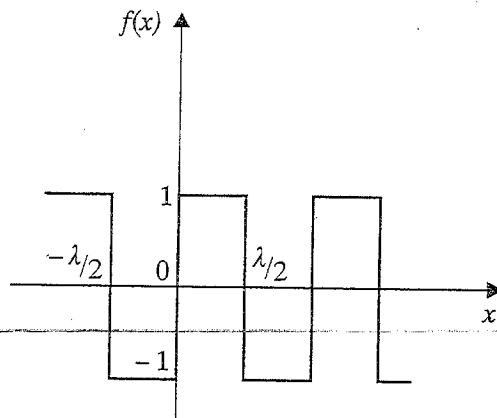
Βασική ιδιότητα των συντελεστών a_n, b_n

Αν μία περιοδική συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια, δηλαδή $f(-t) = f(t)$ για κάθε t , τότε $b_n \equiv 0$ για κάθε n . Αν είναι περιττή, δηλαδή $f(t) = -f(-t)$, τότε $a_n \equiv 0$ για κάθε n . Στη γενική περίπτωση μεικτών συναρτήσεων (όπως, για παράδειγμα, η $\cos^3 \omega t + \sin^3 \omega t$) θα περιέχονται όλοι οι όροι a_n και b_n .

Παραδείγματα

1. Δίνεται η περιοδική συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x \leq \frac{\lambda}{2} \\ -1 & -\frac{\lambda}{2} < x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{περίοδος } \lambda)$$



Σχ. Π.1

με περιοδική συνέχιση στους δύο ημιάξονες. Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι τρεις πρώτες διαδοχικές προσεγγίσεις της σειράς Fourier.

Προφανώς $f(-x) = -f(x)$, δηλαδή η συνάρτηση είναι περιττή. Άρα, υπάρχουν μόνο όροι της μορφής (Π.4) με $k = 2\pi/\lambda$ και x , αντί για $\omega = 2\pi/T$ και t . Η ολοκλήρωση καλύπτει ένα μήκος κύματος. Επιλέγοντας $t_0 = -\lambda/2$ ο συντελεστής b_n γράφεται

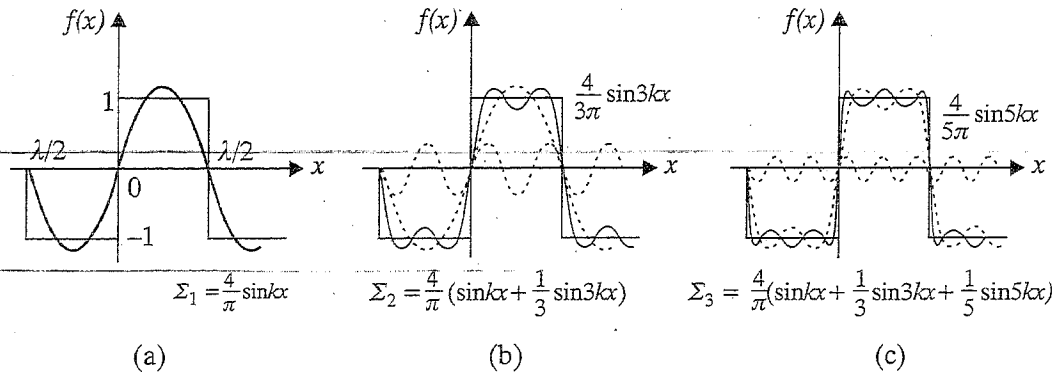
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} f(x) \sin(nkx) dx = -\frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^0 \sin(nkx) dx + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \sin(nkx) dx \\ &= \frac{4}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \sin(nkx) dx = -\left(\frac{4}{nk\lambda}\right) [\cos nkx]_0^{\lambda/2} = \frac{4}{nk\lambda} [1 - \cos(nk\lambda/2)] \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Άρα, η (Π.2) γράφεται

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin kx + \frac{1}{3} \sin 3kx + \frac{1}{5} \sin 5kx + \dots \right), \quad x \neq m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Παρατηρούμε ότι, ενώ για $x = m \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) η σειρά συγκλίνει στο μηδέν [δηλαδή στο μέσο όρο των πλευρικών οριακών τιμών της $f(t)$ στα σημεία αυτά], η ίδια η $f(x)$ δε μηδενίζεται.

Η προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης από την προσθήκη διαδοχικών όρων φαίνεται στο Σχ. Π.2.



Σχ. II. 2

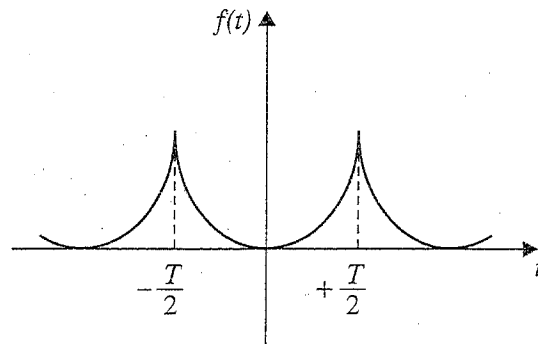
Γίνεται φανερό ότι η κυματομορφή, που προκύπτει με την άθροιση των τριών μόνο πρώτων όρων, δεν αποδίδει τον αρχικό τετραγωνικό παλμό παρά μόνο προσεγγιστικά. Όσο περισσότερους όρους προσθέτουμε τόσο το σχήμα που προκύπτει κάθε φορά πλησιάζει περισσότερο εκείνο του τετραγωνικού παλμού. Γενικά, οι λεπτομέρειες του αρχικού παλμού, όπως για παράδειγμα «οι γωνίες» (που δεν αντιστοιχούν σε σημεία ασυνέχειας), θα προκύψουν μόνο με την πρόσθεση θεωρητικά άπειρων όρων ή **ανώτερων αρμονικών**.

2. Αναλύστε σε σειρά Fourier την περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = t^2,$$

όπου

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (\text{περίοδος } T).$$



Σχ. II. 3

Η συνάρτηση είναι άρτια, αφού $f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t)$, άρα $b_n \equiv 0$ για κάθε n . Επίσης $\omega = 2\pi/T$.

Από την (Π.3) έχουμε για το a_n με $n=1,2,\dots$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t^2 \cos(n\omega t) dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{Tn\omega} \left[t^2 \sin(n\omega t) \right]_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{Tn\omega} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t) (2t dt) \\ &= 0 - \frac{4}{Tn\omega} \left(-\frac{1}{n\omega} \right) \left[t \cos(n\omega t) \right]_{-T/2}^{T/2} - \frac{4}{Tn^2\omega^2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{4}{(n\omega)^2} \cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right) - 0 = \frac{4}{(n\omega)^2} \cos(n\pi) = \frac{4(-1)^n}{(n\omega)^2}. \end{aligned}$$

Επίσης, πάλι από την (Π.3) με $n=0$, παίρνουμε

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t^2 dt = \frac{2}{3T} (t^3)_{-T/2}^{T/2} = \frac{T^2}{6}.$$

Άρα,

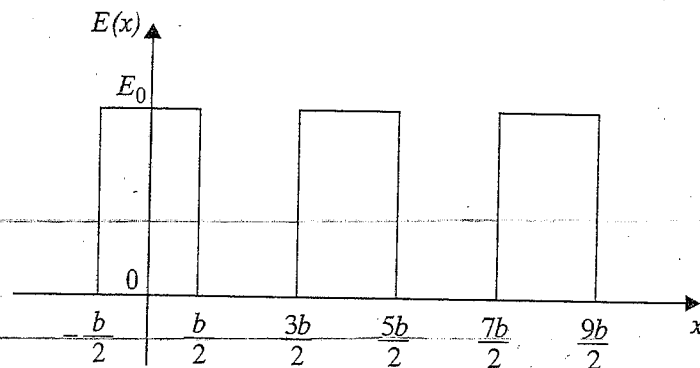
$$f(t) = \frac{T^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(n\omega)^2} \cos(n\omega t).$$

Εφαρμογές

Ε1. Επίπεδο φωτεινό κύμα (πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E) προσπίπτει σε οπτικό φράγμα, που αποτελείται από διαδοχικές διαφανείς και αδιαφανείς λωρίδες πλάτους b . Υπολογίστε τις αρμονικές, που περιέχει η τετραγωνική σκιά του κύματος μετά το φράγμα. Αγνοήστε τα φαινόμενα περίθλασης ($b \gg \lambda$).

Μετά το οπτικό φράγμα το κύμα θα έχει τη μορφή του Σχ. Π.4. Αναλύοντας τη συνάρτηση του σχήματος σε σειρά Fourier θα βρούμε τις ιδιαίτερες αρμονικές που περιέχονται στο κύμα εξόδου. Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια, θα πρέπει να υπολογίσουμε μόνο τους συντελεστές a_n ($n = 0,1,\dots$).

Η περίοδος της συνάρτησης είναι $2b$, άρα σύμφωνα με την (Π.3) έχουμε



Σχ. Π. 4

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{2b} \int_{-b/2}^{3b/2} E(x) \cos(nkx) dx = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} E_0 \cos(nkx) dx + \frac{1}{b} \int_{b/2}^{3b/2} 0 \cdot dx \\
 &= \frac{E_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \cos(nkx) dx + 0 = \frac{E_0}{nkb} (\sin kx)_{-b/2}^{b/2} = \frac{2E_0 \sin(nkb/2)}{nkb} \\
 &= \frac{2E_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{αφού } k = \frac{2\pi}{(2b)} = \frac{\pi}{b}.
 \end{aligned}$$

Το a_0 μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο του a_n , όταν $n \rightarrow 0$, δηλαδή

$$a_0 = \lim_{n \rightarrow 0} a_n = \lim_{n \rightarrow 0} E_0 \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = E_0 \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = E_0.$$

Άρα,

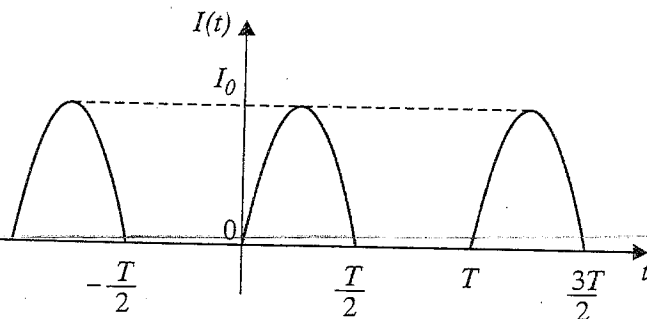
$$E(x) = \frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{b}\right).$$

Οι τρεις πρώτοι όροι από τη σειρά είναι

$$\frac{2E_0}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) - \frac{2E_0}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi x}{b}\right) + \frac{2E_0}{5\pi} \cos\left(\frac{5\pi x}{b}\right).$$

E2. Αναλύστε κατά Fourier ένα ημιανορθωμένο εναλλασσόμενο ρεύμα.

Στην έξοδο του ανορθωτή το ρεύμα θα έχει τη μορφή του Σχ. Π.5. Η περίοδος



Σχ. II. 5

της συνάρτησης είναι T και η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, άρα θα υπάρχουν όλοι οι όροι στην ανάλυση κατά Fourier. Οι συντελεστές Fourier θα δίνονται από τις σχέσεις (Π.3) και (Π.4),

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_0 \sin \omega t \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T 0 \cdot dt$$

$$= \frac{2 I_0}{T} \left[-\frac{\cos \omega(1-n)t}{2\omega(1-n)} - \frac{\cos \omega(1+n)t}{2\omega(1+n)} \right]_{T/2}^{T/2} + 0.$$

Τελικά,

$$a_n = \frac{2 I_0}{T} \left[-\frac{\cos \pi(1-n) - 1}{2\omega(1-n)} - \frac{\cos \pi(1+n) - 1}{2\omega(1+n)} \right]$$

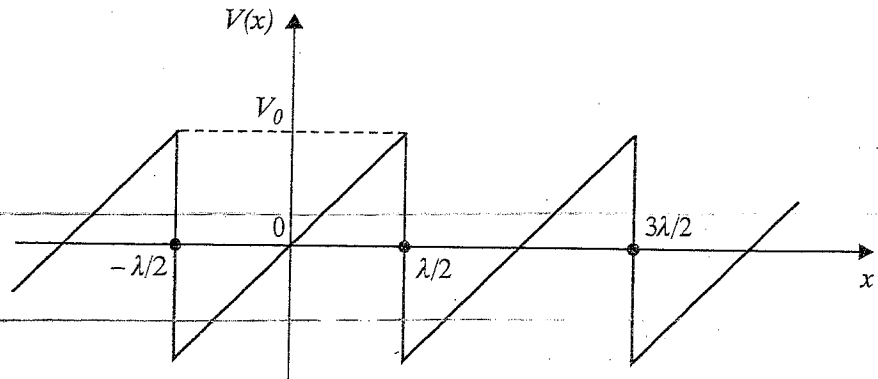
$$= \begin{cases} 0 & \text{για } n = 1, 3, \dots \\ \frac{2 I_0}{\pi(1-n^2)} & \text{για } n = 0, 2, \dots \end{cases}$$

Παρόμοια,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_0 \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{για } n \neq 1 \\ \frac{I_0}{2} & \text{για } n = 1 \end{cases}$$

Άρα τελικά,

$$I(t) = \frac{I_0}{\pi} + \frac{I_0}{2} \sin \omega t - \frac{2 I_0}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega t + \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \dots \right).$$



Σχ. Π. 6

Ε3. Βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής «πριονωτής τάσης»

$$V(x) = \frac{2V_0}{\lambda} x, \quad \text{με} \quad -\frac{\lambda}{2} < x \leq +\frac{\lambda}{2}$$

του Σχ. Π.6 και σχεδιάστε τους πρώτους όρους.

Η συνάρτηση $V(x)$ είναι περιττή, άρα μόνο οι όροι b_n υπάρχουν στο ανάπτυγμα Fourier. Η περίοδος της συνάρτησης είναι λ και $k=2\pi/\lambda$. Από την (Π.4) υπολογίζουμε

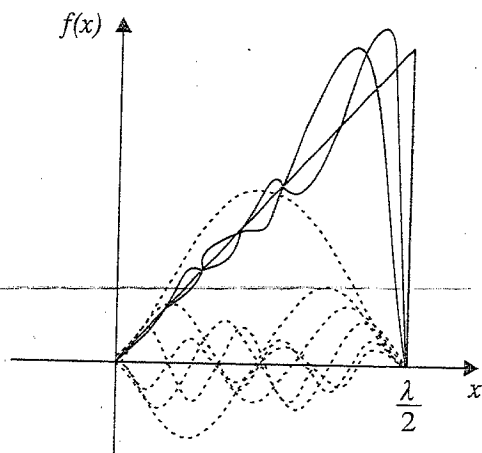
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} V(x) \sin(nkx) dx = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 V_0 \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} x \sin(nkx) dx \\ &= -\frac{4V_0}{n\lambda^2 k} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} x d(\cos nkx) = -\frac{V_0}{n\lambda^2 k} [x \cos(nkx)]_{-\lambda/2}^{\lambda/2} + \frac{4V_0}{n\lambda^2 k} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \cos(nkx) dx \\ &= -\frac{4V_0}{n\lambda^2 k} (\lambda \cos nk\lambda/2) + \frac{4V_0}{n^2 k^2 \lambda^2} [\sin(nkx)]_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \\ &= -\frac{4V_0}{nk\lambda} \cos(n\pi) + \frac{8V_0}{n^2 k^2 \lambda^2} \sin(nk\lambda/2) = -\frac{2V_0}{n\pi} \cos(n\pi) + 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$V(x) = \frac{2V_0}{\pi} \left(\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{1}{2} \sin 4\pi \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{3} \sin 6\pi \frac{x}{\lambda} - \dots \right),$$

με $x \neq (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, όπου $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Η διαδοχική προσέγγιση της πριονωτής συνάρτησης από τους πρώτους όρους Fourier φαίνεται στο Σχ. Π.7.



Σχ. Π. 7

3. Μετασχηματισμοί Fourier

Είδαμε ότι οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση που ικανοποιεί ορισμένες αρκετά γενικές συνθήκες μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier. Αλλά και μία μη περιοδική συνάρτηση μπορεί επίσης να αναλυθεί κατά Fourier, αφού μπορεί να θεωρηθεί περιοδική με περίοδο $T \rightarrow \infty$. Ας γράψουμε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier με τη μορφή

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t). \quad (\text{Π.2})$$

Όταν η περίοδος $T \rightarrow \infty$, θα πρέπει $\omega = 2\pi/T \rightarrow 0$, άρα οι διαδοχικές συχνότητες των όρων στους οποίους αναλύεται η συνάρτηση δε θα είναι πια ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους, αλλά θα πλησιάζουν η μία την άλλη με συνέχη τρόπο. Στο όριο που $\omega \rightarrow 0$ θα έχουμε ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων και τα αθροίσματα στο παραπάνω ανάπτυγμα θα μετατραπούν σε ολοκληρώματα. Πράγματι, η διαφορά των συχνοτήτων δύο διαδοχικών όρων της σειράς Fourier είναι $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\omega - n\omega = \omega = 2\pi/T$. Στη συνέχεια ορίζουμε νέες συναρτήσεις από τις σχέσεις

$$A(\omega_n) = \frac{\pi a_n}{\Delta\omega} \quad \text{και} \quad B(\omega_n) = \frac{\pi b_n}{\Delta\omega}.$$

Η (Π.2) γράφεται τότε,

$$f(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{\pi} A(\omega_n) \cos\omega_n t + \frac{\Delta\omega}{\pi} B(\omega_n) \sin\omega_n t \right].$$

Στο όριο $T \rightarrow \infty$, δηλαδή $\Delta\omega \rightarrow d\omega \rightarrow 0$, ο πρώτος όρος τείνει στο μηδέν [εφόσον $A(0)$ είναι πεπερασμένο], ενώ τα αθροίσματα τείνουν στα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Τελικά έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega t) d\omega. \quad (\text{II.5})$$

Με ανάλογους συλλογισμούς προκύπτει ότι οι νέοι «συνεχείς» συντελεστές $A(\omega)$, $B(\omega)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (\text{II.6})$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \quad (\text{II.7})$$

Τα ολοκληρώματα λοιπόν της (II.5), γνωστά ως **ολοκληρώματα Fourier**, προκύπτουν από τις αντίστοιχες σειρές Fourier στο όριο των μη περιοδικών συναρτήσεων ($T \rightarrow \infty$). Τα ολοκληρώματα (II.6) και (II.7) αντιστοιχούν στο **συνημιτονικό και ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier** της μη περιοδικής συνάρτησης $f(t)$, αντίστοιχα, με την έννοια ότι αυτά μετασχηματίζουν την $f(t)$ σε ένα νέο ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $A(\omega)$ και $B(\omega)$. Εντελώς ανάλογα η (II.5) αποτελεί το μετασχηματισμό Fourier του ζεύγους των δύο πραγματικών συναρτήσεων $A(\omega)$ και $B(\omega)$ σε μια νέα συνάρτηση $f(t)$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη μιγαδική συνάρτηση

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega). \quad (\text{II.8})$$

Μπορεί να δειχθεί τώρα ότι ο μετασχηματισμός Fourier παίρνει την πιο συμπαγωμένη μορφή

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{II.9})$$

όπου

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{II.10})$$

Στη μιγαδική μορφή οι μετασχηματισμοί από την $f(t)$ στην $F(\omega)$ και από την $F(\omega)$ στην $f(t)$ έχουν πολύ συμμετρική μορφή. Συμβολικά ο παραπάνω μετασχηματισμός Fourier γράφεται

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad (\text{Π.10a})$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]. \quad (\text{Π.9a})$$

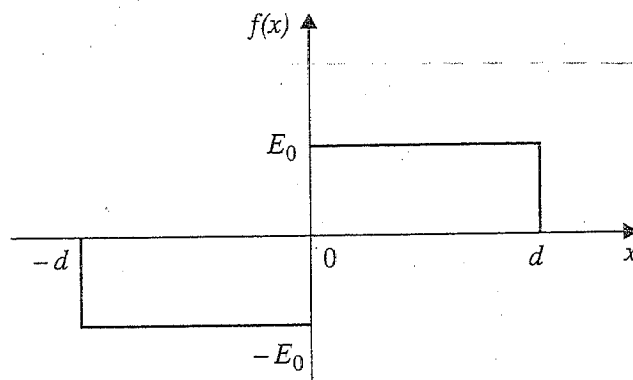
Οι ιδιότητες που ισχύουν για την ανάπτυξη σε σειρά Fourier ισχύουν και εδώ. Έτσι, αν μία συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια, τότε $B(\omega) \equiv 0$ και, αν είναι περιττή, $A(\omega) \equiv 0$. Στην πράξη, αν η $f(t)$ είναι άρτια ή περιττή, τότε χρησιμοποιεί κανείς απευθείας την (Π.6) ή (Π.7). Διαφορετικά, αν δηλαδή η $f(t)$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, τότε χρησιμοποιείται η (Π.10). Τέλος, η μεταβλητή t της συνάρτησης μπορεί να αντιστοιχεί σε χρονική ή χωρική μεταβλητή, οπότε και το ω θα αντιστοιχεί σε κυκλική συχνότητα ω ή k , κατά τα γνωστά.

Παραδείγματα

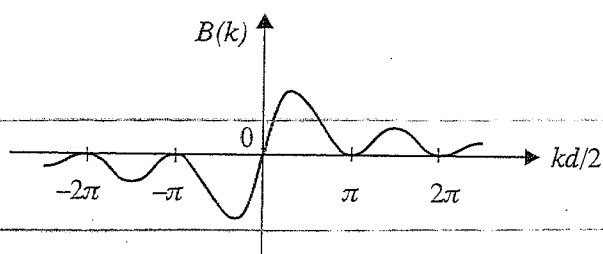
1. Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης του Σχ. Π.8.

Έξω από το διάστημα $[-d, d]$ η $f(x)$ είναι 0, άρα δεν είναι περιοδική. Επίσης από τον ορισμό της φαίνεται ότι είναι περιττή, άρα $A(k) \equiv 0$. Η (Π.7) τότε δίνει

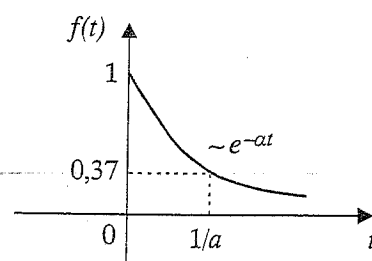
$$\begin{aligned} B(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(kx) dx \\ &= 0 + \int_{-d}^0 (-E_0) \sin(kx) dx + \int_0^d E_0 \sin(kx) dx + 0 \end{aligned}$$



Σχ. Π. 8



Σχ. Π.9



Σχ. Π.10

$$= 2E_0 \int_0^d \sin(kx) dx = \frac{2E_0}{k} (1 - \cos kd) = \frac{4E_0}{k} \sin^2(kd/2).$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $B(k)$ φαίνεται στο Σχ. Π.9. Από την καμπύλη $B(k)$ φαίνεται απευθείας ποιες χωρικές συχνότητες συνεισφέρουν περισσότερο στη σύνθεση της αρχικής συνάρτησης και με τι πλάτος $B(k)$ η καθεμιά.

2. Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier της εκθετικής συνάρτησης του Σχ. Π.10.

Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. Από την (Π.10) παίρνουμε (με $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-\alpha t} e^{i\omega t}}{-\alpha + i\omega} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-\alpha + i\omega} = \frac{1}{\alpha - i\omega}. \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα φτάναμε και αν υπολογίζαμε την ανάλυση Fourier κατευθείαν με τις (Π.6), (Π.7). Το αντίστοιχο αποτέλεσμα θα ήταν

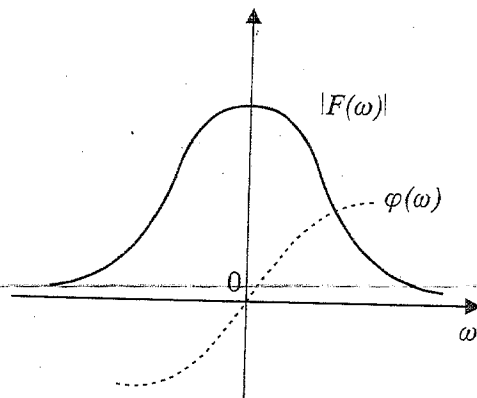
$$A(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \text{και} \quad B(\omega) = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2},$$

οπότε από την (Π.8) θα παίρναμε $F(\omega) = (\alpha - i\omega)^{-1}$.

Τη μιγαδική αυτή συνάρτηση τη γράφουμε και με τη μορφή

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi},$$

όπου $|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ το μέτρο και $\phi(\omega) = \tan^{-1}(\omega/\alpha)$ η φάση της συναρ-



Σχ. Π. 11

τησης. Σχεδίαση της μιγαδικής $F(\omega)$ σημαίνει σχεδίαση των πραγματικών συναρτήσεων $|F(\omega)|$ και $\phi(\omega)$. Οι δύο καμπύλες αποδίδονται στο Σχ. Π.11.

Εφαρμογές

Ε4. Η εγκάρσια διατομή μιας δέσμης laser μοιάζει με μία φωτεινή κηλίδα. Η ένταση του φωτός δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στην επιφάνεια της κηλίδας. Είναι μέγιστη στο κέντρο (I_0), ενώ προς τα έξω ελαττώνεται εκθετικά, σύμφωνα με τη γκαουσιανή συνάρτηση

$$I(x) = I_0 e^{-ax^2},$$

όπου x η απόσταση από το κέντρο και $a = \text{σταθ.}$ (βλ. Σχ. Π.12a). Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της $I(x)$.

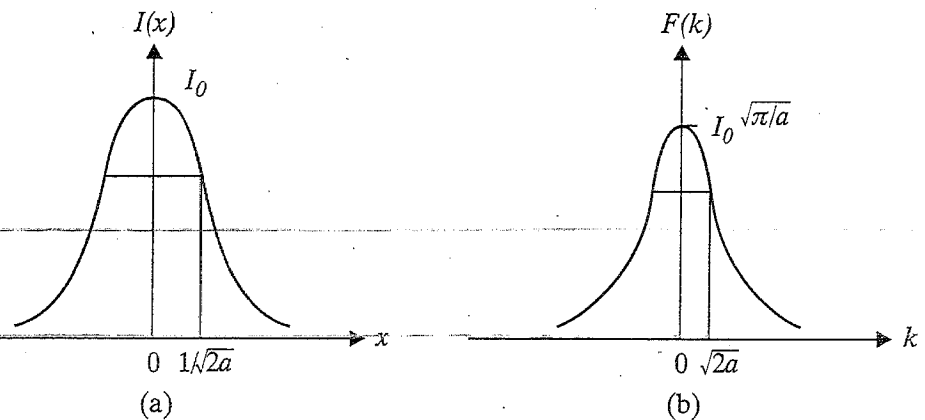
Η (Π.10) γραμμένη για ανάλυση στο χώρο παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (I_0 e^{-ax^2}) e^{ikx} dx \\ &= I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(kx) dx + i I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \sin(kx) dx \\ &\equiv I_0 (I_c + i I_s). \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} I_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \sin kx dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(-w)^2} \sin k(-w) d(-w) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw^2} (-\sin kw) (-dw) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw^2} \sin kw dw = -I_s \end{aligned}$$

οπότε $I_s = 0$.



Σχ. Π. 12

Επίσης

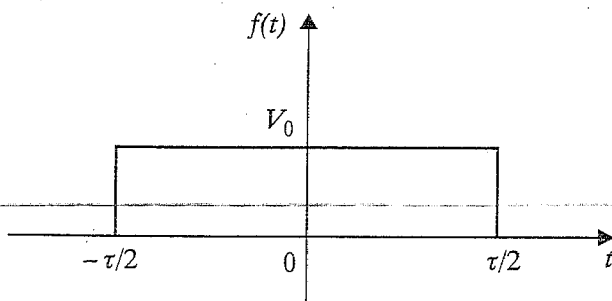
$$\begin{aligned}
 I_c &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(kx) dx = \int_{-\infty}^0 e^{-ax^2} \cos(kx) dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(kx) dx \\
 &= \int_0^0 e^{-aw^2} \cos k(-w)(-dw) + \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(kx) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(kx) dx \\
 &= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-k^2/4a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}
 \end{aligned}$$

(Dwight: *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, τύπος 861.20).

Έτσι τελικά έχουμε

$$F(k) = I_0 \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα φτάναμε και αν χρησιμοποιούσαμε απευθείας τις (Π.6), (Π.7) με την παρατήρηση ότι $B(\omega) \equiv 0$, αφού η $I(x)$ είναι άστια ως προς x . Η συνάρτηση $F(k)$ που βρήκαμε είναι και αυτή μία γκαουσιανή καμπύλη, αλλά με διαφορετικό «πλάτος» (βλ. Σχ. Π.12b). Το πλάτος σ ορίζεται από την τιμή εκείνη της μεταβλητής, στην οποία η τιμή της συνάρτησης ελαττώνεται στο $1/\sqrt{e} \approx 0,607$ της μέγιστης τιμής. Αυτό συμβαίνει, όταν $\sigma_x = 1/\sqrt{2a}$ για την αρχική καμπύλη και όταν $\sigma_k = \sqrt{2a}$ για την τελική. Παρατηρούμε ότι, όσο η αρχική καμπύλη στενεύει, τόσο η τελική μεγαλώνει σε πλάτος και αντίστροφα. Με άλλα λόγια, όσο στενότερος είναι ο αρχικός παλμός, τόσο ευρύτερη είναι η περιοχή συχνοτήτων που τον συνθέτουν.



Σχ. Π. 13

E5. Υπολογίστε το εύρος συχνοτήτων του τετραγωνικού ηλεκτρονικού παλμού του Σχ. Π.13. Υποδείξτε μερικές συχνότητες που δεν υπεισέρχονται καθόλου στη σύνθεση του παλμού.

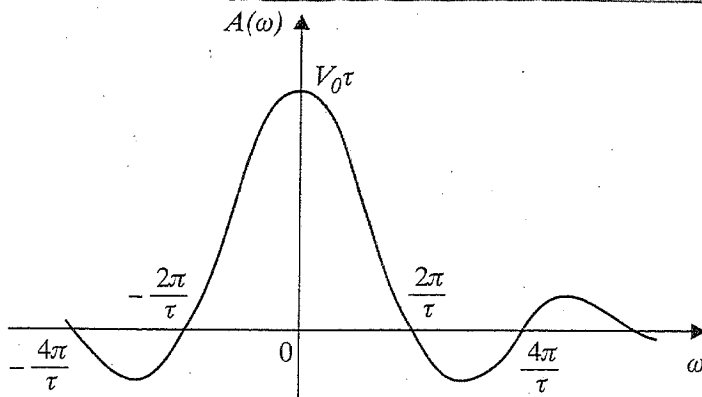
Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια, στο μετασχηματισμό Fourier θα εμφανιστεί μόνο το ολοκλήρωμα με συνημίτονο. Από την (Π.6) έχουμε

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t) dt = 0 + V_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\omega t) dt = \frac{V_0}{\omega} [\sin(\omega t)]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{2V_0}{\omega} \sin(\omega\tau/2).$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχ. Π.14. Είναι προφανές ότι όλες οι τιμές του ω που μηδενίζουν το πλάτος $A(\omega)$ δεν παίρνουν μέρος στη σύνθεση του αρχικού τετραγωνικού παλμού. Αυτές είναι (βλ. σχήμα)

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} n, \text{ όπου } n = 1,2,3,\dots$$



Σχ. Π. 14

Οι συχνότητες αυτές είναι εκείνες ακριβώς, που θα περιείχε η σειρά Fourier ενός όμοιου επαναλαμβανόμενου παλμού με περίοδο 2τ .

Ε6. Η στιγμιαία κατανομή στο χώρο του ηλεκτρικού πεδίου, που συνοδεύει ένα παλμό φωτός πεπερασμένης διάρκειας, είναι εκείνη του Σχ. Π.15(a). Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του ημιτονικού αυτού κυματοπακέτου, αν το μήκος του είναι $2L$.

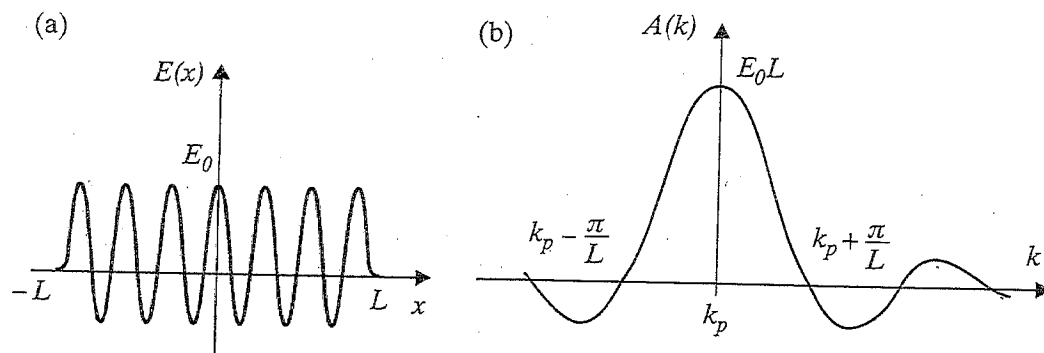
Η συνάρτηση του πεδίου είναι

$$E(x) = \begin{cases} E_0 \cos(k_p x) & \text{για } |x| \leq L \\ 0 & \text{για } |x| \geq L, \end{cases}$$

όπου $k_p = 2\pi/\lambda$ ο κυματικός αριθμός του ημιτονικού τμήματος. Αφού η συνάρτηση είναι άρτια, θα υπάρχει μόνο ο όρος $A(k)$. Η (Π.6) μας δίνει

$$\begin{aligned} A(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) \cos(kx) dx = 0 + E_0 \int_{-L}^L \cos(k_p x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{E_0}{2} \int_{-L}^L [\cos(k_p + k)x + \cos(k_p - k)x] dx \\ &= E_0 L \left[\frac{\sin(k_p + k)L}{(k_p + k)L} + \frac{\sin(k_p - k)L}{(k_p - k)L} \right]. \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $A(k)$ φαίνεται στο Σχ. Π.15(b).



Σχ. Π. 15

4. Γενίκευση μετασχηματισμού Fourier σε περισσότερες διαστάσεις

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να γενικευτεί για περισσότερες από μία διαστάσεις. Έτσι, ο διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier $F(k_x, k_y)$ ή μετασχηματισμός συνάρτησης δύο μεταβλητών, θα είναι

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (\text{Π.11})$$

όπου

$$F(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (\text{Π.12})$$

Τα μεγέθη k_x, k_y θα εκφράζουν τις χωρικές συχνότητες κατά μήκος των δύο αξόνων x, y .

Εντελώς ανάλογα ορίζεται και ο μετασχηματισμός Fourier για συναρτήσεις τριών μεταβλητών

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y, k_z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z, \quad (\text{Π.13})$$

όπου

$$F(k_x, k_y, k_z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dx dy dz. \quad (\text{Π.14})$$

Στις φυσικές εφαρμογές, όπου τα (x, y, z) παριστάνουν καρτεσιανές συντεταγμένες, οι εκθέτες μπορούν να γραφούν $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, οπότε οι (Π.13), (Π.14) παίρνουν την πιο συμπυκνωμένη μορφή

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} F(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (\text{Π.13a})$$

$$F(\mathbf{k}) = \int_V f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (\text{Π.14a})$$

όπου

$$d^3\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z = d\Omega, \quad d^3\mathbf{r} = dx dy dz = dV.$$

V είναι ολόκληρος ο χώρος των διανυσμάτων \mathbf{r} και Ω ολόκληρος ο χώρος των διανυσμάτων \mathbf{k} .

Τέλος, αν θελήσουμε να περιλάβουμε στις μελέτες και το χρόνο, τότε θα προκύψει ο πλήρης μετασχηματισμός Fourier μιας κυματοσυνάρτησης $f(\mathbf{r}, t)$, δηλαδή

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{k} d\omega \quad (\text{Π.13b})$$

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \int_{\mathcal{V}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dV dt. \quad (\text{Π.14b})$$

Για λόγους καθαρά φυσικής συμμετρίας του χρόνου, το πρόσημο του ω στις (Π.13b), (Π.14b) είναι αντίθετο του προβλεπόμενου από τους ορισμούς (Π.9), (Π.10). Από μαθηματική άποψη αυτό δεν έχει καμιά συνέπεια.

5. Μερικές βασικές ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier

Αν, σύμφωνα με την (Π.10a), συμβολίσουμε με $\mathcal{F}[f(t)]$ το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(t)$, τότε μπορούν να αποδειχθούν οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

$$1. \quad \mathcal{F}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)] + \mathcal{F}[f_2(t)], \quad (\text{Π.17})$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμικός. Όστε ο μετασχηματισμός Fourier αθροίσματος συναρτήσεων είναι ίσος με το άθροισμα των μετασχηματισμών Fourier των συναρτήσεων.

2. Για το μετασχηματισμό της παραγώγου συνάρτησης ισχύει

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = (-i\omega) \mathcal{F}[f(t)], \quad (\text{Π.18})$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} f(t) = 0. \quad (\text{Π.19})$$

Οι αντίστοιχες ιδιότητες της (Π.18) για μονοδιάστατο και τρισδιάστατο χώρο είναι

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(x)}{dx}\right] = (-ik) \mathcal{F}[f(x)], \quad (\text{Π.18a})$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}\right] = (-ik_x) \mathcal{F}[f(\mathbf{r})], \quad (\text{Π.18b})$$

με σχέσεις ανάλογες της (Π.18b) για $\partial/\partial y$ και $\partial/\partial z$. Οι προϋποθέσεις είναι αντίστοιχες της (Π.19), όπως και στις ακόλουθες γενικεύσεις της (Π.18),

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = (-i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)], \quad (\text{Π.20})$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] = (-ik)^n \mathcal{F}[f(x)], \quad (\text{Π.20a})$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(\mathbf{r})\right] = (-ik_x)^n \mathcal{F}[f(\mathbf{r})]. \quad (\text{Π.20b})$$

3. Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t + \tau)$, όπου $\tau = \text{σταθ.}$, δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{F}[f(t + \tau)] = e^{i\omega\tau} \mathcal{F}[f(t)]. \quad (\text{Π.21})$$

4. Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ πολλαπλασιασμένης επί κάποια δύναμη του t δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{F}[t^n f(t)] = (-i)^n \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}[f(t)]. \quad (\text{Π.22})$$

6. Η συνθήκη «πραγματικότητας» (reality condition)

Όλα τα φυσικά μεγέθη που υπεισέρχονται σε παρατηρήσεις ή μετρήσεις είναι πραγματικά. Ας υποθέσουμε ότι ένα τέτοιο μέγεθος $f(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου (γενικότερα του χώρου και του χρόνου). Ο μετασχηματισμός Fourier $F(\omega)$ του φυσικού αυτού μεγέθους μπορεί να είναι μία μιγαδική συνάρτηση πραγματικών μεταβλητών. Η συνάρτηση αυτή θα πρέπει να υπακούει σε κάποια συνθήκη, που θα εξασφαλίζει την «πραγματικότητα» του φυσικού μεγέθους $f(t)$. Θα βρούμε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη που πρέπει να πληροί ο μετασχηματισμός Fourier $F(\omega)$ μιας συνάρτησης $f(t)$, ώστε η τελευταία να είναι πραγματική, είναι

$$F(\omega) = F^*(-\omega), \quad (\text{Π.23})$$

όπου F^* η μιγαδική συζυγής της F .

(i) **Αναγκαία συνθήκη.** Για να είναι πραγματική η $f(t)$ θα πρέπει να ισχύει $f(t) = f(t)^*$. Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (Π.10) δίνει

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) e^{i\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right]^*$$

$$= [F(-\omega)]^* = F^*(-\omega),$$

δηλαδή για να έχουμε $f(t) = f^*(t)$ είναι αναγκαίο να ισχύει η σχέση (Π.23).

(ii) **Ικανή συνθήκη.** Η συνθήκη (Π.23) είναι και ικανή. Πράγματι, αν $F(\omega) = F^*(-\omega)$, τότε

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

ή, κόνοντας την αλλαγή των μεταβλητών από ω σε $-\omega$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} F^*(\omega) e^{i\omega t} d(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right]^* = [f(t)]^* = f^*(t).$$

Όστε η συνθήκη (Π.23) συνεπάγεται ότι η $f(t)$ είναι πραγματική. Παραπάνω εξετάσαμε τη συνθήκη για το μετασχηματισμό Fourier $F(\omega)$ κάποιας συνάρτησης του χρόνου $f(t)$, ώστε αυτή να είναι πραγματική. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για τους δύο μετασχηματισμούς Fourier $F(k)$ και $F(\mathbf{k}, \omega)$ συναρτήσεων χώρου ή χώρου και χρόνου. Επομένως, έχουμε τις εξής αναγκαίες και ικανές συνθήκες

$$F(\mathbf{k}) = F^*(-\mathbf{k}) \quad (\text{Π.24})$$

$$F(\mathbf{k}, \omega) = F^*(-\mathbf{k}, -\omega), \quad (\text{Π.25})$$

που εξασφαλίζουν την «πραγματικότητα» των αντίστοιχων συναρτήσεων $f(\mathbf{r})$ και $f(\mathbf{r}, t)$.

Εφαρμογές

E7. (i) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν γενικά οι «συνιστώσες Fourier» του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}(t)$;

(ii) Ναδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{E}(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega, \quad (1)$$

όπου $\mathbf{E}_\omega \equiv \mathcal{F}[\mathbf{E}(t)]$.

[Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (1) εμφανίζεται στον υπολογισμό της έντασης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.]

(i) Το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(t)$ σαν συνάρτηση των συνιστωσών Fourier \mathbf{E}_ω γράφεται

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα φυσικό πραγματικό μέγεθος, σύμφωνα με τη συνθήκη πραγματικότητας (Π.23) θα πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_{-\omega}^* \quad \text{ή} \quad \mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_\omega^* \quad (3)$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{E}(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{E}_\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega \cdot \mathbf{E}_{-\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Αλλά

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega = \int_{-\infty}^0 |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega + \int_0^{+\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega$$

ή, αλλάζοντας τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης από ω σε $-\omega$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega &= \int_{\infty}^0 |\mathbf{E}_{-\omega}|^2 d(-\omega) + \int_0^{+\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega \\ &= \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_{-\omega}|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega, \end{aligned}$$

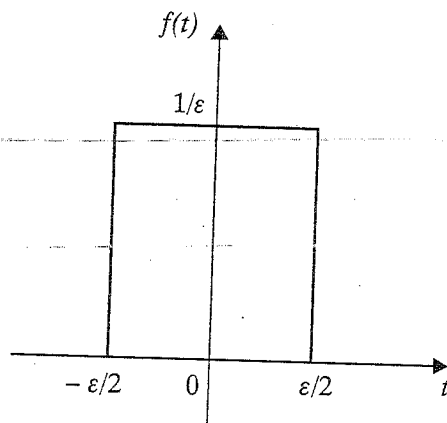
αφού η συνθήκη (3) συνεπάγεται $|\mathbf{E}_{-\omega}|^2 = |\mathbf{E}_\omega|^2$. Τελικά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{E}(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega.$$

Ας σημειωθεί ότι η σχέση (4) απορρέει από τη σχέση του Parseval που θα δούμε πιο κάτω στην Παράγραφο 9.

7. Συνάρτηση δέλτα του Dirac

Η συνάρτηση δέλτα του Dirac ορίζεται ως εξής:



Σχ. Π. 16

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \neq 0 \\ \infty & \text{για } x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (\text{Π.26})$$

Η συνάρτηση $\delta(x)$ έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες και χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη Φυσική. Μπορεί να οριστεί ως το όριο της συνάρτησης $f(x)$ του Σχ. Π.16, που έχει τιμή $1/\varepsilon$ για $|t| < \varepsilon/2$ και είναι μηδέν για $|t| > \varepsilon/2$, όταν $\varepsilon \rightarrow 0$. Το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στη συνάρτηση και στον άξονα του t είναι $\int f(t) dt = \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon = 1$. Στο όριο που $\varepsilon \rightarrow 0$ το ύψος της συνάρτησης τείνει στο ∞ και το πεδίο ορισμού της τείνει στο μηδέν.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό μπορεί να αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση $y(t)$ ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \delta(t) dt = y(0). \quad (\text{Π.27})$$

Παρόμοια ορίζεται η συνάρτηση $\delta(x - x_0)$,

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \neq x_0 \\ \infty & \text{για } x = x_0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad (\text{Π.28})$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \delta(t - t_0) dt = y(t_0). \quad (\text{Π.29})$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τις σχέσεις (Π.9) και (Π.10), για να παράγουμε μία αναπαράσταση της συνάρτησης δέλτα με ολοκλήρωμα. Πράγματι έχουμε, σύμφωνα με τις σχέσεις αυτές,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt' \right] e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right] dt'.
 \end{aligned}$$

Αλλά κατά την (Π.29) η $\delta(t - t')$ είναι τέτοια, ώστε

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \delta(t - t') dt'.$$

Σύγκριση των δύο τελευταίων σχέσεων οδηγεί στην ακόλουθη ολοκληρωματική αναπαράσταση της συνάρτησης $\delta(t - t')$

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \quad (\text{Π.30})$$

Για $t' = 0$ η (Π.30) γράφεται

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (\text{Π.31})$$

Παρατηρώντας την έκφραση αυτήν και συγκρίνοντάς την με την (Π.9), συμπεραίνει κανείς ότι ο αντίστροφος του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης 1 είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac (βλ. παράδειγμα παρακάτω).

Τέλος, για συναρτήσεις δύο μεταβλητών έχουμε

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0) \quad (\text{Π.32})$$

για κάθε συνάρτηση $f(x,y)$, ενώ γαι τρεις μεταβλητές ισχύουν οι

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = f(x_0, y_0, z_0) \quad (\text{Π.33})$$

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0), \quad (\text{Π.33a})$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} d^3\mathbf{k} \quad (\text{Π.30a})$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (\text{Π.31a})$$

Οι (Π.30a), (Π.31a) αποδεικνύονται όπως ακριβώς και οι (Π.30), (Π.31), αλλά με χρήση των τρισδιάστατων μετασχηματισμών Fourier (Π.13a), (Π.14a). Ισχύει και πάλι ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του 1 είναι η τρισδιάστατη συνάρτηση του Dirac $\delta(\mathbf{r})$. Ας σημειωθεί ότι στην (Π.33a) έχουμε θέσει $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$. Ο ορισμός αυτός είναι συνεπής με την (Π.30a), αφού εύκολα το ολοκλήρωμά της μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο τριών ολοκληρωμάτων της μορφής (Π.30), ένα για κάθε καρτεσιανή μεταβλητή. Ο πίνακας 4 δίνει μερικές αναπαράστασεις της συνάρτησης δέλτα του Dirac, που συχνά συναντά κανείς σε προβλήματα Φυσικής.

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\delta(x)$.

Σύμφωνα με την (Π.10) και την ιδιότητα (Π.27) θα ισχύει

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega \cdot 0} = 1.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier γράφεται τότε, σύμφωνα με την (Π.9),

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Η σχέση αυτή είναι η ίδια με την (Π.31).

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega t_0}$$

και

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega,$$

που είναι η ίδια με την (Π.30).

2. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

(i) $f(x) = A\delta(x - x_0)$

(ii) $f(x) = A \left[\delta\left(x - \frac{b}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{b}{2}\right) \right]$

$$(iii) f(x,y,z) = \sum_j \delta(x-x_j)\delta(y-y_j)\delta(z-z_j).$$

$$(i) F(k) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)e^{ikx}dx = Ae^{ikx_0}.$$

$$(ii) F(k) = \left[A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(x-\frac{b}{2}\right)e^{ikx}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(x+\frac{b}{2}\right)e^{ikx}dx \right]$$

$$= A \left[e^{ikb/2} + e^{-ikb/2} \right] = 2A \cos\left(k \frac{b}{2}\right).$$

$$(iii) F(k_x, k_y, k_z) = \sum_j \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_j)\delta(y-y_j)\delta(z-z_j)e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} dx dy dz$$

$$= \sum_j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_j)e^{ik_x x} dx \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-y_j)e^{ik_y y} dy \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z-z_j)e^{ik_z z} dz \right]$$

$$= \sum_j \left[e^{ik_x x_j} \cdot e^{ik_y y_j} \cdot e^{ik_z z_j} \right] = \sum_j e^{ik \cdot r_j}.$$

Εφαρμογές

E8. (i) Γράψτε τη συνάρτηση της χωρικής πυκνότητας φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ για κατανομή N σημειακών ηλεκτρικών φορτίων q_i στα σημεία με διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$ με $i = 1, 2, \dots, N$. Δικαιολογήστε τη μορφή αυτήν της $\rho(\mathbf{r})$.

(ii) Ποια είναι η διπολική ροπή της παραπάνω κατανομής ως προς την αρχή των αξόνων;

(i) Η συνάρτηση $\rho(\mathbf{r})$ θα πρέπει να μηδενίζεται για σημεία του χώρου με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, N$. Επιπλέον, το ολοκλήρωμα της $\rho(\mathbf{r})$ πάνω σε ολόκληρο το χώρο θα πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό της $\rho(\mathbf{r}) = dq/dV$, να δίνει το ολικό φορτίο που στην προκειμένη περίπτωση είναι $q_1 + q_2 + \dots + q_N$. Μία τέτοια συνάρτηση είναι η

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

Πράγματι, για $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$ ισχύει $\rho(\mathbf{r}) = 0$, $i = 1, \dots, N$, αφού $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 0$ για $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, N$. Όσο για το ολοκλήρωμα της $\rho(\mathbf{r})$, έχουμε

$$q_{\text{ολ}} = \int_{\text{ολόκληρος ο χώρος}} \rho(\mathbf{r}) dV = \int \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = \sum_{i=1}^N q_i \int_{\text{ολόκληρος ο χώρος}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = \sum_{i=1}^N q_i$$

αφού η (Π.33a) δίνει, όταν $f(\mathbf{r}) \equiv 1$ για κάθε \mathbf{r} ,

$$\int_{\text{ολόκληρος ο χώρος}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = 1.$$

Είναι ενδιαφέρον να ολοκληρώσουμε την $\rho(\mathbf{r})$ πάνω σε μία αυθαίρετα «μικρή» περιοχή, που περιέχει μόνο ένα συγκεκριμένο φορτίο q_j . Θα πρέπει να προκύψει το q_j . Επιλέγουμε μία σφαιρική περιοχή V_j ακτίνας r ($r \rightarrow 0$) με κέντρο το σημείο \mathbf{r}_j , δηλαδή τη θέση του φορτίου q_j , και τέτοια, ώστε να περιλαμβάνει μόνο το φορτίο q_j . Τότε

$$\begin{aligned} q'_{\text{ολ}} &= \int_{V_j} \rho(\mathbf{r}) dV = \sum_{i=1}^N q_i \int_{V_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV \\ &= \sum_{i \neq j}^N q_i \int_{V_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV + q_j \int_{V_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) dV. \end{aligned}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 1 παρόλο που η ολοκλήρωση δεν καλύπτει όλο το χώρο, αλλά μόνο το μικροσκοπικό χώρο V_j . Αυτό γιατί έξω από τον V_j ισχύει $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_j$ οπότε $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = 0$, δηλαδή το ολοκλήρωμα έξω από τον V_j δε συνεισφέρει τίποτα. Για τον ίδιο λόγο μηδενίζεται και το πρώτο ολοκλήρωμα, αφού $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$. Τελικά λοιπόν προκύπτει $q'_{\text{ολ}} = q_j$, όπως αναμενόταν. Η γενική έκφραση της $\rho(\mathbf{r})$ ισχύει ακόμη και για $N = 1$, δηλαδή για ένα σημειακό φορτίο q στη θέση \mathbf{r}_0 .

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

(ii) Η διπολική ροπή \mathbf{p} μιας τυχούσας κατανομής φορτίων $\rho(\mathbf{r})$ ως προς την αρχή των αξόνων δίνεται από τη σχέση (βλ. Φυσική Berkeley, Τόμος II, Κεφ. 9)

$$\mathbf{p} = \int_{\text{ολόκληρος ο χώρος}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV.$$

Στην περίπτωση N σημειακών φορτίων έχουμε

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{p} = \int \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{r} dV = \sum_{i=1}^N q_i \int \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

ολόκληρος ο χώρος ολόκληρος ο χώρος

σύμφωνα με τη σχέση (Π. 33a).

E9. Αποδείξτε το νόμο του Gauss για ένα σημειακό φορτίο, από τη σχέση $\text{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, όπου \mathbf{E} το ηλεκτρικό πεδίο και ρ η χωρική πυκνότητα φορτίου. Υποθέστε ότι υπάρχει μόνο ένα σημειακό φορτίο q στη θέση (x_0, y_0, z_0) .

Η χωρική πυκνότητα φορτίου για σημειακό φορτίο q , σύμφωνα με την Εφαρμογή E8, μπορεί να γραφεί

$$\rho(x, y, z) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0).$$

Ολοκληρώνοντας τη διαφορική σχέση $\epsilon_0 \text{div} \mathbf{E} = \rho$ πάνω σ' έναν όγκο V που περιέχει το φορτίο βρίσκουμε

$$q_{\text{ολ}} = \int_V \rho dV = \epsilon_0 \int_V \text{div} \mathbf{E} dV.$$

Αλλά $\int_V \text{div} \mathbf{E} dV = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, άρα

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV = q \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz \\ &= q \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - z_0) dz = q, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της (Π.29) με $y(t) \equiv 1$. Η ισότητα του επιφανειακού ολοκληρώματος με q/ϵ_0 ισοδυναμεί με το νόμο του Gauss.

E10. Υπολογίστε το διανυσματικό δυναμικό που δημιουργείται από την κίνηση σημειακών φορτίων.

Το διανυσματικό δυναμικό, που δημιουργείται στο σημείο (X, Y, Z) εξαιτίας κάποιας κατανομής ρευμάτων με πυκνότητα $\mathbf{J}(x, y, z)$, δίνεται από τη σχέση (βλ. Φυσική Berkeley, Τόμος II, Κεφ. 6)

$$\mathbf{A}(X,Y,Z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x,y,z)dV}{R},$$

όπου $R = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$, $dV = dx dy dz$ και V ολόκληρος ο χώρος.

Η πυκνότητα ρεύματος, που δημιουργείται από την κίνηση φορτίων q_i με ταχύτητες \mathbf{v}_i , δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i,$$

όπου $\rho_i = q_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \delta(z-z_i)$ και x_i, y_i, z_i η στιγμιαία θέση του σημειακού φορτίου q_i . Αντικαθιστούμε το \mathbf{J} στο παραπάνω ολοκλήρωμα και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(X,Y,Z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \delta(z-z_i)}{R} dx dy dz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i q_i \mathbf{v}_i \int_V \frac{\delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \delta(z-z_i)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}} dx dy dz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{(X-x_i)^2 + (Y-y_i)^2 + (Z-z_i)^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{R_i}, \end{aligned}$$

όπου R_i η απόσταση του q_i από το σημείο παρατήρησης (X, Y, Z) .

ΕΙΙ. (i) Γράψτε την εξίσωση Poisson για ένα σημειακό φορτίο τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων.

(ii) Αναλύστε κατά Fourier την εξίσωση αυτή, δηλαδή γράψτε τους μετασχηματισμούς Fourier των δύο της μελών. Από την ανάλυση αυτή βρείτε την έκφραση του μετασχηματισμού Fourier του ηλεκτροστατικού δυναμικού σαν συνάρτηση του \mathbf{k} .

(iii) Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου που οφείλεται στο παραπάνω φορτίο.

(i) Η εξίσωση Poisson για μία συνάρτηση κατανομής φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ γράφεται

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

όπου $\Phi(\mathbf{r})$ το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο \mathbf{r} . Σύμφωνα με την Εφαρμογή Ε8

για σημειακό φορτίο q τοποθετημένο στη θέση $\mathbf{r}_0 = 0$, η χωρική πυκνότητα παίρνει τη μορφή

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}), \quad (2)$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{r}). \quad (3)$$

(ii) Αν $\Phi(\mathbf{k})$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\Phi(\mathbf{r})$ τότε, σύμφωνα με την (Π.14),

$$\Phi(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{F}[\Phi(\mathbf{r})] = \int_V \Phi(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{r}, \quad (4)$$

όπου $d^3\mathbf{r} \equiv dxdydz = dV$ και V ολόκληρος ο χώρος. Ας θεωρήσουμε το μετασχηματισμό Fourier των δύο μελών της (3). Έχουμε

$$\mathcal{F}[\nabla^2\Phi(\mathbf{r})] = -\frac{q}{\epsilon_0}\mathcal{F}[\delta(\mathbf{r})]. \quad (5)$$

Αλλά, κατά την (Π.20b) ισχύει

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(\mathbf{r})\right] = (-ik_x)^2\mathcal{F}[\Phi(\mathbf{r})] = -k_x^2\mathcal{F}[\Phi(\mathbf{r})]$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(\mathbf{r})\right] = -k_y^2\mathcal{F}[\Phi(\mathbf{r})]$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(\mathbf{r})\right] = -k_z^2\mathcal{F}[\Phi(\mathbf{r})].$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και κάνουμε χρήση του ορισμού του $\nabla^2\Phi(\mathbf{r})$ και της γραμμικότητας των μετασχηματισμών Fourier, δηλαδή της (Π.17). Τελικά προκύπτει

$$\mathcal{F}[\nabla^2\Phi(\mathbf{r})] = -k^2\mathcal{F}[\Phi(\mathbf{r})] = -k^2\Phi(\mathbf{k}). \quad (6)$$

Σημειώνουμε ότι για την εφαρμογή της (Π.20b) υποθέσαμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη (Π.19) κατάλληλα διατυπωμένη. Αυτό είναι σωστό, γιατί η συνάρτηση $\Phi(\mathbf{r})$ αναφέρεται σε ηλεκτροστατικό δυναμικό Coulomb και είναι γνωστό ότι ένα τέτοιο δυναμικό μηδενίζεται, όταν $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$.

Εξάλλου, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μετά την (Π.31a), ισχύει

$$\mathcal{F}[\delta(\mathbf{r})] = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{0}} = 1. \quad (7)$$

Έτσι με τη βοήθεια των (6) και (7) η εξίσωση (5) γράφεται

$$-k^2\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{q}{\epsilon_0},$$

από όπου τελικά προκύπτει

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{q}{\epsilon_0 k^2}. \quad (8)$$

Αυτή είναι η ζητούμενη έκφραση του $\mathcal{F}[\Phi(\mathbf{r})]$ σαν συνάρτηση του \mathbf{k} .

(iii) Μετασχηματίζοντας κατά Fourier τη σχέση

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (9)$$

βρίσκουμε

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = -\mathcal{F}[\nabla\Phi(\mathbf{r})], \quad (10)$$

όπου $\mathbf{E}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{F}[\mathbf{E}(\mathbf{r})]$ ο μετασχηματισμός Fourier της έντασης του πεδίου $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Αλλά από τις (Π.18b), (Π.17) και με συλλογισμούς ανάλογους, όπως και πριν, βρίσκουμε

$$\mathcal{F}[\nabla\Phi(\mathbf{r})] = -ik\Phi(\mathbf{k}), \quad (11)$$

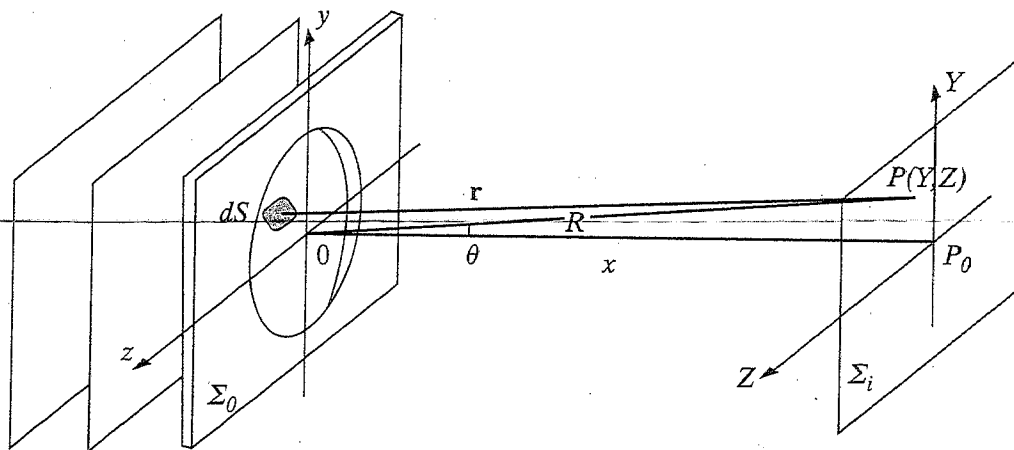
οπότε η (10) δίνει

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = -ik\Phi(\mathbf{k}) = -ik\frac{q}{\epsilon_0 k^2}. \quad (12)$$

8. Εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στη μελέτη της οπτικής περίθλασης Fraunhofer

Μία από τις χαρακτηριστικές φυσικές εφαρμογές των μετασχηματισμών Fourier είναι εκείνη του φαινομένου της περίθλασης Fraunhofer στην Οπτική.

Θεωρούμε τη διάταξη του Σχ. Π.17. Στο διάφραγμα περίθλασης Σ_0 πέφτει σύμφωνο μονοχρωματικό επίπεδο κύμα μήκους κύματος λ , που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x (κάθετα στο επίπεδο του Σ_0). Το διάφραγμα έχει κάποια ασυνέχεια S της οποίας το στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας θα συμβολίσουμε με dS ($= dydz$). Στην περίπτωση περίθλασης τύπου Fraunhofer οι αποστάσεις μεταξύ πηγής του κύματος και διαφράγματος Σ_0 και μεταξύ διαφράγματος Σ_0 και οθόνης Σ_i είναι αρκετά μεγάλες, ώστε τα αντίστοιχα προσπίπτοντα και περιθλώμενα μέτωπα να μπορούν να θεωρηθούν επίπεδα. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτήν το πεδίο του περιθλώμενου κύματος στο σημείο $P(Y,Z)$ πάνω στην οθόνη Σ_i δίνεται από τη σχέση



Σχ. Π. 17

$$E_P(Y,Z) = \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{\lambda R} \int_S E_0(y,z) e^{ik(Yy + Zz)/R} dydz, \quad (\text{Π.34})$$

όπου $E_0(y, z)$ είναι η συνάρτηση του πεδίου πάνω στην ασυνέχεια S και (y, z) είναι οι συντεταγμένες, ως προς την αρχή 0 , τυχόντος στοιχειώδους τμήματος επιφάνειας dS της ασυνέχειας. Οι συντεταγμένες του σημείου παρατήρησης (Y, Z) πάνω στην οθόνη Σ_i θεωρούνται ως προς σύστημα συντεταγμένων με αρχή P_0 πάνω στο επίπεδο της Σ_i . Παρατηρούμε ότι, όταν η απόσταση από το κέντρο της ασυνέχειας στο σημείο παρατήρησης $P(Y, Z)$ είναι πολύ μεγαλύτερη από τις τιμές των συντεταγμένων Y και Z , όπως συμβαίνει στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer, ο παράγοντας μπροστά από το ολοκλήρωμα είναι ουσιαστικά ανεξάρτητος της θέσης του P . Έτσι μπορούμε να αγνοήσουμε τον παράγοντα αυτό στις κατανομές έντασης.

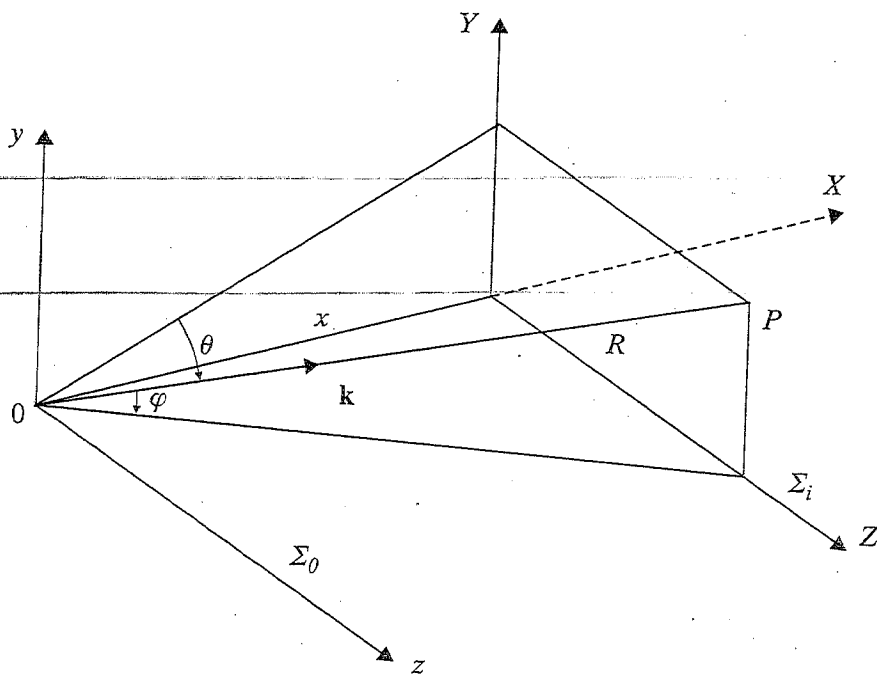
Ορίζουμε τώρα τις παραμέτρους **χωρικής συχνότητας** k_Y και k_Z από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} k_Y &\equiv \frac{kY}{R} = k \sin \phi \\ k_Z &\equiv \frac{kZ}{R} = k \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{Π.35})$$

Οι γωνίες ϕ και θ ορίζονται όπως δείχνει το Σχ. Π.18.

Η σχέση (Π.34) γράφεται τότε

$$E_P(k_Y, k_Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(y,z) e^{i(k_Y y + k_Z z)} dydz, \quad (\text{Π.36})$$



Σχ. Π. 18

όπου έχουμε εκτείνει τα όρια της S ως το $\pm \infty$, χωρίς αυτό να επιφέρει καμιά αλλαγή στο αποτέλεσμα για το πεδίο $E_P(k_Y, k_Z)$, αφού πέρα από τα φυσικά όρια της S η $E_0(y, z)$ μηδενίζεται. Αλλά η (Π.36), εξ ορισμού, αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό Fourier της $E_0(y, z)$, σύμφωνα με την (Π.12). Όστε

$$E_P(k_Y, k_Z) = \mathcal{F}[E_0(y, z)], \quad (\text{Π.37})$$

δηλαδή στην περίθλαση Fraunhofer η συνάρτηση του πεδίου περίθλασης είναι ίση με το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης του πεδίου πάνω στην ασυνέχεια.

Φυσικά ισχύει και η (Π.11), δηλαδή

$$\begin{aligned} E_0(y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_Y, k_Z) e^{-i(k_Y y + k_Z z)} dk_Y dk_Z \\ &= \mathcal{F}^{-1}[E(k_Y, k_Z)], \end{aligned} \quad (\text{Π.38})$$

δηλαδή το πεδίο πάνω στην ασυνέχεια είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του πεδίου περίθλασης.

Τα πιο πάνω αποτελέσματα ισχύουν ανεξάρτητα από τη μορφή της ασυνέχειας. Υπενθυμίζεται ακόμη ότι η ένταση του περιθλώμενου φωτός πάνω στην ο-

θόνη Σ_i στο σημείο P είναι ανάλογη του τετραγώνου της έντασης E_P , δηλαδή

$$I_P = C |E_P|^2, \quad (\text{II.39})$$

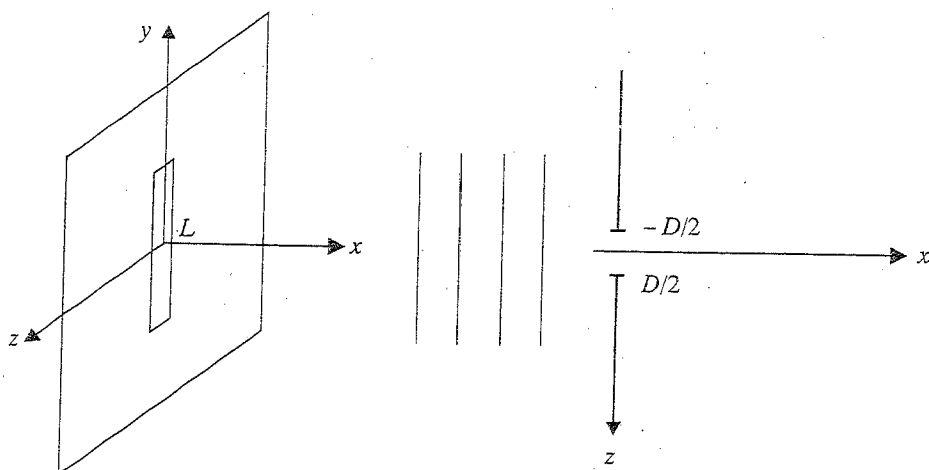
όπου C μία σταθερά αναλογίας.

Στις εφαρμογές που ακολουθούν θα υπολογίσουμε την εικόνα περίθλασης πάνω σε οθόνη, που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από κάποια ασυνέχεια με δεδομένη γεωμετρία. Θα υποθέτουμε πάντοτε ότι η ασυνέχεια φωτίζεται από επίπεδο, σύμφωνο μονοχρωματικό κύμα E_0 , που διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x . Καθεμιά από τις παρακάτω εφαρμογές αναφέρεται και σε διαφορετικής μορφής ασυνέχεια. Σε όλες στις περιπτώσεις θα υπολογίσουμε επίσης την κατανομή της φωτεινής έντασης της εικόνας περίθλασης πάνω στην οθόνη καθώς και τη γραφική της παράσταση, για σύγκριση με αντίστοιχες πειραματικές παρατηρήσεις.

Εφαρμογές

E12. Περίθλαση από μια σχισμή εύρους D .

Η περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer από μία λεπτή σχισμή εύρους D μεγάλου μήκους L θα εξεταστεί εδώ σαν ένα μονοδιάστατο πρόβλημα κατά τον άξονα z . Ο λόγος είναι ότι για αρκετά «μεγάλο» μήκος σχισμής L (παράλληλα στον y) μπορούμε να μελετήσουμε τη διαδικασία της περίθλασης, όπως αυτή εμφανίζεται πάνω σε οποιοδήποτε επίπεδο παράλληλο στη σχισμή, αγνοώντας την ύπαρξη και φυσικά την επίδραση των λεπτών (παράλληλα στον z) πλευρών της σχισμής.



Σχ. II. 19

Ας επιλέξουμε λοιπόν τους τρεις άξονες x, y, z , όπως δείχνει το Σχ. Π.19. Το περιθλώμενο πεδίο θα δίνεται από τη σχέση

$$E(k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(z) e^{ik_z z} dz, \quad (1)$$

που είναι μία έκφραση ανάλογη της (Π.36) σε μία διάσταση.

Στην περίπτωσή μας η συνάρτηση $E_0(z)$ είναι το πεδίο αμέσως μετά την ασυνέχεια και δίνεται από τη σχέση (βλ. Σχ. Π.19, δεξιά)

$$E_0(z) = \begin{cases} E_0 & \text{για } |z| \leq \frac{D}{2} \\ 0 & \text{για } |z| > \frac{D}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) παίρνουμε

$$E(k_z) = \int_{-D/2}^{+D/2} E_0 e^{ik_z z} dz = E_0 \frac{1}{ik_z} \left(e^{ik_z D/2} - e^{-ik_z D/2} \right) = \frac{2E_0}{k_z} \sin(k_z D/2).$$

Αν θέσουμε $\beta \equiv k_z D/2 = (kD/2) \sin \theta$, η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$E(k_z) = E_0 D \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right), \quad (3)$$

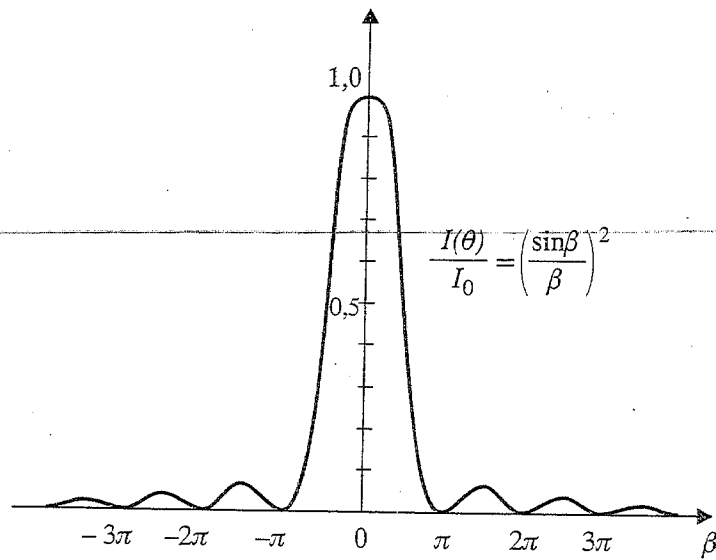
οπότε η φωτεινή ένταση του φάσματος περίθλασης στο σημείο P πάνω στην οθόνη είναι

$$I_P = C |E_P|^2 = CE_0^2 D^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \equiv I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = I(\theta). \quad (4)$$

Η σταθερά I_0 αντιστοιχεί στη φωτεινή ένταση στο κέντρο της οθόνης ($\theta = 0$, οπότε $\frac{\sin \beta}{\beta} = 1$).

Το επόμενο σχήμα αποδίδει την ένταση $I(\theta)/I_0$ σαν συνάρτηση της αδιάστατης παραμέτρου β για την περίθλαση Fraunhofer από μία απλή σχισμή.

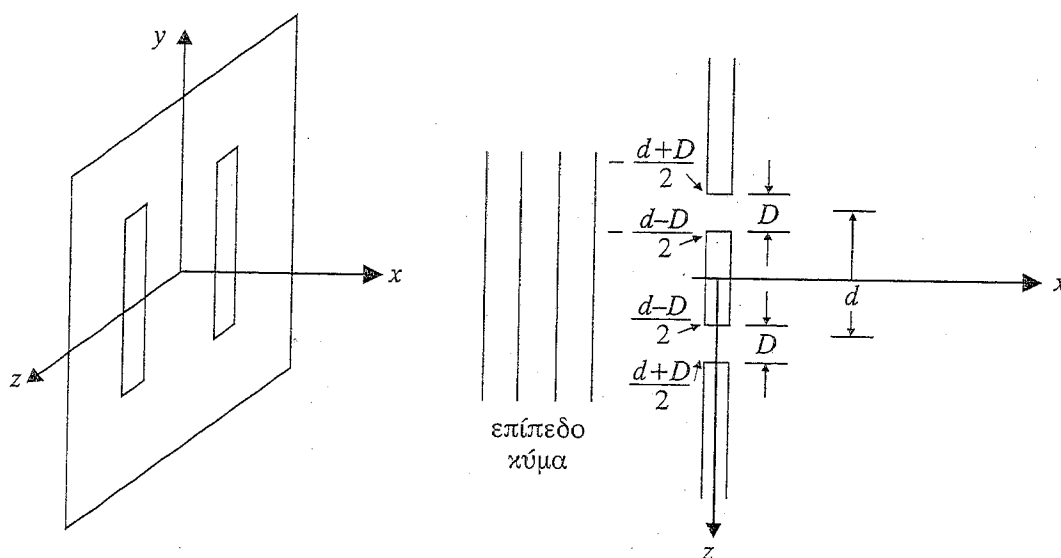
Η ένταση γίνεται μέγιστη για $\theta = 0$, ενώ μηδενίζεται στα σημεία $\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$. Μεταξύ των σημείων αυτών σχηματίζονται δευτερεύοντα μέγιστα της $I(\theta)$, των οποίων η τιμή φθίνει καθώς αυξάνει η τιμή του β , δηλαδή της γωνίας θ . Η αλληλουχία των διαδοχικών συμμετρικών (ως προς το κέντρο) μεγίστων με ελαττούμενη ένταση, αντιστοιχεί στη γνωστή εικόνα των διαδοχικών συμμετρικών φωτεινών κροσσών περίθλασης, που διαπιστώθηκαν από πειραματικές παρατηρήσεις στις Ενότητες 1 και 2.



Σχ. Π. 20

E13. Περίθλαση από διπλή σχισμή

Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή έτσι και εδώ θα θεωρήσουμε ότι το μήκος L των σχισμών είναι αρκετά μεγάλο, ώστε να μπορούμε να εξετάσουμε το πρόβλημα μόνο κατά τη διάσταση z . Παίρνουμε το σύστημα των αξόνων, όπως δείχνει το Σχ. Π.21. Το εύρος καθεμιάς σχισμής είναι D και η απόσταση των κέντρων των δύο σχισμών είναι d .



Σχ. Π. 21

Για την ένταση του πεδίου $E_0(y, z)$ αμέσως μετά την ασυνέχεια, δηλαδή στη δεξιά επιφάνεια του επιπέδου των σχισμών, ισχύει

$$E_0(y, z) \equiv \begin{cases} E_0 & \text{για } (d-D)/2 \leq z \leq (d+D)/2 \text{ και} \\ & -(d+D)/2 \leq z \leq -(d-D)/2 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (1)$$

Η ένταση του περιθλώμενου πεδίου στο σημείο P πάνω στην οθόνη θα είναι

$$\begin{aligned} E(k_Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 e^{ik_Z z} dz = \int_{-(d+D)/2}^{-(d-D)/2} E_0 e^{ik_Z z} dz + \int_{(d-D)/2}^{(d+D)/2} E_0 e^{ik_Z z} dz \\ &= E_0 \frac{1}{ik_Z} \left[e^{-ik_Z(d-D)/2} - e^{-ik_Z(d+D)/2} \right] + E_0 \frac{1}{ik_Z} \left[e^{ik_Z(d+D)/2} - e^{ik_Z(d-D)/2} \right] \\ &= E_0 \frac{1}{ik_Z} e^{-ik_Z d/2} \left(e^{ik_Z D/2} - e^{-ik_Z D/2} \right) + E_0 \frac{1}{ik_Z} e^{ik_Z d/2} \left(e^{ik_Z D/2} - e^{-ik_Z D/2} \right) \end{aligned}$$

ή

$$E(k_Z) = 2E_0 D \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cos \gamma, \quad (2)$$

όπου

$$\beta \equiv k_Z D/2 = (kD/2) \sin \theta \quad (3)$$

$$\gamma \equiv k_Z d/2 = (kd/2) \sin \theta. \quad (4)$$

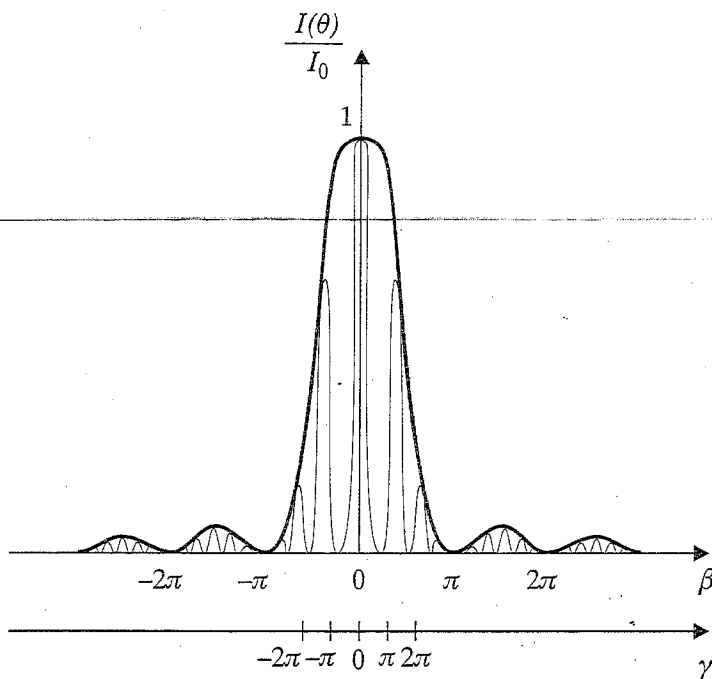
Τέλος, για τη φωτεινή ένταση του περιθλώμενου κύματος στο σημείο P πάνω στην οθόνη έχουμε

$$I_P = C |E(k_Z)|^2 = 4E_0^2 D^2 C \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma = I(\theta)$$

ή

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma. \quad (5)$$

Ο παράγοντας $(\sin \beta / \beta)^2$ είναι ο ίδιος που βρήκαμε για τη φωτεινή ένταση στην περίπτωση της απλής σχισμής. Παριστάνει μία ευρύχωρη καμπύλη, γνωστή σαν **καμπύλη των κροσσών περίθλασης**. Κάτω από αυτή σχηματίζεται η πολύ πιο πυκνή καμπύλη του παράγοντα $\cos^2 \gamma$, γνωστή σαν **καμπύλη κροσσών συμβολής**. Με άλλα λόγια, η συνισταμένη εικόνα κατανομής της φωτεινής έντασης είναι η εικόνα της συνάρτησης $\cos^2 \gamma$, διαμορφωμένη «κατά πλάτος» από την εικόνα της συνάρτησης $(\sin \beta / \beta)^2$.



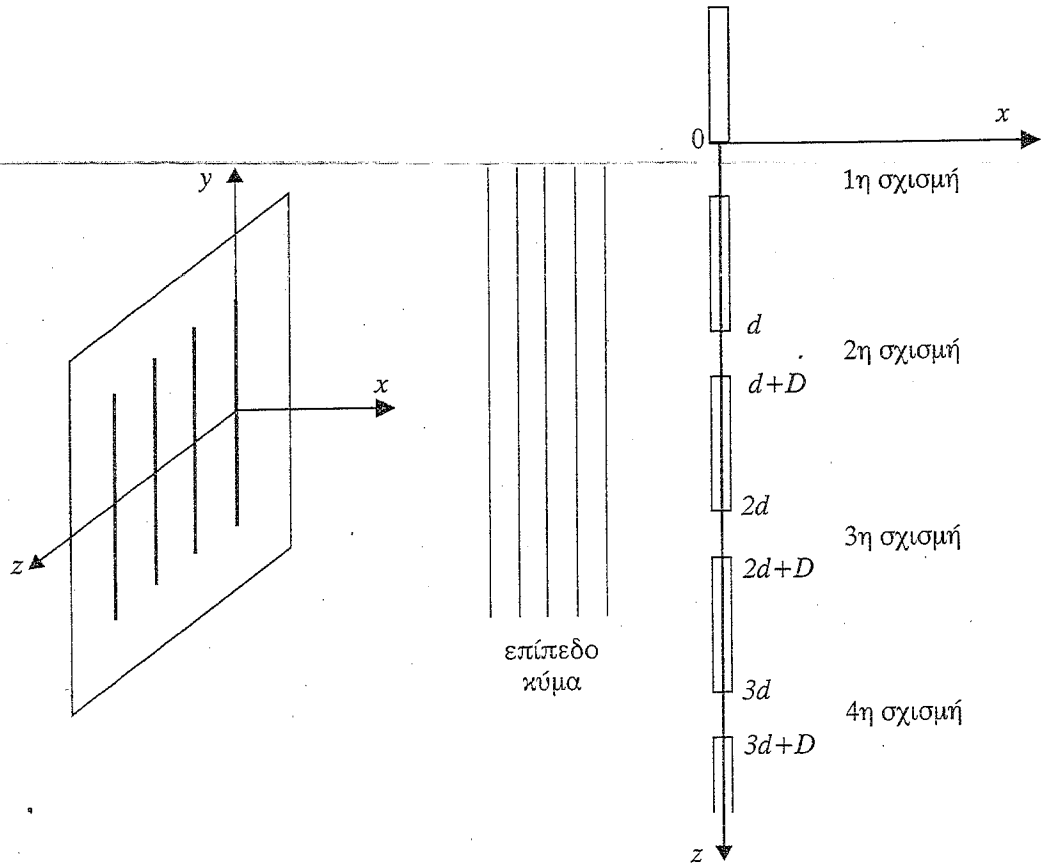
Σχ. Π. 22

Η συνάρτηση $I(\theta)/I_0$ φαίνεται στο Σχ. Π.22. Τόσο από θεωρητική όσο και από πειραματική άποψη είναι ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς την εξάρτηση της λεπτής υφής της εικόνας ($\cos^2\gamma$) καθώς και της περιβάλλουσάς της ($\sin^2\beta/\beta^2$) από τα γεωμετρικά στοιχεία D και d της διπλής σχισμής. Προκύπτει ότι, όσο πιο λεπτές είναι οι σχισμές, τόσο πιο εκτεταμένη είναι η περιβάλλουσα και, όσο πιο κοντά είναι οι σχισμές, τόσο πιο αραιή είναι η λεπτή υφή της εικόνας κάτω από την περιβάλλουσα.

E14. Περίθλαση από πολλαπλές σχισμές - Οπτικά φράγματα

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση περίθλασης Fraunhofer από ένα οπτικό φράγμα, που περιέχει N πανομοιότυπες παράλληλες σχισμές, εύρους D και μήκους L αρκετά μεγάλου, ώστε να μπορεί κανείς να μελετήσει το πρόβλημα σε μία διάσταση. Η απόσταση των κέντρων δύο διαδοχικών σχισμών είναι d . Παίρνουμε το σύστημα των αξόνων, όπως δείχνει το Σχ. Π.23, με αρχή δηλαδή των αξόνων την ακμή της πρώτης (ακροαίας) σχισμής. Το πεδίο στη δεξιά επιφάνεια της ασυνέχειας έχει τη μορφή

$$E(z) = \begin{cases} E_0 & \text{για } (n-1)d \leq z \leq (n-1)d + D, \quad n=1,2,\dots,N \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (1)$$



Σχ. Π. 23

Το περιθλώμενο πεδίο στο σημείο P πάνω στην οθόνη είναι τότε

$$\begin{aligned}
 E(k_Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(z) e^{ik_Z z} dz \\
 &= \left\{ \int_0^D + \int_d^{d+D} + \int_{2d}^{2d+D} + \dots + \int_{(N-1)d}^{(N-1)d+D} \right\} e^{ik_Z z} dz \\
 &= \frac{1}{ik_Z} \left\{ \left(e^{ik_Z D} - 1 \right) + \left[e^{ik_Z(d+D)} - e^{ik_Z d} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[e^{ik_Z(2d+D)} - e^{ik_Z 2d} \right] + \dots + \left[e^{ik_Z((N-1)d+D)} - e^{ik_Z(N-1)d} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{ik_Z} \left[\left(e^{ik_Z D} - 1 \right) + e^{ik_Z d} \left(e^{ik_Z D} - 1 \right) + e^{2ik_Z d} \left(e^{ik_Z D} - 1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + e^{ik_Z(N-1)d} \left(e^{ik_Z D} - 1 \right) \Big] = \\
& = \frac{e^{ik_Z D} - 1}{ik} \left[1 + e^{ik_Z d} + e^{i2k_Z d} + \dots + e^{i(N-1)k_Z d} \right] \\
& = \frac{e^{ik_Z D} - 1}{ik_Z} \frac{1 - e^{iNk_Z d}}{1 - e^{ik_Z d}} \\
& = \frac{1}{ik_Z} e^{ik_Z D/2} \left(e^{ik_Z D/2} - e^{-ik_Z D/2} \right) \frac{e^{iNk_Z d/2} \left(e^{-iNk_Z d/2} - e^{iNk_Z d/2} \right)}{e^{ik_Z d/2} \left(e^{-ik_Z d/2} - e^{ik_Z d/2} \right)}
\end{aligned}$$

ή

$$E(k_Z) = D e^{i\beta} e^{i(N-1)\gamma} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right), \quad (2)$$

όπου

$$\beta \equiv k_Z \frac{D}{2} = \frac{kD}{2} \sin \theta \quad (3)$$

και

$$\gamma \equiv k_Z \frac{d}{2} = \frac{kd}{2} \sin \theta. \quad (4)$$

Η φωτεινή ένταση στο σημείο P πάνω στην οθόνη είναι

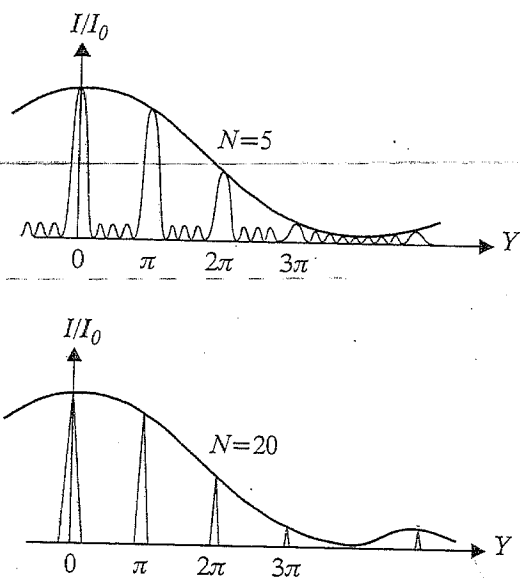
$$\begin{aligned}
I_P &= C |E(k_Z)|^2 = CD^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\gamma} \right)^2 \\
&\equiv I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{N \sin \gamma} \right)^2 = I(\theta), \quad (5)
\end{aligned}$$

όπου ο παράγοντας N τέθηκε, ώστε για $\theta = \theta$ να έχουμε $I = I_0$. Η συνάρτηση $I(\theta)/I_0$ αποδίδεται γραφικά στο Σχ. Π.24 για διάφορες τιμές του N .

Ο παράγοντας $(\sin \beta / \beta)^2$ εμφανίζεται και πάλι σαν η γνωστή περιβάλλουσα της εικόνας περίθλασης, που διαμορφώνει κατά πλάτος τη λεπτή υφή της εικόνας συμβολής. Κύρια μέγιστα εμφανίζονται στα σημεία, όπου $\gamma = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ δηλαδή, όταν

$$n\lambda = d \cdot \sin \theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Η (6) είναι ο γνωστός τύπος των οπτικών φαινομένων. Συνδέει το μήκος κύματος, τη γωνία απόκλισης από την κάθετη στο φράγμα διεύθυνση και την α-

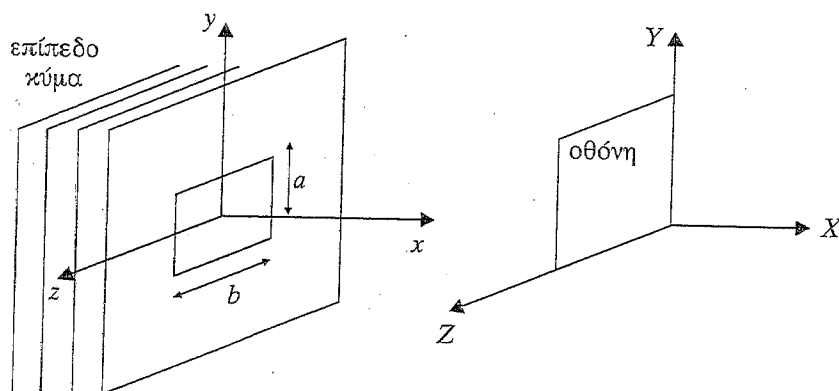


Σχ. Π. 24

πόσταση μεταξύ διαδοχικών σχισμών. Για πολύ στενές σχισμές $\beta \rightarrow 0$ και $(\sin\beta/\beta) \rightarrow 1$, οπότε παίρνουμε μία εικόνα περίθλασης με ισούψη κύρια μέγιστα. Αυτό σημαίνει συμμετρική κατανομή φωτεινών κροσσών σε ίσες αποστάσεις και με την ίδια ένταση.

E15. Περίθλαση από ορθογώνιο άνοιγμα διαστάσεων $a \times b$

Εργαζόμαστε ακριβώς, όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές. Η εικόνα πάνω στην οθόνη οφείλεται και πάλι σε περίθλαση Fraunhofer και θα δίνεται από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης του πεδίου πάνω στην ασυνέχεια (Σχ. Π.25).



Σχ. Π. 25

Η συνάρτηση αυτή εκφράζεται από τη σχέση

$$E(y, z) = \begin{cases} E_0 & \text{για } |y| \leq \frac{a}{2} \text{ και } |z| \leq \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases} \quad (1)$$

Προφανώς τώρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Fourier σε δύο διαστάσεις. Έχουμε, σύμφωνα με την (Π.12),

$$\begin{aligned} E(k_Y, k_Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(y, z) e^{i(k_Y y + k_Z z)} dy dz \\ &= E_0 \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-k_Y y} dy \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i k_Z z} dz \\ &= E_0 \frac{2}{k_Y} \sin(k_Y a/2) \cdot \frac{2}{k_Z} \sin(k_Z b/2), \end{aligned}$$

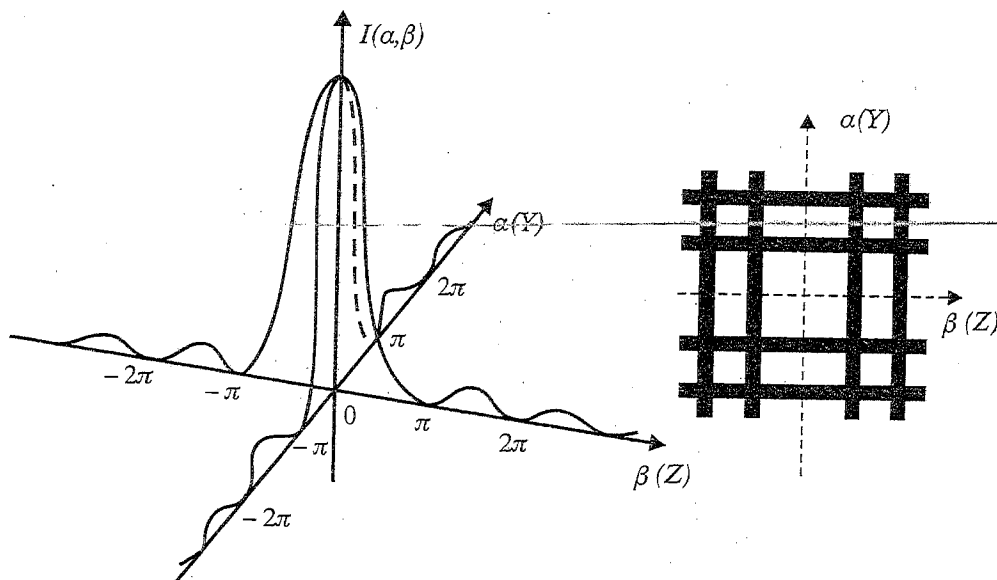
ή

$$E(k_Y, k_Z) = E_0 ab \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right), \quad (2)$$

όπου

$$\alpha \equiv k_Y a/2 = (ka/2) \sin \phi \quad (3)$$

$$\beta \equiv k_Z b/2 = (kb/2) \sin \theta. \quad (4)$$



Σχ. Π. 26

Η ένταση του φωτός σε σημείο $P(Y,Z)$ πάνω στην οθόνη θα είναι

$$I_P = C |E(k_y, k_z)|^2 = CE_0^2 \alpha^2 b^2 \left(\frac{\sin \alpha}{a}\right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{b}\right)^2$$

$$\equiv I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{a}\right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{b}\right)^2, \quad (5)$$

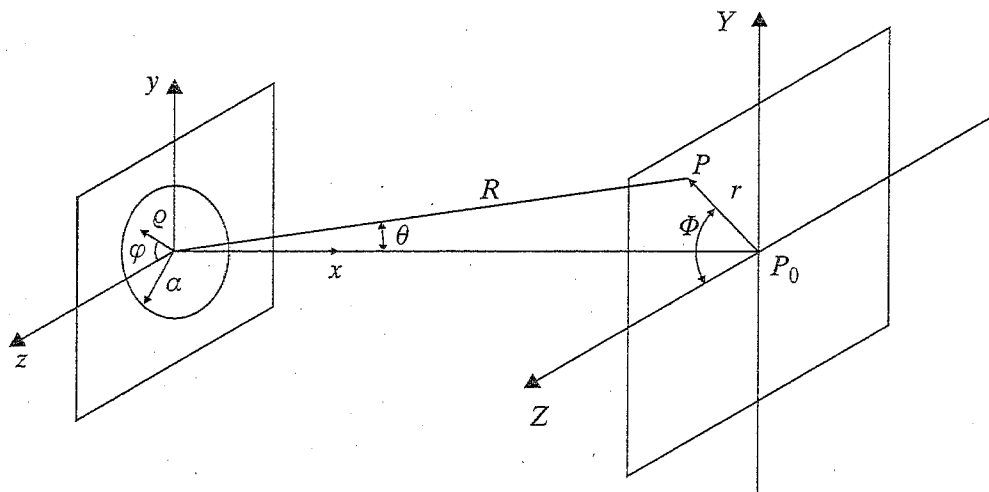
όπου I_0 η ένταση για $\phi = 0, \theta = 0$. Η συνάρτηση αυτή $I(\theta)$ αποδίδεται στο Σχ. Π.26. Μηδενίζεται, όταν $\alpha = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ και $\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$. Ας σημειωθεί τέλος ότι η κατανομή της φωτεινής έντασης $I(\alpha, \beta)$ είναι ίση με το γινόμενο των συναρτήσεων κατανομής της φωτεινής έντασης δύο κάθετων απλών σχισμών, μιας με εύρος a και μιας δεύτερης με εύρος b .

E16. Περίθλαση από κυκλικό άνοιγμα

Για τη μελέτη της περίθλασης Fraunhofer από κυκλικό άνοιγμα ακτίνας a χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες. Αυτό ενδείκνυται από τη γεωμετρική συμμετρία του προβλήματος. Αν ρ και ϕ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου (y, z) της ασυνέχειας και r και Φ εκείνες του σημείου (Y, Z) πάνω στην οθόνη, όπως δείχνει το Σχ. Π.27, θα ισχύουν

$$z = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi \quad (1)$$

$$Z = r \cos \Phi \quad Y = r \sin \Phi. \quad (2)$$



Σχ. Π. 27

Το στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας της ασυνέχειας σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $dydz$ και $\rho d\rho d\phi$, αντίστοιχα, οπότε το ενιαίο $E(k_Y, k_Z)$, που προκύπτει από ολοκλήρωση στα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} E(k_Y, k_Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(y, z) e^{i(k_Y y + k_Z z)} dy dz \\ &= \int_{\rho=0}^{\alpha} \int_{\phi=0}^{2\pi} E_0 e^{i(k\rho/R)\cos(\phi-\Phi)} \rho d\rho d\phi. \end{aligned}$$

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας που υπάρχει, το αποτέλεσμα πρέπει να είναι ανεξάρτητο της γωνίας Φ . Θέτουμε λοιπόν $\Phi = 0$, οπότε οι υπολογισμοί απλουστεύονται σημαντικά. Το πεδίο στο σημείο P θα είναι

$$E_P = E_0 \int_{\rho=0}^{\alpha} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(k\rho/R)\cos\phi} \rho d\rho d\phi.$$

Το ολοκλήρωμα

$$J_0 \equiv \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(k\rho/R)\cos\phi} d\phi \quad (3)$$

είναι ένα από τα ολοκληρώματα που εκφράζονται με τη βοήθεια ειδικών συναρτήσεων, των **συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους**. Πράγματι, ο γενικός ορισμός των συναρτήσεων Bessel $J_m(x)$ τάξης m είναι

$$J_m(x) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mu + x \cos u)} du. \quad (4)$$

Συγκρίνοντας τις (3), (4) βλέπουμε ότι στην περίπτωσή μας ισχύει $m = 0$ και $x = k\rho/R$, οπότε

$$E_P = E_0 \int_{\rho=0}^{\alpha} \left[2\pi J_0 \left(\frac{k\rho}{R} \right) \right] \rho d\rho. \quad (5)$$

Επίσης, ισχύει η εξής γενική αναδρομική σχέση μεταξύ των συναρτήσεων Bessel

$$\frac{d}{dx} [x^{m+1} J_{m+1}(x)] = x^{m+1} J_m(x), \quad (6)$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της (5). Πράγματι για $m = 0$ η σχέση αυτή γράφεται

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x), \quad (7)$$

απ' όπου παίρνουμε, με ορισμένη κατά μέλη ολοκλήρωση από 0 ως u

$$\int_0^u x J_0(x) dx = u J_1(u). \quad (8)$$

Συνδυάζοντας την (8) με την (5) με $x \equiv kra/R$, φτάνουμε στο τελικό αποτέλεσμα

$$E_P = \pi a^2 E_0 \left[\frac{2 J_1(kra/R)}{kra/R} \right]. \quad (9)$$

Η ένταση του φωτός στο σημείο P θα είναι

$$I_P = C |E_P|^2 = CA^2 E_0^2 \left[\frac{2 J_1(kra/R)}{kra/R} \right]^2, \quad (10)$$

όπου $A = \pi a^2$ είναι το εμβαδόν του ανοίγματος. Παρατηρούμε ότι $(r/R) = \sin \theta$, όπου θ η γωνία που ορίζεται μεταξύ του άξονα x και του R (βλ. Σχ. Π.27). Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται

$$I_P = I_0 \left[\frac{2 J_1(k a \sin \theta)}{k a \sin \theta} \right]^2 = I(\theta), \quad (11)$$

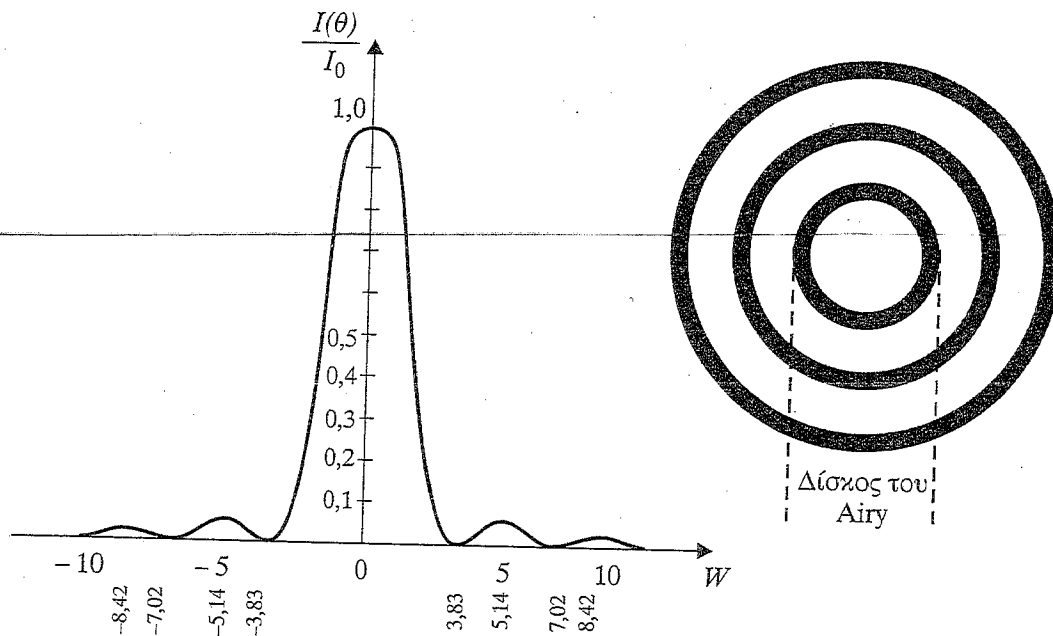
όπου $I_0 \equiv CA^2 E_0^2$ η ένταση για $\theta = 0$ αφού, σύμφωνα με τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Το Σχ. Π.28 αποδίδει τη συνάρτηση $I(\theta)/I_0$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου $W \equiv k a \sin \theta$. Ο κεντρικός δίσκος, που χαρακτηρίζεται από την υψηλή τιμή της έντασης I_0 , ονομάζεται **δίσκος του Airy**. Η ακτίνα r_1 αυτού του δίσκου βρίσκεται εύκολα, αφού ο πρώτος σκοτεινός δακτύλιος που τον περιβάλλει αντιστοιχεί, όπως φαίνεται και στο σχήμα, στην τιμή $W = 3,83$. Έτσι βρίσκουμε $\sin \theta = 3,83/ka$ και

$$r_1 = 1,22 \frac{R\lambda}{2a}, \quad (13)$$

αφού $k = 2\pi/\lambda$ και $\sin \theta = r_1/R$. Η σχέση (13) είναι πολύ σημαντική στη σχεδίαση οπτικών οργάνων και εξαρτημάτων, γιατί δίνει τη σχέση μεγέθους μεταξύ ενός κυκλικού ανοίγματος (ακτίνας a) και του ειδώλου του (ακτίνας r_1 κατά κύριο λόγο) σε απόσταση R , όταν χρησιμοποιείται μήκος κύματος λ . Έτσι, για παράδειγμα, αν το άνοιγμα αντιστοιχεί σ' ένα σφαιρικό φακό ακτίνας a , που φωτίζεται από παράλληλη δέσμη φωτός, τότε στο εστιακό του επίπεδο ($R = f$) θα δημιουργηθεί κυκλική κηλίδα (εστία) ακτίνας r_1 . Το μέγεθος της



Σχ. Π. 28

εστίας αποκλείεται να γίνει μικρότερο, όσο «καλός» και αν είναι ο φακός. Λέμε ότι ο φακός δεν μπορεί να εστιάσει σε διαστάσεις μικρότερες του ορίου περίθλασης (13) (diffraction limited lens).

E17. Ναδειχθεί ότι, αν ένα άνοιγμα έχει κέντρο συμμετρίας, δηλαδή, αν η $E(x, y)$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε το περιθλώμενο πεδίο Fraunhofer έχει επίσης κέντρο συμμετρίας.

Υποθέτουμε ότι

$$E(y, z) = E(-y, -z). \tag{1}$$

Για να δείξουμε ότι το περιθλώμενο πεδίο E_P έχει κέντρο συμμετρίας, χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές Y, Z , αντί των $k_Y = kY/R$ και $k_Z = kZ/R$ και εξετάζουμε αν ισχύει η σχέση $E(Y, Z) = E(-Y, -Z)$. Πράγματι, έχουμε

$$E(-Y, -Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(y, z) e^{ik(-Yy - Zz)/R} dy dz$$

ή, αλλάζοντας τις μεταβλητές y, z σε $-y, -z$,

$$E(-Y, -Z) = \int_{+\infty}^{-\infty} \int_{+\infty}^{-\infty} E(-y, -z) e^{ik(Yy + Zz)/R} (-dy)(-dz)$$