

Επιτροπή : Κουτσούμπας Γ.  
Κεχαγιάς Α.  
Αναγνωστόπουλος Κ.

Copyright © Αλεξίου Μαρία, 2016  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος, All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Πρόλογος</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Εισαγωγή στην Κοσμολογία</b>	<b>4</b>
2.1	Κοσμολογική αρχή . . . . .	4
2.2	Χρήσιμες Κοσμολογικές Παράμετροι . . . . .	4
2.2.1	Μετατόπιση προς το ερυθρό (Red shift) . . . . .	4
2.2.2	Ακτινοβολία μέλανος σώματος . . . . .	5
2.2.3	Υπολογισμός της λαμπρότητας ανά μονάδα εμβαδού . . . . .	6
2.2.4	Υπολογισμός μέσης ενέργειας φωτονίων . . . . .	6
2.3	Εξίσωση Einstein . . . . .	10
2.4	Εξισώσεις Friedmann . . . . .	13
2.5	Καταστατικές Εξισώσεις . . . . .	18
2.6	Χρονοδιάγραμμα Γέννησης Σύμπαντος . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Νουκλεοσύνθεση</b>	<b>23</b>
3.1	Πρωτόνια και Νετρόνια . . . . .	23
3.2	Δευτέριο . . . . .	27
3.3	Ήλιον . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Επανασύνδεση - Recombination</b>	<b>31</b>
<b>5</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>37</b>

# 1 Πρόλογος

Με τον όρο κοσμογονία, (κόσμος + γέγονα) εννοείται στη φιλοσοφία μια θεωρία προέλευσης του σύμπαντος, είτε θρησκευτικού, μυθικού, είτε επιστημονικού χαρακτήρα. Στη μυθολογία ειδικότερα ο όρος γίνεται κατανοητός ως μυθική αφήγηση ή σώμα μύθων που σχετίζεται με τη δημιουργία του σύμπαντος. Διαφέρει από την επιστήμη της κοσμολογίας, ως προς το γεγονός ότι η δεύτερη στοχεύει στην κατανόηση της φυσικής συγκρότησης του σύμπαντος και των νόμων που το κυβερνούν.

Έχει παρατηρηθεί πως το σύμπαν σήμερα διαστέλλεται και είναι γεμάτο με ραδιενέργεια (2.7K CBR) καθώς και με κανονική ύλη (βαρυόνια), «σκοτεινή ύλη» και «σκοτεινή ενέργεια». Συνεπώς, το πρώιμο σύμπαν πρέπει να ήταν καυτό και πυκνό. Αρκετά νωρίς στην εξέλιξή του κυρίαρχα ήταν τα σχετικιστικά σωματίδια. Κατά τη διάρκεια της εξέλιξής του, το σύμπαν πέρασε μια σύντομη περίοδο κατά την οποία λειτουργούσε σαν κοσμικός πυρηνικός αντιδραστήρας συνθέτοντας τα πιο ελαφριά νουκλίδια:  $D, {}^3\text{He}, {}^4\text{He}, {}^6\text{Li}$ . Το σύμπαν μας κυριαρχείται από τα ελαφρά στοιχεία με τις παρακάτω αναλογίες :

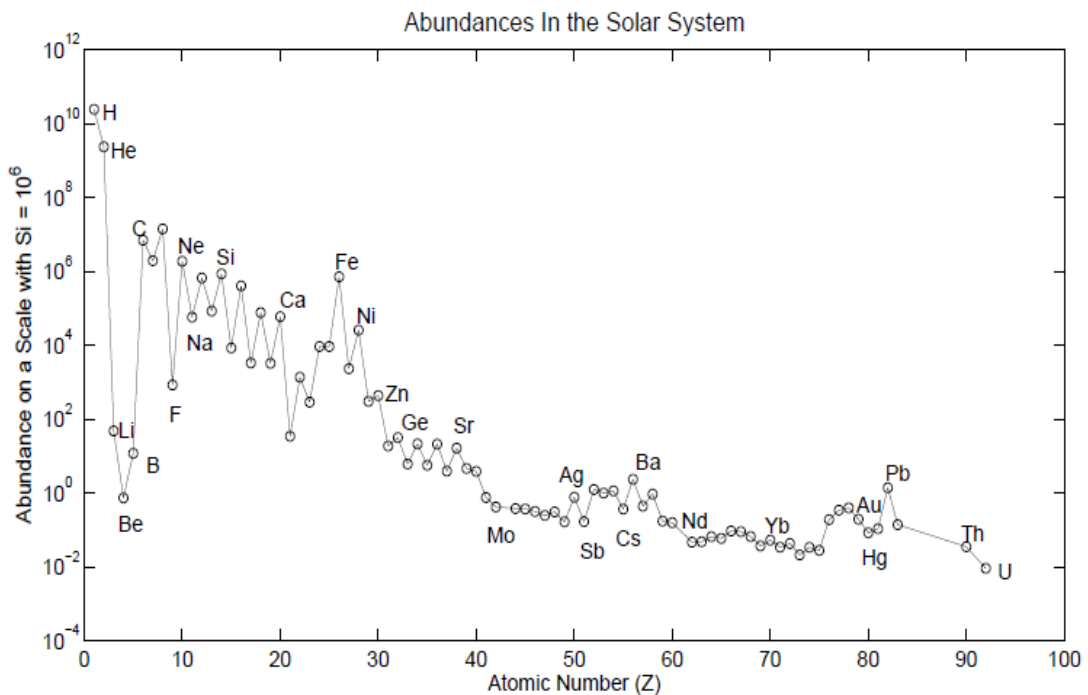
H : 75 %

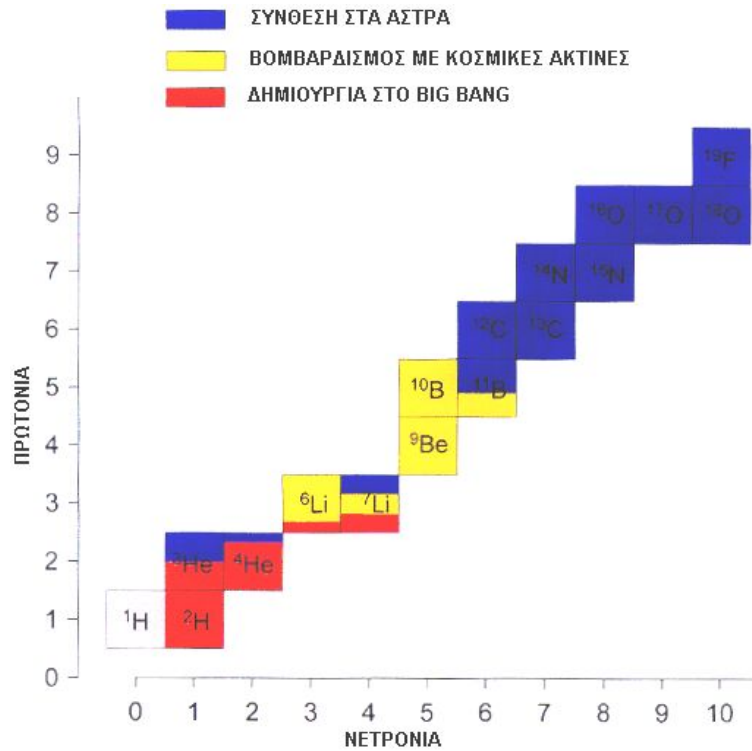
${}^4\text{He}$  : 25%

D : 0.01%

${}^7\text{Li}$  : 10%

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία όπως O, N, Fe είναι σε πολύ μικρές ποσότητες.





Δεν υπάρχει κανένας τρόπος να παραχθούν όλες αυτές οι ποσότητες στα αστέρια άρα είναι ένα απομεινάρι της πρώιμης ιστορίας του σύμπαντος.

## 2 Εισαγωγή στην Κοσμολογία

### 2.1 Κοσμολογική αρχή

Το σύμπαν σε αρκετά μεγάλες κλίμακες είναι ομογενές και ισοτροπικό, δηλαδή καμία κατεύθυνση και σημείο δεν είναι προτιμότερη από κάποια άλλη. Το σύμπαν διαστέλλεται σύμφωνα με το νόμο του Hubble :

$$\frac{d\ell}{dt} = H_0(t) \cdot \ell,$$

όπου  $\ell$  η μέση κατάσταση δύο σωματιδίων και  $H_0(t)$  η χρονοεξαρτώμενη παράμετρος Hubble. Το σύμπαν διαστέλλεται από μια θερμή πυκνή κατάσταση, όπου κυριαρχούσε η θερμική ακτινοβολία μέλαν σώματος και περιγράφεται από τις εξισώσεις του Einstein και τη γενική θεωρία της σχετικότητας.

### 2.2 Χρήσιμες Κοσμολογικές Παράμετροι

#### 2.2.1 Μετατόπιση προς το ερυθρό (Red shift)

Ορίζεται μέσω της παραμέτρου

$$z = \frac{D\lambda}{\lambda}$$

και συνδέεται με τον λόγο του ανιχνευόμενου μήκος κύματος  $\lambda_0$  προς το εκπεμπόμενο μήκος κύματος:

$$\lambda_e : 1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$$

και για  $u \ll 1$  έχουμε  $z \approx u = Hd$  από το νόμο του Hubble, άρα τελικά παίρνουμε:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$$

άρα η παράμετρος της μετατόπισης προς το ερυθρό δεν αποτελεί μέτρο μόνο των αποστάσεων απομακρυσμένων γεγονότων, αλλά και τρόπο αναφοράς σε παρελθόντα γεγονότα. Όσο βαθύτερα κοιτάμε στο σύμπαν, τόσο μεγαλύτερη είναι η μετατόπιση προς το ερυθρό και τόσο πιο πίσω πηγαίνουμε προς το παρελθόν. Η μετατόπιση προς το ερυθρό δεν πρέπει να συγχέεται με το φαινόμενο Doppler, αφού λόγω της μάζας, υπάρχει μετατόπιση που συνδέεται με την βαρύτητα και σε μεγάλες αποστάσεις στην περίοδο του πληθωρισμού απομακρύνονται τα αντικείμενα με μεγαλύτερη ταχύτητα από την ταχύτητα του φωτός.

### 2.2.2 Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Υπενθυμίζουμε από τη Στατιστική ότι, αν η πιθανότητα για ένα σύστημα να βρίσκεται σε μία κατάσταση με ενέργεια  $E_n$  είναι

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, Z \equiv \sum_n e^{-\beta E_n}, \beta \equiv \frac{1}{kT},$$

τότε η αναμενόμενη τιμή της ενέργειας θα είναι:

$$\langle E \rangle = \sum_n p_n E_n = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n},$$

που μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}.$$

Ας θεωρήσουμε ειδικότερα την περίπτωση των φωτονίων με συχνότητα οπότε

$$E_n = n\hbar\omega$$

και

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

και

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1}.$$

Η ενεργειακή πυκνότητα ανά διάστημα συχνότητας  $dv$  είναι το γινόμενο της μέσης ενέργειας  $\langle E \rangle$  και της πυκνότητας καταστάσεων μεταξύ των συχνοτήτων  $f$  και  $f + df$  ανά μονάδα όγκου, που είναι  $8\pi \frac{f^2 df}{c^3}$ :

$$u(f)df = \frac{hv}{e^{\beta hf} - 1} 8\pi \frac{f^2 df}{c^3} = \frac{8\pi h}{\lambda^3 (e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1)} \left(-\frac{c}{\lambda^2}\right) d\lambda = u(\lambda)d\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(\lambda) = -\frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1)}$$

Αυτή είναι η πολύ γνωστή κατανομή του *Planck* για την ακτινοβολία του μέλανος σώματος. Όπως είναι γνωστό, αυτή η κατανομή παρουσιάζει ένα μέγιστο σε κάποια τιμή  $\lambda_{max}$  του μήκους κύματος. Την τιμή αυτή τη βρίσκουμε μεγιστοποιώντας τη συνάρτηση  $u(\lambda)$  ως προς το μήκος κύματος:

$$\left. \frac{du(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_{max}} = 0 \Rightarrow 5 \left( e^{\frac{\beta hc}{\lambda_{max}}} - 1 \right) - \frac{\beta hc}{\lambda_{max}} e^{\frac{\beta hc}{\lambda_{max}}} = 0$$

Αν θέσουμε

$$\frac{\beta hc}{\lambda_{max}} = x,$$

η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$5 - x - 5e^{-x} = 0,$$

η οποία λύνεται αριθμητικά και δίνει τη λύση  $x \approx 4.965$ , οπότε

$$\frac{hc}{kT\lambda_{max}} = 4.965 \Rightarrow \lambda_{max}T = \frac{hc}{4.965k},$$

αντικαθιστώντας τις σταθερές καταλήγουμε στη σχέση

$$\lambda_{max}T = 0.29cmK.$$

Αυτός είναι ο πολύ γνωστός νόμος του Wien, που μας δίνει μια εκτίμηση ποιο είναι το μήκος κύματος που κυριαρχεί και τον τόνο στην ακτινοβολία ενός μέλανος σώματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η θερμοκρασία, τόσο μετατοπιζόμαστε στα μικρά μήκη κύματος, δηλαδή τις μεγάλες συχνότητες, βρίσκουμε την ενεργειακή πυκνότητα που προέρχεται από όλες τις συχνότητες μαζί :

$$U = \int_0^\infty u(f)df = \int_0^\infty \frac{8\pi hf^3}{c^3(e^{\beta hf} - 1)}df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{(\beta h)^4} \int_0^\infty \frac{(\beta hf)^3 d(\beta hf)}{e^{\beta hf} - 1} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{(\beta h)^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

όπου  $x \equiv \beta hv$ . Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να αποδειχτεί ότι ισούται με  $\frac{\pi^4}{15}$  και το αποτέλεσμα γράφεται :

$$U = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{k^4 T^4}{(\beta h)^4} \frac{\pi^4}{15} = \left(\frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}\right) T^4,$$

δηλαδή

$$U = aT^4, a \equiv \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}.$$

Η σταθερά  $a$  λέγεται σταθερά της ακτινοβολίας και ισούται, αν αντικαταστήσουμε τις σταθερές με  $7.56 \times 10^{-15} \frac{erg}{cm^3 K^4}$ .

### 2.2.3 Υπολογισμός της λαμπρότητας ανά μονάδα εμβαδού

Είναι γνωστό ότι μια μικρή οπή σε μια κοιλότητα είναι πολύ καλή προσέγγιση του μέλανος σώματος. Θα θεωρήσουμε ότι η οπή έχει εμβαδόν  $A$  και θέλουμε να βρούμε πόση ακτινοβολία θα εξέλθει από την οπή σε χρόνο  $\delta t$ . Θεωρούμε ότι το τοίχωμα της κοιλότητας είναι επίπεδο και με κέντρο την οπή ορίζουμε σφαιρικές συντεταγμένες με τον άξονα των  $z$  κάθετον σε αυτό το επίπεδο και με φορά προς την κοιλότητα. Η ενέργεια που θα περάσει από την οπή σε χρόνο  $\delta t$  θα βρίσκεται μέσα σε ημισφαίριο με κέντρο την οπή και ακτίνα  $c\delta t$ . Ένας στοιχειώδης όγκος  $d^3r = r^2 dr d\cos\theta d\phi$  περιέχει ενέργεια  $U d^3r$ , από την οποία ένα κλάσμα  $\frac{\Omega}{4\pi}$  θα περάσει μέσα από την οπή ( $\Omega$  είναι η στερεά γωνία υπό την οποία ο στοιχειώδης όγκος βλέπει την οπή. Θα ισούται με  $\Omega = \frac{A \cos\theta}{r^2}$ ). Συγκεντρώνοντας όλα τα προηγούμενα προκύπτει :

$$d^3(\delta E) = \frac{\Omega}{4\pi} U d^3r = \frac{A \cos\theta}{4\pi r^2} U r^2 dr d(\cos\theta) d\phi \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta E = \frac{AU}{4\pi} \left( \int_0^{c\delta t} dr \right) \left( \int_{\cos\theta=0}^1 d(\cos\theta) \cos\theta \right) \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) = \frac{cU}{4} A \delta t \Rightarrow I \equiv \frac{\delta E}{A \delta t} = \frac{cU}{4}.$$

Με τη βοήθεια της σχέσης  $U = aT^4$  η τελευταία σχέση γράφεται:

$$I = \frac{caT^4}{4} = \sigma T^4,$$

στην οποία φυσικά αναγνωρίζουμε τον νόμο των Stefan και Boltzmann. Η σταθερά που εμφανίζεται σε αυτόν τον νόμο ισούται με:

$$\sigma = \frac{ca}{4} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.7 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

### 2.2.4 Υπολογισμός μέσης ενέργειας φωτονίων

Έχουμε τρεις εξισώσεις που μας δείχνουν πως διαστέλλεται το σύμπαν

Εξίσωση Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \varepsilon}{3c^2} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}, k = 0$$

Υδροδυναμική εξίσωση

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0$$

Καταστατική εξίσωση

$$P = w\varepsilon$$

Αν συνδυάσουμε την 2η με την 3η παίρνουμε

$$P = w\varepsilon \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{3}{a}\frac{da}{dt}\varepsilon(1+w) = 0 \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{da} + \frac{3}{a}\varepsilon(1+w) = 0 \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -3(1+w)\frac{da}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln\varepsilon = -3(1+w)\ln a + c \Rightarrow \varepsilon(a) = a^{-3(1+w)}\varepsilon_0$$

όπου

$$\varepsilon(a) = a^{-3(1+w)}\varepsilon_0$$

η ενεργειακή πυκνότητα. Τώρα αν πάρω την 1η υπολογίζω τον παράγοντα κλίμακας  $\alpha(t)$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon a^2 \Rightarrow \frac{da}{dt} = a\left[\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2}a^{-3(1+w)}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2}}a^{1-\frac{3(1+w)}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2}}a^{-\frac{3w+1}{2}} \Rightarrow \\ \int a^{\frac{3w+1}{2}} da = \sqrt{\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2}}t + K \Rightarrow \frac{a^{\frac{3w+1}{2}+1}}{\frac{3w+1}{2}+1} = \sqrt{\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2}}t + K \Rightarrow a^{\frac{3(w+1)}{2}} = \frac{3(1+w)}{2}\sqrt{\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2}}t + \tilde{K}$$

Αλλά

$$a(t_0) = 1 \Rightarrow \tilde{K} = 0$$

οπότε

$$a^{\frac{3(w+1)}{2}} = \frac{t}{\frac{2}{3(1+w)}\sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\varepsilon_0}}} = \frac{t}{\frac{1}{1+w}\sqrt{\frac{c^2}{6\pi G\varepsilon_0}}} \Rightarrow a^{\frac{3(w+1)}{2}} = \frac{t}{t_0} \Rightarrow a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

Η αντικατάσταση στην εξίσωση θα δώσει :

$$t_0 \equiv \frac{1}{1+w}\sqrt{\frac{c^2}{6\pi G\varepsilon_0}}$$

Η μετρική του τετραδιάστατου χώρου που είναι ομογενής και ισότροπη παντού και πάντα είναι η μετρική Friedmann-Robertson-Walker :

$$ds^2 = -c^2(dt)^2 + \alpha(t)^2 \left[ \frac{(dx)^2}{1 - \kappa \frac{x^2}{R_0^2}} + x^2 d\Omega^2 \right], d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Αυτή η μετρική περιγράφει το καμπυλωμένο σύμπαν της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας που έχει ακτίνα  $R_0$  και τον παράγοντα κλίμακας  $\alpha(t)$  που του επιτρέπει να διαστέλλεται ή να συστέλλεται. Ο χρόνος  $t$  λέγεται κοσμικός χρόνος, ενώ οι συντεταγμένες  $(r, \vartheta, \varphi)$  ή  $(x, \vartheta, \varphi)$  λέγονται ομοκινούμενες συντεταγμένες ενός σημείου και δεν εξαρτώνται από το χρόνο, δηλαδή δεν αλλάζουν κατά τη συστολή ή διαστολή του σύμπαντος. Η συνηθισμένη σύμβαση για τον παράγοντα κλίμακας είναι ότι τη σημερινή εποχή  $t_0$  θεωρούμε  $\alpha(t_0) = 1$ . Σύμφωνα με αυτή τη μετρική, η απόσταση ενός αντικειμένου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή είναι :  $d(t) = \alpha(t)r$ , αν κινούμαστε σε ακτινική ευθεία (με σταθερά  $\vartheta$  και  $\varphi$ ). Άρα αφού το  $r$  δεν αλλάζει με το χρόνο

$$\dot{d} = \dot{\alpha}r = \dot{\alpha}\frac{d}{\alpha} \equiv Hd.$$

Στη σημερινή εποχή λοιπόν

$$v(t_0) = H_0 d(t_0), v(t_0) \equiv \dot{d}(t_0), H_0 \equiv \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)_{t=t_0}$$

δηλαδή ο νόμος του Hubble. Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την παράμετρο του Hubble αντικαθιστώντας τον παράγοντα κλίμακας που βρήκαμε:

$$H_0 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} = \frac{\frac{2}{3(1+w)} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)} - 1} \frac{1}{t_0}}{\left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}} \Big|_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+w)t_0}$$

Οπότε η ηλικία του σύμπαντος συναρτήσκει της παραμέτρου Hubble:

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}$$

Για  $w = 0$  (ύλη) η ηλικία του σύμπαντος θα είναι:  $t_0 = \frac{2}{3H_0}$  ενώ για  $w = \frac{1}{3}$  (ακτινοβολία) η ηλικία του σύμπαντος γίνεται:  $t_0 = \frac{1}{2H_0}$ , δηλαδή για συνηθισμένη ύλη ή ενέργεια, η ηλικία του σύμπαντος προκύπτει μικρότερη από το χρόνο του Hubble:  $t_0 = \frac{1}{H_0}$ .

Όταν θεωρούμε ακτινική διάδοση φωτός από έναν μακρινό γαλαξία, θα ισχύει

$$c^2 dt^2 = \alpha(t)^2 dr^2 \Rightarrow c \int_{t_{\epsilon\kappa\pi}}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} = \int_0^r dr = r,$$

όπου  $t_{\epsilon\kappa\pi}$  ο χρόνος εκπομπής ενός μετώπου κύματος και  $t_0$  ο χρόνος ανίχνευσής του. Το επόμενο μέτωπο κύματος θα εκπεμφθεί το χρόνο

$$t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}$$

και θα ανιχνευθεί σε χρόνο

$$t_0 + \frac{\lambda_0}{c}$$

$$c \int_{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{\alpha(t)} = \int_0^r dr = r.$$

Συγκρίνοντας συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} c \int_{t_{\epsilon\kappa\pi}}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} &= c \int_{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{\alpha(t)} \Rightarrow \int_{t_{\epsilon\kappa\pi}}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} = \int_{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{\alpha(t)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{t_{\epsilon\kappa\pi}}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} + \int_{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}}^{t_0} \frac{dt}{\alpha(t)} &= \int_{t_0}^{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}} \frac{dt}{\alpha(t)} + \int_{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{\alpha(t)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{t_{\epsilon\kappa\pi}}^{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}} \frac{dt}{\alpha(t)} &= \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{\alpha(t)}. \end{aligned}$$

Εξάλλου το  $\alpha(t)$  δεν αλλάζει σημαντικά στη διάρκεια μιας περιόδου, οπότε μπορούμε να το θεωρήσουμε σταθερό και η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{1}{\alpha(t_{\epsilon\kappa\pi})} \int_{t_{\epsilon\kappa\pi}}^{t_{\epsilon\kappa\pi} + \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{c}} dt = \frac{1}{\alpha(t_0)} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} dt \Rightarrow \frac{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{\alpha(t_{\epsilon\kappa\pi})} = \frac{\lambda_0}{\alpha(t_0)}$$

Μια ποσότητα που εμφανίζεται πολύ συχνά σε κοσμολογικές μελέτες είναι η μετατόπιση προς το ερυθρό

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_{\epsilon\kappa\pi}}{\lambda_{\epsilon\kappa\pi}}.$$

Αυτή η ποσότητα συνδέεται με τον παράγοντα κλίμακας βάσει της σχέσης

$$1 + z = \frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t_{\epsilon\kappa\pi})} = \frac{1}{\alpha(t_{\epsilon\kappa\pi})}$$



Για  $w = \frac{1}{3}$  (ακτινοβολία) η ηλικία του σύμπαντος:  $t_0 = \frac{1}{2H_0}$  και συνεπώς

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} = \frac{t_0}{t} \rightarrow t = \frac{t_0}{1+z} = \frac{1}{2(1+z)H_0}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα ενέργειας συναρτήσει του χρόνου αν αντικαταστήσουμε τον παράγοντα κλίμακας που βρήκαμε:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-3(1+w)} = \varepsilon_0 \left[ \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \right]^{-3(1+w)} = \varepsilon_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-2} \Rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left( \frac{t_0}{t} \right)^2$$

Η πυκνότητα ενέργειας που βρήκαμε είναι ανεξάρτητη από το  $w$ . Στην περίπτωση της κρίσιμης πυκνότητας ενέργειας

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\kappa\rho,0} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$$

θα έχουμε

$$\varepsilon(t) = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \frac{t_0^2}{t^2} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \frac{4}{9(1+w)^2 H_0^2} \frac{1}{t^2} = \frac{12c^2}{72\pi G(1+w)^2} \frac{1}{t^2} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{c^2}{6\pi G(1+w)^2} \frac{1}{t^2}$$

Η νουκλεοσύνθεση γίνεται πολύ πρώιμα  $\rightarrow$  περίοδος ακτινοβολίας.

Θερμοκρασία:

$$\varepsilon_\gamma = aT^4$$

$$a = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} \Rightarrow T = \left( \frac{\varepsilon_\gamma}{a} \right)^{1/4} = \left( \frac{\varepsilon_\gamma 15\hbar^3 c^3}{\pi^2 k^4} \right)^{1/4} = \left( \frac{15\hbar^3 c^3}{\pi^2 k^4} \right)^{1/4} \left( \frac{9c^2}{6\pi G 16 t^2} \right)^{1/4} = \left( \frac{135\hbar^3 c^5}{96\pi^3 G k^4} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Η πυκνότητα ενέργειας των φωτονίων δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon(f)df = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \frac{f^3 df}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

$$I(f, T) = \frac{d\varepsilon}{df} = \frac{8\pi\hbar f^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

ενώ η συνολική πυκνότητα ενέργειας ακτινοβολίας μέλανου σώματος

$$\varepsilon_\gamma = aT^4, a = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_0 a^{-4} \Rightarrow aT^4 = \varepsilon_0 a^{-4} \Rightarrow T \left( \frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{1/4} \frac{1}{a} = \left( \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \frac{15\hbar^3 c^3}{\pi^2 k^4} \right)^{1/4} \frac{1}{a} \Rightarrow T = \left( \frac{45c^5 \hbar^3 H_0^2}{8\pi^3 k^4 G} \right)^{1/4} \frac{1}{a} = \left( \frac{45c^5 \hbar^3}{32\pi^3 k^4 G t_0^2} \right)^{1/4} \frac{1}{a}$$

Ορίζω  $X \equiv \frac{hf}{kT} \Rightarrow f = \frac{kTX}{h}$  οπότε

$$\varepsilon_\gamma = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \int_{f=0}^{\infty} \frac{f^3 df}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \int_{X=0}^{\infty} \left( \frac{kT}{h} \right)^4 \frac{X^3 dX}{e^X - 1} = \frac{8\pi\hbar k^4 T^4}{c^3 h^4} \int_{X=0}^{\infty} \frac{X^3 dX}{e^X - 1} = 8\pi \frac{k^4}{c^3 \hbar^3} \frac{\pi T^4}{120} = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3} T^4$$

$$n_\gamma = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \int_{f=0}^{\infty} \frac{f^3 df}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \frac{1}{\hbar f} = \frac{8\pi}{c^3} \int_{f=0}^{\infty} \frac{f^2 df}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} = \frac{8\pi}{c^3} \left( \frac{kT}{h} \right)^3 \int_{X=0}^{\infty} \frac{X^2 dX}{e^X - 1} = 8\pi \frac{k^3}{\hbar^3 c^3} T^3 \int_{X=0}^{\infty} \frac{X^2 dX}{e^X - 1} =$$

$$= \frac{2.404}{\pi^2} \frac{k^3}{\hbar^3 c^3} T^3 = 0.243 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3$$

$$E_{mean} \equiv \frac{\varepsilon_\gamma}{n_\gamma} = \frac{\frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3} T^4}{\frac{2.404 k^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} T^3} = kT \frac{\pi^4}{15 \times 2.404} \approx 2.70kT$$

Αντικαθιστώντας αριθμητικές τιμές:  $T \approx 10^{10} \text{ K} \left( \frac{t}{1\text{s}} \right)^{-1/2} \Leftrightarrow E_{mean} = 2.7kT \approx 3 \text{ MeV} \left( \frac{t}{1\text{s}} \right)^{-1/2}$

## 2.3 Εξίσωση Einstein

Μπορούμε να ξεκινήσουμε εξετάζοντας από φυσική σκοπιά τη βαρυτική έλξη όπως αυτή περιγράφεται στην γενική θεωρία της σχετικότητας. Αυτό το αντικείμενο χωρίζεται φυσικά σε δύο κομμάτια: πως το πεδίο της βαρυτικής έλξης επηρεάζει την συμπεριφορά της ύλης και πως η ύλη καθορίζει το πεδίο της βαρυτικής έλξης.

1. Συμπεριφορά ενός υλικού σημείου υπό την επίδραση βαρυτικού πεδίου.

Στη Νευτώνεια Βαρύτητα έχουμε τη σχέση της επιτάχυνσης ενός σώματος σε ένα βαρυτικό δυναμικό  $\Phi$ .

$$a = -\nabla\Phi.$$

Και τη διαφορική εξίσωση του Poisson για το δυναμικό με όρους την πυκνότητα της ύλης  $\rho$  και τη βαρυτική σταθερά του Newton  $G$ :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho.$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να σκεφτούμε την κίνηση των σωματιδίων σε ελεύθερη πτώση. Στον επίπεδο χώρο αυτά τα σωματίδια κινούνται σε ευθείες γραμμές. Στις εξισώσεις, αυτό εκφράζεται με τον μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου  $x^\mu(\lambda)$ :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$$

Αυτή δεν είναι, σε γενικά πλαίσια, μία ταυσιτική εξίσωση, παρόλο που  $dx^\mu/d\lambda$  είναι συστατικά ενός καλά-ορισμένου διανύσματος, οι συνιστώσες της δεύτερης παραγώγου  $d^2x^\mu/d\lambda^2$  δεν είναι. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας για να γράψουμε

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

Τώρα αντικαθιστούμε τη μερική παράγωγο με τη συναλλοίωτη,  $\nabla_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\rho$

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η κατάλληλη εκδοχή της Νευτώνιας σχέσης για τη  $\Gamma\Theta\Sigma$  είναι απλά η γεωδαιτική εξίσωση

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Γι' αυτό στη γενική σχετικότητα, τα ελεύθερα σωματίδια κινούνται πάνω σε γεωδαιτικές.

Ένα ακόμη πιο ξεκάθαρο παράδειγμα είναι ο νόμος της διατήρησης του ταυστή ενέργειας - ορμής στον επίπεδο χωροχρόνο:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Αντικαθιστώντας πάλι τη μερική με τη συναλλοίωτη παράγωγο μας προκύπτει η κατάλληλη γενίκευση του χωροχρόνου:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Τώρα θα ορίσουμε το Νευτώνιο όριο με τρεις προϋποθέσεις: τα σωματίδια κινούνται αργά (σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός), το βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές (ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή του επίπεδου χώρου), και το πεδίο είναι στατικό (δεν μεταβάλλεται με το χρόνο). Ας δούμε πως επηρεάζουν αυτές οι υποθέσεις την γεωδαιτική εξίσωση. «Κινείται αργά» σημαίνει ότι

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$$

οπότε η γεωδαιτική εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Αφού το πεδίο είναι στατικό ( $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ ), τα σχετικά σύμβολα Christoffel  $\Gamma_{00}^\mu$  γίνονται :

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00}$$

Τέλος, η ασθένεια του βαρυτικού πεδίου μας επιτρέπει να αποσυνθέσουμε την μετρική σε μία Minkowski συν μια μικρή διαταραχή:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Οπότε βρίσκουμε

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00}$$

Η γεωδαιτική εξίσωση είναι λοιπόν

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

Χρησιμοποιώντας  $\partial_0 h_{00} = 0$  το  $\mu = 0$  οπότε

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

Άρα το  $dt/d\tau$  είναι σταθερά, και γράφουμε τη γεωδαισιακή με τη μορφή του  $\eta_{\mu\nu}$  ως  $3 \times 3$  πίνακα

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\partial_i h_{00}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με  $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$  έχει σαν αποτέλεσμα τη μετατροπή της αριστερής μεριάς από  $\tau$  σε  $t$  αφήνοντάς μας με

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}$$

Δηλαδή προκύπτει πως

$$h_{00} = -2\Phi$$

2. Πως η ύλη καθορίζει το βαρυτικό πεδίο Τώρα πάμε στον ταυυστή του Riemann,  $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ , ο οποίος κατασκευάζεται από τα σύμβολα Christoffel και τις πρώτες παραγώγους τους, ενώ τα σύμβολα Christoffel κατασκευάζονται από τη μετρική  $g_{\mu\nu}$  και τις πρώτες παραγώγους της, οπότε ο ταυυστής του Riemann  $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$  περιέχει δεύτερες παραγώγους της  $g_{\mu\nu}$ . Οι εξισώσεις του βαρυτικού πεδίου θα είναι :

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, (1)$$

για κάποια σταθερά  $\kappa$ . Όμως υπάρχει πρόβλημα με τη διατήρηση της ενέργειας γιατί αν θέλουμε

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0,$$

θα πρέπει

$$\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = 0.$$

όμως από την ταυτότητα Bianchi ισχύει

$$\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R.$$

Αλλά από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι  $R = \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \kappa T$  οπότε αν συνδυάσουμε τα παραπάνω θα έχουμε

$$\nabla_{\mu}R = 0 \Rightarrow \nabla_{\mu}(\kappa T) = 0 \Rightarrow \nabla_{\mu}T = 0.$$

η οποία μας λέει πως ο  $T$  είναι σταθερός στο χωροχρόνο, που δεν ισχύει αφού  $T=0$  στο κενό και  $T \neq 0$  όταν υπάρχει ύλη. Οπότε θα πάμε στον ταυυστή Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu},$$

για τον οποίο ισχύει πάντα  $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$ , οπότε θα πάρουμε ως εξίσωση πεδίου για την μετρική την σχέση

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Η οποία στις 4 διαστάσεις μπορεί να γίνει

$$g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = \kappa T \Rightarrow R - \frac{1}{2} R \cdot 4 = \kappa T \Rightarrow R = -\kappa T,$$

οπότε να γραφτεί

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (-\kappa T) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (2)$$

Τώρα αν θεωρήσουμε ένα τέλειο ρευστό για το οποίο ισχύει

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu},$$

όμως στο Νευτώνειο όριο μπορούμε να αγνοήσουμε την πίεση οπότε μας μένει

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu$$

όπου  $U^\mu = (U^0, 0, 0, 0)$  και  $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$  από τη συνθήκη κανονικοποίησης. Στο όριο του ασθενούς πεδίου ισχύει

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -1 + h_{00},$$

$$g^{00} = -1 - h_{00}$$

και

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1 \Rightarrow g_{00} (U^0)^2 = -1 \Rightarrow U_0 = (1 - h_{00})^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} h_{00}.$$

Προσεγγιστικά μπορούμε να πάρουμε  $U^0 = 1$  και αντίστοιχα  $U_0 = -1$ . Τότε

$$T_{00} = \rho$$

Για  $\mu = 0, \nu = 0$  το ίχνος του πίνακα θα είναι

$$T = g^{00} T_{00} = -T_{00} = -\rho.$$

και η (2) θα γίνει

$$R_{00} = \kappa \left( \rho - \frac{1}{2} (-\rho) (-1) \right) = \frac{1}{2} \kappa \rho$$

δηλαδή προκύπτει μια σχέση που συνδέει τις παραγώγους της μετρικής με την πυκνότητα ενέργειας. Για να υπολογίσουμε το  $R_{00}$  χρειαζόμαστε το

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{j0}^i + \Gamma_{j\lambda}^i \Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{j0}^\lambda$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε το δεύτερο όρο γιατί είναι παράγωγος του χρόνου που σε στατικά πεδία είναι μηδέν καθώς και τον τρίτο και τέταρτο όρο γιατί είναι της μορφής  $(\Gamma)^2$  ώστε να καταλήξουμε στο  $R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i$  από το οποίο παίρνουμε

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \partial_i \left[ \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} + \partial_\lambda g_{00}) \right] = -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$$

και καταλήγουμε

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa \rho$$

Προηγουμένως είχαμε δείξει ότι  $h_{00} = -2\Phi$  οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση Poisson για  $\kappa = 8\pi G$ . Συνεπώς καταλήγουμε στην εξίσωση της Γενικής Σχετικότητας του Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

καθώς και στην εναλλακτική μορφή της

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

Ενώ στο κενό όπου  $T_{\mu\nu} = 0$  η εξίσωση του Einstein γίνεται

$$R_{\mu\nu} = 0$$

## 2.4 Εξισώσεις Friedmann

Η εξίσωση Friedmann είναι η κεντρική εξίσωση της Κοσμολογίας και για την απόδειξή της χρειάζεται ο πλήρης φορμαλισμός της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Βέβαια, μπορεί κανείς να δει πολλά χαρακτηριστικά της εξίσωσης χρησιμοποιώντας απλή Κλασική μηχανική. Θεωρούμε σφαιρικό κέλυφος ακτίνας  $R_\sigma(t)$  που περικλείει ομοιόμορφη κατανομή μάζας με πυκνότητα  $\rho(t)$  και συνολική μάζα

$$M_\sigma = \frac{4}{3}\pi R_\sigma(t)^3 \rho(t)$$

Θεωρούμε ότι η συνολική μάζα της κατανομής  $M_\sigma$  είναι σταθερή με το χρόνο, παρά το γεγονός ότι η ακτίνα  $R_\sigma(t)$  και η πυκνότητα  $\rho(t)$  εξαρτώνται από το χρόνο. Θεωρούμε τώρα (μικρή) μάζα  $m$  στην επιφάνεια της σφαίρας. Η ενέργεια της θα ισούται με το άθροισμα της κινητικής

$$E_\kappa = \frac{1}{2}m\left(\frac{dR_\sigma}{dt}\right)^2$$

και της δυναμικής ενέργειας

$$E_\delta = -\frac{GM_\sigma m}{R_\sigma}$$

δηλαδή :

$$E \equiv mc^2 = E_\kappa + E_\delta$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε την ακτίνα της σφαίρας με τη μορφή

$$R_\sigma(t) = r_\sigma \alpha(t)$$

όπου το  $\alpha(t)$  είναι ο αδιάστατος τελεστής κλίμακας που θα μας απασχολήσει ως επί το πλείστον στη συνέχεια και το ονομάζεται ομοκινούμενη συντεταγμένη. Τότε

$$E_\kappa = \frac{1}{2}mr_\sigma^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

και

$$E_\delta = -\frac{Gm}{r_\sigma \alpha(t)} M_\sigma = -\frac{Gm}{r_\sigma \alpha(t)} \frac{4}{3}\pi (r_\sigma \alpha(t))^3 \rho(t) = -\frac{4G\pi m}{3} r_\sigma^2 \alpha(t)^2 \rho(t),$$

οπότε

$$E = mc^2 = \frac{1}{2}mr_\sigma^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{4\pi Gm}{3} r_\sigma^2 \alpha(t)^2 \rho(t),$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2}r_\sigma^2 \dot{\alpha}^2 = +\frac{4\pi G}{3} r_\sigma^2 \alpha(t)^2 \rho(t) + c^2$$

που τελικά δίνει την εξίσωση του Friedmann στη Νευτώνεια μορφή της :

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{2c^2}{r_\sigma^2} \frac{1}{\alpha^2}.$$

Η εξίσωση αυτή συνεπάγεται τις

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 &= \frac{2GM_\sigma}{r_\sigma^3 \alpha^3} + \frac{2c^2}{r_\sigma^2} \frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \frac{2GM_\sigma}{r_\sigma^3 \alpha} + \frac{2c^2}{r_\sigma^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -\frac{2GM_\sigma}{r_\sigma^3 \alpha^2} \dot{\alpha} \Rightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{GM_\sigma}{r_\sigma^3 \alpha^2} < 0 \end{aligned}$$

Η εξέλιξη του σύμπαντος σύμφωνα με αυτό το πρότυπο εξαρτάται από το πρόσημο της ποσότητας  $c^2$ . Αν  $c^2 > 0$ , το δεξιό μέλος της εξίσωσης του Friedmann στη Νευτώνεια μορφή θα είναι υποχρεωτικά θετικό, οπότε, αν το σύμπαν

διαστέλλεται σε μια χρονική στιγμή θα διαστέλλεται για πάντα. Αν  $c^2 < 0$ , και το σύμπαν αρχίσει στη φάση της διαστολής, όταν το  $\alpha(t)$  φτάσει την τιμή όπου το δεξιό μέλος της εξίσωσης μηδενίζεται δηλαδή όταν

$$\alpha^2 = -\frac{3c^2}{4\pi G\rho(t)r_\sigma^2} = -\frac{3c^2}{4\pi G\frac{M_\sigma}{\frac{4}{3}\pi R_\sigma(t)^3}r_\sigma^2} = -\frac{c^2 r_\sigma \alpha^3}{GM_\sigma} \Rightarrow \alpha = -\frac{GM_\sigma}{c^2 r_\sigma},$$

η εξέλιξη θα αντιστραφεί και το  $\alpha$  θα αρχίσει να μειώνεται (όπως δείξαμε προηγουμένως  $\ddot{\alpha} < 0$ ). Είναι ένα φαινόμενο εντελώς αντίστοιχο με την κίνηση αντικειμένου που εκτοξεύεται προς τα πάνω, επιβραδύνεται, σταματάει και στη συνέχεια χάνει ύψος.

Η σωστή μορφή της εξίσωσης του Friedmann, όπως προκύπτει από τη θεωρία της σχετικότητας είναι η

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\Lambda}{3}.$$

Ξεκινάμε από την εξίσωση Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

όπου

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu},$$

και η μετρική :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Για τα σύμβολα Christoffel έχουμε τον εξής τύπο :

$$\Gamma_{ji}^\ell = \frac{1}{2}g^{\ell m}(\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij})$$

Λόγω της μορφής του  $g_{\mu\nu}$  όλοι οι όροι όπου  $\mu \neq \nu$  είναι 0 και άρα το ίδιο μπορεί να επεκταθεί και στα σύμβολα. Όποια σύμβολα δεν έχουν τουλάχιστον δύο δείκτες ίδιους είναι 0, οπότε προκύπτουν μετά από πράξεις τα παρακάτω:

$$\Gamma_{rr}^t = a\dot{a},$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = r^2 a\dot{a},$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma_{rr}^r = 0,$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r,$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{\tan \theta}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τους τανυστές Riemann μέσω του τύπου:

$$R_{kji}^\ell = \partial_i \Gamma_{kj}^\ell - \partial_j \bar{\Gamma}_{ki}^\ell + \Gamma_{kj}^m \Gamma_{mi}^\ell - \Gamma_{ki}^m \Gamma_{mj}^\ell$$

$$R_{ij} \equiv R_{imj}^m$$

$$R_{tt} = R_{tmt}^m = R_{trt}^r + R_{t\theta t}^\theta + R_{t\phi t}^\phi = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{rr} = R_{rmr}^m = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$$

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta m\theta}^m = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\phi m\phi}^m = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)$$

Συνοψίζοντας

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)$$

Τέλος, το βαθμωτό Ricci θα είναι

$$R = g^{ik} R_{ik} = -\frac{6\ddot{a}}{a} - 6 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$$

$$u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = c^2 = 1 \rightarrow u^t = 1 \Rightarrow T_{tt} = \rho g_{tt}, T_{ii} = -p g_{ii}$$

$$R_{tt} - \frac{1}{2} R g_{tt} - \Lambda g_{tt} = 8\pi G \rho u_t u_t$$

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3\ddot{a}}{a} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \Lambda = 8\pi G \rho(t)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1)$$

$$R_{ii} - \frac{1}{2} R g_{ii} - \Lambda g_{ii} = 8\pi G (-p) g_{ii}$$

$$-\frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \frac{1}{2} R g_{ii} - \Lambda g_{ii} = 8\pi G (-p) g_{ii}$$

Άρα

$$-\frac{\ddot{a}}{a} - 2 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \Lambda = -8\pi G p$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G p + \frac{\Lambda}{2} \quad (2)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε το  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$  μεταξύ των (1) και (2) οπότε προκύπτει

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

Θα σχολιάσουμε σύντομα τις διαφορές των δύο εξισώσεων. Κατ' αρχάς η πυκνότητα μάζας  $\rho(t)$  έχει αντικατασταθεί με την πυκνότητα ενέργειας  $\epsilon(t)$  (διαιρεμένη φυσικά με  $c^2$ ). Φυσικά, αν το σύμπαν περιέχει σωματίδια με μάζα  $m$ , η ενέργεια του καθενός θα είναι

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2},$$

η οποία, για μικρές ταχύτητες, προσεγγίζεται από την

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

άρα σε αυτό το όριο η πυκνότητα μάζας είναι μια καλή προσέγγιση για την πυκνότητα ενέργειας και αποκαθίσταται επαφή με την πρώτη εξίσωση. Η δεύτερη αλλαγή έχει να κάνει με την αντικατάσταση  $\frac{2\varepsilon}{r^2} \frac{1}{\alpha^2} \rightarrow -\frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{\alpha^2}$ . Το σημαντικό είναι ότι η καμπυλότητα  $\frac{\kappa}{R_0^2}$  στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας συνδέεται με την ενέργεια ανά μονάδα μάζας,  $\varepsilon$ , ενός δοκιμαστικού σωματιδίου. Ειδικότερα, το  $\varepsilon > 0$  αντιστοιχεί σε αρνητική χωρική καμπυλότητα, το  $\varepsilon < 0$  σε θετική, ενώ το  $\varepsilon = 0$  σχετίζεται με τον επίπεδο χώρο. Η τρίτη αλλαγή σχετίζεται, με την εισαγωγή του όρου της κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda$ . Θα ασχοληθούμε αρκετά με αυτό τον όρο στη συνέχεια. Εδώ απλά θα αναφέρουμε ότι εισήχθη από τον Einstein στην προσπάθειά του να εξαναγκάσει τη θεωρία του να προβλέψει το στατικό σύμπαν που ήταν η προκατάληψη των επιστημόνων της εποχής. Για να γίνει κάπως κατανοητή η λογική με την οποία εισήχθη ο όρος, ας υποθέσουμε ότι το  $\epsilon(t)$  μεταβάλλεται σαν  $\frac{1}{\alpha^3}$  (όπως το  $\rho(t)$  σε προηγούμενο ανάλογο υπολογισμό), συνεπώς η εξίσωση του Friedmann μπορεί να γραφτεί στη μορφή ( το  $A$  είναι θετική σταθερά):

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{A}{\alpha^3} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \frac{A}{\alpha(t)} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda \alpha^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -\frac{A}{\alpha^2}\dot{\alpha} + \frac{2\Lambda\alpha\dot{\alpha}}{3} \Rightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{A}{2\alpha^2} + \frac{\Lambda\alpha}{3}.$$

Από την τελευταία εξίσωση είναι προφανές ότι αναδύεται η δυνατότητα να έχει κανείς, για συγκεκριμένη τιμή του  $\alpha$ , ένα σύμπαν που μπορεί να είναι στατικό. Είναι εμφανής ο μηχανισμός με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτό: εκτός από τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους που οφείλεται στη βαρύτητα, εισάγεται ένα δεύτερος όρος (της κοσμολογικής σταθεράς) που έχει αντίθετο πρόσημο από τον πρώτο. Η καινοτομία φαίνεται ανάγλυφα αν κανείς με τη δεύτερη μορφή της εξίσωσης του Friedmann. Αφού η βαρύτητα είναι πάντα ελκτική, ο δεύτερος όρος θα μπορούσε υπό κάποιαν έννοια να περιγραφεί ως αντιβαρύτητα, δηλαδή ως περιγραφή μιας δύναμης άπωσης που αντισταθμίζει τη βαρυτική έλξη. Παρατηρούμε τέλος ότι αυτός ο όρος δεν σχετίζεται στενά με τη θεωρία της σχετικότητας. Θα μπορούσε να τον εισαγάγει κανείς και στη Νευτώνεια περιγραφή. Απλά η ιστορική εξέλιξη ήταν τέτοια που ο όρος εισήχθη σε σχετικιστικό πλαίσιο.

Παρατηρήσεις:

(1) Ας θεωρήσουμε ότι η κοσμολογική σταθερά είναι μηδέν. Τότε η εξίσωση του Friedmann για τη σημερινή εποχή (που συμβολίζεται με το δείκτη 0) γράφεται :

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $\alpha(t_0) = 1$ , όπου είναι η σημερινή χρονική στιγμή, δηλαδή ο χρόνος που έχει περάσει από τη δημιουργία του σύμπαντος. Αυτή η εξίσωση συσχετίζει την καμπυλότητα, τη σταθερά του Hubble και την πυκνότητα ενέργειας.

(2) Γενικότερα η εξίσωση του Friedmann (πάντα με μηδενική κοσμολογική σταθερά) γράφεται:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{\alpha(t)^2}.$$

Για χωρικά επίπεδο σύμπαν και δοσμένη σταθερά του Hubble παρατηρούμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη πυκνότητα ενέργειας η

$$\epsilon_{\kappa\rho}(t) = \frac{3c^2 H(t)^2}{8\pi G}.$$

Αν η πυκνότητα ενέργειας είναι μεγαλύτερη από αυτή την τιμή, το σύμπαν θα έχει θετική καμπυλότητα, αλλιώς αρνητική. Η κρίσιμη πυκνότητα ενέργειας χρησιμοποιείται γενικά : αντί για αυτήν χρησιμοποιείται ευρύτητα η

$$\Omega(t) = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{\kappa\rho}}(t),$$

που λέγεται παράμετρος πυκνότητας.

(3) Η εξίσωση του Friedmann (πάντα με μηδενική κοσμολογική σταθερά) γράφεται εναλλακτικά με τη μορφή :

$$1 = \frac{8\pi G}{3c^2 H(t)^2} \epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 H(t)^2} \frac{1}{\alpha(t)^2} \Rightarrow 1 = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{\kappa\rho}(t)} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 H(t)^2} \frac{1}{\alpha(t)^2} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H(t)^2} \frac{1}{\alpha(t)^2}.$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι το δεξιό μέλος έχει ένα συγκεκριμένο πρόσημο κατά την εξέλιξη του σύμπαντος, άρα και το πρόσημο του αριστερού μέλους είναι καθορισμένο. Αν το σύμπαν ξεκινήσει με  $\Omega(t) > 1$ , ή  $\Omega(t) = 1$ , ή  $\Omega(t) < 1$ , αυτές οι ανισότητες θα διατηρηθούν ως έχουν καθ' όλη τη διάρκεια της εξέλιξης του σύμπαντος. Για τη σημερινή εποχή :

$$1 - \Omega_0 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2}$$

Μια σχέση που πρωτοεμφανίστηκε με ελαφρά διαφορετική διατύπωση στην παρατήρηση(1). Υδροδυναμική εξίσωση και εξίσωση επιτάχυνσης Η εξίσωση του Friedmann, ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι η κοσμολογική σταθερά είναι γνωστή (έστω μηδέν, για απλότητα), δεν μπορεί να λυθεί, γιατί περιλαμβάνει δύο άγνωστες συναρτήσεις τις  $\alpha(t)$  και  $\epsilon(t)$  Χρειαζόμαστε κι άλλες εξισώσεις. Ένα πρώτο βήμα προέρχεται από τη διατήρηση της ενέργειας. Υπενθυμίζουμε το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα :

$$dQ = dE + PdV = 0.$$

Όταν μιλάμε για ένα τελείως ομογενές σύμπαν, η διαστολή του θα είναι μια αδιαβατική διαδικασία, δηλαδή  $dQ = 0$  και η εξίσωση  $dE + PdV = 0$  γράφεται πιο βολικά:  $\dot{E} + p\dot{V} = 0$  όπου οι τελείες συμβολίζουν παραγωγίσεις ως προς τον χρόνο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις προφανείς σχέσεις

$$E(t) = V(t)\epsilon(t) \Rightarrow \dot{E} = V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon,$$

και

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r_\sigma^3 \alpha^3 \Rightarrow \dot{V} = 4\pi r_\sigma^3 \alpha^2 \dot{\alpha}$$

και βρίσκουμε :

$$V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon + P\dot{V} = 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\pi r_\sigma^3 \alpha^3\right) \dot{\epsilon} + (4\pi r_\sigma^3 \alpha^2 \dot{\alpha}) = 0 \Rightarrow$$

$$V \left( \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\epsilon + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}P \right) = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\epsilon + P) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι η δεύτερη ( η υδροδυναμική) βασική εξίσωση της Κοσμολογίας. Συνδέει τις δύο άγνωστες συναρτήσεις και αλλά εισάγει μια καινούρια άγνωστη συνάρτηση την  $\rho$ , συνεπώς εξακολουθούμε να βρισκόμαστε σε αδυναμία λύσης των εξισώσεων. Για να συμπληρώσουμε το σύνολο, πρέπει να έχουμε μια ακόμα σχέση, μεταξύ των  $\epsilon$  και  $f$  ώστε να είμαστε πλήρεις. Με αυτή τη σχέση, που λέγεται κατασταστική εξίσωση, θα ασχοληθούμε αναλυτικότερα στη συνέχεια. Προς το παρόν θα κάνουμε μια παρατήρηση. Γράφουμε την εξίσωση του Friedmann υπό τη μορφή:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon\alpha^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda\alpha^2}{3}$$

και παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο :

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\dot{\epsilon}\alpha^2 + 2\epsilon\alpha\dot{\alpha}) + \frac{2\Lambda\alpha\dot{\alpha}}{3} \Rightarrow \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}\frac{\alpha}{\dot{\alpha}} + 2\epsilon\right) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Η εξίσωση μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το  $\dot{\epsilon}\frac{\alpha}{\dot{\alpha}}$  με το  $-3(\epsilon + P)$  για να καταλήξουμε στην εξίσωση επιτάχυνσης

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Σημειώνουμε ότι για θετικά  $\epsilon + P$  η επιτάχυνση είναι αρνητική, που σημαίνει ότι η ενέργεια του περιεχομένου του σύμπαντος επιβραδύνει τη διαστολή του, ένα πράγμα αρκετά σύμφωνο με την διαίσθηση. Επίσης, για συνηθισμένες μορφές ύλης ή ενέργειας, η πίεση είναι πάντα θετική. Πάντως η κοσμολογική σταθερά έχει αρνητική πίεση, η οποία ενδεχομένως να αντιστρέψει το πρόσημο στο δεξιό μέλος της εξίσωσης και να δημιουργήσει επιτάχυνση. Αυτό συμφωνεί με όσα λέγαμε προηγουμένως περί απωστικού χαρακτήρα του όρου της κοσμολογικής σταθεράς. Σημειώνουμε τέλος το προφανές ότι από τις τρεις βασικές εξισώσεις μόνο οι δύο είναι οι ανεξάρτητες.

## 2.5 Καταστατικές Εξισώσεις

Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως, μας χρειάζεται μια σχέση  $P = P(\epsilon)$  που λέγεται καταστατική εξίσωση για να λύσουμε πλήρως τις κοσμολογικές εξισώσεις. Στην κοσμολογία οι καταστατικές εξισώσεις παίρνουν μια πολύ απλή μορφή, την

$$P = w\epsilon,$$

Όπου το  $w$  είναι αδιάστατος αριθμός. Αυτό οφείλεται στο ότι η κοσμολογία ασχολείται με πολύ αραιά αέρια. Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\epsilon(1+3w) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Για να αποκτήσουμε επαφή με γνωστά πράγματα, θα θεωρήσουμε το ιδανικό μη σχετικιστικό αέριο που υπακούει την πολύ γνωστή καταστατική εξίσωση των αερίων:

$$P = \frac{\rho}{\mu}kT$$

( $\mu$  είναι η μάζα των μορίων του αερίου). Η πυκνότητα ενέργειας θα οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στη μάζα, αφού το αέριο είναι μη σχετικιστικό. Δηλαδή

$$\epsilon \approx \rho c^2$$

οπότε

$$P = \frac{kT}{\mu c^2}\epsilon.$$

Όμως, για μη σχετικιστικό αέριο, είναι γνωστό ότι ισχύει : οπότε

$$P \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2}\epsilon$$

δηλαδή

$$P = w\epsilon$$

όπου

$$w \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \ll 1,$$

ένας αριθμός πολύ μικρότερος της μονάδας, αφού οι ταχύτητες είναι μη σχετικιστικές. Αν οι ταχύτητες είναι σχετικιστικές (επί παραδείγματι, αέριο φωτονίων), μπορούμε να υπολογίζουμε την πίεση ως εξής

$$P = \sum_r \bar{n}_r \left(-\frac{\partial \epsilon_r}{\partial V}\right),$$

όπου

$$\epsilon_r = \hbar\omega = \hbar ck = \hbar c \frac{2\pi}{L} |\bar{n}_r|, r$$

συμβολίζει τις κβαντικές καταστάσεις,  $L$  είναι μια τυπική γραμμική διάσταση του δοχείου που περικλείει το αέριο και το ουσιώδες είναι ότι η εξάρτηση από τις χωρικές διαστάσεις είναι αντίστροφη του  $L$

$$\epsilon_r \propto \frac{1}{L} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{K}{V^{1/3}} \Rightarrow \frac{\partial \epsilon_r}{\partial V} = -\frac{1}{3} \frac{K}{V^{4/3}} = -\frac{1}{3} \frac{\epsilon_r}{V}.$$

Άρα

$$P = \sum_r \bar{n}_r \left(\frac{1}{3} \frac{\epsilon_r}{V}\right) = \frac{1}{3V} \sum_r \bar{n}_r \epsilon_r = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \frac{1}{3} \epsilon.$$

Φαίνεται λοιπόν ότι για μη σχετικιστική ύλη θα έχουμε  $w = 0$  για σχετικιστική ύλη θα έχουμε  $w = \frac{1}{3}$ , και για τις ενδιάμεσες καταστάσεις θα έχουμε τιμές του μεταξύ αυτών των δύο. Ενδιαφέρουσες είναι οι τιμές  $w < -\frac{1}{3}$ , γιατί μπορεί να δώσουν θετική επιτάχυνση σύμφωνα με την εξίσωση. Τέτοιου είδους περιεχόμενο του σύμπαντος

χαρακτηρίζεται ως σκοτεινή ενέργεια. Μια μορφή σκοτεινής ενέργειας είναι και η κοσμολογική σταθερά για την οποία ισχύει  $P = -\epsilon$ , ή ισοδύναμα  $w = -1$ . Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι η εξίσωση του Friedmann

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

μπορεί να γραφτεί και υπό τη μορφή

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left( \epsilon(t) + \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} (\epsilon(t) + \epsilon_\Lambda) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{\alpha^2},$$

όπου  $\epsilon_\Lambda \equiv \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}$ . Η έκφραση για την  $\epsilon_\Lambda$  δείχνει ότι αυτή μένει σταθερή (αν το  $\Lambda$  δεν αλλάξει) και η υδροδυναμική εξίσωση

$$\dot{\epsilon}_\Lambda + 3 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} (\epsilon_\Lambda + P_\Lambda) = 0$$

υπαγορεύει με τη σειρά της ότι πρέπει  $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$ . Δηλαδή η κοσμολογική σταθερά έχει σταθερή πυκνότητα ενέργειας  $\epsilon_\Lambda$  και σταθερή πίεση  $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$ . Ας διερευνήσουμε τώρα σύντομα τη συνθήκη για ένα στατικό σύμπαν ( $\dot{\alpha} = 0, \ddot{\alpha} = 0$ ), που περιέχει μόνο μη σχετικιστική ύλη ( $w = 0$ ) όπως ήταν το πρότυπο που είχε υπόψη του ο Einstein. Η εξίσωση της επιτάχυνσης για  $\ddot{\alpha} = 0$  δίνει  $\Lambda = 4\pi G\rho$ . Εξ άλλου η εξίσωση του Friedmann για  $\dot{\alpha} = 0$  δίνει

$$\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} = 0 \Rightarrow 4\pi G\rho - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} = 0,$$

$$\kappa = +1, R_0 = \frac{c}{2\sqrt{\pi G\rho}} = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}.$$

Είναι βέβαια μια λύση, είναι όμως ασταθής. Βοήθησε ιστορικά στη λύση του παραδόξου όπου η γη προέτυπε αρχαιότερη από το σύμπαν συμβάλλοντας στην αύξηση της υπολογιζόμενης ηλικίας του σύμπαντος.

## 2.6 Χρονοδιάγραμμα Γέννησης Σύμπαντος

Το σύμπαν γεννήθηκε 13,7 εκατομμύρια χρόνια πριν, όταν συνέβη το Big-Bang ένα εξαιρετικά ακραίο συμβάν το οποίο δεν έχουμε κατανοήσει μέχρι και σήμερα πλήρως. Εδώ θα δούμε εν συντομία την ιστορία του σύμπαντος. Η ιστορία απεικονίζεται με τη θερμοκίνη αλλαγή. Το σύμπαν μας προέκυψε από μία πρωτόγονη μπάλα φωτιάς που λέγεται Big-Bang. Αμέσως μετά από αυτή τη μεγάλη έκρηξη ( $t = 10^{-43} \text{ sec}$ ), η θερμοκρασία,  $T$ , του σύμπαντος ήταν πολύ υψηλή. Μετά από την έκρηξη, η θερμοκρασία μειώνεται και επιβραδύνεται η διαστολή του σύμπαντος. Η περίοδος ανάμεσα στην αρχή του χρόνου ( $t = 0$ ) και το ένα δευτερόλεπτο μετά από την έκρηξη αναφέρεται πολύ συχνά ως «Πολύ Πρώιμο Σύμπαν» και χωρίζεται στις παρακάτω εποχές:

### A) ΕΠΟΧΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

A1) **Εποχή Planck**  $t = 0 \text{ s} \rightarrow 10^{-43} \text{ s}$  με  $T = \infty \rightarrow 10^{32} \text{ K}$  και  $\rho = \infty \rightarrow 10^{95} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Εποχή Planck είναι η εποχή την οποία δεν έχουν κατανοήσει οι επιστήμονες και η οποία βρίσκεται πιο κοντά από οποιαδήποτε άλλη στο Big-Bang. Το σύμπαν θεωρείται υπερβολικά καυτό και πυκνό. Όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις θεωρούνται ενοποιημένες ενώ στο σύμπαν θεωρείται πως κυριαρχεί η κβαντική βαρύτητα.

A2) **Εποχή Μεγάλης Ενοποίησης**  $t = 10^{-43} \text{ s} \rightarrow 10^{-35} \text{ s}$  με  $T = 10^{32} \text{ K} \rightarrow 10^{27} \text{ K}$  και  $\rho = 10^{95} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \rightarrow 10^{75} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Ένα αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας λαμβάνει χώρα, το οποίο σπάει τη μεγάλη ενοποιημένη θεωρία ( $GUT$ ), αν αυτή ισχύει. Η βαρύτητα διαχωρίζεται από τις ενοποιημένες ισχυρές, ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Έχουμε λοιπόν το σπάσιμο της συμμετρίας και έχουμε μια δραματική αύξηση της διαστολής του σύμπαντος. Τα σωματίδια του καθιερωμένου μοντέλου ( $SM$ ) εμφανίζονται σε αυτό το χρονικό διάστημα.

A3) **Εποχή Quarks**  $t = 10^{-35} \text{ s} \rightarrow 10^{-4} \text{ s}$  με  $T = 10^{27} \text{ K} \rightarrow 10^{16} \text{ K}$  και  $\rho = 10^{75} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \rightarrow 10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Η ισχυρή αλληλεπίδραση διαχωρίζεται, παγώνει. Η ηλεκτρασθενής διαχωρίζεται στους  $10^{10}$  και παραβιάζεται. Τα βαριά και τα ελαφριά σωματίδια βρίσκονται σε θερμοκή ισορροπία. Τα σωματίδια παράγουν μάζα. Αυτή η εποχή χωρίζεται σε μικρότερες περιόδους ως εξής

I) **Ηλεκτρασθενής Εποχή**  $t = 10^{-36} \text{ s} \rightarrow 10^{-32} \text{ s}$  με  $T \sim (10^{16} - 10^{14}) \text{ GeV}$

Η θερμοκρασία είναι αρκετά χαμηλή ώστε να επιτραπεί ο διαχωρισμός της ισχυρής με την ηλεκτρασθενή δύναμη. Σε αυτή την εποχή συμβαίνει ο Πληθωρισμός και η Βαρυογένεση.

II) **Πληθωρισμός**  $t \rightarrow 10^{-32} \text{ s}$  Ο πληθωρισμός είναι μια εποχή στην οποία, πολύ νωρίς στην ιστορία του σύμπαντος μας, η διαστολή του επιταχυνόταν προς τα έξω. Αυτή είναι μια εποχή στην οποία ίσχυε  $\ddot{a} > 0$ . Η εξίσωση επιτάχυνσης  $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P)$  μας λέει ότι  $\ddot{a} > 0$  όταν  $P < -\epsilon/3$ . Ωστόσο ο πληθωρισμός θα συνέβαινε αν το σύμπαν ήταν προσωρινά κυριαρχούμενο από μια συνιστώσα με την παράμετρο της καταστατικής εξίσωσης  $w < -1/3$ . Η συνήθης εφαρμογή του πληθωρισμού μας δηλώνει ότι το σύμπαν ήταν προσωρινά κυριαρχούμενο από μία θετική κοσμολογική σταθερά  $\Lambda_i (w = -1)$  και είχε μία εξίσωση επιτάχυνσης που θα μπορούσε να γραφτεί στη μορφή  $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0$ . Σε μία πληθωριστική φάση όταν η πυκνότητα ενέργειας ήταν κυριαρχούμενη από μία κοσμολογική σταθερά, η εξίσωση *Friedmann* ήταν  $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{\Lambda_i}{3}$ . Η σταθερά *Hubble* κατά τη διάρκεια της πληθωριστικής φάσης ήταν σταθερά με τιμή  $H_i = (\Lambda_i/3)^{1/2}$  και ο παράγοντας κλίμακας αυξανόταν εκθετικά με το χρόνο  $a(t) \propto e^{H_i t}$ .

III) **Εποχή Διαχωρισμού Ασθενούς και Ηλεκτρομαγνητικής Δύναμης**  $t = 10^{-12} \text{ s} \rightarrow 10^{-6} \text{ s}$  με  $T \sim 300 \text{ GeV}$

Το σύμπαν είναι γεμάτο από ένα πυκνό και καυτό πλάσμα το οποίο περιέχει κουάρκ, λεπτόνια και τα αντισωματίδιά τους που σχηματίζουν μεσόνια και βαρυόνια. Οι δύο τελευταίες θεμελιώδεις δυνάμεις διαχωρίζονται με αποτέλεσμα τις τέσσερις ξεχωριστές δυνάμεις που παρατηρούνται σήμερα.

#### IV) Εποχή Αδρονίων $t = 10^{-5}s \rightarrow 1s$ με $T \sim 100MeV$

Σε αυτή την εποχή κυριαρχούν τα αδρόνια, το σύμπαν έχει διασταλεί αρκετά και η θερμοκρασία είναι κατάλληλη για το σχηματισμό πρωτονίων και νετρονίων από τα κουάρκς.

#### A4) Εποχή Λεπτονίων $t = 10^{-4}s \rightarrow 10^2s$ με $T = 10^{12}K \rightarrow 10^9K$

Σε αυτή την εποχή κυριαρχούν τα λεπτόνια. Μόνο τα σωματίδια με μικρή μάζα βρίσκονται ακόμα σε θερμική ισορροπία, τα νετρίνα διαχωρίζονται στα  $10^{10}K$ .

#### A5) Νουκλεοσύνθεση $t = 10^2s \rightarrow 5 \times 10^4 years (2 \times 10^{12}s)$ και $T = 10^9K \rightarrow 16000K$ με $\rho = 10^4 \frac{kg}{m^3} \rightarrow 6 \times 10^{-16} \frac{kg}{m^3}$

Πρωτόνια και νετρόνια αρχίζουν να συνδέονται σχηματίζοντας πυρήνες ατόμων. Τα ελεύθερα νετρόνια συνδέονται με τα πρωτόνια και σχηματίζουν το δευτέριο. Το δευτέριο πολύ γρήγορα μετασχηματίζεται σε ήλιο-4. Η νουκλεοσύνθεση διαρκεί 17 λεπτά γιατί η θερμοκρασία και η πυκνότητα του σύμπαντος δεν της επιτρέπουν να συνεχιστεί. Μέχρι το τέλος της νουκλεοσύνθεσης όλα τα νετρόνια έχουν ενταχθεί σε πυρήνες ηλίου. Αυτό μας αφήνει 3 φορές περισσότερο υδρογόνο από ήλιο και ίχνη από ελαφρύτερους πυρήνες.

### B) ΕΠΟΧΗ ΥΛΗΣ

#### B1) Άτομα $t = 5 \times 10^4 years (2 \times 10^{12}s) \rightarrow 2 \times 10^8 years (6 \times 10^{15}s)$ και $T = 16.000K \rightarrow 60K$ με $\rho = 6 \times 10^{-16} \frac{kg}{m^3} \rightarrow 10^{-22} \frac{kg}{m^3}$

Η ύλη αρχίζει να κυριαρχεί στο σύμπαν, άτομα σχηματίζονται, η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διαχωρίζεται.

#### B2) Γαλαξίες $t = 2 \times 10^8 years (6 \times 10^{15}s) \rightarrow 3 \times 10^9 years (10^{17}s)$ και $T = 60K \rightarrow 10K$ με $\rho = 10^{-22} \frac{kg}{m^3} \rightarrow 2 \times 10^{-25} \frac{kg}{m^3}$

Σχηματίζονται δομές μεγάλης κλίμακας, τα πρώτα αστέρια αρχίζουν να λάμπουν και οι γαλαξίες σχηματίζονται και μεγαλώνουν.

#### B3) Άστρα $t = 3 \times 10^9 years (10^{17}s) \rightarrow 10^{10} years (3 \times 10^{17}s)$ και $T = 10K \rightarrow 3K$ με $\rho = 2 \times 10^{-25} \frac{kg}{m^3} \rightarrow 3 \times 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$

Οι γαλαξίες αναμιγνύονται και εξελίσσονται και αρχίζει να επικρατεί η σκοτεινή ενέργεια.

#### Γ) ΕΠΟΧΗ ΣΚΟΤΕΙΝΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ $t > 10^{10} years (3 \times 10^{17}s)$ με $T = 3K$ και $\rho = 3 \times 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$

**TABLE 27.1 Major Epochs in the History of the Universe**

<b>Era</b>	<b>Epoch</b>	<b>Time</b> (after Big Bang)	<b>Density</b> (kg/m <sup>3</sup> )	<b>Temperature</b> (K)	<b>Main Events</b>
<i>Radiation Era</i>					
	Planck	0 s	$\infty$	$\infty$	Unknown physics; quantum gravity.
	GUT*	$10^{-43}$ s	$10^{95}$	$10^{32}$	
	Quark	$10^{-35}$ s	$10^{75}$	$10^{27}$	Strong, weak, and electromagnetic forces unified.
	Lepton	$10^{-4}$ s	$10^{16}$	$10^{12}$	
	Nuclear	$10^2$ s	$10^4$	$10^9$	Strong force frozen out. Heavy and light particles all in thermal equilibrium. Electroweak force freezes out at $10^{15}$ K.
		$5 \times 10^4$ yr ( $2 \times 10^{12}$ s)	$6 \times 10^{-16}$	16,000	
<i>Matter Era</i>					
	Atomic	$5 \times 10^4$ yr ( $2 \times 10^{12}$ s)	$6 \times 10^{-16}$	16,000	Matter begins to dominate; atoms form; electromagnetic radiation decouples.
	Galactic	$2 \times 10^8$ yr ( $6 \times 10^{15}$ s)	$10^{-22}$	60	
	Stellar	$3 \times 10^9$ yr ( $10^{17}$ s)	$2 \times 10^{-25}$	10	Large-scale structure forms; first stars and quasars shine; galaxies form and grow.
		$>10^{10}$ yr ( $3 \times 10^{17}$ s)	$3 \times 10^{-27}$	3	
<i>Dark Energy Era</i>					
		$>10^{10}$ yr ( $3 \times 10^{17}$ s)	$3 \times 10^{-27}$	3	Galaxies merge and evolve; star formation peaks. Dark energy begins to dominate.

\*Grand Unified Theory; see More Precisely 27-1.

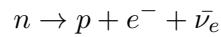
### 3 Νουκλεοσύνθεση

#### 3.1 Πρωτόνια και Νετρόνια

Οι δομικοί λίθοι της νουκλεοσύνθεσης είναι τα νετρόνια και τα πρωτόνια. Η ενέργεια ηρεμίας του νετρονίου είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου κατά :

$$Q_n = m_n c^2 - m_p c^2 = 1.29 \text{ MeV}$$

Ένα ελεύθερο νετρόνιο είναι ασταθές και διασπάται μέσω της αντίδρασης



Ο χρόνος διάσπασης για ένα ελεύθερο νετρόνιο είναι  $\tau_n = 890 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$ . Δηλαδή αν ξεκινήσουμε με μια ποσότητα νετρονίων μετά από χρονικό διάστημα  $t$ , ένα κλάσμα  $f = e^{-\frac{t}{\tau_n}}$  θα περισσέψει. Αφού η ενέργεια  $Q_n$  που απελευθερώνεται από τη διάσπαση ενός νετρονίου σε πρωτόνιο είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας ενός ηλεκτρονίου ( $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ ) το υπόλοιπο της ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου και σε ενέργεια του αντινετρίνιου-ηλεκτρονίου. Με 15 λεπτά χρόνο διάσπασης, η ύπαρξη ενός ελεύθερου νετρονίου είναι ιδιαίτερα σύντομη. Όμως ένα νετρόνιο που βρίσκεται περιορισμένο σε έναν σταθερό πυρήνα ατόμου προστατεύεται από τη διάσπαση. Υπάρχουν νετρόνια μέχρι και σήμερα επειδή είναι δεμένα στο δευτέριο, στο ήλιο καθώς και σε άλλα άτομα. Η θερμοκρασία των αρχέγονων φωτονίων στο πρώιμο σύμπαν, η οποία μειώνεται με ρυθμό  $T \propto a^{-1}$

όπου  $a \sim \sqrt{t}$  καθώς το σύμπαν διαστέλλεται, υπολογίζεται από τη σχέση

$$T(t) \approx 10^{10} \text{ K} \left( \frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2}$$

ή ισοδύναμα από τη σχέση

$$kT(t) \approx 1 \text{ MeV} \left( \frac{t}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2}$$

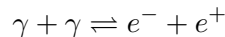
Οπότε η θερμοκρασία του σύμπαντος π.χ. τη χρονική στιγμή  $t = 0, 15 \text{ sec}$  θα είναι

$$T = 10^{10} \text{ K} \left( \frac{0, 15}{1 \text{ s}} \right)^{-1/2} \approx 4 \times 10^{10} \text{ K}$$

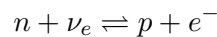
και η μέση ενέργεια φωτονίου θα είναι

$$E_{\text{mean}}(t) \approx 2, 7 kT(t) \approx 2, 7 \times (8, 617 \times 10^{-11} \text{ MeV} \times \text{K}^{-1}) \times (4 \times 10^{10} \text{ K}) \approx 9, 3 \text{ MeV}$$

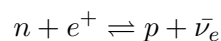
Αυτή η ενέργεια είναι πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας ενός ηλεκτρονίου ή ενός ποζιτρονίου, οπότε υπήρχαν και ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια τη χρονική στιγμή  $t = 0, 15 \text{ sec}$  που δημιουργούνταν από



Τη χρονική στιγμή  $t = 0, 15 \text{ sec}$  τα νετρόνια και τα πρωτόνια θα είναι σε ισορροπία μεταξύ τους μέσω των αλληλεπιδράσεων



και



Όσο τα νετρόνια και τα πρωτόνια βρίσκονται σε ισορροπία μεταξύ τους μέσω των παραπάνω αντιδράσεων η αριθμητική πυκνότητα προκύπτει από την κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συνεπώς, η αριθμητική πυκνότητα των νετρονίων (αριθμός νετρονίων ανά μονάδα όγκου) είναι

$$n_n = g_n \left( \frac{m_n kT}{2\pi h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_n c^2}{kT}}$$

ενώ η αριθμητική πυκνότητα των πρωτονίων είναι

$$n_p = g_p \left( \frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_p c^2}{kT}}$$

Τα στατιστικά βάρη των πρωτονίων και των νετρονίων είναι  $g_n = g_p = 2s + 1 = 2 \cdot 1/2 + 1 = 1 + 1 = 2$ , γιατί έχουν spin  $1/2$ . Άρα ο λόγος νετρονίου προς πρωτόνιο θα είναι

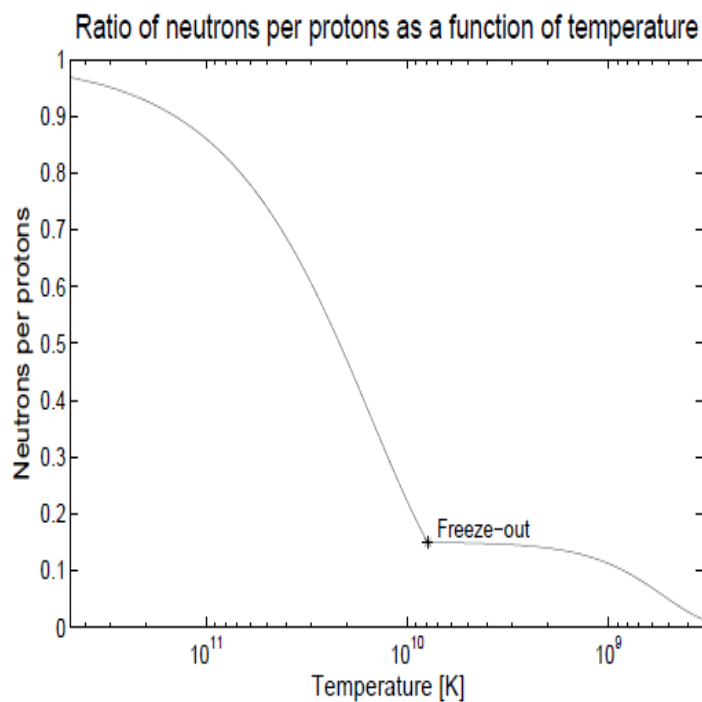
$$\frac{n_n}{n_p} = \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} e^{-\frac{(m_n - m_p)c^2}{kT}} \approx e^{-\frac{Q_n}{kT}}$$

γιατί  $\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} = 1.002$ . Σε θερμοκρασίες

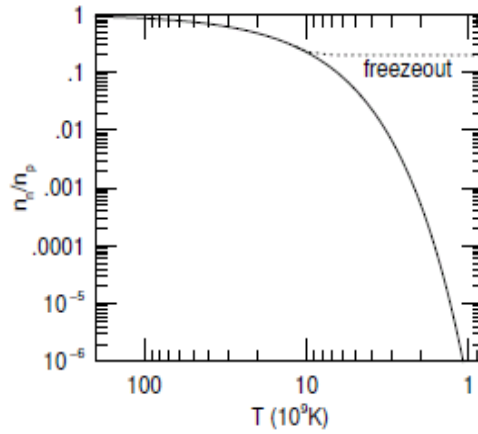
$$kT \gg Q_n = 1.29 \text{ MeV} \Rightarrow T \gg \frac{Q_n}{k} = \frac{1.29 \text{ MeV}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} = \frac{1.29 \cdot 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} =$$

$$= \frac{2.064 \cdot 10^{-13} \text{ K}}{1.38 \cdot 10^{-23}} = 1.49 \times 10^{10} \Rightarrow T \gg 1.5 \times 10^{10} \text{ K}$$

και  $t \ll 1s$ , ο αριθμός των νετρονίων είναι περίπου ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων. Ωστόσο, όσο η θερμοκρασία αρχίζει να πέφτει κάτω από του  $1.5 \times 10^{10} \text{ K}$  τα πρωτόνια αρχίζουν να επικρατούν οπότε ο λόγος αριθμητικών πυκνοτήτων νετρονίου προς πρωτόνιο μειώνεται με εκθετικό ρυθμό.







Ο λόγος νετρονίου προς πρωτόνιο στο πρώιμο σύμπαν. Η συνεχής γραμμή δείχνει την ισορροπία ενώ η διακεκομμένη δείχνει την τιμή μετά το πάγωμα.

Αν τα νετρόνια και τα πρωτόνια παρέμεναν σε ισορροπία τότε στα πρώτα 6 λεπτά του σύμπαντος θα υπήρχε μόνο ένα νετρόνιο για κάθε ένα εκατομμύριο πρωτονίων. Βέβαια, τα νετρόνια και τα πρωτόνια δεν παραμένουν σε ισορροπία για τόσο πολύ. Οι αλληλεπιδράσεις που μεσολαβούν μεταξύ νετρονίων και πρωτονίων στο πρώιμο σύμπαν, όπως φαίνονται στις παραπάνω σχέσεις, περιλαμβάνουν την αλληλεπίδραση ενός βαρυονίου με ένα νεutrino (ή αντινεutrino). Τα νεutrino αλληλεπιδρούν με τα βαρυόνια μέσω της ασθενούς πυρηνικής δύναμης. Οι ενεργές διατομές για ασθενείς αλληλεπιδράσεις εξαρτώνται από την θερμοκρασία  $\sigma_w \propto T^2$  στις θερμοκρασίες που θεωρούμε οι ενεργές διατομές είναι μικρές. Μία τυπική ενεργός διατομή για την αλληλεπίδραση ενός νεutrino με οποιοδήποτε άλλο σωματίδιο μέσω της ασθενούς πυρηνικής δύναμης είναι

$$\sigma_w \sim 10^{-47} m^2 \left( \frac{kT}{1MeV} \right)^2.$$

Στο σύμπαν που κυριαρχείται από ακτινοβολία, η θερμοκρασία πέφτει με ρυθμό  $T \propto a(t)^{-1} \propto t^{-1/2}$  και οι ενεργές διατομές για ασθενείς αλληλεπιδράσεις μειώνονται με ρυθμό  $\sigma_w \propto t^{-1}$ . Η πυκνότητα των νεutrino μειώνεται με ρυθμό  $n_\nu \propto a(t)^{-3} \propto t^{-3/2}$  οπότε ο ρυθμός  $\Gamma$  με τον οποίο τα νετρόνια και τα πρωτόνια αλληλεπιδρούν με τα νεutrino μέσω της ασθενούς δύναμης μειώνεται ταχύτατα

$$\Gamma = n_\nu c \sigma_w \propto t^{-5/2}$$

Εν τω μεταξύ η παράμετρος Hubble μειώνεται με ρυθμό  $H \approx t^{-1}$ . Όταν  $\Gamma \approx H$ , οπότε  $T \rightarrow T_{freeze}$  τα νεutrino αποσυνδέονται από τα νετρόνια και τα πρωτόνια και ο λόγος των νετρονίων προς τα πρωτόνια «παγώνει» (τουλάχιστον μέχρι να αρχίσουν τα νετρόνια τις διασπάσεις τους σε χρόνους  $t \sim \tau_n$ ). Ένας ακριβής υπολογισμός της θερμοκρασίας  $T_{freeze}$  τη στιγμή που ισχύει  $\Gamma = H$  απαιτεί γνώση της ενεργής διατομής του πρωτονίου και του νετρονίου για ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Χρησιμοποιώντας τις καλύτερες δυνατές εργαστηριακές πληροφορίες τη στιγμή του παγώματος προκύπτει πως είναι

$$T_{freeze} = 9 \times 10^9 K \Rightarrow kT_{freeze} = (8,617 \times 10^{-11}) \times (9 \times 10^9) \approx 0,8 MeV \Rightarrow$$

$$T_{freeze} = \frac{0.8 MeV}{k} = \frac{0.8 \times 1.6 \times 10^{-13} J}{1.38 \times 10^{-23} J/K} = \frac{1.28 \times 10^{-13} K}{1.38 \times 10^{-23}} = 0,9 \times 10^{10} K$$

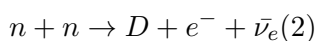
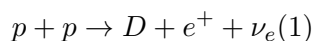
Το σύμπαν φτάνει σε αυτή τη θερμοκρασία όταν η ηλικία του είναι  $t_{freeze} \sim 1s$ . Όταν η θερμοκρασία πέσει κάτω από το  $T_{freeze}$  Ο λόγος νετρονίου προς πρωτόνιο παγώνει στην τιμή

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(-\frac{Q_n}{kT_{freeze}}\right) \approx e^{-\frac{1,29}{0,8}} \approx 0.2 = \frac{1}{5}$$

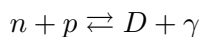
Σε αυτήν τη θερμοκρασία ουσιαστικά υπήρχε 1 νετρόνιο για κάθε 5 πρωτόνια στο σύμπαν. Το γεγονός ότι η νουκλεοσύνθεση δεν ολοκληρώθηκε, οφείλεται στην έλλειψη των νετρονίων σε σχέση με τα πρωτόνια, με αποτέλεσμα

τα 2/3 των βαρυονίων να έχουν τη μορφή μη συγχωνευμένων πρωτονίων. Ένα νετρόνιο θα ενωθεί με ένα πρωτόνιο πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι θα ενωνόταν ένα πρωτόνιο με ένα άλλο πρωτόνιο. ρυθμός συγχώνευσης πρωτονίου με πρωτόνιο είναι πολύ πιο αργός από το ρυθμό συγχώνευσης νετρονίου με πρωτόνιο για δύο λόγους : 1. η ενεργός διατομή για τη συγχώνευση πρωτονίου με πρωτόνιο, εφόσον πρόκειται για ασθενή αλληλεπίδραση, είναι μικροσκοπική σε σύγκριση με την ενεργό διατομή για τη συγχώνευση νετρονίου με πρωτόνιο και 2. αφού τα πρωτόνια έχουν θετικό φορτίο πρέπει να ξεπεράσουν το φράγμα του Coulomb για να συγχωνευθούν. Όταν ένα πρωτόνιο κι ένα νετρόνιο ενωθούν για να σχηματίσουν τον πυρήνα του Δευτερίου, ένα ποζιτρόνιο πρέπει να εκπεμφθεί (για να διατηρηθεί το φορτίο), το οποίο σημαίνει πως ένα νετρόνιο ηλεκτρονίου πρέπει επίσης να εκπεμφθεί (για να διατηρηθεί ο λεπτονικός αριθμός). Η αντίδραση της ένωσης πρωτονίου με πρωτόνιο φαίνεται παρακάτω (1)

Θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι ο ρυθμός της συγχώνευσης νετρονίου-νετρονίου στο πρώιμο σύμπαν είναι ανεπαίσθητα μικρός συγκριτικά με τον ρυθμό συγχώνευσης νετρονίου-πρωτονίου. Η αντίδραση τη συγχώνευσης νετρονίου-νετρονίου είναι η (2). Ξανά, η παρουσία του νετρίνου (ενός αντί-νετρίνου ηλεκτρονίου, σε αυτή την περίπτωση) μας δείχνει ότι πρόκειται για την ασθενή πυρηνική αλληλεπίδραση. Βέβαια, παρόλο που δεν υπάρχει φράγμα Coulomb μεταξύ των νετρονίων, ο ρυθμός συγχώνευσης νετρονίου-νετρονίου είναι μικρός. Εν μέρει, αυτό συμβαίνει εξαιτίας της έλλειψης των νετρονίων σε σχέση με τα πρωτόνια, αλλά κυρίως συμβαίνει λόγω της μικρής ενεργής διατομής της συγχώνευσης νετρονίου-νετρονίου. Αντιδράσεις Πυρηνοσύνθεσης : Αργές (Ασθενείς)



Στην παρακάτω αντίδραση δεν υπάρχουν νετρίνα. Οι ενεργές διατομές για αλληλεπιδράσεις που περιλαμβάνουν την ισχυρή πυρηνική δύναμη είναι πολύ μεγαλύτερες από εκείνες που περιλαμβάνουν την ασθενή πυρηνική δύναμη. Γρήγορη (Ισχυρή)



Αν συγκρίνουμε την ταχύτητα της συγχώνευσης νετρονίου-πρωτονίου σε σχέση με τον αργό ρυθμό της συγχώνευσης πρωτονίου-πρωτονίου και νετρονίου-νετρονίου, μπορούμε να δηλώσουμε,ως μιας πρώτης τάξης προσέγγιση, ότι η BBN συνεχίζεται έως ότου κάθε ελεύθερο νετρόνιο να «δεσμευθεί» σε έναν ατομικό πυρήνα, με τα εναπομείναντα πρωτόνια να παραμένουν μόνα τους. Σε αυτή τη προσέγγιση, μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη δυνατή τιμή του  $Y_p$ , δηλαδή του κλάσματος της μάζας του βαρυονίου σε μορφή του  ${}^4\text{He}$ . Η αποτελεσματικότητα της πυρηνοσύνθεσης μετρείται με το  $Y_p$ . Για να υπολογίσουμε την μέγιστη δυνατή τιμή του, υποθέτουμε ότι κάθε νετρόνιο που είναι παρόν μετά το «πάγωμα» του πρωτονίου-νετρονίου ενσωματώνεται σε πυρήνα  ${}^4\text{He}$ . Δεδομένου του πηλίκου νετρονίου-πρωτονίου που είναι  $n_n/n_p = 1/5$ , μπορούμε να σκεφτούμε μια αντιπροσωπευτική ομάδα από 2 νετρόνια και 10 πρωτόνια. Τα 2 νετρόνια μπορούν να συγχωνευθούν με 2 από τα πρωτόνια και να σχηματίσουν έναν πυρήνα  ${}^4\text{He}$ . Τα εναπομείναντα 8 πρωτόνια, ωστόσο, θα μείνουν ασύζευκτα. Το κλάσμα της μάζας του  ${}^4\text{He}$  θα είναι

$$Y = \frac{n({}^4\text{He})}{n_{\text{baryons}}} = \frac{2n_n}{n_n + n_p} = \frac{2\frac{n_n}{n_p}}{\frac{n_n}{n_p} + 1} = \frac{2f}{f + 1}$$

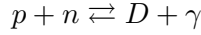
Άρα

$$Y_{\text{max}} = \frac{2 + 2}{10 + 2} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

Αν η παρατηρηθείσα τιμή του  $Y_p = 0.24$  ήταν μεγαλύτερη από την προβλεπόμενη  $Y_{\text{max}}$ , δε θα υπήρχε λόγος ανησυχίας, γιατί μπορεί να σημαίνει, για παράδειγμα, ότι δεν καταλάβαμε πραγματικά τη διαδικασία του παγώματος πρωτονίου-νετρονίου οπότε παρόλα αυτά, το γεγονός ότι η παρατηρηθείσα τιμή του  $Y_p$  είναι μικρότερη από το  $Y_{\text{max}}$  δεν είναι ανησυχητικό, αφού υπάρχουν διάφοροι παράγοντες που δρουν ώστε να μειώσουν την πραγματική τιμή του  $Y_p$  κάτω από το θεωρητικό του μέγιστο. Κατ' αρχάς, αν η πυρηνοσύνθεση δεν λάβει χώρα αμέσως μετά το πάγωμα για  $t \approx 1s$ , τότε η αυθόρμητη διάσπαση των νετρονίων θα μειώσει αναπόφευκτα τον ρυθμό νετρονίου προς πρωτόνιο, και έτσι θα μειώσει την ποσότητα του παραγόμενου  ${}^4\text{He}$ . Επίσης, αν κάποια νετρόνια αποφεύγουν όλα μαζί την συγχώνευση ή καταλήγουν σε πυρήνες ελαφρύτερους από  ${}^4\text{He}$  (όπως  $D$  ή  ${}^3\text{He}$ ), δεν θα συνεισφέρουν στο  $Y_p$ . Τελικά, αν η νουκλεοσύνθεση συνεχιστεί για αρκετό διάστημα ώστε να παραχθούν πυρήνες βαρύτεροι από  ${}^4\text{He}$  αυτό επίσης θα μειώσει το  $Y_p$ .

### 3.2 Δευτέριο

Ας προχωρήσουμε στο επόμενο στάδιο της BBN, αμέσως μόλις ολοκληρωθεί το πάγωμα πρωτονίου-νετρονίου. Ο χρόνος είναι  $t \sim 1 - 2s$ . Το πηλίκιο νετρονίων προς πρωτόνια είναι  $\frac{n_n}{n_p} \approx 0.2$ . Τα νετρίνα, τα οποία έπαψαν να αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια σχεδόν την ίδια στιγμή που σταμάτησαν να αλληλεπιδρούν με τα νετρόνια και τα πρωτόνια, είναι τώρα ασύζευκτα με το υπόλοιπο σύμπαν. Τα φωτόνια, ωστόσο, είναι ακόμη δεσμευμένα ισχυρά με τα πρωτόνια και τα νετρόνια. Η BBN λαμβάνει χώρα μέσω μιας σειράς αντιδράσεων δύο σωμάτων που χτίζουν βαρύτερους πυρήνες βήμα βήμα. Το πρώτο βασικό βήμα στην BBN είναι η συγχώνευση ενός πρωτονίου και ενός νετρονίου ώστε να σχηματίσουν ένα πυρήνα Δευτερίου.



Όταν ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο συγχωνεύονται, η ενέργεια που απελευθερώνεται (και μεταφέρεται μακριά από την ακτινοβολία  $\gamma$ ) είναι η ενέργεια σύνδεσης ενός πυρήνα Δευτερίου.

$$B_D = (m_p + m_n - m_D)c^2 = 2.22MeV$$

Την ώρα της σύνθεσης του Δευτερίου οι σχετικοί αριθμοί των ελεύθερων πρωτονίων, των ελεύθερων νετρονίων και των πυρήνων Δευτερίου δίνονται από την παρακάτω σχέση

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = \frac{g_D}{g_p g_n} \left( \frac{m_D}{m_p m_n} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{B_D}{kT}} = \frac{3}{2 \cdot 2} \left( \frac{2m_n}{m_n^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{B_D}{kT}} = 6 \left( \frac{m_n kT}{\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{B_D}{kT}}$$

Για να ορίσουμε την ακριβή θερμοκρασία  $T_{nucl}$  στην οποία η νουκλεοσύνθεση του Δευτερίου λαμβάνει χώρα μια εκτίμηση μπορεί να είναι ότι η  $T_{nucl}$  είναι η θερμοκρασία στην οποία ισχύει  $n_D = n_n$ , δηλαδή είναι η θερμοκρασία στην οποία τα μισά από τα ελεύθερα νετρόνια θα έχουν συγχωνευθεί σε πυρήνες Δευτερίου. Ο λόγος Δευτερίου προς νετρόνιο είναι

$$\frac{n_D}{n_n} = 6n_p \left( \frac{m_n kT}{\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{B_D}{kT}}$$

Όπως είπαμε, πριν αρχίσει η σύνθεση του  $D$  έχουμε

$$\frac{n_n}{n_p} = 0.2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{n_p}{n_n} = 5.$$

Οπότε

$$\frac{n_p}{n_n + n_p} = \frac{\frac{n_p}{n_n}}{1 + \frac{n_p}{n_n}} = \frac{5}{1 + 5} = \frac{5}{6},$$

δηλαδή τα  $\frac{5}{6}$  των βαρυονίων είναι πρωτόνια. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό

$$\eta = \frac{n_{bar}}{n_\gamma},$$

οπότε

$$n_p = \frac{5}{6} n_{bar} \approx 0.8\eta n_\gamma.$$

Όμως

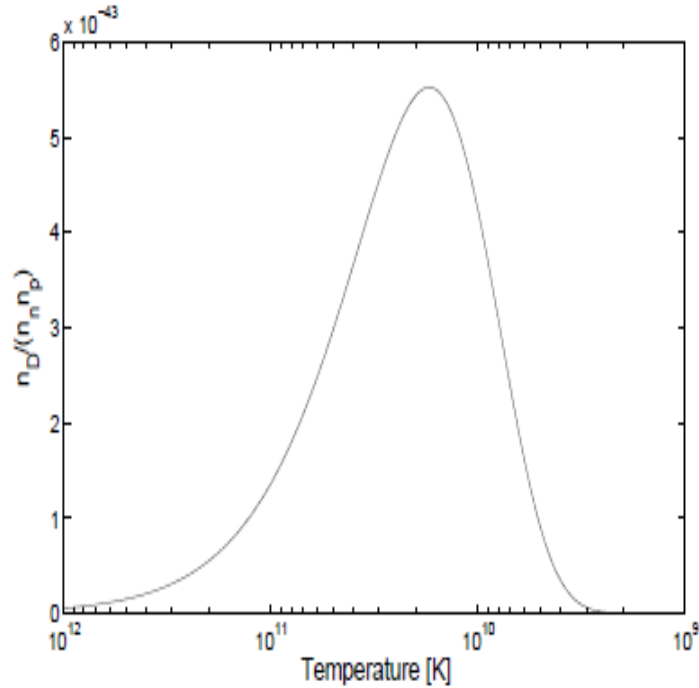
$$n_\gamma = 0.8\eta [0.243 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3]$$

το οποίο προκύπτει από τον τύπο για το μέλαν σώμα. Εκτίμηση: η θερμοκρασία  $T_{nucl}$  μπορεί να υπολογιστεί υποθέτοντας ότι  $\frac{n_D}{n_n} \approx 1$

$$\frac{n_D}{n_n} \approx 1 \approx 6n_p \left( \frac{m_n k T_{nucl}}{\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{B_D}{kT}} \approx$$

$$\approx 6\eta 0.8 n_\gamma \frac{m_n^{-3/2} (kT_{nucl})^{-3/2}}{\pi^{-3/2} \hbar^{-3/2}} e^{\frac{B_D}{kT}} \approx 6\eta 0.8 \left( 0.243 \frac{k^3 T_{nucl}^3}{\hbar^3 c^3} \right) \frac{m_n^{-3/2} (kT_{nucl})^{-3/2}}{\pi^{-3/2} \hbar^{-3/2}} e^{\frac{B_D}{kT}}$$

$$1 \approx 6\eta 0.8 \frac{0.243 (kT_{nucl})^{3/2}}{\pi^{-3/2} (c^2)^{3/2} m_n^{3/2}} e^{\frac{B_D}{kT_{nucl}}} \approx 1.2 \cdot \eta \cdot \left( \frac{\pi k T_{nucl}}{m_n c^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{B_D}{kT_{nucl}}}$$



Μπορεί κανείς να κάνει το γράφημα του δεύτερου μέλους ως προς  $T$  για διάφορα  $\eta$  και να βρει τις τομές με την  $f(T) = 1$  Το  $\eta$  εκτιμάται σε

$$\eta \approx 5.5 \times 10^{(-10)}$$

οπότε πρέπει να βγαίνει

$$T_{nucl} \approx 7.6 \times 10^8 K$$

αλλά

$$T_{nucl} = 10^{10} K \left( \frac{t_{nucl}}{1s} \right)^{-1/2} \Rightarrow t_{nucl} \approx 208s$$

Παρατήρηση: Πολύ μικρό  $\eta \Rightarrow Y \sim 0.01$  (πολύ μικρό)

Πολύ μεγάλο  $\eta \Rightarrow Y \sim 0.33$

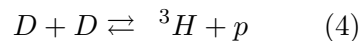
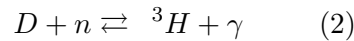
Μεγάλο  $\eta \Rightarrow$  μεγάλο  $T_{nucl} \Rightarrow$  μικρότερο  $t_{nucl} \Rightarrow$  πιο αποτελεσματική πυρηνοσύνθεση  ${}^4\text{He}, {}^6\text{Li}, {}^7\text{Li}, {}^7\text{Be}$

Εισαγωγή: ενέργεια σύνδεσης πυρήνα  $B_A = (Nm_n + Pm_p - M_A)c^2$ . Ενδιαφέρον έχει η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο :  $\frac{B_A}{A}$

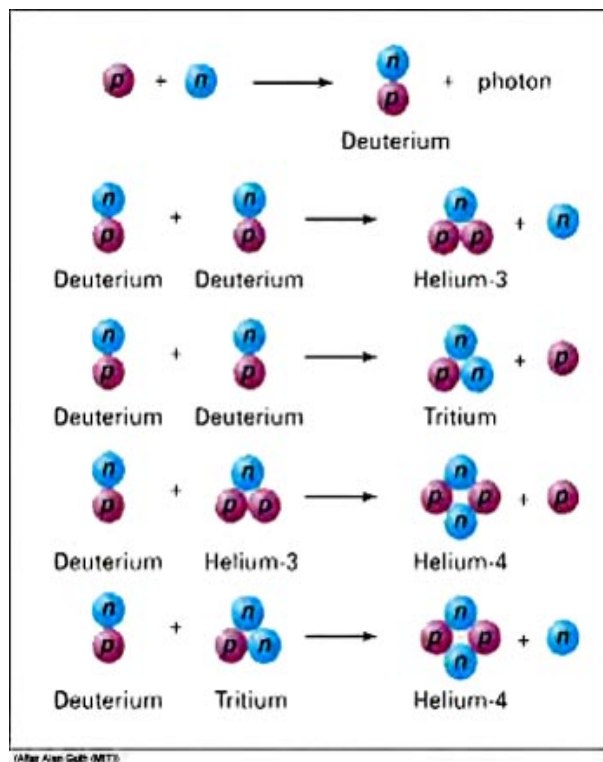
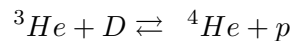
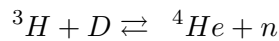
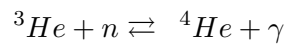
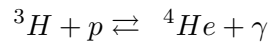
Ενεργειακά ευνοείται η σύντηξη ελαφριών πυρήνων προς την κατεύθυνση του  $Fe$  και του  $Ni$ . Οι αντιδράσεις μετά τη δημιουργία του  $D$  είναι ισχυρές και οδηγούν γρήγορα σε  ${}^4\text{He}$ .

### 3.3 Ήλιον

Ο ρυθμός δευτερίου προς πρωτόνιο δεν παραμένει πάντα ίδιος. Όταν ένα σημαντικό μέρος του Δευτερίου σχηματίζεται μπορούν να γίνουν πολλές πιθανές πυρηνικές αντιδράσεις για παράδειγμα από το δευτέριο και ένα πρωτόνιο μπορεί να σχηματιστεί  ${}^3\text{He}$  (1). Εναλλακτικά, από το δευτέριο και ένα νετρόνιο μπορεί να σχηματιστεί το τρίτιο (2), το οποίο είναι ευσταθές αφού ο χρόνος διάσπασης του είναι περίπου 18 χρόνια. Κατά τη σύντομη διάρκεια της BBN το τρίτιο μπορεί να θεωρηθεί αποτελεσματικά σταθερό. Οι πυρήνες δευτερίου μπορούν να σχηματίσουν  ${}^4\text{He}$  (3) όμως πιο πιθανή είναι η αλληλεπίδραση δυο πυρήνων δευτερίου να καταλήξει στο σχηματισμό ενός πυρήνα Τρίτιου με την αποβολή ενός πρωτονίου (4) ή στο σχηματισμό  ${}^3\text{He}$  (5) με την αποβολή ενός νετρονίου.

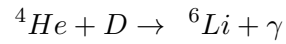


Δεν υπάρχει ποτέ αρκετή ποσότητα  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  κατά τη διάρκεια της νουκλεοσύνθεσης αφού μόλις σχηματιστούν απευθείας μετατρέπονται σε  ${}^4\text{He}$  σύμφωνα με τις παρακάτω αντιδράσεις :

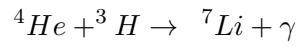


Καμία από τις παραπάνω αντιδράσεις δεν περιλαμβάνει νετρίνα, όλες περιλαμβάνουν την ισχυρή πυρηνική δύναμη και έχουν μεγάλες ενεργές διατομές και γρήγορους ρυθμούς αντίδρασης. Ωστόσο όταν ξεκινά η νουκλεοσύνθεση τα  $D$ ,  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$  μετατρέπονται σε  ${}^4\text{He}$ . Αφού φτάσουμε στο  ${}^4\text{He}$  παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει ευσταθής πυρήνας με

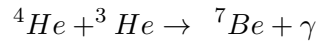
A=5. Αν προσπαθήσουμε να ενώσουμε ένα πρωτόνιο ή ένα νετρόνιο με  ${}^4\text{He}$  θα δούμε ότι δε δίνουν τίποτα. Τα  ${}^5\text{He}$  και  ${}^5\text{Li}$  δεν είναι ευσταθή. Μικρές ποσότητες ευσταθών ισότοπων του λιθίου δημιουργούνται από



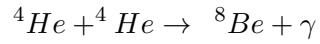
και



Επιπλέον μικρές ποσότητες Βηρυλίου δημιουργούνται από αντιδράσεις όπως η παρακάτω



Η δημιουργία πυρήνων με  $A > 7$  εμποδίζεται από την απουσία ευσταθών πυρήνων με  $A=8$ . Για παράδειγμα η αντίδραση



μας δίνει πάλι ένα ζεύγος από  ${}^4\text{He}$ .

## 4 Επανασύνδεση - Recombination

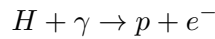
Μια αρκετά σημαντική εποχή της εξέλιξης του σύμπαντος λαμβάνει χώρα την εποχή όπου  $T \approx 1000K$  όπου είναι θερμοδυναμικά προτιμότερο να σχηματίσουν ουδέτερα σώματα από το ιονισμένο πλάσμα που υπάρχει. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται επανασύνδεση (recombination) και ουσιαστικά είναι η δέσμευση των ηλεκτρονίων από το ιονισμένο πλάσμα (το οποίο προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται μόνο από πρωτόνια) Άρα η εποχή της επανασύνδεσης είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο τα βαρυόνια του σύμπαντος από ιονισμένα γίνονται ουδέτερα. Αριθμητικά, πρόκειται για τη στιγμή κατά την οποία εκτιμάται ότι η αριθμητική πυκνότητα των ιόντων είναι ίσος με τον αριθμό πυκνότητας των ουδέτερων ατόμων. Η εποχή της αποσύζευξης των φωτονίων είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο ρυθμός με τον οποίο τα φωτόνια σκεδάζουν τα ηλεκτρόνια γίνεται μικρότερος από την παράμετρο Hubble (το οποίο μας δίνει και το ρυθμό με τον οποίο διαστέλλεται το σύμπαν). Όταν τα φωτόνια αποσυνδέονται, σταματάνε να αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια και το σύμπαν γίνεται διαφανές. Η εποχή της αποσύζευξης των φωτονίων είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ένα τυπικό CMB φωτόνιο υπέστη την τελευταία του σκέδαση από ένα ηλεκτρόνιο. Η πιθανότητα ένα φωτόνιο να σκεδαστεί από ένα ηλεκτρόνιο είναι μικρή, αφού ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος είναι γρηγορότερος από τον ρυθμό της σκέδασης. Για να κάνουμε τους υπολογισμούς της επανασύνδεσης πιο απλούς, θεωρούμε πως τα βαρυόνια του σύμπαντος αποτελούνται μόνο από υδρογόνο. Το υδρογόνο μπορεί να πάρει τη μορφή ενός ουδέτερου ατόμου (H) ή ενός γυμνού πυρήνα υδρογόνου, γνωστού και ως πρωτόνιο (p). Για να διατηρήσουμε την ουδετερότητα σε αυτό το σύμπαν που αποτελείται μόνο από Υδρογόνο, η αριθμητική πυκνότητα των ελεύθερων ηλεκτρονίων πρέπει να είναι ίση με την αριθμητική πυκνότητα των ελεύθερων πρωτονίων ( $n_e = n_p$ ). Ο βαθμός στον οποίο τα βαρυόνια του σύμπαντος είναι ιονισμένα μπορεί να εκφραστεί με το κλάσμα ιοντισμού X

$$X = \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_{bary}} = \frac{n_e}{n_{bary}}$$

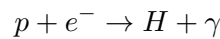
όπου  $X=0$  για ουδέτερα άτομα και  $X=1$  για πλήρως ιονισμένα. Μία χρήσιμη συνέπεια του να θεωρήσουμε ότι το μοναδικό στοιχείο του σύμπαντος είναι το υδρογόνο είναι ότι υπάρχει μια ενδιαφέρουσα ενεργειακή κλίμακα στο πρόβλημα : το έργο ιονισμού του υδρογόνου

$$Q = 13.6eV.$$

Ένα φωτόνιο με ενέργεια  $hf > Q$  μπορεί να ιοντίσει ένα άτομο υδρογόνου.



Αυτή η αντίδραση μπορεί να γίνει και στην αντίθετη κατεύθυνση : ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο μπορούν να επανασυνδεθούν, σχηματίζοντας έναν δεσμό ατόμου υδρογόνου ενώ ένα φωτόνιο απομακρύνει την ενέργεια που περισσεύει.

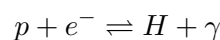


Σε ένα σύμπαν που περιέχει πρωτόνια, ηλεκτρόνια και φωτόνια, το κλάσμα ιοντισμού X θα εξαρτάται από την ισορροπία μεταξύ του φωτοϊονισμού και της επανασύνδεσης. Η επανασύνδεση πρέπει να συνέβη όταν η μέση ενέργεια φωτονίου της CMB έγινε μικρότερη από την ενέργεια ιοντισμού του υδρογόνου  $Q = 13.6eV$ . Όταν αυτό συνέβη, το μέσο CMB φωτόνιο δεν μπορεί πια να φωτοϊονίσει υδρογόνο. Αφού η μέση ενέργεια CMB φωτονίου είναι  $\sim 2.7kT$ , η θερμοκρασία της επανασύνδεσης θα είναι  $2.7kT_{rec} \approx Q_{ion} \rightarrow T_{rec} \approx \frac{Q_{ion}}{2.7k} = \frac{13.6eV}{2.7 \cdot (8.6 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K})} \approx 60000K$

Αλλά  $2 \times 10^9 \frac{photons}{baryons} \rightarrow$  χρειάζονται πιο ακριβείς υπολογισμοί (γιατι έχουμε κατανομή ενεργειών και όχι συγκεκριμένη ενέργεια)

$$\eta = \frac{n_{bar}}{n_\gamma} = g_x \left( \frac{m_x kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_x c^2}{kT}}$$

Η αντίδραση λοιπόν που καθορίζει το κλάσμα ιοντισμού X στο πρώιμο σύμπαν είναι η εξής



Ενώ τα φωτόνια είναι ακόμα ενωμένα με τα βαρυόνια, αυτή η αντίδραση θα είναι σε στατιστική ισορροπία, με το ρυθμό φωτοϊονισμού (ξεκινώντας από αριστερά προς δεξιά) σε ισορροπία με τον ρυθμό της επανασύνδεσης (ξεκινώντας

από δεξιά προς τα αριστερά). Όταν μία αντίδραση είναι σε στατιστική ισορροπία σε μια θερμοκρασία  $T$ , ο αριθμός πυκνότητας  $n_x$  των σωματιδίων με μάζα  $m_x$  δίνεται από την κατανομή Maxwell-Boltzmann

$$n_x = g_x \left( \frac{m_x kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_x c^2}{kT}}$$

όσο τα σωματίδια είναι ασυσχέτιστα, με  $kT \ll m_x c^2$ . Στην παραπάνω εξίσωση,  $g_x$  έχει το στατιστικό βάρος ενός σωματιδίου  $x$ , για παράδειγμα για τα νετρόνια, τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια είναι ίσο με 2 λόγω των *spin* τους. Για  $H, p, e^-$  μπορούμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση που συνδέει τους αριθμούς πυκνότητας αυτών των σωματιδίων

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \frac{g_H}{g_p g_e} \left( \frac{m_H}{m_p m_e} \right)^{3/2} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{(m_p + m_e - m_H)c^2}{kT} \right)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απλουστευθεί περισσότερο. Αρχικά, αφού η μάζα του ηλεκτρονίου είναι μικρή συγκριτικά με αυτή του φωτονίου, μπορούμε να θέσουμε  $m_H/m_p = 1$ . Δεύτερον, η ενέργεια συνδεσης  $Q = 13.6\text{eV}$  δίνεται από τη σχέση  $(m_p + m_e - m_H)c^2 = Q$ . Το στατιστικό βάρος του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου, είναι  $g_p = g_e = 2$ , ενώ το στατιστικό βάρος του ατόμου του υδρογόνου είναι  $g_H = 4$ . Έτσι, η σχέση  $g_H/(g_p g_e)$  μπορεί να θεωρηθεί ίση με ένα. Η εξίσωση που προκύπτει,

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{Q}{kT} \right)$$

λέγεται **εξίσωση Saha**. Τώρα πρέπει να μετατρέψουμε την εξίσωση Saha σε μια σχέση μεταξύ των  $X$ ,  $T$  και  $\eta$ . Από τον ορισμό του  $X$

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H}$$

προκύπτει

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_{bar}} = \frac{n_e}{n_{bar}} \rightarrow X(n_p + n_H) = n_p \rightarrow X n_H = n_p(1 - X) \rightarrow n_H = \frac{1 - X}{X} n_p$$

και από την προϋπόθεση της ουδετερότητας φορτίων μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση  $n_e = n_p$ . Από αυτό έχουμε

$$\frac{1-X}{X} n_p = \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{Q}{kT} \right) \rightarrow \frac{1-X}{X} = n_p \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{Q}{kT} \right)$$

Για να εξαλείψουμε το  $n_p$  από την παραπάνω εξίσωση, ανακαλούμε τη σχέση  $\eta \equiv n_{bary}/n_\gamma$ . Σε ένα σύμπαν όπου το υδρογόνο είναι το μόνο στοιχείο, και ένα κλάσμα  $X$  του υδρογόνου είναι σε μορφή «γυμνού» πρωτονίου, μπορούμε να γράψουμε

$$\eta = \frac{n_{bar}}{n_\gamma} = \frac{n_p}{n_\gamma} = \frac{n_p}{X n_\gamma}$$

οπότε

$$n_p = \eta X n_\gamma = \eta \cdot X \cdot 0.243 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3$$

Αν κάνουμε τις κατάλληλες αντικαταστάσεις θα έχουμε την επιθυμητή εξίσωση

$$\frac{1-X}{X} = \left[ \eta X 0.243 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \right] \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{Q}{kT} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1-X}{X^2} = \eta 0.243 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp\left( \frac{Q}{kT} \right) = 3.84\eta \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{(\frac{Q}{kT})} = S$$

Αυτή είναι δευτεροβάθμια εξίσωση του  $X$  και η λύση με θετική τιμή είναι η

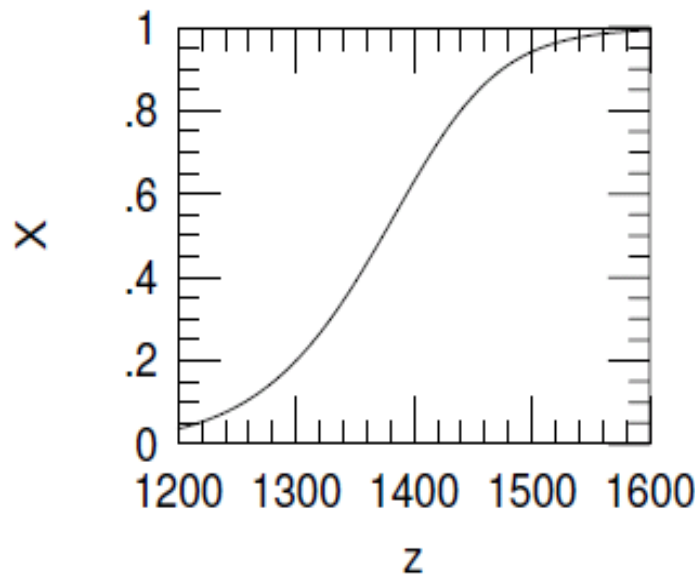
$$X = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4S}}{2S}$$



Αν θεωρήσουμε ως στιγμή της επανασύνδεσης, τη στιγμή που  $Q = \frac{1}{2}$  ίσχυε  $S = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ . Θεωρώντας ότι  $\eta = 5.5 \times 10^{-10}$  η θερμοκρασία ήταν

$$3.84 \times (5.5 \times 10^{-10}) \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{Q}{kT}\right) = 2 \Rightarrow kT_{rec} = \frac{Q}{42} = \frac{13.6eV}{42} = 0.323eV$$

Λόγω της εκθετικής εξάρτησης της  $S$  από την θερμοκρασία, η ακριβής τιμή του  $\eta$  δεν έχει μεγάλη επιρροή στην τιμή του  $T_{rec}$ . Σε βαθμούς *Kelvin*,  $kT_{rec} = 0.323eV$  αντιστοιχεί σε θερμοκρασία  $T_{rec} = 3740K$ , λίγο υψηλότερη από το σημείο τήξεως του βολφραμίου. Η θερμοκρασία του σύμπαντος είχε τιμή  $T = T_{rec} = 3740K$  σε *redshift*  $z_{rec} = 1370$ , όταν η ηλικία του σύμπαντος, στο Καθιερωμένο Κοσμολογικό Πρότυπο (μοντέλο *Benchmark*) ήταν  $t_{rec} = 240,000years$ . Η επανασύνδεση δεν ήταν μία στιγμιαία διαδικασία, παρόλα αυτά, εξελίχθηκε αρκετά γρήγορα. Ο κλασματικός ιονισμός πηγαίνει από  $X = 0.9$  σε *redshift*  $z = 1475$  στο  $X = 0.1$  σε *redshift*  $z = 1255$ . Στο μοντέλο *Benchmark*, ο χρόνος που μεσολάβησε από το  $X = 0.9$  μέχρι το  $X = 0.1$  είναι  $\Delta t \approx 70,000years$ .



Το κλάσμα ιοντισμού  $X$  ως συνάρτηση του *redshift* κατά τη διάρκεια της εποχής της επανασύνδεσης. Θεωρείται ένα κλάσμα βαρυονίων προς φωτόνια  $\eta = 5.5 \times 10^{-10}$ .

Αφού ο αριθμός πυκνότητας των ελεύθερων ηλεκτρονίων μειώνεται ταχύτατα την εποχή της επανασύνδεσης, το χρονικό διάστημα της αποσύζευξης φωτονίων έρχεται πολύ σύντομα μετά την επανασύνδεση. Ο ρυθμός της σκέδασης φωτονίων όταν το υδρογόνο είναι μερικώς ιονισμένο είναι

$$\Gamma(z) = n_e(z)\sigma_e z = X(z)(1+z)^3 n_{bary,0} \sigma_e c$$

Για  $\Omega_{bary,0} = 0.04$  γίνεται

$$\Gamma(z) = 4.4 \times 10^{-21} s^{-1} X(z)(1+z)^3$$

Κατά τη διάρκεια της επανασύνδεσης το σύμπαν κυριαρχείται από ύλη οπότε η παράμετρος *Hubble* δίνεται από τη σχέση

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} = \Omega_{m,0}(1+z)^3$$

Για  $\Omega_{m,0} = 0.3$  η τιμή της παραμέτρου *Hubble* κατά τη διάρκεια της επανασύνδεσης ήταν

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} (1+z)^{\frac{3}{2}} = 1.24 \times 10^{-18} s^{-1} (1+z)^{\frac{3}{2}}$$

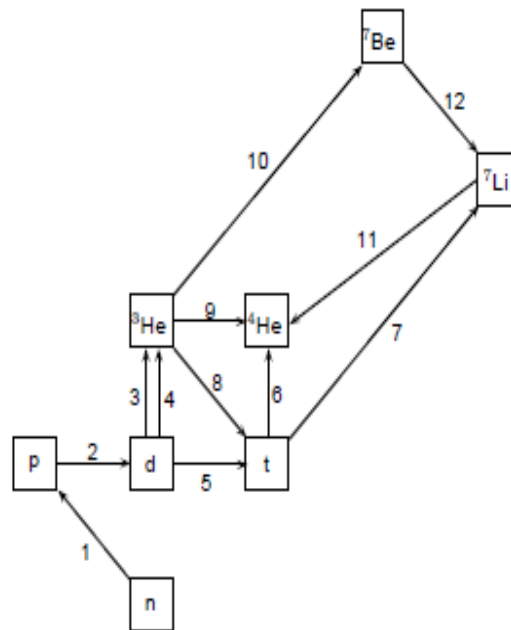
Η καλύτερη εκτίμηση μέχρι σήμερα της σταθεράς *Hubble* είναι  $H_0 = 70 \pm 7 km s^{-1} Mpc^{-1} = 70 \times \frac{1000m}{3.086 \times 10^{22}m} s^{-1} = 1.24 \times 10^{-18} s^{-1}$

Η μετατόπιση προς το ερυθρό της αποσύζευξης των φωτονίων  $z_{dec}$  υπολογίζεται αν θέσουμε

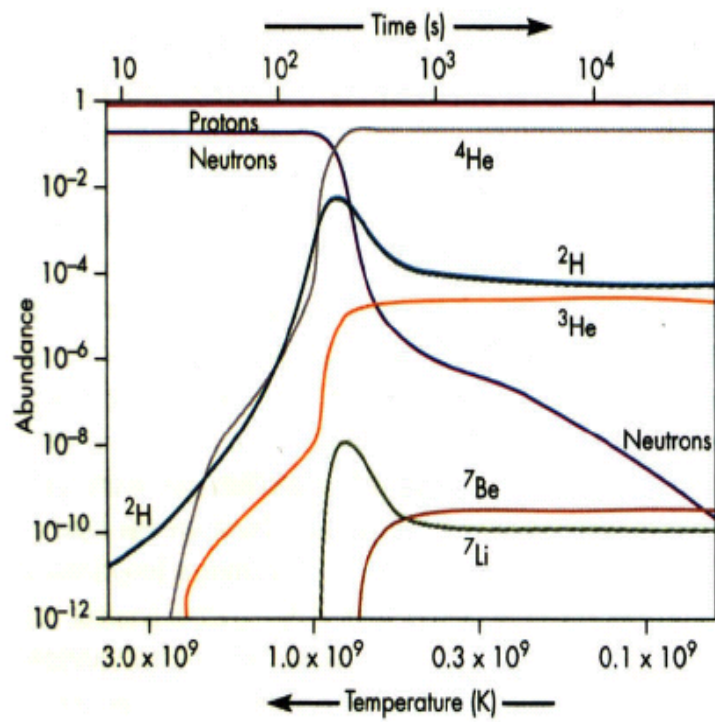
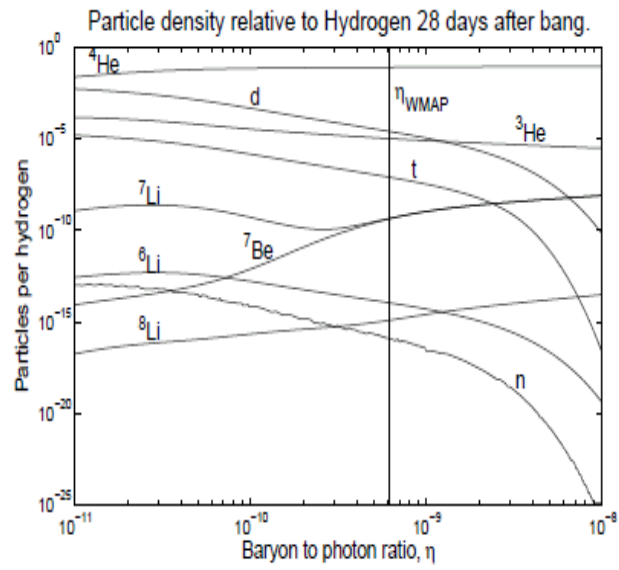
$$\Gamma = H \Rightarrow 4.4 \times 10^{-21} X(z_d)(1+z_d)^3 = X(z_d)(1+z_d)^{\frac{3}{2}} n_{bar,0} \rightarrow 1+z_d = \left( \frac{n_{bar,0}}{4.4 \times 10^{-21}} \right) = \frac{43}{X^{\frac{2}{3}}}$$

When  $\Gamma < H$ ,  $X$  is larger than what is given by Saha.

## 5 Επίλογος



1.  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
2.  $p + n \rightarrow d + \gamma$
3.  $d + p \rightarrow ^3\text{He} + \gamma$
4.  $d + d \rightarrow ^3\text{He} + n$
5.  $d + d \rightarrow t + p$
6.  $t + d \rightarrow ^4\text{He} + n$
7.  $t + ^4\text{He} \rightarrow ^7\text{Li} + \gamma$
8.  $^3\text{He} + n \rightarrow t + p$
9.  $^3\text{He} + d \rightarrow ^4\text{He} + p$
10.  $^3\text{He} + ^4\text{He} \rightarrow ^7\text{Be} + \gamma$
11.  $^7\text{Li} + p \rightarrow ^4\text{He} + ^4\text{He}$
12.  $^7\text{Be} + n \rightarrow ^7\text{Li} + p$



## 6 Βιβλιογραφία

### Αναφορές

- [1] Peebles-Principles of Physical Cosmology
- [2] Sean Carol - Spacetime and Geometry
- [3] Sean Carol - Lectures on General Relativity
- [4] Steven Weinberg - Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity
- [5] Gary Steigman - Big Bang Nucleosynthesis: Probing the first 20 minutes, 2003
- [6] Gary-Steigman - Neutrinos and Big Bang Nucleosynthesis 2012
- [7] Barbara Ryden - Introduction to Cosmology, 2006
- [8] V.Mukhanov - Physical Foundations of Cosmology
- [9] F.Iocco,G.Mangano,G.Miele,O.Pisanti,P.Serpico - Primordial Nucleosynthesis: from precision cosmology to fundamental physics, 2008
- [10] K.Olive,G.Steigman, T.Walker - Primordial Nucleosynthesis : theory and observations, 2000
- [11] Mitja Fridman - Big Bang Nucleosynthesis
- [12] Toshifumi Jittoh - Big Bang nucleosynthesis and properties of stau
- [13] J.Brorsson, J.Jacobsson, A.Johansson - Big Bang nucleosynthesis,2010
- [14] B. Topper - Big Bang Nucleosynthesis- The emergence of elements in the universe
- [15] E.Papantonopoulos - The Physics of the Early Universe
- [16] Γ.Κουτσούμπας - Σημειώσεις Αστροφυσικής, 2008