ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Κβαντικά συστήματα με συνδέσμους

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του Νίκου Αλεξόπουλου

Α.Μ: 09213002

Επιβλέπων: Κουτσούμπας Γεώργιος

Αθήνα, Οκτώβριος, 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια ολοκλήρωσης των μεταπτυχιακών μου σπουδών στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Αφορά τη μελέτη συστημάτων που υπόκεινται στη δράση δεσμών και στηρίζεται στις μελέτες του Paul Dirac (Nobel Φυσικής το 1933), πάνω στο συγκεκριμένο ζήτημα ενώ εστιάζει στο πρόβλημα της κβάντωσης αυτού του είδους των συστημάτων.

Πρώτο από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γεώργιο Κουτσούμπα, Αναπληρωτή καθηγητή στον Τομέα Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, επιβλέπων και ιθύνων νου της εργασίας μου, τόσο για την ευκαιρία που μου έδωσε στο να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αλλά και συνάμα απαιτητικό ζήτημα, όσο και για την βοήθεια, την καθοδήγηση και τον χρόνο που μου αφιέρωσε. Τους καθηγητές μου κ. κ. Κωνσταντίνο Παρασκευαΐδη, Αναπληρωτή Καθηγητή και Εμμανουήλ Δρη, Ομότιμο καθηγητή του Τομέα Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την πολύτιμη βοήθεια και τις γνώσεις που μου προσέφεραν.

Την κα Χάρις Κυριακίδη, για την καθοριστική συνεισφορά και την στήριξη που μου παρείχε, τόσο στο να εισαχθώ στο συγκεκριμένο πρόγραμμα, όσο και στην εξέλιξη του.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλα τα μέλη της οικογενείας μου και ειδικά τους γονείς μου, οι οποίοι μου συμπαρίστανται και με στηρίζουν, σε όλες τις μέχρι στιγμής αποφάσεις μου.

Αθήνα, Ιούνιος 2016

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ατομική φυσική συναντάμε διάφορα πεδία, ορισμένα από τα οποία μας είναι ιδιαίτερα οικεία, όπως για παράδειγμα το ηλεκτρομαγνητικό και το βαρυτικό. Το πρόβλημα εντοπίζεται σε έναν αριθμό πεδίων που προκύπτουν αν λάβουμε υπόψιν μας τις ιδέες των De Broglie και Schrödinger σύμφωνα με τις οποίες κάθε σωματίδιο δύναται να ερμηνευθεί ως κύμα και κατά συνέπεια να συσχετιστεί με κάποιο πεδίο. Προκύπτει έτσι η ανάγκη για μια θεωρία που να συνδέει όλα αυτά τα πεδία και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, ακολουθώντας ταυτόχρονα τις αρχές της κβαντικής μηχανικής. Γίνεται βέβαια, εύκολα κατανοητό ότι το ζήτημα αυτό είναι εξαιρετικά πολύπλοκο.

Μπορεί κανείς να εξάγει μια απλούστερη προσέγγιση εάν καταφύγει στην κλασσική μηχανική, στην οποία ανάγεται άλλωστε και η κβαντική μηχανική εάν θεωρήσουμε την σταθερά δράσης του Planck να τείνει στο μηδέν ($\hbar \to 0$).

Ίσως βέβαια στο σημείο αυτό κανείς αναρωτηθεί, εάν η κλασσική μηχανική είναι αρκετά ισχυρή ώστε να περιγράψει την φύση με την απαιτούμενη ακρίβεια. Η αλήθεια είναι ότι η ακριβέστερη και πιο ρεαλιστική προσέγγιση της πραγματικότητας, μπορεί να επιτευχθεί με βάση την κβαντική μηχανική, καθώς η φύση στην πραγματικότητα λειτουργεί με βάση τις αρχές της εν λόγω θεώρησης. Το πρόβλημα βέβαια με την κβαντική θεώρηση είναι η πολυπλοκότητα και οι δυσκολίες που προκύπτουν στην απευθείας εφαρμογή της. Λόγω της εξαιρετικής δυσκολίας οι πρώιμες θεωρίες πεδίου είναι ικανές να περιγράψουν απλές περιπτώσεις πεδίων και των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων, ώστε τελικά να καταλήγουν ανακριβείς στην προσέγγιση της πραγματικότητας. Αναφέρουμε για παράδειγμα, την περίπτωση των εξισώσεων Maxwell οι οποίες καταρρέουν, όταν πλησιάζουμε σε πολύ μικρές αποστάσεις τα φορτία που παράγουν τα πεδία που εξετάζουν. Χρειάζεται τότε κανείς να τροποποιήσει την θεωρία πεδίου του Maxwell και να περάσει σε μη γραμμική ηλεκτροδυναμική.

Κάνοντας χρήση της κλασσικής θεωρίας με τον φορμαλισμό Hamilton, έχουμε σε όλες τις περιπτώσεις τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε συγκεκριμένους κανόνες ώστε να φτάσουμε σε μια πρώτη προσεγγιστική θεωρία πεδίου, την οποία έπειτα χρειάζεται να βρούμε έναν τρόπο να κβαντώσουμε ώστε να πετύχουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια την προσέγγιση των φαινομένων που εξετάζουμε.

Χωρίς άλλωστε την κλασσική μηχανική και τις μεθόδους Hamilton δε θα ήταν δυνατόν να επιλυθούν τα περισσότερα από τα απλούστερα προβλήματα της κβαντικής θεωρίας όπως για παράδειγμα η εξαγωγή της σχέσης Balmer για το άτομο του υδρογόνου, που ήταν στην ουσία και η απαρχή της κβαντικής μηχανικής.

ΜΕΘΟΔΟΣ HAMILTON

Σημείο έναρξης είναι μια αρχή δράσης. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ολοκλήρωμα δράσης, εξαρτώμενο από την κίνηση έτσι ώστε εάν κάποιος θέσει τις κατάλληλες συνθήκες για να είναι σταθερό, δύναται να εξάγει τις εξισώσεις κίνησης. Η μέθοδος αυτή έχει ένα μεγάλο πλεονέκτημα το οποίο καθιστά τη θεωρία συμβατή με τις αρχές της ειδικής σχετικότητας. Κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο διότι έχουμε να κάνουμε με ταχέως κινούμενα σωματίδια. Εάν θελήσουμε να λάβουμε υπόψιν μας και το βαρυτικό πεδίο, τότε χρειάζεται η θεωρία μας να είναι συμβατή και με τις αρχές της γενικής σχετικότητας, κάτι τέτοιο σημαίνει ότι χρειάζεται να δουλέψουμε με μη Ευκλείδιο χωροχρόνο. Το βαρυτικό πεδίο βέβαια δεν παίζει τόσο μεγάλο ρόλο στην ατομική φυσική, αφού οι βαρυτικές δυνάμεις που εμφανίζονται στα ατομικά φαινόμενα είναι εξαιρετικά ασθενείς σε σχέση με τις υπόλοιπες, οπότε για πρακτικούς λόγους μπορεί κανείς να τις αγνοήσει. Σε κάθε περίπτωση η μέθοδος που περιγράφουμε αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο το οποίο είναι χρήσιμο, είτε συμπεριλάβει κανείς στη μελέτη του το βαρυτικό πεδίο, είτε όχι.

Ξεκινάμε λοιπόν με ένα ολοκλήρωμα δράσης,

$$I = \int \mathrm{L} dt. \tag{1-1}$$

Εκφράζεται σαν ένα ολοκλήρωμα ως προς το χρόνο, με την ολοκληρώσιμη ποσότητα L είναι η Λαγκρανζιανή. Έτσι με μια αρχή δράσης μπορούμε να εξάγουμε την Λαγκρανζιανή. Έπειτα, χρειάζεται να βρούμε έναν τρόπο να μεταβούμε από τη Λαγκρανζιανή σε μια συνάρτηση Χάμιλτον. Με αυτή τη συνάρτηση Χάμιλτον έχουμε κάνει το πρώτο βήμα για μια κβαντική θεωρία.

Ο λόγος για τον οποίο η αφετηρία μας είναι το ολοκλήρωμα δράσης και η Λαγκρανζιανή και όχι απευθείας η συνάρτηση Χάμιλτον, ώστε να συντομεύσουμε τη διαδικασία, είναι πως οι απαραίτητες συνθήκες για να είναι η θεωρία συμβατή με τις αρχές της σχετικότητας, είναι ιδιαίτερα δύσκολο να εισαχθούν με όρους Χαμιλτωνιανής.

Εκκινώντας λοιπόν από το ολοκλήρωμα δράσης, για να είναι η θεωρία συμβατή με την ειδική σχετικότητα, χρειάζεται απλά να απαιτήσουμε το ολοκλήρωμα δράσης να είναι αμετάβλητο.

Η παραδοχή αυτή θα μας οδηγήσει σε εξισώσεις κίνησης συμβατές με την σχετικότητα. Όταν πια εξάγουμε τη Hamiltonian, μπορούμε εφαρμόζοντας μια συγκεκριμένη μέθοδο να έχουμε μια πρώτη προσέγγιση προς την κβαντική θεώρηση.

Ίσως βέβαια να μπορούσε κανείς να παρακάμψει όλη αυτή τη διαδικασία σε ένα βαθμό και να προσπαθούσε, αποφεύγοντας την συνάρτηση Hamilton, να καταλήξει σε μια κβαντική θεωρία απευθείας από τη Λαγκραντζιανή. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό για ορισμένες απλές περιπτώσεις πεδίων, τέτοιων ώστε η Λαγκραντζιανή να είναι άρτια (quadratic) ως προς τις ταχύτητες. Οπότε είναι ουσιαστικά όμοια με τις συναρτήσεις Lagrange που συναντάμε στα μη σχετικιστικά σωμάτια. Για αυτές τις απλές περιπτώσεις έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι ώστε από τη Λαγκραντζιανή να παιρνάμε απευθείας στην Κβαντική θεωρία, χωρίς να κάνουμε χρήση της συνάρτησης Hamilton. Αυτός βέβαια ο περιορισμός, η Λαγκραντζιανή να είναι άρτια ως προς τις ταχύτητες είναι αρκετά σοβαρός. Χρειάζεται κανείς να τον αποφύγει, ώστε με μια μορφή Lagrangian που να είναι αρκετά γενική ως προς τις ταχύτητες, να μπορεί να αναπτύξει φορμαλισμό ικανό να περιγράφει περιπτώσεις όπως για παράδειγμα εκείνη της μη γραμμικής ηλεκτροδυναμικής στην οποία αναφερθήκαμε νωρίτερα. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα, πως η μοναδική διαδρομή που δεν βλάπτει τη γενικότητα και είναι ταυτόχρονα συνεπής με όλες τις γενικές αρχές, είναι να ξεκινήσει κανείς από το ολοκλήρωμα δράσης, εξάγοντας τη Lagrangian, στη συνέχεια τη συνάρτηση Hamiltonian και από εκεί να καταλήξει σε μια συνεπή κβαντική θεωρία.

Για λόγους απλότητας ξεκινάμε με ένα σύστημα που έχει πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας και από εκεί και πέρα είναι καθαρά θέμα φορμαλισμού να μεταβούμε σε άπειρους βαθμούς ελευθερίας που απαιτεί μια θεωρία πεδίου.

Θεωρούμε λοιπόν, N πλήθος γενικευμένων συντεταγμένων qn και τις αντίστοιχες ταχύτητες dqn/dt. H Lagrangian (L) είναι συνάρτηση της θέσης και της ταχύτητας L=L(q,q).

Στο σημείο αυτό έχουμε να παρατηρήσουμε ότι ο χρόνος εμφανίζεται ως μεταβλητή στον φορμαλισμό που αναπτύσσεται. Από σχετικιστική άποψη, το γεγονός αυτό δεν είναι ιδιαίτερα ευχάριστο, διότι αντιμετωπίζεται προνομιακά ένας παρατηρητής που μετρά τον συγκεκριμένο χρόνο (t). Το πρόβλημα αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό του παρόντος φορμαλισμού το οποίο δυστυχώς δεν μπορεί κανείς να αποφύγει, εφόσον θέλει να διατηρήσει τη γενικότητα, επιτρέποντας έτσι στην Lagrangian να είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση της θέσης και της ταχύτητας. Μπορούμε πάντως να είμαστε βέβαιοι ότι ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση το περιεχόμενο της θεωρίας που αναπτύσσεται είναι συμβατό με την σχετικότητα, ακόμη και αν οι εξισώσεις εμφανίζονται να παρουσιάζουν προνομιακό παρατηρητή (και ως προς το χώρο).

Αναπτύσσουμε λοιπόν τη Λαγκραντζιανή δυναμική με σκοπό να περάσουμε έπειτα στη Χαμιλτωνιανή δυναμική, ακολουθώντας αυστηρά τις μεθόδους που εφαρμόζονται όταν κανείς δουλεύει με γενικευμένες συντεταγμένες. Εξάγουμε λοιπόν τις Λαγκραντζιανές εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη μεταβολή του ολοκληρώματος δράσης.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_n} \qquad (1\text{-}2)$$

Για να περάσουμε στον φορμαλισμό Hamilton εισάγουμε την γενικευμένη ορμή.

$$p_n=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \qquad (1\text{-}3)$$

Στο σημείο αυτό στην συνήθη δυναμική θεώρηση, γίνεται η παραδοχή ότι η γενικευμένη ορμή είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας. Η παραδοχή αυτή περιορίζει κατά πολύ τις εφαρμογές που μας ενδιαφέρουν, οπότε δεχόμαστε ότι η γενικευμένη ορμή δύναται να είναι συνάρτηση που εξαρτάται από την ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές της γενικευμένης ορμής, του τύπου, $\varphi(q,p)=0$.

Και επειδή είναι πιθανόν να υπάρχουν αρκετές ανεξάρτητες σχέσεις αυτού του τύπου, εισάγουμε τον δείκτη m=1,……,M για να τις διαχωρίσουμε, οπότε

$$\varphi_m(q,p)=0 \qquad (1\text{-}4)$$

Τα q, p είναι οι δυναμικές μεταβλητές της Χαμιλτωνιανής θεώρησης.

Συνδέονται από τη σχέση (1-3) και ονομάζονται **πρωτογενείς σύνδεσμοι (Primary Constrains)** του Χαμιλτωνιανού φορμαλισμού.

Ας μελετήσουμε τώρα την ποσότητα : $p_n\dot{q}_n - L$ (οπουδήποτε υπάρχει επαναλαμβανόμενος δείκτης υποθέτουμε άθροιση για όλες τις τιμές αυτού του δείκτη). Μεταβάλλουμε τις μεταβλητές q, $\dot{q}$ που αφορούν τις γενικευμένες συντεταγμένες και τις ταχύτητες. Οι μεταβολές αυτές λόγω της σχέσης (1-3) θα μεταβάλλουν τη γενικευμένη ορμή ως εξής :

$$\delta(p_n\dot{q}_n - L) = \delta p_n\dot{q}_n + p_n\delta\dot{q}_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right)\delta q_n - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)\delta\dot{q}_n =$$

$$= \delta p_n\dot{q}_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right)\delta q_n \tag{1-5}$$

Παρατηρούμε ότι η μεταβολή της ποσότητας $p_n\dot{q}_n - L$ περιέχει μόνο τη μεταβολή των q, p. Στην έκφραση δεν περιλαμβάνεται η μεταβολή της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $p_n\dot{q}_n - L$ δύναται να εκφραστεί με όρους των q, p ανεξάρτητα από τις ταχύτητες και να ονομαστεί έτσι Χαμιλτωνιανή (H).

Παρ' όλα αυτά η Χαμιλτωνιανή (H) που ορίζεται με τον τρόπο αυτό δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη, διότι μπορούμε να την αθροίσουμε με οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό την φ, ο οποίος είναι μηδέν. Μπορούμε έτσι να μεταβούμε σε μία άλλη Χαμιλτωνιανή (H*).

$$H^* = H + c_m\varphi_m \tag{1-6}$$

όπου οι ποσότητες c_m είναι παράμετροι οι οποίες μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση των q, p. Η θεωρία τότε δεν διαφοροποιεί τις H, H* με αποτέλεσμα η Χαμιλτωνιανή να μην είναι μοναδικά καθορισμένη.

Από την σχέση (1-5) έχουμε :

$$\delta H=\dot{q}_n\delta p_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right)\cdot\delta q_n$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε μεταβολή των q, p υποκείμενη στην συνθήκη ότι οι σύνδεσμοι (1-4) διατηρούνται. Βλέπουμε λοιπόν ότι τα q, p δεν μπορούν να μεταβληθούν το ένα ανεξάρτητα από το άλλο, καθώς τους το επιβάλλει η σύνδεση (δεσμός) που έχουν μέσω της σχέσης (1-4), όμως για κάθε μεταβολή των q, p η οποία ικανοποιεί το δεσμό έχουμε την καθολική ισχύ της παραπάνω εξίσωσης.

Από τη γενική μέθοδο λογισμού μεταβολών που εφαρμόζεται σε μία διαφορετική εξίσωση με δεσμού αυτού του είδους παίρνουμε :

$$\dot{q}_n=\frac{\partial H}{\partial p_n}+u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \tag{1-7}$$

και

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n}=\frac{\partial H}{\partial q_n}+u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n}$$

ή

$$\dot{p}_n=-\frac{\partial H}{\partial q_n}-u_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_n} \tag{1-8}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1-2) και (1-3) όπου τα u_m είναι άγνωστοι συντελεστές παίρνουμε τις Χαμιλτωνιακές εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν την χρονική μεταβολή των q, p. Το πρόβλημα είναι οι άγνωστες παράμεροι (coefficients) που περιέχουν αυτές οι εξισώσεις.

Είναι βολικό να εισάγουμε έναν συγκεκριμένο φορμαλισμό ο οποίος θα μας επιτρέψει να εκφράσουμε τις παραπάνω εξισώσεις συνοπτικά· ονομάζεται Poisson bracket και περιλαμβάνει τα κάτωθι :

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις των q, p για παράδειγμα τις f(q,p) και g(q,p). Το Poisson bracket τους [f, g] ορίζεται ως εξής :

$$[f,g]=\frac{\partial f}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial g}{\partial p_n}-\frac{\partial f}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial g}{\partial q_n} \qquad (1\text{-}9)$$

Τα Poisson brackets έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό τους· αναφορικά :

- είναι αντισυμμετρικά στις f, g :
  $[f,g] = - [g,f]$ (1-10)

- ισχύει ο επιμερισμός :
  $[f_1+f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$ (1-11)

- η αντιμετάθεση :
  $[f_1 f_2, g] = f_1[f_2, g] + [f_1, g] f_2$ (1-12)

- τέλος ισχύει η ταχύτητα Jacobi :
  $[f,[g,h]] + [g,[h,f]]+ [h,[f,g]] = 0$ (1-13)

Κάνοντας χρήση των Poisson brackets μπορούμε να γράψουμε ξανά τις εξισώσεις κίνησης. Για κάθε συνάρτηση (g) των q,p έχουμε :

$$\dot{g}=\frac{\partial g}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n+\frac{\partial g}{\partial p_n}\dot{p}_n$$

(1-14)

εάν αντικαταστήσουμε στην (1-14) τις τιμές των $\dot{q}_n$, $\dot{p}_n$ που δίνονται από τις (1-7) και (1-8), παίρνουμε

$$\dot{g}=[g,H]+u_m[g,\varphi_m] \quad (1\text{-}15)$$

Εκφράσαμε λοιπόν με ακρίβεια τις εξισώσεις κίνησης, χρησιμοποιώντας τα Poisson brackets. Παρόλα αυτά υπάρχει η δυνατότητα να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης με ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια εάν επεκτείνουμε με κάποιον τρόπο την έννοια των Poisson brackets.

Όπως έχουν οριστεί, τα Poisson brackets έχουν νόημα μόνο για ποσότητες f, g οι οποίες εκφράζονται με όρους των q, p.

Μία πιο γενική μεταβλητή, όπως για παράδειγμα η γενικευμένη ταχύτητα, η οποία δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί με όρους των q, p δεν σχηματίχει Poisson brackets με κάποια άλλη ποσότητα.

Επεκτείνουμε λοιπόν την έννοια των Poisson brackets, υποθέτοντας ότι υπάρχουν για δύο οποιεσδήποτε ποσότητες και ότι ικανοποιούν τους νόμους (1-10), (1-11), (1-12), (1-13), δεν είναι όμως δυνατόν να προσδιοριστούν όταν οι ποσότητες δεν είναι συναρτήσεις των q, p.

Με την παραδοχή αυτή η (1-15) μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\dot{g}=[g,H+u_m\varphi_m] \quad (1\text{-}16)$$

Στην παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι οι συντελεστές (u) εμφανίζονται στο ένα μέλος του bracket. Οι συντελεστές u_m δεν είναι συναρτήσεις των q, p, οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (1-9) ώστε να προσδιορίσουμε το Poisson bracket της (1-16). Παρόλα αυτά μπορούμε να συνεχίσουμε τη μελέτη του bracket της (1-16), χρησιμοποιώντας τους νόμους (1-10), (1-11), (1-12) και (1-13).

Χρησιμοποιώντας τον προσθετικό νόμο (1-11) έχουμε :

$$[g,H + u_m \varphi_m] = [g,H] + [g, u_m \varphi_m]$$

ενώ από την (1-12) παίρνουμε :

$$[g, u_m \varphi_m] = [g, u_m]\, \varphi_m + u_m\, [g, \varphi_m] \tag{1-18}$$

Το τελευταίο bracket στην (1-18) είναι καλώς καθορισμένο, αφού οι ποσότητες g και φ_m είναι συναρτήσεις των q, p.

Το πρώτο bracket της (1-18), $[g, u_m]$ δεν είναι καθορισμένο, το γεγονός αυτό βέβαια δεν μας ενοχλεί ιδιαίτερα, αφού καθώς πολλαπλασιάζεται με το φm ο όρος αυτός εξαφανίζεται.

Το αποτέλεσμα τελικά είναι :

$$[g,H + u_m \varphi_m] = [g,H] + u_m\, [g, \varphi_m] \tag{1-19}$$

και οδηγεί τις (1-15), (1-16) σε συμφωνία.

Υπάρχει κάτι που πρέπει να προσέχουμε, καθώς δουλεύουμε με τον φορμαλισμό των Poisson brackets. Δεν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κανέναν από τους δεσμούς (1-4), πριν μετασχηματίσουμε το bracket, κάτι τέτοιο θα μας οδηγούσε σε λάθος αποτέλεσμα. Για να θυμόμαστε αυτό τον κανόνα γράφουμε τους δεσμούς (1-4) ως εξισώσεις με διαφορετικό σύμβολο ισότητας από το σύνηθες (→ ≈). Οπότε :

$$\varphi_m \approx 0 \qquad (1\text{-}20)$$

Ονομάζουμε δε, αυτές τις εξισώσεις, ασθενείς εξισώσεις, ώστε να τις ξεχωρίζουμε από τις υπόλοιπες (ισχυρές) εξισώσεις.

Μπορεί λοιπόν κανείς να χρησιμοποιήσει την (1-20) μόνο αφού πρώτα μετασχηματίσει τα brackets που τον ενδιαφέρουν.

Με την παραπάνω προϋπόθεση το bracket της (1-19) είναι πλέον επαρκώς καθορισμένο, οπότε έχουμε πια τη δυνατότητα να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης (1-16) σε συνοπτική μορφή.

$$\dot{g} \approx [g,H_T] \qquad (1\text{-}21)$$

με (H_T) μία Χαμιλτωνιανή : $H_T = H + u_m\varphi_m$ (1-22) την οποία ονομάζουμε Ολική Χαμιλτωνιανή.

Ας εξετάσουμε στο σημείο αυτό τις συνέπειες αυτών των εξισώσεων κίνησης. αρχικά, θα πρέπει να υπάρχουν κάποιες συνθήκες συνέπειας. Έχουμε τις ποσότητες φ που πρέπει να είναι μηδέν κάθε χρονική στιγμή. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις κίνησης (1-21) ή (1-15) παίρνοντας το g να είναι ίσο με κάποιο από τα φ. Γνωρίζουμε ότι για να ικανοποιείται η συνέπεια πρέπει το $\dot{g}$ να είναι μηδέν και έτσι παίρνουμε τις συνθήκες συνέχειας, θέτωντας $g=\varphi_m$ και $\dot{g}=0$ στην (1-15) παίρνουμε :

$$[\varphi_m, H] + u_{m'}\,[\varphi_m, \varphi_{m'}] \approx 0$$

Έχουμε έτσι έναν αριθμό από συνθήκες συνέπειας, μία για κάθε τιμή του m. Χρειάζεται να εξετάσουμε αυτές τις συνθήκες, ώστε να δούμε πού οδηγούν. Είναι πιθανόν να οδηγούν απευθείας, σε κάποια ασυνέπεια (1=0). Αν κάτι τέτοιο συμβεί, σημαίνει ότι η αρχική μας συνάρτηση Lagrange είναι τέτοια ώστε οι Λαγκραντζιανές εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν, είναι ασυνεπείς.

Εύκολα μπορεί κανείς να κατασκευάσει ένα παράδειγμα με έναν μόνο βαθμό ελευθερίας. Εάν θεωρήσουμε L=q τότε η Λαγκραντζιανή εξίσωση κίνησης (1-2) δίνει απευθείας 1=0. Οπότε βλέπουμε πως δεν μπορούμε να επιλέξουμε την Λαγκραντζιανή εντελώς αυθαίρετα.

Χρειάζεται να ενσωματώσουμε σε αυτή τη συνθήκη ότι οι Λαγκραντζιανές εξισώσεις κίνησης δεν θα περιέχουν κάποια ασυνέπεια. Με αυτό τον περιορισμό οι εξισώσεις (1-23) μπορούν να διαιρεθούν σε τρεις κατηγορίες.

1. Ένα είδος εξίσωσης που καταλήγει σε αποτέλεσμα που ικανοποιείται ταυτοτικά (→ αόριστη εξίσωση), για παράδειγμα 0=0, με τη βοήθεια βέβαια του πρωτεύοντος συνδέσμου (primary constrain).
2. Ένα άλλο είδος εξίσωσης που καταλήγει σε εξίσωση ανεξάρτητη των u και περιέχει μόνο τα q, p. Μία τέτοια εξίσωση πρέπει να είναι ανεξάρτητη των πρωτευόντων συνδέσμων, διαφορετικά η περίπτωση ανάγεται στην πρώτη κατηγορία (1). Είναι δηλαδή της μορφής :

$$\chi(q,p) = 0 \qquad (1\text{-}24)$$

3. Τέλος, μία εξίσωση της μορφής (1-23) είναι δυνατόν να μην δίνει αποτέλεσμα του τύπου 1 ή 2, τότε περιέχει μία συνθήκη για τα u.

Με την πρώτη περίπτωση (1) δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε άλλο. Κάθε εξίσωση που ανήκει στη δεύτερη περίπτωση (2) δείχνει ότι υπάρχει ακόμη ένας δεσμός μεταξύ των Χαμιλτωνιανών μεταβλητών q, p. Τέτοιου τύπου δεσμοί που αναδεικνύονται με αυτό τον τρόπο ονομάζονται δευτερογενείς σύνδεσμοι (secondary constrains). Διαφέρουν από τους πρωτεύοντες συνδέσμους στο εξής : οι πρωτεύοντες σύνδεσμοι είναι συνέπεια των εξισώσεων (1-3) που ορίζεται η γενικευμέν η ορμή, ενώ για τους δευτερογενείς συνδέσμους χρειάζεται κανείς να χρησιμοποιήσει και τις Λαγκραντζιανές εξισώσεις κίνησης.

Για τον δευτερογενή σύνδεσμο που προκύπτει χρειαζόμαστε ακόμα μία συνθήκη συνέπειας, διότι μπορούμε να εργαστούμε με το $\dot{\chi}$ σύμφωνα με την εξίσωση κίνησης (1-15) και απαιτούμε ότι : $\dot{\chi} \approx 0$. Παίρνουμε έτσι ακόμα μία εξίσωση :

$$[\chi, H] + u_m[\chi, \varphi_m] \approx 0 \qquad (1\text{-}25)$$

Την εξίσωση αυτή χρειάζεται να διαχειριστούμε με τον ίδιο τρόπο όπως την (1-23). Χρειάζεται αρχικά να εξετάσουμε σε ποια από τις τρεις κατηγορίες ανήκει. Εάν ανήκει στη δεύτερη κατηγορία, τότε έχουμε έναν ακόμα δευτερογενή σύνδεσμο, οπότε επαναλαμβάνουμε και για αυτόν την παραπάνω διαδικασία. Συνεχίζουμε έτσι με τον τρόπο αυτό μέχρις ότου εξαντλήσουμε όλες τις συνθήκες συνέπειας. Το αποτέλεσμα είναι να καταλήφουμε τελικά με έναν αριθμό δευτερευόντων συνδέσμων της μορφής (1-24) μαζί με ένα πλήθος συνθηκών για τους συντελεστές u της μορφής (1-23).

Τους δευτερεύοντες συνδέσμους τους διαχειριζόμαστε με τον ίδιο τρόπο που διαχειριζόμαστε τους πρωτεύοντες. Εξυπηρετεί να τους συμβολίσουμε ως εξής :

$$\varphi_k \approx 0 \ , \ k = M + 1, \ldots\ldots\ldots, M + K \qquad (1\text{-}26)$$

όπου K είναι ο συνολικός αριθμός των δευτευόντων συνδέσμων. Χρειάζεται να γραφούν σαν ασθενείς εξισώσεις, όπως οι πρωτεύοντες σύνδεσμοι, καθώς πρόκειται για εξισώσεις που δεν χρησιμοποιούμε προτού μετασχηματίσουμε τα Poisson brackets.

Οπότε όλοι μαζί οι δεσμοί μπορούν να γραφούν ως :

$$\Phi_J \approx 0 \ , \ J = 1, \ldots\ldots\ldots, M + K = \bar{J} \qquad (1\text{-}27)$$

Ας πάμε τώρα στις εναπομείνασες εξισώσεις της τρίτης κατηγορίας 3. Χρειάζεται να εξετάσουμε τι συνθήκες παράγουν για τους συντελεστές u. Οι εξισώσεις αυτές είναι :

$$[\varphi_J,H] + u_m[\varphi_J,\varphi_m] \approx 0 \qquad (1\text{-}28)$$

όπου το m αθροίζεται από 1 μέχρι M και το J παίρνει κάθε τιμή από 1 μέχρι $\bar{J}$.

Έχουμε αυτές τις εξισώσεις να περιλαμβάνουν συνθήκες για τους συντελεστές u, που μέχρι στιγμής δεν μας οδηγούν στις εξισώσεις των δεσμών. Ας τις δούμε λοιπόν από την εξής οπτική. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές u είναι άγνωστοι και ότι στην (1-28) έχουμε έναν αριθμό από μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις για αυτά τα άγνωστα u, με συντελεστές που είναι συναρτήσεις των q, p. Αναζητούμε μία λύση για αυτές τις εξισώσεις, η οποία μας δίνει τα u σαν συναρτήσεις των q, p, ώστε :

$$u_m = u_m(q,p) \qquad (1\text{-}29)$$

Λύση αυτού του τύπου πρέπει να υπάρχει διότι σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε ασυνεπείς. Λαγκραντζιανές εξισώσεις κίνησης.

Η λύση αυτή δεν είναι μοναδική, εάν βρούμε μία λύση μπορούμε να την προσθέσουμε σε μία οποιαδήποτε λύση $V_m(q,p)$ των ομογενών εξισώσεων που σχετίζονται με την (1-28) :

$$V_m[\varphi_J,\varphi_m] = 0 \qquad (1\text{-}30)$$

και να έχουμε έτσι ακόμα μία λύση των εξισώσεων (1-28).

Θέλουμε την πιο γενική λύση της (1-28) και αυτό σημαίνει ότι πρέπει να θεωρήσουμε όλες τις ανεξάρτητες λύσεις της (1-30). Τις συμβολίζουμε με :

$$V_{\alpha m}(q,p) \qquad \alpha = 1,\ldots\ldots\ldots, A$$

Η γενική λύση της (1-28) είναι τότε :

$$u_m = u_m + u_\alpha V_{\alpha m}$$

με τους συντελεστές u_α να είναι τυχαίοι.

Δεδομένων των παραπάνω εκφράσεων για το u η ολική Χαμιλτωνιανή της σχέσης (1-22) γίνεται :

$$H_T = H + u_m\varphi_m + u_\alpha V_{\alpha m}\varphi_m \qquad (1\text{-}32)$$

και μπορεί να γραφεί ως :

$$H_T = H' + u_\alpha\varphi_\alpha \qquad (1\text{-}33)$$

όπου $H' = H + u_m\varphi_m$ (1-33)’

και $\varphi_\alpha = V_{\alpha m}\varphi_m$ (1-34)

Σε όρους της ολικής Χαμιλτωνιανής (1-33) οι εξισώσεις κίνησης (1-21) συνεχίζουν να διατηρούν την ισχύ τους.

Σαν αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης, ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες συνέπειας και οι συντελεστές u παραμένουν αυθαίρετοι. Το πλήθος των συντελεστών u είναι συνήθως μικρότερο από εκείνο των συντελεστών u. Τα u δεν είναι αυθαίρετα, χρειάζεται να ικανοποιούν συνθήκες συνέπειας, ενώ τα u είναι τυχαίοι συντελεστές.

Μπορεί κανείς να επιλέξει τους συντελεστές u να είναι τυχαίες συναρτήσεις του χρόνου, ακόμη και στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες που ετέθησαν πληρούνται.

Το γεγονός αυτό διαφοροποιεί τον φορμαλισμό της γενικευμένης Χαμιλτωνιανής από τον συνήθη που χρησιμοποιείται στην αναλυτική δυναμική. Έχουμε τυχαίες συναρτήσεις του χρόνου να εμφανίζονται στη γενική λύση των εξισώσεων κίνησης με δοσμένες αρχικές συνθήκες. Αυτές οι αυθαίρετες συναρτήσεις δείχνουν ότι χρησιμοποιούμε ένα μαθηματικό πλαίσιο που περιέχει χαρακτηριστικά τυχαιότητας, όπως για παράδειγμα ένα σύστημα συντεταγμένων που μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα, με τυχαίο τρόπο, ή η βαθμίδα στην ηλεκτροδυναμική.

Αυτό το υποκειμενικό μαθηματικό πλαίσιο έχει σαν αποτέλεσμα οι τιμές των δυναμικών μεταβλητών σε μέλλοντες χρόνους να μην καθορίζονται πλήρως από τις αρχικές τους τιμές. Το γεγονός αυτό αποκαλύπτεται μέσα από τις αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου που εμφανίζονται στη γενική λύση.

Χρειάζεται να αναπτυχθεί μια κατάλληλη ορολογία που θα επιτρέπει σε κάποιον να εκτιμήσει τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων που εμφανίζονται.

Ορίζεται λοιπόν, κάθε δυναμική μεταβλητή, R, συνάρτηση των q, p να είναι πρώτης τάξης εάν σχηματίζει με όλα τα φ μηδενική αγκύλη Poisson.

$$[R,\varphi_J] \approx 0 \text{ , } J = 1, \ldots\ldots\ldots \bar{J} \qquad (1\text{-}35)$$

Η ασθενής ισότητα είναι επαρκής, ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η δυναμική μεταβλητή (R) είναι δεύτερης τάξης. Εάν η R είναι πρώτης τάξης, τότε η αγκύλη $[R,\varphi_J]$ πρέπει να σχηματίζει ισχυρή ισότητα με κάποια συνάρτηση που είναι γραμμικός συνδυασμός των φ, όπως άλλωστε κάθετι που σχηματίζει ασθενή ισότητα στην παρούσα θεώρηση, αποτελεί ισχυρή ισότητα με κάποια γραμμική συνάρτηση των φ. Τα φ είναι εξ ορισμού οι μόνες ανεξάρτητες ποσότητες που είναι ασθενώς, μηδέν. Καταλήγουμε λοιπόν στην ισχυρή εξίσωση

$$[R,\varphi_J] = r_{JJ'}\varphi_{J'} \qquad (1\text{-}35)$$

Στο σημείο αυτό παρατίθεται το εξής θεώρημα : Η αγκύλη Poisson δύο ποσοτήτων που είναι πρώτης τάξης, είναι επίσης πρώτης τάξης.

Απόδειξη :

Θεωρούμε την αγκύλη $[[R,S], \varphi_J]$ με τις ποσότητες R,S να είναι πρώτης τάξης, σε αντιδιαστολή με την (1-36) είναι,

$$[S, \varphi_J] = S_{JJ'}\varphi_{J'} \qquad (1\text{-}36)'$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα Jacobi (1-13) στην αγκύλη $[[R,S],\varphi_J]$ έχουμε:

$[[R,S],\varphi_J] = [[R,\varphi_J],S] - [[S,\varphi_J],R] = [r_{JJ'}\varphi_{J'},S] - [S_{JJ'}\varphi_{J'},R] = r_{JJ'}[\varphi_{J'},S] + [r_{JJ'},S]\varphi_{J'} - S_{JJ'}[\varphi_{J'},R] - [S_{JJ'},R]\varphi_{J'} \approx 0$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1-36), (1-36)’, (1-12) και την (1-20), δείξαμε ότι η αγκύλη [R,S] είναι πρώτης τάξης.

Υπάρχουν λοιπόν, τέσσερα διαφορετικά είδη συνδέσμων. Οι σύνδεσμοι μπορούν να χωρισθούν σε πρώτης και δεύτερης τάξης, με τη διάκριση αυτή να είναι ανεξάρτητη από τη διαίρεσή τους σε πρωτογενείς και δευτερογενείς.

Υπενθυμίζουμε ότι η H’ που δίνεται από την (1-33)’ και η φ_α που δίνεται από την (1-34), είναι πρώτης τάξης.

Σχηματίζοντας την αγκύλη Poisson των φ_α με τα φ_J, από την (1-34) παίρνουμε $V_{\alpha m}[\varphi_m,\varphi_J)$ επιπλέον όρους οι οποίοι εξανίζονται ασθενώς. Εφόσον οι όροι $V_{\alpha m}$ έχουν οριστεί ώστε να ικανοποιούν την (1-30), τα φ_α είναι πρώτης τάξης. Ομοίως, η (1-28) με τα U_m για τα u_m δείχνει ότι η H’ είναι πρώτης τάξης.

Έτσι, η (1-33) δίνει την ολική Χαμιλτωνιακή σε όρους μιας πρώτης τάξης Χαμιλτωνιανή H’, μαζί με πρώτης τάξης συνδέσμους φ.

Κάθε γραμμικός συνδυασμός των φ είναι φυσικά ένας ακόμη δεσμός και κάθε γραμμικός συνδυασμός των πρωτογενών συνδέσμων είναι ένας ακόμη πρωτογενής σύνδεσμος. Οπότε κάθε φ_α είναι πρωτογενής σύνδεσμος και είναι πρώτης τάξης.

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία ολική Χαμιλτωνιανή που στην έκφρασή της περιέχει το άθροισμα μιας πρώτης τάξης Χαμιλτωνιανής με τον γραμμικό συνδυασμό των πρωτογενών, πρώτης τάξης συνδέσμων.

Ο αριθμός των ανεξάρτητων και αυθαίρετων συναρτήσεων του χρόνου, που εμφανίζονται στη γενική λύση των εξισώσεων κίνησης, είναι ίσος με το πλήθος των τιμών του δείκτη α. Ίσος, δηλαδή με τον αριθμό των ανεξάρτητων πρωτογενών συνδέσμων, και αυτό διότι όλοι οι ανεξάρτητοι πρωτογενείς σύνδεσμοι περιλαμβάνονται στην άθροιση (1-33).

Στα συμπεράσματα αυτά καταλήξαμε, ξεκινώντας από τις εξισώσεις κίνησης Lagrange, περνώντας έπειτα στη Χαμιλτωνιανή και λαμβάνοντας υπόψη, τέλος, τις συνθήκες συνέπειας.

Από πρακτικής άποψης, μπορεί κανείς να δει ποιες αυθαίρετες συναρτήσεις του χρόνου εμφανίζονται στη γενική λύση των εξισώσεων κίνησης από τις ιδιότητες μετασχηματισμού του ολοκληρώματος δράσης. Σε κάθε μία από αυτές τις τυχαίες συναρτήσεις του χρόνου αντιστοιχεί ένας πρωτογενής σύνδεσμος.

Παρέχεται έτσι η δυνατότητα να διακρίνουμε τους πρωτογενείς πρώτης τάξης συνδέσμους χωρίς να προχωρήσουμε στους αναλυτικούς και επίπονους υπολογισμούς των αγκύλων Poisson.

Η φυσική κατάσταση του συστήματος που εξετάζουμε έχει ως εξής : ξεκινάμε από τις δοθείσες αρχικές μεταβλητές και παίρνουμε μία λύση των εξισώσεων κίνησης, η οποία περιέχει αυθαίρετες συναρτήσεις. Οι αρχικές μεταβλητές που μας χρειάζονται είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες q, p, ενώ δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τις αρχικές τιμές των συντελεστών υ. Αυτές οι αρχικές τιμές περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος. Η φυσική κατάσταση του συστήματος καθορίζεται μόνο από τις γενικευμένες συντεταγμένες q, p και όχι από τους συντελεστές υ. Η αρχική κατάσταση του συστήματος πρέπει να καθορίζει τη χρονική του εξέλιξη, αλλά οι γενικευμένες συντεταγμένες q, p σε μέλλοντες χρόνους δεν προσδιορίζονται μονοσήμαντα λόγω των αυθαίρετων συναρτήσεων u που εμφανίζονται. Αυτό σημαίνει ότι μία συγκεκριμένη κατάσταση του συστήματος δεν αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ζεύγος q, p παρότι ένα συγκεκριμένο ζεύγος q, p καθορίζει πλήρως μία κατάσταση του συστήματος. Υπάρχουν λοιπόν αρκετά ζεύγη q, p που περιγράφουν την ίδια κατάσταση και τα οποία χρειάζεται να αναζητήσουμε.

Όλες οι τιμές των q, p που έχουν εξελιχθεί από μία συγκεκριμένη αρχική κατάσταση, πρέπει μία δεδομένη χρονική στιγμή να ανταποκρίνονται στην κατάσταση του συστήματος, τη στιγμή αυτή.

Θεωρούμε λοιπόν συγκεκριμένες αρχικές τιμές για τις γενικευμένες συντεταγμένες q, p τη χρονική στιγμή t=0 και μελετάμε τη συμπεριφορά τους μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα δ_t. Γενικά, για μία δυναμική μεταβλητή g με αρχική τιμή g_0, η εξέλιξή της μετά από χρόνο δ_t είναι :

$$g(\delta_t) = g_0 + \dot{g}\,\delta_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad g(\delta_t) = g_0 + [g,H_J]\,\delta_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad g(\delta_t) = g_0 + \delta_t\{[g,H'] + u_\alpha[g,\varphi_\alpha]\} \tag{1-37}$$

Οι συντελεστές u είναι εντελώς αυθαίρετοι και δύναται να απαλειφθούν. Θεωρώντας διαφορετικές τιμές u' για αυτούς τους συντελεστές παίρνουμε ένα διαφορετικό $g(\delta_t)$. Η διαφορά $\Delta g(\delta_t)$ είναι :

$$\Delta g(\delta_t) = \delta_t(u_\alpha - u_{\alpha'}) \cdot [g,\varphi_\alpha] \tag{1-38}$$

και μπορεί να γραφεί ως :

$$\Delta g(\delta_t) = \varepsilon_\alpha\,[g,\varphi_\alpha] \qquad (1\text{-}39)$$

όπου $\varepsilon_\alpha = \delta_t(\upsilon_\alpha - \upsilon_{\alpha'})$ (1-40)

είναι ένας μικρός αυθαίρετος αριθμός, μικρός λόγω του συντελεστή δ_t και αυθαίρετος λόγω των υ, υ'. Από το νόμο (1-39) μπορούμε να μετασχηματίσουμε όλες τις Χαμιλτωνιανές μεταβλητές με τις νέες να περιγράφουν την ίδια φυσικά κατάσταση. Αυτή η αλλαγή στις Χαμιλτωνιανές μεταβλητές περιέχει την εφαρμογή ενός απειροστού μετασχηματισμού επαφής με μία γεννήτρια συνάρτηση $\varepsilon_\alpha\varphi_\alpha$. Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι τα φ_α που παρουσιάζονται εκ πρώτης ως πρωτογενείς πρώτης τάξεως σύνδεσμοι έχουν το εξής νόημα : ως γεννήτριες συναρτήσεις απειροστών μετασχηματισμών επαφής οδηγούν σε αλλαγές των q, p, οι οποίες δεν επηρεάζουν την κατάσταση του συστήματος.

Προχωρώντας ένα ακόμη βήμα προς την ίδια κατεύθυνση, εφαρμόζουμε διαδοχικά δύο μετασχηματισμούς επαφής. Τον πρώτο με μία γεννήτρια συνάρτηση $\varepsilon_\alpha\varphi_\alpha$ και τον δεύτερο με γεννήτρια συνάρτηση $\gamma_{\alpha'}\varphi_{\alpha'}$, όπου τα γ είναι κάποιοι νέοι συντελεστές μικρής τάξης μεγέθους. Το αποτέλεσμα είναι :

$$g' = g_0 + \varepsilon_\alpha[g,\varphi_\alpha] + \gamma_{\alpha'}[g + \varepsilon_\alpha[g,\varphi_\alpha],\ \varphi_{\alpha'}] \qquad (1\text{-}41)$$

(Στην παραπάνω έκφραση διατηρούμε τους όρους δεύτερης τάξης που περιέχουν τα ε, γ και παραλείπονται οι δεύτερης τάξης όροι που περιέχουν ε^2 ή γ^2 και δεν είναι απαραίτητοι ώστε να λάβουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα)

Εάν εφαρμόσουμε τους δύο παραπάνω μετασχηματισμούς με την αντίθετη σειρά το αποτέλεσμα είναι :

$$g'' = g_0 + \gamma_{\alpha'}[g,\varphi_{\alpha'}] + \varepsilon_\alpha[g + \gamma_{\alpha'}[g,\varphi_{\alpha'}],\ \varphi_\alpha] \tag{1-42}$$

θεωρώντας την διαφορά Δg το αποτέλεσμα είναι :

$$\Delta g = \varepsilon_\alpha\gamma_{\alpha'}\{[[g,\varphi_\alpha],\varphi_{\alpha'}] - [[g,\varphi_{\alpha'}],\varphi_\alpha]\} \tag{1-43}$$

Και εφαρμόζοντας την ταυτότητα Jacobi (1-13) έχουμε :

$$\Delta g = \varepsilon_\alpha\gamma_{\alpha'}[g[\varphi_\alpha,\varphi_{\alpha'}]] \tag{1-44}$$

Αυτή η διαφορά (Δg) πρέπει επίσης να ανταποκρίνεται σε μία αλλαγή των q, p η οποία δεν περιγράφει καμία μεταβολή στην φυσική κατάσταση του συστήματος, διότι προέρχεται από ανεξάρτητες διαδικασίες οι οποίες δεν σχετίζονται με οποιαδήποτε μεταβολή στη φυσική κατάσταση του συστήματος. Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι η έκφραση

$$[\varphi_\alpha,\varphi_{\alpha'}] \qquad \text{(πιθανός δευτερογενής σύνδεσμος)} \tag{1-45}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γεννήτρια συνάρτηση ενός απειροστού μετασχηματισμού επαφής, χωρίς να προκαλέσει την οποιαδήποτε αλλαγή στην κατάσταση του συστήματος.

Τα φ_α είναι πρώτης τάξης, αυτό σημαίνει ότι οι αγκύλες Poisson που σχηματίζουν είναι ασθενώς μηδέν, οπότε εξισώνονται ισχυρά με κάποια γραμμική συνάρτηση των φ. Αυτή η γραμμική συνάρτηση των φ χρειάζεται να είναι πρώτης τάξης, λόγω του θεωρήματος που δείξαμε λίγο νωρίτερα. Βλέπουμε λοιπόν ότι τέτοιου είδους μετασχηματισμοί, που δεν σχετίζονται με μεταβολές στην κατάσταση του συστήματος, έχουν ως γεννήτρια συνάρτηση έναν σύνδεσμο πρώτης τάξης.

Ο μόνος τρόπος, ώστε οι μετασχηματισμοί αυτοί να είναι πιο γενικοί από τους προηγούμενους είναι να απαγορεύσουμε στις γεννήτριες συναρτήσεις να είναι πρωτογενείς σύνδεσμοι πρώτης τάξης, αλλά θα μπορούσαν κάλλιστα να είναι δευτερογενείς σύνδεσμοι πρώτης τάξης. Αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού είναι το να δείξουμε ότι υπάρχει η δυνατότητα να έχουμε έναν δευτερογενή σύνδεσμο πρώτης τάξης ως γεννήτρια συνάρτηση ενός απειροστού μετασχηματισμού επαφής που οδηγεί σε αλλαγή των δυναμικών μεταβλητών q, p χωρίς να μεταβάλλεται η φυσική κατάσταση του συστήματος.

Προς χάριν της πληρότητας, χρειάζεται κανείς να δείξει ότι η αγκύλη Poisson (H', φ_α) μιας πρώτης τάξεως Χαμιλτωνιανής H' με ένα πρώτης τάξης φ αποτελεί μία γραμμική συνάρτηση πρώτης τάξης συνδέσμων και ότι ενδεχομένως είναι γεννήτορας απειροστών μετασχηματισμών επαφής οι οποίοι δεν μεταβάλλουν την κατάσταση του συστήματος.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί των δυναμικών μεταβλητών οι οποίοι δεν μεταβάλλουν την φυσική κατάσταση του συστήματος είναι απειροστοί μετασχηματισμοί επαφής, όπου η γεννήτρια συνάρτηση είναι πρωτογενής σύνδεσμος πρώτης τάξης ή πιθανώς ένας δευτερογενής σύνδεσμος πρώτης τάξης.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΩΣΗΣ

Οδηγηθήκαμε στην ιδέα ότι υπάρχουν συγκεκριμένες αλλαγές στα q, p, οι οποίες δεν ανταποκρίνονται σε κάποια μεταβολή της κατάστασης του συστήματος και οι οποίες έχουν ως γεννήτριες δευτερογενείς συνδέσμους πρώτης τάξης. Κάτι τέτοιο υποδεικνύει ότι οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γενικευθούν έτσι ώστε να είναι δυνατή η μεταβολή μίας δυναμικής μεταβλητής g με το χρόνο, όχι μόνο με τον τρόπο που επιβάλλει η σχέση (1-21), αλλά γενικότερα με κάθε τρόπο που δεν ανταποκρίνεται σε αλλαγή της κατάστασης του συστήματος.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε μία πιο γενική εξίσωση κίνησης :

$$\dot{g} = [g, H_E] \qquad (2\text{-}1)$$

με μία γενικευμένη Hamiltonian H_E, που περιλαμβάνει την προηγούμενη Hamiltonian H_T, και όλους εκείνους τους γεννήτορες οι οποίοι δεν οδηγούν σε αλλαγή της κατάστασης με αυθαίρετους συντελεστές $u_{\alpha'}$:

$$H_E = H_T + u_{\alpha}\cdot\varphi_{\alpha'} \qquad (2\text{-}2)$$

Οι γεννήτορες εκείνοι ($\varphi_{\alpha'}$), οι οποίοι δεν περιλαμβάνονται ήδη στην H_T αποτελούν τους δευτερογενείς, πρώτης τάξης συνδέσμους.

Η παρουσία αυτών των επιπλέον όρων της Hamiltonian επιφέρει επιπλέον αλλαγές στα g, αλλά οι αλλαγές εκείνες δεν ανταποκρίνονται σε κάποια μεταβολή της κατάστασης, οπότε πρέπει να περιλαμβάνονται, παρότι δεν οδηγηθήκαμε σε αυτές απευθείας, από τη Lagrangian.

Αυτή λοιπόν είναι η γενική Χαμιλτωνιανή θεώρηση. Η θεωρία Dirac, που αναπτύσσεται στην παρούσα εργασία αναφέρεται μέχρι πρότινος σεένα πεπερασμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας, μα στη συνέχεια επεκτείνεται θεωρώντας άπειρους βαθμούς ελευθερίας. Ο δείκτης που αναφέρεται στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος που εξετάζουμε είναι : n=1, …, N·. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί κανείς να θεωρήσει το N να τείνει στο άπειρο. Είναι ακόμη δυνατή μία επιπλέον γενίκευση, εάν θεωρήσουμε τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας να είναι συνεχώς άπειρος. Και αυτό το πετυχαίνουμε εάν θεωρήσουμε ως δυναμικές μεταβλητές του συστήματος, έναντι των q, p τις q_x, p_x, όπου ο δείκτης x δύναται να λάβει όλες τις δυνατές τιμές σε ένα συνεχές φάσμα. Εάν εργαστούμε με αυτό το συνεχές x, θα πρέπει να μεταβάλλουμε όλες τις αθροίσεις του n στα προηγούμενα ολοκληρώματα. Όλοι οι υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί μπορούν να ληφθούν απευθείας υπόψιν ενσωματώνοντας την ανωτέρω θεώρηση. Η μόνη εξίσωση που χρειάζεται να εξετάσουμε λίγο διαφορετικά, είναι η εξίσωση που ορίζει τη γενικευμένη ορμή.

$$p_n = \frac{dL}{d\dot{q}_n} \tag{1-3}$$

Εάν ο δείκτης n λάβει τιμές από ένα συνεχές φάσμα, χρειάζεται από την παραπάνω μερική παράγωγο να κατανοήσουμε μία διαδικασία μερικής παραγώγησης συνάρτησης, η οποία μπορεί να γίνει ακριβής με τον εξής τρόπο :

Εάν μεταβάλλουμε τις ταχύτητες κατά $\delta\dot{q}_x$ στη Lagrangian και θεωρήσουμε

$$\delta L = \int p_x \delta\dot{q}_x \tag{2-3}$$

ο συντελεστής του $\delta\dot{q}_x$ που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα δL ορίζεται να είναι p_x.

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο Maxwell

Μετά την παραπάνω γενική θεώρηση δίνεται ως παράδειγμα το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του Maxwell, το οποίο καθορίζεται με όρους των δυναμικών A_μ.

Οι δυναμικές συντεταγμένες περιλαμβάνουν τα δυναμικά για όλα τα σημεία του χώρου μία δεδομένη χρονική στιγμή, περιέχουν δηλαδή τους όρους $A_{\mu x}$, όπου ο δείκτης x παριστά για τις τρεις συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 ένα σημείο στον τρισδιάστατο χώρο, για μία δεδομένη χρονική στιγμή x^0. Κατά συνέπεια οι ταχύτητες προκύπτουν από τη χρονική παράγωγο των δυναμικών συντεταγμένων, τις οποίες συμβολίζουμε με έναν δείκτη (ο) ακολουθούμενο από ένα κόμμα.

Κάθε δείκτης πριν από τον οποίο προηγείται κόμμα δηλώνει παραγώγηση σύμφωνα με το παρακάτω γενικό σχήμα :

$$\xi_{,\mu} = \frac{d\xi}{dx^\mu} \qquad (2\text{-}4)$$

Λόγω του ότι εργαζόμαστε με ειδική σχετικότητα ανεβάζουμε και κατεβάζουμε τους δείκτες σύμφωνα με τους κανόνες της ειδικής σχετικότητας : ο συμβολισμός αλλάζει εάν ανεβάσουμε ή κατεβάσουμε έναν από τους δείκτες 1, 2 ή 3 ενώ παραμένει ο ίδιος εάν ανεβάσουμε ή κατεβάσουμε τον δείκτη (ο).

Σε μονάδες Heaviside ή Lagrangian που περιγράφει την ηλεκτροδυναμική του Maxwell είναι :

$$L = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}\, d^3x \qquad (2\text{-}5)$$

Στην παραπάνω σχέση η έκφραση $d^3{}_x$ σημαίνει $d_x{}^1$, $d_x{}^2$, $d_x{}^3$ η ολοκλήρωση γίνεται στις τρεις διαστάσεις του χώρου, ενώ η έκφραση $f_{\mu\nu}$ δηλώνει το πεδίο σε όρους δυναμικών, σύμφωνα με τη σχέση

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \qquad (2\text{-}6)$$

Η Lagrangian που ορίζεται από τη σχέση (2-5) είναι η κατάλληλη, διότι το ολοκλήρωμα που την ορίζει είναι το ολοκλήρωμα δράσης του πεδίου Maxwell.

Για να περάσουμε από τη Lagrangian στη Hamiltonian του συστήματος χρειάζεται αρχικά να εισάγουμε τη γενικευμένη ορμή. Αυτό το πετυχαίνουμε μεταβάλλοντας τις ταχύτητες στην έκφραση της Lagrangian :

$$\delta L = -\frac{1}{2}\int F^{\mu\nu} \cdot \delta F_{\mu\nu} \cdot d^3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \delta L = \int F^{\mu o}\, \delta A_{\mu,o} \cdot d^3x \qquad (2\text{-}7)$$

Η γενικευμένη ορμή B^μ ορίζεται από τη σχέση :

$$\delta L = \int B^{\mu}\, \delta A_{\mu o} \cdot d^3x \qquad (2\text{-}8)$$

και πρέπει να ικανοποιεί τις βασικές σχέσεις που καθορίζονται από τις αγκύλες Poisson.

$$[A_{\mu x}, B^{\nu}_{x'}] = g^{\nu}_{\mu} \cdot \delta^3(x-x'),\ \mu,\nu = 0,1,2,3 \qquad (2\text{-}9)$$

Στην παραπάνω σχέση τα A, B λαμβάνονται αντίστοιχα στα σημεία x, x' του τρισδιάστατου χώρου, ενώ τα σύμβολα g^{ν}_{μ}, $\delta^3(x-x')$ είναι αντίστοιχα το δέλτα του Kronecker και η τριασδιάστατη συνάρτηση δέλτα των x, x'.

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις (2-7), (2-8) για το δL παίρνουμε :

$$B^{\mu} = F^{\mu 0} \qquad (2\text{-}10)$$

Ο όρος $F^{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός.

$$F^{\mu\nu} = - F^{\nu\mu} \qquad (2\text{-}11)$$

Οπότε εάν θέσουμε στην (2-10), μ=0 το αποτέλεσμα είναι μηδέν, δηλαδή ο όρος B^0_x είναι ίσος με μηδέν. Πρόκειται λοιπόν για έναν πρωτογενή σύνδεσμο, οπότε γράφεται ως ασθενής ισότητα :

$$B^0_x \approx 0 \qquad (2\text{-}12)$$

Τονίζουμε ότι δεν πρόκειται απλά για έναν πρωτογενή σύνδεσμο, η εξίσωση (2-12) ορίζει μία μονοσήμαντα απειρίζουσα τριάδα πρωτογενών συνδέσμων, διότι λόγω του δείκτη x που παριστά ένα σημείο στον τριασδιάστατο χώρο προκύπτει ένας διαφορετικός πρωτογενής σύνδεσμος. Γίνεται λοιπόν άμεσα αντιληπτό ότι τα άπειρα σημεία του τρισδιάστατου χώρου που κάθε ένα από αυτά συμβολίζεται από μία διαφορετική τιμή του δείκτη x ορίζει έναν διαφορετικό πρωτογενή σύνδεσμο.

Ορίζουμε στη συνέχεια με το συνήθη τρόπο τη Hamiltonian που περιγράφει το σύστημα :

$$H = \int B^{\mu} A_{\mu,o} d_x^3 - L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad H = \int (F^{ro} A_{r,o} + \tfrac{1}{4} F^{rs} F_{rs} + \tfrac{1}{2} F^{ro} F_{ro}) d_x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad H = \int (\tfrac{1}{4} F^{rs} F_{rs} + \tfrac{1}{2} F^{ro} F_{ro} + F^{ro} A_{o,r}) d_x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad H = \int (\tfrac{1}{4} F^{rs} F_{rs} + \tfrac{1}{2} B^r B^r - A_o B^r_{,r}) d_x^3 \qquad (2\text{-}13)$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία έκφραση της Hamiltonian η οποία δεν περιέχει ταχύτητες αλλά μόνο δυναμικές συντεταγμένες και ορμή και παρότι ο όρος F_{rs} περιλαμβάνει μερικές παραγώγους των συναρτήσεων δυναμικού, οι παράγωγοι αυτοί αναφέρονται μόνο στις θέσεις x^1, x^2, x^3. Δεν εμφανίζονται λοιπόν πουθενά ταχύτητες.

Προχωράμε λοιπόν δουλεύοντας με τις συνθήκες συνέπειας που προκύπτουν από τον πρωτογενή σύνδεσμο (2-12). Η εξίσωση (2-12) χρειάζεται να ικανοποιείται κάθε χρονική στιγμή, οπότε η αγκύλη $[B^o, H)$ χρειάζεται να είναι μηδέν. Αυτό οδηγεί στην ασθενή εξίσωση

$$B_{,r}^{r} \approx 0 \qquad (2\text{-}14)$$

που αποτελεί έναν ακόμη σύνδεσμο, εφόσον δεν περιέχει ταχύτητες. Πρόκειται για ένα δευτερογενή σύνδεσμο που εμφανίζεται στη θεωρία του Maxwell με τον τρόπο αυτό.

Εξετάζοντας περαιτέρω τις συνθήκες συνέπειας, έχουμε τη σχέση

$$[B_{,r}^{r}, H] = 0 \qquad (2\text{-}15)$$

η οποία ικανοποιείται ταυτοτικά (0=0), χωρίς να δίνει κάποιον νέο σύνδεσμο.

Έχουμε λοιπόν πλέον εντοπίσει όλους τους δεσμούς.

Οι εξισώσεις (2-12), (2-14) μας δίνουν αντίστοιχα τους πρωτογενείς και τους δευτερογενείς συνδέσμους του προβλήματος. Στο σημείο αυτό χρειάζεται να τους διαχωρίσουμε σε πρώτης ή δεύτερης τάξης συνδέσμους.

Εύκολα μπορεί κανείς να διακρίνει ότι είναι πρώτης τάξης. Οι όροι B_0 περιγράφουν τη γενικευμένη ορμή, ενώ σχηματίζουν μεταξύ τους μηδενικές αγκύλες Poisson. Μηδενικές αγκύλες Poisson σχηματίζουν μεταξύ τους και οι όροι $B,^{r}{}_{r}$, B_0 και $B,^{r}{}_{rx}$, B_0. Για το λόγο αυτό όλες αυτές οι ποσότητες είναι πρώτης τάξης. Δεν εμφανίζονται σύνδεσμοι δεύτερης τάξης στην ηλεκτροδυναμική του Maxwell.

Η έκφραση (2-13) της Hamiltonian είναι πρώτης τάξης, άρα η H μπορεί σύμφωνα με τη σχέση (1-33) να μετασχηματιστεί στην H'. Οπότε η ολική Hamiltonian είναι :

$$H_T = \int \left(\frac{1}{4}F^{rs}\cdot F_{rs}+\frac{1}{2}B_rB_r\right)d_x^3 - \int A_0 B^{r}_{,r} d_x^3 + \int u_x B^0 d_x^3 \qquad (2\text{-}16)$$

Ο όρος u_x είναι ένας αυθαίρετος συντελεστής για κάθε σημείο του τρισδιάστατου χώρου. Η προσθήκη των αυθαίρετων συντελεστών u_x στους πρωτογενείς, πρώτης τάξης συνδέσμους είναι απαραίτητη για να εξάγουμε την ολική Hamiltonian.

Με όρους ολικής Hamiltonian η εξίσωση κίνησης στην κλασσική της μορφή είναι :

$$\dot{g} \approx [g, H_T] \qquad (1\text{-}21)$$

Ο όρος g στην περίπτωση αυτή μπορεί να είναι μία οποιαδήποτε πεδιακή ποσότητα σε κάποιο σημείο x του τρισδιάστατου χώρου ή ακόμα και μία συνάρτηση πεδιακών ποσοτήτων σε διαφορετικά σημεία του τρισδιάστατου χώρου. Θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι ένα ολοκλήρωμα πάνω στον τριασδιάστατο χώρο, ενώ γενικεύοντας ακόμη περισσότερο ο όρος g μπορεί να είναι κάθε πιθανή συνάρτηση των δυναικών μεταβλητών q, p στον τρισδιάστατο χώρο.

Μπορούμε να θεωρήσουμε λοιπόν ότι $g=A_0$, οπότε :

$$A_{0,0} = u \qquad (2\text{-}17)$$

διότι ο όρος A_0 σχηματίζει μηδενικές αγκύλες Poisson με οτιδήποτε άλλο εκτός των B_0 όπως προκύπτει από τον τελευταίο όρο της (2-16).

Έτσι ο αυθαίρετος συντελεστής u_x που εμφανίζεται στην ολική Hamiltonian αποκτά φυσικό νόημα, αποτελεί την χρονική παράγωγο του A_0.

Στη συνέχεια για να λάβουμε την εξίσωση κίνησης στην πιο γενική της μορφή χρειάζεται να περάσουμε στην εκτεταμένη Hamiltonian. Για να το πετύχουμε αυτό προσθέτουμε στους δευτερογενείς συνδέσμους πρώτης τάξης αυθαίρετους συντελεστές u_x.

Καταλήγουμε με τον τρόπο αυτό στην εκτεταμένη Hamiltonian :

$$H_E = H_T + \int u_x B^r_{,r} d^3_x \qquad (2\text{-}18)$$

Ο επιπλέον όρος στη Hamiltonian επιτρέπει μία πιο γενική κίνηση, παρέχοντας μεγαλύτερο εύρος στη μεταβολή των q, p γεγονός που βοηθά την περιγραφή ενός μετασχηματισμού βαθμίδας. Με την εισαγωγή αυτής της επιπλέον μεταβολής των q, p οδηγούμαστε σε ένα πιο γενικό ζεύγος q, p το οποίο περιγράφει την ίδια κατάσταση.

Στο σημείο αυτό είναι δυνατή μία απλοποίηση. Αφορά τις μεταβλητές A_0, B_0 οι οποίες λόγω του ότι δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία δύναται να παραληφθούν. Η ποσότητα A_0 εκφράζει την τυχαία χρονική παράγωγο ενός μεγέθους χωρίς ιδιαίτερη σημασία, ενώ $B_0=0$ κάθε χρονική στιγμή. Η απαλειφή των μεταβλητών A_0, B_0 δεν αλλοιώνει σε καμία περίπτωση το φυσικό περιεχόμενο των εξισώσεων, αντιθέτως τις απλοποιεί, μειώνοντας από τη μία τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, διατηρώντας από την άλλη όλους εκείνους τους βαθμούς ελευθερίας που έχουν νόημα.

Για να πετύχουμε την απαλειφή των μεταβλητών A_0, B_0, παραλείπουμε τον όρο $u_x B^0$ από τη Hamiltonian. Ο όρος αυτός επιτρέπει την τυχαία μεταβολή του A_0. Ο όρος $–A_0 B,^r{}_r$ στην H_T δύναται να συνδυασθεί με το $u_x B^r{}_{,r}$ στην εκτεταμένη Hamiltonian. Ο συντελεστής u_x είναι σε κάθε περίπτωση ένας αυθαίρετος συντελστής. Όταν οι δύο αυτοί όροι συνδυαστούν αντικαθιστούμε το u_x με $u_{x'}=u_x-A_0$. Ο συντελεστής $u_{x'}$ είναι κατά συνέπεια επίσης αυθαίρετος. Παίρνουμε έτσι μία νέα Hamiltonian.

$$H = \int (\tfrac{1}{4} F^{rs} \cdot F_{rs} + \tfrac{1}{2} B_r B_r) d_x^3 - \int u_{x'} B^r_{,r} d_x^3 \qquad (2\text{-}19)$$

Η νέα αυτή Hamiltonian παράγει τις εξισώσεις κίνησης για όλες εκείνες τις μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν, οι μεταβλητές A_0, B_0 δεν εμφανίζονται πλέον σε αυτήν. Πρόκειται για τη Hamiltonian που περιγράφει τη θεωρία του Maxwell στην πιο απλή της μορφή.

Στην Κβαντική ηλεκτροδυναμική συνηθίζεται να χρησιμοποιείται μία διαφορετική Hamiltonian η οποία αναπτύσσεται σύμφωνα με τη θεωρία του Fermi και περιλαμβάνει τον κάτωθι περιορισμό για τα δυναμικά :

$$A^{\mu}_{,\mu} = 0 \tag{2-20}$$

Η Hamiltonian στην οποία καταλήξαμε (2-19) δεν περιλαμβάνει τον περιορισμό (2-20), ώστε να επιτρέπει την χρήση μίας εντελώς γενικευμένης βαθμίδας που βοηθά στο να αναδειχθούν οι ιδέες περί πρωτογενών και δευτερογενών συνδέσμων.

ΚΒΑΝΤΩΣΗ

Επιστρέφουμε στο σημείο αυτό στη γενική θεωρία ώστε να διαπραγματευτούμε το πρόβλημα της κβάντωσης της Χαμιλτωνιανής θεωρίας.

Για να διαπραγματευτούμε το ερώτημα της κβάντωσης, κάνουμε αρχικά την υπόθεση ότι δεν εμφανίζονται δεύτερης τάξης δεσμοί όταν όλοι οι δεσμοί είναι πρώτης τάξης.

Ξεκινάμε λοιπόν μετατρέποντας τις δυναμικές συντεταγμένες και την ορμή σε τελεστές που ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης που αντιστοιχούν στις σχέσεις των αγκύλων Poisson της κλασσικής θεώρησης. Στη συνέχεια θεωρούμε την εξίσωση Schrödinger.

$$i\hbar \frac{d_\psi}{d_t} = H'\psi \qquad (2\text{-}21)$$

όπου ψ είναι η κυματοσυνάρτηση που καθορίζεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q, p και H’ η πρώτης τάξης Hamiltonian που αναφέραμε.

Χρειάζεται να εισάγουμε συγκεκριμένες συμπληρωματικές συνθήκες για την κυματοσυνάρτηση ψ, συγκεκριμένα :

$$\varphi_J \psi = 0 \qquad (2\text{-}22)$$

Με τον τρόπο αυτό κάθε ένας από τους συνδέσμους οδηγεί σε μία συμπληρωματική συνθήκη για την κυματική συνάρτηση ψ. Χρειάζεται λοιπόν να εξετάσουμε εάν αυτές οι εξισώσεις για την ψ είναι συνεπείς μεταξύ τους. Θεωρούμε για το λόγο αυτό δύο από τις συμπληρωματικές συνθήκες και εξετάζουμε τη μεταξύ τους συνέπεια. Από την (2-22) παίρνουμε

$$\varphi_{J'}\psi = 0 \qquad (2\text{-}22)'$$

πολλαπλασιάζουμε με φ_J' και παίρνουμε

$$\varphi_{J'}\varphi_J\psi = 0 \qquad (2\text{-}23)$$

ενώ αν πολλαπλασιάζουμε την (2-22)' με φ_J παίρνουμε

$$\varphi_J\varphi_{J'}\psi = 0 \qquad (2\text{-}23)'$$

Από τις εξισώσεις (2-23), (2-23)' προκύπτει :

$$[\varphi_J,\varphi_{J'}]\ \psi = 0 \qquad (2\text{-}24)$$

Η τελευταία συνθήκη για την κυματική συνάρτηση ψ είναι αναγκαία για λόγους συνέπειας.

Επιπλέον απαιτούμε

$$[\varphi_J,\varphi_{J'}] = c_{JJ'J}{}^{H}\varphi_J{}^{H} \qquad (2\text{-}25)$$

έτσι ώστε η (2-22) να προκύπτει ως άμεση συνέπεια της (2-22) και με τον τρόπο αυτό να περιορίσουμε το πλήθος των συνθηκών για την κυματοσυνάρτηση ψ. Έτσι όλες οι αναγκαίες συνθήκες για την κυματοσυνάρτηση ψ περιλαμβάνονται στην (2-22).

Γνωρίζουμε ότι όλοι οι σύνδεσμοι φ είναι πρώτης τάξης. Στην κλασσική θεώρηση το γεγονός αυτό έχει σαν συνέπεια η αγκύλη Poisson δύο οποιωνδήποτε φ να είναι γραμμικός συνδυασμός των φ. Επιστρέφοντας στην κβαντική θεωρία χρειαζόμαστε μία παρόμοια εξίσωση για τον μεταθέτη, χωρίς κάτι τέτοιο απαραίτητα να σημαίνει ότι οι συντελεστές c, πρέπει να βρίσκονται όλοι στα δεξιά. Ο λόγος για τον οποίο οι συντελεστές c πρέπει να βρίσκονται στα δεξιά είναι ότι τα c προκύπτουν γενικά να είναι συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων και της ορμής, οπότε εάν δεν τοποθετηθούν δεξία στην σχέση (2-25), δεν θα ικανοποιείται η σχέση μετάθεσης με τα φ.

Στο σημείο αυτό έχουμε να παρατηρήσουμε ότι στην κβαντική θεώρηση υπάρχει ένα γενικότερο στοιχείο αυθαιρεσίας για τους συνδέσμους φ. Οι αντίστοιχες εκφράσεις που χρησιμοποιούμε στην κλασσική θεώρηση ενδέχεται να περιέχουν ποσότητες οι οποίες στην κβαντική θεωρία δεν μετατίθενται και στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να αποφασίσουμε για την σειρά με την οποία θα τοποθετηθούν αυτοί οι παράγοντες. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, τακτοποιούμε κατάλληλα την σειρά των προαναφερθέντων παραγόντων, έτσι ώστε η εξίσωση (2-25) να ικανοποιείται με όλους τους συντελεστές δεξιά. Υπάρχουν φυσικά και περιπτώσεις όπου κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό και έτσι δεν μπορούμε να έχουμε μία ακριβή κβαντική θεώρηση.

Καταλήξαμε έτσι σε μία πρώτη προσέγγιση, οι εξισώσεις θα έχουν καθολική ισχύ εάν τις εξετάσουμε ως προς την ακρίβεια με την οποία παρέχουν τη σταθερά Planck ħ, αγνοώντας ποσότητες που περιέχουν $\hbar^2$.

Ελέγξαμε λοιπόν τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες οι συμπληρωματικές συνθήκες είναι μεταξύ τους συνεπείς. Ένας παρόμοιος έλεγχος χρειάζεται ώστε να επιβεβαιώσουμε ότι οι συμπληρωματικές συνθήκες είναι συνεπείς και με την εξίσωση Schrödinger. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, εάν ξεκινήσουμε με μία κυματοσυνάρτηση ψ που ικανοποιεί τις συμπληρωματικές συνθήκες (2-24) και αφήσουμε την ψ να μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση Schrödinger, τότε η ψ θα συνεχίσει να ικανοποιεί τις συμπληρωματικές συνθήκες και έπειτα από κάποιο σύντομο χρονικό διάστημα;

Για να ισχύει κάτι τέτοιο σύμφωνα με τη σχέση (1-23) πρέπει

$$[\varphi_J, H]\,\psi = 0 \tag{2-26}$$

που σημαίνει ότι η αγκύλη $[\varphi_J, H]$ χρειάζεται να είναι κάποια γραμμική συνάρτηση των φ, δηλαδή :

$$[\varphi_J, H] = b_{JJ'}\varphi_{J'} \tag{2-27}$$

έτσι ώστε να μην χρειαστούμε μία νέα συμπληρωματική συνθήκη. Καταλήξαμε έτσι πάλι σε μία εξίσωση που γνωρίζουμε ότι είναι συνεπής στην κλασσική θεώρηση. Οι δεσμοί φ_J και η Hamiltonian H είναι πρώτης τάξης, οπότε η αγκύλη Poisson που σχηματίζουν εξαφανίζεται ασθενώς, δηλαδή είναι ισχυρά ίση με κάποια γραμμική συνάρτηση των φ. Χρειάζεται λοιπόν και πάλι να τακτοποιηθεί η σειρά των όρων ώστε στην αντίστοιχη κβαντική εξίσωση όλοι οι συντελεστές να βρίσκονται δεξιά, εάν φυσικά κάτι τέτοιο είναι εφικτό.

<u>ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΔΕΣΜΟΥΣ 2ης ΤΑΞΗΣ</u>

Μέχρι στιγμής είχαμε υποθέσει ότι όλοι οι σύνδεσμοι που εμφανίζονται είναι πρώτης τάξης. Ας εξετάσουμε λοιπόν στο σημείο αυτό τον τρόπο με τον οποίο δύναται να επιτευχθεί η κβάντωση της θεωρίας Hamilton, όταν σε αυτή εμφανίζονται και δεύτερης τάξης δεσμοί. Προσεγγίζουμε σε πρώτη φάση το πρόβλημα μέσα από ένα πολύ απλό παράδειγμα. Θεωρούμε τους δεύτερης τάξης συνδέσμους :

$$q_1 \approx 0 \text{ και } p_1 \approx 0 \qquad (2\text{-}28)$$

Εάν οι παραπάνω σύνδεσμοι εμφανιστούν σε κάποιο πρόβλημα, η αγκύλη Poisson που σχηματίζουν είναι διάφορη του μηδενός, οπότε πρόκειται για συνδέσμους δεύτερης τάξης.

Σε μία τέτοια περίπτωση δεν έχουμε τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε τη σχέση (2-28) σαν συμπληρωματική συνθήκη για την κυματοσυνάρτηση ψ, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, που είχαμε μόνο πρώτης τάξης συνδέσμους. Εάν δοκομάσουμε να θέσουμε $q_1\psi=0$, $p_1\psi=0$ καταλήγουμε άμεσα σε αντίφαση αφού $(q_1p_1-p_1q_1)\psi=i\hbar\psi=0$. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να ακολουθήσουμε μία διαφορετική στρατηγική. Είναι προφανές ότι οι μεταβλητές q_1, p_1 δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον αν είναι περιορισμένες στην τιμή μηδέν. οπότε ο βαθμός ελευθερίας 1, δεν έχει καμά σημασία. Μπορούμε λοιπόν να απορρίψουμε τον βαθμό ελευθερίας 1 και να εργαστούμε με τους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας. Κάτι τέτοιο συνεπάγει έναν διαφορετικό ορισμό της αγκύλης Poisson. Χρειάζεται να εργαστούμε με έναν ορισμό της αγκύλης Poisson στην κλασσική θεωρία.

$$[\xi,n] = \frac{\partial \xi}{\partial q_n}\frac{\partial n}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n}\frac{\partial n}{\partial p_n} \text{ με άθροιση, } n=2,\ldots\ldots\ldots N \qquad (2\text{-}29)$$

Η παραπάνω έκφραση είναι επαρκής διότι καλύπτει όλες τις μεταβλητές που έχουν φυσικό ενδιαφέρον. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι q_1, p_1 είναι ταυτοτικά μηδέν. Δεν προκύπτει έτσι κάποια αντίφαση και μπορούμε να προχωρήσουμε στην κβάντωση σε όρους των βαθμών ελευθερίας $n=2,\ldots\ldots, N$.

Στην τελευταία περίπτωση τα βήματα που χρειάστηκαν για να προχωρήσουμε στην κβάντωση ήταν σχετικά προφανή. Ας προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τη διαδικασία για πιο σύνθετες περιπτώσεις. Έστω ότι $p_1 \approx 0$, $q_1 \approx f(q_r, p_r)$, $r=2,\ldots\ldots,N$, με τη f εδώ να είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση όλων των υπολοίπων q, p. Μπορούμε να παραλείψουμε τον βαθμό ελευθερίας 1 εάν αντικαταστήσουμε τον όρο q_1 με $f(q_r,p_r)$ στην έκφραση της Hamiltonian και στους συνδέσμους. Και πάλι έχουμε τη δυνατότητα να παραλείψουμε τον βαθμό ελευθερίας 1 και να εργαστούμε με τους υπολοίπους βαθμούς ελευθερίας ώστε να περάσουμε σε μία κβαντική θεωρία. Και πάλι χρειάζεται να εργαστούμε με την αγκύλη Poisson της μορφής (2-29), αναφερόμενοι στους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας.

Αυτή είναι σε γενικές γραμμές η διαδικασία με την οποία μπορεί κανείς να προχωρήσει στην κβάντωση ενός συστήματος το οποίο περιλαμβάνει συνδέσμους δεύτερης τάξης. Η ύπαρξη συνδέσμων δεύτερης τάξης υποδεικνύει ότι υπάρχουν βαθμοί ελευθερίας χωρίς ιδιαίτερη φυσική σημασία. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να εξαφανίσουμε τους περιττούς βαθμούς ελευθερίας και να ορίσουμε νέες αγκύλες Poisson που να αναφέρονται σε εκείνους τους βαθμούς ελευθερίας που έχουν φυσική σημασία. Τότε με βάση τις νέες αγκύλες μπορούμε να προχωρήσουμε στην κβάντωση. Περιγράφεται στη συνέχεια μία γενική διαδικασία για την περίπτωση αυτή.

Επιστρέφουμε για λίγο στην κλασσική θεώρηση. Έχουμε έναν αριθμό συνδέσμων $φ_J≈0$, μερικοί από τους οποίους είναι πρώτης τάξης και μερικοί δεύτερης. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους συνδέσμους με ανεξάρτητους γραμμικούς συνδυασμούς τους, οι οποίοι λειτουργούν εξίσου ικανοποιητικά, όσο και οι αρχικοί σύνδεσμοι. Προσπαθούμε να θεωρήσουμε κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς, τέτοιους ώστε όσο το δυνατόν περισσότεροι σύνδεσμοι να αναχθούν σε πρώτης τάξης. Ονομάζουμε τους εναπομείναντες δεύτερης τάξης συνδέσμους, που είναι τέτοιοι ώστε κανένας γραμμικός συνδυασμός τους δεν παράγει σύνδεσμο πρώτης τάξης, x_s. Ο δείκτης s παίρνει τιμές s=1,2,………,S και υποδεικνύει τον αριθμό τους. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τις αγκύλες Poisson που ορίζουν μεταξύ τους όλοι οι σύνδεσμοι x_s και θεωρούμε την ορίζουσα Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & [x_2,x_1] & [x_1,x_3] & \dots & [x_1,x_s] \\ [x_2,x_1] & 0 & [x_2,x_3] & \dots & [x_2,x_s] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ [x_s,x_1] & [x_s,x_2] & [x_s,x_3] & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα Δ δεν εξαφανίζεται ούτε καν ασθενώς.

Η απόδειξη προκύπτει με την εις άτοπο απαγωγή :

Έστω ότι η ορίζουσα Δ εξαφανίζεται. Αυτό σημαίνει ότι είναι κάποιου βαθμού T<S.

Ορίζουμε στη συνέχεια την ορίζουσα Α

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & [x_1,x_2] & \dots & [x_1,x_T] \\ x_2 & [x_2,x_1] & 0 & \vdots & [x_2,x_T] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [x_{T+1}] & [x_{T+1},x_1] & [x_{T+1},x_2] & \dots & [x_{T+1},x_T] \end{vmatrix}$$

Η Α έχει Τ+1 στήλες και γραμμές. Το πλήθος Τ+1 είναι μικρότερο ή ίσο από S. Εάν επεκτείνουμε την Α ως προς τους όρους των στοιχείων της πρώτης στήλης της, θα πάρουμε κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία πολλαπλασιασμένο μέσα σε μία από τις υπο-ορίζουσες Δ. Στην περίπτωση όπου όλες οι υπο-ορίζουσες εξαφανιστούν, χρειάζεται να κατανείμουμε τα στοιχεία x_s που σχηματίζουν τις γραμμές και τις στήλες του Α με διαφορετικό τρόπο, έτσι ώστε κάποιες από τις υπο-ορίζουσες να επιβιώσουν. Αυτό είναι εφικτό, εφόσον η Δ είναι βαθμού Τ, οπότε η βέλτιστη κατανομή των x_s είναι η επιλογή τους με τρόπο τέτοιο ώστε οι συντελεστές των στοιχείων της πρώτης στήλης να μην είναι όλοι μηδέν. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η Α σχηματίζει μηδενικές αγκύλες Poisson με όλα τα φ. Εάν σχηματίσουμε την αγκύλη Poisson κάποιου από τα φ με την ορίζουσα το αποτέλεσμα προκύπτει σχηματίζοντας την αγκύλη του φ με την πρώτη στήλη της ορίζουσας, προσθέτοντας την αγκύλη του φ με την δεύτερη στήλη, κ.ο.κ., δηλαδή :

$$[\varphi,A] = \begin{vmatrix} [\varphi,x_1] & 0 & \cdots \\ [\varphi,x_2] & [x_2,x_1] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ [\varphi,x_{T+1}] & [x_{T+1},x_1] & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots \\ x_2 & [\varphi,[x_2,x_1]] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ x_{T+1} & [\varphi,[x_{T+1},x_1]] & \cdots \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & 0 & [\varphi,[x_1,x_2]] & \cdots \\ x_2 & [x_2,x_1] & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{T+1} & [x_{T+1},x_1] & [\varphi,[x_{T+1},x_2]] & \cdots \end{vmatrix} + \ldots$$

Παρότι η διαδικασία είναι πολύπλοκη, εύκολα μπορεί κανείς να διακρίνει ότι όλες οι παραπάνω ορίζουσες εξαφανίζονται. Η πρώτη ορίζουσα από τα δεξιά εξαφανίζεται : εάν ο σύνδεσμος φ είναι πρώτης τάξης τότε η πρώτη στήλη εξαφανίζεται, εάν ο φ είναι δεύτερης τάξης τότε πρόκειται για κάποιο από τα x_s οπότε προκύπτει μία ορίζουσα η οποία είναι μέρος της ορίζουσας Δ με Τ+1 γραμμές και στήλες. Όμως έχουμε υποθέσει ότι η Δ είναι βαθμού Τ, οπότε κάθε μέρος της με Τ+1 στήλες και γραμμές εξαφανίζεται. Η δεύτερη ορίζουσα από τα δεξιά εξαφανίζεται ασθενώς αφού η πρώτη στήλη της εξαφανίζεται ασθενώς. Με όμοιο τρόπο μηδενίζονται – εξαφανίζονται ασθενώς και όλες οι υπόλοιπες ορίζουσες με αποτέλεσμα ολόκληρο το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης να εξαφανίζεται ασθενώς. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η ποσότητα Α σχηματίζει ασθενώς μηδενική αγκύλη Poisson με κάθε έναν από τους συνδέσμους φ. Μπορούμε επίσης να επεκτείνουμε την ορίζουσα Α σε όρους των στοιχείων της πρώτης στήλης και να γράψουμε την Α σαν γραμμικό συνδυασμό των x_s. Οπότε το αποτέλεσμα είναι ένας συγκεκριμένος γραμμικός συνδυασμός των x_s να παράγει μηδενικές αγκύλες Poisson με όλα τα φ. Αυτό δείχνει ότι ο συγκεκριμένος γραμμικός συνδυασμός των x_s είναι πρώτης τάξης. Ερχόμαστε έτσι σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση, οπότε αποδεικνύεται η παραπάνω πρόταση.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των x_s που επιβιώνουν και δεν μπορούν να αναχθούν σε πρώτης τάξης είναι περιττός, διότι η ορίζουσα Δ είναι αντισυμμετρική. Κάθε αντισυμμετρική ορίζουσα με άρτιο πλήθος γραμμών και στηλών εξαφανίζεται. Η Δ δεν εξαφανίζεται, οπότε το πλήθος των γραμμών και στηλών της πρέπει να είναι περιττό.

Εφόσον η Δ δεν εξαφανίζεται μπορούμε να θεωρήσουμε την ομοτιμία $c_{gg'}$ του πίνακα από τον οποίο προέρχεται η Δ. Ορίζουμε τον πίνακα $c_{gg'}$ ως εξής :

$$c_{gg'}[x_{g'},x_{g''}] = \delta_{gg''} \tag{2-30}$$

Ορίζουμε έτσι νέες αγκύλες Poisson σύμφωνες με τον παραπάνω φορμαλισμό.

Δύο οποιεσδήποτε ποσότητες ξ, η σχηματίζουν αγκύλη Dirac που ορίζεται από τη σχέση

$$[\xi,n]^* = [\xi,n] - [\xi,x_s]\, c_{ss'}\, [x_{s'},n] \qquad (2\text{-}31)$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι αγκύλες Dirac, όπως ορίζονται από τη σχέση (2-31), επαληθεύουν τις ίδιες σχέσεις με τις αγκύλες Poisson : η $[\xi,\eta]^*$ είναι αντισυμμετρική μεταξύ των ξ,η είναι γραμμική ως προς ξ,η ικανοποιεί τον product law $[\xi_1\xi_2,\eta]^*=\xi_1[\xi_2,\eta]^*+[\xi_1,\eta]^*\xi_2$, όπως επίσης και την ταυτότητα Jacobi $[[\xi,\eta]^*,\zeta]^*+[[\eta,\zeta]^*\xi]^*+[[\zeta,\xi]^*,\eta]^*=0$.

Συνεχίζοντας να εξετάζουμε τις ιδιότητες της αγκύλης Dirac παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις κίνησης έχουν την ίδια εγκυρότητα με εκείνες της αγκύλης Poisson.

$$[g,H_T]^* = [g,H_T] - [g,x_s]c_{ss'}[x_{s'},H_T] \approx [g,H_T]$$

Οι όροι $[x_{s'},H_T]$ είναι ασθενώς μηδέν και εξαφανίζονται, εφόσον η H_T είναι πρώτης τάξης. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\dot{g} \approx [g,H_T]^*$$

Εάν θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση ξ, ανεξάρτητα από τις δυναμικές συντεταγμένες q, p του εκάστοτε προβλήματος, και σχηματίσουμε την αγκύλη Dirac μεταξύ της ξ και ενός εκ των xs, ας πούμε του xs'', παίρνουμε

$$[\xi,x_{s''}]^* = [\xi,x_{s''}] - [\xi,x_s]c_{ss'}[x_{s'},x_{s''}] = [\xi,x_{s''}] - [\xi,x_s]\, \delta_{ss;;} = 0$$

Μπορούμε δηλαδή να θέσουμε εξαρχής $x_s=0$ προτού χρησιμοποιήσουμε τις αγκύλες Dirac. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση

$$x_s = 0 \qquad (2\text{-}32)$$

αποτελεί ισχυρή ισότητα.

Με την εισαγωγή της αγκύλης Dirac η κλασσική θεωρία τροποποιείται και προετοιμάζεται έτσι το έδαφος για την κβάντωση. Περνάμε στην κβαντική θεωρία, λαμβάνοντας τις σχέσεις μετάθεσης έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στις σχέσεις που επιβάλλουν οι αγκύλες Dirac και θεωρώντας τις ισχυρές εξισώσεις (2-32) ως εξισώσεις με τελεστές. Οι ασθενείς εξισώσεις που απομένουν είναι όλες πρώτης τάξης και λαμβάνονται ξανά ως συμπληρωματικές συνθήκες για την κυματική συνάρτηση ψ. Το πρόβλημα έτσι ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση όπου υπήρχαν μόνον σύνδεσμοι πρώτης τάξης και είχαμε καταλήξει σε μία μέθοδο ώστε να πετύχουμε την κβάντωση της θεωρίας Hamilton.

Καταλήξαμε λοιπόν έτσι σε μία γενική μεθοδολογία για την κβάντωση ενός συστήματος. παρατηρούμε ότι αφού περάσουμε στην κβαντική θεωρία, η διάκριση μεταξύ πρωτογενών και δευτερογενών συνδέσμων καταλήγει να μην έχει καμία σημασία. Στην πραγματικότητα δεν πρόκειται για μία ουσιαστική και θεμελιώδη διάκριση, αφού εξαρτάται άμεσα από την αρχική συνάρτηση Lagrange που θα επιλέξουμε και την οποία μπορεί κανείς να αγνοήσει αφού περάσει στη Hamiltonian. Αντιθέτως όμως η διάκριση μεταξύ πρώτης και δεύτερης τάξης συνδέσμων είναι εξαιρετικά σημαντική, θεμελιώδης και ουσιαστική. Είναι απαραίτητο να μετατρέψουμε όσους το δυνατόν περισσότερους σε πρώτης τάξης και με βάση τις αγκύλες Dirac μπορούμε να διαχειριστούμε τους εναπομείναντες δεύτερης τάξης συνδέσμους.

Παράδειγμα 1

<u>Σωματίδιο σε μαγνητικό πεδίο ($\vec{B}$=B($\hat{z}$))</u>

→ Lagrangian γραμμική ως προς την ταχύτητα.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας (m) με φορτίο (q), περιορισμένο να κινείται στο x-y επίπεδο μέσω ενός ισχυρού δεσμού υπό την επίδραση ομογενούς μαγνητικού πειδίου έντασης (B), προσανατολισμένου κάθετα προς το επίπεδο κίνησης του σωματιδίου ($\vec{B}$=B($\hat{z}$)).

Η συνάρτηση Lagrange που περιγράφει το παραπάνω σύστημα, με την κατάλληλη επιλογή παραμέτρων, είναι :

$$L = \frac{1}{2}\, m\vec{u}^2 + \frac{q}{c}\,\vec{A} \cdot \vec{u} - V(\vec{r})$$

όπου $\vec{A}$ το ανυσματικό δυναμικό για το μαγνητικό πεδίο, c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και V($\vec{r}$) ένα αυθαίρετο εξωτερικό βαθμωτό δυναμικό το οποίο μπορεί κανείς να επιλέξει να είναι τετραγωνικό ως προς τις συντεταγμένες x,y χωρίς βλάβη της γενικότητος.

Η έκφραση που περιγράφει το ανυσματικό δυναμικό που αντιστοιχεί σε ομογενές και σταθερό μαγνητικό πεδίο έντασης (B), προσανατολισμένο στον z-άξονα, είναι :

$$\vec{A}=\frac{B}{2}\left(x(\hat{y})-y(\hat{x})\right)$$

Οπότε η Lagrangian γίνεται :

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{qB}{2c}(x\dot{y}-y\dot{x})-V(x,y)$$

και καταλήγουμε έτσι στις εξισώσεις κίνησης :

$$m\ddot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{qB}{c}\dot{y}$$

$$m\ddot{y}=-\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial B}{c}\dot{x}$$

Για άρτιο δυναμικό η κλίση του V ικανοποιεί τις συντεταγμένες – (x,y), ενώς τα όρια ενός πολύ ισχυρού μαγνητικού πεδίου ($\vec{B}$) είναι : $\frac{qB}{mc}\gg 1$.

Αγνοούμε λοιπόν τον κινητικό όρο ώστε να παράξουμε μία κατά προσέγγιση απλούστερη Lagrangian :

$$L=\frac{qB}{2c}(x\dot{y}-y\dot{x})-V(x,y)$$

με πρώτης τάξης εξισώσεις κίνησης τις :

$$\dot{y}=\frac{c}{qB}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\dot{x}=-\frac{c}{qB}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}$$

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι η κατά προσέγγιση Lagrangian είναι γραμμική ως προς τις ταχύτητες. Σε μία τέτοια περίπτωση η κλασσική μέθοδος Hamilton αποτυγχάνει, παρότι η Lagrangian που χρησιμοποιούμε είναι σωστή και σε φορμαλισμό Lagrange οδηγεί σε συνεπείς εξισώσεις κίνησης.

Ακολουθώντας τη μέθοδο Hamilton η γενικευμένη ορμή σχετίζεται με την θέση και είναι :

$$px=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow px=-\frac{qB}{2c}\cdot y$$

$$py=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \Rightarrow py=\frac{qB}{2c}\cdot x$$

Κάτι τέτοιο είναι ασύνηθες, διότι δεν είναι αντιστρέψιμη με την ταχύτητα και προκύπτει να είναι συνάρτηση των θέσεων, οι τέσσερις χωρικές συντεταγμένες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε αποτελούν πλήρη βάση.

Εφαρμόζοντας έναν μετασχηματισμό Legendre παίρνουμε την Hamiltonian

$$H\left(x,y,p_x,p_y\right)=\dot{x}p_x+\dot{y}p_y-L\Rightarrow H\left(x,y,p_x,p_y\right)=V(x,y)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω έκφραση δεν εξαρτάται από την ορμή οπότε οι εξισώσεις κίνησης που παράγει θα είναι ασυνεπείς, οπότε η μέθοδος Hamilton στην περίπτωση αυτή καταρρέει, αδυνατώντας να δώσει σωστές λύσεις.

Καταλήγουμε έτσι στην καρδιά του προβλήματος, δηλαδή στο ότι η έκφραση τη ορμής περιέχει έναν σύνδεσμο (δεσμό) στον χώρο των φάσεων (δεσμό μεταξύ ορμής και θέσης) τον οποίο για να λάβουμε συνεπείς λύσεις χρειάζεται να λάβουμε υπόψιν μας.

Εφαρμόζοντας λοιπόν την μέθοδο Dirac η αρχική Hamiltonian και οι δύο πρωτογενείς δεσμοί είναι :

$$H=V(x,y)$$

$$\varphi_1=p_x+\frac{qB}{2c}\cdot y, \qquad \varphi_2=p_y-\frac{qB}{2c}\cdot x$$

Αθροίζοντας την αρχική Hamiltonian με τον παρακάτω γραμμικό συνδυασμό των φ, που ορίζουμε έτσι ώστε να είναι μηδέν παίρνουμε τη νέα Hamiltonian (H*).

$$H^{*}=V(x,y)+u_1\left(p_x+\frac{qB}{2c}\cdot y\right)+u_2\left(p_y-\frac{qB}{2c}\cdot x\right)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε τις συνθήκες συνέπειας $\{\varphi_J,H^*\}_{PB}\approx 0$, οι οποίες σε αυτή την περίπτωση είναι :

$$\{\varphi_1,H\}_{PB}+\Sigma_J u_J(\varphi_1,\varphi_J)_{PB}=-\frac{\partial V}{\partial x}+u_2\frac{qB}{c}\approx 0$$

$$\{\varphi_2,H\}_{PB}+\Sigma_J u_J(\varphi_2,\varphi_J)_{PB}=-\frac{\partial V}{\partial y}-u_1\frac{qB}{c}\approx 0$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις στις οποίες καταλήξαμε δεν αποτελούν δευτερογενείς συνδέσμους αλλά συνθήκες οι οποίες προσδιορίζουν τους συντελεστές u_1, u_2. Οπότε δεν υπάρχουν δευτερογενείς σύνδεσμοι ενώ οι αυθαίρετοι συντελεστές u_1, u_2 είναι πλήρως καθορισμένοι. Κάτι τέτοιο υποδηλώνει ότι δεν υπάρχουν μη μετρήσιμοι βαθμοί ελευθερίας.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των u_1, u_2 προσδιορίζουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\dot{x}=\{x,H\}_{pB}+u_1\{x,\varphi_1\}_{pB}+u_2\{x,\varphi_2\} \Rightarrow \dot{x}=-\frac{c}{qB}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\dot{y}=\frac{c}{qB}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\dot{p}x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\dot{p}y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}$$

οι οποίες είναι συνεπείς και σύμφωνες με τις Λαγκραντζιανές εξισώσεις κίνησης.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι σύνδεσμοι φ_1, φ_2 είναι δεύτερης τάξης αφού :

$$\{\varphi_1,\varphi_2\}_{pB}=-\{\varphi_2,\varphi_1\}_{pB}=\frac{qB}{c}$$

οπότε ο πίνακας είναι της μορφής :

$$M=\frac{qB}{c}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

και αντιστρέφοντας παίρνουμε :

$$M^{-1}=\frac{c}{qB}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow M^{-1}_{\alpha b}=-\frac{c}{qB_o}\cdot\varepsilon_{\alpha b}$$

με $\varepsilon_{\alpha b}$ το σύμβολο Levi-Civika.

Οπότε οι αγκύλες Dirac είναι :

$$\{f,g\}_{DB}=\{f,g\}_{pB}+\frac{c\cdot\varepsilon_{\alpha b}}{qB}\cdot\{f,\varphi_{\alpha}\}_{pB}\cdot\{\varphi_{b,}g\}_{pB}$$

Εάν κανείς επιλέξει να χρησιμοποιήσει τις αγκύλες Dirac αντί των αγκύλων Poisson, τότε δεν τίθεται θέμα για την σειρά με την οποία θα εφαρμόσει τους δεσμούς και θα υπολογίσει τις εκφράσεις αφού η αγκύλη Dirac ποσοτήτων που είναι ασθενώς μηδέν είναι ισχυρά ίση με μηδέν. Μπορεί λοιπόν κανείς να καταλήξει στις ορθές εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας την αρχική Hamiltonian σε αγκύλες Dirac.

<u>Κβάντωση</u>

Για την κβάντωση του συστήματος χρειάζονται οι αγκύλες Dirac μεταξύ άλλων των μεταβλητών του χώρου των φάσεων. Εκείνες που για το σύστημα αυτό δεν απαλείφονται είναι :

$$\{x,y\}_{DB}=\frac{-c}{qB}$$

$$\{x,p_x\}_{DB}=\{x,p_y\}_{DB}=\frac{1}{2}$$

και με τους διασταυρούμενους όρους να απαλείφονται, έχουμε :

$$\{p_x,p_y\}_{DB}=\frac{-qB}{4c}$$

Επομένως η ορθή εκτέλεση της κανονικής κβάντωσης επιβάλλει τις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης :

$$[\hat{x},\hat{y}]=-i\frac{\hbar c}{4c}$$

$$[\hat{x},\hat{p}_x]=\left[\hat{y},\hat{p}_y\right]=i\frac{\hbar}{2}$$

με τους διασταυρούμενους όρους να απαλείφονται είναι :

$$\left[\hat{p}_x,\hat{p}_y\right]=-i\frac{\hbar qB}{4c}$$

Επισημαίνεται ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο μεταθέτης των $\hat{x}$, $\hat{y}$ είναι διάφορος του μηδενός. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα καθορίζεται από αμετάθετη (non commutative) γεωμετρία, που έχει ως συνέπεια οι συντεταγμένες x,y του συστήματος να ικανοποιούν σχέση απροσδιοριστίας.

Παράδειγμα 2

Υπερ-σφαίρα

Για ελεύθερη κίνηση σε υπερσφαίρα S^n, οι n+1 συντεταγμένες υπόκεινται σε δεσμό της μορφής : $x_i \cdot x^i = 1$, ενώ από τη συνάρτηση Lagrange που περιγράφει το σύστημα είναι εμφανές ότι οι ορμές είναι κάθετες σε αυτές : $x_i \cdot p^i = 0$. Οπότε το σύστημα περιγράφεται από τις παρακάτω αγκύλες Dirac :

$$\{x_i, x_J\}_{DB} = 0$$

$$\{x_i, p_J\}_{DB} = \delta_{iJ} - x_i x_J$$

$$\{p_i, p_J\}_{DB} = x_J \cdot p_i - x_i \cdot p_J$$

Οι (2n+1) δεσμευμένες μεταβλητές (x_i, p_i) του χώρου των φάσεων ανταποκρίνονται σε πολύ απλούστερες αγκύλες Dirac από ότι οι 2n ασύνδετες μεταβλητές. Κάνοντας χρήση των αγκύλων Dirac πλεονεκτούμε σε απλότητα και κομψές εξισώσεις με κόστος βέβαια το μεγαλύτερο πλήθος μεταβλητών στον χώρο των φάσεων.

Επί παραδείγματι, για την ελεύθερη κίνηση σε περιφέρεια κύκλου (n=1) για $x_1 = z$ απαλείφοντας την x_2 από το δεσμό της κίνησης καταλήγουμε στην αδέσμευτη Lagrangian :

$$L = \frac{1}{2}\frac{\dot{z}^2}{1-z^2}$$

με εξισώσεις κίνησης :

$$\ddot{z}=-z\cdot\frac{\dot{z}^2}{1-z^2}=-z\cdot 2E$$

που περιγράφει ταλάντωση με το ισοδύναμο σύστημα με ενσωματωμένους τους δεσμούς $\left(H^2=\frac{p^2}{2}=E\right)$ να δίνει :

$$\dot{x}^i=\left\{x^i,H\right\}_{DB}=p^i$$

$$\dot{p}^i=\left\{p^i,H\right\}_{DB}=x^i\cdot p^2$$

από όπου προκύπτει για τις δύο μεταβλητές ταλάντωση με :

$$\ddot{x}^i=-x^i\cdot 2E$$

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ</u>

1) Dirac’s lectures on *Quantum Mechanics* published in Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964

2) *Classical Mechanics*, Third Edition, H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Addison & Wesley

3) *Dirac brackets and bihamiltonian structures*. Charles-Michel Marle, Université Pierre et Marie Curie Paris, France

4) *Lectures on Constrained Systems*. Ghanashyam Date, The Institute of Mathematical Sciences C.I.T. Campus, Tharamani, Chennai, India

5) *Constraints*: notes by Bernard F. Whiting

6) Chinese Journal of Physics, Vol. 52, No. 6. *Dirac Bracket for Pedestrians* M. K. Fung, Department of Physics, National Taiwan Normal University, Taipei, China

7) S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, New York, 2013

8) V. I. Arnold, *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, Vol. III, Springer-Verlag, New York, 1993

9) R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Wiley, New York, 1970

10) E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Dover, New York, 1944

11) C. Neumann, Journal fürdie Reine und Angewandte Mathematik 56, 46 (1859). doi: 10.1515/crll.1859.56.46.

12) https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_bracket