ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Θεωρίες Kaluza-Klein

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Α. Δούζας

Επιβλέπων: Καθηγητής Γ. Ζουπάνος

Αθήνα, Μάρτιος, 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Θεωρίες Kaluza-Klein

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Α. Δούζας

Επιβλέπων: Καθηγητής Γ. Ζουπάνος

Εγκρίθηκε απο την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 15η Μαρτίου 2016.

....	....	....
Γ. Ζουπάνος	Ν. Τράκας	Γ. Κουτσούμπας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Θεωρίες Kaluza-Klein

March 14, 2016

Abstract

Ο σκοπός της εργασίας είναι η περιγραφή και ανάλυση των θεωριών Kaluza-Klein. Ξεκινώντας από ένα απλό παράδειγμα μιας θεωρίας με ένα βαθμωτό πεδίο στις πέντε διαστάσεις εξετάζονται διάφορα χαρακτηριστικά των θεωριών αυτών. Στη συνέχεια η κλασική θεωρία Kaluza-Klein παρουσιαζεται αναλυτικά. Γενικεύσεις τις θεωρίας αυτής, κατά τις οποίες προκύπτουν μη αβελιανές ομάδες βαθμίδας, περιγράφονται συνοπτικά καθώς και οι ασυνέπειες που προκύπτουν αν γίνει απαλοιφή των massive modes. Τέλος εξετάζονται τρόποι με τους οποίους μπορούν να προκύψουν ρεαλιστικές τετραδιάστατες θεωρίες. Για το λόγο αυτό αναλύεται το ζήτημα των chiral φερμιονίων και παρουσιάζεται η διαστασιακή ελλάτωση σε χώρους πηλίκου.

Λέξεις Κλειδιά: Kaluza-Klein, Χώροι Πηλίκου, Θεωρίες Βαθμίδας, Chiral Φερμιόνια

Abstract

The scope of this thesis is the description and analysis of Kaluza-Klein theories. Starting from a toy model of a five dimensional scalar field theory, various characteristics of these theories are examined. Next the classic Kaluza-Klein theory is described analytically. A summary of generalizations of this theory, where non abelian gauge group theories arise, are given as well as the consequences of massive modes truncation. Finally methods that result in realistic theories are examined. For that reason the chiral fermion issue is examined and the CSDR framework is presented.

Keywords: Kaluza-Klein, Coset Spaces, Gauge Theories, Chiral Fermions

Contents

1 Εισαγωγή

Η κλασική θεωρία Kaluza-Klein (Kaluza 1921, Klein 1926) αποτελεί την πρώτη προσπάθεια να ενοποιηθεί η βαρύτητα με τον ηλεκτρομαγνητισμό επεκτείνοντας τον τετραδιάστατο χωροχρόνο κατά μία επιπλεόν χωρική διάσταση. Ο Kaluza, στην αρχική του προσέγγιση, θεώρησε ότι τα φυσικά μεγέθη δεν έχουν εξάρτηση απο την πέμπτη διάσταση (κυλινδρική συνθήκη). Η συνεισφορά του Klein ήταν να δώσει μια φυσική εξήγηση για την πέμπτη διάσταση θεωρώντας ότι η γεωμετρία αυτής της επιπλέον διάστασης περιγράφεται απο έναν κύκλο S^1 ο οποίος έχει πολύ μικρή ακτίνα (συμπαγοποίηση της πέμπτης διάστασης). Επιπλέον τα πεδία έχουν μια περιοδική εξάρτηση απο αυτή την διάσταση και έτσι μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier. Το γεγονός ότι η ακτίνα είναι πολύ μικρή έχει ως συνέπεια οι ενέργειες όλων των Fourier όρων, εκτός του θεμελιώδους όρου, να είναι τόσο υψηλές έτσι ώστε να μην είναι εφικτή η παρατήρησή τους. Γενικεύσεις αυτής της θεωρίας οι οποίες συμπεριλαμβάνουν την ασθενή και ισχυρή αλληλεπίδραση πρωτοεμφανίστηκαν την δεκατία του 60 (DeWitt 1964, Kerner 1968) ενώ σε θεωρίες υπερβαρύτητας (Cremmer και Julia 1978) και χορδών (Scherk και Schwarz 1975) υιοθετήθηκε η υπόθεση ότι οι επιπλέον διαστάσεις είναι συμπαγείς. Αρχικά οι θεωρίες υπερβαρύτητας ήταν τετραδιάστες αλλά γρήγορα εμφανίστηκαν μεγαλοδιάστες υπερβαρυτικές θεωρίες στις 11 διαστάσεις. Ο βασικός λόγος για αυτό ήταν ότι 11 διαστάσεις αποτελούν τον μέγιστο αριθμό διαστάσεων για μια συνεπή θεωρία με ένα μόνο βαρυτόνιο (Nahm 1978) καθώς και άλλοι λόγοι οι οποίοι σχετίζονται με την απαίτηση τα αποτελέσματα της θεωρίας να είναι συμβατά με το καθιερωμένο πρότυπο και την υπερσυμμετρία (Witten 1981 και Cremmer 1978). Τελικά κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό στα πλαίσια των υπερβαρυτικών θεωριών και αρχική ιδέα του Kaluza για μια εννοποιημένη εξήγηση των αλληλεπιδράσεων με καθαρά γεωμετρικούς όρους εγκαταλειφθηκε.

2 Ένα απλό παράδειγμα συμπαγοποίησης

2.1 Η δράση της πενταδιάστατης θεωρίας

Οι θεωρίες με επιπλέον συμπαγείς διαστάσεις μπορούν να οδηγήσουν σε συνήθεις τετραδιάστατες θεωρίες. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι και διάφορα μοντέλα στα οποία μπορεί να γίνει αυτό. Ως ένα απλό παράδειγμα θα θεωρήσουμε μια πενταδιάστη θεωρία σε χώρο $\mathrm{M}^4 \times \mathrm{S}^1$ η οποία περιγράφει ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο φ όπου M^4 ο χώρος Minkowski και S^1 ένας κύκλος ακτίνας R. Η δράση θα δίνεται απο τη σχέση

$$S = \int d^4x dz \eta_{\mathrm{MN}} \partial^{\mathrm{M}} \varphi^\star \partial^{\mathrm{N}} \varphi \tag{1}$$

όπου $\eta_{\mathrm{MN}} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$ οι συνιστώσες της μετρικής του χώρου $\mathrm{M}^4\mathrm{x}\mathrm{S}^1$. Οι τιμές των δεικτών $M, N, ...$ είναι $M, N, ... = 0, 1, 2, 3, 4$ ενώ για τους συνήθεις χωροχρονικούς δείκτες μ,ν,... έχουμε μ,ν,...=0,1,2,3.

2.2 Ανάπτυγμα Fourier και η τετραδιαστατη θεωρία

Το πεδίο φ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς την συντεταγμένη z του χώρου S^1 με περίοδο 2πR και συνεπώς μπορεί να αναπτυχθεί κατά Fourier ως

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k\,(x)\, e^{ikz/R} \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα (2) στην εξίσωση (1) και ολοκληρώνοντας ως προς τη μεταβλητή z

έχουμε ότι

$$S = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \left[\eta_{\mu\nu} \partial^{\mu} \varphi_k^{\star} \partial^{\nu} \varphi_k - \frac{k^2}{R^2} \varphi_{\mathrm{k}}^{\star} \varphi_{\mathrm{k}} \right] \tag{3}$$

Η σχέση (3) μπορεί να γραφτεί ως $S = S_z + S_{\mathrm{kk}}$ όπου

$$S_z = \int d^4x \left[\eta_{\mu\nu} \partial^{\mu} \varphi_0^{\star} \partial^{\nu} \varphi_0 \right]$$

η δράση η οποία περιγράφει ένα τετραδιάστατο πεδίο με μηδενική μάζα (zero mode) και

$$S_{kk} = \sum_{k \neq 0} \int d^4x \left[\eta_{\mu\nu} \partial^{\mu} \varphi_k^{\star} \partial^{\nu} \varphi_k - \frac{k^2}{R^2} \varphi_{\mathrm{k}}^{\star} \varphi_{\mathrm{k}} \right]$$

η δράση η οποία περιγράφει ένα άπειρο άθροισμα απο τετραδιάστατα πεδία με μάζα $\mathrm{m}_k = \frac{k}{R}$ (Kaluza-Klein modes). Για ενέργειες μικρότερες απο 1/R τα KK modes μπορούν να απαλειφθούν και η θεωρία μένει με την τετραδιάστατη δράση του βαθμωτού μιγαδικού πεδίου φ_0 το οποίο έχει μηδενική μάζα.

3 Η κλασική θεωρία Kaluza-Klein

3.1 Η δράση της πενταδιάστατης θεωρίας

Θα θεωρήσουμε την πενταδιάστατη θεωρία βαρύτητας του Einstein με δράση

$$S = \int d^4x dz \sqrt{-det\hat{g}}\hat{R} \tag{4}$$

όπου $\hat{\mathrm{R}}$ είναι η βαθμωτή ποσότητα Ricci και $det\hat{\mathrm{g}}$ η διακρίνουσα του πενταδιάστατου μετρικού τανυστή. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο "^" πάνω απο τα πενταδιάστατα μεγέθη.

3.2 Ανάπτυγμα Fourier και συμπαγοποίηση

Κατά αναλογία με το προηγούμενο μοντέλο θεωρούμε ότι η πέμπτη διάσταση "συμπαγοποιείται" σε έναν κύκλο S^1 και συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε τον μετρικό τανυστή κατά Fourier ως προς τη διάσταση αυτή. Έχουμε ότι

$$\hat{g}_{MN}(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g^k_{MN}(x)\, e^{ikz}$$

3.3 Απαλοιφή των KK modes

Στο εδάφιο 2 είδαμε ότι τα KK modes μπορούν να απαλειφθούν (truncation) όταν οι ενέργειες είναι μικρότερες απο την κλίμακα συμπαγοποίησης η οποία θεωρούμε ότι είναι της τάξης της μάζας του Planck. Δηλαδή θεωρούμε ότι $\hat{g}_{MN}\left(x,z\right)=\hat{g}_{MN}\left(x\right)$ και συνεπώς τα πεδία δεν έχουν εξάρτηση απο την συντεταγμένη z του εσωτερικού χώρου S^1 (Kaluza-Klein reduction ansatz). Μια τέτοια προσέγγιση θα μπορούσε να οδηγήσει σε ασυμβατότητες στη θεωρία μας υπο την έννοια ότι οι εξισώσεις κίνησης στην πενταδιάστατη θεωρία δεν επιτρέπουν την περικοπή των KK modes. Στην περιπτωσή μας η περικοπή αυτή δεν παρουσιαζει πρόβλημα για τον εξής λόγο: Στο ανάπτυγμα Fourier του μετρικού τανυστή οι συναρτήσεις e^{ikz} μπορουν να θεωρηθούν ως αναπαραστάσεις της ομάδας $U\left(1\right)\approx S^1$. Για k=0 έχουμε την singlet αναπαράσταση. Οποιοδήποτε γινόμενο singlet αναπαραστάεων της ομάδας U(1) δεν μπορεί να δημιουργήσει άλλες αναπαραστάσεις εκτός από singlets και συνεπώς απαλείφοντας όλα τα KK massive modes εξασφαλίζουμε ότι η προσέγγισή μας είναι αυτοσυνεπής. Αυτή η παρατήρηση δεν ισχύει στην γενική περίπτωση κατά την οποία αντί για τον χώρο S^1 έχουμε κάποια άλλη πολλαπλότητα. Επίσης παρακάτω θα δούμε ότι η απαλοιφή του βαθμωτού πεδίου το οποίο εμφανίζεται στην τετραδιάστατη θεωρία δεν είναι συμβατή με τις εξισώσεις κίνησης στις πέντε διαστάσεις.

3.4 Υπολογισμός της τετραδιάστατης δράσης

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να ταυτίσουμε τα $\hat{g}_{\mu\nu}$, $\hat{g}_{\mu z}$ και $\hat{g}_{zz}$ με τον τετραδιάστατο μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$, ένα διανυσματικό πεδίο A_μ και ένα βαθμωτό πεδίο φ αντίστοιχα. Κάτι τέτοιο είναι απολύτως σωστό αλλά αν το κάνουμε τότε θα χρειαστεί να επαναορίσουμε τα πεδία έτσι ώστε οι εξισώσεις κινησης να έχουν την αναμενόμενη μορφή. Προτιμάμε λοιπόν την παραμετροποίηση για τον πενταδιάστατο μετρικό τανυστή

$$\hat{g} = e^{2\alpha\varphi} g + \mathrm{e}^{2\beta\varphi}(dz + A)^2 \tag{5}$$

όπου α, β σταθερές με $\beta \neq 0$ τις οποίες θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Τα πεδία στο δεξί μέλος είναι ανεξάρτητα της πέμπτης διάστασης z ενώ σε σχέση με τις συνιστώσες τους στην βάση συντεταγμένων έχουμε ότι

$$\hat{g} = g_{MN} dx^M \otimes dx^N, \quad g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad A = A_\mu \mathrm{dx}^\mu \tag{6}$$

Οι δείκτες M,N,... παίρνουν τιμές M,N,...=0,1,2,3,4 και οι δείκτες μ,ν,... παίρνουν τιμές μ,ν,...=0,1,2,3. Επίσης ορίζουμε $x^4 = z$. Συνεπώς αντικαθιστώντας στη σχέση (5) τις σχέσεις (6) έχουμε για τις συνιστώσες του πενταδιάστατου μετρικού τανυστή ότι

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha\varphi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\varphi} A_\mu A_\nu & \mathrm{e}^{2\beta\varphi} A_\mu \\ \mathrm{e}^{2\beta\varphi} A_\nu & e^{2\beta\varphi} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Από τη σχέση (7) μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πενταδιάστατου μετρικού τανυστή σε σχέση με την ορίζουσα του τετραδιάστατου μετρικού τανυστή. Έχουμε ότι

$$det\hat{g} = \det \begin{pmatrix} e^{2\alpha\varphi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\varphi} A_\mu A_\nu & e^{2\beta\varphi} A_\mu \\ e^{2\beta\varphi} A_\nu & e^{2\beta\varphi} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2\beta\varphi + 8\alpha\varphi} det\mathrm{g} \tag{8}$$

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς σε σχέση με το $\hat{R}$ θα κάνουμε μια αλλαγή βάσης. Έστω e^a τα vielbeins του τετραδιάστατου χώρου. Ο πενταδιάστατος μετρικός τανυστής $\hat{g}$ γράφεται στην βάση των πενταδιάστατων vielbeins $\hat{e}^A$ ως

$$\hat{\mathrm{g}} = \hat{\eta}_{AB} \hat{e}^A \otimes \hat{e}^B \tag{9}$$

όπου $\hat{\eta}_{AB} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$ οι συνιστώσες της μετρικής σε αυτή την βάση. Συγκρίνοντας την σχέση (5) με την σχέση (9) μπορούμε να επιλέξουμε τα πενταδιάστατα vielbeins

$$\hat{e}^a = e^{\alpha\varphi} e^a, \quad \hat{e}^z = e^{\beta\varphi} (dz + A) \tag{10}$$

Θα υπολογίσουμε την εξωτερική παράγωγο $\hat{d}\hat{e}^A$ των πενταδιάστατων vielbeins η οποία ως 2-form μπορεί να αναπτυχτεί στην βάση $\hat{e}^A \wedge \hat{e}^B$ ως

$$\hat{\mathrm{d}}\hat{e}^A = -\frac{1}{2} C_{BC}{}^A \hat{e}^B \wedge \hat{e}^C \tag{11}$$

όπου ${C_{BC}}^{A}$ αντισυμμετρικές ως προς B και C σταθερές τις οποίες θα προσδιορίσουμε. Επίσης θεωρούμε ότι η torsion του χώρου είναι μηδενική $\hat{T}^{A} = 0$ και ότι η μετρική είναι σταθερή ως προς την Lorentz συναλλοίωτη παράγωγιση και συνεπώς $\hat{\omega}_{AB} = -\hat{\omega}_{BA}$ όπου $\hat{\omega}^{A}_{B}$ το πενταδιάστατο spin connection. Απο την σχέση (10) παίρνουμε

$$d\hat{e}^{a} = e^{-\alpha\varphi} \left(\alpha\, \partial_{\mathrm{b}}\varphi\, \eta^{a}_{c} + \omega^{a}_{\ bc} \right) \hat{e}^{b} \wedge \hat{e}^{c} \tag{12}$$

$$d\hat{e}^{z} = \beta e^{-\alpha\varphi} \partial_{\mathrm{b}}\varphi\, \hat{e}^{b} \wedge \hat{e}^{z} + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{(\beta\text{-}2\alpha)\varphi} F_{bc} \hat{e}^{b} \wedge \hat{e}^{c} \tag{13}$$

όπου $\omega^{a}_{\ b}$ το τετραδιάστατο spin connection και $F = dA$ το τετραδιάστατο field strength. Απο τις σχέσεις (12), (13) και την σχέση (11) υπολογίζουμε τις σταθερες ${C_{BC}}^{A}$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το πενταδιάστο spin connection απο την σχέση

$$\hat{\omega}_{AB} = \frac{1}{2} \left(C_{ABC} + C_{ACB} - C_{BCA} \right) \hat{e}^{C}$$

Τελικά έχουμε

$$\hat{\omega}^{ab} = \omega^{ab} + \alpha \mathrm{e}^{-\alpha\varphi} \left(\partial^{b}\varphi \hat{e}^{a} - \partial^{a}\varphi \hat{e}^{b} \right) - \frac{1}{2} F^{ab} e^{(\beta\text{-}2\alpha)\varphi} \hat{e}^{z} \tag{14}$$

$$\hat{\omega}^{az} = -\hat{\omega}^{za} = -\beta \mathrm{e}^{-\alpha\varphi} \partial^{a}\varphi\, \hat{e}^{z} - \frac{1}{2} F^{a}_{\ b} e^{(\beta\text{-}2\alpha)\varphi} \hat{e}^{b} \tag{15}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την καμπυλότητα 2-form από την σχέση

$$\hat{\Theta}^{A}_{B} = \hat{d}\hat{\omega}^{A}_{B} + \hat{\omega}^{A}_{C} \wedge \hat{\omega}^{C}_{B} \tag{16}$$

Οι σταθερές α και β θα προσδιοριστούν απο την απαίτηση οι όροι της τετραδιάστατης Lagrangian να έχουν την συνήθη μορφή. Απο τις σχέσεις (14),(15) και (16), το γεγονός ότι ως 2-form η καμπυλότητα μπορεί να αναπτυχθεί ως $\hat{\Theta}^{A}_{B} = \frac{1}{2}\hat{R}^{A}_{BCD}\hat{e}^{C} \wedge \hat{e}^{D}$, τον ορισμό για τον τανυστή Ricci $\hat{R}_{AB} = \hat{R}^{C}_{ACB}$ και για τις τιμές (οι οποίες έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε η τετραδιάστατη Langrangian να έχει όρους στην συνήθη μορφή ως προς το βαθμωτό πεδίο φ και το βαθμωτό Ricci R)

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}, \qquad \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

βρίσκουμε τα εξής:

$$\hat{R}_{ab} = e^{-2\alpha\varphi}\left(R_{ab} - \frac{1}{2}\partial_{a}\varphi\,\partial_{b}\varphi - \alpha\,\eta_{ab}\Box\varphi\right) - \frac{1}{2}e^{-8\alpha\varphi}F_{a}{}^{c}F_{bc} \tag{17}$$

$$\hat{R}_{zz} = 2\alpha e^{-2\alpha\varphi}\Box\varphi + \frac{1}{4}e^{-8\alpha\varphi}F^{2} \tag{18}$$

Συνεπώς, με χρήση των σχέσεων (17) και (18), το βαθμωτό Ricci $\hat{R} = \hat{\eta}^{AB}\hat{R}_{AB} = \eta^{ab}\hat{R}_{ab} + \hat{R}_{zz}$ είναι

$$\hat{R} = e^{-2\alpha\varphi}\left(R - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^{2} - \alpha\Box\varphi\right) - \frac{1}{4}e^{-8\alpha\varphi}F^{2} \tag{19}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8), (19) καθώς και τις τιμές των σταθερών α, β βρίσκουμε ότι μετά απο ολοκλήρωση ως προς τη πέμπτη διάσταση z (και απορρόφηση της πολλαπλασιαστικής σταθεράς 2πR) ότι η δράση γίνεται

$$S = \int d^4x\sqrt{-detg}\left(R - \frac{1}{2}\left(\partial\varphi\right)^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-6\alpha\varphi}F^2\right) \tag{20}$$

Συνεπώς ξεκινώντας απο την πενταδιάστατη βαρύτητα καταλήξαμε σε μια τετραδιάστατη θεωρία η οποία περιγράφει την βαρύτητα, τον ηλεκτρομαγνητισμό και ένα βαθμωτό πεδίο.

3.5 Απαλοιφή του βαθμωτού πεδίου

Από την σχέση (20) και τις εξισώσεις Lagrange για το πεδίο φ

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}$$

εύκολα προκύπτει ότι

$$\Box\varphi = \frac{3}{2}\alpha e^{-6\alpha\varphi}F^2$$

Άρα η απαλοιφή του βαθμωτού πεδίου φ, έτσι ώστε η τετραδιάστατη θεωρία να περιγράφει την κλασική βαρύτητα και τον ηλεκτρομαγνητισμό δεν είναι δυνατή εξαιτίας της παρουσίας ενός όρου πηγής στο δεξί μέλος. Με άλλα λόγια η ύπαρξη αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα πεδία δεν επιτρέπει κάτι τέτοιο.

3.6 Συμμετρία βαθμίδας και ομάδα ισομετρίας

Η αρχική πενταδιάστατη θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω απο γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Η δράση των μετασχηματισμών αυτών στον πενταδιάστατο μετρικό τανυστή είναι

$$\left(L_{\hat{\xi}}\hat{g}\right)_{MN} = \hat{\xi}^K \partial_K \hat{g}_{MN} + \hat{g}_{KN}\partial_M \hat{\xi}^K + \hat{g}_{MK}\partial_N \hat{\xi}^K \tag{21}$$

όπου $L_{\hat{\xi}}\hat{g}$ η παράγωγος Lie του πενταδιάστατου μετρικού τανυστη ως προς το διανυσματικό πεδίο $\hat{\xi}$ το οποίο είναι ίσο με τον απειροστό γενικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων $\delta\hat{\mathrm{x}}^M = \hat{\xi}^{\mathrm{M}}$. Συνεπώς στη γενική περίπτωση οι μετασχηματισμοί τις σχέσης (21) δεν διατηρούν την μορφή της μετρικής της σχέσης (7) καθώς τα διάφορα blocks του πίνακα αναμειγνύονται μεταξύ τους. Προκειμένου να διατηρηθεί η μορφή θα ψάξουμε να βρούμε τα διανυσματικά πεδία $\hat{\xi}$ για τα οποία ισχύει

$$\left(L_{\hat{\xi}}\hat{g}\right)_{MN} = L_{\hat{\xi}}\hat{g}_{MN} \tag{22}$$

για κάθε τιμή των M και N. Οι σχέσεις (7), (21) και (22) για $M = N = z$ δίνουν ότι

$$\hat{\xi}^{\mu} = \xi^{\mu}(x)\,, \qquad \hat{\xi}^{z} = \lambda(\mathrm{x}) \tag{23}$$

και ότι το πεδίο φ μετασχηματίζεται ως

$$\delta\varphi \equiv L_{\hat{\xi}}\varphi = \xi^{\mu}\partial_{\mu}\varphi$$

Ομοίως παίρνοντας τις υπόλοιπες τιμές των M και N της σχέσης (21) καθώς και την σχέση (23) εύκολα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu} &\equiv \left(L_{\hat{\xi}}A\right)_{\mu} = \xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu} + A_{\nu}\partial_{\mu}\xi^{\nu} + \partial_{\mu}\lambda \\ \delta g_{\mu\nu} &\equiv \left(L_{\hat{\xi}}g\right)_{\mu\nu} = \xi^{\kappa}\partial_{\kappa}g_{\mu\nu} + g_{\kappa\nu}\partial_{\mu}\xi^{\kappa} + g_{\mu\kappa}\partial_{\nu}\xi^{\kappa} \end{aligned} \tag{24}$$

Συνεπώς απο τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι τα φ, A_{μ}και $g_{\mu\nu}$ παριστάνουν αντίστοιχα ένα βαθμωτό πεδίο, ένα διανυσματικό πεδίο και την μετρική στις τέσσερις διαστάσεις αφού έχουν τον αναμενόμενο μετασχηματισμό ως προς τον γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων ξ^{μ}.

Ο μετασχηματιμός $\hat{\xi}^{z} = \lambda(x)$ επιδρά μόνο στο πεδίο A_{μ} και αντιστοιχεί στον συνήθη μετασχηματισμό βαθμίδας ενός $U(1)$ πεδίου βαθμίδας. Το διανυσματικό πεδίο $\hat{\xi}^{z}\frac{\partial}{\partial z}$ είναι πεδίο Killing του χώρου S^1 και αποτελεί τον γεννητορα της ομάδας ισομετριας $U(1)$ του χώρου S^1. Άρα η ομάδα ισομετρίας του S^1 αποτελεί και την ομάδα βαθμίδας της τετραδιάστατης θεωρίας.

4 Γενίκευση της κλασικής θεωρίας Kaluza-Klein

4.1 Επιλογή του εσωτερικού χώρου

Γενικεύοντας την κλασική θεωρία Kaluza-Klein μπορούμε να επιλέξουμε ως εσωτερικό χώρο μια συμπαγή πολλαπλότητα M. Όπως θα δούμε στη συνέχεια η ομάδα ισομετρίας του εσωτερικού χώρου ταυτίζεται με την ομάδα βαθμίδας της τετραδιάστατης θεωρίας. Υπάρχουν διάφορες επιλογές για το M:

- M=G μια συμπαγής ομάδα-πολλαπλότητα όπως τα $SO(n)$, $SU(n)$ κτλ. Έστω $U \in G$. Η δράση του G στον εαυτό του είναι μεταβατικη απο αριστερά και απο δεξιά. Συνεπώς αν θεωρήσουμε ένα άλλο στοιχείο $U' \in G$ τότε υπάρχουν στοιχεία A,B $\in G$ τέτοια ώστε $U' = AUB$. Ορίζοντας στο G το μετρικό τανυστή $g = tr\left(dU\,U^{-1}\right)^2$ παρατηρούμε ότι η μετρική αυτή είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς $U \to U' = AUB$. Άρα η ομάδα ισομετρίας της παραπάνω μετρικής είναι η $G \times G$. Επίσης η ομάδα-πολλαπλότητα G είναι ομογενής.
- Το M είναι χώρος πηλίκου της μορφής G/H όπως τα $SO\left(n+1\right)/SO\left(n\right)$, $SU\left(n+1\right)/SU\left(n\right)$ κτλ. Τότε η ομάδα ισομετρίας είναι η G, η δράση της στον εσωτερικό χώρο είναι μεταβατική και συνεπώς ο χώρος είναι ομογενής.
- Το M είναι μια συμπαγής πολλαπλότητα με ομάδα ισομετρίας G η οποία όμως δεν έχει μεταβατική δράση. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος δεν είναι ομογενής.

Από όλες τις παραπάνω περιπτώσεις η πλέον οικονομική είναι η επιλογή ενός χώρου πηλίκου G/H υπο την έννοια ότι η διάστασή του είναι η μικρότερη για κάποια δεδομενη ομάδα βαθμίδας G.

4.2 Η δράση της D-διάστατης θεωρίας

Θα θεωρήσουμε την d-διάστατη θεωρία βαρύτητας του Einstein με δράση

$$S = \int d^4 x d^{\mathrm{d}} y \sqrt{-det \hat{g}} \hat{R} \tag{25}$$

όπου d είναι η διάσταση του εσωτερικού χώρου M ενώ τα υπόλοιπα μεγέθη είναι γενικεύσεις του εδαφίου 3.

4.3 Ανάπτυγμα της μετρικής

Κατά αναλογία με το προηγούμενο μοντέλο θεωρούμε ότι οι επιπλέον διαστάσεις του μετρικού τανυστή μπορούν να αναπτύχθούν έχοντας ως βάση ένα πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων του εσωτερικού χώρου. Δηλαδή

$$\hat{g}_{MN}\left(x,y\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} g^k_{MN}\left(x\right) P^k_{MN}\left(y\right) \tag{26}$$

όπου $P^k_{MN}\left(y\right)$ οι ιδιοσυναρτήσεις της Λαπλασιανής στον εσωτερικό χώρο. Όπως στο κλασικό Kaluza-Klein απο τη σχέση (26) θα απαλείψουμε τα KK modes κρατώντας μόνο τον όρο $k = 0$. Επιπλέον για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς θα απαλείψουμε και τα βαθμωτά πεδία της τετραδιάστης θεωρίας. Συνεπώς θεωρούμε το ansatz

$$\hat{g} = g + g_{mn}(dy^m + \xi^{mI} A^I) \otimes \left(dy^n + \xi^{nI} A^I\right) \tag{27}$$

όπου $\xi^{mI}(y)$ τα διανυσματικά πεδία Killing της μετρικής $g_{mn}(y)$ του εσωτερικού χώρου M και $A^I(x)$ τα μποζόνια βαθμίδας της τετραδιάστατης θεωρίας. Συνεπώς έχουμε για τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή ότι

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \xi^{mI}\xi^{J}_{m} A^I_\mu A^J_\nu & \xi^I_m A^I_\mu \\ \xi^I_n A^I_\nu & g_{mn} \end{pmatrix} \tag{28}$$

4.4 Ομάδα βαθμίδας της τετραδιάστατης θεωρίας

Η αρχική μεγαλοδιάστατη θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω απο γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Η δράση των μετασχηματισμών αυτών στον πενταδιάστατο μετρικό τανυστή είναι

$$\left(L_{\hat{\Xi}}\hat{g}\right)_{MN} = \hat{\Xi}^K \partial_K \hat{g}_{MN} + \hat{g}_{KN}\partial_M \hat{\Xi}^K + \hat{g}_{MK}\partial_N \hat{\Xi}^K \tag{29}$$

όπου $L_{\hat{\Xi}}\hat{g}$ η παράγωγος Lie του πενταδιάστατου μετρικού τανυστη ως προς το διανυσματικό πεδίο $\hat{\Xi}$ το οποίο είναι ίσο με τον απειροστό γενικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων $\delta\hat{x}^M = \hat{\Xi}^M$. Θα θεωρήσουμε μετασχηματισμούς της μορφής

$$\hat{\Xi}^{\mu} = 0, \qquad \hat{\Xi}^{m} = \xi^{mI}\lambda^{I}\left(\mathrm{x}\right) \tag{30}$$

Από τις σχέσεις (29) και (30) για M=μ και N=m έχουμε ότι

$$\left(L_{\hat{\Xi}}\hat{g}\right)_{\mu\mathrm{m}} = \xi_{m}^{\mathrm{I}}\left(\partial_{\mu}\lambda^{I} + f^{JKI}\lambda^{\mathrm{J}}\mathrm{A}_{\mu}^{K}\right) \tag{31}$$

όπου f^{IJK} οι σταθερές δομής της άλγεβρας Lie των διανυσματικών πεδίων Killing

$$\left[\xi^{I}, \xi^{J}\right] = f^{IJK}\xi^{K} \tag{32}$$

Από τη σχέση (31) βγάζουμε το συμπέρασμα ότι

$$\delta\mathrm{A}_{\mu}^{I} = \partial_{\mu}\lambda^{\mathrm{I}} + f^{JKI}\lambda^{J}A_{\mu}^{K} \tag{33}$$

το οποίο είναι οι απειροστοί Yang-Mills μετασχηματισμοί βαθμίδας με ομάδα συμμετρίας την ομάδα ισομετρίας G του εσωτερικού χώρου M.

4.5 Απαλοιφή των KK modes

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς σε σχέση με τις συνιστώσες του τανυστή Ricci θα κάνουμε μια αλλαγή βάσης. Έστω e^{a}, $e^{\mathrm{a}'}$ τα vielbeins του τετραδιάστατου και του εσωτερικού χώρου αντίστοιχα. Ο μετρικός τανυστής $\hat{g}$ γράφεται στην βάση των πενταδιάστατων vielbeins $\hat{e}^A$ ως

$$\hat{\mathrm{g}} = \hat{\eta}_{AB}\hat{e}^A \otimes \hat{e}^B \tag{34}$$

όπου $\hat{\eta}_{AB} = \mathrm{diag}\big(\eta_{\mathrm{ab}}, \eta_{\mathrm{a}'b'}\big)$ οι συνιστώσες της μετρικής σε αυτή την βάση. Συγκρίνοντας την σχέση (27) με την σχέση (34) μπορούμε να επιλέξουμε τα vielbeins

$$\hat{e}^{\mathrm{a}} = e^{\mathrm{a}}, \quad \hat{e}^{\mathrm{a}'} = e^{\mathrm{a}'} + \xi^{\mathrm{a}'I}A^I \tag{35}$$

Ακουλουθώντας ανάλογη μεθοδολογία με το προηγούμενο εδάφιο τελικά υπολογίζουμε τις συνιστώσες του τανυστή Ricci στην βάση των vielbeins

$$\hat{R}_{\mathrm{ab}} = \mathrm{R}_{\mathrm{a}b} - \frac{1}{2}\xi^{\mathrm{a}'I}\xi^J_{\mathrm{a}'}F^I_{\mathrm{ac}}F_{\mathrm{b}}{}^{\mathrm{cJ}} \tag{36}$$

$$\hat{R}_{\mathrm{aa}'} = \frac{1}{2}\xi^I_{\mathrm{a}'}D_{\mathrm{b}}F_{\mathrm{a}}{}^{\mathrm{bI}} \tag{37}$$

$$\hat{R}_{\mathrm{a}'\mathrm{b}'} = R_{\mathrm{a}'\mathrm{b}'} + \frac{1}{4}\xi^I_{\mathrm{a}'}\xi^J_{b'}F^I_{\mathrm{ab}}F^{\mathrm{abJ}} \tag{38}$$

όπου D_ν είναι η Yang-Mills συναλλοίωτη παράγωγος.

Οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες προκύπτουν απο την πενταδιάστατη δράση είναι οι εξισώσεις πεδίου του Einstein στο κενό $\hat{R}_{AB} = 0$. Για διάφορες τιμές των A,B και τις σχέσεις (36), (37) έχουμε ότι

$$D_{\mathrm{a}} F_b{}^{\mathrm{aI}} = 0$$

$$R_{\mathrm{a}'b'} + \tfrac{1}{4}\xi^I_{\mathrm{a}'}\xi^J_{b'} F^I_{\mathrm{ab}} F^{\mathrm{abJ}} = 0$$

Η πρώτη απο αυτές τις σχέσεις δίνει τις τετραδιάστες Yang-Mills εξισώσεις. Η δεύτερη σχέση δεν έχει φυσικη ερμηνεία πράγμα το οποίο οφείλεται στην απαλοιφή των βαθμωτών πεδίων απο την θεωρία μέσα απο το anszat (27) του μετρικού τανυστή. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αν συμπεριλάβουμε τα βαθμωτά πεδία στην μεγαλοδιάστατη θεωρία.

Η σχέση $\hat{R}_{AB} = 0$ μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη μορφή

$$\hat{R}_{AB} - \hat{\eta}_{\mathrm{AB}} \hat{R} = 0$$

και συνεπώς για A=a και B=b έχουμε ότι

$$R_{\mathrm{ab}} - \frac{1}{2} R \eta_{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2} \xi^{\mathrm{a}' I} \xi^{\mathrm{J}}_{\mathrm{a}'} \left(F^I_{\mathrm{ac}} F_{\mathrm{b}}{}^{\mathrm{cJ}} - \frac{1}{4} F^I_{\mathrm{cd}} F^{\mathrm{cdJ}} \eta_{\mathrm{ab}} \right) \tag{39}$$

Αν ορίσουμε τον πίνακα $Y^{IJ} \equiv \xi^{a'I}\xi^{J}_{a'}$ και υποθέσουμε ότι

$$Y^{IJ} = c\delta^{IJ} \tag{40}$$

τότε η σχέση (38) μας δίνει τις τετραδιάστατες εξισώσεις πεδίου του Einstein με τα πεδία Yang-Mills να δρουν ως πηγή. Όμως η σχέση (39) δεν γίνεται να ισχύει στη γενική περίπτωση γιατί αν $dimG > dimM$ τότε ο πίνακας Y^{IJ} έχει μηδενική ορίζουσα. Επίσης το αριστερό μέλος της σχέσης (38) είναι συνάρτηση των συντεταγμένων x^{μ} ενώ το δεξί μέλος, λόγω της παρουσίας των διανυσματικών πεδίων Killing ξ^{I} του εσωτερικού χώρου, είναι συνάρτηση και των συντεταγμένων y^{m}. Στη γενική περίπτωση και τα δύο αυτά προβλήματα δεν γίνεται να επιλυθούν με την εισαγωγή των βαθμωτών πεδίων και οφείλονται στην απαλοιφή των KK modes.

5 Φερμιόνια και πεδία βαθμίδας υποβάθρου

5.1 Γενικά

Για την δημιουργία μιας ρεαλιστικής θεωρίας θα πρέπει και φερμιόνια να εμφανιστούν στην τετραδιάστατη θεωρία. Τα φερμιόνια δεν προκύπτουν απο την μετρική και συνεπώς πρέπει να συμπεριληφθούν στην αρχική μεγαλοδιάστατη δράση. Επίσης είναι απαραίτητο να συμπεριληφθούν και πεδία βαθμίδας εκτός απο εκείνα τα οποία προκύπτουν απο την ομάδα ισομετρίας G του εσωτερικού χώρου έτσι ώστε, έκτός των άλλων, να πάρουμε chiral φερμιόνια στην τετραδιάστη θεωρία.

5.2 Ανάλυση σπινόρων και πίνακων Dirac στις μεγάλες διαστάσεις

Ένα σπίνορας $\hat{\psi}(x, y)$ στις μεγάλες διαστάσεις μπορεί να αναλυθεί κάτω απο το τανυστικό γινόμενο ενός σπίνορα $\psi(x)$ στις τέσσερις διαστάσεις και ενός σπίνορα $\eta(\mathrm{y})$ στον εσωτερικό χώρο. Δηλαδή

$$\hat{\psi}(x, y) = \sum_k \psi^k(x) \otimes \eta^\varkappa(\mathrm{y}) \tag{41}$$

Στην τετραδιάστατη θεωρία θέλουμε τα φερμιόνια να είναι chiral (άρα να έχουν μηδενική μάζα πριν το σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδας) και οι μάζες τους να βρίσκονται στην ηλεκτρασθενή κλίμακα. Συνεπώς απο το ανάπτυγμα αυτό θα κρατήσουμε τους όρους οι οποίοι αντιστοιχούν σε μηδενική μάζα (zero modes).

Οι πίνακες Dirac $\hat{\Gamma}_{\mathrm{A}}$ στις μεγάλες διαστάσεις μπορούν να αναπαρασταθούν ως το τανυστικό γινόμενο των πινακων Dirac στις τέσσερις και στις d διαστάσεις. Η αναπαράσταση αυτή εξαρτάται απο το εαν η διάσταση d του εσωτερικού χώρου M είναι περιττή ή άρτια. Έχουμε συνοπτικά:

- $D = 2N+1: \qquad \hat{\Gamma}_a = \gamma_a \otimes \mathrm{I}\ , \qquad \hat{\Gamma}_{a'} = \gamma_5 \otimes \Gamma_{a'}$
- $D = 2N: \qquad \hat{\Gamma}_a = \gamma_a \otimes \Gamma, \qquad \hat{\Gamma}_{a'} = \mathrm{I} \otimes \Gamma_{a'}$

όπου γ_5, Γ οι πίνακες chirality στις τέσσερις και d διαστάσεις αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις οι πίνακες γάμμα ικανοποιούν την άλγεβρα Clifford

$$\left\{\gamma_a, \gamma_b\right\} = 2\eta_{ab}, \qquad \{\Gamma_{a'}, \Gamma_{b'}\} = 2\eta_{a'b'}, \qquad \left\{\hat{\Gamma}_{\mathrm{A}}, \hat{\Gamma}_{\mathrm{B}}\right\} = 2\hat{\eta}_{AB} \tag{42}$$

5.3 Η δράση των φερμιονίων

Το τμήμα της δράσης της μεγαλοδιάστατης θεωρίας για τα φερμιόνια είναι

$$S_F = \int d^4x d^{\mathrm{d}}y\ \sqrt{-det\hat{g}}\ \bar{\hat{\psi}} \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + i\Gamma^{a'} e^m_{a'} \nabla_m\right) \hat{\psi} \tag{43}$$

όπου $\hat{\psi}$ ο σπίνορας στις μεγάλες διαστάσεις ο οποίος σύμφωνα με την σχέση () αναλύεται ως $\hat{\psi}(x,y) = \sum_k \psi^k(x) \otimes \eta^{\varkappa}(\mathrm{y})$. Η συναλλοίωτη παράγωγος δρά στον σπίνορα $\eta(y)$ και έχει μορφή

$$\nabla_m \eta = \left(\partial_{\mathrm{m}} - \frac{1}{2} i \omega^{a'b'}{}_m M_{a'b'} \right) \eta \tag{44}$$

όπου $M_{a'b'} = \frac{1}{4} i \left[\Gamma_{a'}, \Gamma_{b'} \right]$ η spinor αναπαράσταση της SO(d) ομάδας μετασχηματισμών του εφαπτομενικού χώρου του εσωτερικού χώρου M. Τα υπόλοιπα μεγέθη και οι συμβάσεις των δεικτών ορίζονται όπως ακριβώς στα προηγούμενα εδάφια.

5.4 Μάζες των φερμιονίων στις τέσσερις διαστάσεις

Απο την σχέση (43) προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του τελεστή

$$M = -i \Gamma^{\mathrm{m}} \nabla_m \tag{45}$$

δίνουν τις μάζες των φερμιονίων στην τετραδιάστατη θεωρία. Συνεπώς έχουμε

$$-M^2 \eta = \Gamma^{\mathrm{m}} \nabla_m \Gamma^{\mathrm{n}} \nabla_n \eta = \left(\frac{1}{2} \left\{ \Gamma^m, \Gamma^n \right\} + \frac{1}{2} \left[\Gamma^m, \Gamma^n \right] \right) \nabla_m \nabla_n \eta$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $[\nabla_m, \Gamma^n]\,\nabla_n\eta$=0. Συνεχίζοντας έχουμε

$$-M^2\eta = g^{mn}\nabla_m\nabla_n\eta + \frac{1}{4}\left[\Gamma^m, \Gamma^n\right]\left[\nabla_m, \nabla_n\right]\eta = \nabla^{\mathrm{m}}\nabla_m\eta\text{-}\frac{1}{4}R\eta \tag{46}$$

όπου η σχέση $[\nabla_m, \nabla_n]\,\eta$=-$\frac{1}{2}iM^{ab}R_{ab\mathrm{mn}}\eta$ χρησιμοποιήθηκε. Ο όρος $\nabla^{\mathrm{m}}\nabla_m\eta$ είναι αρνητικός ή μηδέν αφού

$$\int \mathrm{d}^{\mathrm{D}}y\ \sqrt{-detg}\ \eta^{\dagger}\mathrm{g}^{mn}\nabla_m\nabla_n\eta = -\int \mathrm{d}^{\mathrm{D}}y\ \sqrt{-detg}\left(\nabla_m\eta^{\dagger}\right)\mathrm{g}^{mn}\left(\nabla_n\eta\right)$$

Επίσης η βαθμωτή καμπυλότητα είναι θετική για (κλειστούς) συμπαγής χώρους. Άρα ο τελεστής M^2 έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές της τάξης R^{-2} όπου R η χαρακτηριστική κλίμακα του συμπαγούς εσωτερικού χώρου M (Θεώρημα Lichnerowitz). Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως κάτι τέτοιο αποτελεί πρόβλημα για την δημιουργία μιας ρεαλιστικής θεωρίας και θα θέλαμε τα φερμιόνια να είναι zero modes του τελεστή Dirac.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με διάφορους τρόπους. Μία λύση είναι η εισαγωγή torsion στον εσωτερικό χώρο M η οποία τροποποιεί τον τελεστή M^2 ως

$$-M^2\eta = \left(\nabla^m\nabla_m - \frac{1}{2}M^{mn}M^{ab}R_{abmn} + iM^{mn}T^k_{mn}\nabla_k\right)\eta$$

έτσι ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να πάρουμε zero modes.

5.5 Chiral φερμιόνια

Στη προηγούμενη περίπτωση, ακόμα και αν καταφέρουμε να πάρουμε zero modes εισάγοντας μη μηδενική torsion, εμφανίζεται ένα νέο πρόβλημα. Οι αναπαραστάσεις των φερμιονίων στην τετραδιάστατη θεωρία είναι τέτοιες έτσι ώστε τα αριστερόστροφα και τα δεξιόστροφα φερμιόνια να μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο δηλαδή δεν παίρνουμε chiral φερμιόνια. Συμβολίζουμε με $\sigma_{4+\mathrm{d}}$, σ_d τις spinor αναπαραστάσεις των ομάδων SO(1,3+d) $\cong SU_L(2) \otimes SU_R(2) \otimes SO(d)$ και $SO(d)$ κάτω απο τις οποίες μετασχηματίζονται οι σπίνορες $\hat{\psi}$, η αντίστοιχα της σχέσης (41). Εξετάζουμε τις διάφορες περιπτώσεις:

- Για περιττή τιμή της διάστασης $d = 2N + 1$ του εσωτερικού χώρου M δεν μπορεί να οριστεί chirality τελεστής στον εσωτερικό χώρο (ο τελεστής αυτός θα είναι ο μοναδιαίος). Συνεπώς κάθε αναπαράσταση σ_{4+d} του μεγαλοδιάστατου σπίνορα $\hat{\psi}$ κάτω απο το $SO(1, 3 + d)$ αναλύεται σύμφωνα με την σχέση (41) ως γινόμενο σπινοριακών αναπαραστάσεων κάτω απο το $SO(1, 3) \cong SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ και μιας μοναδικής αναπαράστασης κάτω απο το $SO(d)$. Δηλαδή

  $$\sigma_{4+d} = (2, 1; \sigma_d) + (1, 2; \sigma_d)$$

  και έτσι τα αριστερόστροφα και τα δεξιόστροφα φερμιόνια στις τέσσερις διαστάσεις θα μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο.

- Για άρτια τιμή της διάστασης $d = 2N$ του εσωτερικού χώρου M ορίζουμε τον chirality τελεστή

$$\hat{\Gamma} = i\hat{\Gamma}_0 \ldots \hat{\Gamma}_{\mathrm{d+3}} \tag{47}$$

Απο την σχέση (47) εύκολα προκύπτει ότι

$$\hat{\Gamma} = -i\,\gamma_5 \otimes \Gamma \tag{48}$$

και έτσι $\hat{\Gamma}^2 = (-1)^{N+1}$. Επίσης ισχύει ότι $\left\{\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}_{\mathrm{A}}\right\} = 0$ και άρα $\left[\hat{\Gamma}, \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{AB}}\right] = 0$ όπου $\hat{M}_{AB}$ οι γεννήτορες της spinor αναπαράστασης της $SO\left(1, 3+d\right)$. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοτιμές του $\hat{\Gamma}$ έτσι ώστε να διακρίνουμε μη ισοδύναμες σπινοριακές αναπαραστάσεις τις οποίες συμβολίζουμε ως σ_{4+d} και σ'_{4+d}. Οι αναπαραστάσεις αυτές, όπως προκύπτει απο την σχέση (48), για δεδομένη ιδιοτιμή του $\hat{\Gamma}$ έχουν chirality για τον τετραδιάστατο χώρο η οποία σχετίζεται με την chirality στων εσωτερικό χώρο. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις:

- N=2K $\Leftrightarrow$ d=4K. Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\hat{\Gamma}$ είναι $\pm i$ ενώ για τις ιδιοτιμές της chirality στον τετραδιάστατο και στον εσωτερικό χώρο έχουμε τα εξής:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma} = +i \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_5 = +i & \Gamma = +i \\ \gamma_5 = -i & \Gamma = -i \end{array} \right\} \\
\hat{\Gamma} = -i \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_5 = +i & \Gamma = -i \\ \gamma_5 = -i & \Gamma = +i \end{array} \right\}
\end{aligned}
\tag{49}
$$

ή ισοδύναμα

$$
\sigma_{4+d} = (2,1;\sigma_d) + \left(1,2;\sigma_d^{'}\right) \qquad \sigma_{4+d}^{'} = \left(2,1;\sigma_d^{'}\right) + (1,2;\sigma_d)
$$

Στο $SO\left(1,3\right) \cong SU_L\left(2\right) \otimes SU_R\left(2\right)$ ο μιγαδικός συζυγής ενός σπίνορα με $\gamma_5 = +1$ είναι ένας σπίνορας με $\gamma_5 = -1$ ενώ στο $SO(2N)$ (για N άρτιο) οι αναπαραστάσεις του σπίνορα με Γ=+i είναι αυτοσυζυγείς δηλαδή $\bar{\sigma}_{\mathrm{d}} = \sigma_d$. Ομοιώς για τις αναπαραστάσεις του σπίνορα με $\Gamma = -i$. Άρα απο την σχέση (49) προκύπτει ότι στο $SO\left(1,3+d\right)$ οι σπίνορες με $\hat{\Gamma}$=+i είναι ισοδύναμοι με τον συζυγή των σπινόρων με $\hat{\Gamma} = -i$ και συνεπώς, για ένα δεδομένο chirality Γ στον εσωτερικό χώρο, τα αριστερόστροφα και οι δεξιόστροφα φερμιόνια στις τέσσερις διαστάσεις μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο.

- N=2K+1 $\Leftrightarrow$ d=4K+2. Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\hat{\Gamma}$ είναι ± 1 ενώ για τις ιδιοτιμές της chirality στον τετραδιάστατο και στον εσωτερικό χώρο έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma} = +1 \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_5 = +i & \Gamma = +1 \\ \gamma_5 = -i & \Gamma = -1 \end{array} \right\} \\
\hat{\Gamma} = -1 \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_5 = +i & \Gamma = -1 \\ \gamma_5 = -i & \Gamma = +1 \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{50}$$

ή ισοδύναμα

$$\sigma_{4+d} = (2,1;\sigma_d) + \left(1,2;\sigma_d^{'}\right) \qquad \sigma_{4+d}^{'} = \left(2,1;\sigma_d^{'}\right) + (1,2;\sigma_d)$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω στο $SO(1,3) \cong SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ ο μιγαδικός συζυγής ενός σπίνορα με $\gamma_5 = +1$ είναι ένας σπίνορας με $\gamma_5 = -1$ ενώ στο $SO(2N)$ (για N περιττό) οι συζυγείς αναπαραστάσεις του σπίνορα με Γ=+1 είναι ισοδύναμες με τις αναπαραστάσεις του σπίνορα με $\Gamma = -1$ δηλαδη $\bar{\sigma}_{\mathrm{d}} = \sigma_d^{'}$. Άρα απο την σχέση (50) προκύπτει ότι στο $SO(1,3+d)$ οι σπίνορες με $\hat{\Gamma}$=+1 έχουν την ιδιότητα ανάλογα με την chirality του εσωτερικού χώρου να περιγράφουν ένα αριστερόστροφο ή δεξιόστροφο φερμιόνιο στις τέσσερις διαστάσεις. Αντίστοιχα για τους σπίνορες με $\hat{\Gamma}$=-1. Συνεπώς οι θεωρίες με διαστάσεις 4K+2 έχουν την δυνατότητα να συμπεριλάβουν chiral φερμιόνια.

5.6 Πεδία βαθμίδας υποβάθρου

Στο προηγούμενο εδάφιο είδαμε ότι οι θεωρίες με 4K+2 διαστάσεις είναι υποψήφιες για να περιγράψουν chiral φερμιόνια στις τέσσερις διαστάσεις. Για να πάρουμε όμως μια chiral θεωρία αυτό δεν είναι από μόνο του αρκετό και πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι τα Γ=+1 zero modes μετασχηματίζονται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις απο τα Γ=-1 zero modes. Χωρίς να επεκταθούμε σε λεπτομέρειες μια συνέπεια του θεωρήματος Atiyah και Hirzebruch (1970) είναι ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό παραμόνο αν εισάγουμε πεδία βαθμίδας στην αρχική μεγαλοδιάστατη θεωρία (background gauge fields). Τότε η συναλλοίωτη παράγωγος έχει την μορφή

$$\nabla_m \eta = \left(\partial_{\mathrm{m}} - \frac{1}{2} i \omega^{a'b'}{}_m M_{a'b'} - \mathrm{ig} A_m \right) \eta$$

και συνεπώς μπορούμε να έχουμε chiral zero modes με κατάλληλη επιλογή των πεδίων βαθμίδας.

6 Διαστασιακή ελλάτωση σε χώρους πηλίκου

6.1 Εισαγωγή

Η εννοποίηση των αλληλεπιδράσεων κάτω απο μια κοινή θεωρία αποτελεί ένα ανοικτό πρόβλημα. Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού και της ασθενούς αλληλεπίδρασης κάτι τέτοιο είναι εφικτό με την χρήση της ομάδας βαθμίδας $SU(2) \times U(1)$ η οποία στη συνέχεια σπάει αυθόρμητα στην ομάδα βαθμίδας $U(1)_{em}$. Το προηγούμενο σπάσιμο συμβαίνει στην ενεργειακή κλίμακα της τάξης των $10^2 GeV$ και προυποθέτει την ύπαρξη ενός βαθμωτού πεδίου το οποίο ονομάζεται βαθμωτό πεδίο Higgs. Η εννοποίηση της ισχυρής και της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης περιγράφεται στο πλαίσιο των μεγάλων εννοποιημένων θεωριών (GUTs) οι οποίες χρησιμοποιούν ομάδες βαθμίδας όπως $SU(5)$ ή $SU(10)$. Στις GUTs εισάγεται μια επιπλέον ενεργειακή κλίμακα της τάξης των $10^{15} GeV$ η οποία σχετίζεται με το αυθόρμητο σπάσιμο της ισχυρής-ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Επιπρόσθετα ο τομέας των βαθμωτών πεδίων πρέπει να επεκταθεί με την εισαγωγή κατάλληλων πεδίων. Η εισαγωγή αυτής της νέας ενεργειακής κλίμακας και ειδικότερα η μεγάλη διαφορά της απο την ενεργειακή κλίμακα της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση του προβλήματος της ιεραρχίας (hierarchy problem).

Παρά το γεγονός ότι η ενεργειακή κλίμακα των μεγάλων εννοποιημένων θεωριών δε βρίσκεται πολύ μακριά απο την ενεργεικά κλίμακα Planck ($10^{19} GeV$), η βαρυτική αλληλεπίδραση δεν συμπεριλαμβάνεται στα GUTs. Απο την άλλη η κλασική Kaluza-Klein θεωρία αρχίζει με την πενταδιάστατη δράση της βαρύτητας και μετά την ελλάτωση της θεωρίας στις τέσσερις διαστάσεις αυτό που μένει είναι μια $U(1)$ θεωρία βαθμίδας η οποία περιγράφει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο καθώς και το βαρυτικό πεδίο. Όπως εξηγήθηκε στα προηγούμενα εδάφια η γενίκευση της κλασικής Kaluza-Klein θεωρίας επιτυγχάνεται με κατάλληλη επιλογή του εσωτερικού χώρου: Η ομάδα ισομετρίας του εσωτερικού χώρου ταυτίζεται με την ομάδα βαθμίδας της τετραδιάστατης θεωρίας και συνεπώς μη αβελιανές ομάδες βαθμίδας μπορούν να προκύψουν για την τετραδιάστατη θεωρία. Το πλεονέκτημα της προσέγγισης των Kaluza-Klein είναι ότι επιτυγχάνεται μια γεωμετρική εννοποίηση της βαρύτητας με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις καθώς και μια εξήγηση των συμμετριών βαθμίδας. Το βασικό μειονέκτημα είναι ότι δεν προκύπτουν chiral φερμιόνια στις τέσσερις διαστάσεις. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή πεδίων βαθμίδας υποβάθρου (background gauge fields) στην αρχική μεγαλοδιάστατη θεωρία. Επίσης το γεγονός ότι σε χαμηλές ενέργειες η βαρυτική αλληλεπίδραση μπορεί να αγνοηθεί μας οδηγεί στην εξής προσσέγιση: Υποθέτουμε ότι ο χώρος έχει την μορφή $M_D = M_4 \times M$ όπου M ένας συμπαγής Riemannian εσωτερικός χώρος και θεωρούμε ότι η δράση περιγράφει μια μεγαλοδιάστατη Yang-Mills θεωρία. Μετά την διαστασιακή ελλάτωση προκύπτει μια Yang-Mills-Higgs θεωρία στις τέσσερις διαστάσεις. Αυτή η θεώρηση παρέχει μια εννοποιημένη θεωρία των αλληλεπιδράσεων σε χαμηλές ενέργειες καθώς και των πεδίων βαθμίδας με τα πεδία Higgs. Όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα εδάφια ένας απλός τρόπος για να γίνει η διαστασιακή ελλάτωση είναι να θεωρήσουμε ότι όλα τα πεδία είνα ανεξάρτητα απο τις συντεταγμένες του εσωτερικού χώρου M. Μια διαφορετική προσσέγιση είναι να θεωρήσουμε ότι υπάρχει εξάρτηση απο τις συντεταγμένες του εσωτερικού χώρου αλλά επιπλεόν να επιβάλλουμε την συνθήκη ότι ένας μετασχηματισμός ο οποίος ανήκει στην ομάδα ισομετρίας του M αντισταθμίζεται από έναν μετασχηματισμό βαθμίδας. Τότε η Lagrangian θα είναι ανεξάρτητη απο τις συντεταγμένες του M επειδή είναι αναλοίωτη κάτω απο μετασχηματιμούς βαθμίδας. Η διαστασιακή ελλάτωση σε χώρους πηλίκου (Coset Space Dimensional Reduction) βασίζεται σε αυτήν την ιδέα. Πιο συγκεκριμένα η αρχική μεγαλοδιάστατη δράση περιλαμβάνει βαθμωτά πεδία σε σύζευξη με φερμιονικά πεδία. Η ομάδα βαθμίδας της θεωρίας είναι το G ενώ ο εσωτερικός χώρος παίρνει την μορφή $M = S/R$ όπου S είναι μια ομάδα Lie και R είναι μια υποομάδα Lie της S. Για δεδομένα G και S/R η τετραδιάστατη θεωρία μπορεί να προσδιορισθεί πλήρως ως προς το περιεχόμενο των σωματιδίων και της σταθερές σύζευξης. Στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας τα πεδία Higgs προκύπτουν με φυσικό τρόπο ως αποτέλεσμα της γεωμετρικής εννοποιήσης των πεδίων βαθμίδας και των πεδίων Higgs. Ειδικότερα το βαθμωτό δυναμικό της τετραδιάστατης θεωρίας, το οποίο προκύπτει απο την διαστασιακή ελλάτωση της μεγαλοδιάστατης θεωρίας, έχει τέτοια μορφή ώστε η συμμετρία βαθμίδας σπάει αυθόρμητα. Δηλαδή η αρχική ομάδα βαθμίδας G του χώρου $M_D = M_4 \times M$ σπάει στην ομάδα βαθμίδας H του τετραδιάστατου χώρου M_4 και αυτή με τη σειρά της σπάει εξαιτίας των πεδίων Higgs. Για να προκύψουν ρεαλιστικές θεωρίες ένας επιπλέον μηχανισμός, ο μηχανισμός Hosotani, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο οποίος βασίζεται στη χρήση των διακριτών συμμετριών του εσωτερικού χώρου S/R.

6.2 Γεωμετρία των χώρων πηλίκου

Θεωρούμε χώρους πηλίκου της μορφής S/R όπου S είναι μια συμπαγής ομάδα Lie και R είναι μια συμπαγής υποομάδα Lie της S. Τα στοιχεία της του χώρου S/R είναι είτε κλάσεις ισοδυναμίας της μορφής sR (αριστερό σύμπλοκο) ή της μορφής Rs (δεξιό σύμπλοκο). Τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα είναι ισοδύναμα μόνο στην περίπτωση κατά την οποία η ομάδα Lie R είναι αναλλοίωτη υποομάδα της S. Στην παρούσα εργασία με τον όρο σύμπλοκο θα εννοούμε τα δεξιά σύμπλοκα. Η δράση της ομάδας S στον χώρο S/R ορίζεται ως $(Rs)s^{'} = R(ss^{'})$. Η δράση αυτή είναι μεταβατική δηλαδή για οποιαδήποτε δύο στοιχεία του χώρου S/R υπάρχει ένας S μετασχηματισμός ο οποίος τα συνδέει. Το υποσύνολο της S το οποίο αφήνει αναλλοίωτα όλα τα στοιχεία ενος σύμπλοκου αποτελεί την ισοτροπική του ομάδα.

Συμβολίζουμε ως R_{alg}, S_{alg} τις Lie άλγεβρες των ομάδων R και S αντίστοιχα. Η R_{alg} είναι υποάλγεβρα της S_{alg} και συνεπώς η S_{alg} μπορεί να αναλυθεί στο ευθύ άθροισμα $S_{alg} = R_{alg} \oplus K_{alg}$. Συνεπώς οι γεννήτορες της S μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα: $Q_i, i = 1, ..., dimR$ είναι οι γεννήτορες της R_{alg} και $Q_a, a = dimR + 1, ..., dimS$ είναι οι γεννήτορες της K_{alg} με $dimK = dim(S/R) = dimS - dimR = d$. Οι σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων είναι οι εξής:

$$[Q_i, Q_j] = f_{ij}^k Q_k$$

$$[Q_i, Q_a] = f_{ia}^b Q_b$$

$$[Q_a, Q_b] = f_{ab}^i Q_i + f_{ab}^c Q_c$$

Συνεπώς υποθέτουμε ότι το S/R είναι αναγωγικός αλλά στην γενική περίπτωση μη συμμετρικός χώρος πηλίκου. Στην περίπτωση που είναι συμμετρικός οι σταθερές δομής f_{ab}^c είναι ταυτοτικά ίσες με το μηδέν. Το παραπάνω ευθύ άθροισμα χαρακτηρίζεται απο την

$$adj\mathrm{S}_{alg} = adj R_{alg} + v \tag{51}$$

ανάλυση της συζυγούς αναπαράστασης της άλγεβρας S_{alg} κάτω απο την άλγεβρα R_{alg} όπου v αντιστοιχούν στους γεννήτορες της άλγεβρας K_{alg}.

Τα εφαπτόμενα διανύσματα του χώρου S/R μετασχηματίζονται κάτω απο την περιστροφική ομάδα $SO(d)$. Ειδικοτερα οι γεννήτορες Q_a ως διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου του S/R μετασχηματίζονται στην διανυσματική αναπαράσταση d της $SO(d)$. Άρα απο την σχέση (51) προκύπτει ότι υπάρχει μία εμβάπτιση της R_{alg} στην $SO(d)$ τέτοια ώστε $v = d$. Η εμβάπτιση αυτή θα καθοριστεί απο την εμβάπτιση της S στην R. Θεωρούμε τις σχέσεις μετάθεσης της ομάδας $SO(d)$:

$$\left[\Sigma^{ab},\Sigma^{cd}\right]=-g^{ac}\Sigma^{bd}+g^{ad}\Sigma^{ad}-g^{bd}\Sigma^{ac}$$

όπου Σ^{ab} οι γενήτορες της ομάδας $SO(d)$ και g^{ab} η μετρική του εφαπτόμενου χώρου. Η παραπάνω εμβάπτιση μπορεί να καθοριστει απο τη σχέση

$$T_i=-\frac{1}{2}f_{iab}\Sigma^{ab} \tag{52}$$

καθώς μπορεί να δειχτεί ότι τα T_i σχηματίζουν μια υποάλγεβρα της R_{alg}.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα στοιχεία του S/R είναι σύμπλοκα της μορφής Rs. Έστω $L(y)$ ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείο του συμπλόκου. Η δράση ενός S-μετασχηματισμού στο $L(y)$ θα δώσει ένα άλλο στοιχείο του S το οποίο γενικά ανήκει σε ένα διαφορετικο σύμπλοκο απο το αρχικό και του οποίου το αντιπροσωπευτικό στοιχείο συμβολίζουμε με $L(y^{'})$. Άρα με κάποιον επιπλέον μετασχηματισμό $r(y,s)$ το $L(y^{'})$ συνδέεται με το μετασχηματισμένο $L(y)$ μέσα απο την σχέση

$$\mathrm{L(y)s{=}r(y,s)L}(y^{'}) \tag{53}$$

Το αντιπροσωπευτικό στοιχείο $L(y)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathrm{L(y)} = exp(y^{\alpha}\delta_a^{\alpha}Q_{\alpha})$$

Αντίστοιχα τα στοιχεία r και s μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$s = exp(\omega^{i}Q_i + \omega^{\alpha}\delta_{\alpha}^{a}Q_a)$$

$$r = exp(\varphi^{i}Q_i)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο προηγούμενος S-μετασχηματισμός είναι ένας απειροστός μετασχηματισμός στην γειτονιά του ταυτοτικού μετασχηματισμού τότε έχουμε ότι

$$\delta y^{\alpha} = y^{\acute{}\alpha} - y^{\alpha} = \omega^{\beta}\delta_{\beta}^{a}\xi_a^{a} + \omega^{i}\xi_i^{\alpha} \tag{54}$$

Αντίστοιχα ένας απειροστός R-μετασχηματισμός μπορεί να γραφτεί ως:

$$\varphi^{i} = \omega^{\beta}\delta_{\beta}^{a}\Omega_{\alpha}^{i} + \omega^{j}\Omega_{j}^{i} \tag{55}$$

όπου τα Ω_{α}^{i} και Ω_{i}^{j} ονομάζονται R-αντισταθμιστές.

Εισάγοντας τις σχέσεις (54) και (55) στην σχέση (53) βρίσκουμε ότι τα διανυσματικά πεδία ξ_a^α και ξ_i^α ικανοποιούν την άλγεβρα

$$\xi_A^\beta \partial_\beta \xi_B^\alpha - \xi_B^\beta \partial_\beta \xi_A^\alpha = f_{AB} \xi_C^\alpha$$

και συνεπώς είναι τα Killing διανυσματικά πεδία του χώρου πηλίκου S/R.

6.3 Συμμετρικά πεδία

Θεωρούμε ότι χώρος της μεγαλοδιάστατης θεωρίας περιγράφεται απο μια πολλαπλότητα της μορφής $M_D = M_4 \times S/R$ ενώ η ομάδα συμμετρίας των πεδίων βαθμίδας είναι η G. Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του χώρου $M_D = M_4 \times S/R$ ως $x^M = (x^\mu, y^\alpha)$. Θεωρούμε ότι η δράση της ομάδας S στον χώρο M_4 είναι τετριμένη και συνεπώς δρά μόνο στα στοιχεία του S/R όπως εξηγήθηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Ορίζουμε ως συμμετρικό πεδίο V κάθε πεδίο το οποίο ικανοποιεί την σχέση

$$V(s(x)) = D(W(y,s))\Omega(y,s)V(x)$$

όπου Ω(y,s) είναι μια στροφή στον εφαπτομενικό χώρο του S/R η οποία εξαρτάται απο την αναπαράσταση της $SO(d)$ του πεδίου $V(x)$, s ένας μετασχηματισμός της ομάδας S και D(W(y,s)) είναι ο κατάλληλος μετασχηματισμός βαθμίδας για την αναπαράσταση του $V(x)$. Άρα ένα πεδίο είναι συμμετρικό όταν ένας S-μετασχηματισμός, αντισταθμιζόμενος απο έναν μετασχηματισμό βαθμίδας, αφήνει το πεδίο αναλλοίωτο. Στην περίπτωση που οι παραπάνω μετασχηματισμοί θεωρηθούν απειροστοί και εφαρμοστούν για ένα βαθμωτό πεδίο φ, ένα διανυσματικό πεδίο A_α και ένα σπινοριακό πεδίο ψ στον χώρο S/R έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{A}}\varphi = \xi_A^\alpha \partial_\alpha \varphi = D(W_A)\varphi \\
L_A A_\alpha = \xi_A^\beta \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha \xi_A^\beta A_\beta = \partial W_A - [W_A, A_\alpha] \\
L_A \psi = \xi_A^\alpha \partial \psi - \tfrac{1}{2} G_{Abc} \Sigma^{bc} \psi = D(W_A)\psi
\end{aligned}
\tag{56}
$$

όπου $G_{Ab}^a = -\Omega_A^i f_{ib}^a$, L_A είναι η παράγωγος Lie ενώ τα W_A παρουσιάζουν εξάρτηση μόνο απο τις συντεταγμένες y του εσωτερικού χώρου S/R. Επίσης η παράγωγος Lie ικανοποιεί τις σχέσεις μετάθεσης $[L_A, L_B] = f_{AB}^C L_C$ και συνεπώς ο μετασχηματισμός βαθμίδας W_A ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$
\xi_A^\alpha \partial_\alpha W_B - \xi_B^\alpha \partial_\alpha W_A - [W_A, W_B] = f_{AB}^C W_C \tag{57}
$$

Θεωρώντας έναν μετασχηματισμό βαθμίδας του βαθμωτού πεδίου $\acute{\varphi} = D(g)\varphi$ έχουμε ότι τα W_A τα οποία θα αντισταθμίσουν έναν S-μετασχηματισμό ο οποίος δρά στο πεδίο $\acute{\varphi}$ ικανοποιούν την σχέση

$$W_A^{'} = gW_A g^{-1} + \xi_A^\alpha (\partial_\alpha g) g^{-1}$$

Για να απλοποιήσουμε τους επόμενους υπολογισμούς μπορούμε να εκμεταλευτούμε την ελευθερία που μας παρέχουν οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί βαθμίδας και να θεωρήσουμε ότι $W_\alpha(y^\alpha = 0) = 0$. Τότε η σχέση (57) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \partial_a W_b - \partial_b W_a &= f_{ab}^i W_i \\ \partial_a W_i &= 0 \\ [W_i, W_j] &= -f_{ij}^k W_k \end{aligned} \tag{58}$$

Άρα οι συνιστώστες W_i είναι σταθερές στον χώρο πηλίκου S/R ενώ αν ορίσουμε ως $J_i = -W_i$ τα J_i σχηματίζουν την άλγεβρα της ομάδας R. Όμως τα W αποτελούν στοιχεία της Lie άλγεβρας του πεδίου βαθμίδας G και συνεπώς η ομάδα R είναι εμβαπτισμένη στην ομάδα βαθμίδας G με τους γεννήτορες J_i να σχηματίζουν την υποομάδα R_G της G.

Ένα βαθμωτό πεδίο A_M του χώρου $M_4 \times S/R$ έχει την μορφή $\mathrm{A}_M = (A_\mu, A_\alpha)$. Κάτω απο S-μετασχηματισμούς η συνιστώσα A_μ μετασχηματίζεται ως βαθμωτό πεδίο και σύμφωνα με τις σχέσεις (56), στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων $y = 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \partial_a A_\mu &= 0 \\ [J_i, A_\mu] &= 0 \end{aligned} \tag{59}$$

Άρα το τετραδιάστατο πεδίο βαθμίδας A_μ είναι ανεξάρτητο απο τις συντεταγμένες του εσωτερικού χώρου S/R και επιπλέον η τετραδιάστατη συμμετρία βαθμίδας H είναι η υποομάδα της G της οποίας κάθε στοιχείο μετατίθενται με κάθε στοιχείο της R. Δηλαδή $H = C_G(R_G)$ όπου ως $C_G(.)$ συμβολίζουμε τον κεντροποιητή μιας υποομάδας στην ομάδα G.

Οι υπόλοιπες συνιστώσες A_α του μεγαλοδιάστατου βαθμωτού πεδίου A_M μετασχηματίζονται ως διανύσματα κάτω από S-μετασχηματισμούς του εσωτερικού χώρου. Αν ορίσουμε ως $\Phi_a = e_a^\alpha \mathrm{A}_\alpha$ απο τις σχέσεις (56) έχουμε ότι

$$\partial_a \Phi_b - \partial_b \mathrm{W}_a = \tfrac{1}{2} f_{ab}^c \Phi_c$$

$$[J_i, \Phi_a] = f_{ia}^c \Phi_c$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις συμπεραίνουμε ότι οι αναπαραστάσεις των βαθμωτών πεδίων τα οποία επιζούν στην τετραδιάστατη θεωρία προκύπτουν απο την ανάλυση της G κάτω απο την $R_G \times H$ και την ανάλυση της S κάτω απο την R. Πιο συγκεκριμένα

$$adjG = (adjR, 1) + (1, adjH) + \sum (r_i, h_i)$$

$$adjS = adjR + \sum s_i$$

και για κάθε ζευγάρι s_i, r_i όπου τα s_i και r_i ταυτίζονται, μετά την διαστασιακή ελλάτωση επιζεί στην τετραδιάστη θεωρία ένα πεδίο Higgs το οποίο μετασχηματίζεται στην αναπαράσταση h_i.

Για τα φερμιονικά πεδία, κατά αντιστοιχία με την προηγούμενη περίπτωση, οδηγούμαστε στην εξής ανάλυση:

$$\mathrm{F} = \sum (r_i, h_i)$$

$$\sigma = \sum \sigma_j$$

όπου F είναι η αναπαράσταση των φερμιονίων στην μεγαλοδιάστατη ομάδα G η οποία αναλύεται κάτω απο την $R_G \times H$ και σ είναι η σπινοριακή αναπαράσταση της $SO(d)$ η οποία αναλύεται κάτω απο την R. Τότε για κάθε ζευγάρι r_i, σ_i όπου r_i και σ_i ταυτίζονται εμφανίζεται μια αναπαράσταση h_i για τα σπινοριακά πεδία της τετραδιάστατης θεωρίας.

6.4 Διαστασιακή ελλάτωση σε χώρους πηλίκου και ρεαλιστικές θεωρίες

Το CSDR επιτυγχάνει την εννοποίηση των πεδίων βαθμίδας και των πεδίων Higgs. Επίσης η προσθήκη φερμιονίων στη μεγαλοδιάστατη θεωρία οδηγεί στον προσδιορισμό των Yukawa σταθερών σύζευξης. Επιπλέον με κατάλληλη επιλογή της μεγαλοδιάστατης θεωρίας όπως εξηγήθηκε στο προηγούμενο εδάφιο είναι εφικτό μετά την διαστασιακή ελλάτωση να προκύψουν chiral φερμιόνια, ενώ αν θεωρήσουμε ότι τα πεδία βαθμίδας και τα φερμιονικά πεδία ανήκουν στην ίδια διανυσματική supermultiplet τότε, στην περίπτωση των μη συμμετρικών εσωτερικών χώρων πηλικου, προκύπτουν softly broken υπερσυμμετρικές θεωρίες με πλήρως προσδιορισμένες παραμέτρους σε κλασικό επίπεδο. Η τελευταία ιδιότητα είναι πολύ σημαντική καθώς στις συνήθεις υπερσυμμετρικές επεκτάσεις του καθιερωμένου μοντέλου απαιτείται ένας πολύ μεγάλος αριθμός απο ελεύθερες παραμέτρους για να προσδιοριστεί ο υπερσυμμετρικός soft breaking τομέας.

Μιά ανάλογη, με το προηγούμενο εδάφιο, ανάλυση της διαστασιακής ελλάτωσης προσδιορίζει το δυναμικού των βαθμωτών πεδίων της τετραδιάστατης θεωρίας καθώς και την αναπαραστάση που αυτά μετασχηματίζονται. Η αναπαράσταση αυτή των βαθμωτών πεδίων κάτω απο την τετραδιάστατη ομάδας βαθμίδας H είναι η θεμελιώδης. Η θεμελιώδης αναπαράσταση στις μεγάλες εννοποιημένες θεωρίες (GUT) δεν είναι η κατάλληλη αναπαράσταση των βαθμωτών πεδίων για να πάρουμε ως τελική θεωρία το καθιερωμένο πρότυπο. Μια λύση για αυτό το πρόβλημα είναι να εκεμεταλευτούμε της τοπολογικές ιδιότητες του εσωτερικού χώρου εφαρμόζοντας των μηχανισμό Hosotani και να σπάσουμε την ομάδα βαθμίδας χωρίς αρχικά να χρησιμοποιήσουμε τα βαθμωτά πεδία.

7 Συμπεράσματα

Εξετάστηκαν διάφορα χαρακτηριστικά των θεωριών Kaluza-Klein ξεκινώντας από ένα απλό παράδειγμα μιας θεωρίας με ένα βαθμωτό πεδίο στις πέντε διαστάσεις. Η κλασική θεωρία Kaluza-Klein παρουσιάστηκε αναλυτικά και δείξαμε ότι είναι δυνατή η απαλοιφή των massive modes αλλά όχι του βαθμωτού πεδίου. Στη συνέχεια περιγράφονται γενικεύσεις τις θεωρίας αυτής, κατά τις οποίες προκύπτουν μη αβελιανές ομάδες βαθμίδας, καθώς και οι ασυνέπειες που προκύπτουν αν γίνει απαλοιφή των massive modes. Εξετάζονται τρόποι με τους οποίους μπορούν να προκύψουν ρεαλιστικές τετραδιάστατες θεωρίες. Για το λόγο αυτό εξηγούμε τον μηχανισμό με τον οποίο εισάγονται τα φερμιόνια στην μεγαλοδιάστατη δράση, πως προκύπτουν οι μάζες τους καθώς το ζήτημα των chiral φερμιονίων. Τέλος γίνεται μια παρουσίαση της διστασιακής ελλάτωσης σε χώρους πηλίκου (CSDR) και περιγράφονται οι βασικές κατευθύνσεις έτσι ώστε να προκύψουν ρεαλιστικές τετραδιάστατες θεωρίες.

8 Βιβλιογραφία

[1] Straumann and O'Raifeartaigh, Early History of Gauge Theories and Kaluza-Klein Theories, with a Glance at Recent Developments (1999)

[2] Wesson and Overduin, Kaluza-Klein Gravity (1998)

[3] Duff, Nilsson and Pope, Kaluza-Klein Supergravity (1986)

[4] Bailin and Love, Kaluza-Klein Theories (1986)

[5] Douzas, Grammatikopoulos and Zoupanos, Coset Space Dimensional Reduction and Wilson Flux Breaking Meachanism of Ten-Dimensional $N = 1$, E_8 Gauge theory (2008)

[6] Kapetanakis and Zoupanos, Coset Space Dimensional Reduction of Gauge Theories (1992)

....
Γεώργιος Α. Δούζας