



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»**

**Στοιχεία Υπερσυμμετρίας
σε μεθόδους αναλυτικής επίλυσης
δυναμικών στην Κβαντική Μηχανική**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
της Δάφνης-Ευγενίας Αρφάνη**

Επιβλέπων: Γιώργος Κουτσούμπας

Αθήνα, Ιούνιος, 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε και γράφηκε σε λιγότερο από το ιδανικό συνθήκες γι' αυτό και οι ευχαριστίες προς όλους όσους βοήθησαν στην ολοκλήρωση αυτής της δουλειάς απέχουν πολύ από το να είναι τυπικές.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το Δάσκαλο και Επιβλέποντά μου κ. Γεώργιο Κουτσούμπα γιατί μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με το πιο αγαπημένο μου κλάδο της Φυσικής, αυτόν της Κβαντικής Μηχανικής υλοποιώντας μια επιθυμία χρόνων που είχε μείνει ας πούμε «στο συρτάρι». Εύχομαι στο μέλλον να μας δοθούν και άλλες ευκαιρίες δημιουργικής συνεργασίας, γιατί εκτός από πολύ καλός επιστήμονας είναι και ένας όμορφος άνθρωπος.

Ευχαριστώ την οικογένεια μου και ειδικά τη μητέρα μου που δε σταμάτησαν ποτέ να με υποστηρίζουν ακόμα κι όταν τα όνειρα μου φάνταζαν εξωπραγματικά ή η απογοήτευση ανυπέρβλητη.

Τέλος ευχαριστώ θερμά τον Δάσκαλο και Καθηγητή μου κύριο Κωστή Παρασκευαΐδη για όλη τη βοήθεια και υποστήριξη που μου έδωσε απλόχερα όλο τον καιρό του μεταπτυχιακού αυτού κύκλου σπουδών.

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη σε αγαπημένους μου ανθρώπους που έφυγαν νωρίς, τη νόνα μου Γεωργία Αρφάνη που πάντα πίστευε σε μένα και μου λείπει πολύ και τον πρώτο μου Δάσκαλο στη Φυσική Θεοωρή Μπρεδήμα, ένα λαμπρό μυαλό και άνθρωπο του οποίου την αγάπη για τη Φυσική δε θα ξεχάσω ποτέ.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	1
Περιεχόμενα.....	2
Εισαγωγή	3
Κεφάλαιο 1: Γενικές Αρχές και Φορμαλισμός	4
1.1 Η θεωρία της Υπερσυμμετρίας	4
1.2 Η Υπερσυμμετρία στην Κβαντική Μηχανική.....	8
1.2.1 Αναλλοιότητα Μορφής (Shape Invariance).....	9
1.2.2 Factorization Method (Infeld &Hull, 1951).....	10
1.3 Γενικές Αρχές της Μεθόδου	12
1.4 Άλγεβρα SUSY και φυσικό περιεχόμενο	17
Κεφάλαιο 2: Παραδείγματα αναλυτικά επιλύσιμων Δυναμικών με τη SUSY Q.M	20
2.1 Το Απειρόβαθο πηγάδι Δυναμικού	20
2.2 Ο Απλός Μονοδιάστατος Αρμονικός Ταλαντωτής.....	26
2.3 Το Δυναμικό Morse ή ο Μη Αρμονικός Ταλαντωτής.....	32
2.4 Το Άτομο του Υδρογόνου	41
Κεφάλαιο 3: Συμπεράσματα-Προοπτικές	55
3.1 Συμπεράσματα	55
3.1.1 Οι ιδέες της Υπερσυμμετρίας στην Μεθοδολογία της SUSY στην Κβαντική Μηχανική.....	56
3.1.2 Η Αναλλοιότητα Μορφής	62
3.2 Προοπτικές της Μεθόδου	63
Αναφορές- References	73

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα σημαντικά και δυσεπίλυτα προβλήματα στη Κβαντική Μηχανική αποτελεί η συχνά ανυπέρβλητη δυσκολία αναλυτικής επίλυσης που παρουσιάζουν μια σειρά από Δυναμικά που περιγράφουν ενδιαφέροντα ακόμα και μεγάλης φυσικής σημασίας συστήματα. Οι φυσικοί τότε, καταφεύγουν σε μεθόδους αριθμητικής επίλυσης που οπωσδήποτε είναι λιγότερο χρονοβόρες και παρουσιάζουν αξιολήγιστα αποτελέσματα.

Στη παρούσα εργασία παρόλα αυτά, γίνεται η προσπάθεια παρουσίασης των αποτελεσμάτων μιας αναλυτικής μεθόδου, η οποία δανειζόμενη στοιχεία από τη Θεωρία της Υπερσυμμετρίας, φιλοδοξεί να ομαδοποιήσει δυναμικά τα οποία αφενός περιγράφουν εντελώς διαφορετικά συστήματα, αφετέρου εμφανίζουν χαρακτηριστικές διαφορές στη μορφή και μαθηματική συμπεριφορά τους.

Η θεωρία της Υπερσυμμετρίας προέκυψε σαν το αποτέλεσμα των προσπαθειών των επιστημόνων για ενιαία περιγραφή όλων των αλληλεπιδράσεων στη φύση, εντέλει όμως κατέληξε να εμπνεύσει νέα πεδία έρευνας και στον κλάδο της Κβαντικής Μηχανικής, οδηγώντας στην ανάπτυξη ενός ολόκληρου κλάδου, της λεγόμενης Supersymmetric Quantum Mechanics (SUSY QM). Ο κλάδος αυτός, έπαιξε ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο για παράδειγμα, στη προσέγγιση των λεγόμενων ακριβώς επιλύσιμων δυναμικών, προσφέροντας λιγότερο επίπονες λύσεις, οδήγησε στην ανακάλυψη νέων ακριβώς επιλύσιμων δυναμικών, ενώ ανάμεσα στα άλλα πεδία επίδρασής της στη Κβαντική Μηχανική είναι η προέκταση της προσεγγιστικής μεθόδου WKB (Wentzel- Kramers&Brillouin,1926), που ξεφεύγει όμως από το στόχο της παρούσας εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι γενικές αρχές της μεθόδου όπως αυτή παρουσιάζεται σε μια σειρά από βιβλία και εργασίες της διεθνούς βιβλιογραφίας δηλαδή ο γενικός φορμαλισμός καθώς και οι υποθέσεις-παραδοχές που αυτή ακολουθεί.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μια σειρά από γνωστά μονοδιάστατα προβλήματα της Κβαντικής Μηχανικής προσεγγίζονται μέσω της μεθόδου, εξάγεται το γνωστό τους ενεργειακό φάσμα και συνδέονται με άλλα μαθηματικά δυσεπίλυτα ή και οριακά άλυτα με αναλυτικό τρόπο, προβλήματα.

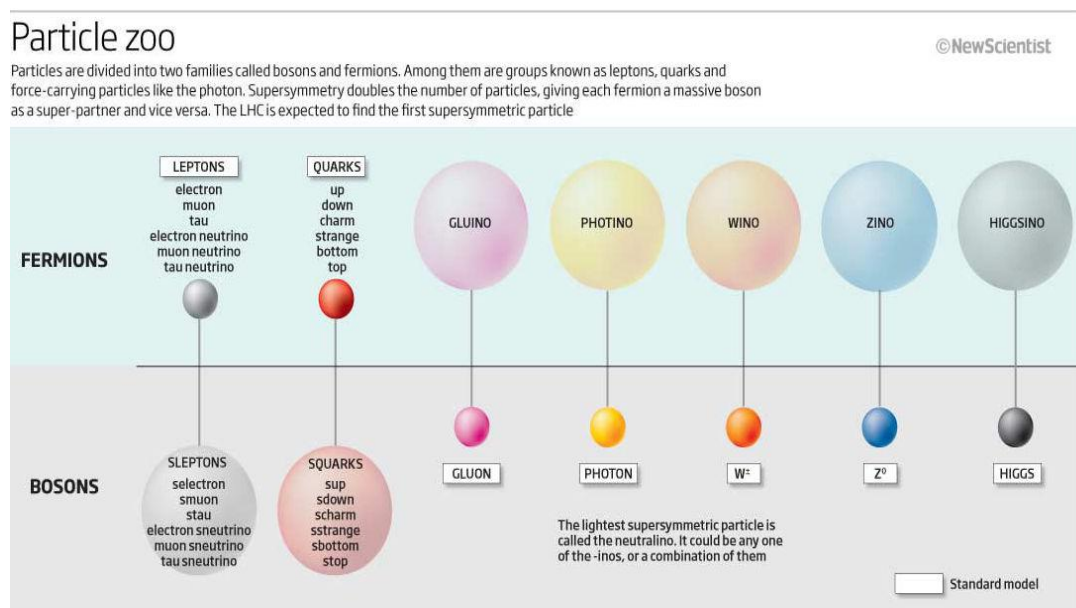
Στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύονται τα συμπεράσματα των αποτελεσμάτων των αναλυτικών υπολογισμών καθώς και οι προοπτικές της μεθόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ

1.1 Η Θεωρία της Υπερσυμμετρίας

Η θεωρία της Υπερσυμμετρίας αποτελεί επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου (Standard Model) και στοχεύει να παρέχει εξήγηση σε φυσικές παρατηρήσεις για τις οποίες το Καθιερωμένο Πρότυπο αδυνατεί να το κάνει, όπως η ύπαρξη της Σκοτεινής Ύλης (Dark Matter) στο Σύμπαν, ή το γεγονός ότι υποατομικά σωματίδια διαθέτουν μάζα τη στιγμή που βασιζόμενοι στις συμμετρίες στις οποίες οι αλληλεπιδράσεις τους υπακούουν θα έπρεπε να είναι άμαζα (αυτό το γεγονός οδήγησε στη θεωρητική πρόβλεψη του σωματιδίου Higgs στα πλαίσια του Καθιερωμένου προτύπου).

Για κάθε σωματίδιο του Καθιερωμένου Προτύπου, η Υπερσυμμετρία προβλέπει το συναφές του σωματίδιο (partner particle). Τα σωματίδια αυτά θα αλληλεπιδρούν μέσω των ίδιων πεδίων δυνάμεων με τα οποία αλληλεπιδρούν τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου αλλά θα έχουν διαφορετικές μάζες.



Εικόνα 1: Τα σωματίδια του Καθιερωμένου προτύπου και τα συναφή τους που προβλέπονται από την SUSY.

Εάν τα “συναφή” σωματίδια που προβλέπονται από τη SUSY εισάγονταν στο Καθιερωμένο Πρότυπο, οι τρεις αλληλεπιδράσεις (ηλεκτρομαγνητική, ασθενής και ισχυρή πυρηνική) θα είχαν ακριβώς την ίδια ένταση στις πολύ υψηλές ενέργειες με εκείνη στο Πρώιμο Σύμπαν.

Με τον τρόπο αυτό η πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξης των “συναφών” σωματιδίων της SUSY θα σήμαινε και επιβεβαίωση μιας Θεωρίας που θα ενοποιούσε μαθηματικά τις τρεις αλληλεπιδράσεις για τις υψηλές ενέργειες και θα παρείχε κατανόηση των συνθηκών γέννησης του Σύμπαντος. Μια τέτοια θεωρία καλείται Μεγάλη Ενοποιημένη Θεωρία (Grand Unified Theory) και αποτέλεσε και αποτελεί ίσως το μεγαλύτερο όνειρο των Θεωρητικών Φυσικών.

Εάν κατάφερνε να επιβεβαιωθεί πειραματικά, η Υπερσυμμετρία θα συνέδεε τα μποζόνια και τα φερμιόνια, τις δύο μεγάλες κατηγορίες σωματιδίων που διαφέρουν ως προς τη τιμή του spin (ακέραιο ή ημιακέραιο spin αντίστοιχα), καθώς προβλέπει ότι κάθε ένα από τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου διαθέτει το συναφές του, με spin που διαφέρει κατά μισή μονάδα. Έτσι κάθε μποζόνιο συνοδεύεται από ένα φερμιόνιο και αντίστροφα και εν γένει θα παρουσιάζουν ενοποιημένη προέλευση παρά τις διαφορετικές τους ιδιότητες και συμπεριφορές.

Επιπλέον, η θεωρία της Υπερσυμμετρίας προβλέπει ότι το ελαφρύτερο υπερσυμμετρικό σωματίδιο είναι ευσταθές, ηλεκτρικά ουδέτερο και αλληλεπιδρά ασθενώς με τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου.

Αυτά ακριβώς είναι και τα χαρακτηριστικά που διαθέτει η λεγόμενη Σκοτεινή Ύλη (Dark Matter) η οποία πιστεύεται ότι αποτελεί το μεγαλύτερο ποσοστό της ύλης στο Σύμπαν και στην ύπαρξή της βασίζεται η απόπειρα εξήγησης πολυάριθμων αστροφυσικών παρατηρήσεων όπως οι περιστροφικές ταχύτητες των γαλαξιών, το φαινόμενο των βαρυτικών φακών (gravitational lensing), η μελέτη των παρατηρούμενων ανισοτροπιών της Μικροκυματικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου (Cosmic Microwave Background Radiation- CMBR) ή οι λεγόμενες Βαρυονικές Ακουστικές Ταλαντώσεις (Baryon Acoustic Oscillations- BAO).

Όπως ήταν αναμενόμενο, η πειραματική επιβεβαίωση της Θεωρίας παρέμεινε για δεκαετίες και παραμένει σημαντικότερο ζητούμενο για την επιστημονική κοινότητα, με τους επιστήμονες να αναζητούν την παρατήρηση των προβλεπόμενων από τη θεωρία σωματιδίων, των λεγόμενων “beyond Standard Model particles”.

Σήμερα τα μάτια της επιστημονικής κοινότητας εξακολουθούν να είναι στραμμένα στους επιταχυντές του CERN, με την ελπίδα οι αποκλίσεις που παρατηρούνται να οδηγήσουν στην ταυτοποίηση σωματιδίων που προβλέπονται από την Υπερσυμμετρία, ειδικά μετά την ανακάλυψη του μποζονίου Higgs το 2012, που γέμισε ενθουσιασμό τους ερευνητές ανά την Υφήλιο, μετά από χρόνια αναζήτησης.

Παρόλα αυτά, το πεδίο διαβλέπεται ακόμα αρκετά ρευστό, με αρκετούς ερευνητές να θεωρούν πως ο κύκλος της Υπερσυμμετρίας έχει κλείσει ενώ αρκετούς άλλους να κρατούν στάση αναμονής, τη στιγμή που η ελπίδα διαδέχεται την απογοήτευση και αντίστροφα: Στο συνέδριο του Moriond τον Μάρτιο του 2017, το πείραμα ATLAS

του CERN παρουσίασε τα πρώτα του αποτελέσματα τα οποία εξετάζαν σε συνδυασμό τα δεδομένα του LHC (Large Hadron Collider) των ετών 2015/2016. Τα δεδομένα αυτά ήταν τρεις φορές πιο ογκώδη από αυτά που ήταν διαθέσιμα στο συνέδριο του 2016, κάτι που βελτίωσε σημαντικά την ευαισθησία ανίχνευσης νέων σωματιδίων προβλεπόμενων από θεωρίες πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου.



Εικόνα 2: Αεροφωτογραφία του LHC (Large Hadron Collider) του CERN στη Γενεύη και τοποθεσίες των βασικότερων πειραμάτων που συμμετέχουν.

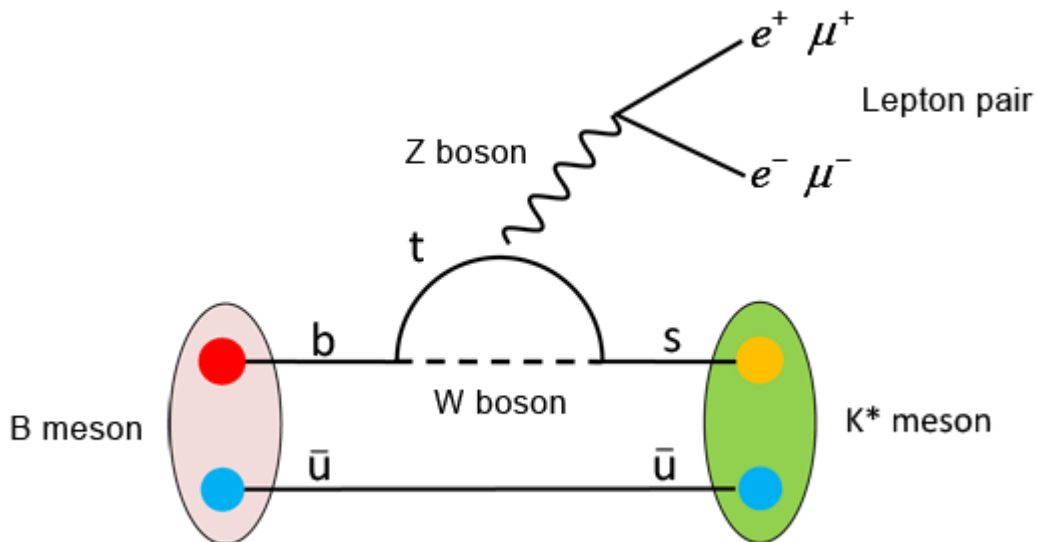
Τα αποτελέσματα του ATLAS αλλά και εκείνα του πειράματος CMS (Compact Muon Solenoid) αποτέλεσαν τη μεγαλύτερη πρόκληση μέχρι τώρα για την Υπερσυμμετρία: Όμως η αναζήτηση “squark” και “gluino” τα οποία υποθετικά διασπώνται σε σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου αλλά και “top squark” σωματιδίων- η ύπαρξη των οποίων είναι καθοριστική αν η SUSY φιλοδοξεί να εξηγήσει τη μάζα του μποζονίου Higgs- δεν οδήγησε σε αποτελέσματα που να αποδεικνύουν την ύπαρξή τους. Επιπλέον, δεν βρέθηκαν ούτε ίχνη των “chargino”, περιορίζοντας έτσι μια ευρεία τάξη μοντέλων της Υπερσυμμετρίας που τα προβλέπουν, ενώ όλα τα αποτελέσματα υπήρξαν συνεπή με τις προβλέψεις του Καθιερωμένου Προτύπου.

Παρόλα αυτά, ακόμα και αυτή η έλλειψη αποδείξεων, οδηγεί τις όποιες προτεινόμενες θεωρίες Υπερσυμμετρίας σε νέους περιορισμούς όχι όμως και σε de facto απόρριψη.

Την ίδια περίοδο, τον Απρίλιο του 2017, το πείραμα LHCb ανακάλυψε ενδιαφέρουσες αποκλίσεις από τις προβλέψεις του Καθιερωμένου Προτύπου στον τρόπο με τον οποίο διασπώνται τα B^0 μεσόνια:

Το Καθιερωμένο Πρότυπο προβλέπει την πιθανότητα εμφάνισης των διαφορετικών πιθανών διασπάσεων των B^0 μεσονίων. Η συγκεκριμένη έρευνα του LHCb εστίασε στη διάσπαση προς ένα διεγερμένο καόνιο και ένα ζεύγος ηλεκτρονίων ή μιονίων. Το μόνιο είναι 200 φορές βαρύτερο του ηλεκτρονίου, αλλά κατά τα άλλα, οι

αλληλεπιδράσεις του προβλέπονται από το Standard Model να είναι πανομοιότυπες με εκείνες του ηλεκτρονίου (Lepton universality). Αυτή λοιπόν η Αρχή, προβλέπει ότι εκτός από μια μικρή και υπολογίσιμη απόκλιση λόγω της διαφοράς μάζας, τα ηλεκτρόνια και τα μίονια θα πρέπει να παράγονται με την ίδια πιθανότητα σε αυτή τη συγκεκριμένη διάσπαση.



Εικόνα 3: Σχηματική αναπαράσταση της διάσπασης ενός B μεσονίου σε καόνιο και σε ένα ζεύγος λεπτονίων.

Αντίθετα, η ομάδα του LHCb παρατήρησε ότι η διάσπαση προς μίονια συμβαίνει λιγότερο συχνά. Το σήμα που παρατηρήθηκε, παρέμενε κατά την ανακοίνωση περιορισμένης στατιστικής σημασίας (2.2-2.5 σίγμα), αλλά έδρασε ενισχυτικά σε παρόμοιες ενδείξεις παλαιότερων ερευνών. Έτσι, νέα δεδομένα αναμένονταν προκειμένου να ξεκαθαριστεί εάν επρόκειτο για μια “ρωγμή” στο Καθιερωμένο Πρότυπο και ευκαιρία για ανακάλυψη νέας φυσικής, ή απλά για μια στατιστική διακύμανση.

Καθώς η πειραματική επιβεβαίωση της Υπερσυμμετρίας αργεί να έρθει, οι ιδέες της οδήγησαν σε ποικίλες εφαρμογές σε πολλούς κλάδους της Φυσικής, από την Ατομική και Πυρηνική Φυσική μέχρι την Φυσική Συμπυκνωμένης Ύλης και την μη Σχετικιστική Κβαντική Μηχανική. Με τις εφαρμογές σε αυτή την τελευταία, ασχολείται η παρούσα εργασία.

1.2 Η Υπερσυμμετρία στην Κβαντική Μηχανική .

Σε μια ενοποιημένη θεωρία που διέπεται από τις αρχές της Υπερσυμμετρίας, εάν δεν υπάρχει σπάσιμο της συμμετρίας, θα οδηγούμαστε σε εκφυλισμό στα φάσματα των φερμιονίων και μποζονίων:

Κάθε ζευγάρι σωματιδίων (το εκάστοτε σωματίο και το συναφές του) θα χαρακτηρίζεται από την ίδια μάζα και τους ίδιους εσωτερικούς κβαντικούς αριθμούς εκτός του spin. Για παράδειγμα, με βάση τις προβλέψεις της θεωρίας, θα έπρεπε να υπάρχει το συναφές σωματίο του ηλεκτρονίου (“selectron”), μια μποζονική εκδοχή του ηλεκτρονίου, της ίδιας μάζας που θα μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί στο εργαστήριο.

Δεδομένου ότι κανένα συναφές σωματίο δεν παρατηρήθηκε ακόμα πειραματικά, οι επιστήμονες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι εάν η Υπερσυμμετρία ισχύει, θα πρέπει να εμπλέκει μια αυθόρμητα σπασμένη συμμετρία έτσι ώστε τα συναφή σωματία να μπορούν να διαφέρουν στη μάζα (και άρα και στην ενέργεια).

Με αφορμή ακριβώς αυτή τη προσπάθεια κατανόησης του σπασίματος της SUSY στη θεωρία πεδίου, άρχισε να μελετάται και ο όλος κλάδος της Υπερσυμμετρικής Κβαντικής Μηχανικής για πρώτη φορά.

Σύντομα όμως μετά την έναρξη της μελέτης αυτής, έγινε αντιληπτό ότι το πεδίο παρουσίαζε τεράστιο ενδιαφέρον εντελώς αυτόνομα και όχι μόνο σαν ένα μοντέλο ελέγχου των μεθόδων της θεωρίας πεδίου.

Για παράδειγμα, έγινε αντιληπτό, ότι η SUSY QM παρέχει μια συμπληρωματική εικόνα της μεθόδου παραγοντοποίησης των Infeld και Hull που αποτέλεσε και την πρώτη προσπάθεια κατηγοριοποίησης των αναλυτικά επιλύσιμων δυναμικών. Έτσι, σταδιακά αναπτύχθηκε μια ολόκληρη μεθοδολογία βασισμένη στην SUSY με σκοπό να γίνουν κατανοητά τα αναλυτικά επιλύσιμα δυναμικά αλλά και να ανακαλυφθούν νέα. Συγκεκριμένα η μέθοδος προσφέρει ικανοποιητική εξήγηση ως προς το γιατί ορισμένα δυναμικά είναι αναλυτικά επιλύσιμα αλλά και μπορεί να προτείνει τρόπο ανακάλυψης νέων αναλυτικά επιλύσιμων δυναμικών με μια κομψή και εύκολα διαχειρίσιμη μεθοδολογία η οποία παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο της παρούσης εργασίας.

Τελικά, οι λόγοι για τους οποίους κάποια δυναμικά επιλύονται ακριβώς, φάνηκε να εμπλέκουν ιδέες όπως τα συναφή δυναμικά της Υπερσυμμετρίας αλλά και μια ιδιότητα που όλα τα γνωστά και επιλύσιμα δυναμικά κατέχουν, την αναλλοιότητα μορφής (shape invariance).

1.2.1 Αναλλοιότητα Μορφής (Shape Invariance)

Η έννοια ενός αναλλοίωτου στη μορφή δυναμικού (Shape Invariant Potential-SIP) στα πλαίσια της SUSY Q.M εισήχθη για πρώτη φορά το 1983 από τον Gendenshtein. Ο ορισμός του είχε ως εξής:

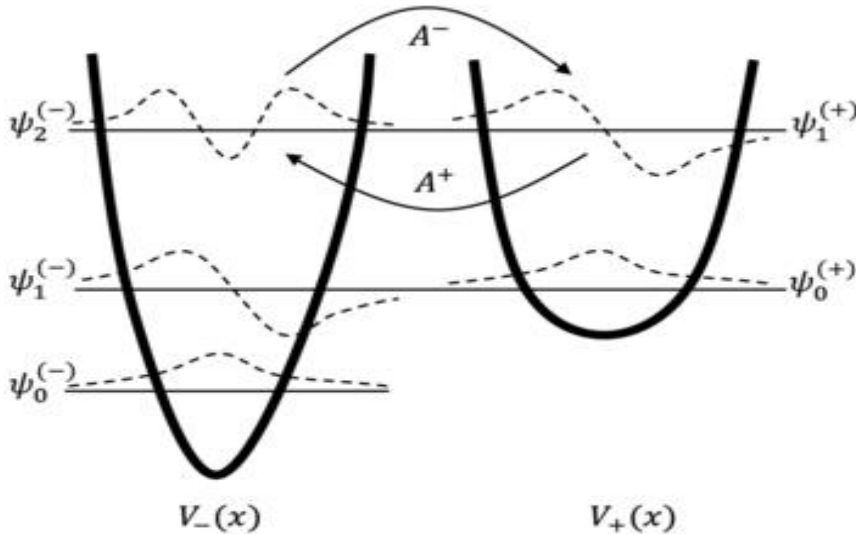
Ένα δυναμικό καλείται αναλλοίωτο ως προς τη μορφή (SIP), εάν το υπερσυμμετρικό του συναφές δυναμικό έχει την ίδια χωρική εξάρτηση με το αρχικό δυναμικό με πιθανόν μεταβεβλημένες παραμέτρους, δηλαδή ισχύει:

$$V^+(x, \lambda) = V^-(x, f(\lambda)) + R(\lambda) \quad , \quad \text{όπου } \lambda \text{ η παράμετρος του δυναμικού}$$

και $R(\lambda)$ μια συνάρτηση αυτής.

Τότε, μπορεί ναδειχθεί ότι για οποιοδήποτε SIP, το ενεργειακό φάσμα μπορεί να βρεθεί αλγεβρικά.

Αργότερα, μια λίστα τέτοιων δυναμικών καταγράφηκε καιδείχθηκε ότι επιπλέον, τόσο οι ιδιοσυναρτήσεις όσο οι S-πίνακες που αντιστοιχούσαν σε αυτά τα δυναμικά μπορούσαν να βρεθούν αλγεβρικά.



Εικόνα 4: Σχηματική αναπαράσταση δύο συναφών δυναμικών και της μεταξύ τους σύνδεσης.

Για ένα δεδομένο δυναμικό $V(x, \lambda)$ το οποίο εξαρτάται από μια ομάδα παραμέτρων λ , μπορούμε να εισάγουμε το Υπερδυναμικό $W(x, \lambda)$ τέτοιο ώστε:

$$V(x) = W^2(x, \lambda) - W'(x, \lambda) + E_0 \quad , \quad \text{που είναι η εξίσωση Ricatti.}$$

Έτσι, σύντομα έγινε αντιληπτό ότι ο φορμαλισμός της Υπερσυμμετρικής Κβαντικής Μηχανικής σε συνδυασμό με την αναλλοιότητα Μορφής (Shape Invariance) συνδέονταν στενά με τη μέθοδο παραγοντοποίησης των Infeld και Hull.

1.2.2 Factorization Method (Infeld & Hull, 1951)

Η μέθοδος εισήχθη αρχικά από τον ίδιο τον Schrödinger προκειμένου να καταφέρει να επιλύσει αλγεβρικά το πρόβλημα του Ατόμου του Υδρογόνου, αν και φυσικά δεν ονομάστηκε έτσι. Η μέθοδος γενικά στόχευε στο να βρεθούν δύο τελεστές

$$\hat{a} = \frac{d}{dx} + \beta(x) \quad \text{και} \quad \hat{a}^+ = -\frac{d}{dx} + \beta(x) , \text{ τέτοιοι ώστε η Hamiltonian}$$

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \text{ να μπορεί να γραφεί ως } \hat{H} = \hat{a}^+ \hat{a} + \varepsilon .$$

Τότε, με απλές αντικαταστάσεις καταλήγουμε ότι η $\beta(x)$ ικανοποιεί την:

$$-\beta'(x) + \beta^2(x) = V(x) - \varepsilon , \text{ που είναι η εξίσωση Ricatti.}$$

Αργότερα, οι Infeld & Hull γενίκευσαν την ιδέα και κατέληξαν σε μια ευρεία τάξη επιλύσιμων δυναμικών, θεωρώντας έξι διαφορετικές μορφές παραγοντοποίησης. Όπως αποδείχθηκε, τόσο η μέθοδος των Infeld & Hull όσο και οι μέθοδοι της SUSY Q.M συμπεριλαμβανομένης της έννοιας της Αναλλοιότητας Μορφής, είναι και οι δύο ουσιαστικά αναδιατυπώσεις της ιδέας του Ricatti σύμφωνα με την οποία υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με συνοριακές συνθήκες (όπως η μονοδιάστατη εξίσωση Schrödinger) και ενός ζεύγους πρωτοβάθμιων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Στη μέθοδο των Infeld & Hull για ένα μεγάλο εύρος τέτοιων εξισώσεων, μπορούμε να γνωρίζουμε άμεσα τις ιδιοτιμές αλλά και να κατασκευάζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις απλώς συμβουλευόμενοι τον πίνακα με τους έξι διαφορετικούς τρόπους παραγοντοποίησης στους οποίους υπόκεινται οι εξισώσεις προς επίλυση.

Η μεθοδολογία αυτή, που όπως είδαμε είναι εντελώς ανάλογη με την εφαρμογή των ιδεών της Υπερσυμμετρίας σε Αναλλοιώτα ως προς τη μορφή Δυναμικά, χρησιμοποιείται επίσης για τον υπολογισμό πιθανοτήτων μετάπτωσης (transition probabilities) αλλά και γενικεύεται ώστε να αντιμετωπίζει προβλήματα διαταραχών.

Τα πλεονεκτήματα όμως από το “πάντρεμα” της θεωρίας της Υπερσυμμετρίας με την Κβαντική Μηχανική δεν σταματούν εδώ:

Η Υπερσυμμετρική Κβαντική Μηχανική προσφέρει έναν κατά πολύ σύντομότερο αλλά και ευκολότερο τρόπο επίλυσης όλων των γνωστών και επιλύσιμων δυναμικών, όπως ο αρμονικός ταλαντωτής, το δυναμικό Morse, το άτομο του

Υδρογόνου κ.ά. ενώ η μεθοδολογία μπορεί να φανεί εξαιρετικά χρήσιμη κατά τη μελέτη της δυναμικής των υπερσυμμετρικών σολιτονίων (δηλαδή μοναχικών κυματοπακέτων που διατηρούν τη μορφή τους καθώς διαδίδονται με σταθερή ταχύτητα):

Δεδομένου ότι τα πεδία που περιγράφουν τέτοιες δομές είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου (και όχι του χώρου και του χρόνου), η μονοδιάστατη μεθοδολογία της SUSY Q.M έχει επιφέρει μεγάλη πρόοδο στις αντίστοιχες μελέτες.

Σε περισσότερες της μιας διαστάσεων, ο αριθμός των γνωστών ακριβώς επιλύσιμων δυναμικών είναι σημαντικά περιορισμένος. Παρόλα αυτά, η ισχύς των ιδεών της SUSY σε συνδυασμό με την Αναλλοιότητα Μορφής δίνει την ελπίδα πως νέα μοντέλα ακριβώς επιλύσιμων δυναμικών σε περισσότερες διαστάσεις μπορούν να κατασκευαστούν αν και μια τέτοια δουλειά είναι περιορισμένη:

Σύμφωνα με τους Sandhya R., S. Sree Ranjani & A.K Karoor (2014), για δυναμικά στα οποία μπορεί να γίνει χωρισμός μεταβλητών, η ιδέα των συναφών Χαμιλτονιανών δουλεύει με τον ίδιο τρόπο που αυτό συμβαίνει και στα μονοδιάστατα προβλήματα, καθώς η λύση του προβλήματος μεταπίπτει σε λύση αντίστοιχων μονοδιάστατων προβλημάτων. Η εφαρμογή όμως σε προβλήματα 2 διαστάσεων, δείχνει πως μια τέτοια μέθοδος μάλλον σταματά εκεί να είναι αποτελεσματική και σαν πιθανή διέξοδος στις 3 διαστάσεις και άνω προτείνεται η χρήση χωροχρονικών μετασχηματισμών που έχουν φανεί χρήσιμοι στην ακριβή επίλυση προβλημάτων μέσω της προσέγγισης των path integrals. Μια τέτοια όμως συζήτηση ξεφεύγει των ορίων της παρούσας εργασίας.

Σε ότι αφορά στα μη αναλυτικά επιλύσιμα δυναμικά, η SUSY μας βοηθά να αναπτύξουμε μια σειρά από νέες προσεγγιστικές μεθόδους, που όμως δεν θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία αν και θα μπορούσαν να αποτελέσουν ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο μελλοντικής μελέτης.

1.3 Γενικές Αρχές της μεθόδου

Στην Υπερσυμμετρική Κβαντική Μηχανική (SUSY Q.M), θεωρούμε μια απλή εφαρμογή μιας άλγεβρας SUSY η οποία εμπλέκει μποζονικούς και φερμιονικούς τελεστές που ικανοποιούν σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης αντίστοιχα.

Η Χαμιλτονιανή στην SUSY Q.M είναι ένας 2×2 πίνακας ο οποίος όταν διαγωνιοποιηθεί μας οδηγεί σε δύο ξεχωριστές Χαμιλτονιανές των οποίων οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις συνδέονται, εξαιτίας της ύπαρξης φερμιονικών τελεστών που μετατίθενται με τη Χαμιλτονιανή.

Έτσι, η SUSY Q.M πραγματεύεται ζεύγη Χαμιλτονιανών (\hat{H}_1, \hat{H}_2) οι οποίες συνδέονται με συγκεκριμένη μαθηματική σχέση και ονομάζονται συναφείς Χαμιλτονιανές (partner Hamiltonians), τα δε δυναμικά των Χαμιλτονιανών αυτών (\hat{V}_1, \hat{V}_2) καλούνται συναφή Δυναμικά (partner potentials).

Αυτό που θα δείξουμε σε αυτή τη παράγραφο είναι ότι, εάν ξεκινήσουμε από ένα ακριβώς επιλύσιμο δυναμικό \hat{V}_1 με τουλάχιστον μία δέσμια κατάσταση, τότε μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε το SUSY συναφές δυναμικό του \hat{V}_2 , το οποίο θα είναι επίσης ακριβώς επιλύσιμο.

Έστω λοιπόν, η Χαμιλτονιανή \hat{H}_1 , η οποία εκφράζει τη μονοδιάστατη κίνηση ενός σωματιδίου εντός του δυναμικού \hat{V}_1 , το οποίο είναι ακριβώς επιλύσιμο :

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (1.3.1)$$

Εάν το φάσμα ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων της \hat{H}_1 είναι γνωστό, είναι δυνατόν, αντί να ξεκινήσουμε από το δυναμικό \hat{V}_1 να ξεκινήσουμε από την γνωστή ιδιοκατάσταση της βασικής στάθμης $\psi_0(x)$ (η οποία μηδενίζεται για $x \rightarrow \pm\infty$) και στην οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μηδενική ενέργεια ($E_0 = 0$) με μια επανακανονικοποίηση.

Τότε η εξίσωση Schrodinger θα δίνει:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_0(x) + V_1(x)\psi_0(x) = 0 \quad (1.3.2)$$

η οποία με οδηγεί στο συμπέρασμα ότι εάν η $\psi_0(x)$ είναι γνωστή, τότε θα είναι γνωστό και το $V_1(x)$, το οποίο θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \quad (1.3.3)$$

Είναι τώρα δυνατόν να παραμετροποιήσουμε την Χαμιλτονιανή \hat{H}_1 ως εξής:

$$\hat{H}_1 = \hat{A}^+ \hat{A}$$

$$\text{με } \hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad \text{και} \quad \hat{A}^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (1.3.4)$$

Δρώντας με την \hat{H}_1 στην κατάσταση ψ , θα καταλήξουμε σε μια σχέση για το δυναμικό $V_1(x)$ συναρτήσει της (προς το παρόν φαινομενικά αυθαίρετης) συνάρτησης $W(x)$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 \psi &= (\hat{A}^+ \hat{A}) \psi = \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} \psi - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\psi}{dx} W(x) + W(x) \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\psi}{dx} + \\ &\quad + W^2(x) \psi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{H}_1 \psi = (\hat{A}^+ \hat{A}) \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + W^2(x) \right) \psi$$

$$\text{Δηλαδή: } \hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + W^2(x)$$

$$\text{και άρα, } V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (1.3.5)$$

Από την απαίτηση $\hat{A}\psi_0 = 0$ η οποία αυτομάτως μας οδηγεί στην ικανοποίηση της εξίσωσης Schrodinger για την βασική στάθμη της \hat{H}_1 , δηλαδή ότι

$\hat{H}_1 \psi_0 = \hat{A}^+ \hat{A} \psi_0 = 0$, καταλήγουμε σε μια σχέση για τη συνάρτηση $W(x)$ συναρτήσει βασικής ιδιοκατάστασης της \hat{H}_1 και της παραγώγου της:

$$\begin{aligned} \hat{A}\psi_0 = 0 &\Rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\psi_0}{dx} + W(x)\psi_0 = 0 \Rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \psi_0' + W(x)\psi_0 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'}{\psi_0} \quad (1.3.6) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $W(x)$ είναι γνωστή ως το Υπερδυναμικό (Superpotential) στη βιβλιογραφία και όπως θα δούμε στην ύπαρξή της βασίζεται όλη η θεωρία της SUSY Q.M.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, ορίζουμε την

$$\hat{H}_2 = \hat{A} \hat{A}^+$$

$$\text{με } \hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad \text{και} \quad \hat{A}^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (1.3.7)$$

για την οποία απλοί υπολογισμοί αποδεικνύουν ότι αντιστοιχεί σε ένα δεύτερο δυναμικό V_2 , το συναφές δυναμικό του V_1 :

$$\begin{aligned}\hat{H}_2\psi &= (\hat{A}\hat{A}^+)\psi = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x)\right)\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx}\psi + \cancel{\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W(x)\frac{d\psi}{dx}} - \cancel{\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W(x)\frac{d\psi}{dx}} + \\ &\quad + W^2(x)\psi = \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx} + W^2(x)\right)\psi\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx} + W^2(x)$

οπότε: $V_2(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx} + W^2(x)$ (1.3.8)

Η σχέση (1.1.8) δίνει το συναφές (partner) δυναμικό του γνωστού και επιλύσιμου δυναμικού V_1 και όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις των αντίστοιχων Χαμιλτονιανών \hat{H}_1 και \hat{H}_2 σχετίζονται.

Συγκεντρώνοντας έως εδώ τα συμπεράσματά μας, οι Χαμιλτονιανές $\hat{H}_1 = \hat{A}^+\hat{A}$ και $\hat{H}_2 = \hat{A}\hat{A}^+$ αντιστοιχούν στα δυναμικά $V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x)$ και $V_2(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx} + W^2(x)$, ενώ έχουν ιδιοτιμές ενέργειας $E_n^{(1),(2)} \geq 0$.

Επόμενο βήμα θα είναι να δείξουμε τη σχέση που έχουν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις των δύο Χαμιλτονιανών.

Ξεκινώντας από την \hat{H}_1 , έχουμε:

Από την εξίσωση Schrodinger, γνωρίζουμε ότι: $\hat{H}_1\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}$ (1.3.9)

Όμως: $\hat{H}_1\psi_n^{(1)} = (\hat{A}^+\hat{A})\psi_n^{(1)} = \hat{A}^+(\hat{A}\psi_n^{(1)})$ (1.3.10)

Συνεπώς: $\hat{H}_2(\hat{A}\psi_n^{(1)}) = \hat{A}\hat{A}^+(\hat{A}\psi_n^{(1)}) = \hat{A}(\hat{A}^+\hat{A}\psi_n^{(1)}) =$
 $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{λόγω της (1.1.10)}}}{=} \hat{A}(\hat{H}_1\psi_n^{(1)}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{λόγω της (1.1.9)}}}{=} \hat{A}(E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)}(\hat{A}\psi_n^{(1)})$ (1.3.11)

Έτσι, η σχέση (1.1.11) δηλώνει ότι η $\hat{A}\psi_n^{(1)}$ είναι ιδιοσυνάρτηση της \hat{H}_2 με ενέργεια $E_n^{(1)}$ και μάλιστα, εάν γνωρίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της Hamiltonian \hat{H}_1 , τότε δρώντας με τον τελεστή \hat{A} , προκύπτουν οι ιδιοσυναρτήσεις της Hamiltonian \hat{H}_2 !

Εντελώς ανάλογα και ξεκινώντας από την \hat{H}_2 , θα έχουμε:

$$\text{Λόγω της εξίσωσης Schrodinger θα ισχύει : } \hat{H}_2\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} \quad (1.3.12)$$

$$\text{Όμως: } \hat{H}_2\psi_n^{(2)} = (\hat{A}\hat{A}^+)\psi_n^{(2)} = \hat{A}(\hat{A}^+\psi_n^{(2)}) \quad (1.3.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε: } \hat{H}_1(\hat{A}^+\psi_n^{(2)}) &= \hat{A}^+\hat{A}(\hat{A}^+\psi_n^{(2)}) = \hat{A}^+(\hat{A}\hat{A}^+\psi_n^{(2)}) = \\ &= \hat{A}^+(\hat{H}_2\psi_n^{(2)}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{λόγω της (1.1.13)}}}{=} \hat{A}^+(E_n^{(2)}\psi_n^{(2)}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{λόγω της (1.1.12)}}}{=} E_n^{(2)}(\hat{A}^+\psi_n^{(2)}) \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Έτσι, η σχέση (1.1.14) εντελώς ανάλογα δηλώνει ότι η $\hat{A}^+\psi_n^{(2)}$ είναι ιδιοσυνάρτηση της \hat{H}_1 με ενέργεια $E_n^{(2)}$ και έτσι, από τις ιδιοσυναρτήσεις της Hamiltonian \hat{H}_2 με δράση του τελεστή \hat{A}^+ προκύπτουν οι ιδιοσυναρτήσεις της Hamiltonian \hat{H}_1 !

Παρατηρώντας τις σχέσεις (1.1.11) και (1.1.14) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $E_0^{(1)} = 0$, είναι φανερό ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις των δύο Χαμιλτονιανών ικανοποιούν τις γενικές σχέσεις:

$$\bullet \quad E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0 \quad (1.3.15)$$

$$\bullet \quad \psi_n^{(2)} = (E_{n+1}^{(1)})^{-1/2} \cdot \hat{A}\psi_{n+1}^{(1)} \quad (1.3.16)$$

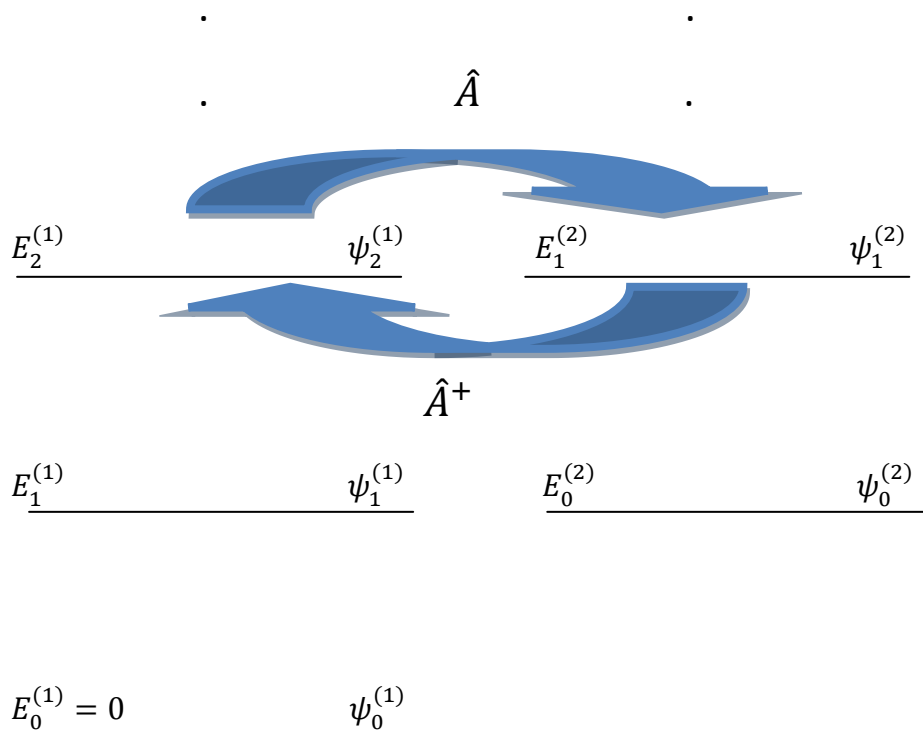
$$\bullet \quad \psi_{n+1}^{(1)} = (E_n^{(2)})^{-1/2} \cdot \hat{A}^+\psi_n^{(2)} \quad (1.3.17)$$

Οι σταθερές κανονικοποίησης $(E_{n+1}^{(1)})^{-1/2}$ και $(E_n^{(2)})^{-1/2}$ των σχέσεων (1.3.16) και (1.3.17) αντίστοιχα προκύπτουν από την απαίτηση οι ιδιοσυναρτήσεις να είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα, δηλαδή :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^{(2)*} \cdot \psi_n^{(2)} dx = 1 \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^{(1)*} \cdot \psi_n^{(1)} dx = 1 \quad .$$

Συγκεντρωτικά, το σημαντικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε σε αυτή την ενότητα είναι ότι ξεκινώντας από ένα γνωστό και πλήρως επιλύσιμο δυναμικό $V_1(x)$ με τουλάχιστον μια δέσμη κατάσταση, μπορούμε να κατασκευάσουμε το συναφές του δυναμικό $V_2(x)$ το οποίο θα είναι και αυτό ακριβώς επιλύσιμο. Ισοδύναμα, γνωρίζοντας τις ιδιοσυναρτήσεις της Hamiltonian \hat{H}_1 , μπορούμε μέσω της δράσης του τελεστή \hat{A} να γνωρίζουμε και τις ιδιοσυναρτήσεις της Hamiltonian \hat{H}_2 και αντίστροφα από τις ιδιοσυναρτήσεις της \hat{H}_2 μέσω της δράσης του \hat{A}^+ να κατασκευάσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της \hat{H}_1 με την εξαίρεση της βασικής στάθμης (η βασική στάθμη της \hat{H}_1 δεν έχει SUSY partner δεδομένου ότι $\hat{A}\psi_0^{(1)} = 0$)

Η πλήρης εικόνα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1: Τα ενεργειακά επίπεδα δύο συναφών Χαμιλτονιανών (δυναμικών) με φανερό τον εκφυλισμό. Το δυναμικό V_1 διαθέτει ένα επιπλέον ενεργειακό επίπεδο.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να βρει εφαρμογή σε μια σειρά από γνωστά δυναμικά και με αυτό ακριβώς θα ασχοληθεί το επόμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.

1.4 Άλγεβρα SUSY και φυσικό περιεχόμενο.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, τα ενεργειακά φάσματα των συναφών Χαμιλτονιανών \hat{H}_1 και \hat{H}_2 παρουσιάζουν εκφυλισμό. Η αιτία του εκφυλισμού αυτού, μπορεί ευκολότερα να γίνει κατανοητή από τις ιδιότητες της λεγόμενης Άλγεβρας SUSY.

Θεωρώντας την υπό μορφή πίνακα SUSY Hamiltonian \hat{H} , με:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{bmatrix} \quad (1.4.1)$$

η οποία είναι μέρος μιας κλειστής Άλγεβρας που περιλαμβάνει και μποζονικούς και φερμιονικούς τελεστές με σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης μεταξύ τους, τους:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{Q}^+ = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.4.2)$$

$$\text{τότε εύκολα δείχνεται ότι: } [\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{Q}^+] = 0 \quad (1.4.3)$$

που είναι και ο λόγος για τον οποίο οι Χαμιλτονιανές \hat{H}_1 και \hat{H}_2 παρουσιάζουν εκφυλισμό στα φάσματά τους.

$$\text{Ταυτόχρονα ισχύουν: } \{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} = \hat{H}, \quad \{\hat{Q}, \hat{Q}\} = \{\hat{Q}^+, \hat{Q}^+\} = 0 \quad (1.4.4)$$

Έτσι συνολικά περιγράφεται μια κλειστή $sl(1/1)$ super algebra.

Πράγματι, η σχέση (1.4.3) είναι εύκολο να αποδειχθεί:

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = \hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H} \quad \text{με}$$

$$\bullet \quad \hat{H}\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{H}_2\hat{A} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \hat{Q}\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A}\hat{H}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{και άρα, } [\hat{H}, \hat{Q}] = \hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{H}_2\hat{A} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A}\hat{H}_1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{H}_2\hat{A} - \hat{A}\hat{H}_1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

Παρατηρώ ότι δρώντας με τον τελεστή $\hat{H}_2\hat{A} - \hat{A}\hat{H}_1$ στην ιδιοσυνάρτηση (της \hat{H}_1) $\psi_n^{(1)}$ έχω:

$$\begin{aligned} (\hat{H}_2\hat{A} - \hat{A}\hat{H}_1)\psi_n^{(1)} &= \hat{H}_2(\hat{A}\psi_n^{(1)}) - \hat{A}(\hat{H}_1\psi_n^{(1)}) = \\ &= E_n^{(1)}(\hat{A}\psi_n^{(1)}) - \hat{A}E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}(\hat{A}\psi_n^{(1)} - \hat{A}\psi_n^{(1)}) = 0 \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

↑
εξαιτίας της σχέσης (1.3.11) και της εξίσωσης Schrödinger.

Η σχέση (1.3.22) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\hat{H}_2\hat{A} = \hat{A}\hat{H}_1$ και άρα : $[\hat{H}, \hat{Q}] = 0$.

Εντελώς όμοια, εύκολα αποδεικνύεται ότι $[\hat{H}, \hat{Q}^+] = 0$:

- $\hat{H}\hat{Q}^+ = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_1\hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\hat{Q}^+\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^+\hat{H}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Άρα } [\hat{H}, \hat{Q}^+] = \hat{H}\hat{Q}^+ - \hat{Q}^+\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{H}_1\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{H}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δράση του τελεστή $\hat{H}_1\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{H}_2$ στην $\psi_n^{(2)}$ δίνει:

$$\begin{aligned} (\hat{H}_1\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{H}_2)\psi_n^{(2)} &= \hat{H}_1(\hat{A}^+\psi_n^{(2)}) - \hat{A}^+\hat{H}_2\psi_n^{(2)} = \\ &= E_n^{(2)}(\hat{A}^+\psi_n^{(2)}) - \hat{A}^+E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}(\hat{A}^+ - \hat{A}^+)\psi_n^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

↑
λόγω της σχέσης (1.3.14) και της εξίσωσης Schrodinger.

και άρα $[\hat{H}, \hat{Q}^+] = 0$.

Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι οι ιδέες της Υπερσυμμετρίας εφαρμοζόμενες στην Κβαντική Μηχανική μπορούν να προσφέρουν ένα ισχυρό εργαλείο κομψότερης και συντομότερης επίλυσης όλων των γνωστών μονοδιάστατων προβλημάτων των οποίων οι λύσεις είναι γνωστές αλλά και να οδηγήσουν στην ανακάλυψη νέων αναλυτικά επιλύσιμων δυναμικών-των συναφών τους-με το ίδιο ενεργειακό φάσμα με τα αρχικά.

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, από τα τέσσερα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε, ενδιαφέρον ως προς τη μορφή παρουσιάζει μόνο το συναφές δυναμικό του απειρόβαθου πηγαδιού, παρόλα αυτά και στις υπόλοιπες περιπτώσεις η μέθοδος προσφέρει έναν κομψό και σύντομο τρόπο αναπαραγωγής των γνωστών σε κάθε περίπτωση αποτελεσμάτων για το ενεργειακό φάσμα και τις κυματοσυναρτήσεις καθώς το συναφές δυναμικό αποτελεί, όπως θα δούμε, μια απλή μετατόπιση του αρχικού.

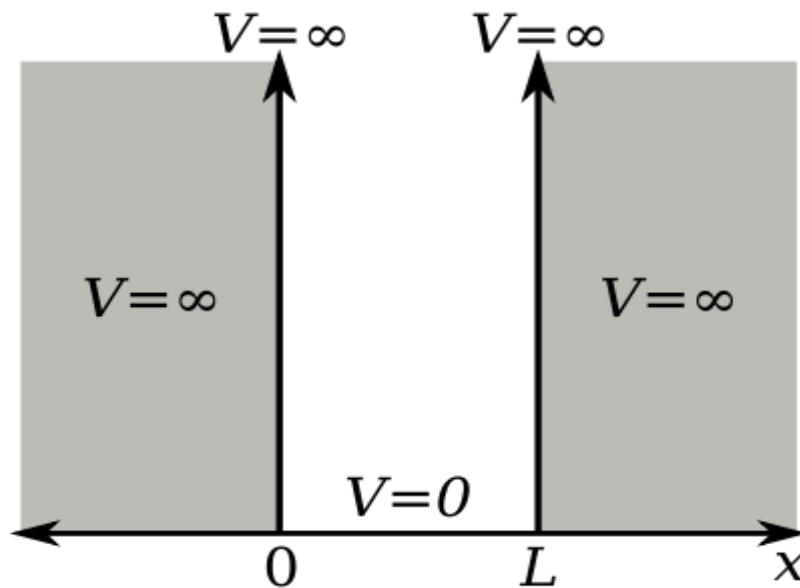
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Παραδείγματα αναλυτικά επιλύσιμων Δυναμικών με τη

SUSY Q.M

Στο κεφάλαιο αυτό, που αποτελεί τον κύριο κορμό της παρούσας εργασίας, παρουσιάζονται μια σειρά από γνωστά, μονοδιάστατα και ακριβώς επιλύσιμα δυναμικά που κανείς συναντά ήδη από τα προπτυχιακά μαθήματα Κβαντικής Μηχανικής. Τα δυναμικά αυτά προσεγγίζονται μέσω της μεθόδου της SUSY Q.M, εξάγονται τα συμμετρικά δυναμικά τους καθώς και οι ιδιοκαταστάσεις αυτών των τελευταίων και αποδεικνύεται η ταύτιση των ενεργειακών τους φασμάτων (με τη διαφορά ότι η συμμετρική Hamiltonian \hat{H}_2 εμφανίζει μία λιγότερη δέσμια κατάσταση). Όπως φαίνεται και από τις περιπτώσεις που ακολουθούν, τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν είναι αρκετά ενδιαφέροντα.

2.1. Το Απειρόβαθο πηγάδι Δυναμικού

Ας θεωρήσουμε τη κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m εντός της περιοχής δράσης ενός δυναμικού της μορφής απειρόβαθου πηγαδιού εύρους L .



Το δυναμικό αυτό θα έχει τη μαθηματική έκφραση:

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq L \\ \infty & , -\infty < x < 0, x > L \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση της βασικής στάθμης όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης του Schrödinger να είναι:

$$\psi_0^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad , 0 \leq x \leq L \quad (2.1.2)$$

ενώ η ενέργεια της βασικής στάθμης:

$$E_0^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \quad (2.1.3)$$

Σε συνεκτική μορφή, το συνολικό ενεργειακό φάσμα και οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας, μπορούν να γραφούν:

$$E_{n'}^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n'^2}{2m L^2} \quad \text{και} \quad \psi_{n'}^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n' \pi x}{L}\right) \quad (2.1.4)$$

με $n' = n + 1$ και $n = 0, 1, 2, \dots$

Η επανακανονικοποίηση των ιδιοτιμών της ενέργειας ώστε $E_0^{(1)} = 0$, δίνει:

$$\begin{aligned} E_n'^{(1)} &= E_{n'}^{(1)} - E_0^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n'^2}{2m L^2} - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n'^2 - 1) = \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n' - 1)(n' + 1) \quad , \quad \text{για} \quad n' = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ή για $n' = n + 1$ καταλήγω:

$$E_n'^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n (n + 2) \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1.5)$$

Εντελώς ανάλογα, οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας για $n' = n + 1$, $n = 0, 1, \dots$ γίνονται:

$$\psi_n'^{(1)} = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{L}\right) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.1.6)$$

Με βάση όσα είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το Υπερσυμμετρικό Δυναμικό

$$W(x) \text{ δίνεται από τη σχέση } W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'}{\psi_0} \text{ (σχέση 1.3.6)}$$

Για τη περίπτωση μας και από την (2.1.6) προκύπτει :

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)} &= \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{και} \quad \psi_0^{(1)'} = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{οπότε} \\ W(x) &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\frac{\pi}{L} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \Rightarrow W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Το συναφές δυναμικό του $V_1(x)$ θα είναι κατά τα γνωστά:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad \text{οπότε για τη περίπτωση μας λόγω της (2.1.7):}$$

- $$W^2(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$$
- $$W'(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \left(\frac{\left(\cos\frac{\pi x}{L}\right)' \sin\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{\pi x}{L} \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)'}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} \right) =$$

$$= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \left(\frac{\frac{\pi}{L} \left(-\sin\frac{\pi x}{L}\right) \sin\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi}{L} \cos\frac{\pi x}{L} \cos\frac{\pi x}{L}}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} \right) =$$

$$= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi^2}{L^2} \left(-1 - \frac{\cos^2\frac{\pi x}{L}}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} \right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi^2}{L^2} \left(1 + \frac{\cos^2\frac{\pi x}{L}}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} \right)$$

και άρα

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\cos^2\frac{\pi x}{L}}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(1 + \frac{\cos^2\frac{\pi x}{L}}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} \right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(1 + 2 \frac{\cos^2\frac{\pi x}{L}}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} \right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(1 + \frac{2(1 - \sin^2\frac{\pi x}{L})}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} \right) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(1 + \frac{2}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} - 2 \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{2}{\sin^2\frac{\pi x}{L}} - 1 \right)$$

Συνεπώς,

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{L} - 1 \right)$$

(2.1.8)

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η SUSY Q.M μας παρέχει την πληροφορία ότι το ενεργειακό φάσμα του $V_2(x)$ θα είναι πανομοιότυπο με αυτό του απειρόβαθου πηγαδιού $V_1(x)$ με τη διαφορά ότι η ενέργεια της βασικής στάθμης της \hat{H}_2 ($E_0^{(2)}$) θα συμπίπτει με την ενέργεια της πρώτης διεγερμένης της \hat{H}_1 ($E_1^{(1)}$),

η ενέργεια της πρώτης διεγερμένης στάθμης της $\hat{H}_2 (E_1^{(2)})$ θα συμπίπτει με την ενέργεια της δεύτερης διεγερμένης στάθμης της $\hat{H}_1 (E_2^{(1)})$, ..κοκ δηλαδή

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \text{ με } E_0^{(1)} = 0.$$

Επιπλέον, για το δυναμικό $V_2(x)$ στο οποίο καταλήξαμε, σύμφωνα με τη μεθοδολογία της SYSY Q.M, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας, κάτι που με διαφορετικό αναλυτικό τρόπο θα ήταν μάλλον αδύνατο!

Για τον υπολογισμό των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας της \hat{H}_2 θα θυμηθούμε ότι

$$\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-1/2} \hat{A} \psi_{n+1}^{(1)}. \text{ (σχέση 1.3.16)}$$

Συμπληρωματικά, ο τελεστής \hat{A} για την περίπτωση μας είναι:

$$\hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \text{ με το Υπερσυμμετρικό δυναμικό } W(x) \text{ να δίνεται από τη}$$

$$\text{σχέση (2.1.7) και άρα } \hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} \quad (2.1.9)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.1.5) και (2.1.6) οι ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας της πρώτης και δεύτερης διεγερμένης κατάστασης της \hat{H}_1 είναι :

$$E_1^{(1)} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{3\pi^2}{L^2}, \quad \psi_1^{(1)} = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{2\pi x}{L}$$

για $\hbar = 2m = 1$

(2.1.10)

$$E_2^{(1)} = \frac{8\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{8\pi^2}{L^2}, \quad \psi_2^{(1)} = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{3\pi x}{L}$$

για $\hbar = 2m = 1$

Έτσι, η ιδιοκατάσταση της βασικής στάθμης της \hat{H}_2 , $\psi_0^{(2)}$, θα προκύψει από τη δράση του \hat{A} στην $\psi_1^{(1)}$ επί τον αντίστοιχο συντελεστή κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \bullet \hat{A}\psi_1^{(1)} &= \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} \right) \left(\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{2\pi x}{L} \right) - \frac{\pi}{L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} \right\} = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{2\pi}{L}\right) \cos \frac{2\pi x}{L} - \frac{\pi}{L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} 2 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{2\pi}{L} \left\{ \cos \frac{2\pi x}{L} - \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\} \stackrel{**}{=} \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{2\pi}{L} \left\{ \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{A}\psi_1^{(1)} &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{2\pi}{L} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.1.11)
\end{aligned}$$

** γιατί $\cos 2y = 1 - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 y$

Έτσι, λόγω των (2.1.10) και (2.1.11) έχω :

$$\begin{aligned}
\psi_0^{(2)} &= \left[E_1^{(1)}\right]^{-1/2} \cdot \hat{A} \psi_1^{(1)} = -\frac{L}{\sqrt{3\pi}} \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2\pi}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \Rightarrow \\
\Rightarrow \psi_0^{(2)} &= -2 \sqrt{\frac{2}{3L}} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \quad (\text{για } \hbar = 2m = 1) \quad (2.1.12)
\end{aligned}$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, η ιδιοκατάσταση της πρώτης διεγερμένης στάθμης της \hat{H}_2 , $\psi_1^{(2)}$, θα προκύψει από τη δράση του \hat{A} στην $\psi_2^{(1)}$ επί τον αντίστοιχο συντελεστή κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned}
\bullet \hat{A}\psi_2^{(1)} &= \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} \right) \left(\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{3\pi x}{L} \right) = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{3\pi x}{L} \right) - \frac{\pi}{L} \cdot \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} \cdot \sin \frac{3\pi x}{L} \right\} = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \left\{ \frac{3\pi}{L} \cos \left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \frac{\pi}{L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} \sin \frac{3\pi x}{L} \right\} = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \left\{ \frac{3\pi}{L} \left(4\cos^3 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - 3\cos \frac{\pi x}{L} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi}{L} \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}} \left(3\sin \frac{\pi x}{L} - 4\sin^3 \left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) \right\} = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{\pi}{L} \left\{ 12\cos^3 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - 9\cos \frac{\pi x}{L} - 3\cos \frac{\pi x}{L} \right. \\
&\quad \left. + 4\cos \frac{\pi x}{L} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{\pi}{L} \left\{ 12 \cos^3 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - 12 \cos \frac{\pi x}{L} + 4 \cos \frac{\pi x}{L} \left(1 - \cos^2 \frac{\pi x}{L}\right) \right\} = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{\pi}{L} \left\{ 12 \cos^3 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - 12 \cos \frac{\pi x}{L} + 4 \cos \frac{\pi x}{L} - 4 \cos^3 \left(\frac{\pi x}{L}\right) \right\} = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{\pi}{L} \cdot 8 \left(\cos^3 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos \frac{\pi x}{L} \right) = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{8\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1 \right) = \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{8\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \left(-\sin^2 \left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) = \\
&= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{8\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{4\pi}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \\
\Rightarrow \hat{A}\psi_2^{(1)} &= -\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \frac{4\pi}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \tag{2.1.13}
\end{aligned}$$

για $\hbar = 2m = 1$

Έτσι, λόγω των (2.1.10) και (2.1.13) έχω:

$$\begin{aligned}
\psi_2^{(1)} &= \left[E_2^{(1)} \right]^{-1/2} \cdot \hat{A}\psi_1^{(2)} = -\frac{L}{\sqrt{8\pi^2}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{4\pi}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \Rightarrow \\
\Rightarrow \psi_2^{(1)} &= -\frac{2}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \tag{2.1.14}
\end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα υπολογίζονται και οι υπόλοιπες ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας της \hat{H}_2 και έτσι η SUSY Q.M μας παρέχει τη μεθοδολογία αναλυτικής επίλυσης ενός μη διαφορετικά επιλύσιμου δυναμικού (V_2). Το δε εντυπωσιακό, είναι ότι δύο φαινομενικά ασύνδετα δυναμικά τόσο από μαθηματικής όσο και από φυσικής σκοπιάς, τα

$$V_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & -\infty < x < 0, x > L \end{cases} \text{ και } V_2(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} \left(2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{L} - 1 \right)$$

συμμετέχουν σε Χαμιλτονιανές με ταυτόσημο ενεργειακό φάσμα, με τη διαφορά ότι η \hat{H}_2 έχει μια δέσμια ενέργεια λιγότερη!

2.2 Ο Απλός Μονοδιάστατος Αρμονικός Ταλαντωτής

Ένα από τα δημοφιλέστερα προβλήματα για το οποίο υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από τα εισαγωγικά μαθήματα της Κβαντικής Μηχανικής, είναι ο προσδιορισμός του ενεργειακού φάσματος και των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας για τον απλό και μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή.

Έστω λοιπόν, σωματίο μάζας m το οποίο κινείται εντός του δυναμικού του αρμονικού ταλαντωτή και άρα η κίνησή του περιγράφεται από την Hamiltonian:

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \quad \text{με } \hat{p} : \text{ο τελεστής της ορμής και} \quad (2.2.1)$$

\hat{x} : ο τελεστής της θέσης του σωματιδίου

Οι τελεστές \hat{p} , \hat{x} είναι ερμιτιανοί και στην αναπαράσταση της θέσης δίνονται από τις σχέσεις: $\hat{x} = x$ και $\hat{p} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$ (2.2.2)

Ορίζοντας τους τελεστές καταβίβασης \hat{a} και αναβίβασης \hat{a}^+ :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad \text{και} \quad \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (2.2.3)$$

με $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ καθώς και τον τελεστή:

$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ με $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$\hat{H}_1 = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$ από όπου προκύπτει το ενεργειακό φάσμα του σωματιδίου που κινείται εντός δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή, να είναι :

$$E_n^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \hbar\omega, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2.4)$$

Από τη σχέση (2.2.4) είναι προφανές ότι η ενέργεια της βασικής στάθμης προκύπτει

$$\text{να είναι} \quad E_0^{(1)} = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\omega}{2} \quad (2.2.5)$$

↑
για $\hbar = 2m = 1$

ενώ η ιδιοκατάσταση της ενέργειας της βασικής στάθμης προκύπτει από την απαίτηση $\hat{a}|0\rangle = 0$, η οποία στην αναπαράσταση της θέσης γίνεται:

$$\langle x' | \hat{a} | 0 \rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left\langle x' \left| \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \right| 0 \right\rangle = 0 \quad \text{και η οποία μετά από πράξεις}$$

καταλήγει στην διαφορική εξίσωση:

$$\left(x' + x_0^2 \frac{d}{dx'}\right) \psi_0(x') = 0 \quad \text{με} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (2.2.6)$$

Λύνοντας τη (2.2.6), αντικαθιστώντας τη παράμετρο x_0 και μετονομάζοντας $x' \rightarrow x$, παίρνουμε ότι η ιδιοκατάσταση της βασικής στάθμης είναι:

$$\psi_0^{(1)}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2\right) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega}{4} x^2\right) \quad (2.2.7)$$

↑
για $\hbar = 2m = 1$

Οι επόμενες ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας βρίσκονται δρώντας διαδοχικά με τον τελεστή a^+ και πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη σταθερά κανονικοποίησης ώστε να πληρείται η συνθήκη κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \cdot \psi_i dx = 1$.

Σε συνεκτική μορφή, οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας δίνονται από τη σχέση

$$|n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{(n!)}} \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{που στην αναπαράσταση της θέσης θα είναι:}$$

$$\psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{4} \omega x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}} \cdot x\right) \quad (2.2.8)$$

με τις συναρτήσεις $H_n(x)$ να είναι τα γνωστά μας πολυώνυμα Hermite βαθμού n , με $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = 2x^2 - 1$, ...κ.ο.κ.

Απαραίτητο βήμα πριν προχωρήσουμε στη γνωστή μεθοδολογία, αποτελεί η επανακανονικοποίηση των ιδιοτιμών της ενέργειας μέσω της σχέσης:

$$E'_n{}^{(1)} = E_n^{(1)} - E_0^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \omega - \frac{\omega}{2} = n\omega \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.9)$$

Συγκεντρωτικά λοιπόν έχουμε ότι για το πρόβλημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή, ξεκινάμε από το δυναμικό

$$V_1(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \frac{1}{4} \omega^2 x^2 \quad \text{με} \quad \psi_0^{(1)} = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{4} \omega x^2\right)$$

και $E'_0{}^{(1)} = 0$, να είναι η ιδιοκατάσταση και η ιδιοτιμή της ενέργειας της βασικής στάθμης αντίστοιχα.

Το Υπερσυμμετρικό δυναμικό $W(x)$ κατά τα γνωστά θα είναι:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi'_0}{\psi_0} = -\frac{\psi'_0}{\psi_0}$$

↑
για $\hbar = 2m = 1$

με :

$$\psi_0^{(1)'} = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \left(-\frac{1}{4}\omega x^2\right)' = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \left(-\frac{1}{2}\omega x\right) e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \quad (2.2.10)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.7) και (2.2.10) παίρνουμε:

$$W(x) = \frac{-\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \left(-\frac{1}{2}\omega x\right) e^{-\frac{1}{4}\omega x^2}}{\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2}} = \frac{1}{2}\omega x \quad (2.2.11)$$

Τώρα το συναφές δυναμικό του $V_1(x)$ θα είναι το $V_2(x)$ το οποίο κατά τα γνωστά είναι :

$$\text{για } \hbar = 2m = 1$$

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \stackrel{\Downarrow}{=} W^2(x) + W'(x) \quad \text{με}$$

$$W^2(x) = \frac{1}{4}\omega x^2 \quad \text{και} \quad W'(x) = \frac{1}{2}\omega \quad (2.2.12)$$

$$\text{Εύκολα προκύπτει ότι } V_2(x) = \frac{1}{4}\omega x^2 + \frac{1}{2}\omega \quad (2.2.13)$$

που είναι το δυναμικό του μετατοπισμένου κατά $\frac{\omega}{2}$ ταλαντωτή.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο με το απειρόβαθο πηγάδι, μπορώ να υπολογίσω τις κυματοσυναρτήσεις της \hat{H}_2 αν και η διαδικασία σε αυτή τη περίπτωση δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από τη σκοπιά της αναλυτικής επίλυσης. Οι υπολογισμοί παρόλα αυτά παρατίθενται, για λόγους πληρότητας.

Κατά τα γνωστά, η ιδιοκατάσταση της ενέργειας της βασικής στάθμης της \hat{H}_2 , $\psi_0^{(2)}$, θα προκύψει από την $\hat{A}\psi_1^{(1)}$ επί τον συντελεστή κανονικοποίησης $\left(E_1^{(1)}\right)^{-1/2}$, η $\psi_1^{(2)}$ από την $\hat{A}\psi_2^{(1)}$ επί τον συντελεστή κανονικοποίησης $\left(E_2^{(1)}\right)^{-1/2}$, ... κοκ.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{A} = \frac{d}{dx} + W(x) = \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\omega x$ (για $\hbar = 2m = 1$) και ότι λόγω της (2.2.8) : $\psi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \sqrt{\frac{\omega}{2}} x$, θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \hat{A}\psi_1^{(1)} &= \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\omega x\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \sqrt{\frac{\omega}{2}} x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \frac{d}{dx} \left(x e^{-\frac{1}{4}\omega x^2}\right) + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{1}{2} \omega \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} x^2 = \\ &= \frac{\sqrt{\omega}}{2} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \left[e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} + x e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\omega \cdot 2x\right) + \frac{1}{2}\omega x^2 e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\omega}}{2} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \left[e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} - \frac{\omega}{2} x^2 e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} + \frac{1}{2} \omega x^2 e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \hat{A}\psi_1^{(1)} = \frac{\sqrt{\omega}}{2} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \quad (2.2.14)
\end{aligned}$$

Συνεπώς $\psi_0^{(2)} = \left(E_1^{(1)}\right)^{-1/2} \hat{A}\psi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\sqrt{\omega}}{2} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_0^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \quad (2.2.15)$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο υπολογίζεται η ιδιοκατάσταση της ενέργειας της πρώτης διεγερμένης στάθμης της \hat{H}_2 , η $\psi_1^{(2)}$, ξεκινώντας από την $\psi_2^{(1)}$ την οποία “διαβάζω” από την (2.2.8) για $n = 2$.

- $$\begin{aligned}
\hat{A}\psi_2^{(1)} &= \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\omega x\right) \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} (2x^2 - 1)e^{-\frac{1}{4}\omega x^2}\right] = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \left\{ \frac{d}{dx} \left[(2x^2 - 1)e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \right] + \frac{1}{2}\omega x (2x^2 - 1)e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} \left\{ 4xe^{-\frac{1}{4}\omega x^2} + (2x^2 - 1)e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \left(-\frac{1}{2}\omega x\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\omega x (2x^2 - 1)e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \hat{A}\psi_2^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} x \cdot e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \quad (2.2.16)
\end{aligned}$$

Συνεπώς $\psi_1^{(2)} = \left[E_2^{(1)}\right]^{-1/2} \cdot \hat{A}\psi_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} x e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{1/4} x e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \quad (2.2.17)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν και οι υπόλοιπες ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας της \hat{H}_2 δηλαδή του μετατοπισμένου ταλαντωτή, διαδικασία όμως που όπως ήδη αναφέρθηκε δεν παρουσιάζει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά στην αναλυτική επίλυση.

Θα άξιζε όμως ίσως να ελέγξουμε τη σχέση μεταξύ των γνωστών μας τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης του αρμονικού ταλαντωτή (\hat{a} , \hat{a}^+) και των τελεστών \hat{A} , \hat{A}^+ της μεθόδου, αναμένοντας η σχέση αυτή να υπάρχει, δεδομένου ότι το V_2 είναι απλά ο μετατοπισμένος αρμονικός ταλαντωτής.

Στην αναπαράσταση της θέσης, για τους γνωστούς μας τελεστές καταβίβασης (\hat{a}) και αναβίβασης (\hat{a}^+) έχουμε:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{για } \hbar = 2m = 1}}{=} \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(\hat{x} + \frac{2i}{\omega} \hat{p} \right) = \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(x + \frac{2i}{\omega} (-i) \frac{d}{dx} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(x + \frac{2}{\omega} \frac{d}{dx} \right) \quad (2.2.18)$$

Ομοίως: για $\hbar = 2m = 1$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{για } \hbar = 2m = 1}}{=} \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(\hat{x} - \frac{2i}{\omega} \hat{p} \right) = \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(x - \frac{2i}{\omega} (-i) \frac{d}{dx} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(x - \frac{2}{\omega} \frac{d}{dx} \right) \quad (2.2.19)$$

Για τους \hat{A} και \hat{A}^+ αντίστοιχα όπως είδαμε, έχουμε :

$$\hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{για } \hbar = 2m = 1}}{=} \frac{d}{dx} + W(x) = \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \omega x$$

$$\hat{A}^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{για } \hbar = 2m = 1}}{=} -\frac{d}{dx} + W(x) = -\frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \omega x \quad (2.2.20)$$

Με τη βοήθεια των (2.2.19) και (2.2.20) συγκρίνω τους \hat{a} και \hat{A} οπότε έχουμε:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(x + \frac{2}{\omega} \frac{d}{dx} \right) = \frac{\sqrt{\omega}}{2} x + \frac{\sqrt{\omega}}{\omega} \frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d}{dx} = \hat{a} - \frac{\sqrt{\omega}}{2} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} = \sqrt{\omega} \hat{a} - \frac{\omega}{2} x \text{ και άρα θα έχουμε:}$$

$$\hat{A} = \sqrt{\omega} \left(\hat{a} - \frac{\sqrt{\omega}}{2} x \right) + \frac{1}{2} \omega x = \sqrt{\omega} \hat{a} - \frac{\omega}{2} x + \frac{1}{2} \omega x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \sqrt{\omega} \hat{a} \quad (2.2.21)$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο για τη σχέση των \hat{a}^+ και \hat{A}^+ θα έχουμε:

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{\omega}{4}} \left(x - \frac{2}{\omega} \frac{d}{dx} \right) = \frac{\sqrt{\omega}}{2} x - \frac{\sqrt{\omega}}{\omega} \frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d}{dx} = -\hat{a}^+ + \frac{\sqrt{\omega}}{2} x \Rightarrow$$

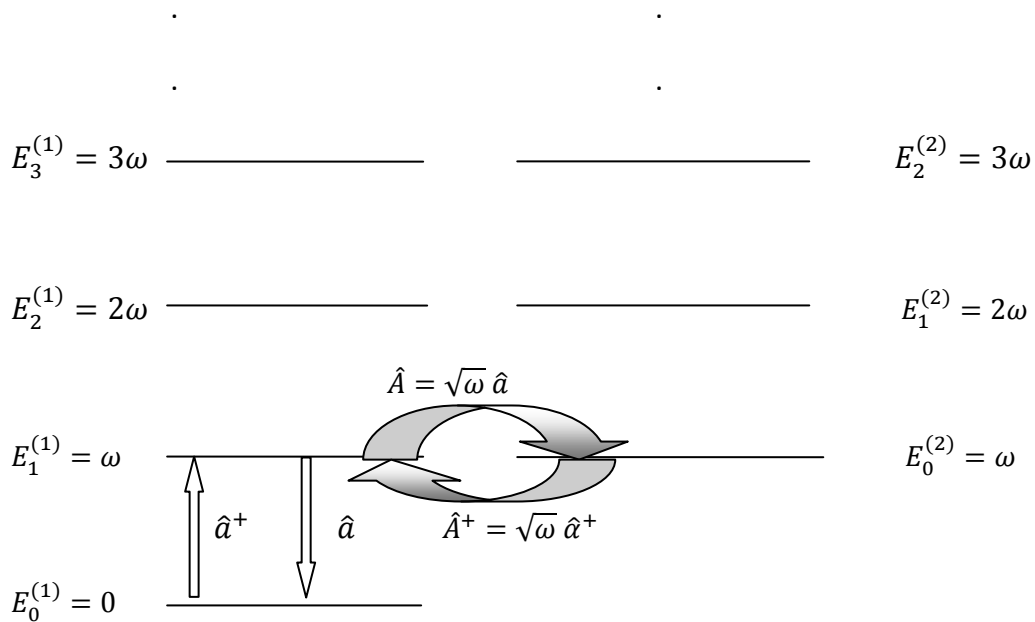
$$\Rightarrow \frac{d}{dx} = -\sqrt{\omega} \hat{a}^+ + \frac{\omega}{2} x \text{ και άρα θα έχουμε:}$$

$$\hat{A}^+ = \sqrt{\omega} \hat{a}^+ - \frac{\omega}{2} x + \frac{\omega}{2} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}^+ = \sqrt{\omega} \hat{a}^+ \tag{2.2.22}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι οι γνωστοί μας τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης στις ενεργειακές στάθμες του απλού αρμονικού ταλαντωτή, ουσιαστικά ταυτίζονται (με μια σταθερά αναλογίας) με τους τελεστές που συνδέουν τις ενεργειακές στάθμες αυτές με εκείνες του μετατοπισμένου αρμονικού ταλαντωτή (V_2 συναφές δυναμικό του V_1).

Το παρακάτω διάγραμμα φιλοδοξεί να δώσει την πλήρη εικόνα:

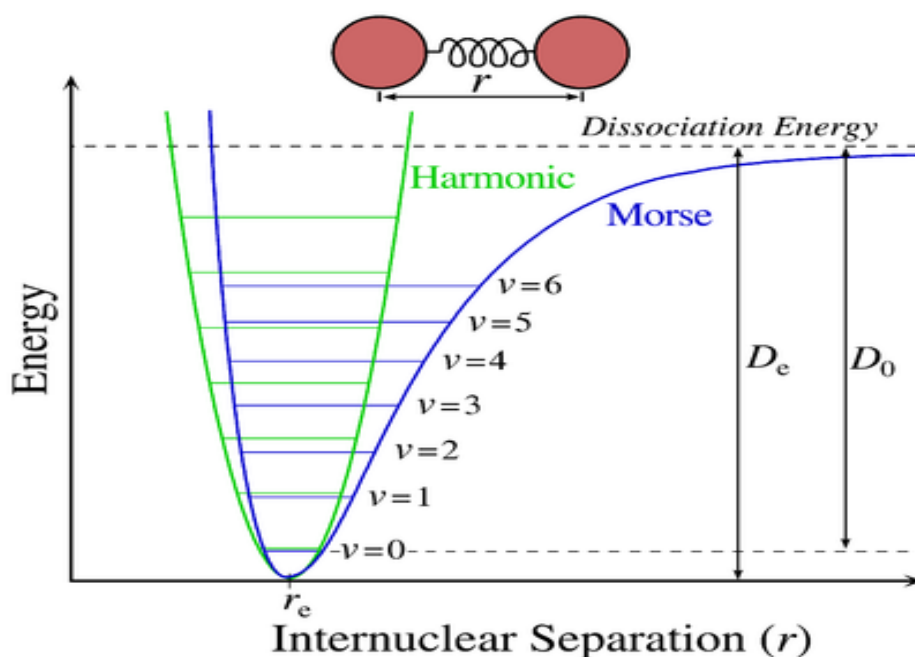


2.3 Το Δυναμικό Morse ή ο Μη Αρμονικός Ταλαντωτής.

Το δυναμικό Morse αποτελεί μια γενίκευση του απλού αρμονικού ταλαντωτή με σκοπό να περιγράψει την δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης ενός διατομικού μορίου με πολύ πιο αποτελεσματικό τρόπο, αφού λαμβάνει υπόψη εκτός από την πρώτη προσέγγιση της ενέργειας αυτής (αρμονικός ταλαντωτής) και την πολύ πιο ρεαλιστική εικόνα αναρμονικότητας που ένα μόριο παρουσιάζει.

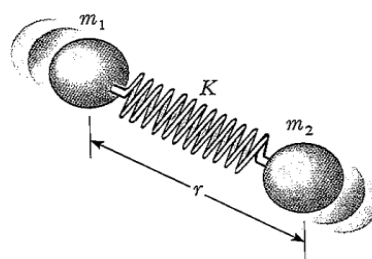
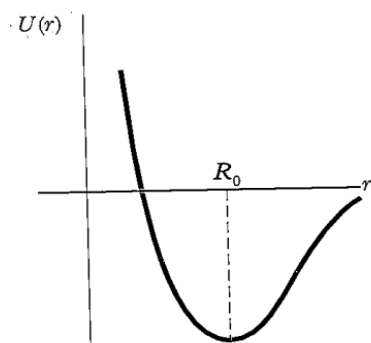
Συγκεκριμένα, και αναφερόμενοι στην ταλαντωτική ενέργεια ενός διατομικού μορίου, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αρμονική προσέγγιση ισχύει μόνο για μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας. Για μεγάλες ενέργειες ταλάντωσης και άρα ύπαρξης αναρμονικότητας, κατάλληλο για τη περιγραφή της ταλαντωτικής ενέργειας του μορίου είναι το δυναμικό Morse.

Παρακάτω παρατίθενται για σύγκριση στο ίδιο διάγραμμα το δυναμικό του απλού αρμονικού ταλαντωτή και το δυναμικό Morse.



Παρατηρούμε ότι για χαμηλές ενέργειες ταλάντωσης, οι ενεργειακές στάθμες των δυο δυναμικών ταυτίζονται, ενώ αποκλίνουν αυξανόμενα όσο η ενέργεια ταλάντωσης αυξάνεται. Ως αποτέλεσμα της αναρμονικότητας για ταλαντώσεις μακριά από τη θέση ισορροπίας, οι ενεργειακές στάθμες πυκνώνουν αυξανόμενου του κβαντικού αριθμού v (δηλαδή αυξανόμενης της ενέργειας), αφού μεγάλη αστάθεια δηλαδή αναρμονικότητα σημαίνει ευκολότερη «διάβαση» από τη μία στάθμη στην άλλη και άρα μικρότερο ΔE .

Πράγματι, κοντά στη θέση ισορροπίας και εάν προσεγγίσουμε τη διαμήκη (μονοδιάστατη) ταλαντωτική κίνηση του μοριακού δεσμού με τη κίνηση ελατηρίου σταθεράς κ που ενώνει ατομικές μάζες m_1 και m_2 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τότε :



Για απομακρύνσεις x_1 και x_2 από τη θέση ισορροπίας R_0 , η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = \frac{1}{2} \kappa (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} \kappa x^2$$

με: $\kappa = \mu \omega^2$ και μ η ανηγμένη μάζα του συστήματος.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$E_{\kappa} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}, \text{ με } \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \text{ οπότε } E_{\kappa} = \frac{p_1^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_1^2}{2\mu}$$

Έτσι, η μονοδιάστατη εξίσωση Schrödinger που περιγράφει τη ταλαντωτική κίνηση του διατομικού μορίου θα έχει τη μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \frac{1}{2} \kappa x^2 \Psi(x) = E_n \Psi(x)$$

που είναι η γνωστή μας εξίσωση του Μονοδιάστατου απλού Αρμονικού Ταλαντωτή.

Το ενεργειακό φάσμα που προκύπτει θα είναι κατά τα γνωστά:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \text{ με } n = 0, 1, 2, \dots \text{ ο κβαντικός αριθμός της ταλάντωσης.}$$

Για ταλαντώσεις μακριά από τη θέση ισορροπίας, τα πράγματα αλλάζουν και η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από το δυναμικό Morse.

Αλλά ας προσεγγίσουμε το πρόβλημα από την αρχή:

Ξεκινώντας από το πρότυπο για δύο πυρήνες με μάζες M_1 και M_2 και ατομικούς αριθμούς Z_1 και Z_2 , η εξίσωση Schrodinger που περιγράφει το σύστημα θα είναι:

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + V_e(r) \right] \Psi = 0 \quad \text{με} \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (2.3.1)$$

$$\text{Ορίζοντας τη διαφορά} \quad \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - V_e(r) \equiv V(r) \quad (2.3.2)$$

και γράφοντας τη κυματοσυνάρτηση σύμφωνα με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών: $\Psi(r, \theta, \varphi) = N \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (2.3.3)

τότε η εξίσωση Schrodinger ανάγεται στην ακτινική εξίσωση:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} R + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] R = 0 \quad (2.3.4)$$

Μας ενδιαφέρουν οι ταλαντωτικές κινήσεις άρα στο εξής επιλέγουμε $l = 0$.

Ο Morse πρότεινε για τη μορφή του δυναμικού τη συνάρτηση :

$$V_1(r) = D \left[e^{-2\lambda(r-r_0)} - 2e^{-\lambda(r-r_0)} \right] \quad (2.3.5)$$

η οποία έχει ελάχιστο για $r = r_0$ και μηδενίζεται στο άπειρο.

Μελετώντας αποκλειστικά τις δέσμιες καταστάσεις του δυναμικού αυτού, αναμένουμε οι (αντίστοιχες δέσμιες) ενέργειες να είναι αρνητικές ενώ οι θετικές ιδιοτιμές της ενέργειας θα αντιστοιχούν σε λύσεις ελεύθερες να διαδοθούν στο άπειρο.

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = e^{-\lambda(r-r_0)}$, η (2.3.4) γίνεται:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dR}{dt} + \frac{2\mu}{\hbar^2 \lambda^2} \left[\frac{E}{t^2} + \frac{2D}{t} - D \right] R = 0 \quad \text{με} \quad t \in [0, +\infty] \quad (2.3.6)$$

Μια νέα αλλαγή μεταβλητών:

$$R(t) = e^{-gt} (2gt)^{b/2} F(t) \quad \text{με} \quad g = \frac{\sqrt{2\mu D}}{\lambda \hbar} \quad \text{και} \quad E = -\frac{\lambda^2 b^2 \hbar^2}{8\mu} \quad (2.3.7)$$

ακολουθούμενη από την $t = \frac{z}{2g}$, δίνει:

$$z \frac{d^2 F}{dz^2} + (b + 1 - z) \frac{dF}{dz} + \left[\frac{2\pi\sqrt{2\mu D}}{\hbar \lambda} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \right] F = 0, \quad z \in [0, +\infty) \quad (2.3.8)$$

Η εξίσωση (2.3.8) είναι της μορφής : $x y'' + (m + 1 - x) y' + n y = 0$

δηλαδή μια διαφορική εξίσωση Laguerre με $m = b$ και $n = \frac{2\pi\sqrt{2\mu D}}{\hbar \lambda} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$.

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι ένας συνδυασμός της συρρέουσας υπεργεωμετρικής σειράς και πολυωνύμων του Laguerre.

Εάν η παράσταση $n = \frac{2\pi\sqrt{2\mu D}}{\hbar \lambda} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$ ισούται με κάποιον φυσικό αριθμό

$n > 0$, η λύση θα είναι πολυώνυμο. Σε αυτή τη περίπτωση:

$$\frac{2\pi\sqrt{2\mu D}}{\hbar \lambda} - \frac{b}{2} - \frac{1}{2} = n \Rightarrow b = \frac{4\pi\sqrt{2\mu D}}{\hbar \lambda} - 1 - 2n \equiv \kappa - 1 - 2n$$

$$\text{με } \kappa = \frac{4\pi\sqrt{2\mu D}}{\hbar \lambda}.$$

Προκειμένου η συνάρτηση R να είναι πεπερασμένη για όλο το διάστημα $0 \leq z < +\infty$, θα πρέπει $b > 1$ και άρα $0 \leq 2n \leq \kappa - 1$.

Τότε οι λύσεις είναι τα συσχετισμένα πολυώνυμα του Laguerre :

$$F(z) = L_n^b(z) = \frac{1}{n!} z^{-b} e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+b}) \quad (2.3.9)$$

Η ενέργεια θα προκύπτει από τις σχέσεις:

$$E = -\frac{\lambda^2 b^2 \hbar^2}{8\mu} \text{ και } b = \kappa - 1 - 2n, \text{ οπότε } E_n = -\frac{\lambda^2 (\kappa - 1 - 2n)^2 \hbar^2}{32\pi^2 \mu} \quad (2.3.10)$$

Για $n = 0$, θα έχω το μεγαλύτερο b άρα τη μικρότερη ενέργεια (ενέργεια βασικής στάθμης). Η επιλογή αυτή συνεπάγεται επίσης:

$$F_0 = L_0^b = 1 \text{ και άρα λόγω της σχέσης (2.3.7) για } t = \frac{z}{2g} \text{ καταλήγουμε:}$$

$$R_0(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{b}{2}} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) \quad (2.3.11)$$

Έχοντας καταλήξει στην βασική κυματοσυνάρτηση του προβλήματος, είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε στη μεθοδολογία της SUSY και σε πρώτη φάση να υπολογίσουμε το Υπερδυναμικό $W(r)$.

Για το σκοπό αυτό επιστρέφουμε στην αρχική μεταβλητή r του προβλήματος, μέσω των διαδοχικών μετασχηματισμών που χρησιμοποιήσαμε για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Έτσι: $R_0(t) = (gt)^{\frac{b}{2}} \exp(-gt) = g^{b/2} t^{b/2} e^{-gt}$

και επειδή $t = e^{-\lambda(r-r_0)}$ καταλήγουμε:

- $R_0(r) = g^{b/2} (e^{-\lambda(r-r_0)})^{b/2} \cdot \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow R_0(r) = g^{b/2} e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)})$ (2.3.12)

- $R'_0(r) = g^{b/2} \left(e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \right)' \cdot \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) +$
 $+ g^{b/2} \cdot e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} [\exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)})]' \Rightarrow$
 $\Rightarrow R'_0(r) = g^{b/2} e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \left(-\frac{\lambda b}{2} \right) \cdot \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) +$
 $+ g^{b/2} e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) \left(-ge^{-\lambda(r-r_0)} (-\lambda) \right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow R'_0(r) = g^{b/2} e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) \left\{ -\frac{\lambda b}{2} + g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \right\}$ (2.3.13)

άρα :

$$W(r) = -\frac{R'_0(r)}{R_0(r)} = \frac{-g^{b/2} e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) \left[-\frac{\lambda b}{2} + g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \right]}{g^{b/2} e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)})} \Rightarrow$$

$$W(r) = \frac{\lambda b}{2} - g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)}$$
 (2.3.14)

Ο υπολογισμός του συναφούς δυναμικού $V_2(r)$, γίνεται κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια της σχέσης (1.1.8) σύμφωνα με την οποία:

$$V_2(r) = W^2(r) + \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(r) = W^2(r) + W'(r)$$

↑
για $\hbar = 2\mu = 1$

- $W^2(r) = \left[\frac{\lambda b}{2} - g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \right]^2 = \frac{\lambda^2 b^2}{4} - \lambda b g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} +$
 $+ g^2 \lambda^2 e^{-2\lambda(r-r_0)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow W^2(r) = \frac{\lambda^2 b^2}{4} - \lambda^2 b g e^{-\lambda(r-r_0)} + g^2 \lambda^2 e^{-2\lambda(r-r_0)}$ (2.3.15)

- $W'(r) = -g\lambda(e^{-\lambda(r-r_0)})' = -g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)}(-\lambda) \Rightarrow$
 $\Rightarrow W'(r) = g\lambda^2 e^{-\lambda(r-r_0)}$ (2.3.16)

Έτσι, το συναφές δυναμικό $V_2(r)$ γίνεται:

$$V_2(r) = \frac{\lambda^2 b^2}{4} - \lambda^2 b g e^{-\lambda(r-r_0)} + g^2 \lambda^2 e^{-2\lambda(r-r_0)} + g\lambda^2 e^{-\lambda(r-r_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2(r) = \frac{\lambda^2 b^2}{4} + g\lambda^2 (1-b)e^{-\lambda(r-r_0)} + g^2 \lambda^2 e^{-2\lambda(r-r_0)}$$
 (2.3.17)

Το δυναμικό αυτό αποτελεί το συναφές δυναμικό του δυναμικού Morse ($V_1(r)$) της σχέσης (2.3.5) και όπως φαίνεται από τη σχέση (2.3.17), αποτελεί όπως και στη περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή, μια μετατόπιση του αρχικού δυναμικού.

Έτσι, όπως και στη περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή, η μέθοδος δεν επιλύει κάποιο δυσεπίλυτο άγνωστο δυναμικό και έτσι από την άποψη της αναλυτικής επίλυσης δυναμικών δεν παρουσιάζει το παράδειγμα αυτό, κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Παραμένει όμως μια γενικευμένη αντιμετώπιση δύο δυναμικών τα οποία και ενοποιούνται εξαιτίας της ύπαρξης του Υπερδυναμικού $W(r)$ η οποία και εξηγεί την παρουσία οποιουδήποτε εκφυλισμού στα φάσματά τους και άρα συμμετριών στα αντίστοιχα φυσικά προβλήματα.

Χάριν πληρότητας, θα ακολουθήσουμε και πάλι τη μεθοδολογία της SUSY, προκειμένου να υπολογίσουμε την κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης της Hamiltonian \hat{H}_2 στην οποία και συμμετέχει το συναφές δυναμικό V_2 .

Σύμφωνα με τη σχέση (1.1.7) στην οποία έχουμε καταλήξει στο κεφάλαιο 1, θα ορίζονται και πάλι οι τελεστές

$$\hat{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dr} + W(r) \equiv \frac{d}{dr} + W(r) \text{ και}$$

$$\hat{A}^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dr} + W(r) \equiv -\frac{d}{dr} + W(r)$$
 (2.3.18)

οι οποίοι θα με οδηγούν στις ιδιοσυναρτήσεις της \hat{H}_2 και αντίστροφα.

Συγκεκριμένα, θα πρέπει, σύμφωνα με τη σχέση (1.1.16):

$$R_0^{(2)} = \left(E_1^{(1)}\right)^{-1/2} \cdot \hat{A}R_1^{(1)}$$
 (2.3.19)

με $R_1^{(1)}$ και $E_1^{(1)}$ να είναι αντίστοιχα η ιδιοσυνάρτηση και η ιδιοτιμή της ενέργειας για τη πρώτη διεγερμένη στάθμη της Hamiltonian στην οποία συμμετέχει το δυναμικό Morse.

Οι ιδιοτιμές της ενέργειας δίνονται από τη σχέση (2.3.10) η οποία για $n = 1$ δίνει:

$$E_1^{(1)} = -\frac{\lambda^2(\kappa-3)^2\hbar^2}{32\pi^2\mu} \quad (2.3.20)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ότι $b = \kappa - 1 - 2n$ για $n = 1$.

Οι ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις δίνονται από τη σχέση (2.3.7) δηλαδή:

$$R_n(t) = e^{-gt}(2gt)^{b/2}F_n(t) \quad \text{με } t = e^{-\lambda(r-r_0)}$$

και $F_n(z) = L_n^b(z)$, τα συσχετισμένα πολυώνυμα Laguerre.

Για $n = 1$, θα έχω:

$F_1(z) = L_1^b(z) = -z + b + 1 \Rightarrow F_1(t) = -2gt + b + 1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον μετασχηματισμό $z = 2gt$.

Έτσι,

$$R_1(t) = e^{-gt}(2gt)^{b/2}F_1(t) = e^{-gt}(2gt)^{b/2}(-2gt + b + 1)$$

Και τέλος, χρησιμοποιώντας $t = e^{-\lambda(r-r_0)}$, παίρνω:

$$R_1(r) = \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)})(2g)^{b/2}e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b + 1) \quad (2.3.21)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \hat{A}R_1^{(1)} &= \left[\frac{d}{dr} + \frac{\lambda b}{2} - g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \right] \cdot \\ &\cdot \left[\exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)})(2g)^{b/2}e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b + 1) \right] \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dr}R_1^{(1)} &= \\ &= (2g)^{b/2} \left\{ \left[\exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) \right]' e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b + 1) \right. \\ &\quad + \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) \left[e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \right]' (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b \\ &\quad \left. + 1) + \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} (2g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)}) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2g)^{b/2} \left\{ \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) (g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} \right. \\
&+ b + 1) - \frac{\lambda b}{2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b + 1) \\
&+ \left. \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} (2g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)}) \right\} = \\
&= (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \left\{ g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + \right. \\
&b + 1) - \frac{\lambda b}{2} (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b + 1) + 2\lambda g e^{-\lambda(r-r_0)} \left. \right\} = \\
&= (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \left\{ -2g^2 \lambda e^{-2\lambda(r-r_0)} + \right. \\
&g\lambda b e^{-\lambda(r-r_0)} + g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} + g\lambda b e^{-\lambda(r-r_0)} - \frac{\lambda b^2}{2} - \frac{\lambda b}{2} + 2\lambda g e^{-\lambda(r-r_0)} \left. \right\} \\
&\Rightarrow \frac{d}{dr} R_1^{(1)} = (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \left\{ -2g^2 \lambda e^{-2\lambda(r-r_0)} + \right. \\
&\lambda g(2b + 3) e^{-\lambda(r-r_0)} - \frac{\lambda b}{2} (b + 1) \left. \right\} \tag{2.3.23}
\end{aligned}$$

Το δεύτερο τμήμα της (2.3.22) είναι:

$$\begin{aligned}
&\bullet \left(\frac{\lambda b}{2} - g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \right) R_1^{(1)} = \\
&= \left(\frac{\lambda b}{2} - g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(\exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) (2g)^{b/2} e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b + 1) \right) \\
&\tag{2.3.24}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.3.23) και (2.3.24) στην (2.3.22) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\hat{A}R_1^{(1)} &= (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ -2g^2 \lambda e^{-2\lambda(r-r_0)} + \lambda g(2b + 3) e^{-\lambda(r-r_0)} - \frac{\lambda b}{2} (b + 1) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\lambda b}{2} - g\lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \right) \cdot (-2ge^{-\lambda(r-r_0)} + b + 1) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ -2g^2 \lambda e^{-2\lambda(r-r_0)} + \lambda g(2b+3)e^{-\lambda(r-r_0)} - \frac{\lambda b}{2}(b+1) \right. \\
&\quad \quad - \lambda g b e^{-\lambda(r-r_0)} + \frac{\lambda b^2}{2} + \frac{\lambda b}{2} + 2\lambda g^2 e^{-2\lambda(r-r_0)} \\
&\quad \quad \left. - \lambda b g e^{-\lambda(r-r_0)} - \lambda g e^{-\lambda(r-r_0)} \right\} = \\
&= (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ \lambda g(2b+3)e^{-\lambda(r-r_0)} - \frac{\lambda b}{2}(b+1) + \frac{\lambda b}{2}(b+1) \right. \\
&\quad \quad \left. - (2\lambda g b + \lambda g)e^{-\lambda(r-r_0)} \right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \hat{A}R_1^{(1)} = (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot 2\lambda g e^{-\lambda(r-r_0)} \quad (2.3.25)
\end{aligned}$$

Έτσι, λόγω των σχέσεων (2.3.20) και (2.3.25), η βασική στάθμη $R_0^{(2)}$ που αντιστοιχεί στη Hamiltonian \hat{H}_2 του συναφούς δυναμικού V_2 θα είναι:

$$\begin{aligned}
R_0^{(2)}(r) &= \left(-\frac{\lambda^2(\kappa-3)^2 \hbar^2}{32\pi^2 \mu} \right)^{-1/2} \cdot (2g)^{b/2} \exp(-ge^{-\lambda(r-r_0)}) e^{-\frac{\lambda b}{2}(r-r_0)} \cdot \\
&\quad \cdot 2\lambda g e^{-\lambda(r-r_0)} \\
&\hspace{15em} (2.3.26)
\end{aligned}$$

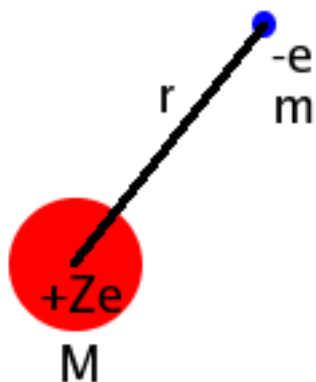
η οποία και θα αντιστοιχεί στην ίδια ενέργεια $E_1^{(1)}$ με την πρώτη διεγερμένη $R_1^{(1)}$ της \hat{H}_1 (Δυναμικό Morse).

Εντελώς ανάλογα, είναι δυνατόν να υπολογιστεί η πρώτη διεγερμένη κατάσταση της \hat{H}_2 , $R_1^{(2)}$, ξεκινώντας από την δεύτερη διεγερμένη κατάσταση $R_2^{(1)}$ της \hat{H}_1 δρώντας με τον τελεστή \hat{A} , κοκ.

2.4 Το Άτομο του Υδρογόνου

Ένα από τα γνωστότερα και πιο ενδιαφέροντα συστήματα στην Κβαντική Μηχανική είναι το πρόβλημα του Ατόμου του Υδρογόνου το οποίο επιλύεται ακριβώς. Ως μοντέλο βασίζεται στη γενικότερη μεθοδολογία επίλυσης κεντρικών δυναμικών, δηλαδή δυναμικών που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία και για τα οποία η δρώσα δύναμη είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης του σωματιδίου από ένα σταθερό κέντρο. Έτσι, τα κεντρικά δυναμικά θα εξαρτώνται μόνο από το μέτρο του διανύσματος θέσης \vec{r} του σωματιδίου.

Το σύστημα του ατόμου του Υδρογόνου αποτελείται από ένα κατά προσέγγιση σταθερό πρωτόνιο (πυρήνας) (αφού $m_p \approx 2000m_e$) και ένα ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται γύρω από αυτό, αλλά το μοντέλο επίλυσης μπορεί να εφαρμοστεί και στα λεγόμενα Υδρογονοειδή άτομα δηλαδή εκείνα τα άτομα των οποίων ο πυρήνας αποτελείται από περισσότερα από ένα πρωτόνια (φορτίο πυρήνα Ze , όπου Z ο ατομικός αριθμός του πυρήνα) αλλά διαθέτουν ένα μόνο ηλεκτρόνιο, όπως π.χ. τα ιόντα He^+ , Li^{2+} κτλ.



Η κυρίαρχη δύναμη μεταξύ του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου είναι η ελκτική δύναμη Coulomb που απορρέει από το δυναμικό: $V = -\frac{e^2}{r}$, όπου r είναι η σχετική απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων.

Η συνάρτηση Hamilton του συστήματος θα είναι:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} \quad (2.4.1)$$

Δεδομένου ότι το δυναμικό του ατόμου του Υδρογόνου είναι κεντρικό, μπορούμε να εφαρμόσουμε κατά την επίλυση της εξίσωσης Schrödinger τη γνωστή μας μέθοδο χωρισμού μεταβλητών και άρα οι ιδιοσυναρτήσεις θα χωρίζονται σε ένα ακτινικό και ένα γωνιακό μέρος, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\psi_{Elm} = R_{El}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.4.2)$$

Το ακτινικό μέρος της κυματοσυνάρτησης $R_{El}(r)$, θα ικανοποιεί την ακτινική εξίσωση Schrodinger:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R_{El}(r) = 0 \quad (2.4.3)$$

Θα ασχοληθούμε μόνο με τις δέσμιες καταστάσεις του ατόμου του Υδρογόνου, δηλαδή εκείνες που συνιστούν το άτομο είτε στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας (βασική στάθμη) είτε σε κάποια διεγερμένη στάθμη.

Οι δέσμιες καταστάσεις θα έχουν όλες $E < 0$, τη στιγμή που οι καταστάσεις κατά τις οποίες το ηλεκτρόνιο δεν είναι εντοπισμένο στην περιοχή του πρωτονίου δηλαδή το άτομο είναι ιονισμένο (καταστάσεις σκέδασης) έχουν $E > 0$.

Προχωρώντας στην επίλυση της (2.4.3) εισάγουμε την παράμετρο

$$k^2 = -\frac{2m_e E}{\hbar^2} > 0 \quad (2.4.4)$$

$$\text{και πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής } \rho = kr \quad (2.4.5)$$

οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - 1 + \frac{\lambda^2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right\} u_{kl}(\rho) = 0 \quad \text{με } \lambda^2 = 2m_e e^2 / \hbar^2 k \quad (2.4.6)$$

Σε μεγάλες αποστάσεις $\rho \rightarrow \infty$, η προσεγγιστική λύση είναι:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \{u_{kl}(\rho)\} = e^{-\rho} \quad (2.4.7)$$

η οποία και συμφωνεί με τη συμπεριφορά που θα πρέπει να έχουν οι κυματοσυναρτήσεις στο άπειρο, δηλαδή να μηδενίζονται.

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την ακτινική διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε δυναμοσειρά. Έτσι, εισάγοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά στη λύση μας, θα πρέπει:

$$u_{kl}(\rho) \equiv e^{-\rho} \cdot v_{kl}(\rho) \quad (2.4.8)$$

όπου η ασυμπτωτική συμπεριφορά είναι διαχωρισμένη και τότε:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - 2 \frac{d}{d\rho} + \frac{\lambda^2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right\} v_{kl}(\rho) = 0 \quad (2.4.9)$$

Στην περιοχή του $\rho = 0$, η συμπεριφορά των λύσεων θα πρέπει να είναι

$$v_{kl}(\rho) = u_{kl}(\rho) = 0 .$$

Υποθέτοντας ότι $v_{kl}(\rho) \sim \rho^\alpha$ με $\alpha > 0$ και εισάγοντας τη σχέση αυτή στην (2.4.9) παίρνουμε:

$$\{\alpha(\alpha - 1) - l(l + 1)\}\rho^{\alpha-2} + O(\rho^{\alpha-1}) \sim 0 \text{ και άρα } \alpha = l + 1 \quad (2.4.10)$$

Έτσι, η λύση μπορεί να γραφεί σε μορφή δυναμοσειράς :

$$v(\rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \rho^{\nu+l+1} \quad (2.4.11)$$

Αντικαθιστώντας την (2.4.11) στην εξίσωση (2.4.9) και διαιρώντας με ρ^l έχουμε:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu [(l + \nu + 1)(l + \nu) - l(l + 1)] \rho^{\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu [\lambda^2 - 2(l + \nu + 1)] \rho^\nu = 0 \quad (2.4.12)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος τάξης $\nu = 0$ της πρώτης σειράς μηδενίζεται. Έτσι, αλλάζοντας δείκτη άθροισης $\nu \rightarrow \nu + 1$, παίρνουμε:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+1} [(l + \nu + 2)(l + \nu + 1) - l(l + 1)] \rho^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu [\lambda^2 - 2(l + \nu + 1)] \rho^\nu = 0 \quad (2.4.13)$$

Στη συνέχεια απαιτούμε κάθε όρος της σειράς να μηδενίζεται οπότε παίρνουμε την αναδρομική σχέση:

$$\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = \frac{2(l + \nu + 1) - \lambda^2}{[(l + \nu + 2)(l + \nu + 1) - l(l + 1)]} , \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.14)$$

Για μεγάλες τιμές του ν : $\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} \sim \frac{2}{\nu} , (\nu \rightarrow \infty) \quad (2.4.15)$

Όμως αυτή η αναδρομική σχέση, είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην δυναμοσειρά του :

$$e^{2\rho} = \sum_0^{\infty} 2^n \rho^n / n!$$

αφού σε αυτήν, ο λόγος του συντελεστή τάξης $n + 1$ προς τον συντελεστή τάξης n είναι $\frac{2}{(n+1)}$, ο οποίος τείνει στη τιμή $\frac{2}{n}$ για μεγάλα n .

Μια συμπεριφορά $v \sim e^\rho$ όμως, δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή γιατί αντιστοιχεί σε ακτινική κυματοσυνάρτηση $u_{kl}(\rho) \sim e^\rho$ που δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη αλλά και γιατί ανατρέπει την συμπεριφορά $u_{kl}(\rho) \sim e^{-\rho}$ την οποία έχουμε συμπεράνει με σοβαρά φυσικά επιχειρήματα..

Συνεπώς η δυναμοσειρά θα πρέπει να τερματίζεται και η συνάρτηση $v(\rho)$ να είναι κάποιο πολυώνυμο.

Αυτό θα συμβαίνει μόνο αν :

$$\lambda^2 = 2(\nu + 1 + l) \quad (2.4.16)$$

Από τη σχέση (2.4.16) παίρνουμε τις τιμές της παραμέτρου λ^2 για τις οποίες έχουμε σαν λύση $v(\rho)$ ένα πολυώνυμο βαθμού $l + 1 + \nu$.

Έτσι οι επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (2.4.4), (2.4.6) και (2.4.16) θα είναι :

$$E = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2(\nu+l+1)^2} \quad \text{για } \nu = 0,1,2,\dots \text{ και } l = 0,1,2,\dots \quad (2.4.17)$$

Αντικαθιστώντας τον ακέραιο ν με τον «κύριο κβαντικό αριθμό» n :

$$n = \nu + l + 1, \text{ τότε } n = 1,2,\dots \quad (2.4.18)$$

και τότε οι ιδιοτιμές της ενέργειας γίνονται:

$$E_n^{(1)} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1,2,\dots \quad (2.4.19)$$

ενώ η ενέργεια της βασικής στάθμης δίνεται από την (2.4.19) για $n = 1$, δηλαδή:

$$E_1^{(1)} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$$

Οι επιτρεπόμενες τιμές του l θα είναι:

$$l = n - \nu - 1 = (n - 1), (n - 2), \dots, 2, 1, 0 \quad (2.4.20)$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι ο εκφυλισμός, δηλαδή ο αριθμός των διαφορετικών καταστάσεων που αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια E_n είναι :

$$\sum_{l=0}^{l=n-1} (2l+1) = n^2 \quad (2.4.21)$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τις ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος:

Η γενική μορφή των λύσεων $v(\rho)$ είναι ένας παράγοντας ρ^{l+1} επί ένα πολυώνυμο. Για κάθε δεδομένο n και l ο βαθμός του πολυωνύμου είναι $n-l-1$.

Τα πολυώνυμα αυτά είναι τα προσαρτημένα πολυώνυμα Laguerre $L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho)$, τα οποία ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2}{dx^2} L_{n-l-1}^{2l+1}(x) + \left[\frac{2(l+1)}{x} - 1 \right] \frac{d}{dx} L_{n-l-1}^{2l+1}(x) + \frac{(n-l-1)}{x} L_{n-l-1}^{2l+1}(x) = 0 \quad (2.4.22)$$

Έτσι, η ακτινική κυματοσυνάρτηση θα είναι:

$$R_{nl}(\rho) = N_{nl} \cdot e^{-\rho} \cdot \rho^l \cdot L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \quad (2.4.23)$$

με τα N_{nl} να είναι οι σταθερές κανονικοποίησης.

Επειδή $\rho = kr = r\sqrt{-2m_e E_n / \hbar^2} = r(m_e e^2 / \hbar^2 n)$, θα υπάρχει περαιτέρω εξάρτηση από τον κβαντικό αριθμό n μέσω του ρ .

Εάν εισάγουμε την ακτίνα Bohr $a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$, η οποία καθορίζει τις διαστάσεις του ατόμου αλλά και την κλίμακα του ενεργειακού φάσματος, τότε η ενέργεια γίνεται

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} \text{ και η παράμετρος } k \text{ θα είναι: } k = \frac{1}{na_0}.$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις τώρα θα γράφονται:

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \cdot e^{-r/a_0} \left(\frac{r}{na_0} \right)^l \cdot L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right) \quad (2.4.24)$$

Η συνθήκη κανονικοποίησης: $\int_0^\infty |R_{nl}|^2 r^2 dr = 1$ δίνει τους συντελεστές N_{nl} :

$$N_{nl} = \frac{2^{l+1} a_0^{-3/2} [(n-l-1)!]^{1/2}}{n^2 [(n+1)!]^{3/2}} \quad (2.4.25)$$

Έτσι, με τη βοήθεια της σχέσης (2.4.24) είμαστε πλέον σε θέση να γράψουμε τις πρώτες ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις για το άτομο του Υδρογόνου:

Για $n = 1$: **Βασική Στάθμη**



τότε $l = 0$

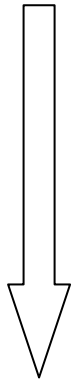
$$\begin{aligned}
 : R_{10}(r) &= N_{10} \cdot e^{-r/a_0} \cdot L_0^1\left(\frac{2r}{a_0}\right) = \\
 &= 2 \cdot a_0^{-3/2} \cdot \frac{1}{2^{3/2}} \cdot e^{-r/a_0} \cdot 1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow R_{10}(r) &= 2^{-1/2} a_0^{-3/2} e^{-r/a_0} \quad (2.4.26)
 \end{aligned}$$

Για $n = 2$: **1^η Διεγερμένη Στάθμη**



τότε $l = 0$

$$\begin{aligned}
 : R_{20}(r) &= N_{20} \cdot e^{-r/2a_0} \cdot L_1^1\left(\frac{r}{a_0}\right) = \\
 &= \frac{2 a_0^{-3/2}}{4} \frac{e^{-r/2a_0}}{(3!)^{3/2}} \cdot e^{-r/2a_0} \left(4 - 2 \frac{r}{a_0}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow R_{20}(r) &= \frac{a_0^{-3/2}}{12\sqrt{6}} e^{-r/2a_0} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \quad (2.4.27)
 \end{aligned}$$



ή $l = 1$

$$\begin{aligned}
 : R_{21}(r) &= N_{21} \cdot e^{-r/2a_0} \cdot \frac{r}{2a_0} \cdot L_0^3\left(\frac{r}{a_0}\right) = \\
 &= \frac{4a_0^{-3/2}}{4} \cdot \frac{e^{-r/2a_0}}{(3!)^{3/2}} \cdot \frac{r}{2a_0} \cdot 6 \Rightarrow \\
 \Rightarrow R_{21}(r) &= \frac{a_0^{-5/2}}{\sqrt{6}} r e^{-r/2a_0} \quad (2.4.28)
 \end{aligned}$$

Για την εύρεση των πρώτων ακτινικών ιδιοσυναρτήσεων χρησιμοποιήθηκαν τα αντίστοιχα πρώτα πολυώνυμα Laguerre για τα οποία γνωρίζουμε:

$$L_0^1(x) = 1, \quad L_1^1(x) = 4 - 2x \quad \text{και} \quad L_0^3(x) = 6.$$

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι πλήρεις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου περιλαμβάνουν προφανώς και γωνιακή εξάρτηση μέσω των σφαιρικών αρμονικών $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, δηλαδή ισχύει:

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.4.29)$$

όπου:

n , ο κύριος κβαντικός αριθμός που καθορίζει την ενέργεια της κάθε ιδιοκατάστασης

l , ο κβαντικός αριθμός της τροχιακής στροφορμής (ή δευτερεύων κβαντικός αριθμός)

m , ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός.

Έτσι, οι τριάδες τιμών των κβαντικών αριθμών αντιστοιχούν στα ατομικά τροχιακά:

$$\left. \begin{array}{ll} \diamond n = 1, l = 0, m = 0 : & \text{Τροχιακό } 1s \\ \diamond n = 2, l = 0, m = 0 : & \text{» } 2s \\ \diamond n = 2, l = 1, m = -1 : & \text{» } 2p_y \\ & n = 2, l = 1, m = 0 : \text{ » } 2p_z \\ & n = 2, l = 1, m = 1 : \text{ » } 2p_x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(βασική στάθμη)} \\ \\ \\ \text{(1}^\text{η} \text{ διεγερμένη)} \end{array}$$

Η ακτινική διαφορική εξίσωση του Schrödinger από την οποία προέκυψαν οι ακτινικές κυματοσυναρτήσεις $R_{nl}(r)$ περιλαμβάνει τον σύνθετο κινητικό όρο

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \cdot R_{El}(r)) = \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{d^2 R}{dr^2}$$

Για έναν τέτοιο πολύπλοκο κινητικό όρο η μεθοδολογία της SUSY δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Αντίθετα, είναι απαραίτητο η διαφορική εξίσωση του Schrödinger να έρθει στη γενική μορφή : $-\psi'' + V \psi = 0$,

$$\text{ώστε η Hamiltonian } \hat{H}_1 \text{ να είναι: } \hat{H}_1 = -\frac{d^2}{dr^2} + V_1(r) \quad (2.4.30)$$

Η απλοποίηση αυτή έχει ήδη επιτευχθεί κατά τη διάρκεια της μεθοδολογίας επίλυσης της διαφορικής μου εξίσωσης που παρατίθεται στα προηγούμενα και μάλιστα η εξίσωση (2.4.6) βρίσκεται στη γενική μορφή (2.4.30) έχοντας θέσει στην

$$(2.4.3) : \quad u_{kl}(r) = \frac{R_{kl}(r)}{r} \quad \text{και επιπλέον}$$

$$\rho = kr \quad , \quad k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{και} \quad \lambda^2 = \frac{2m_e e^2}{\hbar^2 k} \quad .$$

Συνεπώς για να γίνει δυνατή η εφαρμογή της μεθοδολογίας της SYSY , θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν όχι οι ακτινικές μου λύσεις $R_{nl}(r)$ αλλά οι :

$$\psi_{nl}(r) = r \cdot R_{nl}(r) = N_{nl} \cdot e^{-r/na_0} \cdot \frac{1}{(na_0)^l} \cdot r^{l+1} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right) \quad (2.4.31)$$

Με αυτά τα δεδομένα θα έχω :

$$\hbar = 2m_e = 1$$

$$\psi_{10}(r) = 2^{-1/2} \cdot a_0^{-3/2} \cdot e^{-r/a_0} \cdot r \quad \Rightarrow \quad E_1 = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -\frac{e^4}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{20}(r) &= \frac{a_0^{-3/2}}{12\sqrt{6}} \cdot e^{-r/2a_0} \cdot r \cdot \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \\ \psi_{21}(r) &= \frac{a_0^{-5/2}}{\sqrt{6}} \cdot r^2 \cdot e^{-r/2a_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_2 = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2} = -\frac{e^4}{16}$$

$\hbar = 2m_e = 1$

Ενώ για $\nu = n - l - 1$, οι κυματοσυναρτήσεις γράφονται:

$$\psi_{\nu l}(r) = N_{\nu l} \cdot e^{-r/(v+l+1)a_0} \cdot \frac{1}{((v+l+1)a_0)^l} \cdot r^{l+1} \cdot L_{\nu}^{2l+1} \left(\frac{2r}{(v+l+1)a_0} \right)$$

$$\text{με } N_{\nu l} = \frac{2^{l+1} a_0^{-3/2}}{(v+l+1)^2} \cdot \frac{(v!)^{1/2}}{((v+l+2)!)^{3/2}}$$

και $\nu = 0, 1, \dots$

(2.4.32)

Απαραίτητο επίσης βήμα της μεθοδολογίας μου είναι να μπορώ να θεωρήσω την ενέργεια της βασικής στάθμης ως μηδενική. Συνεπώς μετατοπίζω το ενεργειακό φάσμα μου κατά έναν παράγοντα $\frac{e^4}{4}$ ώστε $E'_1 = 0$.

Το ενεργειακό φάσμα για το άτομο του Υδρογόνου λαμβάνει τη μορφή:

$$E_n^{(1)} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{e^4}{4n^2} , \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad \text{ή (για } n = v + l + 1)$$

$$E_{\nu}^{(1)} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 (v+l+1)^2} = -\frac{e^4}{4(v+l+1)^2} , \text{ με } \nu = 0, 1, \dots \quad (2.4.33)$$

Μετατοπίζω τη βασική στάθμη ώστε να αντιστοιχεί σε μηδενική ενέργεια και άρα:

$$E_n^{(1)'} = -\frac{e^4}{4n^2} + \frac{e^4}{4} , \text{ με } n = 1, 2, \dots \quad \text{ή}$$

$$E_{\nu}^{(1)'} = -\frac{e^4}{4(v+l+1)^2} + \frac{e^4}{4(l+1)^2} , \text{ με } \nu = 0, 1, \dots \quad (2.4.34)$$

Το δυναμικό $V_1(\rho)$ από το οποίο ξεκινάμε (Δυναμικό ατόμου Υδρογόνου) (δες σχέση (2.4.6)), είναι:

$$V_1(\rho) = \frac{\lambda^2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - 1 = \frac{2m_e e^2}{\hbar^2 k \rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - 1 \xrightarrow{\rho = kr} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1(r) = \frac{2m_e e^2}{\hbar^2 k^2 r} - \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} - 1 = \frac{e^2}{k^2 r} - \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} - 1 = -\frac{e^2}{E r} + \frac{l(l+1)}{E r^2} - 1 \Rightarrow$$

$$2m_e = \hbar = 1$$

$$V_1(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} - E$$

Και άρα το μετατοπισμένο ως προς την ενέργεια της βασικής στάθμης δυναμικό είναι:

$$V_1'(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} - E + \frac{e^4}{4(l+1)^2} \quad (2.4.35)$$

Έχοντας πια υπόψη μας τις σχέσεις (2.4.32) και (2.4.34), μπορούμε να ξεκινήσουμε να εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία της SUSY.

Πρώτο βήμα θα είναι ο υπολογισμός του Υπερδυναμικού $W(r)$:

Ξεκινώντας από την βασική κυματοσυνάρτηση ψ_{0l} την οποία παίρνουμε από την (2.4.32) για $\nu = 0$, θα έχω:

$$\psi_{0l} = N_{0l} \cdot e^{-r/(l+1)a_0} \cdot \frac{1}{[(l+1)a_0]^l} \cdot r^{l+1} \cdot L_0^{2l+1} \left(\frac{2r}{(l+1)a_0} \right)$$

$$\text{με } N_{0l} = \frac{2^{l+1}}{a_0^{3/2}(l+1)^2} \cdot \frac{1}{((l+2)!)^{3/2}} \quad (2.4.36)$$

Αντικαθιστώντας $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{2}{e^2}$ στην (2.4.36) παίρνουμε:

$$\psi_{0l} = N_{0l} \cdot e^{-e^2 r/2(l+1)} \cdot \left(\frac{e^2}{2(l+1)} \right)^l \cdot r^{l+1} \quad (2.4.37)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι: $L_n^k(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (n+k)!}{(n-j)!(k+j)!j!} x^j$
(2.4.38)

η οποία για $n = 0$ και $k = 2l + 1$ δίνει: $L_0^{2l+1}(x) = \frac{(-1)^0 (2l+1)!}{0!(2l+1)!0!} x^0 = 1$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράγωγο της βασικής κυματοσυνάρτησης:

$$\begin{aligned}
 \psi'_{0l} &= N_{0l} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} \right)^l \left(e^{-e^2 r/2(l+1)} \cdot r^{l+1} \right)' = \\
 &= N_{0l} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} \right)^l \cdot \left[e^{-e^2 r/2(l+1)} \cdot \left(-\frac{e^2}{2(l+1)} \right) r^{l+1} + e^{-e^2 r/2(l+1)} (l+1)r^l \right] \\
 \Rightarrow \psi'_{0l} &= N_{0l} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} \right)^l e^{-e^2 r/2(l+1)} \cdot \left[-\frac{e^2}{2(l+1)} \cdot r^{l+1} + (l+1)r^l \right]
 \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Έτσι, το Υπερδυναμικό $W(r)$ θα είναι λόγω των (2.4.37) και (2.4.39) :

$$\begin{aligned}
 W(r) &= -\frac{\psi'_{0l}}{\psi_{0l}} = \frac{-\left(-\frac{e^2}{2(l+1)} r^{l+1} + (l+1)r^l \right)}{r^{l+1}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow W(r) &= \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r}
 \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Για την εύρεση του συναφούς δυναμικού $V_2(r)$ δουλεύουμε κατά τα γνωστά :

- $W'(r) = \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r} \right)' = -(l+1) \left(-\frac{1}{r^2} \right) = \frac{l+1}{r^2}$
- $W^2(r) = \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r} \right)^2 = \frac{e^4}{4(l+1)^2} + \frac{(l+1)^2}{r^2} - 2 \frac{e^2}{2(l+1)} \frac{(l+1)}{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow W^2(r) = \frac{e^4}{4(l+1)^2} + \frac{(l+1)^2}{r^2} - \frac{e^2}{r} \tag{2.4.41}$$

και $V_2(r) = W'(r) + W^2(r)$, οπότε :

$$\begin{aligned}
 V_2(r) &= \frac{(l+1)}{r^2} + \frac{e^4}{4(l+1)^2} + \frac{(l+1)^2}{r^2} - \frac{e^2}{r} = \frac{(l+1)^2 + (l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{4(l+1)^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow V_2(r) &= \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{4(l+1)^2}
 \end{aligned} \tag{2.4.42}$$

Το συναφές δυναμικό $V_2(r)$ στο οποίο καταλήξαμε, δεν παρουσιάζει, για ακόμα μία φορά οτιδήποτε το εξωτικό ή το δυσεπίλυτο. Συγκεκριμένα, εκφράζει κι αυτό, ένα δέσμιο σύστημα, μετατοπισμένο σε σχέση με το άτομο του υδρογόνου κατά την ενέργεια της βασικής στάθμης, παρουσιάζοντας φυγοκεντρικό όρο $\left(\frac{(l+1)(l+2)}{r^2} \right)$ και όρο Coulomb $\left(-\frac{e^2}{r} \right)$.

Παρόλα αυτά, η μεθοδολογία της SUSY παρέχει έναν ενοποιημένο τρόπο αντιμετώπισης δυναμικών, στα οποία, εξαιτίας της ύπαρξης του Υπερδυναμικού $W(r)$ εξηγείται η παρουσία εκφυλισμού στα αντίστοιχα ενεργειακά φάσματα.

Χάριν πληρότητας θα παραθέσουμε τον υπολογισμό της βασικής κυματοσυνάρτησης $\psi_{0l}^{(2)}$ του δυναμικού $V_2(r)$ ξεκινώντας από την πρώτη διεγερμένη $\psi_{1l}^{(1)}$ του δυναμικού $V_1(r)$, όπου έχουμε αφήσει τον κβαντικό αριθμό της τροχιακής στροφορμής ελεύθερο να παίρνει τις επιτρεπόμενες τιμές του.

$$\left. \begin{aligned} \text{Κατά τα γνωστά, θα είναι: } & \psi_{0l}^{(2)}(r) = \left(E_1^{(1)}\right)^{-1/2} \cdot \hat{A}\psi_{1l}^{(1)}(r) \\ \text{με } \hat{A} = \frac{d}{dr} + W(r) = & \frac{d}{dr} + \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

και από τις (2.4.32) και (2.4.34) :

$$\psi_{1l}^{(1)}(r) = N_{1l} e^{-r/(l+2)a_0} \cdot \frac{1}{(l+2)^l a_0^l} \cdot r^{l+1} \cdot L_1^{2l+1} \left(\frac{2r}{(l+2)a_0} \right) \quad (2.4.43)$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε ότι για τα προσαρτημένα πολυώνυμα Laguerre ισχύει η σχέση (2.4.38) και άρα :

$$\begin{aligned} L_1^{2l+1}(x) &= \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j (1+2l+1)!}{(1-j)! (2l+1+j)! j!} \cdot x^j = \frac{(-1)^0 (2l+2)!}{1! (2l+1)! 0!} \cdot x^0 + \frac{(-1)^1 (2l+2)!}{0! (2l+2)! 1!} \cdot x^1 \\ &\Rightarrow L_1^{2l+1}(x) = (2l+2) - x \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

$$\text{με : } x = \frac{2r}{(l+2)a_0} = \frac{re^2}{(l+2)}, \text{ έχοντας χρησιμοποιήσει ότι } a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{2}{e^2}.$$

$$\text{Έτσι, } L_1^{2l+1} \left(\frac{re^2}{l+2} \right) = (2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \quad (2.4.45)$$

Οπότε τελικά η (2.1.35) γίνεται:

$$\psi_{1l}^{(1)}(r) = N_{1l} e^{-re^2/2(l+2)} \cdot \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l \cdot r^{l+1} \cdot \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \quad (2.4.46)$$

Στη συνέχεια δρούμε με τον τελεστή \hat{A} στην $\psi_{1l}^{(1)}(r)$ με σκοπό να κατασκευάσουμε την $\psi_{0l}^{(2)}(r)$ εφαρμόζοντας τις σχέσεις (**).

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{A}\psi_{1l}^{(1)} &= \\ &= \left(\frac{d}{dr} + \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r} \right) \left[N_{1l} e^{-re^2/2(l+2)} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l r^{l+1} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

και:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dr} \psi_{1l}^{(1)} &= N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l \frac{d}{dr} \left(e^{-re^2/2(l+2)} r^{l+1} \left((2l+2) - \frac{re^2}{(l+2)} \right) \right) \\ &= N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l \left[e^{-re^2/2(l+2)} \left(-\frac{e^2}{2(l+2)} \right) \cdot r^{l+1} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-re^2/2(l+2)} (l+1) \cdot r^l \cdot \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-re^2/2(l+2)} \cdot r^{l+1} \left(-\frac{e^2}{l+2} \right) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \psi_{1l}^{(1)} &= N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} \left[-\frac{e^2}{2(l+2)} r^{l+1} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (l+1)r^l \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) - r^{l+1} \cdot \frac{e^2}{l+2} \right] \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left[\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r} \right] \cdot \psi_{1l}^{(1)} &= \\ &= \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{l+1}{r} \right) \left[N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} r^{l+1} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \right] = \\ &= \left[\left(\frac{e^2}{2} \right)^{l+1} \frac{1}{(l+1)(l+2)^l} r^{l+1} - \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l (l+1)r^l \right] \cdot \\ &\quad \cdot N_{1l} \cdot e^{-re^2/2(l+2)} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\psi_{1l}^{(1)} &= N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} \left[-\frac{e^2}{2(l+2)} r^{l+1} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) + \right. \\
&+ (l+1)r^l \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) - r^{l+1} \cdot \frac{e^2}{l+2} \left. \right] + N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} \cdot \\
&\cdot \left[\frac{e^2}{2(l+1)} r^{l+1} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) - (l+1)r^l \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \right] = \\
&= N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \cdot \\
&\cdot \left[-\frac{e^2}{2(l+2)} r^{l+1} + \cancel{(l+1)r^l} - r^{l+1} \frac{e^2}{(l+2)} + \frac{e^2}{2(l+1)} r^{l+1} - \cancel{(l+1)r^l} \right] = \\
&= N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) r^{l+1} \left(-\frac{e^2}{2(l+2)} - \frac{e^2}{(l+2)} + \right. \\
&+ \left. \frac{e^2}{2(l+1)} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{A}\psi_{1l}^{(1)} &= N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) \cdot r^{l+1} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{3}{2} \frac{e^2}{(l+2)} \right) \tag{2.4.50}
\end{aligned}$$

Απομένει μόνο η κανονικοποίηση και θα έχουμε πάρει τη βασική κυματοσυνάρτηση της \hat{H}_2 (που αντιστοιχεί στο συναφές δυναμικό V_2).

Από τη σχέση (2.4.34) που δίνει το μετατοπισμένο ενεργειακό φάσμα για το Άτομο του Υδρογόνου θα έχουμε για $\nu = 1$, την ενέργεια της πρώτης διεγερμένης στάθμης:

$$\begin{aligned}
\left(E_1^{(1)} \right)^{-1/2} &= \left(-\frac{e^4}{4(l+2)^2} + \frac{e^4}{4(l+1)^2} \right)^{-1/2} = \\
&= \left(\frac{e^4}{4} \right)^{-1/2} \left(-\frac{1}{(l+2)^2} + \frac{1}{(l+1)^2} \right)^{-1/2} = \frac{2}{e^2} \left(\frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(l+2)^2} \right)^{-1/2} \tag{2.4.51}
\end{aligned}$$

Έτσι συνολικά εντέλει θα έχουμε:

$$\psi_{0l}^{(2)} = \frac{2}{e^2} \left(\frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(l+2)^2} \right)^{-1/2} \cdot N_{1l} \left(\frac{e^2}{2(l+2)} \right)^l e^{-re^2/2(l+2)} \cdot \left((2l+2) - \frac{re^2}{l+2} \right) r^{l+1} \left(\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{3}{2} \frac{e^2}{l+2} \right) \quad (2.4.52)$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, δηλαδή δρώντας με τον τελεστή \hat{A} στην δεύτερη διεγερμένη στάθμη της \hat{H}_1 υπολογίζουμε την κυματοσυνάρτηση της πρώτης διεγερμένης της \hat{H}_2 (του συναφούς δυναμικού), κοκ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Από την μέχρι τώρα μεθοδολογία που ακολουθήσαμε, μία σειρά από χρήσιμα και σημαντικά συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν, κυρίως σχετικά με τον μαθηματικό φορμαλισμό της μεθόδου και τις ιδιότητες των υπό συζήτηση αναλυτικά επιλύσιμων δυναμικών. Μία σύνδεση της φυσικής που κρύβεται πίσω από μια Υπερσυμμετρική θεωρία γνωστή από τη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων και τη δική μας μεθοδολογία, όπως θα δούμε αποτυγχάνει, αφενός γιατί τα προβλήματα με τα οποία ασχολούμαστε είναι καθαρά μποζονικά, αφετέρου γιατί οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη βασική κατάσταση στις οποίες καταλήγουμε προκειμένου η μεθοδολογία μας να δουλεύει δεν θα μπορούσαν να συνδεθούν με το φυσικό νόημα μιας μη σπασμένης ή σπασμένης θεωρίας όπως αυτή είναι γνωστή από τον κλάδο των Στοιχειωδών Σωματιδίων. Έτσι, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε ότι η μεθοδολογία που εδώ εφαρμόζουμε αποτελεί απλώς μια έμπνευση από τις ιδέες της Υπερσυμμετρίας σε μεθόδους αναλυτικής επίλυσης δυναμικών και όχι μια 1-1 αντιστοιχία με αυτές.

Παρόλο που η δουλειά που παρουσιάζεται εδώ δεν είναι πρωτότυπη, καθώς τα αποτελέσματά μας μπορούν να αναζητηθούν στη διεθνή βιβλιογραφία, αποτελεί μια προσπάθεια συγκέντρωσης όλης της αναλυτικής δουλειάς που απαιτείται για να εξαχθούν τα αποτελέσματα αυτά και ταυτόχρονα αναδεικνύει τις προοπτικές που ανοίγονται από την εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής και τις οποίες σύντομα θα συζητήσουμε στη δεύτερη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου.

3.1 Συμπεράσματα

Η αναλυτική δουλειά που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτελεί έναν κομψό και εναλλακτικό τρόπο να εξαχθούν οι (γνωστές) ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας, για μια σειρά από δημοφιλή, μονοδιάστατα αναλυτικά επιλύσιμα δυναμικά. Παρόλα αυτά, θα ήταν ίσως χρήσιμο να επιχειρήσουμε να συγκρίνουμε και όχι να αντιστοιχήσουμε τις διαφορετικές πτυχές μιας Υπερσυμμετρικής Θεωρίας που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, με αυτή καθαυτή τη Μεθοδολογία που εφαρμόσαμε στο κεφάλαιο 2, αλλά και να αναλύσουμε τους δρόμους που πιθανά αυτή να ανοίγει για μελλοντική έρευνα.

3.1.1 Οι Ιδέες της Υπερσυμμετρίας στην Μεθοδολογία της SUSY στην Κβαντική Μηχανική.

Μια από τις πρώτες έννοιες που θα ήταν χρήσιμο να καταφέρουμε να αποσαφηνίσουμε είναι η έννοια της μη σπασμένης (unbroken) και σπασμένης (broken) SUSY και το πώς η διάκριση αυτή μεταφράζεται στη μεθοδολογία μας, την οποία και εφαρμόσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για μια σειρά από γνωστά και ακριβώς επιλύσιμα δυναμικά.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1, στα πλαίσια της Θεωρίας της Υπερσυμμετρίας και με στόχο μια ενοποίηση των στοιχειωδών αλληλεπιδράσεων στις υψηλές ενέργειες, αλλά και την κατανόηση μιας σειράς παρατηρήσεων στο Σύμπαν, για κάθε σωματίο του Καθιερωμένου Προτύπου προτείνεται το συναφές του υπερσυμμετρικό συναφές (partner) σωματίο με τα εκάστοτε συναφή σωματίδια να διαθέτουν την ίδια ενέργεια (και άρα την ίδια μάζα), σε μία μη σπασμένη θεωρία. Αντίθετα, σε μια σπασμένη θεωρία, τα σωματίια (μποζόνια- φερμιόνια) θα επιτρέπεται να έχουν διαφορετικές ενέργειες και άρα διαφορετικές μάζες.

Στα πλαίσια της μεθοδολογίας που εφαρμόσαμε, κάθε σωματίο που κινείται σε ένα πεδίο δυνάμεων V_1 (άρα χαρακτηρίζεται από μια Hamiltonian \hat{H}_1) θα αποτελεί ιδιοκατάσταση αυτής και μέσω των τελεστών \hat{A} και \hat{A}^+ θα επικοινωνεί (αντιστοιχίζεται) με το «συναφές» του το οποίο θα αποτελεί ιδιοκατάσταση της Hamiltonian \hat{H}_2 και άρα θα κινείται στο πεδίο δυνάμεων V_2 . Στη μεθοδολογία μας όμως, τα προβλήματα είναι καθαρά μποζονικά, και καμία σύνδεση με φερμιόνια ή φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας δεν μπορεί να γίνει. Έτσι η μέθοδος απλά αποτελεί μια μέθοδο σύνδεσης δυο «συναφών» Χαμιλτονιανών στις οποίες όμως δε μπορεί να αποδοθεί το φυσικό περιεχόμενο μιας Υπερσυμμετρικής Θεωρίας όπως είναι γνωστό από τα Στοιχειώδη Σωματίια.

Εάν τα δυναμικά αυτά εμφανίζουν την ιδιότητα της αναλλοιότητας μορφής, δηλαδή χαρακτηρίζονται από παραμέτρους που υπακούουν π.χ. σε σχέσεις μετάθεσης μεταξύ τους, αυτό σημαίνει ότι τα σωματίια και τα «συναφή» τους υπακούουν ουσιαστικά στα ίδια πεδία δυνάμεων.

Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση των δυναμικών που αναλυτικά εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και για τα οποία όπως είδαμε υπάρχουν συγκεκριμένες σχέσεις που συνδέουν τις ενέργειες και τις ιδιοκαταστάσεις των δύο Χαμιλτονιανών, δηλαδή:

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad , \quad E_0^{(1)} = 0$$

$$\psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} \right)^{-1/2} \cdot \hat{A} \psi_{n+1}^{(1)} \quad \text{και}$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \left(E_n^{(2)}\right)^{-1/2} \cdot \hat{A}^+ \psi_n^{(2)}$$

και ανάμεσα στα φάσματα των \hat{H}_1 και \hat{H}_2 παρατηρείται εκφυλισμός.

Σχετικά με το δυναμικό του απειρόβαθου πηγαδιού, αν και η σχέση μετάθεσης δεν είναι μαθηματικά προφανής, το συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί αν κανείς παρατηρήσει τη γραφική παράσταση του συναφούς δυναμικού το οποίο όντως προσομοιάζει σε ένα (επαναλαμβανόμενο καθώς η συνάρτηση είναι περιοδική) πηγάδι δυναμικού..

Ο λόγος του εκφυλισμού αυτού είναι, όπως είδαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 1, ο ορισμός τριών τελεστών \hat{H} , \hat{Q} και \hat{Q}^+ οι οποίοι αποτελούν μέρος της κλειστής Άλγεβρας της SUSY και οι οποίοι υπακούουν σε σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης, με:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}^+ = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } [\hat{H}, \hat{Q}] = [\hat{H}, \hat{Q}^+] = 0.$$

Συνοπτικά, οι τελεστές \hat{Q} και \hat{Q}^+ αποτελούν αντίστοιχα, μια απλοποίηση της γενικής περίπτωσης τελεστών Q_a και \bar{Q}^a οι οποίοι μετατρέπουν φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας σε μποζονικούς και αντίστροφα. Στη περίπτωσή όμως μπορούν να ειπωθούν απλώς σαν τελεστές που έχουν την ιδιότητα να συνδέουν τις δύο Hamiltonians \hat{H}_1 και \hat{H}_2 .

Έτσι, οι σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των τελεστών \hat{H} , \hat{Q} και \hat{H} , \hat{Q}^+ δηλώνουν ότι υπάρχουν ιδιοτιμές της ενέργειας που είναι ταυτόχρονα ιδιοτιμές των δύο «συναφών» Χαμιλτονιανών και άρα στα δύο φάσματά τους παρατηρείται εκφυλισμός.

Ο αναγνώστης σίγουρα θα έχει παρατηρήσει την επιλογή $E_0^{(1)} = 0$ για την ενέργεια της βασικής στάθμης της \hat{H}_1 , την οποία ως εδώ δεν έχουμε ιδιαίτερα κουβεντιάσει.

Αποδεικνύεται ότι, δανειζόμενοι την απαίτηση $\hat{Q}|0\rangle = \hat{Q}^+|0\rangle = 0$, για μια μη σπασμένη (unbroken) SUSY, αυτό για τη μεθοδολογία μας σημαίνει

$\hat{A}\psi_0^{(1)}(x) = 0$ δηλαδή μια ισοδύναμη απαίτηση η εξίσωση Schrödinger για την \hat{H}_1 να έχει λύση την κανονικοποιήσιμη βασική κατάσταση $\psi_0^{(1)}(x)$ με $E_0^{(1)} = 0$.

Δηλαδή θα ισχύει:

$$\hat{H}_1 \psi_0^{(1)}(x) = \hat{A}^+ \left(\hat{A} \psi_0^{(1)}(x) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0^{(1)} \psi_0^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow E_0^{(1)} = 0 .$$

Κάτι τέτοιο, επιπλέον θα σημαίνει ότι δεν υπάρχει SUSY partner της βασικής κατάστασης της \hat{H}_1 .

Έτσι, η απαίτηση $\hat{Q}|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A}\psi_0^{(1)}(x) & 0 \end{bmatrix} = 0$ οδηγεί σε μηδενική ενέργεια

βασικής στάθμης για την \hat{H}_1 και άρα η απαίτηση μηδενικής ενέργειας για τη βασική κατάσταση της Hamiltonian της οποίας η βασική κατάσταση είναι γνωστή και κανονικοποιήσιμη, είναι με τη σειρά της ισοδύναμη με την απαίτηση

$\hat{Q}|0\rangle = 0$. Ομοίως, η απαίτηση $\hat{Q}^+|0\rangle = 0$ που επίσης ισχύει για μια μη σπασμένη SUSY, θα οδηγεί στην απαίτηση η εξίσωση Schrödinger για την \hat{H}_2 να έχει λύση την κανονικοποιήσιμη βασική κατάσταση $\psi_0^{(2)}(x)$ με $E_0^{(2)} = 0$

Παρόλα αυτά, η έλλειψη πειραματικής ανίχνευσης των προβλεπόμενων από την Υπερσυμμετρία συναφών σωματιδίων ίδιας ενέργειας, φέρνει στο προσκήνιο την ανάγκη εισαγωγής μιας αυθόρμητα σπασμένης θεωρίας στη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων. Τι θα σήμαινε όμως κάτι τέτοιο για τη μεθοδολογία μας?

Είδαμε ως εδώ (και αυτή τη μεθοδολογία εφαρμόσαμε σε όλα τα γνωστά δυναμικά του κεφαλαίου 2) ότι εάν η $\psi_0^{(1)}(x)$ της \hat{H}_1 είναι γνωστή και αντιστοιχεί σε $E_0^{(1)} = 0$ τότε μπορούμε να παραμετροποιήσουμε την \hat{H}_1 , να κατασκευάσουμε ένα Υπερδυναμικό $W(x)$ και τελικά να οδηγηθούμε σε μία συναφή Hamiltonian \hat{H}_2 . Ας θεωρήσουμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα, και έστω ότι με κάποιο τρόπο μας είναι γνωστό το Υπερδυναμικό $W(x)$.

Τότε εμφανίζονται για εμάς δύο περιπτώσεις, η βασική κυματοσυνάρτηση $\psi_0(x)$ από την οποία θα κατασκευάσουμε όλη μας τη θεωρία, είτε να είναι της \hat{H}_1 είτε να είναι της \hat{H}_2 .

Εάν πρόκειται για τη βασική κατάσταση της \hat{H}_1 , τότε θα δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{A}\psi_0^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\psi_0^{(1)}(x)}{dx} + W(x)\psi_0^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\psi_0^{(1)}(x)} \frac{d\psi_0^{(1)}(x)}{dx} &= -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(x) \Rightarrow \frac{d \ln \psi_0^{(1)}(x)}{dx} = -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_0^{(1)}(x) &= N \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Αντίστοιχα, εάν πρόκειται για τη βασική κατάσταση της \hat{H}_2 , τότε θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ \psi_0^{(2)}(x) = 0 &\Rightarrow \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) \psi_0^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\psi_0^{(2)}(x)}{dx} &= W(x) \psi_0^{(2)}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\psi_0^{(2)}(x)} \frac{d\psi_0^{(2)}(x)}{dx} &= \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(x) \Rightarrow \frac{d \ln \psi_0^{(2)}(x)}{dx} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_0^{(2)}(x) &= N \cdot \exp\left(+\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Κατά σύμβαση, θα διαλέγουμε το W έτσι ώστε ανάμεσα στις \hat{H}_1 , \hat{H}_2 μόνο η \hat{H}_1 να έχει μια κανονικοποιήσιμη βασική στάθμη μηδενικής ενέργειας, κάτι που εξασφαλίζεται από την απαίτηση η $W(x)$ να είναι θετική για $x \rightarrow +\infty$ και αρνητική για $x \rightarrow -\infty$.

Το επιχείρημα για αυτή την επιλογή είναι ότι τότε και μόνο τότε θα ισχύει $\psi_0^{(1)} \rightarrow 0$ αν $x \rightarrow +\infty$ και $\psi_0^{(1)} \rightarrow 0$ αν $x \rightarrow -\infty$ (από 3.1.1), δηλαδή για την \hat{H}_1 θα ορίζεται κανονικοποιήσιμη ιδιοκατάσταση βασικής στάθμης μηδενικής ενέργειας.

Εάν αυτή η απαίτηση εξυπηρετείται, τότε η μεθοδολογία μας δουλεύει και η SUSY θα είναι μη σπασμένη.

Εάν δεν υπάρχουν κανονικοποιήσιμες λύσεις της μορφής (3.1.1) για την \hat{H}_1 , τότε η \hat{H}_1 δεν έχει $E_0^{(1)} = 0$ και η SUSY είναι σπασμένη, κάτι που για μας σημαίνει ότι η μέθοδος δεν δουλεύει.

Συγκεκριμένα, μη μηδενική ενέργεια της βασικής στάθμης της \hat{H}_1 θα σήμαινε για τη μέθοδό μας, ότι πλέον θα είχαμε να αντιμετωπίσουμε ένα «μετατοπισμένο» δυναμικό $V - E_0^{(1)}$, το οποίο και θα οδηγούσε στον ορισμό μιας νέας συνάρτησης Υπερδυναμικού W με έναν επιπλέον γραμμικό όρο. Έτσι, πιθανότατα κάτι τέτοιο θα οδηγούσε τη συνάρτηση του Υπερδυναμικού στο να μην πληρεί πια την προϋπόθεση να έχει αντίθετο πρόσημο στα όριά της, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει καμία βασική κατάσταση $\psi_0^{1,2}(x)$ (για καμία από τις \hat{H}_1 , \hat{H}_2) η οποία να είναι κανονικοποιήσιμη και άρα να εμφανίζει νόημα κυματοσυνάρτησης.

Για το σύστημά μας, μπορούμε να ορίσουμε γενικά τη βασική στάθμη σαν ένα 2x2 άνυσμα στήλη, δηλαδή:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ \psi_0^{(2)}(x) \end{pmatrix}$$

Όπως είδαμε, μη σπασμένη SUSY σημαίνει $\hat{Q}|0\rangle = \hat{Q}^+|0\rangle = 0|0\rangle$.

Αυτόματα, από τη σχέση $\{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} = \hat{H}$ τότε προκύπτει μηδενική ενέργεια για τη βασική κατάσταση. Για όλα τα παραδείγματα που συζητήσαμε σε αυτή την εργασία, η ενέργεια της βασικής στάθμης θεωρήθηκε εξαρχής 0 και άρα η βασική κατάσταση της matrix Hamiltonian γράφεται:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

καθώς για τη βασική της \hat{H}_1 δε υπάρχει partner ιδιοκατάσταση της \hat{H}_2 .

Η $\psi_0^{(1)}(x)$ δίνεται από τη σχέση (3.1.1), ενώ είναι σαφές ότι σε όλες τις περιπτώσεις συζητήσαμε μια μη σπασμένη (unbroken) SUSY.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει μια συζήτηση που αφορά στη μορφή του Υπερδυναμικού $W(x)$ η οποία όπως φαίνεται υπαγορεύεται από την απαίτηση το $W(x)$ να έχει θετικό πρόσημο για $x \rightarrow +\infty$ και αρνητικό για $x \rightarrow -\infty$ καθώς και η μορφή του για τις περιπτώσεις τις οποίες εξετάσαμε.

Έτσι, εάν θεωρήσουμε Υπερδυναμικό της μορφής $W(x) = gx^n$ με n περιττό και $g > 0$ (μια επιλογή $g < 0$ παραμένει αποδεκτή γιατί τότε θα μπορούμε να θεωρούμε $W(x) = -gx^n$) τότε παίρνουμε πάντα μια κανονικοποιήσιμη βασική κυματοσυνάρτηση για την \hat{H}_1 καθώς θα πληρείται η απαίτηση (3.1.3).

Αντίθετα, εάν n άρτιο και g αυθαίρετο, τότε τα V_1 και V_2 θα έχουν εκφυλισμένες και θετικές ενέργειες βασικής στάθμης ($E_0^{(1)} = E_0^{(2)} > 0$) και ούτε ο \hat{Q} ούτε ο \hat{Q}^+ θα μπορούν να μηδενίσουν την $|0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ \psi_0^{(2)}(x) \end{pmatrix}$.

Για μη μηδενική όμως ενέργεια βασικής στάθμης, η SUSY θα είναι αυθόρμητα σπασμένη. Στη περίπτωση αυτή, οι τελεστές \hat{A} και \hat{A}^+ δεν αλλάζουν πλέον τον αριθμό των κόμβων στα δυναμικά που συνδέουν (ο \hat{A} σε μια μη σπασμένη θεωρία καταστρέφει έναν ενώ ο \hat{A}^+ δημιουργεί) και υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση όλων των ιδιοκαταστάσεων των \hat{H}_1 και \hat{H}_2 , δηλαδή:

$$E_n^{(1)} = E_n^{(2)} \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_n^{(2)} = \left(E_n^{(1)}\right)^{-1/2} \hat{A} \psi_n^{(1)} \text{ και}$$

$$\psi_n^{(1)} = \left(E_n^{(2)}\right)^{-1/2} \hat{A}^+ \psi_n^{(2)} .$$

Συγκεντρώνοντας τη μορφή του $W(x)$ στην οποία καταλήξαμε σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχουμε:

$$\text{Για το απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού: } W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{Για τον απλό μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή: } W(x) = \frac{1}{2} \omega x$$

$$\text{Για το δυναμικό Morse: } W(r) = \frac{\lambda b}{2} - g \lambda e^{-\lambda(r-r_0)} \text{ και}$$

$$\text{Για το ακτινικό πρόβλημα του Ατόμου του Υδρογόνου: } W(r) = \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r}$$

Όλα τα δυναμικά αυτά φαίνεται να πληρούν τις παραπάνω προϋποθέσεις, αφού πρόκειται για περιττές συναρτήσεις. Έτσι τα αποτελέσματα που λάβαμε για όλα τα δυναμικά του κεφαλαίου 2 αποδεικνύεται ότι είναι συνεπή και με τις απαιτήσεις για τη συνάρτηση του Υπερδυναμικού όπως αυτή δίνεται στη γενική περίπτωση.

Συγκεντρώνοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι εάν το πρόσημο του $W(x)$ είναι αντίθετο για $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$ δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} W(x) > 0, x \rightarrow +\infty \\ W(x) < 0, x \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \text{ τότε η SUSY είναι μη σπασμένη}$$

ενώ στην αντίθετη περίπτωση η SUSY θα είναι σπασμένη.

3.1.2 Η Αναλλοιότητα Μορφής

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, εάν δύο δυναμικά $V_1(x)$ και $V_2(x)$ διαφέρουν μόνο ως προς κάποια ομάδα παραμέτρων που εμφανίζεται σε αυτά τότε λέμε ότι έχουν την ιδιότητα της αναλλοιότητας μορφής (Shape Invariance) η οποία εκφράζεται από τη σχέση:

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; f(a_1)) + R(a_1)$$

με a_1 : κάποια ομάδα παραμέτρων

$f(a_1)$: μια συνάρτηση αυτών

και $R(a_1)$: μια συνάρτηση ανεξάρτητη του x

Η ιδιότητα αυτή είναι ουσιαστικά μια ιδιότητα ολοκληρωσιμότητας και με βάση αυτή, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, η μεθοδολογία με τους τελεστές καταβίβασης και αναβίβασης \hat{a} , \hat{a}^+ του αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να γενικευθεί σε μια ολόκληρη κατηγορία δυναμικών (S.I.P) η οποία και περιλαμβάνει όλα τα γνωστά αναλυτικά επιλύσιμα δυναμικά.

Εξάλλου η μεθοδολογία της SUSY όπως είδαμε, μας εφοδιάζει με όλες τις δέσμιες ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας για τις συναφείς Χαμιλτονιανές και είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με τη μέθοδο του Schrödinger παραμετροποίησης μιας Χαμιλτονιανής, αν και περισσότερο κομψή και ελκυστική.

Το ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει είναι με ποιο τρόπο κατηγοριοποιούνται τα διάφορα δυναμικά ανάλογα με την αναλλοιότητα μορφής που παρουσιάζουν. Μια τέτοια συζήτηση είναι προφανώς ιδιαίτερα σημαντική καθώς από τη στιγμή που μια τέτοια κατηγοριοποίηση είναι διαθέσιμη, είμαστε σε θέση να ανακαλύψουμε νέα ακριβώς επιλύσιμα δυναμικά. Αν και το γενικό πρόβλημα παραμένει άλυτο, δύο κατηγορίες βρίσκονται στη διάθεσή μας:

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει δυναμικά των οποίων οι παράμετροι που συμμετέχουν σε αυτά, a_1 και $a_2 = f(a_1)$, σχετίζονται μέσω μίας σχέσης μετάθεσης δηλαδή $a_2 = a_1 + \lambda$. Είναι εντυπωσιακό πως, όλα τα δυναμικά με τα οποία ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αλλά και συνολικά όλα τα δημοφιλή και ακριβώς επιλύσιμα δυναμικά που γνωρίζουμε από την μη σχετικιστική Κβαντική Μηχανική, ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία.

Για παράδειγμα, για το Άτομο του Υδρογόνου ισχύει $a_1 = l$, $a_2 = l + 1$ ενώ ανάλογες σχέσεις ισχύουν για όλα τα δυναμικά με τα οποία ασχοληθήκαμε.

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει δυναμικά των οποίων οι παράμετροι έχουν σχέσεις διαβάθμισης (πολλαπλασιαστικές), δηλαδή $a_2 = \lambda \cdot a_1$ με $0 < \lambda < 1$.

Η κατηγορία αυτή των δυναμικών δεν έγινε γνωστή παρά μόνο μετά το 1993, πολλά από αυτά έχουν άπειρες δέσμιες ενέργειες και είναι γνωστά όχι σε κλειστή μορφή αλλά σε μορφή αναπτύγματος.

Στη παρούσα εργασία, δεν ασχοληθήκαμε αναλυτικά με κάποιο δυναμικό που να ανήκει σε αυτή τη κατηγορία, αναφέρονται όμως χάριν πληρότητας.

3.2 Προοπτικές της Μεθόδου

Αν και στη παρούσα εργασία περιορίστηκαμε στην εφαρμογή της μεθόδου σε δύο συναφείς (partner) Hamiltonians \hat{H}_1 και \hat{H}_2 και είδαμε πώς οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις τους σχετίζονται, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η γενίκευση αυτής της μεθόδου σε περισσότερες των δύο Χαμιλτονιανών.

Συγκεκριμένα είδαμε ότι εάν γνωρίζουμε τη βασική (μηδενικής ενέργειας) κυματοσυνάρτηση μιας Χαμιλτονιανής \hat{H}_1 μπορούμε να ορίσουμε το Υπερδυναμικό $W_1(x)$ και από αυτό τους τελεστές \hat{A}_1 και \hat{A}_1^+ , με τους οποίους παραμετροποιούμε την \hat{H}_1 ως $\hat{H}_1 = \hat{A}_1^+ \hat{A}_1$. Έτσι, η βασική κατάσταση της \hat{H}_2 προσδιορίζεται από την πρώτη διεγερμένη της \hat{H}_1 δρώντας με τον τελεστή \hat{A}_1 .

Εντελώς ανάλογα, είναι δυνατόν ξεκινώντας τώρα από τη βασική κατάσταση της \hat{H}_2 να ορίσουμε ένα Υπερδυναμικό $W_2(x)$ το οποίο θα μας οδηγήσει στους \hat{A}_2 και \hat{A}_2^+ με τους οποίους θα παραμετροποιήσουμε πλέον την \hat{H}_2 ως $\hat{H}_2 = \hat{A}_2^+ \hat{A}_2$. Έτσι η συναφής της \hat{H}_2 θα είναι μια νέα Hamiltonian \hat{H}_3 της οποίας η βασική κατάσταση θα προσδιοριστεί μέσω της δράσης του \hat{A}_2 στην πρώτη διεγερμένη της \hat{H}_2 , κ.ο.κ.

Κάθε νέα Hamiltonian που θα προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου, θα έχει μία λιγότερη δέσμια κατάσταση από την προηγούμενη.

Έτσι, εάν η \hat{H}_1 έχει k δέσμιες καταστάσεις, τότε θα μπορούμε να κατασκευάσουμε $(k - 1)$ Hamiltonians των οποίων τα ενεργειακά φάσματα και τις ιδιοσυναρτήσεις θα μπορούμε να προσδιορίσουμε.

Αντίστροφα, εάν γνωρίζουμε τις βασικές κυματοσυναρτήσεις όλων των $(k - 1)$ Hamiltonians , θα μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας του αρχικού προβλήματος, μέσω επαναλαμβανόμενων δράσεων του εκάστοτε τελεστή \hat{A}^+ .

Αυτό φυσικά είναι ένα ισχυρό εργαλείο, καθώς ακόμα κι αν δεν γνωρίζουμε το σύνολο των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων ενός προβλήματος με Hamiltonian \hat{H}_1 , μπορούμε να το κατασκευάσουμε με αρχική γνώση τις βασικές καταστάσεις των υπολοίπων Χαμιλτονιανών της Ιεραρχίας $\psi_0^{(2)}(x)$, $\psi_0^{(3)}(x), \dots, \psi_0^{(k-1)}(x)$ και άρα υπό μία έννοια, πρόκειται για μια μεθοδολογία που παράγει το ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που θα παρήγαγε η μεθοδολογία των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης του απλού αρμονικού ταλαντωτή εάν αυτοί μπορούσαν να οριστούν για οποιοδήποτε πρόβλημα! Φυσικά, το ερώτημα που μπαίνει εδώ είναι κατά πόσο είναι πρακτική μια μέθοδος επίλυσης δυναμικών εάν απαιτεί τη γνώση $(k - 1)$ βασικών καταστάσεων από $(k - 1)$ συναφή προβλήματα! Την απάντηση θα έρθει όπως θα δούμε να δώσει η ιδιότητα της αναλλοιότητας μορφής.

Συνοψίζοντας, εάν για μια Χαμιλτονιανή \hat{H}_1 η βασική στάθμη χαρακτηρίζεται από ενέργεια $E_0^{(1)}$ και κυματοσυνάρτηση $\psi_0^{(1)}(x)$, τότε για $\hbar = 2m = 1$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{H}_1 = \hat{A}_1^+ \hat{A}_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (3.2.1)$$

Είναι σαφές, ότι η σχέση (3.2.1) υπονοεί την μετατόπιση

$$\hat{H}_1' = \hat{H}_1 - E_0^{(1)} = \hat{A}_1^+ \hat{A}_1 \quad \text{με} \quad E_0^{(1)'} = E_0^{(1)} - E_0^{(1)} = 0 .$$

$$\text{με} \quad \hat{A}_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x) \quad , \quad \hat{A}_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x) \quad (3.2.2)$$

$$\text{και} \quad W_1(x) = -\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{d \ln \psi_0^{(1)}(x)}{dx} \quad (3.2.3)$$

Τότε η \hat{H}_2 είναι:

$$\hat{H}_2 = \hat{A}_1 \hat{A}_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (3.2.4)$$

$$\text{με:} \quad V_2(x) = W_1^2(x) + W_1'(x) + E_0^{(1)} \quad (3.2.5)$$

Επειδή όμως $V_1(x) = W_1^2(x) - W_1'(x) + E_0^{(1)}$, η (3.2.5) δίνει:

$$\begin{aligned} V_2(x) &= W_1^2(x) + 2W_1'(x) - W_1'(x) + E_0^{(1)} = \\ &= V_1(x) + 2W_1'(x) \Rightarrow V_2(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Έτσι, για τις ενέργειες και τις ιδιοσυναρτήσεις των \hat{H}_1 και \hat{H}_2 όπως είδαμε, έχουμε:

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad \text{και} \quad \psi_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} \hat{A}_1 \psi_{n+1}^{(1)} \quad (3.2.7)$$

Στη συνέχεια και εντελώς ανάλογα με τα προηγούμενα, ξεκινώντας από την \hat{H}_2 που έχει ενέργεια βασικής στάθμης $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ μπορούμε να δημιουργήσουμε μια τρίτη Hamiltonian \hat{H}_3 :

$$\begin{aligned} \text{Δεδομένου ότι } \hat{H}_2 &= \hat{A}_1 \hat{A}_1^+ + E_0^{(1)} \stackrel{\uparrow}{=} \hat{A}_2^+ \hat{A}_2 + E_1^{(1)} \quad (3.2.8) \\ & \quad (\text{αφού } \hat{H}_2 = \hat{A}_2^+ \hat{A}_2 + E_0^{(2)} = \hat{A}_2^+ \hat{A}_2 + E_1^{(1)}) \end{aligned}$$

$$\text{με } \hat{A}_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad \hat{A}_2^+ = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \quad (3.2.9)$$

$$\text{και: } W_2(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(2)}(x)}{dx} \quad (3.2.10)$$

για την \hat{H}_3 θα ισχύει:

$$\hat{H}_3 = \hat{A}_2 \hat{A}_2^+ + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (3.2.11)$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} V_3(x) &= W_2^2(x) + W_2'(x) + E_1^{(1)} = \\ &= W_2^2(x) + 2W_2'(x) - W_2'(x) + E_1^{(1)} = \\ &= V_2(x) + 2W_2'(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_3(x) = V_2(x) - 2 \frac{d^2 \ln \psi_0^{(2)}}{dx^2} \text{ και λόγω της (3.2.6) θα έχουμε συνολικά:} \end{aligned}$$

$$V_3(x) = V_2(x) - 2 \frac{d^2 \ln \psi_0^{(2)}}{dx^2} = V_1(x) - 2 \frac{d^2 \ln \psi_0^{(1)}}{dx^2} - 2 \frac{d^2 \ln \psi_0^{(2)}}{dx^2}$$

$$\text{Δηλαδή: } V_3(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)}) \quad (3.2.12)$$

Έτσι, για τις ενέργειες και τις ιδιοσυναρτήσεις των τριών πρώτων Χαμιλτονιανών της ιεραρχίας, θα ισχύουν:

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \quad (3.2.13)$$

$$\text{και } \psi_n^{(3)}(x) = \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}\right)^{-1/2} \hat{A}_2 \psi_{n+1}^{(2)}(x)$$

Όμως επειδή από την (3.2.7) για την αλλαγή δεικτών $n \rightarrow n + 1$, παίρνω:

$$\psi_{n+1}^{(2)}(x) = \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} \hat{A}_1 \psi_{n+2}^{(1)}(x), \text{ θα έχω:}$$

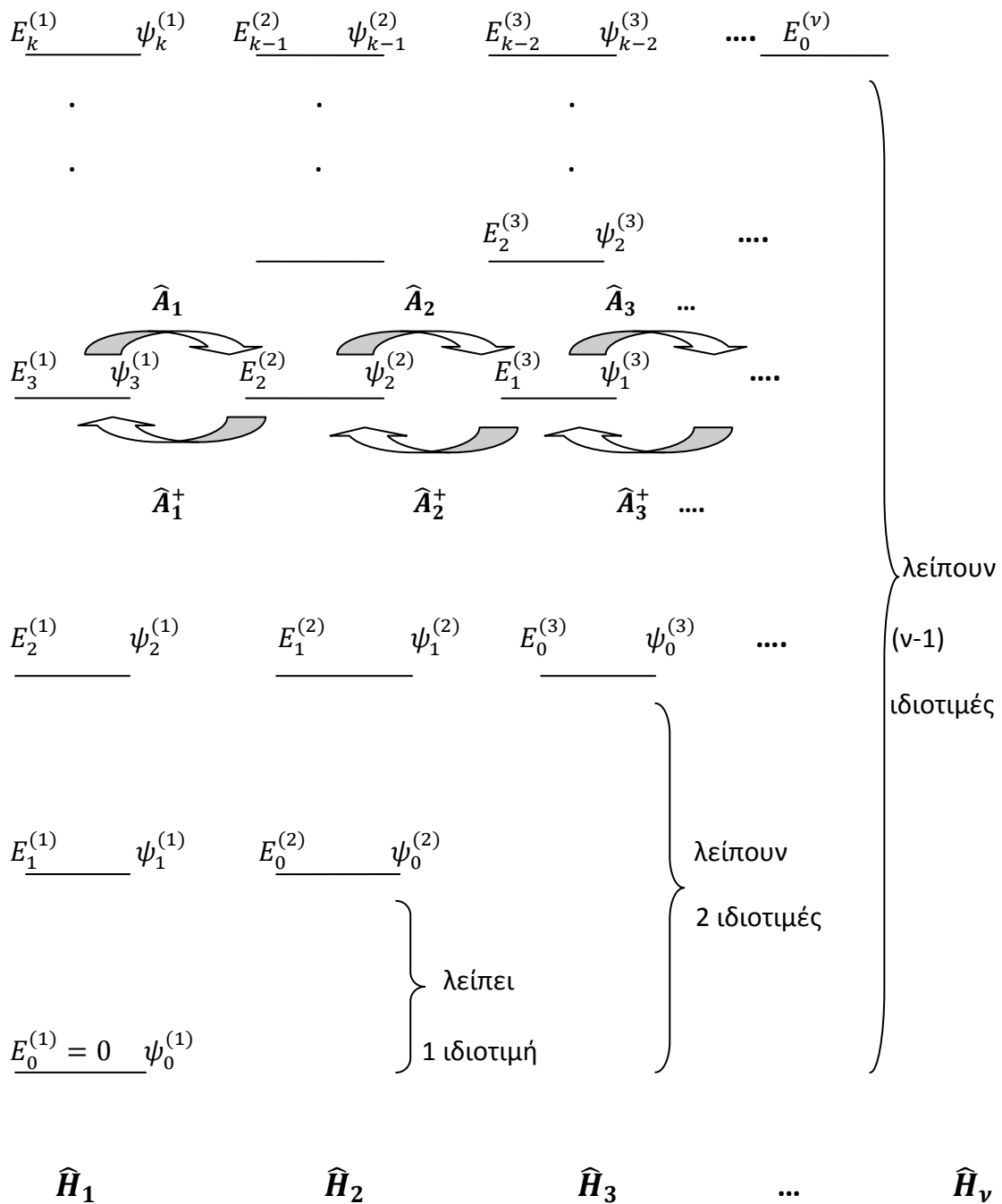
$$\begin{aligned} \psi_n^{(3)}(x) &= \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}\right)^{-1/2} \hat{A}_2 \psi_{n+1}^{(2)}(x) = \\ &= \left(E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}\right)^{-1/2} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} \hat{A}_2 \hat{A}_1 \psi_{n+2}^{(1)}(x) \end{aligned}$$

Επειδή: $E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}$ αλλά και $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$, τελικά θα έχω:

$$\psi_n^{(3)}(x) = \left(E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)}\right)^{-1/2} \left(E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} \hat{A}_2 \hat{A}_1 \psi_{n+2}^{(1)}(x) \quad (3.2.14)$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, καταλαβαίνουμε ότι εάν η αρχική μας Χαμιλτονιανή έχει k δέσμιες καταστάσεις με ενέργειες $E_n^{(1)}$ και ιδιοσυναρτήσεις $\psi_n^{(1)}(x)$ με $0 < n < k - 1$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε $k - 1$ συναφείς Χαμιλτονιανές $\hat{H}_2, \hat{H}_3, \dots, \hat{H}_k$ έτσι ώστε το n -οστό μέλος της ιεραρχίας αυτών των Χαμιλτονιανών να έχει το ίδιο φάσμα ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων με την αρχική \hat{H}_1 αλλά με τις $(n-1)$ στάθμες να λείπουν από την \hat{H}_n .

Τα παραπάνω συμπεράσματα φαίνονται στο επόμενο διάγραμμα:



Έτσι, για το ν -οστό μέλος ($\nu = 2, 3, \dots, k$) της ιεραρχίας των $k - 1$ συναφών Χαμιλτονιανών, θα ισχύει ότι:

$$\hat{H}_\nu = \hat{A}_\nu^\dagger \hat{A}_\nu + E_{\nu-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\nu(x) \quad (3.2.15)$$

$$\text{με: } \hat{A}_\nu = \frac{d}{dx} + W_\nu(x), \quad \hat{A}_\nu^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_\nu(x) \quad \text{και} \quad W_\nu(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(\nu)}}{dx} \quad (3.2.16)$$

Έτσι η n -οστή στάθμη της Hamiltonian \hat{H}_ν θα είναι:

$$E_n^{(\nu)} = E_{n+1}^{(\nu-1)} = E_{n+2}^{(\nu-2)} = \dots = E_{n+\nu-1}^{(1)} \quad \text{και}$$

$$\psi_n^{(\nu)} = \left(E_{n+\nu-1}^{(1)} - E_{\nu-2}^{(1)}\right)^{-1/2} \dots \left(E_{n+\nu-1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} \hat{A}_{\nu-1} \dots \hat{A}_1 \psi_{n+\nu-1}^{(1)} \quad (3.2.17)$$

Μέχρι εδώ, συζητήσαμε τη γενίκευση της μεθόδου που εφαρμόσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για μια σειρά ακριβώς επιλύσιμα δυναμικά, σε παραπάνω των 2 Χαμιλτονιανών και τα γενικευμένα αποτελέσματά της.

Η μεθοδολογία μας όμως αποκτά περισσότερη ισχύ εάν εμπλέξουμε στη συζήτηση την ιδιότητα της αναλλοiotτητας μορφής που όπως είδαμε όλα τα γνωστά και ακριβώς επιλύσιμα δυναμικά με τα οποία ασχοληθήκαμε, διαθέτουν. Κι αυτό γιατί με χρήση της ιδιότητας αυτής είναι δυνατό, εάν γνωρίζουμε απλώς τη βασική κυματοσυνάρτηση μιας Hamiltonian \hat{H}_1 με συνολικά k δέσμιες καταστάσεις, όχι μόνο να κατασκευάσουμε το φάσμα των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας μιας σειράς από ακόμα $k - 1$ συναφείς Χαμιλτονιανές, αλλά και να κατασκευάσουμε το υπόλοιπο φάσμα ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων της ίδιας της \hat{H}_1 , επιστρέφοντας όπως θα δούμε προς τα πίσω στην ιεραρχία των Χαμιλτονιανών με χρήση του εκάστοτε τελεστή \hat{A}_i^\dagger . Με άλλα λόγια, η μεθοδολογία μας πια αποτελεί μια γενίκευση της μεθόδου των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Έστω λοιπόν ότι ξεκινάμε από τις δύο Χαμιλτονιανές \hat{H}_1 και \hat{H}_2 σε μια unbroken SUSY, όπως η περίπτωση όλων των δυναμικών με τα οποία ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

$$\text{Τότε, } E_0^{(1)}(a_1) = 0 \text{ και } \psi_0^{(1)}(x; a_1) = N \exp\left[-\int^x W_1(y; a_1) dy\right] \quad (3.2.18)$$

Εάν η \hat{H}_1 έχει συνολικά k δέσμες καταστάσεις τότε η ιεραρχία περιλαμβάνει k Χαμιλτονιανές και η v -οστή θα έχει το ίδιο φάσμα με την \hat{H}_1 , εκτός από το ότι οι $(v-1)$ στάθμες είναι απύσες από το φάσμα της \hat{H}_v .

Χρησιμοποιώντας επαναληπτικά την Shape Invariance Condition:

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; f(a_1)) + R(a_1) \text{ με } f(a_1) = a_2 \text{ παίρνουμε:}$$

$$\hat{H}_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_s(x; a_{s-1}) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{\mu=1}^{s-1} R(a_\mu) \quad (3.2.19)$$

με: $a_s = f^{s-1}(a_1)$ δηλαδή η συνάρτηση $f(a_1)$ εφαρμοσμένη $s - 1$ φορές

Ομοίως:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{s+1} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_{s+1}) + \sum_{\mu=1}^s R(a_\mu) = \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_s) + \sum_{\mu=1}^{s-1} R(a_\mu) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Οι \hat{H}_s και \hat{H}_{s+1} είναι συναφείς Χαμιλτονιανές άρα έχουν το ίδιο δέσμιο φάσμα εκτός από τη βασική της \hat{H}_s που έχει ενέργεια:

$$E_0^{(s)} = \sum_{\mu=1}^{s-1} R(a_\mu) \quad (3.2.21)$$

(αφού ισχύει η (3.2.19) και $E_0^{(1)}(a_1) = 0$).

Γυρίζοντας τώρα πίσω από την \hat{H}_s στην \hat{H}_{s-1} και σταδιακά στην \hat{H}_2 και τελικά στην \hat{H}_1 , πέφτουμε στην αρχική μας Hamiltonian της οποίας η βασική στάθμη έχει ενέργεια 0 και η n-οστή της στάθμη συμπίπτει ενεργειακά με την μηδενική στάθμη της \hat{H}_n .

Έτσι το συνολικό φάσμα της \hat{H}_1 είναι :

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{\mu=1}^n R(a_\mu)$$

με: $E_0^{(1)}(a_1) = 0$ (3.2.22)

Με ανάλογο τρόπο τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι παρόμοια με τον μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή, οι δέσμιες ιδιοκαταστάσεις κάθε shape invariant δυναμικού $\psi_n^{(1)}(x; a_1)$ μπορούν να γίνουν γνωστές από την βασική του $\psi_0^{(1)}(x; a_1)$ η οποία και συνδέεται με το Υπερδυναμικό.

Ξεκινώντας από την

$$\hat{H}_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{\mu=1}^{s-1} R(a_\mu)$$

με ενέργεια βασικής στάθμης:

$$E_0^{(s)} = \sum_{\mu=1}^{s-1} R(a_\mu)$$

και κυματοσυνάρτηση : $\psi_0^{(1)}(x; a_s)$ (3.2.23)

Επιστρέφοντας σταδιακά στις $\hat{H}_{s-1}, \hat{H}_{s-2}, \dots, \hat{H}_2, \hat{H}_1$ μέσω της δράσης του τελεστή \hat{A}^+ επαναλαμβανόμενα, βρίσκουμε ότι η (μη κανονικοποιημένη) n-οστής στάθμης κυματοσυνάρτηση της $\hat{H}_1(x; a_1)$ θα είναι

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) \propto \hat{A}^+(x; a_1)\hat{A}^+(x; a_2) \dots \hat{A}^+(x; a_n)\psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}) \quad (3.2.24)$$

όπου έχουμε δράσει $n - 1$ φορές με τον εκάστοτε \hat{A}^+ και ισχύουν:

$$a_2 = f(a_1), \dots, a_n = f^{n-1}(a_1).$$

Η σχέση αυτή αποτελεί μια γενίκευση της μεθόδου των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης στον αρμονικό ταλαντωτή ώστε να κατασκευάσουμε το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων του και αλλιώς, (συνδέοντας δύο διαδοχικές καταστάσεις της \hat{H}_1), μπορεί να γραφεί:

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) = \hat{A}^+(x; a_1)\psi_{n-1}^{(1)}(x; a_2) \quad (3.2.25)$$

Κλείνοντας, κανείς θα μπορούσε να συγκεντρώσει αρκετά ενδιαφέροντα συμπεράσματα από την ενασχόληση με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία.

Είναι αλήθεια ότι, κατά την έναρξη αυτής της προσπάθειας, η μέθοδος έμοιαζε αρκετά ελκυστική ως προς την εν δυνάμει ικανότητά της να προβλέψει νέα ακριβώς αναλυτικά επιλύσιμα δυναμικά, δυναμικά που κατά πάσα πιθανότητα θα ήταν πολύ δύσκολο να επιλυθούν μέσω της «πεπατημένης οδού» δηλαδή της επίλυσης της εξίσωσης του Schrodinger. Η προσδοκία αυτή ενισχύθηκε από τα αποτελέσματα που έδωσε η εφαρμογή της μεθόδου στο πρώτο γνωστό μας- ακόμα από τα προπτυχιακά μαθήματα της Κβαντικής Μηχανικής- πρόβλημα του απειρόβαθου πηγαδιού: Το συναφές δυναμικό που προέκυψε ήταν όντως ένα άγνωστο πρόβλημα, του οποίου η λύση προσφέρθηκε από την εφαρμογή της μεθόδου με κομψό και συνεκτικό τρόπο. Δυστυχώς, η συνέχεια -με τα προβλήματα του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, του δυναμικού Morse και του Ατόμου του Υδρογόνου- δεν ήταν το ίδιο ελπιδοφόρα από τη σκοπιά της αναλυτικής επίλυσης. Τα συναφή δυναμικά σε όλες αυτές τις περιπτώσεις αποδείχθηκαν να είναι απλές μετατοπίσεις του εκάστοτε αρχικού προβλήματος και όχι κάποια άγνωστα ή εξωτικά δυναμικά. Παρόλα αυτά η μέθοδος προσέφερε τη δυνατότητα επίλυσης τους με έναν εναλλακτικό και σχετικά κομψό τρόπο και τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεών τους.

Δυσκολία υπήρξε επίσης κατά τη προσπάθεια ευθείας σύνδεσης του φυσικού νοήματος της Υπερσυμμετρίας και της εφαρμοζόμενης μεθόδου: Αποδείχθηκε ότι μια τέτοια ευθεία σύνδεση είναι αδύνατο να γίνει, καθώς τα προβλήματα με τα οποία ασχοληθήκαμε είναι καθαρά μποζονικά και φυσικά οι τελεστές \hat{Q} και \hat{Q}^+ της μεθόδου αποτελούν τελεστές που απλώς συνδέουν δύο συναφή προβλήματα και όχι τελεστές στους οποίους μπορεί να αποδοθεί νόημα μετατροπής μποζονικών σε φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας και αντίστροφα! Παρόλα αυτά, έγινε κατανοητό ότι η μέθοδος αποτελεί εντέλει μία «έμπνευση» από τις ιδέες της Υπερσυμμετρίας με αποδοχή των βασικών απαιτήσεων αυτής για τη περίπτωση αντίστοιχα μη σπασμένης και σπασμένης Θεωρίας οι οποίες στην αρχή έμοιαζαν με μαθηματικές παραδοχές μάλλον αυθαίρετες, όπως η επιλογή μηδενικής ενέργειας για τη βασική στάθμη της εναρκτήριας Hamiltonian \hat{H}_1 .

Έτσι, η απαίτηση αυτή αποδείχθηκε ότι πηγάζει από την απαίτηση αναλλοιότητας του κενού σε μια μη σπασμένη Υπερσυμμετρία και στην μέθοδό μας είναι ισοδύναμη με την επιλογή κατάλληλης συνάρτησης Υπερδυναμικού $W(x)$ και τελικά την ύπαρξη κανονικοποιήσιμης κυματοσυνάρτησης για τη βασική στάθμη του αρχικού προβλήματος! Εντέλει, μια διαφορετική επιλογή, φαίνεται πως για τη μέθοδο μας θα σήμαινε αποτυχία, αφού δε θα ήταν δυνατό να αποδοθεί φυσικό νόημα κυματοσυνάρτησης στις ιδιοσυναρτήσεις των συναφών προβλημάτων.

Όμως η ενασχόληση με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία έφερε στην επιφάνεια και μερικές αρκετά ενδιαφέρουσες προοπτικές για μελλοντική μελέτη:

Η γενίκευση της μεθόδου σε περισσότερες των δυο Hamiltonians σε συνδυασμό με την ιδιότητα της Αναλλοιότητας Μορφής που όλα τα γνωστά και ακριβώς επιλύσιμα δυναμικά διαθέτουν, φαίνεται να παράγει μια γενίκευση της μεθόδου των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης του αρμονικού ταλαντωτή για όλα τα γνωστά και αναλυτικά επιλύσιμα προβλήματα. Αυτό σημαίνει πως, ξεκινώντας από ένα δυναμικό με γνωστή μόνο τη κυματοσυνάρτηση της βασικής (μηδενικής ενέργειας) στάθμης και γνωρίζοντας τη σχέση των παραμέτρων που συμμετέχουν σε αυτό και το συναφές του, είναι δυνατό να κατασκευαστεί το σύνολο του ενεργειακού του φάσματος και του φάσματος των ιδιοσυναρτήσεων του, σαν να είχαν οριστεί για αυτό τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης, αντίστοιχοι με το πρόβλημα του γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή..

Τέλος, ερευνητική δουλειά πραγματοποιείται στη γενίκευση της μεθόδου για δυναμικά προβλήματα σε περισσότερες της μίας διάστασης. Αν και ο αριθμός των γνωστών ακριβώς επιλύσιμων δυναμικών σε περισσότερες διαστάσεις είναι σημαντικά μειωμένος και η μελέτη αυτή υπερβαίνει τους στόχους της παρούσας εργασίας, το ενδιαφέρον αλλά και οι προοπτικές που εμπεριέχει μια τέτοια γενίκευση είναι μάλλον αδιαμφισβήτητη.

Βιβλιογραφία- References

- [1]. F. Cooper, A. Khare & U. Sukhatme, “Supersymmetry in Quantum Mechanics”, World Scientific Publishing, 2001.
- [2]. A. Valance, T.J Morgan and H. Bergeron, “Eigensolution of the Coulomb Hamiltonian via Supersymmetry”, Am.J.Phys.58, 487, 1990.
- [3]. J. Oscar Rosas-Ortiz, “On the factorization method in Quantum Mechanics”, Proceedings of the First International Workshop on Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum Optics, A. Ballesteros et al (Eds), Servicio de Publicaciones de la Universidad de Burgos (Spain), p.285-299, Burgos, Spain, 1999.
- [4]. L. Infeld and T.E Hull, “The factorization Method”, Rev. Mod. Physics vol.23, Issue 21, p.21-68, January 1, 1951.
- [5]. R. Sandhya, S. Sree Ranjani and A.K Kapoor, “Shape Invariant Potentials in Higher Dimensions”, Annals of Physics, December 2014 (arxiv: 1412.4244v1)
- [6]. Κ. Ταμβάκης, “Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική”, Ιωάννινα, 2002.
- [7]. Α. Λαχανάς, Κβαντική Μηχανική II, Περιλήψεις.
- [8]. Α. Β. Lahanas, “The rudiments of Supersymmetry- Supersymmetry I”, University of Athens, Nuclear and Particle Physics Section, Athens Greece.
- [9]. M.Rausch de Traubenberg, “Clifford Algebras in Physics”, Lecture given at the Preparatory Lectures of the 7th International Conference on Clifford Algebras and their Applications-ICCA7-Toulouse,France ,May 19-29,2005, arxiv:hep-th/0506011v1, 1 June, 2005.
- [10]. Μπενής Μ, Διάλεξη 8: Μοριακή Δομή, Διαλέξεις μαθήματος Σύγχρονης Φυσικής II, Ιωάννινα 2013.
- [11]. R. de Lima Rodrigues, “The Quantum Mechanics SUSY Algebra: An Introductory Review”, arxiv:hep-th/0205017v6,12 September ,2002.
- [12]. <https://phys.org/news/2017-04-supersymmetry-standard-results-atlas.html>
- [13]. <https://home.cern/about/updates/2017/04/lhcb-finds-new-hints-possible-standard-model-deviations>
- [14]. www.wikipedia.org, Super Poincare Algebra

