



Εθνικό Μετσόβιο
Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



ΕΚΕΦΕ "Δημόκριτος"
Ινστιτούτο Πυρηνικής και
Σωματιδιακής Φυσικής

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές

Μαγνητικά Μονόπολα

Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία
του
Χατζηφώτη Νίκου
Επιβλέπων καθηγητής: Κουτσούμπας Γιώργος

8 Οκτωβρίου 2019

Περίληψη

Σκοπός της εν λόγω διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη των μαγνητικών μονοπόλων σε επίπεδο και καμπυλωμένο χωρόχρονο. Αρχικά, παρουσιάζεται το μονόπολο Dirac και αναλύεται η τοπολογική φύση του μαγνητικού φορτίου. Στη συνέχεια, ασχολούμαστε με το μονόπολο t'Hooft-Polyakov, που προκύπτει ως σολιτονική λύση στο μοντέλο ενοποιημένων θεωριών των Georgi-Glashow και εξάγουμε το μαγνητικό φορτίο του συστήματος. Συνεχίζουμε με την προσέγγιση t'Hooft-Polyakov για το μονόπολο και με την προσέγγιση Julia-Zee για το δυόνιο, για τον υπολογισμό των ισοβαθμωτών και ισοανυσματικών πεδίων. Εργαζόμαστε, εν συνεχεία, πάνω στο όριο BPS, για την εύρεση αριθμητικών λύσεων στις διαφορικές εξισώσεις του συστήματος. Τέλος, εισάγουμε το μοντέλο των Georgi-Glashow σε καμπυλωμένο χωρόχρονο και δείχνουμε πως σε συνθήκες ισχυρής βαρύτητας το μονόπολο ταυτοποιείται με μια μελανή οπή. Στο τελευταίο μέρος της εργασίας παρουσιάζονται οι κώδικες FORTRAN που χρησιμοποιήθηκαν για την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων σε επίπεδο και καμπυλωμένο χωρόχρονο.

Abstract

The goal of this thesis is the study of magnetic monopoles in flat and curved spacetime. We start by presenting the Dirac monopole and we analyze the topological nature of the magnetic charge. We continue our analysis with the t'Hooft-Polyakov monopole, that appears as soliton solution in the unified theory model of Georgi and Glashow, and we calculate the magnetic charge of the system. After that, we use the t'Hooft-Polyakov ansatz for the monopole and the Julia-Zee ansatz for the dyon in order to derive the isoscalar and isovector fields of the theory. Working on the BPS limit, we are able to provide numerical solution for the differential equations of motion. Finally, we insert the Georgi-Glashow model in curved spacetime and we show that in the strong gravity case, the monopole must be a black hole. In the last part of the project, we present the FORTRAN codes we used to numerically solve the resulting differential equations of motion in flat and curved spacetime.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ.Γιώργο Κουτσούμπα που μου ανέθεσε την εν λόγω εργασία και με υποστήριξε καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της. Ευχαριστώ επίσης την οικογένεια μου, που στήριξε την απόφαση μου να ασχοληθώ με τη Φυσική και είναι κοντά μου όλα αυτά τα χρόνια, τόσο σε επίπεδο σπουδών, όσο και στη καθημερινότητα μου. Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τη βαθιά μου ευγνωμοσύνη σε φίλους και συμφοιτητές, στον αγαπημένο φίλο μου, Κωνσταντίνο Διακάκη και στην κοπέλα μου Πηνελόπη, για την αμέριστη εμπιστοσύνη που μου δείχνανε και τη πολύτιμη βοήθεια τους. Αφιερώνω την εν λόγω εργασία σε αυτούς, ως αποτέλεσμα της πίστης τους σε μένα. Σας ευχαριστώ πολύ.

"I was going to engineering school, but fell in love with Physics"
-Leonard Susskind

Περιεχόμενα

1 Το μονόπολο Dirac	7
1.1 Ηλεκτρομαγνητικός Διαισμός	7
1.2 Η χορδή Dirac	10
1.3 Η συνθήκη κβάντωσης Dirac	14
1.4 Μαγνητικά μονόπολα χωρίς χορδές	18
1.5 Τοπολογική ερμηνεία του μονόπολου Dirac	19
2 Το μονόπολο t'Hooft-Polyakov	23
2.1 Θεωρίες βαθμίδας	23
2.2 Ο μηχανισμός Higgs	28
2.3 Το μοντέλο Georgi-Glashow	31
2.4 Τοπολογική κατηγοριοποίηση των λύσεων	35
2.5 Το μαγνητικό φορτίο	38
3 Το όριο Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield	46
3.1 Η προσέγγιση t'Hooft-Polyakov	46
3.2 Το δυνίο Julia-Zee	51
3.3 Το όριο BPS	55
3.3.1 Το όριο BPS για το μαγνητικό μονόπολο	56
3.3.2 Το όριο BPS για το δυνίο	57
3.4 Αριθμητικές λύσεις των προσεγγίσεων t'Hooft-Polyakov και Julia-Zee	59
4 Το μαγνητικό μονόπολο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο	66
4.1 Το μοντέλο Georgi-Glashow σε βαρύτητα	66
4.2 Οι εξισώσεις Einstein	72
4.3 Το μαγνητικό μονόπολο ως μελανή σπή	77
4.4 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κίνησης	81
Appendix	89
A' Το βαθμωτό Ricci	90

B' Κώδικες FORTRAN αριθμητικής επίλυσης	96
B.1 Monopole in flat spacetime	96
B.2 Dyon in flat spacetime	101
B.3 Monopole in curved spacetime	106

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά τη μελέτη των μαγνητικών μονοπόλων σε επίπεδο και καμπυλωμένο χωρόχρονο.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το μονόπολο Dirac και τα προβλήματα που υπεισέρχονται όταν εισάγουμε το μαγνητικό μονόπολο στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό. Δείχνουμε ότι το δυναμικό βαθμίδας θα περιλαμβάνει ιδιάζοντα σημεία τα οποία ονομάζονται χορδές Dirac. Οι χορδές αυτές είναι όροι pure gauge και δεν είναι παρατηρήσιμα μεγέθη. Παρ'ολ'αυτά, όμως, οδηγούν στη συνθήκη κβάντωσης του Dirac, η οποία εξηγεί τη κβάντωση του φορτίου. Παρουσιάζουμε, επίσης, ότι η συνθήκη κβάντωσης Dirac έχει καθαρά τοπολογική προέλευση και σχετίζεται με τον αριθμό περιέλιξης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, μετά από μια σύντομη εισαγωγή στις θεωρίες βαθμίδας και στο μηχανισμό Higgs, εργαζόμαστε στο μοντέλο ενοποιημένων θεωριών των Georgi-Glashow, το οποίο περιέχει λύση μονοπόλου ως σολιτονική λύση. Δηλαδή, ενώ στην περίπτωση του αβελιανού μονοπόλου Dirac θεωρήσαμε a priori ότι υπάρχει μαγνητικό φορτίο, στη περίπτωση του μη-αβελιανού μονοπόλου το μαγνητικό φορτίο προκύπτει επιλέγοντας διαφορετικό τοπολογικό τομέα στη λύση του συστήματος από τον τετριμμένο. Επιπροσθέτως, υπολογίζοντας το διατηρούμενο μαγνητικό φορτίο του συστήματος, προκύπτει πάλι η συνθήκη κβάντωσης Dirac, modulo ένα παράγοντα του 2.

Στο τρίτο κεφάλαιο, επιλέγουμε τη προσέγγιση t'Hooft-Polyakov για τα ισοβαθμωτά και ισοανυσματικά πεδία στο μοντέλο Georgi-Glashow και παρουσιάζουμε τη γενίκευση του μονοπόλου στα δυνόνια, που είναι θεωρητικά σωματίδια με ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο και συνδέονται με τα μονόπολα μέσω του ηλεκτρομαγνητικού δυισμού. Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από το σύστημα μπορούν να λυθούν μόνο με αριθμητικό τρόπο. Η εξαίρεση έγγυται στο όριο BPS, όπου επιλέγουμε μηδενική σύζευξη στο δυναμικό των ισοβαθμωτών πεδίων. Τότε, οι εξισώσεις κίνησης έχουν αναλυτική λύση, την οποία χρησιμοποιούμε για να βρούμε λύση στο σύστημα. Είναι επίσης σαφές, ότι το όριο BPS οδηγεί σε ένα κάτω φράγμα της μάζας του μονοπόλου, ανάλογο της αναμενόμενης τιμής κενού, ως κάτω όριο της ενέργειας του συστήματος.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, εισάγουμε το μοντέλο Georgi-Glashow σε καμπυλωμένο χωρόχρονο. Προκύπτει το ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα, ότι ενώ σε συνθήκες ασθενούς βαρύτητας οι λύσεις είναι παρεμφερείς με την περίπτωση του επίπεδου χώρου, στη περίπτωση ισχυρής βαρύτητας το μονόπολο ταυτοποιείται με μελανή οπή και έχουμε μόνο ιδιάζουσες λύσεις στο σύστημα. Η εξαίρεση σε αυτό έγγυται στη περίπτωση που η αναμενόμενη τιμή κενού παίρνει μια κρίσιμη τιμή ανάλογη της μάζας του Planck, όπου τότε έχουμε πάλι

ταυτοποίηση του μονοπόλου με μελανή οπή, αλλά υπάρχουν μη-ιδιάζουσες λύσεις στο σύστημα. Παρουσιάζουμε στο τέλος τα αριθμητικά αποτελέσματα που είχαμε, καθώς η μάζα του μονοπόλου αυξάνεται στη κρίσιμη τιμή της.

Υπάρχουν μόλις δύο παραρτήματα, το ένα για τον υπολογισμό του βαθμωτού Ricci και το δεύτερο για τους κώδικες FORTRAN που χρησιμοποιήσαμε στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, καθώς επιλέξαμε να κρατήσουμε τους υπολογισμούς στο κύριο μέρος της εργασίας.

Λέξεις κλειδιά

Μαγνητικά μονόπολα, Αριθμός περιέλιξης, Georgi-Glashow model, μελανές οπές Reissner-Nordstrom, Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων.

Κεφάλαιο 1

Το μονόπολο Dirac

Το μαγνητικό μονόπολο είναι ένα θεωρητικό σωματίδιο με μαγνητικό φορτίο. Οι εξισώσεις του Maxwell δεν περιλαμβάνουν τα μαγνητικά μονόπολα, καθώς δεν υπήρχε (και ακόμα δεν υπάρχει) κάποια πειραματική απόδειξη της ύπαρξής τους. Η αναζήτηση για τα μαγνητικά μονόπολα ξεκίνησε το 1930, όταν ο Dirac [9] απέδειξε πως η ύπαρξη τους θα εξηγούσε το φαινόμενο κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου. Ακριβώς λόγω αυτού, η θεωρία των μαγνητικών μονόπολων έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα ανθεκτική στο χρόνο.

1.1 Ηλεκτρομαγνητικός Δυισμός

Η ιδέα της πιθανής ύπαρξης μαγνητικών μονοπόλων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του ηλεκτρομαγνητικού δυισμού. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι οι εξισώσεις Maxwell στο κενό

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

παρουσιάζουν μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα συμμετρία μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Ο μετασχηματισμός $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, -\mathbf{E})$ αφήνει το σύστημα εξισώσεων αναλλοίωτο [14]. Βέβαια, ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί μια περίπτωση της ομάδας $O(2)$:

$$G : \begin{cases} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \cos \theta - \mathbf{B} \sin \theta \\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E} \sin \theta + \mathbf{B} \cos \theta \end{cases} \quad (1.5)$$

για $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Σε συναλλοίωτη μορφή, οι ελεύθερες εξισώσεις Maxwell γράφονται

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (1.6)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.7)$$

όπου ο ηλεκτρομαγνητικός ταυυστής και η δισική του μορφή δίνονται από τους τύπους

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.8)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho A^\sigma \quad (1.9)$$

όπου ορίζουμε τον $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ως τον πλήρως αντισυμμετρικό ταυυστή με $\varepsilon_{0123} = -1$. Σε μορφή πίνακα, για μετρική επίπεδου χώρου Minkowski $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, οι (8) και (9) δίνονται για την ευκολία του αναγνώστη

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία δίνονται μέσω των παραπάνω σχέσεων στη μορφή

$$E_i = E^i = F_{0i} = -F^{0i} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk}\tilde{F}^{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}\tilde{F}_{jk} \quad (1.14)$$

$$B_i = B^i = \tilde{F}_{0i} = -\tilde{F}^{0i} = \frac{1}{2}\varepsilon_{0ijk}F^{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} \quad (1.15)$$

Εύκολα μπορεί, λοιπόν, να παρατηρήσει κανείς ότι ο δισικός μετασχηματισμός (1.5) στον $F_{\mu\nu}$ είναι ο

$$G : \begin{cases} F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} \cos \theta - \tilde{F}_{\mu\nu} \sin \theta \\ \tilde{F}^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} \sin \theta + \tilde{F}^{\mu\nu} \cos \theta \end{cases} \quad (1.16)$$

Άρα, μπορούμε να ελέγξουμε για την αναλλοiotτητα της Λαγκρανζιανής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ως ακολούθως

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu} \cos \theta - \tilde{F}_{\mu\nu} \sin \theta)(F^{\mu\nu} \cos \theta - \tilde{F}^{\mu\nu} \sin \theta) \\ &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \cos^2 \theta - F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \cos \theta \sin \theta - F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \cos \theta \sin \theta + \tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \sin^2 \theta) \\ &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \cos 2\theta - F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \sin 2\theta) \end{aligned} \quad (1.18)$$

αφού

$$\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}) = \frac{1}{4}(-2)\delta_{\rho\sigma}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F^{\rho\sigma} = -F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad (1.19)$$

Επομένως, πράγματι, η τελική Λαγκρανζιανή είναι

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \cos 2\theta - F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \sin 2\theta) \quad (1.20)$$

με

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}\frac{1}{2}(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta - \partial_\mu A_\nu \partial_\beta A_\alpha - \partial_\nu A_\mu \partial_\alpha A_\beta + \partial_\nu A_\mu \partial_\beta A_\alpha) \\ &= 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) \\ &= 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu(A_\nu \partial_\alpha A_\beta) - A_\nu \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta) \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu(2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu \partial_\alpha A_\beta) \quad (1.21)$$

Συνεπώς, η αβελιανή θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού παραμένει αναλλοίωτη υπό την $O(2)$, αφού ο όρος $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ αποτελεί μια ολική απόκλιση, κάτι το οποίο είναι σαφές ότι δεν αλλάζει τις δυναμικές εξισώσεις κίνησης που θα προκύψουν από την μεταβολή της δράσης. Η συμμετρία αυτή σπανίως αναφέρεται σε βιβλία ηλεκτρομαγνητισμού, αφού σπάει όταν θεωρήσουμε τις εκάστοτε πηγές. Συνεπώς, μια πρώτη και απλοποιημένη προσέγγιση του μαγνητικού μονοπόλου θα ήταν να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μαγνητικό φορτίο (με το αντίστοιχο μαγνητικό ρεύμα), τέτοιο ώστε η συμμετρία της (1.5) να διατηρείται. Τότε ο δεικός αυτός μετασχηματισμός μπορεί να θεωρηθεί ως μια στροφή που παράγει πεπλεγμένες ηλεκτρικές και μαγνητικές ποσότητες. Για την κατανόηση των παραπάνω, καλό θα ήταν να εκφράσουμε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο υπό μιγαδική μορφή και να εκμεταλλευτούμε τον εικονισμό (mapping) $O(2) \rightarrow U(1)$. Τότε, η (1.5) γράφεται

$$G : \mathbf{E} + i\mathbf{B} \rightarrow e^{i\theta}(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) \quad (1.22)$$

$$G : e + ig \rightarrow e^{i\theta}(e + ig) \quad (1.23)$$

και οι εξισώσεις Maxwell θα πάρουν την μορφή

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \rho_e + i\rho_g \quad (1.24)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) - i\frac{\partial(\mathbf{E} + i\mathbf{B})}{\partial t} = \mathbf{j}_e + i\mathbf{j}_g \quad (1.25)$$

Στο σημείο αυτό απαιτείται προσοχή: Η θεωρία ηλεκτρομαγνητισμού που παρουσιάζουμε δεν αναφέρεται σε δύο διαφορετικά είδη φορτίου. Τα πειραματικά δεδομένα δεν θα ήταν τα e και g , αλλά ο $U(1)$ αναλλοίωτος συνδυασμός τους [25].

$$q = \sqrt{e^2 + g^2} \quad (1.26)$$

1.2 Η χορδή Dirac

Όταν εισάγουμε μαγνητικά μονόπολα στον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό, παρουσιάζονται προβλήματα. Ο ηλεκτρομαγνητικός ταυιστής δεν μπορεί να οριστεί πλέον από ένα συνεχές δυναμικό βαθμίδας \mathbf{A} . Το δυναμικό βαθμίδας θα περιλαμβάνει ιδιάζοντα σημεία (singularities) τα οποία ονομάζονται χορδές Dirac. Προς απόδειξη αυτών, παρουσιάζουμε τα παρακάτω:

Το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε μαγνητικό φορτίο g θα έπρεπε να έχει ανάλογη μορφή με το γνωστό πεδίο Coulomb

$$\mathbf{B} = g\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.27)$$

Απαιτούμε ύπαρξη διανυσματικού δυναμικού \mathbf{A} το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{B} = g\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.28)$$

Ταυτόχρονα θέλουμε όμως η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου να μας δίνει το μαγνητικό φορτίο g

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (1.29)$$

Επειδή το μαγνητικό πεδίο παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, μπορούμε να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής [10]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(\theta)\nabla \cdot \phi \quad (1.30)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η κλίση σε σφαιρικές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας ορθοκανονική βάση, δίνεται $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$. Η επιλογή $A(\theta) = -g(1 + \cos\theta)$ μας δίνει την λύση που χρειαζόμαστε. Παρατηρούμε ότι

$$\nabla \cdot \phi = \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta} \quad (1.31)$$

$$= -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\hat{x} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\hat{y} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= g(1 + \cos \theta) \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \hat{x} - g(1 + \cos \theta) \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \hat{y} \\
&= \frac{g(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \sin \phi}{r \sin \theta (1 - \cos \theta)} \hat{x} - \frac{g(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \cos \phi}{r \sin \theta (1 - \cos \theta)} \hat{y} \\
&= \frac{g \sin \theta \sin \phi}{r (1 - \cos \theta)} \hat{x} - \frac{g \sin \theta \cos \phi}{r (1 - \cos \theta)} \hat{y} \\
&= \frac{g}{r} \frac{(r \sin \theta \cos \phi \hat{x} + r \sin \theta \sin \phi \hat{y}) \times \hat{z}}{r - r \cos \theta}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{g}{r} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{r - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})} \quad (1.33)$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ είναι προσανατολισμένο στον άξονα z . Η σχέση (1.37) είναι το διανυσματικό δυναμικό Dirac [9]. Με έναν γρήγορο έλεγχο, εύκολα βλέπει κανείς ότι

$$B_x = -\partial_z A_y = \partial_z \left(\frac{g x}{r(r-z)} \right) = g \frac{x}{r^3} \quad (1.34)$$

Άρα συμπεραίνουμε πως η (1.33) είναι πράγματι το δυναμικό που ψάχνουμε. Παρατηρούμε, όμως, το αρχικό πρόβλημα που αφορά στα ιδιάζοντα σημεία. Το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} είναι ιδιάζον στο $r = 0$, κάτι το οποίο συμφωνεί με το τρόπο που ορίσαμε το μαγνητικό πεδίο, αλλά παρουσιάζει ιδιάζουσα συμπεριφορά και στον θετικό άξονα των z ήτοι $r = z$ ή πιο απλά $\theta = 0$. Το σημείο $\theta = 0$ ονομάζεται χορδή Dirac. Καλούμαστε, λοιπόν, να δώσουμε μια φυσική εξήγηση του φαινομένου αυτού. Η ιδέα είναι να εκφράσουμε την (1.33) σε μια κανονικοποιημένη μορφή [10]

$$\mathbf{A}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{g}{R} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{R - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})} \quad (1.35)$$

όπου $R = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \varepsilon^2}$. Το κανονικοποιημένο μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_R(\mathbf{r}, \varepsilon)$ θα είναι

$$\mathbf{B}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) = \nabla \times \mathbf{A}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) = \nabla \times \left(\frac{g}{R(R-z)} y \hat{x} - \frac{g}{R(R-z)} x \hat{y} \right) \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\
&= g \frac{x}{R^3} \hat{x} + g \frac{y}{R^3} \hat{y} + g \frac{(x^2 + y^2)R + (x^2 + y^2)(R-z) - 2(R-z)R^2}{(R-z)^2 R^3} \hat{z} \\
&= g \frac{x}{R^3} \hat{x} + g \frac{y}{R^3} \hat{y} + g \frac{(R^2 - z^2 - \varepsilon^2)(2R-z) - 2R^2(R-z)}{(R-z)^2 R^3} \hat{z} \\
&= g \frac{x}{R^3} \hat{x} + g \frac{y}{R^3} \hat{y} + g \frac{-zR^2 - 2Rz^2 + z^3 + 2R^2z - \varepsilon^2(2R-z)}{(R-z)^2 R^3} \hat{z} \\
&= g \frac{x}{R^3} \hat{x} + g \frac{y}{R^3} \hat{y} + g \frac{z}{R^3} \hat{z} - g \varepsilon^2 \frac{(2R-z)}{(R-z)^2 R^3} \hat{z}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_R(\mathbf{r}, \varepsilon) = g \frac{\mathbf{r}}{R^3} \hat{r} - g\varepsilon^2 \frac{(2R-z)}{(R-z)^2 R^3} \hat{n} \quad (1.37)$$

Στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, ο πρώτος όρος της (1.37) μας δίνει το μαγνητικό πεδίο μονοπόλου. Άρα, είναι ο δεύτερος που μας παράγει την χορδή Dirac. Αναλύουμε τον δεύτερο όρο σε

$$\mathbf{B}_{singular} = -g\varepsilon^2 \frac{(2R-z)}{(R-z)^2 R^3} \hat{n} = -g \frac{2\varepsilon^2}{R^3(R-z)} - g \frac{\varepsilon^2 z}{R^3(R-z)^2} \quad (1.38)$$

Για να εξάγουμε την μαγνητική ροή από του όρους αυτούς, πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε απειροστό στοιχείο της επιφάνειας κάθετης στον θετικό άξονα z . Τότε, μόνο ο δεύτερος όρος της (1.38) μας δίνει μη μηδενικά αποτελέσματα[25]. Είναι επίσης εύκολο να δει κανείς ότι μόνο στον άξονα z έχουμε μη μηδενική συνεισφορά. Επιλέγουμε σημείο $(0, 0, z_0)$. Για $\varepsilon \rightarrow 0$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε $R^3 \rightarrow z_0^3$ και $R-z \rightarrow \frac{x^2+y^2+\varepsilon^2}{2z_0}$ [10]. Τότε

$$-g \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\varepsilon^2 z}{R^3(R-z)^2} dx dy = -8\pi g \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 \rho}{(\rho^2 + \varepsilon^2)^2} d\rho \quad (1.39)$$

Εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητής $\rho = \varepsilon t$, το ολοκλήρωμα (1.39) είναι ανεξάρτητο του ε . Καταλήγουμε

$$-g \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\varepsilon^2 z}{R^3(R-z)^2} dx dy = -8\pi g \int_{t=0}^{\infty} \frac{t}{(t^2 + 1)^2} = -4\pi g \quad (1.40)$$

Άρα, στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, το ολοκλήρωμα είναι μια δισδιάστατη συνάρτηση δ . Το αποτέλεσμα για το μαγνητικό πεδίο είναι δηλαδή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_g + \mathbf{B}_s = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4g\pi\theta(z)\delta(x)\delta(y)\mathbf{n} \quad (1.41)$$

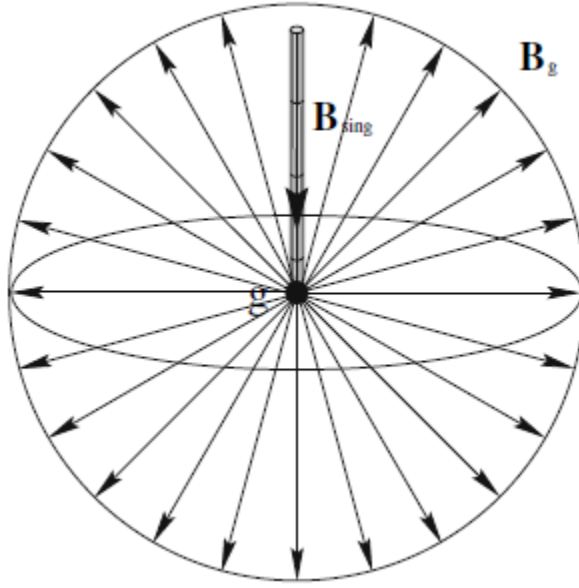
Επομένως, εκτός του αναμενόμενου μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, έχουμε και μια συνεισφορά από την χορδή. Το ενδιαφέρον είναι ότι το $\mathbf{B}_s = -4g\pi\theta(z)\delta(x)\delta(y)\mathbf{n}$ επιλύει το παράδοξο με τις εξισώσεις Maxwell, το οποίο προκύπτει στις (1.28) και (1.29), αφού η μαγνητική ροή της χορδής ακυρώνει την συνεισφορά της μαγνητικής ροής του μονοπόλου:

$$\Phi_{tot} = \oint d\mathbf{S} \mathbf{B} = g \left(\oint \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{S} - 4\pi \oint \theta(z)\delta(x)\delta(y)\mathbf{n} d\mathbf{S} \right) = 4g\pi - 4g\pi = 0 \quad (1.42)$$

Συνεπώς, θα ήταν ελλειπές να πούμε ότι η (1.33) μας δίνει μόνο το μαγνητικό πεδίο μονοπόλου. Το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B}_s που βρήκαμε αντιστοιχεί σε ένα ημίσφαιρο και άπειρα λεπτό σωληνοειδές.

Παρατηρούμε ότι κοντά στον θετικό άξονα z , το διανυσματικό δυναμικό (1.33) μας δίνει το \mathbf{B}_s και συμπεριφέρεται ως $\mathbf{A} \sim -2g\nabla\phi$. Μπορούμε, δηλαδή, να το ταυτοποιήσουμε ως ένα καθαρό μετασχηματισμό βαθμίδας, ο οποίος είναι ιδιάζων πάνω στην χορδή [28]! Τίθεται, λοιπόν, το ερώτημα τού με ποιον τρόπο αλλάζει η χορδή Dirac, όταν εκτελούμε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Υπενθυμίζουμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό ορίζεται μέσω μετασχηματισμών βαθμίδας $U(1)$, $U(\mathbf{r}) = \exp(ie\lambda(\mathbf{r}))$:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{i}{e} U^{-1} \nabla U \quad (1.43)$$



Σχήμα 1.1: Μαγνητικό πεδίο δυναμικού Dirac

Είναι σαφές ότι τα διανυσματικά πεδία \mathbf{A} και \mathbf{A}' αντιστοιχούν στο ίδιο μαγνητικό πεδίο. Επομένως, αναμένουμε ότι η μαγνητική ροή θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό.

$$\Delta\Phi = \oint_S d\mathbf{S}(\mathbf{B}' - \mathbf{B}) = \oint_S d\mathbf{S}(\nabla \times (\nabla\lambda)) = \oint d\mathbf{I} \cdot \nabla\lambda \quad (1.44)$$

Βλέπουμε πως η μαγνητική ροή παραμένει αναλλοίωτη μόνο αν $\lambda(\phi + 2\pi) = \lambda(\phi)$. Το χαρακτηριστικό αυτό της συνάρτησης βαθμίδας, αποτελεί κλειδί στην κατανόηση του δυναμικού Dirac. Έστω ο ιδιάζων μετασχηματισμός βαθμίδας $U = \exp(2ieg\phi)$, όπου η συνάρτηση βαθμίδας $\lambda(\mathbf{r}) = 2g\phi = 2g \arctan \frac{y}{x}$ ικανοποιεί την περιοδικότητα 2π . Τότε

$$\mathbf{A}^S \rightarrow \mathbf{A}^S - \frac{i}{e} e^{-2ieg\phi} \nabla e^{2ieg\phi} = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi} + \frac{2g}{r \sin\theta} \hat{\phi} = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi} \equiv \mathbf{A}^N \quad (1.45)$$

Η εξήγηση της σχέσης (1.45) είναι ότι ο μετασχηματισμός βαθμίδας που επιλέξαμε, οδηγεί σε περιστροφή της χορδής Dirac κατά γωνία π . Μια πιο σημαντική συνέπεια αυτού είναι ότι η θέση της χορδής εξαρτάται από τον εκάστοτε μετασχηματισμό βαθμίδας που θα επιλέξουμε. Παρουσιάζουμε για λόγους πληρότητας ότι μπορούμε ακόμα και να αλλάξουμε την μορφή της χορδής. Δύο ενδιαφέροντα παραδείγματα είναι το δυναμικό Schwinger, όπου η χορδή εκτείνεται σε όλο τον άξονα z και το δυναμικό Banderet [25], όπου το δυναμικό είναι πλέον ιδιάζων σε όλο το ημιπίπεδο ($x \geq 0, y \geq 0$).

$$\mathbf{A}^S \rightarrow \mathbf{A}^S - \frac{i}{e} e^{-ieg\phi} \nabla e^{ieg\phi} = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi} + \frac{g}{r \sin\theta} \hat{\phi} = \frac{g \cos\theta}{r \sin\theta} \hat{\phi} \equiv \mathbf{A}^{Sch} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{A}^N \rightarrow \mathbf{A}^N - \frac{i}{e} e^{-ieA(\theta)\phi} \nabla e^{ieA(\theta)\phi} = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\phi} - g \nabla [(1 + \cos \theta)\phi] = -\frac{g}{r} \phi \sin \theta \hat{\phi} \equiv \mathbf{A}^B \quad (1.47)$$

Άμεσο αποτέλεσμα αυτών είναι ότι το πεδίο της χορδής δεν είναι φυσικό μέγεθος. Εξαρτάται καθαρά από τον μετασχηματισμό βαθμίδας, κάτι το οποίο το καθιστά μη παρατηρήσιμο. Παρ'όλ'αυτά, δεν μπορούμε να το απαλείψουμε χρησιμοποιώντας κάποιον μετασχηματισμό[28]. Δεδομένου ότι η χορδή Dirac δεν είναι παρατηρήσιμο μέγεθος, θα μπορούσε να συμπεράνει κανείς εκ πρώτης όψεως ότι δεν αποτελεί θέμα μείζονος σημασίας. Κάτι τέτοιο, όπως θα φανεί παρακάτω, θα ήταν σημαντική παρανόηση καθώς η χορδή Dirac θα μας δώσει έναν πολύ κομψό τρόπο για εξηγήσουμε την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου. Αυτός είναι ένας βασικός λόγος που τα μαγνητικά μονόπολα ως αντικείμενο έρευνας έχουν επιμείνει στο χρόνο από το 1930, παρά την έλλειψη πειραματικών αποτελεσμάτων. Το μοναδικό πείραμα που είχε μη αρνητικά αποτελέσματα έγινε το 1982 από τον Cabrera [6] με μόλις μια παρατήρηση σε διάστημα 150 ημερών που έφερε την υπογραφή μονοπόλου Dirac. Κανένα άλλο πείραμα από τότε δεν έχει καταφέρει να έχει το οποιοδήποτε θετικό αποτέλεσμα.

1.3 Η συνθήκη κβάντωσης Dirac

Στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό, μόνο τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι παρατηρήσιμα. Τα δυναμικά είναι βοηθητικές μαθηματικές ποσότητες, που μας διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Κβαντομηχανικά, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Το διανυσματικό δυναμικό επιρραάζει τη φάση της κυματοσυνάρτησης. Θεωρούμε σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο q σε κλειστή τροχιά C γύρω από περιοχή μη μηδενικής μαγνητικής ροής. Εκτελώντας έναν πλήρη κύκλο, η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου θα πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα φάσης Aharonov-Bohm[2].

$$U[C] = \exp\left(iq \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}\right) \quad (1.48)$$

Θεωρώντας τώρα ένα μαγνητικό μονόπολο με την χορδή Dirac στον αρνητικό ημιάξονα z , η (1.48) θα μπορούσε να μας δώσει τον τρόπο να παρατηρήσουμε τη χορδή, κάτι το οποίο δε-ίξαμε ότι δεν γίνεται. Αν δεν υπήρχε η χορδή, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον πλήρη κύκλο θα μηδενιζόταν στο όριο μικρής τροχιάς, αφήνοντας τη φάση της κυματοσυνάρτησης αναλλο-ίωτη. Αν η χορδή, δηλαδή, είναι πράγματι μη παρατηρήσιμη, αναμένουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Υπολογίζοντας τον ολοκλήρωμα για $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^N$, έχουμε

$$q \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = q \int_C d\phi A_\phi = 2\pi q g (1 - \cos \theta) = 4\pi q g \quad (1.49)$$

για $\theta = \pi$. Προκειμένου, λοιπόν, η χορδή να μην είναι παρατηρήσιμη, πρέπει να απαιτήσουμε

$$e^{4i\pi q g} = 1 \quad (1.50)$$

$$qg = \frac{n}{2} \quad (1.51)$$

Η σχέση (1.51) είναι γνωστή ως συνθήκη χβάντωσης του Dirac. Όλα τα πιθανά φορτία q και g πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη χβάντωσης. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε (q, g) έχουμε

$$q = kq_{min} \quad (1.52)$$

$$g = mg_{min} \quad (1.53)$$

$$q_{min}g_{min} = \frac{1}{2} \quad (1.54)$$

Επομένως, η παρατήρηση μαγνητικού μονοπόλου θα προσέφερε μια εξήγηση για την χβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου. Μια σημαντική συνέπεια της (1.54) είναι ότι θέτοντας $g = \frac{1}{2e}$ και επαναφέροντας τις σταθερές \hbar, c μπορούμε να δούμε ότι

$$\frac{g}{e} = \frac{\hbar c}{2e^2} = \frac{1}{2\alpha} \approx \frac{137}{2} \quad (1.55)$$

Δηλαδή, η δύναμη Coulomb μεταξύ δύο μαγνητικών μονοπόλων ελάχιστου μαγνητικού φορτίου είναι $(\frac{137}{2})^2 \approx 4700$ φορές ισχυρότερη από αυτή μεταξύ δύο ηλεκτρονίων, κάτι το οποίο δυσχεραίνει την πιθανότητα παρατήρησής τους.

Τονίζουμε εδώ ότι επιλέξαμε σωματίδιο χωρίς μαγνητικό φορτίο. Αν το σωματίδιο ήταν κάποιο δυόνιο (θεωρητικό σωματίδιο με ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο), θα είχε και μια δική του χορδή Dirac. Παρ'ολ'αυτά το αποτέλεσμα θα έμενε ίδιο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που και τα δύο σωματίδια είναι δυόνια. Τότε, ο παράγοντας φάσης δε θα ήταν ίδιος. Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε σε σχέση με την ηλεκτρομαγνητική δεικνότητα. Η συνθήκη χβάντωσης πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς $O(2)$ και πρέπει να καταλήγει στην σχέση (1.51), αν κάποιο σωματίδιο έχει μόνο μαγνητικό φορτίο. Προκύπτει ότι η γενικευμένη έκφραση χβάντωσης είναι[11]

$$q_1g_2 - q_2g_1 = \frac{n}{2} \quad (1.56)$$

Μέχρι στιγμής έχουμε επικεντρωθεί αποκλειστικά στην $U(1)$ ως συμμετρία βαθμίδας. Καταλήξαμε στο ότι, θεωρώντας το φορτίο e ως τον ελάχιστο δυνατό φορτίο, το ελάχιστο δυνατό μαγνητικό φορτίο που μπορεί να υπάρχει είναι $\frac{1}{2e}$. Αν θεωρήσουμε άλλες συμμετρίες βαθμίδας, όπως την $SU(3)$ της QCD, τότε θα έχουμε περαιτέρω συνεισφορές στον παράγοντα φάσης. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι τα φορτία των κουάρκ είναι $\frac{e}{3}$, κάτι το οποίο θα οδηγούσε σε ελάχιστο στο μαγνητικό φορτίο $\frac{3}{2e}$. Αναφέρουμε για πληρότητα ότι, αν το μονόπολο έχει και φορτίο χρώματος, η αλληλεπίδραση σε επίπεδο χρωμοδυναμικής δίνει μια παραπάνω φάση, τέτοια ώστε το ελάχιστο μαγνητικό φορτίο της $U(1)$, $\frac{1}{2e}$, ισχύει[28]. Δεν θα εισχωρήσουμε παραπάνω σε επίπεδο χρωμοδυναμικής στην εργασία αυτή.

Η συνθήκη χβάντωσης προκύπτει με έναν αρκετά πιο όμορφο και μαθηματικό τρόπο θεωρώντας την κίνηση ηλεκτρικού φορτίου e μέσα σε μαγνητικό πεδίο στατικού μονοπόλου. Θα περίμενε κανείς πως, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του πεδίου, η στροφορμή του φορτίου e

διατηρείται. Θα δούμε πως προκύπτει μια σημαντική διαφοροποίηση. Θεωρούμε την εξίσωση κίνησης του φορτίου μέσα στο πεδίο.

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \frac{eg}{r^3} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right] \quad (1.57)$$

Άρα, για τη στροφορμή του συστήματος έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})}{dt} = \left[\mathbf{r} \times m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right] \\ &= \left[\mathbf{r} \times \frac{eg}{r^3} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right] \right] \\ &= \frac{eg}{mr^3} [\mathbf{L} \times \mathbf{r}] \\ &= eg \frac{r^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \\ &= eg \frac{r\mathbf{v} - v\mathbf{r}}{r^2} \\ \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= eg \frac{d\hat{r}}{dt} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Παρατηρούμε ότι η συνηθισμένη στροφορμή $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ δεν είναι σταθερά της κίνησης. Αντί αυτού έχουμε πως η ποσότητα που διατηρείται είναι η

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} - eg\hat{r} \quad (1.59)$$

όπου το \hat{r} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το μαγνητικό στο ηλεκτρικό φορτίο. Μπορούμε να εξάγουμε τα παραπάνω αποτελέσματα γρηγορότερα, αν θυμηθούμε ότι η κλασική στροφορμή ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρικά φορτισμένου σωματιδίου στη θέση \mathbf{r} και μαγνητικού πεδίου μονοπόλου δίνεται από το παρακάτω χωρικό ολοκλήρωμα μέσω του διανύσματος Poynting [18]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{eg} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r [(\mathbf{B}\mathbf{r})\mathbf{E} - (\mathbf{E}\mathbf{r})\mathbf{B}] \\ &= \frac{g}{4\pi} \int d^3r \frac{1}{r} [\mathbf{E} - (\mathbf{E}\hat{r})\hat{r}] \\ &= \frac{g}{4\pi} \int d^3r (\mathbf{E} \cdot \nabla) \hat{r} \\ &= \frac{g}{4\pi} \int d^3r [\nabla(\mathbf{E}\hat{r}) - (\nabla \cdot \mathbf{E})\hat{r}] \\ \mathbf{L}_{eg} &= -eg\hat{r} \end{aligned} \quad (1.60)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.61)$$

και την ταυτότητα

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla)\hat{r}f(r) = \frac{f(r)}{r}[\mathbf{E} - \hat{r}(\mathbf{E}\hat{r})] - \hat{r}(\mathbf{E}\hat{r})\frac{\partial f}{\partial r} \quad (1.62)$$

Συνεπώς, η συνολική στροφορμή είναι απλά το άθροισμα της στροφορμής του ηλεκτρικού φορτίου και της στροφορμής των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Υπενθυμίζουμε ότι η προβολή της στροφορμής σε οποιαδήποτε κατεύθυνση πρέπει να είναι κβαντισμένη, κάτι το οποίο μας οδηγεί στην συνθήκη κβάντωσης Dirac.

$$\mathbf{L} \cdot \hat{r} = -eg \quad (1.63)$$

Κατά αναλογία επίσης με την γενικευμένη συνθήκη κβάντωσης, αν υποθέσουμε δύο δυόνια, τότε τα πεδία μας θα είναι

$$\mathbf{E} = e_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{E}(e_2) \quad (1.64)$$

$$\mathbf{B} = g_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{B}(g_2) \quad (1.65)$$

και η στροφορμή θα προκύψει

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{dd} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left(\left[\mathbf{r} \times \left(e_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{B}(g_2) \right) \right] + \left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{E}(e_2) \times g_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \right) \\ &= \frac{e_1}{4\pi} \int d^3r [\nabla \cdot \mathbf{B}(g_2)]\hat{r} - \frac{g_1}{4\pi} \int d^3r [\nabla \cdot \mathbf{E}(e_2)]\hat{r} \\ \mathbf{L}_{dd} &= (e_1g_2 - g_1e_2)\hat{r} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Οι τρόποι με τους οποίους αποδείξαμε την συνθήκη κβάντωσης δεν έχουν καμία σχέση με τη συνήθη προσέγγιση. Στην κβαντομηχανική, η κβάντωση κάποιου μεγέθους προκύπτει από το διακριτό μέρος του φάσματος των ιδιοτιμών ενός ερμιτιανού τελεστή. Η δική μας περίπτωση είναι εντελώς διαφορετική, καθώς το γινόμενο του ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου δεν είναι ιδιοτιμή κάποιου κβαντομηχανικού τελεστή. Ο λόγος για αυτό είναι ότι η συνθήκη κβάντωσης Dirac έχει τοπολογική προέλευση. Συγκεκριμένα, όπως θα δούμε παρακάτω, η γλώσσα της τοπολογίας δίνει ισχυρά εργαλεία στην κατανόηση των μαγνητικών μονοπόλων και συχνά απαιτείται τοπολογική ερμηνεία των αποτελεσμάτων μας.

1.4 Μαγνητικά μονόπολα χωρίς χορδές

Θα μπορούσε να πει κανείς ότι, ενώ έχουμε δείξει ότι η χορδή Dirac δεν είναι φυσικό μέγεθος και επομένως μη παρατηρήσιμο, είναι απογοητευτικό να μη μπορούμε να βρούμε λύση του συστήματος (1.28),(1.29) που να μην την περιέχει. Εξάλλου, όπως προαναφέραμε, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιο μετασχηματισμό βαθμίδας για να την απαλείψουμε. Η ενθάρρυνση για εύρεση λύσης χωρίς την ύπαρξη χορδής είναι ένα φυσικό επόμενο. Αφού δεν γίνεται να βρούμε διανυσματικό δυναμικό καθολικά ορισμένο που να μας αναπαράγει το σωστό μαγνητικό πεδίο, ίσως θα έπρεπε να αλλάξουμε τον τρόπο που προσεγγίζουμε το πρόβλημα.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό δυναμικό σε χώρο με σφαιρική συμμετρία, όπου στο κέντρο τοποθετούμε ένα μαγνητικό μονόπολο. Μπορούμε να αποφύγουμε την ύπαρξη χορδών με τον ακόλουθο τρόπο: Χωρίζουμε τον χώρο σε άνω και κάτω ημισφαίριο και αφήνουμε τα ημισφαίρια να τέμνονται σε μια κοινή απειροστή ζώνη. Ορίζουμε ένα διανυσματικό δυναμικό στο κάθε ένα, τέτοιο ώστε να μην περιέχει ιδιάζοντα σημεία στο πεδίο ορισμού του. Για ευκολία μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη σχέση (1.45). Δηλαδή:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A}^N = g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} & \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right] \\ \mathbf{A}^S = -g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} & \theta \in \left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \pi\right] \end{cases} \quad (1.67)$$

Βλέπουμε ότι οι \mathbf{A}^N και \mathbf{A}^S δεν περιέχουν ιδιάζοντα σημεία στους χώρους που ορίζονται. Επίσης, ο στροβιλισμός αυτών μας δίνει πράγματι το μαγνητικό πεδίο μονοπόλου στον εκάστοτε χώρο. Απαιτούμε τώρα, στο κοινό τους σημείο $\theta = \frac{\pi}{2}$ για $\varepsilon \rightarrow 0$, τα δύο δυναμικά να περιγράφουν το ίδιο φυσικό σύστημα. Αυτό σημαίνει πολύ απλά ότι πρέπει να διαφέρουν κατά κάποιο μετασχηματισμό βαθμίδας. Πράγματι, παρατηρούμε πως

$$\mathbf{A}^N(\theta = \frac{\pi}{2}) - \mathbf{A}^S(\theta = \frac{\pi}{2}) = 2g = -\frac{i}{e}(\nabla U)U^{-1} \quad (1.68)$$

για $U = \exp(2ieg\phi)$. Αν τώρα το $U = \exp(2ieg\phi)$ δεν είναι μονότιμη συνάρτηση, τότε η αλλαγή στη φάση κυματοσυνάρτησης ηλεκτρονίου, που εκτελεί κλειστή τροχιά πάνω στον ισημερινό της σφαίρας δεν μπορεί να οριστεί. Επομένως, πρέπει ακόμα να απαιτήσουμε ότι [23]

$$eg = \frac{n}{2} \quad (1.69)$$

και καταλήγουμε πάλι στην συνθήκη κβάντωσης του Dirac, χωρίς να εμφανίζεται αυτή τη φορά η χορδή.

Αναφέρουμε για πληρότητα ότι η συνθήκη κβάντωσης θα προκύψει για κάθε διανυσματικό δυναμικό που μας αναπαράγει το σωστό μαγνητικό πεδίο. Αρχεί, βέβαια, η διαδικασία να παραμείνει ίδια. Χωρίζουμε τον χώρο σε περιοχές και ορίζουμε δυναμικά σε κάθε περιοχή που δεν περιέχουν ιδιάζοντα σημεία (στην περιοχή που τα ορίσαμε). Αν τα δυναμικά διαφέρουν κατά έναν

μετασχηματισμό βαθμίδας $U(\phi)$ στην περιοχή που οι δύο χώροι τέμνονται, η συνθήκη κβάντωσης θα προκύψει από την ανάγκη μονοτιμίας της $U(\phi)$.

Ο ακέραιος n της συνθήκης κβάντωσης, που ορίζει προφανώς το μαγνητικό φορτίο του μονοπόλου, είναι ένας αριθμός περιέλιξης (winding number). Εκφράζει το πόσες φορές η $U(\phi)$ καλύπτει την ομάδα βαθμίδας $U(1)_{em}$, καθώς το ϕ αλλάζει από 0 σε 2π . Σε πιο απλά λόγια, γνωρίζουμε ότι ως πολλαπλότητα (manifold) ισχύει ότι $U(1)_{em} \sim S^1$. Άρα, ο αριθμός περιέλιξης είναι ο αριθμός των φορών που θα καλύψουμε την S^1 , όταν η αναπαράσταση της $U(1)_{em}$ που χρησιμοποιούμε είναι $U(\phi)$. Το αποτέλεσμα αυτού είναι πως η συνθήκη κβάντωσης έχει μια καθαρά τοπολογική προέλευση, ήτοι **το μαγνητικό φορτίο είναι κβαντισμένο επειδή ο αριθμός περιέλιξης πρέπει να είναι ακέραιος**. Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε την εικόνα, αφήνοντας την ακτίνα r της σφαίρας να μεταβάλλεται. Τότε, η $U(\phi, r)$ και ο αριθμός περιέλιξης n θα είναι συνεχείς συναρτήσεις της ακτίνας, αφού τα δυναμικά είναι μη-ιδιάζοντα. Όμως, ο n είναι ακέραιος από ορισμό. Άρα, σταθερός και ανεξάρτητος της r . Αν δεν είναι μηδέν, προκύπτει ότι το μαγνητικό φορτίο είναι περιορισμένο σε έναν αυθαίρετα μικρό, σφαιρικό χώρο. Συνεπώς, το μονόπολο Dirac είναι ένα ιδιάζον σημείο (singular point) ή καλύτερα μια 'τοπολογική ατέλεια'.

1.5 Τοπολογική ερμηνεία του μονόπολου Dirac

Αναφέραμε ήδη ότι η γλώσσα της τοπολογίας μας παρέχει ισχυρά εργαλεία στην κατανόηση της συνθήκης κβάντωσης Dirac. Θα προσπαθήσουμε εδώ να παρουσιάσουμε μια εποπτική εικόνα της τοπολογικής ερμηνείας του μονοπόλου, χωρίς να μπούμε σε εξαντλητικές λεπτομέρειες.

Θεωρούμε πεδίο βαθμίδας (σε σφαιρικό χώρο) στην άλγεβρα Lie κάποιας τυχαίας ομάδας Lie G . Όπως προαναφέραμε, μπορούμε να περιγράψουμε το πεδίο βαθμίδας θεωρώντας μη-ιδιάζοντα δυναμικά βαθμίδας $\mathbf{A}^N, \mathbf{A}^S$ στα άνω και κάτω ημισφαίρια και μια μονότιμη συνάρτηση μετασχηματισμού βαθμίδας $U(\phi)$, η οποία θα συνδέει τα δύο δυναμικά στην κοινή τους περιοχή. Τότε, η $U(\phi)$ εκφράζει μια κλειστή τροχιά (loop) στην ομάδα G , δηλαδή έναν εικονισμό από τον κύκλο στην G . Ορίζουμε το τοπολογικό φορτίο που περιέχεται στην σφαίρα (ή στη δική μας περίπτωση, το μαγνητικό φορτίο) ως τον αριθμό περιέλιξης της $U(\phi)$. Αναφέρουμε εδώ ότι η διαδικασία αυτή οδηγεί στη μη αβελιανή γενίκευση του αβελιανού μοντέλου για το μαγνητικό μονόπολο.

Για παράδειγμα, έστω ότι η ομάδα βαθμίδας είναι η $G = SO(3)$. Γνωρίζουμε ότι η $SO(3)$ είναι η ομάδα στροφών σε 3 διαστάσεις. Κάθε στοιχείο της ομάδας μπορεί να οριστεί μέσω ενός μοναδιαίου διανύσματος \hat{n} , το οποίο ορίζει τον άξονα στροφής, και μια γωνία στροφής $\phi \in [0, 2\pi]$. Οι στροφές κατά π περί των \hat{n} και $-\hat{n}$ αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο της ομάδας. Το κέντρο αντιστοιχεί στο ταυτοτικό στοιχείο (στροφή κατά $\phi = 0$ περί οποιονδήποτε άξονα). Συνεπώς, ως πολλαπλότητα, είναι ισοδύναμη με την σφαίρα S^3 , όπου τα αντιδιαμετρικά σημεία έχουν ταυτοποιηθεί. Επομένως, υπάρχουν κλειστές τροχιές στην $SO(3)$, οι οποίες ξεκινούν από κάποιο σημείο της S^3 και καταλήγουν στο αντιδιαμετρικό της που δεν μπορούν να παραμορφωθούν με συνεχή τρόπο σε σημείο, αφού αυτές οι τροχιές στην S^3 **δεν** είναι κλειστές. Τέτοιου είδους τροχιές έχουν αριθμό περιέλιξης $n = 1$. Ομοίως, μια τροχιά που ξεκινάει και

καταλήγει στο ίδιο σημείο της S^3 μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο σε σημείο και έχει αριθμό περιέλιξης $n = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός περιέλιξης n μιας κλειστής τροχιάς στην $SO(3)$ μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές $n = 0$, $n = 1$ και το τοπολογικό φορτίο σε μια θεωρία βαθμίδας $SO(3)$ μπορεί να είναι 0 ή 1. Ανακεφαλαίωνοντας, έχουμε ότι

$$\text{Κλειστή τροχιά στην } SO(3) \rightarrow \begin{cases} \text{Closed in } S^3 & n = 0 \\ \text{Open in } S^3 & n = 1 \end{cases}$$

Κλειστές τροχιές σε μία ομάδα Lie, G , που ξεκινούν και καταλήγουν στο ταυτοτικό στοιχείο της G (δηλαδή τροχιές που ξεκινούν και καταλήγουν στο ίδιο σημείο x_0 της ισοδύναμης πολλαπλότητας της G), ανήκουν σε τοπολογικές κλάσεις ισοδυναμίας, που ονομάζονται κλάσεις ομοτοπίας[20]. Λέμε ότι δύο τροχιές ανήκουν στην ίδια κλάση ομοτοπίας, αν μπορούμε να παραμορφώσουμε με συνεχή τρόπο τη μία στην άλλη. Θεωρούμε, λοιπόν, δύο τροχιές $f(t), g(t)$. Εκφράζουμε την κλάση ομοτοπίας τους ως $[f(t)]$ και $[g(t)]$ αντίστοιχα. Παρατηρεί κανείς ότι η σύνθεση $[f(t)] \circ [g(t)] = [f(t) \circ g(t)]$, δηλαδή η σύνθεση οποιασδήποτε τροχιάς ομοτοπικής με την $f(t)$ με οποιαδήποτε τροχιά ομοτοπική με την $g(t)$ είναι ομοτοπική με τη σύνθεση των δύο τροχιών.

Το ενδιαφέρον είναι ότι για κάθε πολλαπλότητα M , έχουμε την σταθερή τροχιά $I(t) = x_0$, η οποία είναι ομοτοπική με όλες τις τροχιές που παραμορφώνονται με συνεχή τρόπο σε σημείο. Η ομοτοπική της κλάση είναι η $[I]$. Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε άλλη τροχιά $g(t)$ ισχύει πως $[g] \circ [I] = [I] \circ [g] = [g \circ I] = [g]$ και $[g] \circ [g^{-1}] = [I]$. Επομένως, οι κλάσεις ομοτοπίας έχουν δομή ομάδας, με το $[I]$ να είναι το ταυτοτικό στοιχείο. Η ομάδα αυτή ονομάζεται πρώτη θεμελιώδη ομάδα της πολλαπλότητας M ή πρώτη ομοτοπική ομάδα της M και αναφέρεται ως $\pi_1(M)$. Αν η $\pi_1(M)$ περιέχει μόνο το ταυτοτικό στοιχείο, τότε όλες οι τροχιές παραμορφώνονται με συνεχή τρόπο σε σημείο. Τότε, χάριν συντομίας, $\pi_1(M) = 0$ και η εν λόγω πολλαπλότητα είναι απλά συνεκτική.

Για κάθε μη συνεκτική ομάδα Lie, G , υπάρχει μία ομάδα G' , η οποία καλύπτει την G και είναι απλά συνεκτική, ήτοι $\pi_1(G') = 0$. Τότε, η G είναι ισομορφική στην ομάδα πηλίκου (quotient group) G'/K , όπου K μια υποομάδα του κέντρου της G' . Το κέντρο της G' είναι μια διακριτή υποομάδα της G' , η οποία μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της G' . Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε την G ως την ομάδα G' , αν ταυτοποιήσουμε όλα τα στοιχεία τα οποία προκύπτουν από τη δράση της K πάνω στα στοιχεία της G' . Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τροχιές της G που ξεκινάνε και καταλήγουν στο ταυτοτικό στοιχείο της G αντιστοιχούν σε τροχιές της G' που ξεκινάνε και καταλήγουν σε κάποιο στοιχείο της K . Δηλαδή, η ομοτοπική κλάση μιας τροχιάς στην G εξαρτάται από το στοιχείο της K στο οποίο θα καταλήξει. Έχουμε ότι

$$\pi_1(G) = \pi_1(G'/K) = K \quad (1.70)$$

Αναφέρουμε εδώ, για λόγους πληρότητας, ότι η παραπάνω σχέση προκύπτει από μία πιο γενική έκφραση ως εξής: Έστω μία απλά συνεκτική ομάδα Lie, G' , με υποομάδα K . Αν η K δεν είναι συνεκτική, τότε περιέχει μια συνεκτική υποομάδα K_0 . Αν η K είναι συνεκτική, έχουμε $K_0 = K$. Τότε, η ομάδα πηλίκου K/K_0 ονομάζεται μηδενική ομοτοπική ομάδα και αναφέρεται

ως $\pi_0(K)$. Συνεπώς, η (1.70) μπορεί να γραφεί ως

$$\pi_1(G) = \pi_1(G'/K) = \pi_0(K) = \begin{cases} 0 & K \text{ connected} \\ K & K \text{ discrete} \end{cases} \quad (1.71)$$

Εδώ είναι ένα καλό σημείο να αρχίσουμε να συνδέουμε κάποια πράγματα. Η $SU(2)$ είναι η ομάδα των ορθομοναδιαίων (unitary) 2×2 πινάκων με $\det U = 1$. Κάθε τέτοιος πίνακας γράφεται στην βάση των πινάκων Pauli ως

$$U = b_0 + ib_i \sigma^i \quad (1.72)$$

όπου

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \quad (1.73)$$

Η τελευταία σχέση είναι η εξίσωση της S^3 . Συνεπώς, $SU(2) = S^3$ ως πολλαπλότητα. Η σχέση μεταξύ των ομάδων $SU(2)$ και $SO(3)$ φαίνεται καλύτερα αν εκφράσουμε την (1.72) ως

$$U = \cos \frac{\phi}{2} + i \hat{n}_i \sigma^i \sin \frac{\phi}{2} \quad (1.74)$$

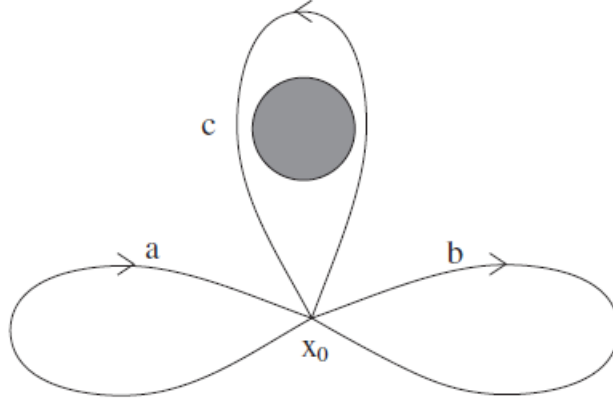
Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ενώ η $SO(3)$ καλύπτεται για $\phi \in [0, 2\pi]$, χρειαζόμαστε το διπλάσιο διάστημα για να καλύψουμε την $SU(2)$. Άρα, η $SU(2)$ καλύπτει την $SO(3)$ δύο φορές. Πιο συγκεκριμένα, για στροφή 2π , έχουμε τον μετασχηματισμό $-U$ αντί του ταυτοτικού. Συμπερασματικά, στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε:

$$\pi_1(SO(3)) = \pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2 \quad (1.75)$$

όπου η Z_2 είναι η κυκλική ομάδα με στοιχεία $(I, -I)$. Η σχέση (1.75) μεταφράζεται ως εξής: Όλες οι κλειστές τροχιές στην $SO(3)$ είναι οι τροχιές στην $SU(2)$ οι οποίες ξεκινάνε και καταλήγουν είτε στο ίδιο σημείο είτε στο αντιδιαμετρικό της S^3 , που είναι η ισοδύναμη πολλαπλότητα της $SU(2)$. Μα αυτό είναι ακριβώς αυτό το οποίο είδαμε στο παράδειγμα! Θα ρώταγε τότε κανείς, πώς σχετίζεται ο αριθμός περιέλιξης με την θεμελιώδη ομάδα. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε κυκλική ομάδα Z_n είναι ισομορφική με την ομάδα άθροισης των ακεραίων $Z \bmod n$. Η ομάδα άθροισης των ακεραίων $\bmod 2$ περιέχει τα στοιχεία $(0, 1)$ τα οποία εκφράζουν ακριβώς τις επιτρεπτές τιμές του αριθμού περιέλιξης, αφού υπό σύνθεση κλειστών τροχιών, οι αριθμοί περιέλιξης αθροίζονται για κάθε τροχιά. Έχουμε τώρα όλα τα εργαλεία για να ερμηνεύσουμε το τοπολογικό φορτίο της $U(1)_{em}$. Για $G = U(1)$, έχουμε ότι η απλά συνεκτική ομάδα G' είναι η ομάδα άθροισης των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , ενώ το κέντρο της είναι η ομάδα άθροισης των ακεραίων Z . Επομένως, παρατηρούμε ότι

$$\pi_1(S^1) = Z \quad (1.76)$$

κάτι το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός περιέλιξης για την S^1 παίρνει ακέραιες τιμές. Συνεπώς, αφού ορίσαμε την $U(\phi) = \exp(2ieg\phi)$ να εκφράζει μια κλειστή τροχιά στην ομάδα $U(1)$, βλέπουμε ότι στη συνθήκη κβάντωσης, ο ακέραιος n εκφράζει πράγματι τον αριθμό



Σχήμα 1.2: Τροχιές πάνω στον \mathbb{R}^2

περιέλιξης και το μαγνητικό φορτίο είναι τοπολογικό. Αυτό φαίνεται καλύτερα σχηματικά ως εξής: Θεωρούμε Ευκλείδειο επίπεδο, όπου έχουμε αφαιρέσει έναν δίσκο.

Οι τροχιές a και b ανήκουν σαφώς στην ίδια ομοτοπική κλάση, ήτοι $[I]$. Η τροχιά c χαρακτηρίζεται από τον αριθμό περιέλιξης, δηλαδή τον αριθμό των φορών που περικλείει την σκιασμένη περιοχή με την αντιωρολογιακή(ωρολογιακή) φορά ως θετική(αρνητική). Συνεπώς, οι τροχιές a και b έχουν αριθμό περιέλιξης $n = 0$, ενώ η c έχει $n = 1$. Όπως προαναφέραμε, υπό σύνθεση κλειστών τροχιών γύρω από κάποιο σημείο, οι αριθμοί περιέλιξης αθροίζονται για κάθε τροχιά. Γενικεύοντας, έχουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα της εν λόγω πολλαπλότητας θα είναι η Z . Το αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια συλλογιστική, θα παραμείνει ίδιο αν περιορίσουμε την πολλαπλότητα σε ένα δαχτυλίδι S^1 . Καταλήγουμε δηλαδή στο ότι $\pi_1(S^1) = Z$.

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο γεγονός ότι η συνθήκη κβάντωσης Dirac είναι τοπολογικής προέλευσης και σχετίζεται άμεσα με τα τοπολογικά χαρακτηριστικά της S^1 που είναι η ισόδυναμη πολλαπλότητα της ομάδας $U(1)$. Τονίζουμε ότι τίποτα από τα παραπάνω δεν αποτελεί μαθηματική απόδειξη της ύπαρξης μονοπόλου, καθώς τα πάντα ξεκίνησαν από την απαίτηση ο ηλεκτρομαγνητικός δυισμός να διατηρείται στην παρουσία φορτίων, και στη συνέχεια παρουσιάσαμε διάφορες ενδείξεις που υποστήριζαν αυτή την πρόταση. Όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, ενώ το μονόπολο Dirac μπήκε με το χέρι στην αβελιανή θεωρία ηλεκτρομαγνητισμού, το μονόπολο t'Hooft Polyakov προκύπτει με πολύ πιο φυσικό τρόπο[15] από μη αβελιανά μοντέλα, όπως αυτό των Georgi-Glashow[12].

Κεφάλαιο 2

Το μονόπολο t'Hooft-Polyakov

Η κινητήρια δύναμη που ώθησε στην έρευνα για την ύπαρξη μονοπόλων από το 1930, όπου ο Dirac πρότεινε την έννοια του μαγνητικού φορτίου, ήταν η πιθανή εξήγηση της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου. Όμως, με την έναρξη μεγάλων ενοποιημένων θεωριών στη φυσική, το επιχείρημα αυτό έχασε την ισχύ του με το πέρασμα των χρόνων. Γνωρίζουμε πως ο τελεστής του ηλεκτρικού φορτίου είναι ο γεννήτορας της ομάδας $U(1)$. Η συνθήκη κβάντωσης του φορτίου προκύπτει σε ενοποιημένα μοντέλα, αν η ομάδα του ηλεκτρομαγνητισμού $U(1)$ θεωρηθεί υποομάδα κάποιας ανώτερης μη αβελιανής ομάδας βαθμίδας. Σε αυτή την περίπτωση, ο γεννήτορας του ηλεκτρικού φορτίου ικανοποιεί μη τετριμμένες σχέσεις αντιμετάθεσης με τους άλλους γεννήτορες της ομάδας. Επομένως, η συνθήκη κβάντωσης αντιμετωπίζεται σήμερα ως υποστηρικτικό επιχείρημα των ενοποιημένων θεωριών. Σύντομα παρατηρήθηκε όμως, ότι οι δύο εξηγήσεις κβάντωσης του φορτίου, είναι στην πραγματικότητα οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Όταν εντάσσουμε την $U(1)$ σε κάποιο ενοποιημένο μοντέλο, στο οποίο έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας μέσω του μηχανισμού Higgs, προκύπτουν λύσεις μαγνητικών μονοπόλων. Πρωτού προχωρήσουμε στο μοντέλο των Georgi-Glashow, θεωρούμε κατάλληλο να παρουσιάσουμε κάποιες βασικές αρχικές έννοιες.

2.1 Θεωρίες βαθμίδας

Θεωρία βαθμίδας ονομάζεται μία φυσική θεωρία, όπου η μορφή της αλληλεπίδρασης ορίζεται από την απαίτηση η Λαγκρανζιανή της θεωρίας να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς κάποιας συνεχούς ομάδας συμμετρίας[17]. Μπορούμε να χτίσουμε μία θεωρία βαθμίδας ξεκινώντας από μία θεωρία χωρίς αλληλεπιδράσεις (δηλαδή μόνο κινητικούς όρους και όρους μάζας), η οποία χαρακτηρίζεται από κάποια καθολική συμμετρία. Ας επιλέξουμε την Λαγκρανζιανή Dirac για φερμιόνια[26].

$$L_D = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (2.1)$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς $U(1)$, ήτοι

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{iq\phi}\Psi \quad (2.2)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}e^{-iq\phi} \quad (2.3)$$

Τότε, ένας τοπικός μετασχηματισμός θα ήταν της μορφής $U = e^{iq\phi(x)}$. Επειδή $[\partial_\mu, e^{iq\phi(x)}] \neq 0$, η συμμετρία της (2.1) χάνεται. Για να διατηρήσουμε την αναλλοιώτητα, εισάγουμε την έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (2.4)$$

όπου A_μ είναι τα πεδία βαθμίδας της θεωρίας. Για την συναλλοίωτη παράγωγο ισχύει ότι

$$D_\mu(U\Psi) = UD_\mu\Psi \quad (2.5)$$

προκειμένου η συμμετρία να διατηρείται. Εύκολα εξάγει κανείς από την (2.5) ότι τα πεδία βαθμίδας πρέπει να μετασχηματίζονται ως:

$$\begin{aligned} D_\mu(U\Psi) &= UD_\mu\Psi \\ \partial_\mu(U\Psi) + U\partial_\mu\Psi + iqA_\mu U\Psi &= U\partial_\mu\Psi + iqUA_\mu\Psi \\ \partial_\mu U + iqA_\mu U &= iqUA_\mu \\ \frac{i}{q}\partial_\mu U - A_\mu U &= -UA_\mu \end{aligned}$$

$$A'_\mu = U^{-1}A_\mu U - \frac{i}{q}U^{-1}\partial_\mu U \quad (2.6)$$

ή ισοδύναμα

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (2.7)$$

Επομένως, για $U \in U(1) \rightarrow U = e^{iq\phi(x)}$, οι παραπάνω εξισώσεις μας δίνουν τους μετασχηματισμούς βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού

$$A'_\mu = A_\mu \pm \partial_\mu\phi \quad (2.8)$$

Αντικαθιστώντας την παραγωγή της (2.1) με την αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγο, βλέπουμε πως εμφανίζεται ο όρος αλληλεπίδρασης του φερμιονικού πεδίου με τα δυναμικά

$$L_D = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (2.9)$$

Το τελευταίο βήμα είναι να ελέγξουμε το αν η Λαγκρανζιανή του πεδίου βαθμίδας παραμένει και αυτή αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Υπενθυμίζουμε πως η Λαγκρανζιανή για πεδία με σπιν 1 δίνεται από τη σχέση

$$L_{proca} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad (2.10)$$

Στην ειδική περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, έχουμε πως η (2.10) κάτω από τους μετασχηματισμούς (2.8) παραμένει πράγματι αναλλοίωτη αν η μάζα του πεδίου βαθμίδας είναι μηδενική, κάτι το οποίο ισχύει, αφού το φωτόνιο, το οποίο είναι ο φορέας της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης, έχει μηδενική μάζα. Πράγματι,

$$L_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.11)$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (2.12)$$

$$L_{gauge} \rightarrow L'_{gauge} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \phi - \partial_\nu A_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \phi)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \phi - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \phi) \quad (2.13)$$

$$L_{gauge} \rightarrow L'_{gauge} = L_{gauge} \quad (2.14)$$

Καταλήγουμε στο ότι η τελική Λαγκρανζιανή για τη θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού είναι η ακόλουθη:

$$L_{em} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Τα παραπάνω γενικεύονται στις μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική. Θεωρούμε r φερμιονικά πεδία $\psi^i, i = 1, \dots, r$ και κάποια μη αβελιανή ομάδα G , με την οποία θα δράσουμε στα πεδία μέσω κάποιας αναπαράστασης U της G ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^r \end{pmatrix}, \quad \Psi \rightarrow U\Psi \quad (2.16)$$

Τονίζουμε σε αυτό το σημείο ότι αν η Ψ δεν εκφράζεται στην θεμελιώδη αναπαράσταση, αλλά στην συμπληρωματική (adjoint), τότε μετασχηματίζεται ως [16]

$$\Psi \rightarrow U\Psi U^{-1} \quad (2.17)$$

Αντίστοιχα, η συναλλοίωτη παράγωγος κάποιας θεωρίας βαθμίδας πρέπει να μετασχηματίζεται πάντα με συμπληρωματικό τρόπο

$$D_\mu \rightarrow U D_\mu U^{-1} \quad (2.18)$$

τέτοια ώστε

$$D_\mu \Psi \rightarrow (U D_\mu U^{-1})(U \Psi U^{-1}) = U(D_\mu \Psi)U^{-1} \quad (2.19)$$

αν η Ψ είναι σε συμπληρωματική αναπαράσταση, και

$$D_\mu \Psi \rightarrow (U D_\mu U^{-1})(U \Psi) = U(D_\mu \Psi) \quad (2.20)$$

αν η Ψ είναι στη θεμελιώδη αναπαράσταση.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση (2.5). Πράγματι, οι μετασχηματισμοί βαθμίδας που παρουσιάζονται στις (2.6) και (2.7) μπορούν να εκφράσουν πιο

συνοπτικά μέσω της (2.18). Χωρίς να αναλύσουμε το ζήτημα περαιτέρω, αναφέρουμε πως αυτό δικαιολογεί διαισθητικά την γεωμετρική προέλευση των θεωριών βαθμίδας[4].

Συνεχίζοντας, γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο μίας ομάδας Lie, G , όντας ισομορφική με μία C^∞ πολλαπλότητα, μπορεί να εκφραστεί μέσω της εκθετικής απεικόνισης

$$U = e^{i\theta^a T_a} \quad (2.21)$$

όπου θ^a είναι ένα σύνολο από m παραμέτρους και T_a είναι $m, r \times r$ πίνακες, οι οποίοι αναπαριστούν τους m γεννήτορες της G . Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις αντιμετάθεσης και κανονικοποίησης:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (2.22)$$

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (2.23)$$

όπου f^{abc} είναι οι σταθερές δομής της G . Εφόσον έχουμε m γεννήτορες, μπορούμε να εκτελέσουμε m ανεξάρτητους μετασχηματισμούς, το οποίο σημαίνει ότι χρειαζόμαστε m πεδία βαθμίδας A_μ^a για $a = 1, \dots, m$. Μπορούμε να εκφράσουμε, συνεπώς, τα πεδία βαθμίδας στη βάση των γεννητόρων της ομάδας ως εξής:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad (2.24)$$

Τότε, ορίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο ως $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ και απαιτώντας την σχέση $D_\mu \Psi \rightarrow (UD_\mu U^{-1})(U\Psi) = U(D_\mu \Psi)$, προκύπτει ο γνωστός μετασχηματισμός βαθμίδας της (2.7), $A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^{-1}$.

Όπως και με την περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού, μπορούμε να εισαγάγουμε, τώρα, τους βαθμούς ελευθερίας των πεδίων βαθμίδας, χρησιμοποιώντας τον αναλλοίωτο κινητικό όρο της L_{gauge} . Η σημαντική διαφοροποίηση που υπάρχει, σε σχέση με την αβελιανή περίπτωση, είναι πως ο $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, αφού η (2.7) δεν μπορεί πλέον να απλοποιηθεί στην (2.8). Ο ταυστής του πεδίου βαθμίδας στην μη αβελιανή περίπτωση ορίζεται ως [3]:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iq[A_\mu, A_\nu] \quad (2.25)$$

Θεωρούμε κατάλληλο να παραθέσουμε στο σημείο αυτό μερικά σχόλια.

Μπορούμε να εκφράσουμε τον ηλεκτρομαγνητικό ταυστή ως την “καμπυλότητα” του χώρου προκειμένου να ισχύει η συναλλοίωτη παράγωγος (2.4) [26]. Πράγματι, ακριβώς όπως υπολογίζουμε τον ταυστή καμπυλότητας Riemann στην γενική σχετικότητα [7] $[D_\mu, D_\nu]V^\lambda = R_{\mu\nu\alpha}^\lambda V^\alpha$, μπορούμε να ακολουθήσουμε εδώ την ίδια συλλογιστική πορεία:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\Psi &= ((\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu + iqA_\mu))\Psi \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \Psi + iq\partial_\mu(A_\nu \Psi) + iqA_\mu \partial_\nu \Psi - q^2 A_\mu A_\nu \Psi - \partial_\nu \partial_\mu \Psi - iq\partial_\nu(A_\mu \Psi) - iqA_\nu \partial_\mu \Psi + q^2 A_\mu A_\nu \Psi \\ &= iq(\partial_\mu A_\nu)\Psi + iqA_\nu \partial_\mu \Psi + iqA_\mu \partial_\nu \Psi - iq(\partial_\nu A_\mu)\Psi - iqA_\mu \partial_\nu \Psi - iqA_\nu \partial_\mu \Psi \\ &= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\Psi \\ &= iqF_{\mu\nu}\Psi \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu] \quad (2.26)$$

Το ενδιαφέρον είναι ότι η (2.26) είναι σαφώς αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, ανεξάρτητα από το αν η ομάδα είναι αβελιανή ή μη αβελιανή. Αυτό φαίνεται εύκολα, αν υπενθυμίσουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος πρέπει πάντα να μετασχηματίζεται με συμπληρωματικό τρόπο, όπως αναφέραμε παραπάνω. Ισχύει δηλαδή:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \quad (2.27)$$

Συνεπώς, ο ταυιστής του πεδίου βαθμίδας στην μη αβελιανή περίπτωση δίνεται:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \frac{1}{iq}(\partial_\mu\partial_\nu\Psi + iq\partial_\mu(A_\nu\Psi) + iqA_\mu\partial_\nu\Psi - q^2A_\mu A_\nu\Psi - \partial_\nu\partial_\mu\Psi - iq\partial_\nu(A_\mu\Psi) - iqA_\nu\partial_\mu\Psi + q^2A_\nu A_\mu\Psi) \\ &= \frac{1}{iq}(iq(\partial_\mu A_\nu)\Psi + iqA_\nu\partial_\mu\Psi + iqA_\mu\partial_\nu\Psi - iq(\partial_\nu A_\mu)\Psi - iqA_\mu\partial_\nu\Psi - iqA_\nu\partial_\mu\Psi - q^2(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\Psi) \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\Psi - \frac{q}{i}(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\Psi \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iq[A_\mu, A_\nu] \end{aligned}$$

όπου η τελευταία σχέση είναι ακριβώς η (2.25). Εάν επαναφέρουμε την σχέση $A_\mu = A_\mu^a T^a$, προκύπτει ότι ο ταυιστής πεδίου βαθμίδας μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iq[A_\mu, A_\nu] \\ F_{\mu\nu}^a T^a &= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a + iq[A_\mu^b T^b, A_\nu^c T^c] \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - qf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (2.28)$$

Επομένως, η Λαγκρανζιανή του πεδίου βαθμίδας δίνεται

$$L_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (2.29)$$

ή σε πιο συνοπτική μορφή, χρησιμοποιώντας την διαδικασία Casimir [13]:

$$L_{gauge} = -\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (2.30)$$

Καταλήγουμε στο ότι η τελική Λαγκρανζιανή για την μη αβελιανή περίπτωση είναι η

$$L = -\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi \quad (2.31)$$

Οφείλουμε, πριν προχωρήσουμε στον μηχανισμό Higgs και το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση που η Ψ είναι εκφρασμένη σε συμπληρωματική μορφή, δηλαδή $\Psi = \Psi^a T^a$, η συναλλοίωτη παράγωγος δρα στην Ψ ως εξής [1]:

$$D_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + iq[A_\mu, \Psi] \quad (2.32)$$

ή ισοδύναμα

$$D_\mu \Psi^a = \partial_\mu \Psi^a - gf^{abc} A_\mu^b \Psi^c \quad (2.33)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε την (2.32) ελέγχοντας αν η συγκεκριμένη σχέση μετασχηματίζεται ως $D_\mu \Psi \rightarrow U D_\mu \Psi U^{-1}$, προκειμένου ο κινητικός όρος του φερμιονικού πεδίου να παραμένει αναλλοίωτος. Πράγματι, εύκολα αποδεικνύουμε πως:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Psi \rightarrow \partial_\mu (U \Psi U^{-1}) &= (\partial_\mu U) \Psi U^{-1} + U (\partial_\mu \Psi) U^{-1} + U \Psi \partial_\mu U^{-1} \\ &= U (\partial_\mu \Psi) U^{-1} + (\partial_\mu U) U^{-1} U \Psi U^{-1} + U \Psi U^{-1} U \partial_\mu U^{-1} \\ &= U (\partial_\mu \Psi) U^{-1} + (\partial_\mu U) U^{-1} U \Psi U^{-1} - U \Psi U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} \end{aligned}$$

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow U (\partial_\mu \Psi) U^{-1} + [(\partial_\mu U) U^{-1}, U \Psi U^{-1}] \quad (2.34)$$

$$iq[A_\mu, \Psi] \rightarrow iq[U A_\mu U^{-1}, U \Psi U^{-1}] - [(\partial_\mu U) U^{-1}, U \Psi U^{-1}] \quad (2.35)$$

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + iq[A_\mu, \Psi] \rightarrow U (\partial_\mu \Psi) U^{-1} + iq[U A_\mu U^{-1}, U \Psi U^{-1}] = U D_\mu \Psi U^{-1} \quad (2.36)$$

2.2 Ο μηχανισμός Higgs

Θεωρούμε μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\Phi(x)$, το οποίο περιγράφεται από την Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi) (\partial^\mu \Phi^*) - \frac{M^2}{2} \Phi^2 - \frac{\lambda}{2} \Phi^4 \quad (2.37)$$

όπου

$$V(\Phi) = \frac{M^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{2} \Phi^4 \quad (2.38)$$

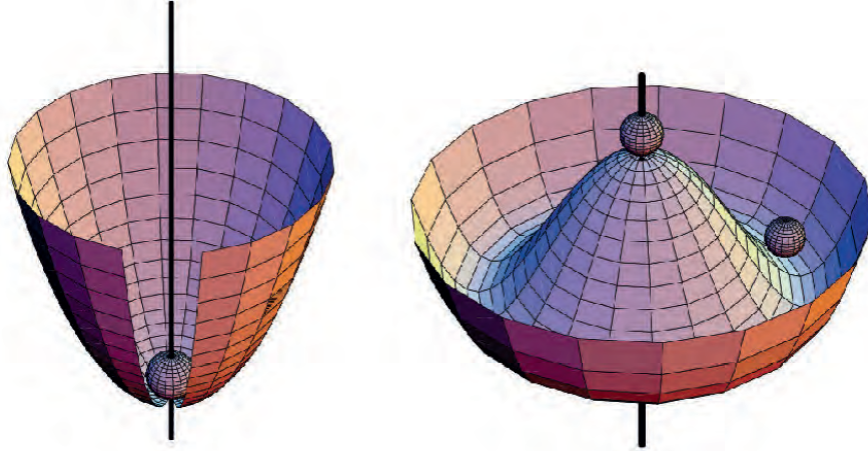
ορίζεται ως το δυναμικό Higgs. Η παραπάνω σχέση είναι αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς $U(1)$, $\Phi \rightarrow e^{i\theta} \Phi$. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε λύσεις, οι οποίες ελαχιστοποιούν την ενέργεια του συστήματος,

$$H = \frac{1}{2} (\partial_0 \Phi) (\partial_0 \Phi^*) + \frac{1}{2} (\partial_i \Phi) (\partial_i \Phi^*) + V(\Phi) \quad (2.39)$$

Εφόσον οι κινητικοί όροι της H είναι θετικά ορισμένοι, θα είναι μηδενικοί μόνο αν το Φ είναι σταθερό και αντιστοιχεί σε ελάχιστο της $V(\Phi)$. Παρατηρούμε, από την (2.38), ότι η $V(\Phi)$ έχει ελάχιστο μόνο αν $\lambda > 0$. Στην περίπτωση αυτή, το ελάχιστο της $V(\Phi)$ εξαρτάται από το πρόσημο του M^2 . Πιο συγκεκριμένα, για $M^2 \geq 0$, το ελάχιστο είναι η συμμετρική λύση $\Phi = 0$. Για $M^2 < 0$, έχουμε έναν γεωμετρικό τόπο ελαχίστων, δηλαδή τον κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο του Φ με ακτίνα

$$u = \left(\frac{-M^2}{2\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

Τα σημεία σε αυτόν το γεωμετρικό τόπο αντιστοιχούν σε αυθόρμητο σπάσιμο της $U(1)$.



Σχήμα 2.1: Το δυναμικό Higgs για $M^2 \geq 0$ (αριστερά) και $M^2 < 0$ (δεξιά)

Πράγματι, επιλέγοντας ένα σημείο ελαχίστου στον πραγματικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου Φ και γράφοντας το πεδίο Φ ως

$$\Phi = u + \psi(x) + i\chi(x) \quad (2.41)$$

βλέπουμε ότι η Λαγκρανζιανή του συστήματος δεν είναι αναλλοίωτη! Μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς αν εκφράσουμε το δυναμικό Higgs, για την περίπτωση $M^2 < 0$, στην ισοδύναμη μορφή

$$V_h(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - u^2)^2 \quad (2.42)$$

το οποίο προκύπτει από την (2.38) εφαρμόζοντας μια απλή ολίσθηση της μορφής $V(\Phi) \rightarrow V(\Phi) - \frac{\lambda}{4}u^4$, όπου από την (2.40) χρησιμοποιούμε την σχέση $M^2 = -2\lambda u^2$. Συνεπώς, η Λαγκρανζιανή του συστήματος γράφεται

$$L' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi^*) - \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - u^2)^2 \quad (2.43)$$

και μετασχηματίζεται κάτω από την (2.41) ως εξής:

$$\begin{aligned} L' \rightarrow L'' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\lambda}{4}((u + \psi)^2 + \chi^2 - u^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\psi^2 + \chi^2 + 2u\psi)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\lambda}{4}((\psi^2 + \chi^2)^2 + 4u\psi(\psi^2 + \chi^2) + 4u^2\psi^2) \\ L' \rightarrow L'' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda u^2)\psi^2 - \lambda u\psi(\psi^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4}(\psi^2 + \chi^2)^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Παρατηρούμε, από την παραπάνω εξίσωση, ότι το εν λόγω φυσικό σύστημα μετά το σπάσιμο της συμμετρίας περιγράφει δύο βαθμωτά σωματίδια ψ και χ , με αντίστοιχες μάζες $m_\psi = \sqrt{2\lambda}u$ και $m_\chi = 0$. Η εμφάνιση του σωματιδίου με μηδενική μάζα οφείλεται στο θεώρημα Goldstone: Για κάθε γεννήτορα κάποιας συμμετρίας που υπόκειται σε αυθόρμητο σπάσιμο, υπάρχει ένα άμαζο σωματίδιο με πεδίο χ , το μποζόνιο Goldstone [26]. Τονίζουμε εδώ ότι για

$$\Phi^2 = u^2 \quad (2.45)$$

έχουμε μηδενική ενέργεια για το σύστημα. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται κατάσταση κενού. Όμως, είναι σαφές από την παραπάνω εξίσωση, ότι η ενεργειακή αυτή κατάσταση είναι εκφυλισμένη. Αυτός είναι και ο λόγος που χρειαζόμαστε άμαζες διεγέρσεις (σωματίδια Goldstone) στο φάσμα των καταστάσεων, προκειμένου να ισχύει ο εκφυλισμός της κατάστασης κενού.

Το επόμενο βήμα είναι να εισάγουμε συμμετρία βαθμίδας στο πρόβλημα. Τότε, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, θα ισχύουν:

$$L_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - u^2)^2 \quad (2.46)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (2.47)$$

$$\Phi \rightarrow e^{i\theta(x)}\Phi \quad (2.48)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x) \quad (2.49)$$

όπου ενσωματώσαμε τον γεννήτορα q στην γωνία θ για ευκολία στους υπολογισμούς χωρίς βλάβη γενικότητας. Μετασχηματίζοντας την (2.46) μέσω της (2.41) καταλήγουμε μετά από πολλές, αλλά τετριμμένες, πράξεις στον μετασχηματισμό:

$$L_1 \rightarrow L_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{q^2u^2}{2}A_\mu^2 + quA_\mu\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda u^2)\psi^2 + \dots \quad (2.50)$$

όπου οι τελείες αναφέρονται σε ανώτερους όρους σύζευξης των πεδίων. Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος είναι ανάλογος του A_μ^2 , εκφράζει, δηλαδή, μάζα του πεδίου βαθμίδας! Η σχέση (2.50) όμως είναι ακόμα αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας, αφού προήλθε από την (2.46). Αυτό σημαίνει ότι η Λαγκρανζιανή του πεδίου βαθμίδας μπορεί να περιέχει όρους μάζας και να συνεχίσει να είναι αναλλοίωτη, **αν** ο μετασχηματισμός βαθμίδας εισάγει και μετάθεση (translation) του πεδίου $\Phi \rightarrow \Phi + u$.

Παρ'όλ'αυτά, απαιτείται προσοχή στο σημείο αυτό: Η Λαγκρανζιανή της (2.46) περιγράφει ένα άμαζο πεδίο A_μ και ένα βαθμωτό μιγαδικό πεδίο Φ . Συνεπώς, οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι 4 (δύο για το πεδίο βαθμίδας και δύο για το πεδίο Higgs). Αντίστοιχα, η (2.50) περιέχει 5 βαθμούς ελευθερίας, καθώς το πεδίο βαθμίδας έχει πλέον μάζα. Είναι σαφές ότι φυσικοί βαθμοί ελευθερίας δεν γίνεται να "δημιουργηθούν" από απλή αλλαγή μεταβλητών. Συμπεραίνουμε πως η (2.50) πρέπει να περιέχει πεδία, τα οποία δεν σχετίζονται με φυσικά σωματίδια. Μπορούμε, όμως, αντί της (2.41), να εκφράσουμε το πεδίο Higgs σε πολική μορφή

$$\Phi = [u + \rho]e^{i\frac{\zeta(x)}{u}} \quad (2.51)$$

και το πεδίο βαθμίδας στην ισοδύναμη μορφή

$$A_\mu = B_\mu - \frac{1}{gu} \partial_\mu \zeta(x) \quad (2.52)$$

Τότε, ο μετασχηματισμός βαθμίδας περιγράφεται μέσω της απλής σχέσης μετάθεσης

$$\zeta(x) \rightarrow \zeta(x) + u\theta(x) \quad (2.53)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.51) και (2.52) στην Λαγκρανζιανή (2.46) προκύπτει[17]:

$$L_1 \rightarrow L_3 = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \frac{g^2 u^2}{2} B_\mu^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 - \frac{1}{2} (2\lambda u^2) \rho^2 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 + \frac{1}{2} g^2 B_\mu^2 (2u\rho + \rho^2) \quad (2.54)$$

όπου $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Η εξάρτηση από το πεδίο $\zeta(x)$ δεν υπάρχει πλέον. Το παραπάνω σύστημα εκφράζει 2 έμμαζα σωματίδια, ένα άνυσμα B_μ και ένα βαθμωτό ρ . Δεν παρουσιάζει κάποια συμμετρία βαθμίδας, αφού πλέον ο μετασχηματισμός $\zeta(x) \rightarrow \zeta(x) + u\theta(x)$ είναι τετριμμένος.

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε 3 διαφορετικές Λαγκρανζιανές, οι οποίες περιγράφουν το ίδιο φυσικό σύστημα. Η L_1 είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας, αλλά έχει αρνητικό όρο μάζας και είναι συνεπώς ακατάλληλη. Η L_2 είναι και αυτή αναλλοίωτη, αλλά περιέχει μη φυσικούς βαθμούς ελευθερίας. Τέλος, η L_3 δεν παρουσιάζει συμμετρία βαθμίδας, αλλά μας δίνει το σωστό σωματιδιακό φάσμα της θεωρίας, δηλαδή περιέχει μόνο πεδία που αντιστοιχούν σε φυσικά έμμαζα σωματίδια. Φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι όταν έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας κάποιας θεωρίας βαθμίδας, τα πεδία βαθμίδας γίνονται έμμαζα μέσω της απαλοιφής των μποζονίων Goldstone, που περιγράφονται από το μιγαδικό κομμάτι του πεδίου Φ , το οποίο απαλείψαμε στην τελική Λαγκρανζιανή.

Τα παραπάνω θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα στην περίπτωση του μονόπολου t'Hooft Polyakov, το οποίο, όπως θα δούμε στο επόμενο υποκεφάλαιο, σχετίζεται άμεσα με την περίπτωση του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας στο μοντέλο των Georgi-Glashow. Αναφέρουμε εδώ, χάριν πληρότητας, ότι το μοντέλο αυτό υπόκειται σε $SU(5)$ συμμετρία βαθμίδας, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε μια απλοποιημένη εκδοχή του μέσω της ομάδας $SU(2)$, αφού και αυτή περιλαμβάνει λύσεις μαγνητικών μονοπόλων [1].

2.3 Το μοντέλο Georgi-Glashow

Θεωρούμε μια τριπλέτα πεδίων Higgs εκφρασμένα στην συμπληρωματική αναπαράσταση

$$\Phi = \Phi^a T^a \quad (2.55)$$

όπου $T^a = \frac{1}{2} \sigma^a$ είναι οι γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$. Ικανοποιούν την άλγεβρα Lie

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon_{abc} T^c \quad (2.56)$$

όπου $\varepsilon_{123} = +1$. Ισχύει, επίσης, η γνωστή σχέση κανονικοποίησης:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (2.57)$$

Ακολουθώντας την ανάλυση που είχαμε για τις μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, η αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή που περιγράφει το σύστημα είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \text{Tr}(D_\mu \Phi D^\mu \Phi) - V(\Phi) \\ L &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi^a)(D^\mu \Phi^a) - V(\Phi) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται ως

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.59)$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi + ie[A_\mu, \Phi] \\ D_\mu \Phi^a &= \partial_\mu \Phi^a - e\varepsilon_{abc} A_\mu^b \Phi^c \end{aligned} \quad (2.60)$$

όπου $A_\mu = A_\mu^a T^a$ και e η σταθερά σύζευξης των πεδίων βαθμίδας. Το δυναμικό Higgs εκφράζεται μέσω της γνωστής σχέσης:

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi^a \Phi^a - u^2)^2 \quad (2.61)$$

Τέλος, ο ταυιστής του πεδίου βαθμίδας δίνεται

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] = \frac{1}{ie} [D_\mu, D_\nu] \quad (2.62)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.63)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δικαιολογούνται από την ανάλυση των προηγούμενων υποκεφαλαίων. Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την Λαγκρανζιανή (2.58) είναι οι

$$D_\mu D^\mu \Phi^a = -\lambda \Phi^a (\Phi^b \Phi^b) - u^2 \quad (2.64)$$

$$D_\nu F^{a\mu\nu} = -e\varepsilon_{abc} \Phi^b D^\mu \Phi^c \quad (2.65)$$

Το επόμενο λογικό βήμα είναι να συνεχίσουμε με το σπάσιμο συμμετρίας, ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική πορεία με το προηγούμενο υποκεφάλαιο. Θέλουμε να βρούμε λύσεις οι οποίες ελαχιστοποιούν την ενέργεια του συστήματος. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να υπολογίσουμε τον ταυιστή ενέργειας-ορμής, ο οποίος δίνεται μέσω της γνωστής σχέσης [26]

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} L}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.66)$$

όπου $g = \det(g^{\mu\nu})$ είναι η ορίζουσα της μετρικής του χώρου Minkowski. Από την σχέση (2.66) εύκολα υπολογίζει κανείς ότι

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho}^a F_{\nu}^{a\rho} + (D_\mu\Phi^a)(D_\nu\Phi^a) - g_{\mu\nu}L \quad (2.67)$$

αφού

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}L}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} L + \sqrt{-g} \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}L + \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}F_{\mu\rho}^a F_{\nu}^{a\rho} + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi^a)(D_\nu\Phi^a) \right) \right) \end{aligned}$$

Το στοιχείο T_{00} μας δίνει την ενεργειακή πυκνότητα του συστήματος. Συνεπώς, η ολική ενέργεια υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$E = \int d^3x (-F_{0i}^a F_0^{ai} + (D_0\Phi^a)(D_0\Phi^a) - g_{00}L) = - \int d^3x L = H \quad (2.68)$$

Το αποτέλεσμα είναι γνωστό και τετριμμένο, θεωρούμε όμως κατάλληλο να παρουσιάσουμε εδώ τις πράξεις:

$$\begin{aligned} &-F_{0i}^a F_0^{ai} + (D_0\Phi^a)(D_0\Phi^a) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu\Phi^a)(D^\mu\Phi^a) + V(\Phi) = \\ &-F_{0i}^a F_0^{ai} + \frac{1}{4}(F_{0i}^a F^{a0i} + F_{i0}^a F^{a0i} + F_{ij}^a F^{aij}) + \frac{1}{2}((D_0\Phi^a)(D^0\Phi^a) - (D_i\Phi^a)(D^i\Phi^a)) + V(\Phi) = \\ &-\frac{1}{2}F_{0i}^a F^{a0i} + \frac{1}{4}F_{ij}^a F^{aij} + \frac{1}{2}((D_0\Phi^a)(D^0\Phi^a) + (D_i\Phi^a)(D_i\Phi^a)) + V(\Phi) \\ E &= \int d^3x \left(\frac{1}{2}E_i^a E_i^a + \frac{1}{2}B_i^a B_i^a + \frac{1}{2}((D_0\Phi^a)(D_0\Phi^a) + (D_i\Phi^a)(D_i\Phi^a)) + V(\Phi) \right) \quad (2.69) \end{aligned}$$

Για την ελαχιστοποίηση της ενέργειας χρειαζόμαστε προφανώς στατικές λύσεις. Επιπροσθέτως, μπορούμε να θέσουμε $A_0^a = 0$, καθώς η ενέργεια δεν εξαρτάται από την επιλογή βαθμίδας. Καταλήγουμε στην απλοποιημένη μορφή της (2.69)

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2}E_i^a E_i^a + \frac{1}{2}B_i^a B_i^a + \frac{1}{2}(D_i\Phi^a)(D_i\Phi^a) + V(\Phi) \right) \quad (2.70)$$

όπου τα E_i^a και B_i^a ονομάζονται “χρωματικά” ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία [25]. Παρατηρούμε από την σχέση (2.70) ότι η ενέργεια γίνεται ελάχιστη αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\Phi^a \Phi^a = u^2 \quad (2.71)$$

$$F_{ij}^a = 0 \quad (2.72)$$

$$D_i\Phi^a = 0 \quad (2.73)$$

Οι συνθήκες αυτές ορίζουν το κενό Higgs του συστήματος και η σταθερά u είναι η αναμενόμενη τιμή του πεδίου Φ στο κενό. Βλέπουμε ότι, αν απαιτήσουμε $E_i^a = 0$, η ολική ενέργεια μηδενίζεται.

Για να βρούμε το σωματιδιακό φάσμα του μοντέλου Georgi-Glashow, θεωρούμε μικρές χρονοανεξάρτητες διαταραχές στο πεδίο Higgs γύρω από την αναμενόμενη τιμή του στο κενό, $|\Phi| = u$. Λόγω της συμμετρίας $SU(2)$, μπορούμε να επιλέξουμε την αναμενόμενη τιμή σε οποιαδήποτε κατεύθυνση του ισοχώρου θέλουμε. Επιλέγουμε λοιπόν:

$$\Phi^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

με διαταραχή στην τρίτη κατεύθυνση της μορφής:

$$\Phi^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u + \rho \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Τότε, το δυναμικό Higgs μετασχηματίζεται κάτω από την διαταραχή ακολούθως:

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \frac{\lambda}{4}(\Phi^a\Phi^a - u^2)^2 \rightarrow \frac{\lambda}{4}((u + \rho)(u + \rho) - u^2)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4}(u^2 + 2\rho u + \rho^2 - u^2)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4}(4u^2\rho^2 + 4u\rho^3 + \rho^4) \\ V(\Phi) &\approx \lambda u^2\rho^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2\lambda}u)^2\rho^2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

όπου κρατήσαμε μόνο τους όρους διαταραχής δεύτερης τάξης. Παρατηρούμε ότι το δυναμικό δεν μηδενίζεται για διαταραχές του πεδίου γύρω από την αναμενόμενη τιμή κενού, και συνεπώς το μοντέλο περιγράφει πράγματι αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Ομοίως, για τον κινητικό όρο του πεδίου θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_i\Phi^1 \\ D_i\Phi^2 \\ D_i\Phi^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_i\Phi^1 - e\varepsilon_{1bc}A_\mu^b\Phi^c \\ \partial_i\Phi^2 - e\varepsilon_{2bc}A_\mu^b\Phi^c \\ \partial_i\Phi^3 - e\varepsilon_{3bc}A_\mu^b\Phi^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e\varepsilon_{123}A_\mu^2\Phi^3 \\ -e\varepsilon_{213}A_\mu^1\Phi^3 \\ \partial_i\Phi^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} D_i\Phi^1 \\ D_i\Phi^2 \\ D_i\Phi^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -eA_\mu^2(u + \rho) \\ eA_\mu^1(u + \rho) \\ \partial_i\rho \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$(D_i\Phi^a)(D^i\Phi^a) = (\partial_i\rho)(\partial^i\rho) + e^2(u + \rho)^2(A_i^1A^{i1} + A_i^2A^{i2}) \quad (2.78)$$

Καταλήγουμε στο ότι η τελική έκφραση της Λαγκρανζιανής του συστήματος μετά το σπάσιμο συμμετρίας είναι:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{e^2 u^2}{2}(A_i^1 A^{i1} + A_i^2 A^{i2}) + \frac{1}{2}(\partial_i\rho)(\partial_i\rho) - \frac{1}{2}(\sqrt{2\lambda}u)^2\rho^2 + \dots \quad (2.79)$$

όπου οι τελείες αναφέρονται σε ανώτερους όρους σύζευξης των πεδίων. Μπορούμε τώρα να διαβάσουμε απλά το σωματιδιακό φάσμα από την σχέση (2.79). Η Λαγκρανζιανή περιγράφει δύο έμμοζα ανυσματικά πεδία, A_i^1 και A_i^2 , με μάζα $M_W = eu$, τα οποία αντιστοιχούν στα W_{\pm} μποζόνια των ασθενών αλληλεπιδράσεων και ένα άμοζο ανυσματικό πεδίο A_i^3 , το οποίο αντιστοιχεί στο φωτόνιο. Επίσης, έχουμε και ένα έμμοζο βαθμωτό πεδίο ρ με μάζα $M_H = \sqrt{2}\lambda u$, το οποίο αντιστοιχεί προφανώς στο μποζόνιο Higgs .

Τονίζουμε εδώ ότι δεν έχουμε πλήρες σπάσιμο της αρχικής συμμετρίας $SU(2)$. Η παραπάνω Λαγκρανζιανή παραμένει ακόμα αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς της υποομάδας της $SU(2)$, $U(1)$. Η $U(1)$ είναι μια ομάδα στροφών στον ισόχωρο περί την κατεύθυνση που ορίζει το άνυσμα Φ^a . Ο γεννήτορας της, $\frac{\Phi^a T^a}{u}$, ταυτοποιείται με τον τελεστή του ηλεκτρικού φόρτιου Q . Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}^a T^a = \partial_{\mu} + iQA_{\mu}^{em} \quad (2.80)$$

ορίζοντας έτσι την “ ηλεκτρομαγνητική προβολή ” του πεδίου βαθμίδας [25]:

$$A_{\mu}^{em} = \frac{1}{u} A_{\mu}^a \Phi^a \quad (2.81)$$

$$Q = \frac{e}{u} \Phi^a T^a \quad (2.82)$$

Το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, δηλαδή, εκφράζεται μέσω της προβολής του πεδίου βαθμίδας της $SU(2)$ στην κατεύθυνση του ισόχωρου που ορίζει το Φ^a .

2.4 Τοπολογική κατηγοριοποίηση των λύσεων

Το φάσμα των λύσεων του μοντέλου Georgi-Glashow είναι πολύ πιο πλούσιο από ότι κάποιος θα περίμενε. Οι εξισώσεις κίνησης που εξαγάγαμε στις σχέσεις (2.64-65) έχουν ευσταθείς σολιτονικές λύσεις με πεπερασμένη ενέργεια, οι οποίες για $r \rightarrow \infty$ μας δίνουν την αναμενόμενη τιμή του κενού, $\Phi^2 = u^2$. Χωρίς να εισχωρήσουμε στην θεωρία σολιτονίων, αναφέρουμε τα εξής: Θεωρούμε κάποια Λαγκρανζιανή που υπόκειται σε σπάσιμο συμμετρίας. Μπορούμε τότε να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης και να απαιτήσουμε οι λύσεις να μας δίνουν την αναμενόμενη τιμή του κενού στην χωρική ασύμπτωτη, $r \rightarrow \infty$. Τότε, αν οι λύσεις αυτές δεν μπορούν να παραμορφωθούν με συνεχή τρόπο στην τετριμμένη λύση $\Phi = u$, $\forall r$, το σύστημα έχει σολιτονικές λύσεις. Προσέχουμε εδώ ότι η φράση “ παραμορφωθούν με συνεχή τρόπο ” μας παραπέμπει στην θεωρία ομοτοπίας.

Υπενθυμίζουμε ότι η πρώτη ομοτοπική ομάδα κάποιας πολλαπλότητας M αποτελείται από ομοτοπικές κλάσεις κλειστών τροχιών στην εν λόγω πολλαπλότητα. Οι κλειστές αυτές τροχιές είναι ουσιαστικά απεικονίσεις από έναν κύκλο S^1 στη M . Η γενίκευση σε ομοτοπικές ομάδες ανώτερης τάξης αποτελεί λογικό επόμενο. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$\Phi : S^1 \rightarrow M \quad (2.83)$$

Το σύνολο των απεικονίσεων που είναι ομοτοπικά ισοδύναμες (μπορούν να παραμορφωθούν με συνεχή τρόπο η μία στην άλλη) με την Φ ανήκουν στην ίδια ομοτοπική κλάση, $[\Phi]$. Το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων κατασκευάζουν την ομοτοπική ομάδα ανώτερης τάξης $\pi_n(M)$ [8].

Επιπροσθέτως, είναι σαφές ότι ο αριθμός περιέλιξης n εξαρτάται από την εκάστοτε απεικόνιση. Υπενθυμίζουμε ότι $\pi_1(S^1) = Z$, δηλαδή ο αριθμός περιέλιξης για την απεικόνιση

$$\Phi : S^1 \rightarrow S^1 \quad (2.84)$$

παίρνει τιμές από την ομάδα άθροισης των ακεραίων, Z . Αν η μεταβλητή θ παραμετροποιεί τη γωνία στον πρώτο κύκλο και η $\alpha(\theta)$ τη γωνία στον δεύτερο κύκλο, τότε ο αριθμός περιέλιξης δίνεται μέσω της σχέσης [28]

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\alpha}{d\theta} \quad (2.85)$$

Πράγματι, επιλέγοντας απεικόνιση $\Phi = e^{(2ieg\theta)}$, έχουμε ότι $\alpha(\theta) = 2eg\theta$ και η σχέση (2.85) μας δίνει $n = 2eg$, το οποίο είναι απλά η συνθήκη κβάντωσης του Dirac. Ο αριθμός περιέλιξης για απεικονίσεις $S^2 \rightarrow S^2$ ορίζεται με ανάλογο τρόπο. Παρουσιάζουμε τα παρακάτω χωρίς απόδειξη. Ο ενδιαφερόμενος μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες στο [10]. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες θ και ϕ για την πρώτη σφαίρα και $\alpha(\theta, \phi)$ και $\beta(\theta, \phi)$ για την δεύτερη, ο αριθμός περιέλιξης ορίζεται ως

$$n = \frac{1}{4\pi} \int d^2\Omega \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \left(\frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d\beta}{d\phi} - \frac{d\beta}{d\theta} \frac{d\alpha}{d\phi} \right) = \frac{1}{4\pi} \int d\theta d\phi \sin \alpha \left(\frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d\beta}{d\phi} - \frac{d\beta}{d\theta} \frac{d\alpha}{d\phi} \right) \quad (2.86)$$

Θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμο να εκφράσουμε την παραπάνω σχέση σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Ορίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{e}(\mathbf{r}) = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha) \quad (2.87)$$

όπου τα $\alpha(\mathbf{r})$ και $\beta(\mathbf{r})$ είναι συναρτήσεις τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου. Η σχέση (2.86) γράφεται μέσω των μετασχηματισμών αυτών ως:

$$n = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \int dS^i \hat{e}^a \partial_j \hat{e}^b \partial_k \hat{e}^c \quad (2.88)$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι για απεικονίσεις $\Phi : S^n \rightarrow S^n$, ο αριθμός περιέλιξης δεν είναι τετριμμένος. Κάτι τέτοιο συμφωνεί προφανώς με το αποτέλεσμα μας, $\pi_1(S^1) = Z$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται με λογικό τρόπο στην σχέση:

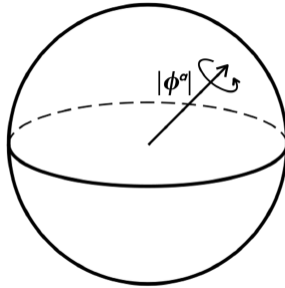
$$\pi_n(S^n) = Z \quad (2.89)$$

Η τελευταία σχέση θα αποτελέσει κλειδί στην κατανόηση του τοπολογικού φορτίου του μονόπολου t'Hooft Polyakov. Επανερχόμαστε, λοιπόν, στο μοντέλο Georgi-Glashow από το οποίο θα εξάγουμε το μαγνητικό φορτίο. Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό του κενού Higgs, $\Phi^2 = u^2$, τα πεδία Φ^a ικανοποιούν την προφανή σχέση:

$$(\Phi^1)^2 + (\Phi^2)^2 + (\Phi^3)^2 = u^2 \quad (2.90)$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των καταστάσεων κενού $\{\Phi^a \in R^3 : V(\Phi) = 0\}$ σχηματίζει πολλαπλότητα σφαίρας S_{vac}^2 με ακτίνα u στον τρισδιάστατο ιστοτοπικό χώρο. Υπενθυμίζουμε ότι η αναμενόμενη τιμή κενού u πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός, προκειμένου η κατάσταση κενού να είναι εκφυλισμένη και να έχουμε σπάσιμο συμμετρίας. Πράγματι, αν $u \neq 0$, όπως είδαμε στον μηχανισμό Higgs, προκύπτει ένας γεωμετρικός τόπος καταστάσεων κενού.

Όλα τα σημεία στην σφαίρα S_{vac}^2 είναι ισοδύναμα λόγω των μετασχηματισμών βαθμίδας $SU(2)$. Όταν επιλέγουμε όμως μια κατάσταση κενού, π.χ. $\Phi^a = (0, 0, u)$, η αρχική συμμετρία $SU(2)$ σπάει σε $U(1)$, αφού ο μόνος μετασχηματισμός που ικανοποιεί ακόμα την αναλλοιώτητα είναι η στροφή περί την κατεύθυνση του ισοχώρου που ορίζει η Φ^a .



Σχήμα 2.2: Ο γεωμετρικός τόπος των καταστάσεων κενού και το σπάσιμο συμμετρίας

Θέλουμε τώρα να βρούμε λύσεις των εξισώσεων κίνησης (2.64-65), οι οποίες να έχουν πεπερασμένη ενέργεια και για $r \rightarrow \infty$ να μας δίνουν την αναμενόμενη τιμή του κενού. Συνεπώς, θέλουμε να βρούμε μια **απεικόνιση** Φ^a , η οποία στην χωρική ασύμπτωτη να μας δίνει

$$\Phi^a : S_{\infty}^2 \rightarrow S_{vac}^2 \quad (2.91)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει τέτοια απεικόνιση, η οποία δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την τετριμμένη απεικόνιση, $\Phi^a = (0, 0, u)$. Στο σημείο αυτό, αποδεικνύεται η σημασία της ομοτοπικής θεωρίας. Η σχέση (2.89) μας δίνει την απάντηση:

$$\pi_2(SU(2)/U(1)) = \pi_2(S^2) = Z \quad (2.92)$$

Συνεπώς, οι απεικονίσεις που υπάρχουν από την S_{∞}^2 στην S_{vac}^2 , χωρίζονται σε δύο ομοτοπικές κλάσεις, την $[I]$ (που περιλαμβάνει την τετριμμένη απεικόνιση $\Phi^a = (0, 0, u)$ και έχει αριθμό περιέλιξης $n = 0$) και μια ομοτοπική κλάση $[\Phi^a]$ που περιλαμβάνει απεικονίσεις με ακέραιο αριθμό περιέλιξης, οι οποίες δεν μπορούν να παραμορφωθούν με συνεχή τρόπο στην τετριμμένη.

Επιθυμούμε λύσεις των εξισώσεων κίνησης με την ιδιότητα η κατεύθυνση των ισοανυσματικών (A_{μ}^a) και ισοβαθμωτών πεδίων (Φ^a) στον ισόχωρο να είναι συναρτήσεις των χωρικών συντεταγμένων. Αναφέρουμε, εδώ, ότι αν προσπαθήσουμε να παραμορφώσουμε τα πεδία αυτά με συνεχή τρόπο στο τετριμμένο κενό $\Phi^a = (0, 0, u)$, η ενέργεια απειρίζεται. Δηλαδή, κάθε διαφορετικός τοπολογικός τομέας διαχωρίζεται από φράγματα άπειρης ενέργειας[25].

Καταλήγουμε ότι χρειαζόμαστε τις εξής συνθήκες για την λύση μας:

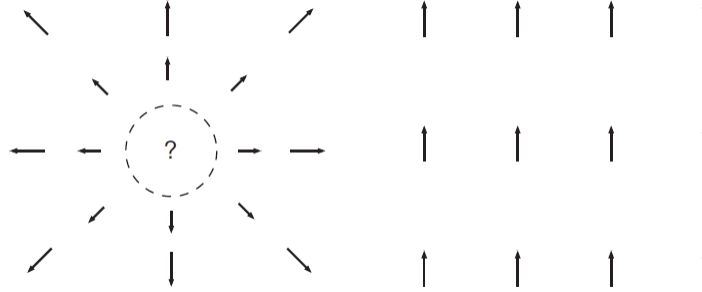
1. Απαιτούμε η λύση να ανήκει σε διαφορετική ομοτοπική κλάση από την τετριμμένη.
2. Η λύση πρέπει να μας δίνει την αναμενόμενη τιμή κενού στην χωρική ασύμπτωτη.
3. Η λύση πρέπει να έχει πεπερασμένη ενέργεια.

Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται επιλέγοντας:

$$\Phi^a \rightarrow \frac{ur^a}{r} \quad (2.93)$$

$$D_i \Phi \rightarrow 0 \quad (2.94)$$

για $r \rightarrow \infty$, όπου $r^a = (x, y, z)$. Η λύση αυτή είναι η γνωστή λύση hedgehog, το όνομα της οποίας οφείλεται στον Polyakov [21].



Σχήμα 2.3: Η λύση hedgehog φαίνεται αριστερά, ενώ δεξιά έχουμε την τετριμμένη λύση. Ο αριστερός σχηματισμός των πεδίων δεν μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο στον δεξιό

2.5 Το μαγνητικό φορτίο

Οι σχέσεις (2.93) και (2.94) κρύβουν ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Από την (2.94) μπορούμε να βρούμε την ασυμπτωτική μορφή του πεδίου βαθμίδας. Μετά από σύντομους υπολογισμούς βλέπει κανείς ότι:

$$\begin{aligned} D_i \Phi^a = 0 &\rightarrow \partial_i \left(\frac{r^a}{r} \right) - e \varepsilon_{abc} A_i^b \frac{r^c}{r} = 0 \\ \frac{\delta_{ai} r^2 - r_a r_i}{r^3} &= e \varepsilon_{abc} A_i^b \frac{r^c}{r} \\ (\delta_{ai} \delta_{ck} - \delta_{ak} \delta_{ic}) \frac{r_c r_k}{r^3} &= e \varepsilon_{abc} A_i^b \frac{r^c}{r} \\ \varepsilon_{acb} \varepsilon_{bik} \frac{r_c r_k}{r^3} &= e \varepsilon_{abc} A_i^b \frac{r^c}{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_i^a = \varepsilon_{ani} \frac{r_n}{er^2}} \quad (2.95)$$

Έχοντας, λοιπόν, την ασυμπτωτική μορφή του πεδίου βαθμίδας, μπορούμε να εξάγουμε την μορφή του μαγνητικού πεδίου για $r \rightarrow \infty$. Υπενθυμίζουμε πως το μαγνητικό πεδίο δίνεται μέσω της σχέσης:

$$B_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a - e \varepsilon_{abc} A_j^b A_k^c) = \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k^a - \frac{e}{2} \varepsilon_{abc} A_j^b A_k^c) \quad (2.96)$$

Τονίζουμε πως η διαφορά που φαίνεται στο πρόσημο της παραπάνω σχέσης με την σχέση (1.15) προκύπτει από το γεγονός ότι εξισώνουμε όλους τους άνω και κάτω χωρικούς (και ισχωρικούς) δείκτες. Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει τον αντισυμμετρικό ταυυστή ως $\varepsilon_{0123} = -1, \varepsilon_{123} = +1$.

Εισάγουμε τη σχέση (2.95) στην (2.96) και εκτελούμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k^a) &= \frac{1}{e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ank} \partial_j \left(\frac{r_n}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{e} \delta_{an}^{ij} \left[\frac{\delta_{jn}}{r^2} - \frac{2r_j r_n}{r^4} \right] \\ &= \frac{1}{e} (\delta_{ia} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{ja}) \left[\frac{\delta_{jn}}{r^2} - \frac{2r_j r_n}{r^4} \right] \\ &= \frac{1}{e} \left(\delta_{ia} \frac{3}{r^2} - \delta_{ia} \frac{2}{r^2} - \delta_{ia} \frac{1}{r^2} + \frac{2r_a r_i}{r^4} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k^a) = \frac{2r_a r_i}{r^4 e}} \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} -\frac{e}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} A_j^b A_k^c &= -\frac{1}{2e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bnj} \varepsilon_{cmk} \frac{r_n r_m}{r^4} \\ &= \frac{1}{2e} \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jbn} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{cmk} \frac{r_n r_m}{r^4} \\ &= \frac{1}{2e} \delta_{bn}^{ik} \delta_{mk}^{ab} \frac{r_n r_m}{r^4} \\ &= \frac{1}{2e} (\delta_{ib} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kb}) (\delta_{am} \delta_{bk} - \delta_{ak} \delta_{bm}) \frac{r_n r_m}{r^4} \\ &= \frac{1}{2e} (\delta_{am} \delta_{in} - \delta_{an} \delta_{im} - 3\delta_{in} \delta_{am} + \delta_{in} \delta_{am}) \frac{r_n r_m}{r^4} \\ &= \frac{1}{2e} (2\delta_{am} \delta_{in} - \delta_{an} \delta_{im} - 3\delta_{in} \delta_{am}) \frac{r_n r_m}{r^4} \\ &= \frac{1}{2e} \left(2 \frac{r_i r_a}{r^4} - \frac{r_a r_i}{r^4} - 3 \frac{r_i r_a}{r^4} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{-\frac{e}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} A_j^b A_k^c = -\frac{r_i r_a}{er^4}} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Από τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών, βλέπουμε ότι η ασυμπτωτική μορφή του μαγνητικού πεδίου δίνεται μέσω της σχέσης:

$$\boxed{B_i^a = \frac{r_i r_a}{er^4}} \quad (2.99)$$

Επομένως, οι οριακές συνθήκες (2.93) και (2.94) οδηγούν στην ύπαρξη μαγνητικού πεδίου, του οποίου η εξασθένιση είναι ανάλογη του $\frac{1}{r^2}$. Συμπεριφέρεται, δηλαδή, ως ένα πεδίο Coulomb σημειακού φορτίου και μπορεί συνεπώς να ταυτοποιηθεί με το πεδίο ενός μαγνητικού μονόπολου. Για να αποδείξουμε ότι το πεδίο αυτό αντιστοιχεί πράγματι σε μαγνητικό μονόπολο, απαιτείται να υπολογίσουμε τον ταυστή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η συλλογιστική πορεία θα παραμείνει ίδια, γενικεύοντας όμως την σχέση (2.94) στην

$$D_\mu \Phi^a = 0 \quad (2.100)$$

προκειμένου να έχουμε την ολοκληρωμένη εικόνα του πεδίου βαθμίδας. Έτσι, μέσω της σχέσης για το πεδίο βαθμίδας, A_μ , που θα εξάγουμε, θα έχουμε την μορφή του ταυστή $F_{\mu\nu}$, από τον οποίο θα ελέγξουμε αν η θεωρία περιέχει πράγματι μαγνητικά μονόπολα. Από την σχέση (2.100) προκύπτει η μορφή του πεδίου βαθμίδας A_μ ως εξής:

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi^a &= 0 \\ \partial_\mu \Phi^a &= e \varepsilon_{abc} A_\mu^b \Phi^c \\ \varepsilon_{lma} \Phi^m \frac{1}{e} \partial_\mu \Phi^a &= \delta_{bc}^{lm} A_\mu^b \Phi^c \Phi^m \\ \varepsilon_{lma} \Phi^m \frac{1}{e} \partial_\mu \Phi^a &= (\delta_{lb} \delta_{mc} - \delta_{mb} \delta_{lc}) A_\mu^b \Phi^c \Phi^m \\ \varepsilon_{lma} \Phi^m \frac{1}{e} \partial_\mu \Phi^a &= A_\mu^l (\Phi^m \Phi^m) - \Phi^l (A_\mu^m \Phi^m) \\ \xrightarrow{\Phi^a \Phi^a = u^2} \varepsilon_{lma} \Phi^m \frac{1}{e} \partial_\mu \Phi^a &= A_\mu^l (u^2) - \Phi^l (A_\mu^m \Phi^m) \\ A_\mu^l &= \frac{\Phi^l A_\mu^m \Phi^m}{u} + \frac{1}{u^2 e} \varepsilon_{lma} \Phi^m \partial_\mu \Phi^a \\ \xrightarrow{2.81} \boxed{A_\mu^a} &= \frac{\Phi^a}{u} A_\mu^{em} + \frac{1}{u^2 e} \varepsilon_{abc} \Phi^b \partial_\mu \Phi^c \end{aligned} \quad (2.101)$$

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε την (2.101) στον ορισμό του ταυστή πεδίου, (2.63).

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu \left(\frac{\Phi^a}{u} A_\nu^{em} + \frac{1}{u^2 e} \varepsilon_{abc} \Phi^b \partial_\nu \Phi^c \right) \\ &\quad - \partial_\nu \left(\frac{\Phi^a}{u} A_\mu^{em} + \frac{1}{u^2 e} \varepsilon_{abc} \Phi^b \partial_\mu \Phi^c \right) \\ &\quad - e \varepsilon_{abc} \left(\frac{\Phi^b}{u} A_\mu^{em} + \frac{1}{u^2 e} \varepsilon_{blm} \Phi^l \partial_\mu \Phi^m \right) \left(\frac{\Phi^c}{u} A_\nu^{em} + \frac{1}{u^2 e} \varepsilon_{cij} \Phi^i \partial_\nu \Phi^j \right) \end{aligned}$$

Επειδή οι πράξεις που ακολουθούν είναι πολλές, θα σπάσουμε την εξίσωση σε επιμέρους όρους. Το αποτέλεσμα, όμως, θα μας ανταμείψει:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\nu^{em} + \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}\Phi^b\partial_\nu\Phi^c\right) &= \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}\partial_\mu(\Phi^b\partial_\nu\Phi^c) + \partial_\mu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\nu^{em}\right) \\ &= \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}[(\partial_\mu\Phi^b)(\partial_\nu\Phi^c) + \Phi^b\partial_\mu\partial_\nu\Phi^c] + \partial_\mu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\nu^{em}\right)\end{aligned}$$

Ομοίως για τον δεύτερο όρο:

$$\begin{aligned}-\partial_\nu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\mu^{em} + \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}\Phi^b\partial_\mu\Phi^c\right) &= -\frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}\partial_\nu(\Phi^b\partial_\mu\Phi^c) - \partial_\nu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\mu^{em}\right) \\ &= \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}[-(\partial_\nu\Phi^b)(\partial_\mu\Phi^c) - \Phi^b\partial_\nu\partial_\mu\Phi^c] - \partial_\nu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\mu^{em}\right) \\ &= \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}[(\partial_\nu\Phi^c)(\partial_\mu\Phi^b) - \Phi^b\partial_\mu\partial_\nu\Phi^c] - \partial_\nu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\mu^{em}\right)\end{aligned}$$

Καταλήγουμε, δηλαδή, στο ότι οι πρώτες δύο γραμμές μας δίνουν το αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\nu^{em} + \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}\Phi^b\partial_\nu\Phi^c\right) - \partial_\nu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\mu^{em} + \frac{1}{u^2e}\varepsilon_{abc}\Phi^b\partial_\mu\Phi^c\right) &= \\ \frac{2}{u^4e}\varepsilon_{abc}\Phi^a(\partial_\mu\Phi^b)(\partial_\nu\Phi^c)\Phi^a + \partial_\mu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\nu^{em}\right) - \partial_\nu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\mu^{em}\right) &= \quad (2.102)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\Phi^a\Phi^a = u^2$. Από την τρίτη γραμμή θα έχουμε

$$-e\varepsilon_{abc}\frac{\Phi^b\Phi^c}{u^2}A_\mu^{em}A_\nu^{em} = 0 \quad (2.103)$$

λόγω αντισυμμετρίας και

$$\begin{aligned}-e\varepsilon_{abc}\frac{1}{u^4e^2}\varepsilon_{blm}\varepsilon_{cij}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\Phi^i\partial_\nu\Phi^j &= -\frac{1}{u^4e}\varepsilon_{blm}(\delta_{ij}^{ab}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\Phi^i\partial_\nu\Phi^j) \\ &= -\frac{1}{u^4e}\varepsilon_{blm}[(\delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bi})\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\Phi^i\partial_\nu\Phi^j] \\ &= -\frac{1}{u^4e}\varepsilon_{blm}(\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\Phi^a\partial_\nu\Phi^b - \Phi^l\partial_\mu\Phi^m\Phi^b\partial_\nu\Phi^a) \\ &= -\frac{1}{u^4e}\varepsilon_{blm}[\Phi^l\partial_\mu\Phi^m(\Phi^a\partial_\nu\Phi^b - \Phi^b\partial_\nu\Phi^a)] \\ &= -\frac{1}{u^4e}\varepsilon_{blm}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\partial_\nu\Phi^b\Phi^a + \frac{1}{u^4e}\varepsilon_{blm}\Phi^l\Phi^b\partial_\mu\Phi^m\partial_\nu\Phi^a \\ &= -\frac{1}{u^4e}\varepsilon_{blm}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\partial_\nu\Phi^b\Phi^a\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -e\varepsilon_{abc}\frac{1}{u^4e^2}\varepsilon_{blm}\varepsilon_{cij}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\Phi^i\partial_\nu\Phi^j = -\frac{1}{u^4e}\varepsilon_{lmb}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\partial_\nu\Phi^b\Phi^a \quad (2.104)$$

Τέλος, οι διαγώνιοι όροι υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{abc}\left(\frac{1}{u^2}\varepsilon_{blm}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\frac{\Phi^c}{u}A_\nu^{em}\right) &= \frac{1}{u^2}\delta_{lm}^ac\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\frac{\Phi^c}{u}A_\nu^{em} \\ &= \frac{1}{u^2}\left[\Phi^a(\partial_\mu\Phi^c)\frac{\Phi^c}{u}A_\nu^{em} - \Phi^c(\partial_\mu\Phi^a)\frac{\Phi^c}{u}A_\nu^{em}\right] \\ &= \frac{1}{u^2}\left[\partial_\mu\left(\frac{\Phi^c\Phi^c}{2}\right)\frac{\Phi^a}{u}A_\nu^{em} - (\partial_\mu\Phi^a)\frac{\Phi^c\Phi^c}{u}A_\nu^{em}\right] \\ &= -\left(\partial_\mu\frac{\Phi^a}{u}\right)A_\nu^{em} \end{aligned}$$

Ακολουθώντας όμοια συλλογιστική πορεία για τον δεύτερο διαγώνιο, έχουμε:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{abc}\left(\frac{1}{u^2}\varepsilon_{blm}\Phi^l\partial_\mu\Phi^m\frac{\Phi^c}{u}A_\nu^{em}\right) - \varepsilon_{abc}\left(\frac{1}{u^2}\varepsilon_{cij}\Phi^i\partial_\mu\Phi^j\frac{\Phi^b}{u}A_\mu^{em}\right) = \\ \left(\partial_\nu\frac{\Phi^a}{u}\right)A_\mu^{em} - \left(\partial_\mu\frac{\Phi^a}{u}\right)A_\nu^{em} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Συνυπολογίζοντας τις σχέσεις (2.102) και (2.105), έχουμε

$$\frac{2}{u^4e}\varepsilon_{abc}\Phi^a(\partial_\mu\Phi^b)(\partial_\nu\Phi^c)\Phi^a + \partial_\mu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\nu^{em}\right) - \partial_\nu\left(\frac{\Phi^a}{u}A_\mu^{em}\right) + \left(\partial_\nu\frac{\Phi^a}{u}\right)A_\mu^{em} - \left(\partial_\mu\frac{\Phi^a}{u}\right)A_\nu^{em} =$$

$$\left(\partial_\mu A_\nu^{em} - \partial_\nu A_\mu^{em}\right)\frac{\Phi^a}{u} + \frac{2}{u^4e}\varepsilon_{abc}\Phi^a(\partial_\mu\Phi^b)(\partial_\nu\Phi^c)\Phi^a \quad (2.106)$$

και εισάγοντας την (2.104), καταλήγουμε στο ότι η τελική μορφή του τανυστή του πεδίου βαθμίδας είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{F_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu A_\nu^{em} - \partial_\nu A_\mu^{em})\frac{\Phi^a}{u} + \frac{1}{u^3e}\varepsilon_{ijk}\Phi^i(\partial_\mu\Phi^j)(\partial_\nu\Phi^k)\frac{\Phi^a}{u}} \quad (2.107)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^{em} - \partial_\nu A_\mu^{em}) + \frac{1}{u^3e}\varepsilon_{abc}\Phi^a(\partial_\mu\Phi^b)(\partial_\nu\Phi^c)} \quad (2.108)$$

Είναι σαφές από την (2.108) ότι στον τετριμμένο τοπολογικό τομέα, $\Phi^a = (0, 0, u)$, ο δεύτερος όρος είναι μηδέν και θα έχουμε $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{em} - \partial_\nu A_\mu^{em}$, δηλαδή την συνήθη μορφή του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή. Στην περίπτωση αυτή, προφανώς, δεν θα υπάρχει λύση μαγνητικού μονοπόλου, αφού ικανοποιείται η ταυτότητα Bianchi, $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Παρατηρούμε, όμως, ότι

η μη τετριμμένη λύση hedgehog, $\Phi^a = u \frac{r^a}{r}$, για το πεδίο Higgs με την απαραίτητη προϋπόθεση τα πεδία να μην μεταβάλλονται στην χωρική ασύμπτωτη, $D_\mu \Phi^a \rightarrow 0$, προσθέτει έναν παραπάνω όρο στον ταχυστή του πεδίου βαθμίδας. Συνεπώς, οι εξισώσεις Maxwell, που θα προέκυπταν από την ταύτοτητα Bianchi, τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \\ &= \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma^{em} - \partial_\sigma A_\rho^{em}) \right] + \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{1}{u^3 e} \varepsilon_{abc} \Phi^a (\partial_\rho \Phi^b) (\partial_\sigma \Phi^c) \right] \\ &= \frac{1}{2u^3 e} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial_\mu (\Phi^a (\partial_\rho \Phi^b) (\partial_\sigma \Phi^c))\end{aligned}$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \neq 0$. Κάτι τέτοιο αποτελεί απόδειξη της ύπαρξης μαγνητικού φορτίου στη θεωρία! Το μαγνητικό (ή καλύτερα τοπολογικό) ρεύμα δίνεται από την σχέση:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu \quad (2.109)$$

$$\Rightarrow \boxed{k^\nu = \frac{1}{2u^3 e} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial_\mu (\Phi^a (\partial_\rho \Phi^b) (\partial_\sigma \Phi^c))} \quad (2.110)$$

Άμεσα βλέπει κανείς ότι το μαγνητικό ρεύμα δεν έχει εξάρτηση από το πεδίο A_μ^{em} και συνεπώς δεν μπορεί να εξαλειφθεί μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού βαθμίδας. Επιπροσθέτως, διατηρείται εξ'ορισμού λόγω της αντισυμμετρίας του $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, σε αντίθεση με κάποιο ρεύμα Noether, του οποίου η διατήρηση προκύπτει από κάποια συμμετρία του μοντέλου. Εύκολα φαίνεται ότι:

$$\partial_\nu k^\nu = 0 \quad (2.111)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε τώρα να εξάγουμε το μαγνητικό φορτίο του συστήματος, δηλαδή το μονόπολο t'Hooft-Polyakov. Για τον σκοπό αυτό θα ήταν κατάλληλο να ξαναγράψουμε την (2.110) ως $k_\nu = -\frac{1}{2u^3 e} \varepsilon_{\nu\mu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial^\mu (\Phi^a (\partial^\rho \Phi^b) (\partial^\sigma \Phi^c))$ και συνεπώς, για $\nu = 0$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}k_0 &= -\frac{1}{2u^3 e} \varepsilon_{0mnk} \varepsilon_{abc} \partial^m (\Phi^a (\partial^n \Phi^b) (\partial^k \Phi^c)) \\ &= \frac{1}{2u^3 e} (-\varepsilon_{0mnk}) \varepsilon_{abc} \partial^m (\Phi^a (\partial^n \Phi^b) (\partial^k \Phi^c)) \\ &= \frac{1}{2u^3 e} \varepsilon_{mnk} \varepsilon_{abc} \partial_m (\Phi^a (\partial_n \Phi^b) (\partial_k \Phi^c))\end{aligned}$$

όπου εξισώσαμε τους άνω και κάτω χωρικούς δείκτες και λάβαμε υπόψιν ότι ο ορισμός που χρησιμοποιούμε για τον πλήρως αντισυμμετρικό ταχυστή Levi-Civita είναι:

$\varepsilon_{0123} = -1, \varepsilon_{123} = +1$. Επομένως, το μαγνητικό φορτίο δίνεται μέσω της γνωστής σχέσης:

$$g = \int d^3 x k_0 = \frac{1}{2u^3 e} \int d^3 x \varepsilon_{mnk} \varepsilon_{abc} \partial_m (\Phi^a (\partial_n \Phi^b) (\partial_k \Phi^c)) \quad (2.112)$$

$$g = \frac{1}{2u^3 e} \int dS_m \varepsilon_{mnk} \varepsilon_{abc} (\Phi^a (\partial_n \Phi^b) (\partial_k \Phi^c)) \quad (2.113)$$

Απο την σχέση (2.113) διαφαίνεται ο τοπολογικός χαρακτήρας του μαγνητικού φορτίου t'Hooft-Polyakov. Υπενθυμίζουμε ότι $|\Phi^a| = u$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εν λόγω σχέση υπό μορφή μοναδιαίων ισοχωρικών διανυσμάτων ως εξής:

$$g = \frac{1}{2e} \int dS_m \varepsilon_{mnk} \varepsilon_{abc} \left(\hat{\Phi}^a (\partial_n \hat{\Phi}^b) (\partial_k \hat{\Phi}^c) \right) \quad (2.114)$$

Συγκρίνοντας την (2.114) με τον ορισμό του αριθμού περιέλιξης για απεικονίσεις $\Phi : S^2 \rightarrow S^2$, (2.88), βλέπουμε ότι είναι ακριβώς η ίδια σχέση. Αναμένουμε, δηλαδή, ότι η λύση για το μαγνητικό φορτίο θα είναι $g = \frac{1}{2e} 8\pi n = \frac{4\pi n}{e}$, όπου n ο αριθμός περιέλιξης. Πράγματι, το ολοκλήρωμα (2.113) στην επιφάνεια της σφαίρας S^2 στην χωρική ασύμπτωτη μπορεί να υπολογιστεί εύκολα μέσω της παραμετροποίησης ξ_u , για $u = 1, 2$:

$$\partial_n \Phi^a = \frac{\partial \xi^u}{\partial r^n} \frac{\partial \Phi^a}{\partial \xi^u} \quad (2.115)$$

$$dS_m = \frac{1}{2} \varepsilon_{mij} \varepsilon_{uv} \frac{\partial r^i}{\partial \xi^u} \frac{\partial r^j}{\partial \xi^v} d^2 \xi \quad (2.116)$$

Τότε, η (2.114) υπολογίζεται:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2e} \int dS_m \varepsilon_{mnk} \varepsilon_{abc} \left(\hat{\Phi}^a (\partial_n \hat{\Phi}^b) (\partial_k \hat{\Phi}^c) \right) \\ &= \frac{1}{2e} \int \frac{1}{2} \varepsilon_{mij} \varepsilon_{uv} \frac{\partial r^i}{\partial \xi^u} \frac{\partial r^j}{\partial \xi^v} \varepsilon_{mnk} \varepsilon_{abc} \left(\hat{\Phi}^a \left(\frac{\partial \xi^{u'}}{\partial r^n} \frac{\partial \hat{\Phi}^b}{\partial \xi^{u'}} \right) \left(\frac{\partial \xi^{v'}}{\partial r^k} \frac{\partial \hat{\Phi}^c}{\partial \xi^{v'}} \right) \right) d^2 \xi \\ &= \frac{1}{2e} \int \frac{1}{2} \delta_{nk}^{ij} \varepsilon_{uv} \frac{\partial r^i}{\partial \xi^u} \frac{\partial r^j}{\partial \xi^v} \varepsilon_{abc} \left(\hat{\Phi}^a \left(\frac{\partial \xi^{u'}}{\partial r^n} \frac{\partial \hat{\Phi}^b}{\partial \xi^{u'}} \right) \left(\frac{\partial \xi^{v'}}{\partial r^k} \frac{\partial \hat{\Phi}^c}{\partial \xi^{v'}} \right) \right) d^2 \xi \\ &= \frac{1}{2e} \int \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial r^n}{\partial \xi^u} \frac{\partial r^k}{\partial \xi^v} - \frac{\partial r^k}{\partial \xi^u} \frac{\partial r^n}{\partial \xi^v} \right) \frac{\partial \xi^{u'}}{\partial r^n} \frac{\partial \xi^{v'}}{\partial r^k} \right] \left(\hat{\Phi}^a \frac{\partial \hat{\Phi}^b}{\partial \xi^{u'}} \frac{\partial \hat{\Phi}^c}{\partial \xi^{v'}} \right) \varepsilon_{abc} \varepsilon_{uv} d^2 \xi \\ &= \frac{1}{2e} \int \frac{1}{2} [\delta_{uu'} \delta_{vv'} - \delta_{uv'} \delta_{vu'}] \left(\hat{\Phi}^a \frac{\partial \hat{\Phi}^b}{\partial \xi^{u'}} \frac{\partial \hat{\Phi}^c}{\partial \xi^{v'}} \right) \varepsilon_{abc} \varepsilon_{uv} d^2 \xi \\ &= \frac{1}{2e} \int \frac{1}{2} \left(\hat{\Phi}^a \frac{\partial \hat{\Phi}^b}{\partial \xi^u} \frac{\partial \hat{\Phi}^c}{\partial \xi^v} - \hat{\Phi}^a \frac{\partial \hat{\Phi}^b}{\partial \xi^v} \frac{\partial \hat{\Phi}^c}{\partial \xi^u} \right) \varepsilon_{abc} \varepsilon_{uv} d^2 \xi \\ &= \frac{1}{e} \int \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{uv} \hat{\Phi}^a \partial_u \hat{\Phi}^b \partial_v \hat{\Phi}^c d^2 \xi \\ &\Rightarrow \boxed{g = \frac{1}{e} \int \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{uv} \hat{\Phi}^a \partial_u \hat{\Phi}^b \partial_v \hat{\Phi}^c d^2 \xi = \frac{1}{e} \int \sqrt{g} d^2 \xi = \frac{4\pi n}{e}} \quad (2.117) \end{aligned}$$

όπου η \sqrt{g} είναι η ορίζουσα του μετρικού ταυστή της σφαίρας S^2 στον ισόχωρο.

Η σχέση (2.117) μας δίνει το μαγνητικό μονόπολο t'Hooft-Polyakov και είναι η ανάλογη συνθήκη χβάντωσης του Dirac για την μη αβελιανή περίπτωση. Οφείλουμε να τονίσουμε ότι

ο όρος 4π προκύπτει από την ολοκλήρωση στην επιφάνεια της σφαίρας S^2 και δεν δημιουργεί ουσιαστική διαφορά στην συνθήκη κβάντωσης. Εξάλλου, υπενθυμίζουμε ότι στο μονόπολο Dirac ξεκινήσαμε από την σχέση $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta^3(\mathbf{r})$. Μπορούμε λοιπόν να καταλήξουμε στο ότι η συνθήκη κβάντωσης στην μη αβελιανή περίπτωση δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{eg = n} \quad (2.118)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, παρατηρήσαμε ότι το τοπολογικό ρεύμα k_μ μας δίνει ένα διατηρούμενο μαγνητικό φορτίο στο σύστημα, του οποίου η έκφραση έχει ενσωματωμένη την συνθήκη κβάντωσης. Το μαγνητικό ρεύμα προκύπτει (και διατηρείται), επειδή επιλέξαμε διαφορετικό τοπολογικό τομέα στην λύση του συστήματος από τον τετριμμένο. Σε αντίθεση με το μονόπολο Dirac, δηλαδή, το μονόπολο t'Hooft-Polyakov δεν μπήκε με το χέρι στις εξισώσεις μας. **Προέκυψε ως απαραίτητη συνθήκη**, όταν λύσαμε την οριακή συνθήκη $D_\mu \Phi^a \rightarrow 0$ για την λύση hedgehog του βαθμωτού πεδίου. Αφού τα αποτελέσματα μας, λοιπόν, είναι πράγματι θετικά, το επόμενο λογικό βήμα είναι να βρούμε την ακριβή λύση του βαθμωτού πεδίου, η οποία θα ικανοποιεί τις ασυμπτωτικές σχέσεις (2.93-94), αλλά και τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Για τον σκοπό αυτό θα υιοθετήσουμε την προσέγγιση t'Hooft-Polyakov. Θα δούμε ότι μέσω της προσέγγισης αυτής, μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα της μάζας του μονοπόλου, το επονομαζόμενο όριο Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS)[22].

Κεφάλαιο 3

Το όριο

Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield

3.1 Η προσέγγιση t'Hooft-Polyakov

Είναι σαφές ότι οι λύσεις των εξισώσεων κίνησης που προκύπτουν από το μοντέλο Georgi-Glashow δεν αποτελούν μια τετριμμένη διαδικασία. Επιπροσθέτως, επιθυμούμε να επιβάλλουμε στις λύσεις αυτές τις οριακές συνθήκες που προκύπτουν από τις ασυμπτωτικές σχέσεις (2.93-94). Συνεπώς, ο σκοπός είναι να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης με την συνθήκη το πεδίο Higgs να προσεγγίζει τη λύση hedgehog στην χωρική ασύμπτωτη και, επίσης, η συναλλοίωτη παράγωγός του να μηδενίζεται. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος, οι t'Hooft-Polyakov πρότειναν την ακόλουθη σφαιρικά συμμετρική προσέγγιση των λύσεων, την οποία και θα υιοθετήσουμε[15]:

$$\Phi^a = u \frac{r^a}{r} H(r) \quad (3.1)$$

$$A_i^a = \varepsilon_{ani} \frac{r^n}{r} \left(\frac{1 - K(r)}{er} \right) \quad (3.2)$$

$$A_0^a = 0 \quad (3.3)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζουν την μορφή που πρέπει να έχουν τα ισοβαθμωτά και ισοανυσματικά πεδία προκειμένου να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στην χωρική ασύμπτωτη. Μπορούμε, εδώ, να σχολιάσουμε ότι η σχέση (3.1), $\Phi^a = u \frac{r^a}{r} H(r)$, ανήκει στην ίδια ομοιοπική κλάση με την $\Phi^a = u \frac{r^a}{r}$, και μπορεί, συνεπώς, να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο σε αυτή. Ίσως, το εν λόγω σχόλιο να είναι προφανές για τον έμπειρο αναγνώστη, θεωρούμε κατάλληλο, όμως, να γεφυρώνουμε τα αλγεβρικά μας αποτελέσματα με την γλώσσα της τοπολογίας, προκειμένου να καταστήσουμε το πρόβλημα πιο κατανοητό.

Η ακριβής μορφή των συναρτήσεων $H(r)$, $K(r)$ μπορεί να βρεθεί από τις εξισώσεις κίνησης. Μπορούμε, όμως, να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η λύση μονοπόλου αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο της ενέργειας (και συγκεκριμένα στην σολιτονική λύση hedgehog), όπως δείξαμε στο

προηγούμενο κεφάλαιο. Συνεχίζουμε εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στο συναρτησοειδές της ενέργειας, που δίνεται από την σχέση (2.70), αφού θεωρούμε στατικές λύσεις με $A_0^a = 0$. Υπενθυμίζουμε ότι η ενέργεια δίνεται:

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2} E_i^a E_i^a + \frac{1}{2} B_i^a B_i^a + \frac{1}{2} (D_i \Phi^a)(D_i \Phi^a) + V(\Phi) \right)$$

ή καλύτερα σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$E = 4\pi \int r^2 dr \left(\frac{1}{2} E_i^a E_i^a + \frac{1}{2} B_i^a B_i^a + \frac{1}{2} (D_i \Phi^a)(D_i \Phi^a) + V(\Phi) \right) \quad (3.4)$$

Οι όροι του συναρτησοειδούς της ενέργειας υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \frac{\lambda}{4} (\Phi^a \Phi^a - u^2)^2 \\ &= \frac{\lambda}{4} \left(u^2 \frac{r^a r^a}{r^2} H^2(r) - u^2 \right)^2 \\ &\Rightarrow \boxed{V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} u^4 (H^2(r) - 1)^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} D_i \Phi^a &= \partial_i \Phi^a - e \varepsilon_{abc} A_i^b \Phi^c \\ &= \partial_i \left(u \frac{r^a}{r} H(r) \right) - e \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bni} \frac{r^n}{r} \frac{1 - K(r)}{er} u \frac{r^c}{r} H(r) \\ &= u \frac{\delta_{ai} r^2 - r^a r^i}{r^3} H(r) + u \frac{r^a}{r} H'(r) \frac{r_i}{r} + u \delta_{ni}^{ac} \frac{r^n r^c}{r^3} [1 - K(r)] H(r) \\ &= u \left(\frac{\delta_{ai}}{r} - \frac{r^a r^i}{r^3} \right) H(r) + u \frac{r^a r^i}{r^2} H'(r) + (\delta_{an} \delta_{ci} - \delta_{ai} \delta_{nc}) \frac{r^n r^c}{r^3} [1 - K(r)] H(r) \\ &= u \frac{\delta_{ai}}{r} H(r) + u \frac{r^a r^i}{r^2} \left(H'(r) - \frac{H(r)}{r} \right) + u \frac{r_a r_i}{r^3} [1 - K(r)] H(r) - u \frac{\delta_{ai} [1 - K(r)] H(r)}{r} \\ &= u \frac{\delta_{ai}}{r} (H(r) - [1 - K(r)] H(r)) + u \frac{r^a r^i}{r^2} \left(H'(r) - \frac{H(r)}{r} + \frac{[1 - K(r)] H(r)}{r} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{D_i \Phi^a = \frac{u \delta_{ai}}{r} K H + \frac{u r^a r^i}{r^2} \left(H' - \frac{K H}{r} \right)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} (D_i \Phi^a)(D_i \Phi^a) &= \frac{3u^2}{r^2} K^2 H^2 + u^2 \left(H' - \frac{K H}{r} \right)^2 + 2 \frac{u^2}{r^3} r^2 \left(K H H' - \frac{K^2 H^2}{r} \right) \\ &= \frac{3u^2}{r^2} K^2 H^2 + u^2 H'^2 - \frac{2K H H'}{r} u^2 + \frac{u^2}{r^2} K^2 H^2 + \frac{2K H H'}{r} u^2 - 2 \frac{u^2}{r^2} K^2 H^2 \\ &= 2 \frac{u^2}{r^2} K^2 H^2 + u^2 H'^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(D_i\Phi^a)(D_i\Phi^a) = \frac{u^2}{r^2}K^2H^2 + \frac{u^2H'^2}{2}} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} B_i^a &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}^a \\ &= \varepsilon_{ijk}(\partial_j A_k^a - \frac{e}{2}\varepsilon_{abc}A_j^b A_k^c) \\ &= \varepsilon_{ijk}\partial_j \left(\varepsilon_{ank} \frac{r^n}{r} \frac{1-K}{er} \right) - \frac{e}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{bmj}\varepsilon_{clk} \frac{r^m r^l}{r^2} \left(\frac{1-K}{er} \right)^2 \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ank} \left(\frac{\delta_{nj}er^2 - r^n e 2r^j}{e^2 r^4} (1-K) - \frac{r^n}{er^2} K' \frac{r^j}{r} \right) + \frac{e}{2}\delta_{bm}^ik \delta_{lk}^ab \frac{r^m r^l}{r^2} \left(\frac{1-K}{er} \right)^2 \\ &= \delta_{an}^{ij} \left[\left(\frac{\delta_{nj}}{er^2} - \frac{2r^n r^j}{er^4} \right) (1-K) - \frac{r^n r^j}{er^3} K' \right] - \frac{e}{2}(\delta_{im}\delta_{al} + \delta_{il}\delta_{am}) \frac{r^m r^l}{r^2} \left(\frac{1-K}{er} \right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{3\delta_{ia}}{er^2} - \frac{2\delta_{ia}}{er^2} \right) (1-K) - \frac{\delta_{ia}}{er} K' - \left(\frac{\delta_{ia}}{er^2} - \frac{2r^a r^i}{er^4} \right) (1-K) + \frac{r^a r^i}{er^3} K' \right] - \frac{r^a r^i}{er^4} (1-K)^2 \\ &= \frac{2r^a r^i}{er^4} (1-K) + \left(\frac{r^a r^i}{er^3} - \frac{\delta_{ai}}{er} \right) K' - \frac{r^a r^i}{er^4} (1-K)^2 \\ &= \frac{r^a r^i}{er^4} (2 - 2K + rK' - 1 + 2K - K^2) - \frac{\delta_{ai}}{er} K' \\ &\Rightarrow \boxed{B_i^a = \frac{r^a r^i}{er^4} (rK' - K^2 + 1) - \frac{\delta_{ai}}{er} K'} \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_i^a)(B_i^a) &= \frac{(rK' - K^2 + 1)^2}{e^2 r^4} + \frac{3K'^2}{e^2 r^2} - 2\frac{\delta_{ai}}{er} \frac{r^a r^i}{er^4} K' (rK' - K^2 + 1) \\ &= \frac{(rK' - K^2 + 1)^2}{e^2 r^4} + \frac{3K'^2}{e^2 r^2} - \frac{2K'^2}{e^2 r^2} - \frac{2(1-K^2)K'}{e^2 r^3} \\ &= \frac{r^2 K'^2}{e^2 r^4} + \frac{2rK'(1-K^2)}{e^2 r^4} + \frac{(1-K^2)^2}{e^2 r^4} + \frac{K'^2}{e^2 r^2} - \frac{2(1-K^2)K'}{e^2 r^3} \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(B_i^a)(B_i^a) = \frac{K'^2}{e^2 r^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4}} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι η προσέγγιση t'Hooft-Polyakov πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις (2.93-94) στην χωρική ασύμπτωτη. Επιπροσθέτως, απαιτούμε τα πεδία να μην παρουσιάζουν ιδιάζοντα σημεία στο $r \rightarrow 0$. Μπορούμε, λοιπόν, να ορίσουμε τις ακόλουθες οριακές συνθήκες για τις βοηθητικές συναρτήσεις $H(r), K(r)$:

$$H(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

$$K(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

$$H(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

$$K(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας τις παραπάνω οριακές συνθήκες, βλέπουμε ότι η προσέγγιση t'Hooft-Polyakov μας αναπαράγει τις σχέσεις (2.93),(2.95) και (2.99) για $r \rightarrow \infty$, απαιτώντας, βέβαια, την προφανή συνθήκη $H' \rightarrow 0$, $K' \rightarrow 0$ στην χωρική ασύμπτωτη.

Συνυπολογίζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα ότι η ενέργεια του συστήματος, (3.4), δίνεται:

$$E = 4\pi \int r^2 dr \left(\frac{K'^2}{e^2 r^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4} + \frac{u^2}{r^2} K^2 H^2 + \frac{u^2 H'^2}{2} + \frac{\lambda}{4} u^4 (H^2 - 1)^2 \right) \quad (3.14)$$

όπου μηδενίσαμε την συνεισφορά του χρωματικού ηλεκτρικού πεδίου, E_a^i , μέσω της (3.3). Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι οι οριακές σχέσεις (3.10-13) επιβάλλουν τη συνθήκη πεπερασμένης ενέργειας για την προσέγγιση t'Hooft-Polyakov. Επιπλέον, μπορούμε να ελέγξουμε ότι υπάρχει μαγνητικό φορτίο στο σύστημα. Μπορούμε να εξάγουμε το μαγνητικό φορτίο από την μαγνητική ροή. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την γενικευμένη ταυτότητα Bianchi[25], $D_i B_i^a = 0$, έχουμε:

$$g = \int dS_i B_i = \int dS_i B_i^a \frac{\Phi^a}{u} = \int d^3 x D_i (B_i^a \frac{\Phi^a}{u}) = \frac{4\pi}{u} \int r^2 dr B_i^a D_i \Phi^a \quad (3.15)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την (3.15) χρησιμοποιώντας τις (3.6) και (3.8). Το ολοκλήρωμα είναι πολύ πιο εύκολο από ότι φαίνεται εκ πρώτης όψεως:

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi}{u} \int r^2 dr B_i^a D_i \Phi^a \\ &= \frac{4\pi}{u} \int r^2 dr \left[\frac{r^a r^i}{e r^4} (r K' - K^2 + 1) - \frac{\delta_{ai}}{e r} K' \right] \left[\frac{u \delta_{ai}}{r} K H + \frac{u r^a r^i}{r^2} \left(H' - \frac{K H}{r} \right) \right] \\ &= \frac{4\pi}{e} \int dr \left[\frac{K H (r K' - K^2 + 1)}{r} + \frac{(r K' - K^2 + 1)(r H' - K H)}{r} - 3 K K' H - K' (r H' - K H) \right] \\ &= \frac{4\pi}{e} \int dr \left[\frac{(r K' - K^2 + 1) r H'}{r} - K' (2 K H + r H') \right] \\ &= \frac{4\pi}{e} \int dr [(1 - K^2) H' - 2 K K' H] \\ &= \frac{4\pi}{e} \int dr \frac{d}{dr} [(1 - K^2) H] \\ &\Rightarrow g = \frac{4\pi}{e} \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τις οριακές συνθήκες (3.10-13). Βλέπουμε, δηλαδή, ότι εξαγάγαμε την σχέση για το μαγνητικό φορτίο, (2.117), και ότι οι οριακές συνθήκες είναι πράγματι σωστές.

Όπως βλέπουμε από την μορφή της (3.14), το σύστημα μας αποτελείται από δύο πεδία K, H με κινητικούς όρους

$$T = \frac{K'^2}{e^2 r^2} + \frac{u^2 H'^2}{2} \quad (3.17)$$

και δυναμική ενέργεια

$$V = \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4} + \frac{u^2}{r^2} K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4} u^4 (H^2 - 1)^2 \quad (3.18)$$

Πρωτού εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης, θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμο να εκτελέσουμε την αλλαγή μεταβλητής $\xi = uer$, προκειμένου να κανονικοποιήσουμε την ενέργεια ως προς τα u, e . Έτσι, θα έχουμε

$$\xi = uer \rightarrow r = \frac{\xi}{ue} \quad (3.19)$$

$$d\xi = uedr \rightarrow \frac{d}{dr} = ue \frac{d}{d\xi} \quad (3.20)$$

$$r^2 dr \rightarrow \frac{\xi^2}{u^3 e^3} d\xi \quad (3.21)$$

και συνεπώς, οι σχέσεις (3.17) και (3.18) μετασχηματίζονται ως εξής:

$$T \rightarrow \frac{u^4 e^2}{\xi^2} \left(\frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{u^4 e^2}{2} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 \quad (3.22)$$

$$V \rightarrow \frac{u^4 e^2}{2\xi^4} (K^2 - 1)^2 + \frac{u^4 e^2}{\xi^2} K^2 H^2 + u^4 e^2 \frac{\lambda}{4e^2} (H^2 - 1)^2 \quad (3.23)$$

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι στο μοντέλο Georgi-Glashow εξαγάγαμε μάζα του Higgs, $M_H = \sqrt{2\lambda}u$, και μάζα του W_{\pm} μποζονίου, $M_W = eu$. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την παράμετρο σύζευξης με

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{M_H}{M_W} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\lambda}}{e} \rightarrow \beta^2 = \frac{\lambda}{2e^2} \quad (3.24)$$

και καταλήγουμε στο ότι η ενέργεια ως προς την κανονικοποιημένη μεταβλητή ξ δίνεται:

$$E = 4\pi \int \frac{\xi^2}{u^3 e^3} d\xi \left(\frac{u^4 e^2}{\xi^2} \left(\frac{dK}{d\xi} \right)^2 + \frac{u^4 e^2}{2} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 + \frac{u^4 e^2}{2\xi^4} (K^2 - 1)^2 + \frac{u^4 e^2}{\xi^2} K^2 H^2 + u^4 e^2 \frac{\beta^2}{2} (H^2 - 1)^2 \right)$$

$$E = \frac{4\pi u}{e} \int \xi^2 d\xi \left(\frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} H'^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2} (H^2 - 1)^2 \right) \quad (3.25)$$

με αντίστοιχο κινητικό και δυναμικό όρο:

$$T = \frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} H'^2 \quad (3.26)$$

$$V = \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2} (H^2 - 1)^2 \quad (3.27)$$

Εκτελώντας την μεταβολή της ενέργειας ως προς τα πεδία K και H , μπορούμε πλέον να εξάγουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange του συστήματος:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta K} - \frac{\delta}{\delta \xi} \left(\frac{\delta E}{\delta K'} \right) &= 0 \\ \frac{2(K^2 - 1)2K}{2\xi^2} + 2KH^2 - 2K'' &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{K'' = \frac{(K^2 - 1)K}{\xi^2} + KH^2} & \quad (3.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta H} - \frac{\delta}{\delta \xi} \left(\frac{\delta E}{\delta H'} \right) &= 0 \\ 2HK^2 + 2\beta^2(H^2 - 1)H\xi^2 - H''\xi^2 - 2H'\xi &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{H'' = \frac{2HK^2}{\xi^2} - \frac{2H'}{\xi} + 2\beta^2H(H^2 - 1)} & \quad (3.29) \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις (3.28) και (3.29) δεν έχουν αναλυτική λύση και πρέπει να υπολογιστούν με αριθμητικές μεθόδους. Αυτό δεν ισχύει για την ειδική περίπτωση του $\beta = 0$, η οποία αντιστοιχεί στο όριο BPS και θα συζητηθεί εκτενώς αργότερα. Πρωτού ελέγξουμε αυτή την ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, ειδική περίπτωση, θεωρούμε κατάλληλο να γενικεύσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση του δυονίου.

3.2 Το δυόνιο Julia-Zee

Όπως προαναφέραμε, το δυόνιο είναι ένα θεωρητικό σωματίδιο με ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο, το οποίο είχε προταθεί πρώτη φορά από τον Schwinger το 1969 [24]. Αποτελεί γενίκευση του μαγνητικού μονοπόλου, καθώς το μονόπολο μπορεί να θεωρηθεί ως δυόνιο με μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο. Οι Julia και Zee πρότειναν το 1975 μια γενίκευση της προσέγγισης t'Hooft-Polyakov, προκειμένου το μοντέλο Georgi-Glashow να συμπεριλαμβάνει δυονικές λύσεις[19]. Υπενθυμίζουμε ότι μέχρι στιγμής είχαμε επιβάλλει μηδενική συνεισφορά από τα ηλεκτρικά χρωματικά πεδία, E_i^a , μέσω της βαθμίδας $A_0^a = 0$. Η προσέγγιση Julia-Zee αποτελεί μια λογική εξέλιξη στο πρόβλημα:

$$\Phi^a = u \frac{r^a}{r} H(r) \quad (3.30)$$

$$A_i^a = \varepsilon_{ani} \frac{r^n}{r} \left(\frac{1 - K(r)}{er} \right) \quad (3.31)$$

$$A_0^a = u \frac{r^a}{r} J(r) \quad (3.32)$$

Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό χρωματικό πεδίο του συστήματος μέσω της σχέσης:

$$E_i^a = F_{0i}^a = \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a - e \varepsilon_{abc} A_0^b A_i^c \quad (3.33)$$

Ο πρώτος όρος είναι προφανώς μηδενικός, αφού δεν υπάρχει εξάρτηση από τον χρόνο. Υπολογίζουμε την παραπάνω σχέση και καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} E_i^a &= \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a - e \varepsilon_{abc} A_0^b A_i^c \\ &= -\partial_i \left(u \frac{r^a}{r} J(r) \right) - e \varepsilon_{abc} u \frac{r^b}{r} J(r) \varepsilon_{cni} \frac{r^n}{r} \left(\frac{1 - K(r)}{er} \right) \\ &= -u \frac{\delta_{ai} r^2 - r^a r^i}{r^3} J - u \frac{r^a}{r} J' \frac{r^i}{r} - u e \delta_{ni}^{ab} \frac{r^b r^n}{r^2} J \left(\frac{1 - K}{er} \right) \\ &= -u \left[\frac{\delta_{ai}}{r} J - \frac{r^a r^i}{r^3} J + \frac{r^a r^i}{r^2} J' + \frac{r^a r^i}{r^3} J(1 - K) - \frac{\delta_{ai}}{r} J(1 - K) \right] \\ &= -u \left[\frac{r^a r^i}{r^2} \left(J' - \frac{JK}{r} \right) + \frac{\delta_{ai}}{r} JK \right] \\ &\Rightarrow \boxed{E_i^a = u \left[\frac{r^a r_i}{r^3} (JK - rJ') - \frac{\delta_{ai}}{r} JK \right]} \quad (3.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_i^a)(E_i^a) &= u^2 \left[\frac{(JK - rJ')^2}{r^2} + \frac{3J^2 K^2}{r^2} - \frac{2(JK - rJ')JK}{r^2} \right] \\ &= \frac{u^2}{r^2} [(JK - rJ')(JK - rJ' - 2JK) + 3J^2 K^2] \\ &= \frac{u^2}{r^2} [-(JK - rJ')(JK + rJ') + 3J^2 K^2] \\ &= \frac{u^2}{r^2} [2J^2 K^2 + r^2 J'^2] \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(E_i^a)(E_i^a) = u^2 \frac{J^2 K^2}{r^2} + u^2 \frac{J'^2}{2}} \quad (3.35) \end{aligned}$$

Επιβάλλοντας την απαίτηση τα πεδία να μην έχουν ιδιάζοντα σημεία στο $r \rightarrow 0$ και το ηλεκτρικό πεδίο να μηδενίζεται στην χωρική ασύμπτωτη, μπορούμε να συμπεριλάβουμε στις ασυμπτωτικές σχέσεις την ακόλουθη οριακή συνθήκη για την βοηθητική συνάρτηση J :

$$J \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.36)$$

$$J \rightarrow -C, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.37)$$

όπου C μια αυθαίρετη σταθερά, προκειμένου η μεταβολή της J να μηδενίζεται στο $r \rightarrow \infty$. Αναφέρουμε, εδώ, ότι η ταχύτητα σύγκλισης της J πρέπει να είναι μεγαλύτερη της πολυωνυμικής, προκειμένου το ηλεκτρικό πεδίο να μην απειρίζεται στο $r \rightarrow 0$ και να μηδενίζεται στη

χωρική ασύμπτωτη. Επομένως, η ενέργεια για το σύστημα με δυονικές λύσεις δίνεται μέσω απλής αντικατάστασης στην (3.4) ως εξής,

$$E = 4\pi \int r^2 dr \left(u^2 \frac{J^2 K^2}{r^2} + u^2 \frac{J'^2}{2} + \frac{K'^2}{e^2 r^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4} + \frac{u^2}{r^2} K^2 H^2 + \frac{u^2 H'^2}{2} + \frac{\lambda}{4} u^4 (H^2 - 1)^2 \right) \quad (3.38)$$

με αντίστοιχο κινητικό και δυναμικό όρο:

$$T = u^2 \frac{J'^2}{2} + \frac{K'^2}{e^2 r^2} + \frac{u^2 H'^2}{2} \quad (3.39)$$

$$V = u^2 \frac{J^2 K^2}{r^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4} + \frac{u^2}{r^2} K^2 H^2 + \frac{\lambda}{4} u^4 (H^2 - 1)^2 \quad (3.40)$$

Συνεχίζουμε με την αλλαγή μεταβλητής στην κανονικοποιημένη $\xi = uer$. Τότε, οι όροι ηλεκτρικού πεδίου μετασχηματίζονται με προφανή τρόπο,

$$u^2 \frac{J^2 K^2}{r^2} + u^2 \frac{J'^2}{2} \rightarrow u^4 e^2 \frac{J^2 K^2}{\xi^2} + u^4 e^2 \frac{J'^2}{2}$$

και η ενέργεια του συστήματος δίνεται ομοίως,

$$E = \frac{4\pi u}{e} \int \xi^2 d\xi \left(\frac{J^2 K^2}{\xi^2} + \frac{J'^2}{2} + \frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} H'^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2} (H^2 - 1)^2 \right) \quad (3.41)$$

με κινητικό και δυναμικό όρο:

$$T = \frac{J'^2}{2} + \frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} H'^2 \quad (3.42)$$

$$V = \frac{J^2 K^2}{\xi^2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2} (H^2 - 1)^2 \quad (3.43)$$

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική πορεία, εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος μεταβάλλοντας την ενέργεια ως προς τα τρία πεδία K, H, J .

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta K} - \frac{\delta}{\delta \xi} \left(\frac{\delta E}{\delta K'} \right) &= 0 \\ 2J^2 K + \frac{2(K^2 - 1)2K}{2\xi^2} + 2KH^2 - 2K'' &= 0 \\ \Rightarrow K'' = KJ^2 + \frac{(K^2 - 1)K}{\xi^2} + KH^2 & \quad (3.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta H} - \frac{\delta}{\delta \xi} \left(\frac{\delta E}{\delta H'} \right) &= 0 \\ 2HK^2 + 2\beta^2(H^2 - 1)H\xi^2 - H''\xi^2 - 2H'\xi &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{H'' = \frac{2HK^2}{\xi^2} - \frac{2H'}{\xi} + 2\beta^2 H(H^2 - 1)} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta J} - \frac{\delta}{\delta \xi} \left(\frac{\delta E}{\delta J'} \right) &= 0 \\ 2JK^2 - J''\xi^2 - 2J'\xi &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{J'' = \frac{2JK^2}{\xi^2} - \frac{2J'}{\xi}} \quad (3.46)$$

Τέλος, μπορούμε να εξάγουμε και το ηλεκτρικό φορτίο του συστήματος, ομοίως με το μαγνητικό φορτίο της προσέγγισης t'Hooft-Polyakov :

$$q = \int dS_i E_i = \int dS_i E_i^a \frac{\Phi^a}{u} = \int d^3x D_i (E_i^a \frac{\Phi^a}{u}) = \frac{4\pi}{u} \int r^2 dr E_i^a D_i \Phi^a \quad (3.47)$$

Ο λόγος που αποφασίσαμε να εξάγουμε στο τέλος το ηλεκτρικό φόρτιο είναι επειδή το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα απλοποιείται ιδιαίτερα χρησιμοποιώντας την σχέση (3.46) των εξισώσεων κίνησης. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.34) και (3.6) και προκύπτει

$$\begin{aligned} q &= \frac{4\pi}{u} \int r^2 dr \left[u \left(\frac{r^a r_i}{r^3} (JK - rJ') - \frac{\delta_{ai}}{r} JK \right) \left(\frac{u \delta_{ai}}{r} KH + \frac{ur^a r^i}{r^2} \left(H' - \frac{KH}{r} \right) \right) \right] \\ &= \frac{4\pi}{u} \int u^2 r^2 dr \left[\frac{r^2}{r^4} (JK - rJ') KH + \frac{r^4}{r^6} (rH' - KH)(JK - rJ') - \frac{3}{r^2} JK^2 H - \frac{r^2}{r^4} (rH' - KH) JK \right] \\ &= 4\pi u \int dr [(JK - rJ')(rH' - KH + KH) - 3JK^2 H - rH' JK + JK^2 H] \\ &= 4\pi u \int dr [rH' JK - r^2 J'H' - rH' JK - 2JK^2 H] \\ &= -4\pi u \int dr [2JK^2 H + r^2 J'H'] \\ &= -4\pi u \int \frac{d\xi}{ue} [2JK^2 H + \frac{\xi^2}{u^2 e^2} u^2 e^2 J'H'] \\ &= -\frac{4\pi}{e} \int d\xi [2JK^2 H + \xi^2 J'H'] \\ &= -\frac{4\pi}{e} \int d\xi [\xi^2 J''H + 2\xi J'H + \xi^2 J'H'] \\ &= -\frac{4\pi}{e} \int d\xi [(\xi^2)' J'H + \xi^2 (J'H)'] \\ &= -\frac{4\pi}{e} \int d\xi [\xi^2 (J'H)]' \\ &\Rightarrow \boxed{q = \frac{4\pi C}{e} = Cg} \quad (3.48) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση λάβαμε υπόψιν ότι η J τείνει στο $-C$ με ταχύτητα μεγαλύτερη της πολυωνυμικής.

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι η C **δεν** είναι ο αριθμός περιέλιξης! Αφενός, δεν υπάρχει κανένας λόγος η J να τείνει σε ακέραια τιμή και αφετέρου, αν ήταν ο αριθμός περιέλιξης, αυτός θα εμφανιζόταν και στο ολοκλήρωμα για το μαγνητικό φορτίο. Αναφέρουμε επίσης, ότι αν επιλέξουμε $C = 0$, η J τείνει στο 0 τόσο στην αρχή, όσο και στην χωρική ασύμπτωτη. Αυτό σημαίνει ότι η J είναι παντού μηδενική, αφού δεν υπάρχει άλλη διέγερση από ηλεκτρικό φορτίο στο σύστημα. Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι για $J = 0 \rightarrow A_0^a = 0$, το σύστημα περιγράφει πάλι μαγνητικό μονόπολο αντί για δυνόνιο.

Επιπροσθέτως, η σχέση (3.48) μας περιγράφει προφανώς την αναλογία του ηλεκτρικού με το μαγνητικό φορτίο του δυνονίου. Η αναλογία αυτή δεν μας είναι αγνωστή. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τον ηλεκτρομαγνητικό δεισμό που αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, το ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο ενός συστήματος συσχετίζεται με έναν μετασχηματισμό στροφής $O(2)$. Μπορούμε, συνεπώς, να ταυτοποιήσουμε την C με μια στροφή, η οποία συνδέει το ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο του δυνονίου.

Έχοντας εξάγει πλέον τις εξισώσεις κίνησης για το μαγνητικό μονόπολο και το δυνόνιο, το επόμενο λογικό βήμα είναι να υπολογίσουμε την ενέργεια του εκάστοτε συστήματος. Για τον υπολογισμό της ενέργειας (και επομένως και της μάζας του μονοπόλου και δυνονίου) πρέπει να λύσουμε τα συστήματα των μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (3.28-29) και (3.44-46). Δυστυχώς, τα συστήματα αυτά δεν έχουν αναλυτική λύση και πρέπει να υπολογιστούν αριθμητικά. Η ειδική περίπτωση, όμως, της μηδενικής σύζευξης, $\lambda = 0$, μας δίνει δυνατότητα αναλυτικής λύσης. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται όριο BPS. Το εν λόγω όριο αποσαφηνίζει επίσης την συσχέτιση της C με την γωνία στροφής μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου του δυνονίου.

3.3 Το όριο BPS

Το όριο BPS θέτει ένα κάτω φράγμα στη μάζα του μονοπόλου και του δυνονίου, όταν η ενέργεια είναι ελάχιστη. Από το συναρτησοειδές της ενέργειας, (3.4), εύκολα βλέπει κανείς ότι η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν $V(\Phi) = 0$. Συνεπώς, απαιτώντας μηδενική σύζευξη με το δυναμικό Higgs, $\lambda = 0$, έχουμε το ακόλουθο όριο ενέργειας:

$$E \geq \frac{1}{2} \int d^3x [(E_i^a)(E_i^a) + (B_i^a)(B_i^a) + (D_i\Phi^a)(D_i\Phi^a)] \quad (3.49)$$

Εισάγουμε στο σημείο αυτό μια αυθαίρετη γωνία θ και εκφράζουμε την παραπάνω σχέση ως εξής:

$$E \geq \frac{1}{2} \int d^3x [(E_i^a)(E_i^a) + (B_i^a)(B_i^a) + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(D_i\Phi^a)(D_i\Phi^a)]$$

Μπορούμε να προβούμε, λοιπόν, σε μια απλή συμπλήρωση τετραγώνων και να καταλήξουμε στην ακόλουθη μορφή για την ενέργεια:

$$E \geq \frac{1}{2} \int d^3x [(E_i^a - \sin \theta (D_i\Phi^a))^2 + (B_i^a - \cos \theta (D_i\Phi^a))^2] + \int d^3x [\sin \theta (E_i^a)(D_i\Phi^a) + \cos \theta (B_i^a)(D_i\Phi^a)] \quad (3.50)$$

Η παραπάνω σχέση έχει προφανές ελάχιστο όταν:

$$E_i^a = \sin \theta (D_i \Phi^a) \quad (3.51)$$

$$B_i^a = \cos \theta (D_i \Phi^a) \quad (3.52)$$

Οι εξισώσεις (3.51-52) ονομάζονται εξισώσεις BPS. Εισάγοντας τις παραπάνω στο συναρτησοειδές της ενέργειας, (3.50), μπορούμε να εξάγουμε το κάτω φράγμα της ενέργειας ως προς την αυθαίρετη γωνία θ :

$$E \geq \int d^3x [\sin \theta (E_i^a)(D_i \Phi^a) + \cos \theta (B_i^a)(D_i \Phi^a)] = \sin \theta \int d^3x (E_i^a)(D_i \Phi^a) + \cos \theta \int d^3x (B_i^a)(D_i \Phi^a)$$

$$\Rightarrow \boxed{E \geq uq \sin \theta + ug \cos \theta} \quad (3.53)$$

οπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (3.15) και (3.47).

Εύκολα υπολογίζουμε, όμως, ότι η ελάχιστη τιμή της (3.53) δίνεται για $g \sin \theta = q \cos \theta$ ή πιο απλά:

$$\boxed{\tan \theta = \frac{q}{g} = C} \quad (3.54)$$

Πράγματι, λοιπόν, η παράμετρος C είναι μια συνάρτηση γωνίας που συνδέει το ηλεκτρικό με το μαγνητικό φορτίο του συστήματος. Συνεπώς, η παράμετρος C δεν είναι τόσο αυθαίρετη, όσο αναφέραμε αρχικά. Έχει μια σαφή γεωμετρική ερμηνεία που σχετίζεται άμεσα με το ζήτημα του ηλεκτρομαγνητικού δυισμού, όπως φαίνεται από την σχέση (3.54). Τονίζουμε ότι θα ήταν μάλλον αδύνατο να εξάγουμε την ερμηνεία αυτή, χωρίς να εκμεταλλευτούμε τις εξισώσεις BPS.

Θέτουμε

$$\theta = \arctan \frac{q}{g} \Rightarrow \begin{cases} \sin \left(\arctan \frac{q}{g} \right) = \frac{\frac{q}{g}}{\sqrt{1+(\frac{q}{g})^2}} = \frac{q}{\sqrt{q^2+g^2}} \\ \cos \left(\arctan \frac{q}{g} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{q}{g})^2}} = \frac{g}{\sqrt{q^2+g^2}} \end{cases} \quad (3.55)$$

και καταλήγουμε στο ότι το ελάχιστο την ενέργειας του συστήματος δίνεται:

$$\boxed{E = M \geq u\sqrt{q^2 + g^2}} \quad (3.56)$$

Η σχέση (3.56) είναι το όριο BPS[5], το οποίο μας δίνει την κατώτερη τιμή της μάζας του δυονίου και, κατά συνέπεια, του μονοπόλου.

3.3.1 Το όριο BPS για το μαγνητικό μονόπολο

Για το μαγνητικό μονόπολο έχουμε προφανώς $q = 0$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, το όριο BPS θέτει κάτω φράγμα

$$M \geq ug = \frac{4\pi u}{e} \quad (3.57)$$

$$\rightarrow M \geq \frac{eu}{\frac{e^2}{4\pi}} = \frac{M_w}{\alpha} = 137M_w \approx 11TeV/c^2 \quad (3.58)$$

όπου εκφράσαμε την μάζα του μονοπόλου ως προς την μάζα του W_{\pm} μποζονίου[13], $M_w \approx 80\text{GeV}/c^2$, και της σταθεράς λεπτής υφής. Επίσης, στην περίπτωση του $\lambda = 0$, έχουμε προαναφέρει ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει από την μεταβολή της ενέργειας έχει αναλυτική λύση. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις BPS και θέτοντας την γωνία $\theta = 0$ για το μονόπολο, καταλήγουμε στην απλή σχέση

$$B_i^a = (D_i \Phi^a) \quad (3.59)$$

η οποία λύνεται μέσω των (3.6) και (3.8). Οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από απλή αντικατάσταση και εξίσωσης κατά μέλη είναι:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta_{ai}}{er} K' &= \frac{u\delta_{ai}}{r} KH \\ K' &= -ueKH \\ ue \frac{dK}{d\xi} &= -ueKH \\ \Rightarrow \boxed{K' = -KH} & \quad (3.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r^a r^i}{er^4} (rK' - K^2 + 1) &= \frac{ur^a r^i}{r^2} \left(H' - \frac{KH}{r} \right) \\ (rK' - K^2 + 1) &= uer(rH' - KH) \\ (\xi K' - K^2 + 1) &= \xi(\xi H' - KH) \\ \xi K' - K^2 + 1 &= \xi^2 H' - \xi KH \\ \Rightarrow \boxed{\xi^2 H' = 1 - K^2} & \quad (3.61) \end{aligned}$$

Συνεπώς, στο όριο BPS, το σύστημα διαφορικών (3.28-29) που εξαγάγαμε για το μονόπολο απλοποιείται στις (3.60-61). Οι διαφορικές αυτές έχουν την ακόλουθη αναλυτική λύση

$$K = \frac{\xi}{\sinh \xi} \quad (3.62)$$

$$H = \coth \xi - \frac{1}{\xi} \quad (3.63)$$

η οποία βρέθηκε μέσω διαδικασίας trial-and-error [22]. Ασφαλώς, ο οδηγός εύρεσης αυτών των λύσεων ήταν το γεγονός ότι χρειάζονται λύσεις εκθετικής μορφής προκειμένου οι βοηθητικές συναρτήσεις να τείνουν στις ασυμπτωτικές τους τιμές με ταχύτητα μεγαλύτερη της πολυωνυμικής.

3.3.2 Το όριο BPS για το δυνίο

Τα παραπάνω γενικεύονται στην περίπτωση των δυνίων με σαφή τρόπο. Όσον αφορά στη μάζα του δυνίου, μπορούμε να εκφράσουμε το κάτω φράγμα της ενέργειας με μοναδική εξάρτηση ως

προς τη γωνία, γράφοντας την (3.53) μέσω της (3.54) ως εξής:

$$\begin{aligned} uq \sin \theta + ug \cos \theta &= ug[\tan \theta \sin \theta + \cos \theta] \\ &= \frac{4\pi u}{e} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = M_{dyon} \geq \frac{4\pi u}{e} \frac{1}{\cos \theta}} \quad (3.64)$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι για $\theta = 0$, έχουμε πράγματι την περίπτωση του μαγνητικού μονοπόλου. Το όριο $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ φαίνεται να οδηγεί σε απειρισμό του κάτω φράγματος. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν ισχύει, αφού σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε μόνο ηλεκτρικό φορτίο στο σύστημα σύμφωνα με την (3.54). Είναι σημαντικό, λοιπόν, να αναφέρουμε ότι η σχέση (3.64) μας δίνει το κάτω φράγμα μάζας του δυονίου για $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Κατά αναλογία με την μάζα του μονοπόλου, για δυόνιο με ίδιο ηλεκτρικό και μαγνητικό φορτίο, $q = g$, έχουμε $\theta = \frac{\pi}{4}$ και το κάτω φράγμα μάζας του προκύπτει:

$$M_{dyon} \geq 11 \cdot \sqrt{2} \approx 15,5 TeV/c^2 \quad (3.65)$$

Λογικό επόμενο των παραπάνω είναι ότι οι διαφορικές εξισώσεις που θα προκύψουν για το δυόνιο (στο όριο BPS) θα περιλαμβάνουν την παράμετρο γωνίας, αφού το κάτω φράγμα της ενέργειας του δυονίου εξαρτάται από το λόγο του ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου. Πράγματι, από τις εξισώσεις BPS θα έχουμε τα ακόλουθα:

$$K' = -KH \cos \theta \quad (3.66)$$

$$H' = \frac{1 - K^2}{\xi^2} \frac{1}{\cos \theta} \quad (3.67)$$

$$J = -H \sin \theta \quad (3.68)$$

των οποίων η λύση προκύπτει εύκολα από τις (3.62-63) ως εξής:

$$K = \frac{\xi}{\sinh \xi} \quad (3.69)$$

$$H = \left(\coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) \frac{1}{\cos \theta} \quad (3.70)$$

$$J = - \left(\coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) \tan \theta \quad (3.71)$$

Μια σημαντική παρατήρηση, στο σημείο αυτό, είναι ότι η οριακή τιμή της H για $\xi \rightarrow \infty$ είναι $\frac{1}{\cos \theta}$, αντί 1. Το συγκεκριμένο δεν αποτελεί πρόβλημα, καθώς θέτοντας το όριο BPS, $\lambda = 0$, η ενέργεια του δυονίου που δίνεται από την σχέση (3.41) παραμένει πεπερασμένη.

Έχοντας πλέον εξάγει τις εξισώσεις που χρειαζόμαστε, μπορούμε να προβούμε στην αριθμητική λύση των διαφορικών εξισώσεων για το μονόπολο και το δυόνιο. Παρακάτω, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από κώδικα FORTRAN για τις βοηθητικές συναρτήσεις των προσεγγίσεων t'Hooft-Polyakov και Julia-Zee, αλλά και για την εξάρτηση της μάζας των σωματιδίων από την παράμετρο σύζευξης.

3.4 Αριθμητικές λύσεις των προσεγγίσεων t'Hooft-Polyakov και Julia-Zee

Ανακεφαλαιώνοντας από τα προηγούμενα υποκεφάλαια, έχουμε τα εξής αποτελέσματα για το μονόπολο t'Hooft-Polyakov :

- Για το όριο BPS, $\lambda = 0$ έχουμε τις λύσεις:

$$K = \frac{\xi}{\sinh \xi} \quad (3.72)$$

$$H = \left(\coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad (3.73)$$

- Για $\lambda > 0$, έχουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$K'' = \frac{(K^2 - 1)K}{\xi^2} + KH^2 \quad (3.74)$$

$$H'' = \frac{2HK^2}{\xi^2} - \frac{2H'}{\xi} + 2\beta^2 H(H^2 - 1) \quad (3.75)$$

με οριακές συνθήκες:

$$H(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.76)$$

$$K(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.77)$$

$$H(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.78)$$

$$K(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.79)$$

- Για την εξάρτηση της μάζας του μονοπόλου από την παράμετρο σύζευξης έχουμε μέσω της σχέσης (3.25):

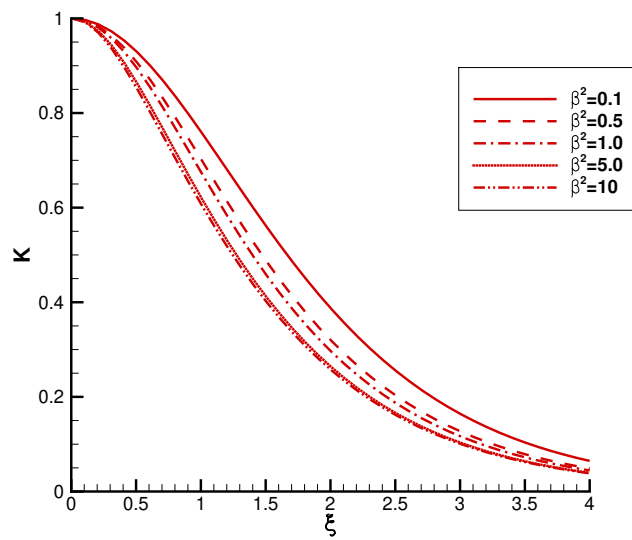
$$E = \frac{4\pi u}{e} \int \xi^2 d\xi \left(\frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{1}{2}H'^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2}(H^2 - 1)^2 \right)$$

$$\Rightarrow E = M = \frac{4\pi u}{e} m(\beta) \quad (3.80)$$

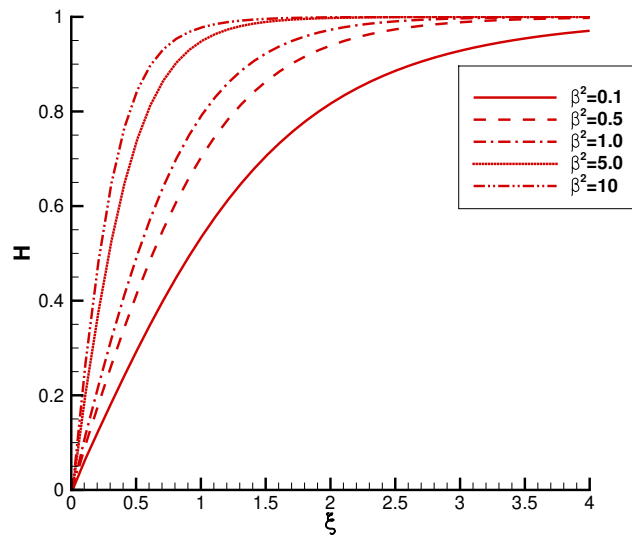
με οριακή συνθήκη

$$M_{min} = \frac{4\pi u}{e} \approx 11TeV/c^2 \quad (3.81)$$

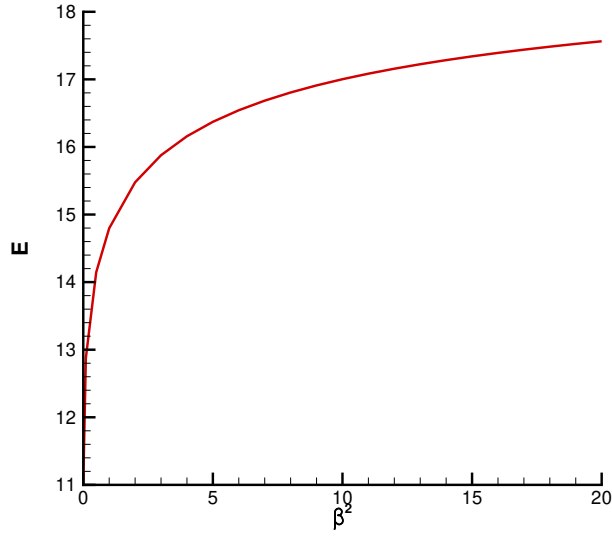
η οποία συνεπάγεται προφανώς ότι $m(0) = 1$.



Σχήμα 3.1: Το πεδίο K για το σύστημα του μονοπόλου



Σχήμα 3.2: Το πεδίο H για το σύστημα του μονοπόλου



Σχήμα 3.3: Η ενέργεια του μονοπόλου σε TeV για αυξανόμενες τιμές της σταθεράς σύζευξης

Ομοίως, όσον αφορά το δυνάμιο Julia-Zee επιλέγουμε λόγο ηλεκτρικού προς μαγνητικού φορτίου, $\frac{q}{g} = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ και έχουμε:

- Για το όριο BPS, $\lambda = 0$ έχουμε τις λύσεις:

$$K = \frac{\xi}{\sinh \xi} \quad (3.82)$$

$$H = \sqrt{2} \left(\coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad (3.83)$$

$$J = - \left(\coth \xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad (3.84)$$

- Για $\lambda > 0$, έχουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$K'' = KJ^2 + \frac{(K^2 - 1)K}{\xi^2} + KH^2 \quad (3.85)$$

$$H'' = \frac{2HK^2}{\xi^2} - \frac{2H'}{\xi} + 2\beta^2 H(H^2 - 1) \quad (3.86)$$

$$J'' = \frac{2JK^2}{\xi^2} - \frac{2J'}{\xi} \quad (3.87)$$

με οριακές συνθήκες:

$$H(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.88)$$

$$K(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.89)$$

$$J(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.90)$$

$$H(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.91)$$

$$K(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.92)$$

$$J(r) \rightarrow -1, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.93)$$

- Για την εξάρτηση της μάζας του δυονίου από την παράμετρο σύζευξης έχουμε μέσω της σχέσης (3.41):

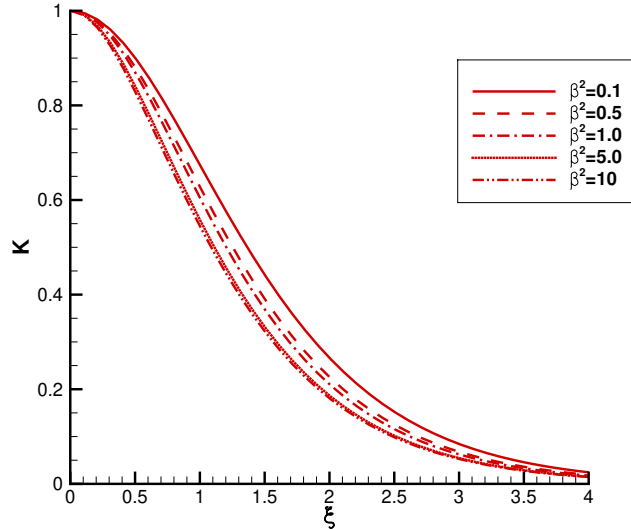
$$E = \frac{4\pi u}{e} \int \xi^2 d\xi \left(\frac{J^2 K^2}{\xi^2} + \frac{J'^2}{2} + \frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{1}{2} H'^2 + \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2} (H^2 - 1)^2 \right)$$

$$\Rightarrow E = M = \frac{4\pi u}{e} d(\beta) \quad (3.94)$$

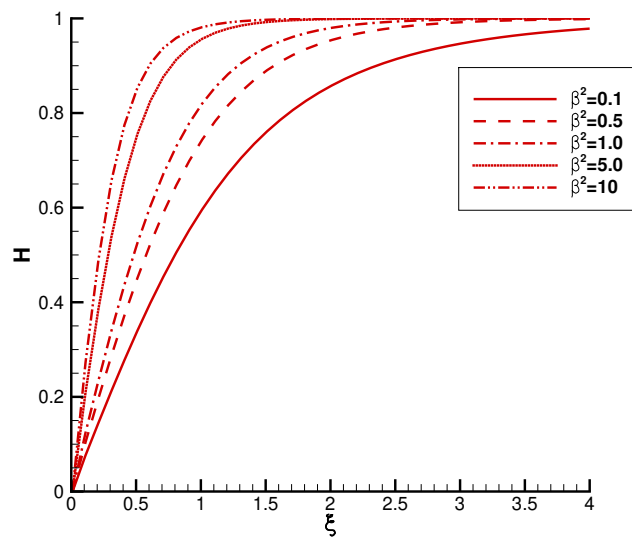
με οριακή συνθήκη

$$M_{min} = \sqrt{2} \frac{4\pi u}{e} \approx 15,5 TeV/c^2 \quad (3.95)$$

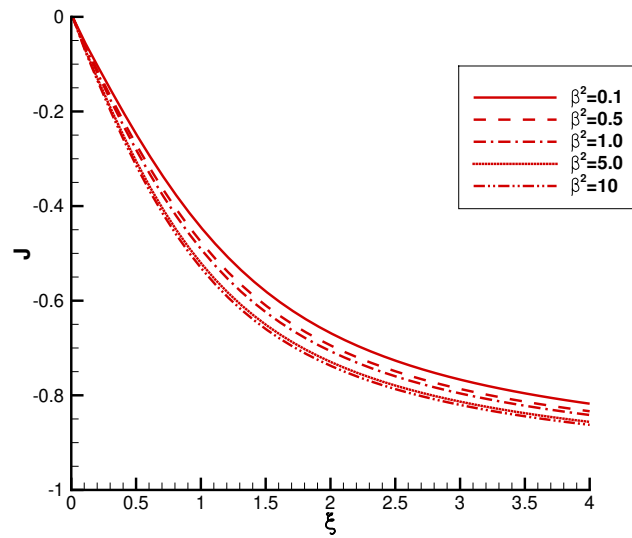
η οποία συνεπάγεται προφανώς ότι $d(0) = \sqrt{2}$.



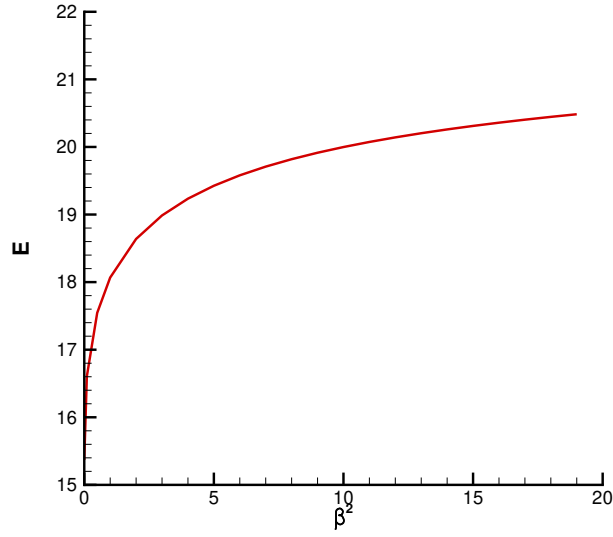
Σχήμα 3.4: Το πεδίο K για το σύστημα του δυονίου



Σχήμα 3.5: Το πεδίο H για το σύστημα του δυονίου



Σχήμα 3.6: Το πεδίο J για το σύστημα του δυονίου



Σχήμα 3.7: Η ενέργεια του δυονίου για αυξανόμενες τιμές της σταθεράς σύζευξης

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, επιθυμούμε να παρουσιάσουμε την ακόλουθη προσεγγιστική διαδικασία για την ενέργεια του μονοπόλου. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ενέργεια του μονοπόλου προέρχεται από δύο περιοχές, την εσωτερική και την εξωτερική περιοχή. Η εξωτερική περιοχή, για $r > R$, είναι ο χώρος στον οποίο τα πεδία έχουν λάβει τις ασυμπτωτικές τους τιμές, ενώ η εσωτερική αναφέρεται στο χώρο, όπου η μορφή των πεδίων δεν είναι τετριμμένη. Είναι σαφές ότι η συνεισφορά ενέργειας της εξωτερικής περιοχής προέρχεται από το μαγνητικό πεδίο του μονοπόλου

$$E_2 = \int_{r>R} d^3r \left(\frac{1}{2} B^2 \right) \quad (3.96)$$

$$E_2 = \frac{2\pi}{e^2 R} \quad (3.97)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (3.9) για $K = 0$

Στρέφουμε τη προσοχή μας στην εσωτερική περιοχή. Θεωρούμε ότι η ενεργειακή πυκνότητα ρ είναι προσεγγιστικά σταθερή και ανάλογη του λu^4 , όπως φαίνεται από τη σχέση (3.14).

Αν ο όρος β^2 που ορίσαμε είναι μοναδιαίας τάξης, $\frac{\lambda}{e^2} = O(1)$, θα έχουμε ότι $\rho \sim e^2 u^4$. Έτσι, μπορούμε μέσω απλής ολοκλήρωσης να εξάγουμε ότι η συνεισφορά ενέργειας από την εσωτερική περιοχή είναι

$$E_1 = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \quad (3.98)$$

όπου ο όρος $\frac{4\pi}{3} R^3$ είναι προφανώς ο όγκος της εσωτερικής περιοχής. Έτσι, έχουμε την

ακόλουθη προσέγγιση για την ενέργεια:

$$M \approx \frac{4\pi}{3} R^3 \rho + \frac{2\pi}{e^2 R} \quad (3.99)$$

Ζητούμε R τέτοιο, ώστε να ελαχιστοποιούμε την παραπάνω ενέργεια. Είναι σαφές ότι η ελάχιστη ακτίνα της εσωτερικής περιοχής θα μας δώσει μια προσέγγιση για την ακτίνα του μονοπόλου.

$$\frac{\partial M}{\partial R} = 0 \rightarrow R_{core} \approx \left(\frac{1}{2e^2 \rho} \right)^{1/4} \quad (3.100)$$

Εισάγοντας τώρα την προσέγγιση $\rho \sim e^2 u^4$, έχουμε ότι η ακτίνα του μονοπόλου δίνεται από τον τύπο:

$$R_{mon} \approx \left(\frac{1}{2e^2 e^2 u^4} \right)^{1/4} \sim \frac{1}{eu} \approx \frac{1}{M_W} \quad (3.101)$$

Πράγματι, το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει τη προσέγγιση ότι η ελάχιστη μάζα του μονοπόλου είναι της τάξης:

$$M_{min} \approx O(R_{mon}^3 \rho) + O\left(\frac{1}{e^2 R_{mon}}\right) \approx O\left(\frac{u}{e}\right) \quad (3.102)$$

Συνεπώς, εκτελώντας μερικούς διαισθητικούς υπολογισμούς, εξάγουμε την σωστή τάξη μεγέθους για τη μάζα του μονοπόλου.

Κεφάλαιο 4

Το μαγνητικό μονόπολο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

Μέχρι στιγμής περιορίσαμε την ανάλυση μας για τα μονόπολα σε επίπεδο χώρο Minkowski. Ίσως να περίμενε κανείς ότι εισάγοντας καμπύλωση στον χωρόχρονο, απλώς δυσκολεύουν οι υπολογισμοί. Κάτι τέτοιο δεν είναι απόλυτα ορθό, καθώς, όπως θα παρουσιάσουμε, η θεωρία του μη-αβελιανού μονοπόλου t'Hooft-Polyakov ταυτοποιεί το μονόπολο με μια μελανή οπή (μαύρη τρύπα) Reissner-Nordstrom σε συνθήκες βαρύτητας, όταν η αναμενόμενη τιμή κενού Higgs πλησιάζει την μάζα του Planck, $M_p = G^{-1/2}$. Στην περίπτωση αυτή, η ακτίνα Schwarzschild, $2MG$, γίνεται ανάλογη της ακτίνας του μονοπόλου, $r \sim (eu)^{-1}$, κάτι το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μονόπολο ταυτοποιείται πράγματι με μια μελανή οπή. Αυτό το ιδιαίτερα ενδιαφέρον αποτέλεσμα αποτέλεσε το βασικό κίνητρο της εν λόγω εργασίας. Στην παρακάτω ανάλυση παρουσιάζουμε τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν το σύστημα, την αριθμητική επίλυση τους και τον τρόπο με τον οποίο αυξάνοντας την μάζα του μονοπόλου στην οριακή τιμή $M_{cr} = \sqrt{\frac{4\pi}{e^2 G}}$ έχουμε την λύση μελανής οπής.

4.1 Το μοντέλο Georgi-Glashow σε βαρύτητα

Η θεωρία, όπως γνωρίζουμε[7], θα περιγράφεται από την ακόλουθη δράση:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_{matter} \right] \quad (4.1)$$

όπου R το βαθμωτό Ricci και \mathcal{L}_{matter} η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του μοντέλου Georgi-Glashow. Ο όρος $\sqrt{-g}$ πολλαπλασιάζεται με το διαφορικό ολοκλήρωσης d^4x , ώστε η δράση να είναι μια βαθμωτή ποσότητα.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{matter} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu \Phi^a)(D_\rho \Phi^a)g^{\rho\mu} - \frac{\lambda}{4}(\Phi^a \Phi^a - u^2) \\ D_\mu \Phi^a &= \partial_\mu \Phi^a - e\varepsilon_{abc}A_\mu^b \Phi^c \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\varepsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c\end{aligned}$$

και το σωματιδιακό φάσμα του μοντέλου μετά το σπάσιμο συμμετρίας περιγράφει δύο διανυσματικά πεδία με μάζα $M_W = eu$, ένα άμαζο φωτόνιο και ένα ουδέτερο βαθμωτό Higgs με μάζα $M_H = \sqrt{2\lambda}u$. Επιλέγουμε σφαιρικά συμμετρική, στατική μετρική

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.2)$$

με την απαίτηση $A(\infty) = B(\infty) = 1$, προκειμένου να μπορούμε σε μακρινές αποστάσεις να αναπαράγουμε τον επίπεδο χώρο Minkowski .

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση t'Hooft-Polyakov ,

$$\begin{aligned}\Phi^a &= u \frac{r^a}{r} H(r) \\ A_i^a &= \varepsilon_{ani} \frac{r^n}{r} \left(\frac{1 - K(r)}{er} \right) \\ A_0^a &= 0\end{aligned}$$

συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των $F_{\mu\nu}^a$ και $D_\mu \Phi^a$. Στο σημείο αυτό, τονίζουμε ότι οι λατινικοί δείκτες a , που αντιστοιχούν στην εσωτερική συμμετρία $SU(2)$ του συστήματος, δεν «καταλαβαίνουν» την καμπύλωση του χωρόχρονου. Συνεπώς, παρουσιάζεται και η πρώτη δυσκολία των υπολογισμών, αφού το πεδίο βαθμίδας έχει πεπλεγμένους δείκτες ισόχωρου και γεωμετρίας. Το πρόβλημα αυτό λύνεται εύκολα, μέσω μετασχηματισμού σε σφαιρικές συντεταγμένες και εκφράζοντας τα στοιχεία ισόχωρου σε διανυσματική μορφή[27].

$$\Phi^a = \vec{\Phi} = u \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} H(r) \quad (4.3)$$

$$A_i^a = \vec{A}_i = \hat{r} \times \hat{e}_i \left(\frac{1 - K(r)}{er} \right) \quad (4.4)$$

$$A_0^a = \vec{A}_t = 0 \quad (4.5)$$

$$D_\mu \vec{\Phi} = \partial_\mu \vec{\Phi} - e \vec{A}_\mu \times \vec{\Phi} \quad (4.6)$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu - e \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \quad (4.7)$$

Έτσι, για τα πεδία βαθμίδας έχουμε τα ακόλουθα:

$$\vec{A}_r = 0 \quad (4.8)$$

$$\vec{A}_\theta = \hat{r} \times r\hat{\theta} \left(\frac{1-K}{er} \right) = \hat{\phi} \left(\frac{1-K}{e} \right) \quad (4.9)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1-K}{e} \right) \quad (4.10)$$

$$\vec{A}_\phi = \hat{r} \times r \sin \theta \hat{\phi} \left(\frac{1-K}{er} \right) = -\hat{\theta} \sin \theta \left(\frac{1-K}{e} \right) \quad (4.11)$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \sin \theta \left(\frac{1-K}{e} \right) \quad (4.12)$$

Μέσω των παραπάνω, εύκολα υπολογίζει κανείς τα στοιχεία των (4.6) και (4.7) ως εξής:

$$\boxed{D_t \vec{\Phi} = 0} \quad (4.13)$$

$$\boxed{D_r \vec{\Phi} = u \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} H'} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} D_\theta \vec{\Phi} &= u \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} H - e\hat{\phi} \left(\frac{1-K}{e} \right) \times u\hat{r}H \\ &= u \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} H - \hat{\theta}(1-K)uH \\ &= u \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} H - u \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} H + \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} uKH \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{D_\theta \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} uKH} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
D_\phi \vec{\Phi} &= u \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} H - e - \hat{\theta} \sin \theta \left(\frac{1-K}{e} \right) \times u \hat{r} H \\
&= u \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} H - \hat{\phi} \sin \theta (1-K) u H \\
&= u \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} H - u \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} H + \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} u K H \\
&\rightarrow \boxed{D_\phi \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} u K H} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_{r\theta} = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{K'}{e}} \tag{4.17}$$

$$\boxed{\vec{F}_{r\phi} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \frac{\sin \theta K'}{e}} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\theta\phi} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \sin \theta \frac{1-K}{e} + \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cos \theta \frac{1-K}{e} \\
&- \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1-K}{e} - e \hat{\phi} \frac{1-K}{e} \times (-\hat{\theta}) \sin \theta \frac{1-K}{e} \\
&= \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \frac{1-K}{e} - \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \cos \phi \\ \cos^2 \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \frac{1-K}{e} + \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1-K}{e} - e \hat{r} \sin \theta \left(\frac{1-K}{e} \right)^2 \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi (1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ \sin \phi (1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ 2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \frac{1-K}{e} - e \hat{r} \sin \theta \left(\frac{1-K}{e} \right)^2 \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} 2 \sin \theta \frac{1-K}{e} - e \hat{r} \sin \theta \left(\frac{1-K}{e} \right)^2 \\
&= \frac{1-K}{e} [\hat{r} 2 \sin \theta - \hat{r} \sin \theta + \hat{r} \sin \theta K] \\
&= \frac{1-K}{e} (1+K) \hat{r} \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \sin\theta \frac{1-K^2}{e} \quad (4.19)$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να επιστρέψουμε στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα του μοντέλου, θεωρώντας όπως και πριν στατικές λύσεις, και οι όροι της \mathcal{L}_{matter} υπολογίζονται:

- Ο κινητικός όρος του πεδίου βαθμίδας

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\vec{F}_{ij}\vec{F}_{mn}g^{im}g^{jn} &= -\frac{1}{2}\left[(\vec{F}_{r\theta})^2g^{rr}g^{\theta\theta} + (\vec{F}_{r\phi})^2g^{rr}g^{\phi\phi} + (\vec{F}_{\theta\phi})^2g^{\theta\theta}g^{\phi\phi}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{(K')^2}{e^2Ar^2} + \frac{\sin^2\theta K'^2}{e^2Ar^2\sin^2\theta} + \sin^2\theta\frac{(1-K^2)^2}{e^2r^4\sin^2\theta}\right] \\ &= -\frac{(K^2-1)^2}{2e^2r^4} - \frac{K'^2}{e^2r^2}\frac{1}{A} \end{aligned}$$

- Ο κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g^{ij}(D_i\vec{\Phi})(D_j\vec{\Phi}) &= \frac{1}{2}\left[(D_r\vec{\Phi})^2g^{rr} + (D_\theta\vec{\Phi})^2g^{\theta\theta} + (D_\phi\vec{\Phi})^2g^{\phi\phi}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[u^2H'^2\left(-\frac{1}{A}\right) + u^2K^2H^2\left(-\frac{1}{r^2}\right) + \sin^2\theta u^2K^2H^2\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\right] \\ &= -\frac{u^2H'^2}{2}\frac{1}{A} - \frac{u^2K^2H^2}{r^2} \end{aligned}$$

- Ο όρος δυναμικού

$$\begin{aligned} -V(\vec{\Phi}) &= -\frac{\lambda}{4}(\vec{\Phi}^2 - u^2)^2 = -\frac{\lambda}{4}(u^2H^2 - u^2)^2 \\ &= -\frac{\lambda}{4}u^4(H^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Επομένως, μέσω απλής αντικατάστασης στη δράση για τα πεδία

$$S_{matter} = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{matter} \quad (4.20)$$

θα έχουμε την ακόλουθη τελική μορφή:

$$S_{matter} = -4\pi \int dt drr^2\sqrt{AB} \left[\left(\frac{K'^2}{e^2r^2} + \frac{u^2H'^2}{2} \right) \frac{1}{A} + \left(\frac{(K^2-1)^2}{2e^2r^4} + \frac{u^2K^2H^2}{r^2} + \frac{\lambda}{4}u^4(H^2-1)^2 \right) \right] \quad (4.21)$$

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό, ότι οι όροι μέσα στις παρενθέσεις ταυτοποιούνται με τους δυναμικούς και κινητικούς όρους που αναφέραμε στις σχέσεις (3.17) και (3.18). Η παραπάνω σχέση γράφεται πιο συνοπτικά ως εξής:

$$S_{matter} = -4\pi \int dt drr^2\sqrt{AB} \left[\frac{T}{A} + V \right] \quad (4.22)$$

Οι παράγωγοι των βοηθητικών πεδίων γίνονται "covariantized" μέσω του παράγοντα A^{-1} της μετρικής[27]. Κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο και μπορεί να εξηγηθεί εύκολα διαισθητικά. Οι παράγωγοι των πεδίων ως προς κάποια συντεταγμένη της μετρικής πρέπει να «καταλαβαίνουν» την καμπυλότητα του χώρου μέσω του παράγοντα που συνδέει δύο σημεία ως προς την εν λόγω συντεταγμένη. Εφόσον, όπως είδαμε και στην περίπτωση του επίπεδου χώρου, τα πεδία έχουν εξάρτηση μόνο από την r , αναμέναμε τον όρο A^{-1} να εμφανιστεί στη δράση. Τονίζουμε στο σημείο αυτό, ότι ο κινητικός όρος T και ο δυναμικός όρος V δεν είναι η κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος. Τα αναφέρουμε έτσι καθαρά για ευκολία, ώστε οι σχέσεις να είναι πιο συνοπτικές.

Εύκολα, μπορούμε πλέον, να εξαγάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τα βοηθητικά πεδία μέσω της μεταβολής της δράσης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$S_{matter} = \int L_{matter} dt \quad (4.23)$$

$$L_{matter} = \int d^3x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{matter} = -4\pi \int_0^\infty dr r^2 \sqrt{AB} \left[\frac{T}{A} + V \right] \quad (4.24)$$

- Για το πεδίο K έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{\partial(r^2 \sqrt{AB} \mathcal{L})}{\partial K} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial(r^2 \sqrt{AB} \mathcal{L})}{\partial K'} \right) \quad (4.25)$$

$$r^2 \sqrt{AB} \frac{2(K^2 - 1)2K}{2e^2 r^4} + r^2 \sqrt{AB} \frac{u^2 H^2 2K}{r^2} = \left(r^2 \sqrt{AB} \frac{2K'}{e^2 r^2 A} \right)'$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\sqrt{\frac{B}{A}} K' \right)' = \frac{K(K^2 - 1)}{r^2} + u^2 e^2 H^2 K} \quad (4.26)$$

- Για το πεδίο H έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{\partial(r^2 \sqrt{AB} \mathcal{L})}{\partial H} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial(r^2 \sqrt{AB} \mathcal{L})}{\partial H'} \right) \quad (4.27)$$

$$r^2 \sqrt{AB} \frac{u^2 K^2 2H}{r^2} + r^2 \sqrt{AB} \frac{\lambda}{4} u^4 2(H^2 - 1)2H = \left(r^2 \sqrt{AB} \frac{u^2 2H'}{2A} \right)'$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{r^2 \sqrt{AB}} \left(r^2 \sqrt{\frac{B}{A}} H' \right)' = \frac{2HK^2}{r^2} + \lambda u^2 (H^2 - 1)H} \quad (4.28)$$

Είναι σαφές ότι οι εξισώσεις (4.26) και (4.28) πρέπει να λυθούν με αριθμητικό τρόπο. Παρατηρούμε ότι στο όριο του $A = B = 1$, καταλήγουν πράγματι στις εξισώσεις κίνησης που εξαγάγαμε για τον επίπεδο χώρο και μπορούμε να ελέγξουμε έτσι, με διαισθητικό τρόπο, την ορθότητα τους. Συνεχίζουμε με τις βαρυτικές εξισώσεις για τον καθορισμό των A και B .

4.2 Οι εξισώσεις Einstein

Το βαθμωτό Ricci υπολογίζεται στο πρώτο παράρτημα και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$R = \frac{B''}{AB} - \frac{B'A'}{2A^2B} - \frac{B'^2}{2B^2A} + \frac{2}{r} \frac{B'}{AB} - \frac{2}{r} \frac{A'}{A^2} - \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \quad (4.29)$$

Επομένως, η Λαγκρανζιανή Einstein-Hilbert

$$L_E = -\frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} R \quad (4.30)$$

υπολογίζεται εύκολα ως εξής:

$$L_E = \frac{1}{4G} \int dr \left[-\frac{r^2 B''}{\sqrt{AB}} - \frac{2rB'}{\sqrt{AB}} + \frac{r^2 B'A'}{2A\sqrt{AB}} + \frac{r^2 B'^2}{2B\sqrt{AB}} + \frac{2rA'}{A} \sqrt{\frac{B}{A}} + 2\sqrt{AB} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \right] \quad (4.31)$$

Η εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης από τη σχέση (4.31) θα ήταν μια ιδιαίτερα πολύπλοκη και κουραστική διαδικασία. Μπορούμε να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς, παρατηρώντας ότι οι πρώτοι 4 όροι της L_E είναι ολικό διαφορικό και συνεπώς δε συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης. Πράγματι:

$$\begin{aligned} -\frac{r^2 B''}{\sqrt{AB}} - \frac{2rB'}{\sqrt{AB}} + \frac{r^2 B'A'}{2A\sqrt{AB}} + \frac{r^2 B'^2}{2B\sqrt{AB}} &= -\left[\frac{(r^2 B')'}{\sqrt{AB}} - \frac{(r^2 B')A'B}{2AB\sqrt{AB}} - \frac{(r^2 B')AB'}{2AB\sqrt{AB}} \right] \\ &= -\left[\frac{(r^2 B')'\sqrt{AB} - (r^2 B')\left(\frac{A'B+AB'}{2\sqrt{AB}}\right)}{(\sqrt{AB})^2} \right] \\ &= -\left[\frac{r^2 B'}{\sqrt{AB}} \right]' \end{aligned}$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στην τελική μορφή της Λαγκρανζιανής Einstein-Hilbert

$$L_E = \frac{1}{2G} \int dr \left[\frac{rA'}{A} \sqrt{\frac{B}{A}} + \sqrt{AB} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \right] \quad (4.32)$$

και η Λαγκρανζιανή της θεωρίας δίνεται:

$$L_t = L_E + L_{matter} = \frac{1}{2G} \int dr \left[\frac{rA'}{A} \sqrt{\frac{B}{A}} + \sqrt{AB} \left(1 - \frac{1}{A}\right) - 8\pi G r^2 \sqrt{AB} \left(\frac{T}{A} + V\right) \right] \quad (4.33)$$

Είναι βολικό, στο σημείο αυτό, να ορίσουμε τα πεδία

$$X = \sqrt{AB} \quad (4.34)$$

$$Y = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad (4.35)$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} &= \frac{Y}{X} \\ \frac{A'}{A} &= \frac{X'Y - XY'}{XY}\end{aligned}$$

Συνεπώς, η (4.33) γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned}L_t &= -\frac{1}{2G} \int dr \left[\left(\frac{Y}{X} - 1 \right) X - r \frac{X'Y - XY'}{XY} Y + 8\pi Gr^2 X \left(T \frac{Y}{X} + V \right) \right] \\ &\rightarrow \boxed{L_t = -\frac{1}{2G} \int dr \left[Y - X - r \frac{X'}{X} Y + rY' + 8\pi Gr^2 (TY + VX) \right]}\end{aligned}\quad (4.36)$$

και μπορούμε, πλέον, να εξάγουμε τις βαρυτικές εξισώσεις κίνησης.

- Για το πεδίο Y έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y'} \right)\quad (4.37)$$

$$1 - r \frac{X'}{X} + 8\pi Gr^2 T = 1$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{X'}{X} = 8\pi GrT}\quad (4.38)$$

ή μέσω της (4.34)

$$\rightarrow \boxed{\frac{(AB)'}{AB} = 16\pi GrT}\quad (4.39)$$

- Για το πεδίο X έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'} \right)\quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}-1 + rX'Y \frac{1}{X^2} + 8\pi Gr^2 V &= \left(-\frac{rY}{X} \right)' \\ \left(\frac{rY}{X} \right)' + \frac{rX'Y}{X^2} &= 1 - 8\pi Gr^2 V\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{(rY)' = X(1 - 8\pi Gr^2 V)}\quad (4.41)$$

Η (4.41) μπορεί να απλοποιηθεί μέσω της (4.39) ακολούθως

$$\begin{aligned}\frac{(AB)'}{AB} &= 16\pi GrT \\ \int_{\infty}^r (\ln(AB))' d\rho &= \int_{\infty}^r 16\pi G\rho T d\rho \\ \ln(AB) &= \int_{\infty}^r 16\pi G\rho T d\rho \\ AB &= \exp \left[\int_{\infty}^r 16\pi G\rho T d\rho \right]\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την απαίτηση τα $A, B \rightarrow 1$ στο όριο $r \rightarrow \infty$, προκειμένου να μπορούμε να αναπαράγουμε τον επίπεδο χώρο Minkowski . Από την τελευταία εξίσωση προκύπτουν οι εξής σημαντικές σχέσεις:

$$A = \frac{1}{B} \exp \left[\int_{\infty}^r 16\pi G\rho T d\rho \right] \quad (4.42)$$

$$X = \sqrt{AB} = \exp \left[\int_{\infty}^r 8\pi G\rho T d\rho \right] \quad (4.43)$$

$$Y = \sqrt{\frac{B}{A}} = \frac{1}{A} \exp \left[\int_{\infty}^r 8\pi G\rho T d\rho \right] \quad (4.44)$$

Εκμεταλλευόμενοι τις (4.43) και (4.44), η εξίσωση κίνησης (4.41) γράφεται:

$$\begin{aligned}(rY)' &= X(1 - 8\pi Gr^2V) \\ \left(\frac{r}{A}\right)' \exp \left[\int_{\infty}^r 8\pi G\rho T d\rho \right] + \frac{r}{A} \exp \left[\int_{\infty}^r 8\pi G\rho T d\rho \right] 8\pi GrT &= \exp \left[\int_{\infty}^r 8\pi G\rho T d\rho \right] (1 - 8\pi Gr^2V) \\ \left(\frac{r}{A}\right)' + \frac{8\pi Gr^2T}{A} &= 1 - 8\pi Gr^2V \\ \rightarrow \boxed{\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - 8\pi Gr^2 \left(\frac{T}{A} + V\right)} &\quad (4.45)\end{aligned}$$

Εν συνεχεία, εισάγουμε τον βολικό ορισμό

$$A = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1} \quad (4.46)$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned}\frac{r}{A} &= r \left(1 - \frac{2GM(r)}{r} \right) \\ &= r - 2GM(r)\end{aligned}$$

και η (4.45) γράφεται στην τελική της μορφή:

$$\boxed{M'(r) = 4\pi r^2 \left(\frac{T}{A} + V \right) = 4\pi r^2(T + V) - 8\pi GrTM(r)} \quad (4.47)$$

Θεωρούμε ότι στο σημείο αυτό, είναι σημαντικό να αναφέρουμε μερικά σχόλια και παρατηρήσεις. Σε αντίθεση με την περίπτωση του επίπεδου χώρου, η συνολική Λαγκρανζιανή L_t σε καμπυλωμένο χωρόχρονο δεν είναι ένα αρνητικά ορισμένο συναρτησοειδές. Αν μπορούμε να βρούμε για το σύστημα μια αρνητικά ορισμένη Λαγκρανζιανή, η οποία έχει κάποιο ελάχιστο άνω όριο (supremum), τότε υπάρχει όντως λύση στο σύστημα, καθώς στο ακρότατο ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler-Lagrange. Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να απαλείψουμε τους βαρυτικούς βαθμούς ελευθερίας χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.39). Αντικαθιστώντας στην Λαγκρανζιανή L_t της (4.36), έχουμε:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_t &= Y - X - 8\pi Gr^2TY + rY' + 8\pi Gr^2(TY + VX) \\ &= Y - X + rY' + 8\pi Gr^2VX \\ &= \sqrt{\frac{B}{A}} - \sqrt{AB} + r \left(\sqrt{\frac{B}{A}} \right)' + 8\pi Gr^2V\sqrt{AB} \\ &= \frac{\sqrt{AB}}{A} - \sqrt{AB} + r \left(\frac{\sqrt{AB}}{A} \right)' + 8\pi Gr^2V\sqrt{AB} \\ &= \sqrt{AB} \left(\frac{1}{A} - 1 \right) + r(\sqrt{AB})' \frac{1}{A} + r\sqrt{AB} \left(\frac{1}{A} \right)' + 8\pi Gr^2V\sqrt{AB} \\ &= \left[r\sqrt{AB} \left(\frac{1}{A} - 1 \right) \right]' + r(\sqrt{AB})' + 8\pi Gr^2V\sqrt{AB} \\ &\rightarrow \boxed{-\mathcal{L}_t = 4\pi r^2\sqrt{AB}(T + V) = \mathcal{E}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

όπου στο τελευταίο βήμα απαλείψαμε το ολικό διαφορικό και επαναφέραμε τον παράγοντα $(2G)^{-1}$ της L_t . Από την (4.48), εύκολα βλέπει κανείς ότι το συναρτησοειδές της ενέργειας \mathcal{E} είναι θετικά ορισμένο και επομένως έχει κάποιο ανώτατο κάτω όριο (infimum). Συνεπώς, το σύστημα έχει λύση και στην περίπτωση του καμπυλωμένου χωρόχρονου. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι προσθέτοντας την L_E στην L_{matter} (και εφαρμόζοντας την βαρυτητική εξίσωση κίνησης στην ολική Λαγκρανζιανή), έχει ως αποτέλεσμα οι παράγωγοι των βοηθητικών πεδίων να γίνουν "decovariantized" [27].

Ένα δεύτερο ενδιαφέρον σχόλιο αφορά τη σχέση (4.47), η οποία είναι η μοναδική από τις εξισώσεις κίνησης με αναλυτική λύση. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$P(r) = \int_r^\infty 8\pi G\rho T d\rho \quad (4.49)$$

τέτοια ώστε $P'(r) = -8\pi GrT$. Πολλαπλασιάζοντας την (4.47) με τον ολοκληρώνοντα παράγοντα $\exp(-P(r))$, έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
M'(r) \exp(-P(r)) &= 4\pi r^2 \exp(-P(r))(T + V) - 8\pi GrT \exp(-P(r))M(r) \\
\int_0^\infty M'(r) \exp(-P(r)) dr &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \exp(-P(r))(T + V) dr \\
&\quad - \int_0^\infty [\exp(-P(r))] M(r) dr \\
M(r) \exp(-P(r)) \Big|_0^\infty &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \exp(-P(r))(T + V) dr \\
M(\infty) \exp(-P(\infty)) - M(0) \exp(-P(0)) &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \exp(-P(r))(T + V) dr \\
\rightarrow \boxed{M(\infty) \equiv M} &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \exp(-P(r))(T + V) dr + M(0) \exp(-P(0)) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $P(\infty) = 0$, που προκύπτει από την (4.49). Προκειμένου η λύση μας να είναι μη-ιδιάζουσα (non-singular), πρέπει να απαιτήσουμε ότι $M(0) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, εύκολα βλέπει κανείς, μέσω της (4.43), ότι

$$M = 4\pi \int_0^\infty r^2 \exp(-P(r))(T + V) dr \quad (4.51)$$

$$= 4\pi \int_0^\infty r^2 \sqrt{AB}(T + V) dr \quad (4.52)$$

και έτσι δικαιολογούμε ότι η σχέση (4.48) είναι πράγματι το συναρτησοειδές της ενέργειας \mathcal{E} . Στρέφουμε, τώρα, την προσοχή μας στην πρώτη ισότητα της (4.47), ήτοι

$$M'(r) = 4\pi r^2 \left(\frac{T}{A} + V \right)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση και εφαρμόζοντας τη συνθήκη $M(0) = 0$, παρατηρείται εύκολα ότι καταλήγουμε στη σχέση:

$$M = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{T}{A} + V \right) \quad (4.53)$$

Συνεπώς, η (4.53) πρέπει να ταυτοποιείται και αυτή με την ενέργεια του συστήματος. Πράγματι, το συγκεκριμένο αποδεικνύεται από τον ταυιστή ενέργειας ορμής κατά αντίστοιχο τρόπο με το κεφάλαιο 2. Υπενθυμίζουμε τη σχέση (2.67)

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} + (D_{\mu} \Phi^a)(D_{\nu} \Phi^a) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
T_{00} &= -g_{00}\mathcal{L}_{matter} - F_{0k}^a F_0^{ak} + (D_0\Phi^a)(D_0\Phi^a) \\
&= -B \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi^a)(D^\mu\Phi^a) - V(\Phi) \right] - F_{0k}^a F_0^{ak} + (D_0\Phi^a)(D_0\Phi^a) \\
&= \frac{1}{4}BF_{ij}^a F^{aij} - \frac{1}{2}B(D_j\Phi^a)^2 + BV(\Phi^a)
\end{aligned}$$

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 T_0^0 \quad (4.54)$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{B} \left[\frac{1}{4}BF_{ij}^a F^{aij} - \frac{1}{2}B(D_j\Phi^a)^2 + BV(\Phi^a) \right] \quad (4.55)$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{T}{A} + V \right) \quad (4.56)$$

Συμπεραίνουμε ότι η (4.51) είναι ταυτόσημη με την (4.53), όταν εφαρμόσουμε την απαίτηση της μη-ιδιάζουσας λύσης.

Πριν συνεχίσουμε, θα θέλαμε να παραθέσουμε ένα τελευταίο σχόλιο. Είναι ευδιάκριτο ότι η ελάχιστη τιμή της $\exp(-P(r))$ είναι η $\exp(-P(0))$. Συνεπώς, μπορούμε μέσω της (4.51) να παρουσιάσουμε την παρακάτω ανίσωση:

$$M \geq e^{-P(0)} \int_0^\infty 4\pi r^2 (T + V) dr \quad (4.57)$$

Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι, πολύ απλά, η μάζα του μονοπόλου στον επίπεδο χώρο Minkowski. Επιλέγοντας το όριο BPS, μπορούμε να εκφράσουμε την ανίσωση ως εξής:

$$M_{curved}^{min} \leq M_{flat}^{min} \quad (4.58)$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στο περίεργο συμπέρασμα ότι η βαρύτητα τείνει να μειώσει την μάζα του μονοπόλου[29].

4.3 Το μαγνητικό μονόπολο ως μελανή οπή

Έχουμε, πλέον, εξάγει όλες τις εξισώσεις που χρειαζόμαστε για τη λύση του συστήματος. Υπενθυμίζουμε, όπως και στην περίπτωση του επίπεδου χώρου, έχουμε τη συνθήκη τα βοηθητικά πεδία H και K να συγκλίνουν στις ακόλουθες ασυμπτωτικές τιμές,

$$H(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (4.59)$$

$$K(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow 0 \quad (4.60)$$

$$H(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty \quad (4.61)$$

$$K(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (4.62)$$

προκειμένου να έχουμε πεπερασμένη ενέργεια. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τα παραπάνω, απαιτούμε τις οριακές συνθήκες:

$$M(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (4.63)$$

$$M(r) \rightarrow M, \quad r \rightarrow \infty \quad (4.64)$$

Το πρόβλημα του μονοπόλου στη βαρύτητα γίνεται πιο περίπλοκο αν υπάρχουν ορίζοντες γεγονότων στο σύστημα, δηλαδή αν υπάρχει κάποιο $r = r_h$ τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{1}{A} \right] \Big|_{r=r_h} = 0 \quad (4.65)$$

το οποίο προφανώς συνεπάγεται ότι:

$$M(r_h) = \frac{r_h}{2G} \quad (4.66)$$

Εισάγοντας την (4.65) στη (4.47), προκύπτει το απλό αποτέλεσμα:

$$M'(r) = 4\pi r^2 V, \quad r = r_h \quad (4.67)$$

Εκμεταλλευόμενοι τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε τη συνθήκη του ορίζοντα γεγονότων ως εξής:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{A} \right]' &= \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]' \\ &= -2G \left[\frac{M'(r)r - M(r)}{r^2} \right] \\ &= -2G \left[4\pi r V - \frac{1}{2Gr} \right], \quad r = r_h \\ &\rightarrow \boxed{\left[\frac{1}{A} \right]' = \frac{1}{r} - 8\pi Gr V}, \quad r = r_h \end{aligned} \quad (4.68)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.68) στις εξισώσεις κίνησης των πεδίων (4.26) και (4.28), έχουμε τις ακόλουθες επιπρόσθετες συνθήκες:

$$K' \left[\frac{1}{A} \right]' = K' \left[\frac{1}{r} - 8\pi Gr V \right] = \frac{K(K^2 - 1)}{r^2} + u^2 e^2 H^2 K, \quad r = r_h \quad (4.69)$$

$$H' \left[\frac{1}{A} \right]' = H' \left[\frac{1}{r} - 8\pi Gr V \right] = \frac{2HK^2}{r^2} + \lambda u^2 (H^2 - 1)H, \quad r = r_h \quad (4.70)$$

Το πρόβλημα, που έγγυται στο σημείο αυτό, είναι ότι οι σχέσεις (4.69) και (4.70) υπερκαθορίζουν τη λύση του συστήματος και δεν θα είναι εφικτό να έχουμε μη-ιδιάζουσες λύσεις παρουσία

ορίζοντα γεγονότων (εκτός πιθανόν από ειδικές τιμές των u και λ). Όμως, αν επιτρέψουμε ιδιόζουσα συμπεριφορά στο $r = 0$, μπορούμε να εξάγουμε κατά τα άλλα μη-ιδιάζουσες λύσεις με έναν ορίζοντα γεγονότων. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει για περισσότερους από έναν ορίζοντες [29].

Επιθυμούμε, λοιπόν, να βρούμε λύση στο σύστημα, η οποία παρουσιάζει ιδιόζουσα συμπεριφορά στο $r = 0$, αλλά ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης και τις οριακές συνθήκες στο $r = r_h$. Μια τέτοια λύση θα προκύψει από τη γνωστή σε εμάς λύση hedgehog! Θέτοντας $H = 1, K = 0$ για κάθε r , είναι σαφές από την προσέγγιση t'Hooft-Polyakov ότι το $r = 0$ είναι ιδιάζον σημείο. Επίσης, εύκολα προκύπτει ότι

$$H = 1, K = 0 \rightarrow T = 0, V = \frac{1}{2e^2 r^4} \quad (4.71)$$

και γνωρίζουμε ήδη ότι η λύση hedgehog μας δίνει λύση μονοπόλου στο σύστημα. Εισάγουμε την (4.71) στην (4.47) και εκτελούμε τους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} M'(r) &= 4\pi r^2 \left(\frac{T}{A} + V \right) \\ \int_{\infty}^r M'(\rho) &= 4\pi \int_{\infty}^r \rho^2 \frac{1}{2e^2 \rho^4} d\rho \\ M(r) - M &= \frac{2\pi}{e^2} \int_{\infty}^r \frac{1}{\rho^2} d\rho \\ &\rightarrow \boxed{M(r) = M - \frac{2\pi}{e^2 r}} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Άρα, η (4.46) γράφεται πλέον

$$\boxed{A = \left[1 - \frac{2GM}{r} + \frac{4\pi G}{e^2 r^2} \right]^{-1}} \quad (4.73)$$

και η (4.39) μας δίνει ομοίως για $T = 0$

$$\boxed{B = A^{-1}} \quad (4.74)$$

οι οποίες αναπαράγουν τη γνωστή μετρική Reissner-Nordstrom[30] για φορτίο $Q = \frac{4\pi}{e}$, το οποίο είναι ακριβώς το μαγνητικό φορτίο του μη-αβελιανού μονοπόλου. Ως γνωστόν, και όπως φαίνεται από την σχέση (4.73), η μετρική Reissner-Nordstrom έχει δύο ορίζοντες γεγονότων στα

$$r_h = MG \pm \left[M^2 G^2 - \frac{4\pi G}{e^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.75)$$

με δεδομένο ότι η υπόριζη ποσότητα είναι θετική, δηλαδή:

$$M_{crit} \geq \sqrt{\frac{4\pi}{Ge^2}} \quad (4.76)$$

Συνεχίζουμε με τον έλεγχο της (4.76) ως εξής: Αναφέραμε ότι η βαρύτητα τείνει να μειώσει τη μάζα του μονοπόλου και η ελάχιστη μάζα του είναι, επομένως, μικρότερη από το όριο BPS. Μπορούμε, λοιπόν, να θέσουμε $M_{crit} = \frac{4\pi u}{e}$ που είναι το όριο BPS για να έχουμε μια εκτίμηση της M_{crit} . Έτσι, από την (4.76) προκύπτει η κρίσιμη τιμή:

$$u^2 \geq \frac{1}{4\pi G} \sim M_{Planck}^2 \quad (4.77)$$

Η σχέση (4.77) έχει πλούσιο φυσικό περιεχόμενο. Όταν η αναμενόμενη τιμή κενού, u , είναι πολύ μικρότερη της μάζας Planck, τότε η βαρυτική επίδραση στο μονόπολο είναι σχετικά μικρή (weak gravity case) και υπάρχουν μη-ιδιάζουσες λύσεις στο σύστημα, οι οποίες είναι παρεμφερείς με τις λύσεις που εξαγάγαμε στην περίπτωση του επίπεδου χώρου. Αν $u \gg M_{Planck}$, όμως, η ακτίνα Schwarzschild, r_h , θα είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του μονοπόλου, $R \sim (eu)^{-1}$, κάτι το οποίο σημαίνει ότι το μονόπολο πρέπει να είναι μία μελανή οπή.

Η ορθότητα των παραπάνω ενισχύεται με την ακόλουθη ανάλυση. Μπορούμε να παρουσιάσουμε πώς εμφανίζεται ο ορίζοντας γεγονότων, καθώς αυξάνει η μάζα του μονοπόλου. Από την εξίσωση (4.46), εύκολα μπορεί να συμπεράνει κανείς, ότι το $\frac{1}{A}$ θα παίρνει την ελάχιστη τιμή του, όταν το $\frac{M(r)}{r}$ είναι μέγιστο. Όπως και στην περίπτωση του επίπεδου χώρου, τα βοηθητικά πεδία H, K πρέπει να συγκλίνουν στις ασυμπτωτικές τους τιμές με εκθετική ταχύτητα. Συμπεραίνουμε πως μπορούμε να αντικαταστήσουμε την έκφρασή του $M(r)$ με την ασυμπτωτική της μορφή, δηλαδή τη σχέση (4.72) και να ελέγξουμε για το μέγιστο:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M(r)}{r}\right)' &\approx \left[\frac{M}{r} - \frac{2\pi}{e^2 r^2}\right]' \Big|_{r=r_c} = 0 \\ &-\frac{M}{r_c^2} + \frac{4\pi}{e^2 r_c^3} = 0 \\ r_c &= \frac{4\pi}{e^2 M} \sim \frac{4\pi}{e^2 \frac{4\pi u}{e}} \sim \frac{1}{eu} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή του $\frac{1}{A}$ για $r = r_c$ δίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(r_c)} &= 1 - \frac{2GM(r_c)}{r_c} \\ &= 1 - 2G \left[\frac{M}{r_c} - \frac{2\pi}{e^2 r_c^2} \right] \\ &\sim 1 - 2G \left[\frac{4\pi u}{e} eu - \frac{2\pi}{e^2} e^2 u^2 \right] \\ \frac{1}{A(r_c)} &\sim 1 - 4\pi G u^2 = 1 - O\left(\frac{u}{M_P}\right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Παρατηρούμε από την παραπάνω σχέση ότι η εμφάνιση του ορίζοντα γεγονότων στο πρόβλημα εξαρτάται άμεσα από το λόγο $\frac{u}{M_P}$, όπως ακριβώς επιχειρηματολογήσαμε παραπάνω. Είναι σαφές, πλέον, ότι για $u = u_{crit}$, το A^{-1} θα μηδενιστεί και η ακτίνα Schwarzschild θα ταυτοποιείται με την ακτίνα του μονοπόλου. Θα περίμενε κανείς ο ορίζοντας αυτός να παραμένει αν αυξήσουμε περαιτέρω το u , αλλά, όπως αναφέραμε παραπάνω, δεν είναι εφικτό να βρεθούν τότε λύσεις με καλή ασυμπτωτική συμπεριφορά που είναι μη-ιδιάζουσες στο $r = 0$, αλλά και στον ορίζοντα. Αναμένουμε, δηλαδή, ότι για $u > u_{crit}$ υπάρχουν μόνο ιδιάζουσες λύσεις[29].

Επιθυμούμε να ελέγξουμε αν στην κρίσιμη τιμή $u = u_{crit} \sim M_P$, είναι εφικτό να έχουμε μη-ιδιάζουσες λύσεις. Για $u = u_{crit}$ ισχύει ότι $A(r_h)^{-1} = 0$, όπως είναι σαφές από την (4.79). Γνωρίζουμε, επίσης, ότι στο $r = r_h$, το A^{-1} παρουσιάζει ελάχιστο. Εξάλλου, πρέπει να ισχύει ότι $A(r) > 0$ για $r > r_h$. Τα παραπάνω σε συνδυασμό με τις επιπρόσθετες οριακές συνθήκες για τον ορίζοντα (4.69) και (4.70) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα βοηθητικά πεδία H, K πρέπει να βρίσκονται στις ασυμπτωτικές τους τιμές, όταν πλησιάζουμε την ακτίνα Schwarzschild, όπως ακριβώς επιχειρηματολογήσαμε κατά την έρεση μεγίστου του $\frac{M(r)}{r}$. Η προκύπτουσα ακτίνα Schwarzschild δίνεται εύκολα από τη σχέση (4.75):

$$r_h = M_{crit}G \sim \sqrt{\frac{4\pi G}{e^2}} \sim \frac{1}{eu_{crit}} \sim R_{monopole} \quad (4.80)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η ακτίνα του μονοπόλου ταυτοποιείται, όπως προαναφέραμε, με την ακτίνα Schwarzschild. Έτσι, καθώς πλησιάζουμε τον ορίζοντα, αναμένουμε η «εξωτερική» λύση του συστήματος να είναι της μορφής Reissner-Nordstrom με $H \rightarrow 1, K \rightarrow 0$. Αντίστοιχα, η απαίτηση μη-ιδιάζουσας λύσης οδηγεί στο γεγονός ότι η «εσωτερική» λύση κοντά στο $r = 0$ δεν μπορεί να είναι της μορφής Reissner-Nordstrom, αλλά παρεμφερής με τη λύση για $u < u_{crit}$.

Τα παραπάνω, όπως είναι προφανές, δεν αποτελούν κάποια απόδειξη, αλλά είναι η απαίτηση που έχουμε για εύρεση λύσης στο $u = u_{crit}$. Θα ανέφερε κανείς, στο σημείο αυτό, ότι είναι αφύσικο τα πεδία να εξελίσσονται στις ασυμπτωτικές τους τιμές μέσα σε μια πεπερασμένη απόσταση. Η απαίτηση αυτή δικαιολογείται αν σκεφτεί κανείς ότι η φυσική απόσταση από το $r = 0$ ορίζεται ως:

$$l(r) = \int_0^r d\rho \sqrt{A(\rho)} \quad (4.81)$$

Το A αποκλίνει ως $(r - r_h)^{-2}$ κοντά στον ορίζοντα για $u = u_{crit}$ και το $l(r_h)$ προκύπτει ότι είναι άπειρο. Διαισθητικά, θα μπορούσε να πει κανείς ότι ο ορίζοντας είναι που διαστέλλεται για να περικλείει το μονόπολο και όχι ότι το μέγεθος του μονοπόλου συμπιέζεται για να περικλείεται από τον ορίζοντα[29].

4.4 Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κίνησης

Όπως και στην περίπτωση του επίπεδου χώρου, έχοντας πλέον ολοκληρώσει την ανάλυση μας, συνεχίζουμε με την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κίνησης. Ανακεφαλαιώνοντας από τα

προηγούμενα υποκεφάλαια, έχουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις (4.26), (4.28), (4.39) και (4.47)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\sqrt{\frac{B}{A}} K' \right)' &= \frac{K(K^2 - 1)}{r^2} + u^2 e^2 H^2 K \\ \frac{1}{r^2 \sqrt{AB}} \left(r^2 \sqrt{\frac{B}{A}} H' \right)' &= \frac{2HK^2}{r^2} + \lambda u^2 (H^2 - 1) H \\ \frac{(AB)'}{AB} &= 16\pi GrT \\ M'(r) &= 4\pi r^2 (T + V) - 8\pi GrTM(r)\end{aligned}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι οι κινητικοί και δυναμικοί όροι δίνονται:

$$\begin{aligned}T &= \frac{K'^2}{e^2 r^2} + \frac{u^2 H'^2}{2} \\ V &= \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4} + \frac{u^2 K^2 H^2}{r^2} + \frac{\lambda}{4} u^4 (H^2 - 1)^2\end{aligned}$$

Επιλέγουμε τη γνωστή μας αλλαγή μεταβλητής στο αδιάστατο $\xi = uer$ και εκφράζουμε τη σύζευξη των πεδίων Higgs ως $\beta^2 = \frac{\lambda}{2e^2}$. Οι παραπάνω σχέσεις μετασχηματίζονται με τετριμμένο τρόπο στις εξής:

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\sqrt{\frac{B}{A}} K' \right)' = \frac{K(K^2 - 1)}{\xi^2} + H^2 K \quad (4.82)$$

$$\frac{1}{\xi^2 \sqrt{AB}} \left(\xi^2 \sqrt{\frac{B}{A}} H' \right)' = \frac{2HK^2}{\xi^2} + 2\beta^2 (H^2 - 1) H \quad (4.83)$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{e^2 u^4} = \frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{H'^2}{2} \quad (4.84)$$

$$\tilde{V} = \frac{V}{e^2 u^4} = \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2} (H^2 - 1)^2 \quad (4.85)$$

Όσον αφορά τις βαρυτικές εξισώσεις, είναι βολικό να εισάγουμε τις ακόλουθες τροποποιήσεις. Ξεκινώντας από την (4.47) έχουμε:

$$\begin{aligned}euM'(\xi) &= \frac{4\pi\xi^2}{e^2 u^2} [T + V] - 8\pi G \frac{\xi}{eu} TM(\xi) \\ euM'(\xi) &= \frac{4\pi\xi^2}{e^2 u^2} [e^2 u^4 \tilde{T} + e^2 u^4 \tilde{V}] - 8\pi G \frac{\xi}{eu} e^2 u^4 \tilde{T} M(\xi) \\ \frac{eM'(\xi)}{u} &= 4\pi\xi^2 [\tilde{T} + \tilde{V}] - 8\pi G u^2 \xi \tilde{T} \frac{eM(\xi)}{u}\end{aligned}$$

Είναι λογικό να εκφράσουμε εδώ τα μεγέθη $\tilde{M} = \frac{eM}{4\pi u}$ και $\tilde{G} = 8\pi Gu^2$, καθώς από το πρώτο βλέπουμε το λόγο της μάζας του μονοπόλου προς το αντίστοιχο όριο BPS στον επίπεδο χώρο, ενώ από το δεύτερο έχουμε το λόγο της αναμενόμενης τιμής κενού προς τη μάζα του Planck για καλύτερο έλεγχο της οριακής τιμής u_{crit} στους υπολογισμούς. Συνεπώς, η σχέση (4.47) γράφεται

$$\tilde{M}'(\xi) = \xi^2[\tilde{T} + \tilde{V}] - \tilde{G}\xi\tilde{T}\tilde{M}(\xi) \quad (4.86)$$

όπου

$$\tilde{M} = \frac{eM}{4\pi u} \quad (4.87)$$

$$\tilde{G} = 8\pi Gu^2 \quad (4.88)$$

Σημαντικό είναι στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι η λύση της (4.86), σύμφωνα με την ανάλυση του προηγούμενου υποκεφαλαίου, δίνεται από την (4.47) μέσω της ίδιας διαδικασίας που χρησιμοποιήσαμε για την εξαγωγή της (4.50):

$$\tilde{M}(\xi) = \exp(P(\xi)) \int_0^\xi \xi'^2[\tilde{T} + \tilde{V}] \exp(-P(\xi')) d\xi'$$

Μέσω της σχέσης αυτής δικαιολογείται, πλέον και αλγεβρικά, το γεγονός ότι χρησιμοποιήσαμε την αναλογία $M \sim \frac{4\pi v}{e}$ για την προσέγγιση της κρίσιμης τιμής u_{crit} , αφού, όπως ξέρουμε από τη λύση στον επίπεδο χώρο, το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του β^2 . Σημαντικό είναι να τονίσουμε επίσης, ότι ο όρος $\exp(P(\xi))$ δίνει μονάδα για $\xi \rightarrow \infty$, και αναπαράγουμε, έτσι, τη σχέση (4.51). Αναφέρουμε, επίσης, ότι η αυστηρή τιμή του u_{crit} εξαρτάται από την β^2 που θα επιλέξουμε στη λύση του συστήματος και μπορεί να δωθεί μόνο εκ των υστέρων, λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας των εξισώσεων.

Συνεχίζουμε με τη σχέση (4.39), η οποία γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A}eu + \frac{B'}{B}eu &= 16\pi G \frac{\xi}{eu} T \\ \frac{A'}{A}eu + \frac{B'}{B}eu &= 2 \frac{\tilde{G}}{u^2} \frac{\xi}{eu} e^2 u^4 \tilde{T} \\ \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} &= 2\tilde{G}\xi\tilde{T} \end{aligned}$$

κάτι το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να απαλείψουμε τον όρο $\frac{B'}{B}$ από τις διαφορικές μέσω της απλής σχέσης:

$$\boxed{\frac{B'}{B} = 2\tilde{G}\xi\tilde{T} - \frac{A'}{A}} \quad (4.89)$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι από την (4.46) μπορούμε να εκφράσουμε το πεδίο $M(r)$ ως εξής:

$$M(r) = \frac{(A-1)r}{2GA} \quad (4.90)$$

Εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητής στη παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \frac{(A-1)\xi}{2GAeu} \\ \frac{eM(\xi)}{4\pi u} &= \frac{(A-1)\xi}{2(4\pi Gu^2)A} \\ \tilde{M}(\xi) &= \frac{(A-1)\xi}{\tilde{G}A} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\rightarrow \tilde{M}'(\xi) = \frac{\xi A' + A^2 - A}{\tilde{G}A^2} \quad (4.92)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (4.86) που εξαγάγαμε και να καταλήξουμε στα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{\xi A' + A^2 - A}{\tilde{G}A^2} &= \xi^2[\tilde{T} + \tilde{V}] - \tilde{G}\xi\tilde{T}\frac{(A-1)\xi}{\tilde{G}A} \\ \frac{\xi A' + A^2 - A}{A} &= \tilde{G}\xi^2 A(\tilde{T} + \tilde{V}) - \tilde{G}\xi^2 \tilde{T}A + \tilde{G}\xi^2 \tilde{T} \\ \xi \frac{A'}{A} + A - 1 &= \tilde{G}\xi^2 A\tilde{V} + \tilde{G}\tilde{T}\xi^2 \\ \rightarrow \boxed{\frac{A'}{A} = \frac{1-A}{\xi} + \tilde{G}\xi(\tilde{T} + A\tilde{V})} & \quad (4.93) \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από τις (4.82-85),(4.89) και (4.93) είναι το ακόλουθο:

$$\frac{K''}{A} + \frac{B'}{B} \frac{K'}{2A} - \frac{A'}{A^2} \frac{K'}{2} = \frac{K(K^2 - 1)}{\xi^2} + H^2 K \quad (4.94)$$

$$\frac{H''}{A} + \frac{B'}{B} \frac{H'}{2A} - \frac{A'}{A^2} \frac{H'}{2} + \frac{2H'}{A\xi} = \frac{2HK^2}{\xi^2} + 2\beta^2(H^2 - 1)H \quad (4.95)$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{1-A}{\xi} + \tilde{G}\xi(\tilde{T} + A\tilde{V}) \quad (4.96)$$

$$\tilde{M}(\xi) = \exp(P(\xi)) \int_0^\xi \xi'^2[\tilde{T} + \tilde{V}] \exp(-P(\xi')) d\xi' \quad (4.97)$$

$$A^{-1}(\xi) = 1 - \frac{\tilde{G}\tilde{M}(\xi)}{\xi} \quad (4.98)$$

όπου

$$\tilde{T} = \frac{T}{e^2 u^4} = \frac{K'^2}{\xi^2} + \frac{H'^2}{2} \quad (4.99)$$

$$\tilde{V} = \frac{V}{e^2 u^4} = \frac{(K^2 - 1)^2}{2\xi^4} + \frac{K^2 H^2}{\xi^2} + \frac{\beta^2}{2}(H^2 - 1)^2 \quad (4.100)$$

$$P(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tilde{G}\xi' \tilde{T} d\xi' \quad (4.101)$$

$$\frac{B'}{B} = 2\tilde{G}\xi\tilde{T} - \frac{A'}{A} \quad (4.102)$$

ενώ οι αδιάστατες ποσότητες με τις περισπωμένες είναι οι:

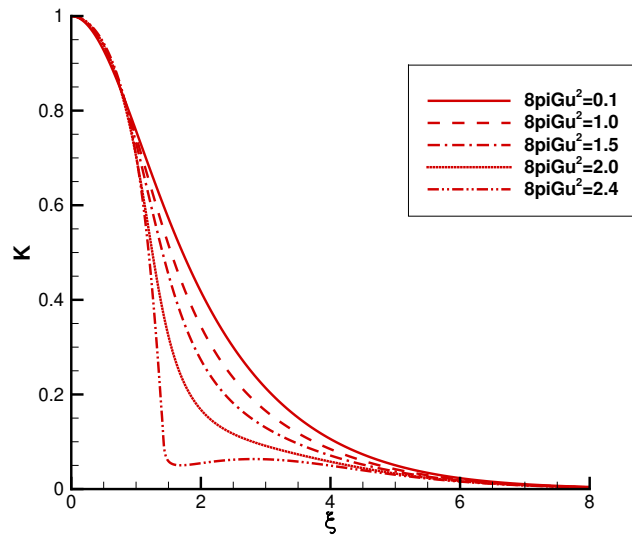
$$\begin{aligned} \tilde{G} &= 8\pi G u^2 \\ \tilde{M} &= \frac{eM}{4\pi u} \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος προκύπτει με αριθμητικό τρόπο εισάγοντας την προσέγγιση BPS για τον επίπεδο χώρο ως αρχικές τιμές. Από τις αναλυτικές λύσεις των βοηθητικών πεδίων, έχουμε μια προσέγγιση για το $\tilde{M}(\xi)$ και μέσω αυτής μια προσέγγιση για το πεδίο $A(\xi)$. Χρειάζεται να λύσουμε μόνο τις (4.94) και (4.95), αφού έχουμε στη διάθεση μας την αναλυτική λύση (4.97). Παρακάτω παρουσιάζουμε τα διαγράμματα που προέκυψαν από κώδικα FORTRAN, όπου χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο FDM (μέθοδος πεπερασμένων διαφορών) για την αριθμητική επίλυση του συστήματος.

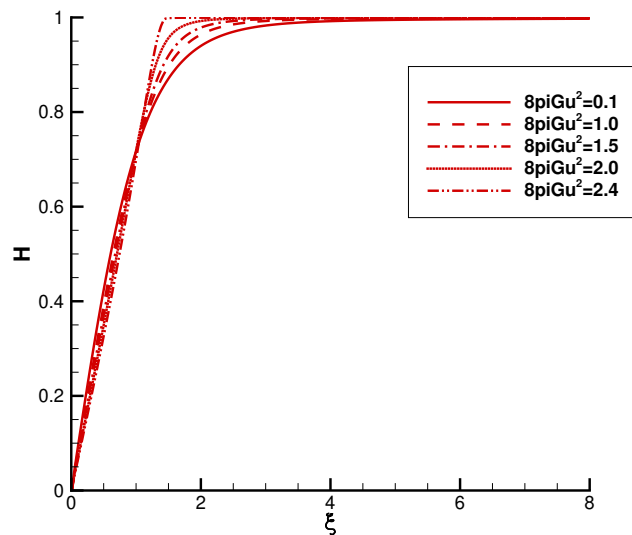
Επιθυμούμε να κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα προβλήματα τα οποία προέκυψαν στον κώδικα της αριθμητικής επίλυσης. Επειδή, όπως παρατηρεί κανείς, το σύστημα είναι ιδιαίτερα πεπλεγμένο στην περίπτωση του μονοπόλου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο, η λύση BPS δεν βοηθάει για αρχική λύση στην επαναληπτική διαδικασία. Ο κώδικας δε συγκλίνει σε λύση, καθώς προσπαθεί να συγκλίνει και ως προς διαφορετική σταθερά σύζευξης β^2 , αλλά και ως προς τους παράγοντες της μετρικής. Αντιμετωπίσαμε το εν λόγω πρόβλημα, εισάγοντας τη λύση του μονοπόλου σε επίπεδο χωρόχρονο ως αρχική λύση για το μονόπολο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο. Επίσης, αυξάνοντας τη βαρυτική επίδραση \tilde{G} , χρειάστηκε διακριτοποίηση της τάξης των 10000, προκειμένου το σύστημα να μπορεί να συγκλίνει. Θεωρήσαμε αποδεκτό σφάλμα της επαναληπτικής διαδικασίας της τάξης του 10^{-5} . Να αναφερθεί επίσης ότι δε χρειάστηκε να λύσουμε την διαφορική (4.96). Υπολογίσαμε το $\tilde{M}(\xi)$ από την (4.97) και το πεδίο A πήρε τις τιμές του μέσω της (4.98).

Όπως παρατηρούμε από τα διαγράμματα, τα πεδία συγκλίνουν για αυξανόμενο \tilde{G} όλο και πιο γρήγορα στις οριακές τιμές. Η αδιάστατη απόσταση για την οποία έχουν φτάσει στις οριακές τιμές είναι της τάξης του $\xi = uer \approx 1$, κάτι το οποίο δικαιολογεί το γεγονός ότι η ακτίνα του μονοπόλου είναι $R \sim (eu)^{-1}$ και ταυτοποιείται με την ακτίνα Schwarzschild σε συνθήκες ισχυρής βαρύτητας. Να τονίσουμε εδώ ότι, όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα, οι λύσεις των πεδίων K, H , σε συνθήκες ασθενούς βαρύτητας, είναι παρεμφερείς με αυτές του επίπεδου χωρόχρονου. Σε όλα τα διαγράμματα επιλέξαμε παράμετρο σύζευξης $\beta^2 = 1$ και αυξήσαμε το

\tilde{G} . Προκύπτει ότι για $\beta^2 = 1$, η οριακή τιμή του \tilde{G} είναι 2.4. Είναι σαφές ότι για αυξανόμενες τιμές του β^2 , η οριακή τιμή του \tilde{G} μειώνεται, αφού αυξάνεται η μάζα του μονοπόλου, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ενέργειας του μονοπόλου σε επίπεδο χωρόχρονο.



Σχήμα 4.1: Το πεδίο K του μονοπόλου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

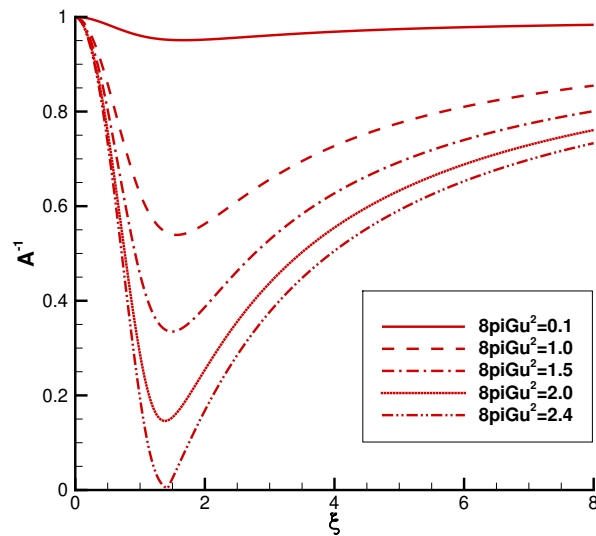


Σχήμα 4.2: Το πεδίο H του μονοπόλου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

Από το διάγραμμα για το πεδίο K παρατηρούμε μια μικρή ανωμαλία στη συμπεριφορά του

για $\tilde{G} = 2.4$. Η ανωμαλία οφείλεται σε αριθμητικούς λόγους. Αναφέρουμε ότι, για $\tilde{G} = G_{crit}$, το σφάλμα της επαναληπτικής μεθόδου αυξήθηκε με αποτέλεσμα τη συμπεριφορά του πεδίου που βλέπουμε. Παρ'ολ'αυτά όμως, η σύγκλιση του πεδίου στις ασυμπτωτικές τιμές είναι καλή. Ενδιαφέρον παρουσιάζει, επίσης, η έντονη αλλαγή στην παράγωγο του πεδίου που έχουμε για $\tilde{G} = G_{crit}$. Η αλλαγή αυτή ήταν αναμενόμενη, αφού στο σημείο αυτό, πλησιάζουμε τη λύση μελανής οπής.

Προσπαθήσαμε, επίσης, να εξάγουμε λύση του συστήματος για $\tilde{G} > G_{crit}$, αυξάνοντας την διακριτοποίηση σε 15000 και 20000 σημεία. Η επαναληπτική μέθοδος δεν κατάφερε να βγάλει αποτελέσματα, κάτι το οποίο συμφωνεί με την θεωρητική ανάλυση του προβλήματος. Μάλιστα, ο κώδικας έβγαζε σφάλμα NaN από τη δεύτερη μόλις επανάληψη, κάτι το οποίο υποδεικνύει ότι το σύστημα πράγματι δεν έχει λύση για υψηλότερες τιμές του \tilde{G} .

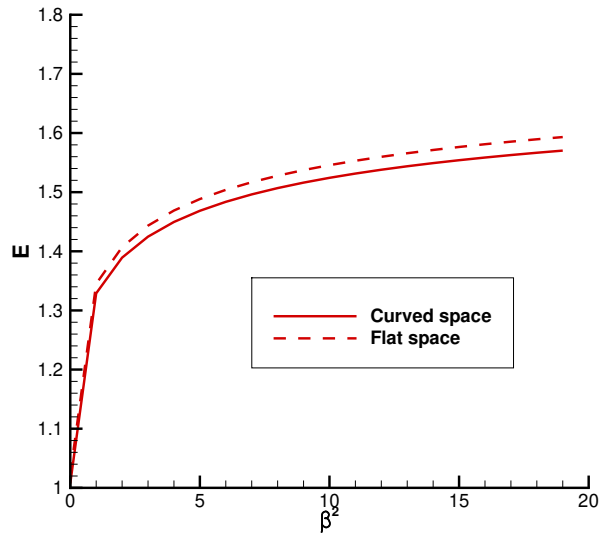


Σχήμα 4.3: Το πεδίο A του μονοπόλου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

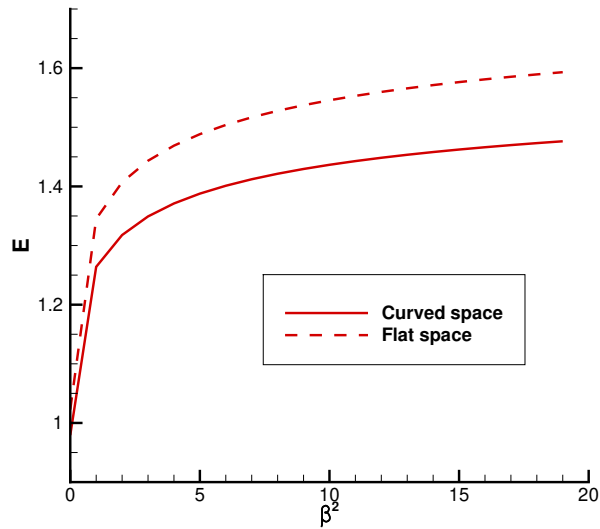
Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρεί κανείς τον μηδενισμό του παράγοντα A^{-1} , όταν το \tilde{G} πλησιάζει την κρίσιμη τιμή και το ότι παίρνει τη μορφή της μετρικής Reissner-Nordstrom. Τονίζουμε εδώ ότι το A^{-1} δεν είναι ακριβώς μηδέν για $\tilde{G} = 2.4$, αλλά η τιμή του φτάνει ως το 0.002. Αυτός ήταν και ο λόγος εξάλλου που καταφέραμε να λύσουμε μέχρι αυτό το σημείο.

Υπολογίσαμε επίσης και τη μάζα του μονοπόλου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο και συγκρίναμε με τη λύση στον επίπεδο χωρόχρονο χρησιμοποιώντας την κανονικοποίηση ενέργειας $\tilde{E} = \frac{E}{E_{BPS}} = \frac{E}{4\pi \frac{u}{e}}$. Για τον σκοπό αυτό, επιλέξαμε τιμή $\tilde{G} = 0.5$ και $\tilde{G} = 0.1$, προκειμένου να μπορούμε να λύσουμε το σύστημα για μεγάλες τιμές της σταθεράς σύζευξης. Το παρακάτω διάγραμμα δικαιολογεί το σχολιασμό της σχέσης (4.58), ότι η βαρύτητα τείνει να μειώσει τη μάζα του μονοπόλου. Μια εξήγηση του φαινομένου αυτού είναι ότι, όπως φαίνεται εξάλλου από την εξίσωση της μάζας (4.52), η θεωρία πεδίου του μονοπόλου είναι συζευγμένη με τα βαρυτικά

πεδία και συνεπώς υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών. Έτσι, η μάζα του μονοπόλου εξαρτάται πλέον από τη βαρυτική επίδραση και αναμένεται για μικρότερο \tilde{G} να έχουμε μικρότερη απόκλιση από τη λύση επίπεδου χωρόχρονου.



Σχήμα 4.4: Η μάζα του μονοπόλου σε επίπεδο και καμπυλωμένο χωρόχρονο για $\tilde{G} = 0.1$



Σχήμα 4.5: Η μάζα του μονοπόλου σε επίπεδο και καμπυλωμένο χωρόχρονο για $\tilde{G} = 0.5$

Επίλογος

Η εν λόγω διπλωματική εργασία εκπονήθηκε με σκοπό την αναλυτική αντιμετώπιση της θεωρίας των μαγνητικών μονοπόλων σε επίπεδο και καμπυλωμένο χωρόχρονο. Ξεκινήσαμε από το μονόπολο Dirac, που αποτέλεσε το αρχικό έναυσμα για την ενασχόληση με τα μαγνητικά μονόπολα σε θεωρητικό επίπεδο, αφού εξηγούσε το φαινόμενο κβάντωσης του φορτίου. Συνεχίσαμε την ανάλυση σε επίπεδο θεωρίας πεδίου, μέσω του μοντέλου Georgi-Glashow, το οποίο περιέχει λύσεις μαγνητικών μονοπόλων, μέσω της προσέγγισης t'Hooft-Polyakov, χωρίς να θεωρήσουμε εκ των προτέρων ότι υπάρχουν. Χρησιμοποιώντας το όριο BPS, μπορέσαμε να υπολογίσουμε τη μάζα του μαγνητικού μονοπόλου για διαφορετικές τιμές της σταθεράς σύζευξης. Τέλος, εισάγοντας τη θεωρία σε καμπυλωμένο χωρόχρονο, είδαμε ότι το μονόπολο ταυτοποιείται με μια μελανή οπή σε συνθήκες ισχυρής βαρύτητας.

Είναι σαφές ότι η εργασία αυτή αποτελεί μόνο μια πρώτη εισαγωγή στη θεωρία των μονοπόλων. Δεν αναφερθήκαμε καθόλου σε μονόπολα πέρα της ομάδας $SU(2)$, μονόπολα σε επίπεδο κβαντικής χρωμοδυναμικής, μονόπολα σε υπερσυμμετρικές θεωρίες, μονόπολα σε κοσμολογία, κλπ. Παρ'ολ'αυτά, η εργασία αντιμετώπισε την εισαγωγή αυτή με σχολαστικότητα και αναλυτικούς υπολογισμούς. Με βάση αυτά λοιπόν, ελπίδα μου είναι πως ο επόμενος συνάδελφος που θα ασχοληθεί με αυτό το ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα σε επίπεδο διπλωματικής εργασίας, να βοηθηθεί από την ανάλυση και την εργασία μου. Τέλος, θα ήθελα σας ευχαριστήσω που μείνατε μέχρι αυτό το σημείο στην εργασία και να κλείσω τον επίλογο αυτό με την εξής πρόταση:

"God used beautiful mathematics in creating the world."

Paul Dirac

Παράρτημα Α΄

Το βαθμωτό Ricci

Στο παράρτημα αυτό εξάγουμε αναλυτικά το βαθμωτό Ricci που αναφέρουμε στο κεφάλαιο 4.2. Υπενθυμίζουμε την μορφή της μετρικής:

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= \text{diag}[B, -A, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta] \\g^{\mu\nu} &= \text{diag}[B^{-1}, -A^{-1}, -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \theta]\end{aligned}$$

Τα σύμβολα Christoffel δίνονται από τη σχέση:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}[\partial_{\sigma}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\sigma} - \partial_{\lambda}g_{\nu\sigma}]$$

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς που ακολουθούν, αναφέρουμε τα εξής:

1. Όλες οι παραγωγίσεις ως προς το χρόνο θα είναι μηδέν.
2. Τα στοιχεία της μετρικής είναι μηδενικά για κάθε $\mu \neq \nu$.
3. Τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά στους δύο κάτω δείκτες.
4. Τα A και B έχουν εξάρτηση μόνο από το r .

Επομένως, για τα σύμβολα Christoffel έχουμε τα ακόλουθα:

- $\Gamma_{\mu\nu}^0$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}[\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}] = 0 \\ \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}[\partial_i g_{00} + \partial_0 g_{0i} - \partial_0 g_{0i}] = \frac{1}{2}g^{00}\partial_i g_{00} = \frac{B'}{2B} = \Gamma_{01}^0 \\ \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}[\partial_j g_{0i} + \partial_i g_{0j} - \partial_0 g_{ij}] = 0\end{aligned}$$

• $\Gamma_{\mu\nu}^1$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[\partial_0g_{10} + \partial_0g_{10} - \partial_1g_{00}] = \frac{B'}{2A} \\ \Gamma_{0i}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[\partial_i g_{10} + \partial_0 g_{1i} - \partial_1 g_{0i}] = 0 \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}] = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} = \frac{A'}{2A} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}] = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} = -\frac{r}{A} \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}] = -\frac{r \sin^2 \theta}{A} \\ \Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[\partial_j g_{1i} + \partial_i g_{1j} - \partial_1 g_{ij}] = 0, \quad i \neq j\end{aligned}$$

• $\Gamma_{\mu\nu}^2$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}[\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}] = 0 \\ \Gamma_{0i}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}[\partial_i g_{20} + \partial_0 g_{2i} - \partial_2 g_{0i}] = 0 \\ \Gamma_{ii}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}[\partial_i g_{2i} + \partial_i g_{2i} - \partial_2 g_{ii}] = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ 0, & i = 2 \\ -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g^{33} = -\cos \theta \sin \theta, & i = 3 \end{cases} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}[\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12}] = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{13}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}[\partial_3 g_{21} + \partial_1 g_{23} - \partial_2 g_{13}] = 0 \\ \Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}[\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{23}] = 0\end{aligned}$$

• $\Gamma_{\mu\nu}^3$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}[\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}] = 0 \\ \Gamma_{0i}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}[\partial_i g_{30} + \partial_0 g_{3i} - \partial_3 g_{0i}] = 0 \\ \Gamma_{ii}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}[\partial_i g_{3i} + \partial_i g_{3i} - \partial_3 g_{ii}] = 0 \\ \Gamma_{12}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}[\partial_2 g_{31} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{12}] = 0 \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}[\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}] = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}[\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{23}] = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} = \cot \theta\end{aligned}$$

Τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι συνεπώς:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{B'}{2B} \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{B'}{2A} \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{A'}{2A} \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{A} \\
\Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta
\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του τανυστή Ricci. Για λόγους ευκολίας, θα υπολογίσουμε το $-R_{\mu\nu}$, εξισώνοντας το πρώτο και τελευταίο δείκτη στο τανυστή καμπυλότητας Riemann $R_{\mu\nu}^a = \partial_\nu \Gamma_{\mu b}^a - \partial_b \Gamma_{\mu\nu}^a + \Gamma_{\mu b}^k \Gamma_{k\nu}^a - \Gamma_{\mu\nu}^k \Gamma_{bk}^a$. Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
-R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}^a = \partial_\nu \Gamma_{\mu a}^a - \partial_a \Gamma_{\mu\nu}^a + \Gamma_{\mu a}^k \Gamma_{k\nu}^a - \Gamma_{\mu\nu}^k \Gamma_{ak}^a \\
&= \partial_\nu (\Gamma_{\mu 0}^0 + \Gamma_{\mu 1}^1 + \Gamma_{\mu 2}^2 + \Gamma_{\mu 3}^3) \\
&\quad - \partial_0 \Gamma_{\mu\nu}^0 - \partial_1 \Gamma_{\mu\nu}^1 - \partial_2 \Gamma_{\mu\nu}^2 - \partial_3 \Gamma_{\mu\nu}^3 \\
&\quad + \Gamma_{\mu 0}^k \Gamma_{k\nu}^0 + \Gamma_{\mu 1}^k \Gamma_{k\nu}^1 + \Gamma_{\mu 2}^k \Gamma_{k\nu}^2 + \Gamma_{\mu 3}^k \Gamma_{k\nu}^3 \\
&\quad - \Gamma_{\mu\nu}^k (\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την συμμετρία του τανυστή Ricci, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ ώστε να μειώσουμε τους απαιτούμενους υπολογισμούς. Οι μη-διαγώνιοι όροι του $R_{\mu\nu}$ είναι μηδενικοί. Πράγματι,

- R_{0i}

$$\begin{aligned}
-R_{0i} &= \partial_i (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\
&\quad - \partial_0 \Gamma_{0i}^0 - \partial_1 \Gamma_{0i}^1 - \partial_2 \Gamma_{0i}^2 - \partial_3 \Gamma_{0i}^3 \\
&\quad + \Gamma_{00}^k \Gamma_{ki}^0 + \Gamma_{01}^k \Gamma_{ki}^1 + \Gamma_{02}^k \Gamma_{ki}^2 + \Gamma_{03}^k \Gamma_{ki}^3 \\
&\quad - \Gamma_{0i}^k (\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

όπως εύκολα μπορούμε να δούμε από τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel. Αντίστοιχα, για τους υπόλοιπους μη-διαγώνιους όρους έχουμε

- R_{ij}

$$\begin{aligned}
-R_{ij} &= \partial_j(\Gamma_{i0}^0 + \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2 + \Gamma_{i3}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{ij}^0 - \partial_1\Gamma_{ij}^1 - \partial_2\Gamma_{ij}^2 - \partial_3\Gamma_{ij}^3 \\
&\quad + \Gamma_{i0}^k\Gamma_{kj}^0 + \Gamma_{i1}^k\Gamma_{kj}^1 + \Gamma_{i2}^k\Gamma_{kj}^2 + \Gamma_{i3}^k\Gamma_{kj}^3 \\
&\quad - \Gamma_{ij}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3)
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε για κάθε i, j με $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
-R_{12} &= \partial_2(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{12}^0 - \partial_1\Gamma_{12}^1 - \partial_2\Gamma_{12}^2 - \partial_3\Gamma_{12}^3 \\
&\quad + \Gamma_{10}^k\Gamma_{k2}^0 + \Gamma_{11}^k\Gamma_{k2}^1 + \Gamma_{12}^k\Gamma_{k2}^2 + \Gamma_{13}^k\Gamma_{k2}^3 \\
&\quad - \Gamma_{12}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= \Gamma_{13}^3\Gamma_{32}^3 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{32}^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{13} &= \partial_3(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{13}^0 - \partial_1\Gamma_{13}^1 - \partial_2\Gamma_{13}^2 - \partial_3\Gamma_{13}^3 \\
&\quad + \Gamma_{10}^k\Gamma_{k3}^0 + \Gamma_{11}^k\Gamma_{k3}^1 + \Gamma_{12}^k\Gamma_{k3}^2 + \Gamma_{13}^k\Gamma_{k3}^3 \\
&\quad - \Gamma_{13}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-R_{23} &= \partial_3(\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{23}^0 - \partial_1\Gamma_{23}^1 - \partial_2\Gamma_{23}^2 - \partial_3\Gamma_{23}^3 \\
&\quad + \Gamma_{20}^k\Gamma_{k3}^0 + \Gamma_{21}^k\Gamma_{k3}^1 + \Gamma_{22}^k\Gamma_{k3}^2 + \Gamma_{23}^k\Gamma_{k3}^3 \\
&\quad - \Gamma_{23}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Μένει μόνο να υπολογίσουμε πλέον του διαγώνιους όρους του ταυσιτή Ricci.

- R_{00}

$$\begin{aligned}
-R_{00} &= \partial_0(\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{00}^0 - \partial_1\Gamma_{00}^1 - \partial_2\Gamma_{00}^2 - \partial_3\Gamma_{00}^3 \\
&\quad + \Gamma_{00}^k\Gamma_{k0}^0 + \Gamma_{01}^k\Gamma_{k0}^1 + \Gamma_{02}^k\Gamma_{k0}^2 + \Gamma_{03}^k\Gamma_{k0}^3 \\
&\quad - \Gamma_{00}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= -\partial_1\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^0\Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1(\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) \\
&= \left(-\frac{B'}{2A}\right)' + \frac{B'}{2B}\frac{B'}{2A} - \frac{B'}{2A}\frac{A'}{2A} - \frac{B'}{2A}\frac{1}{r} - \frac{B'}{2A}\frac{1}{r} \\
&= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} + \frac{B'^2}{4BA} - \frac{B'}{Ar}
\end{aligned}$$

• R_{11}

$$\begin{aligned}
-R_{11} &= \partial_1(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{11}^0 - \partial_1\Gamma_{11}^1 - \partial_2\Gamma_{11}^2 - \partial_3\Gamma_{11}^3 \\
&\quad + \Gamma_{10}^k\Gamma_{k1}^0 + \Gamma_{11}^k\Gamma_{k1}^1 + \Gamma_{12}^k\Gamma_{k1}^2 + \Gamma_{13}^k\Gamma_{k1}^3 \\
&\quad - \Gamma_{11}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= \partial_1\Gamma_{10}^0 + \partial_1\Gamma_{12}^2 + \partial_1\Gamma_{13}^3 + \Gamma_{10}^0\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3\Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{31}^3 \\
&= \left(\frac{B'}{2B}\right)' + \left(\frac{2}{r}\right)' + \left(\frac{B'}{2B}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{A'}{2A} \frac{B'}{2B} - \frac{A'}{Ar} \\
&= \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{Ar}
\end{aligned}$$

• R_{22}

$$\begin{aligned}
-R_{22} &= \partial_2(\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{22}^0 - \partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{22}^2 - \partial_3\Gamma_{22}^3 \\
&\quad + \Gamma_{20}^k\Gamma_{k2}^0 + \Gamma_{21}^k\Gamma_{k2}^1 + \Gamma_{22}^k\Gamma_{k2}^2 + \Gamma_{23}^k\Gamma_{k2}^3 \\
&\quad - \Gamma_{22}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= \partial_2\Gamma_{23}^3 - \partial_1\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{23}^3\Gamma_{23}^3 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{31}^3 \\
&= \partial_\theta \cot \theta + \left(\frac{r}{A}\right)' - \frac{1}{A} + \cot^2 \theta + \frac{r}{A} \frac{B'}{2B} + \frac{r}{A} \frac{A'}{2A} + \frac{1}{A} \\
&= \frac{B'r}{2AB} - \frac{A'r}{2A^2} + \frac{1}{A} - 1
\end{aligned}$$

• R_{33}

$$\begin{aligned}
-R_{33} &= \partial_3(\Gamma_{\mu 0}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) \\
&\quad - \partial_0\Gamma_{33}^0 - \partial_1\Gamma_{33}^1 - \partial_2\Gamma_{33}^2 - \partial_3\Gamma_{33}^3 \\
&\quad + \Gamma_{30}^k\Gamma_{k3}^0 + \Gamma_{31}^k\Gamma_{k3}^1 + \Gamma_{32}^k\Gamma_{k3}^2 + \Gamma_{33}^k\Gamma_{k3}^3 \\
&\quad - \Gamma_{33}^k(\Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2 + \Gamma_{3k}^3) \\
&= -\partial_1\Gamma_{33}^1 - \partial_2\Gamma_{33}^2 + \Gamma_{31}^3\Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3\Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1\Gamma_{31}^3 \\
&\quad + \Gamma_{33}^2\Gamma_{32}^3 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^2\Gamma_{32}^3 \\
&= \left(\frac{r \sin^2 \theta}{A}\right)' + \partial_\theta(\cos \theta \sin \theta) - \frac{\sin^2 \theta}{A} - \cos \theta \sin \theta \cot \theta + \frac{r \sin^2 \theta}{A} \frac{B'}{2B} + \frac{r \sin^2 \theta}{A} \frac{A'}{2A} + \frac{\sin^2 \theta}{A} \\
&= \left(\frac{1}{A} - \frac{rA'}{A^2} - 1 + \frac{rB'}{2AB} + \frac{A'r}{2A^2}\right) \sin^2 \theta \\
&= -R_{22} \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

Τέλος, το βαθμωτό Ricci υπολογίζεται με τετριμμένο τρόπο:

$$\begin{aligned}
 R &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
 &= \frac{B''}{2AB} - \frac{B'A'}{4A^2B} - \frac{B'^2}{4B^2A} + \frac{B'}{ABr} \\
 &\quad + \frac{B''}{2AB} - \frac{B'^2}{4B^2A} - \frac{B'A'}{4A^2B} - \frac{A'}{A^2r} \\
 &\quad + \frac{B'}{ABr} - \frac{A'}{A^2r} + \frac{2}{Ar^2} - \frac{2}{r^2}
 \end{aligned}$$

$$R = \frac{B''}{AB} - \frac{B'A'}{2A^2B} - \frac{B'^2}{2B^2A} + \frac{2}{r} \frac{B'}{AB} - \frac{2}{r} \frac{A'}{A^2} - \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right)$$

Παράρτημα Β'

Κώδικες FORTRAN αριθμητικής επίλυσης

B.1 Monopole in flat spacetime

Program test

```
implicit none
```

```
integer           :: N,i,j,iter,beta_values
real*8,allocatable :: K(:),H(:),Kn(:),Hn(:)
real*8           :: r0,rsmall,rbig,delta,numK,denK,numH,denH
real*8           :: K0,Kp,Km,H0,Hp,Hm,v,rN,w,rp,rm
real*8           :: E,T,U,temp,K_der,H_der
real*8, allocatable :: beta_sq(:)
```

```
!-----
! Read desired input values for b^2
!-----
```

```
open(1,file='beta_input.dat')
read(1,*) beta_values
allocate(beta_sq(beta_values))
do i=1,beta_values
read(1,*) beta_sq(i)
enddo
close(1)
```

```
!-----
! Enter resolution for the numerical solution
!-----
```

```

write(*,*) 'Enter desired resolution '
read (*,*) N

open(1,file='ksi_K_H.dat ')
write(1,*) 'variables="Ksi","K","H" '

!-----
! If N is greater than 0, solve
!-----
do while (N.gt.0)

write(*,*) 'N=', N

!-----
! Allocate arrays with the desired resolution
!-----
allocate (K(N+1),H(N+1),Kn(N+1),Hn(N+1))

v      = 1.d0
w      = 1.d0
rsmall = 0.01d0
rbig   = 100.01d0
delta  = (rbig-rsmall)/N

!-----
! Analytical solution for lambda=0
!-----
write(1,*) 'ZONE T= "N=',N,' - ', ' analytical b^2=0"'
do i=1,N

r0     = rsmall + (i-1)*delta
K(i)   = v*r0/sinh(v*r0)
H(i)   = cosh(v*r0)/sinh(v*r0) - 1.d0/(v*r0)

write(1,*) v*r0, K(i), H(i)

enddo
write(1,*)
write(1,*)
!-----
!-----

```

```

! Open file that appends energy values for all b^2 solutions
!-----
open(14,file='energy.dat')

!-----
! Solve for each b^2
!-----
do j=1,beta_values

K(1)      =  1.d0
H(1)      =  0.d0

K(N+1)    =  v*rbig/sinh(v*rbig)
H(N+1)    =  1.d0

do iter=1,5000
do i=2,N

r0 =  rsmall+(i-1)*delta
rp =  rsmall+(i-1+1)*delta
rm =  rsmall+(i-1-1)*delta

K0 =  K(i)
Kp =  K(i+1)
Km =  K(i-1)

H0 =  H(i)
Hp =  H(i+1)
Hm =  H(i-1)

numK =  (Kp+Km)/delta**2 - K0*(K0**2-1.d0)/r0**2
denK =  H0**2+2.d0/delta**2

numH =  r0**2.d0*(Hp+Hm)/delta**2+2.d0*r0*(Hp-Hm)/(2.d0*delta)-2.d0*beta_sq(
denH =  2.d0*K0**2+2.d0*r0**2/delta**2

Kn(i) =  numK/denK
Hn(i) =  numH/denH

K(i) =  w*Kn(i) + (1.d0-w) * K(i)
H(i) =  w*Hn(i) + (1.d0-w) * H(i)

```

```

enddo
enddo

!open(2, file='ksi_K_H.dat')
write(1,*) 'ZONE T= "N=',N,'-',',', ' computational b^2=',beta_sq(j),''''
do i=1,N+1
write(1, '(3(e28.17,1x))') rsmall+(i-1)*delta ,K(i),H(i)
enddo
write(1,*)
write(1,*)
!close(2)

E      = 0.d0

do i=2,N-1

if (i.eq.(N+1)) then
r0      = rbig
K_der   = (K(i)-K(i-1))/(delta) ! 1st order derivative
H_der   = (H(i)-H(i-1))/(delta)
else
r0      = rsmall+(i-1)*delta
K_der   = (K(i+1)-K(i-1))/(2.d0*delta) ! 2nd order derivative
H_der   = (H(i+1)-H(i-1))/(2.d0*delta)
endif

T      = K_der**2/r0**2+0.5d0*H_der**2
U      = (K(i)**2-1.d0)**2/(2*r0**4) + K(i)**2*H(i)**2/r0**2
temp   = (beta_sq(j)/2.d0) * (H(i)**2 - 1.d0)**2

E      = E + r0**2*delta*(T+U+temp)

enddo

E      = E*11.d0
write(14,*) beta_sq(j), E

enddo
deallocate (K,H,Kn,Hn)

write(*,*) 'Enter desired resolution '

```

```
read (*,*) N
```

```
enddo
```

```
close(1)
```

```
End program
```

B.2 Dyon in flat spacetime

Program test

```
implicit none

integer          :: N,i,j,iter ,beta_values
real*8,allocatable :: K(:),H(:),J_var(:),Kn(:),Hn(:),Jn(:)
real*8          :: r0,rsmall ,rbig ,delta ,numK,denK,numH,denH,numJ,denJ
real*8          :: K0,Kp,Km,H0,Hp,Hm,J0,Jp,Jm,rN,w,v,rp,rm
real*8          :: E,T,U,temp,K_der,H_der,J_der
real*8, allocatable :: beta_sq(:)
real*8          :: K_err,H_err,J_err,max_err,loc_err

!-----
! Read desired input values for b^2
!-----
open(1,file='beta_input.dat')
read(1,*) beta_values
allocate(beta_sq(beta_values))
do i=1,beta_values
read(1,*) beta_sq(i)
enddo
close(1)

!-----
! Enter resolution for the numerical solution
!-----
write(*,*) 'Enter desired resolution '
read (*,*) N

open(1,file='ksi_K_H.dat')
write(1,*) 'variables="Ksi","K","H","J"'

!-----
! If N is greater than 0, solve
!-----
do while (N.gt.0)

write(*,*) 'N=', N

!-----
```



```

! Allocate arrays with the desired resolution
!-----
allocate (K(N+1),H(N+1),J_var(N+1),Kn(N+1),Hn(N+1),Jn(N+1))

v      = 1.d0
w      = 1.d0
rsmall = 0.01d0
rbig   = 100.1d0
delta  = (rbig-rsmall)/N

!-----
! Analytical solution for lambda=0
!-----
write(1,*) 'ZONE T= "N=',N,' - ', ' analytical b^2=',0,'"'
do i=1,N

r0      = rsmall + (i-1)*delta
K(i)    = v*r0/sinh(v*r0)
H(i)    = (cosh(v*r0)/sinh(v*r0) - 1.d0/(v*r0))
J_var(i) = -(cosh(v*r0)/sinh(v*r0)-1.d0/(v*r0))

write(1, '(4(e28.17,2x))') v*r0, K(i), H(i), J_var(i)

enddo
write(1,*)
write(1,*)
!-----

!-----
! Open file that appends energy values for all b^2 solutions
!-----
open(14, file='energy.dat')

!-----
! Solve for each b^2
!-----
do j=1,beta_values

K(1)    = 1.d0
H(1)    = 0.d0
J_var(1) = 0.d0

```

```

K(N+1)      =  v*rbig/sinh(v*rbig)
H(N+1)      =  1.d0
J_var(N+1)  = -1.d0

```

```

K_err       =  1e06
H_err       =  1e06
J_err       =  1e06

```

```

do iter=1,5000
max_err     =  1d-12
do i=2,N

```

```

r0 =  rsmall+(i-1)*delta
rp =  rsmall+(i-1+1)*delta
rm =  rsmall+(i-1-1)*delta

```

```

K0 =  K(i)
Kp =  K(i+1)
Km =  K(i-1)

```

```

H0 =  H(i)
Hp =  H(i+1)
Hm =  H(i-1)

```

```

J0 =  J_var(i)
Jp =  J_var(i+1)
Jm =  J_var(i-1)

```

```

numK =  (Kp+Km)/delta**2 - K0*(K0**2-1.d0)/r0**2
denK =  H0**2+J0**2+2.d0/delta**2

```

```

numH =  r0**2.d0*(Hp+Hm)/delta**2+2.d0*r0*(Hp-Hm)/(2.d0*delta)-2.d0*beta_sq(
denH =  2.d0*K0**2+r0**2*2.d0/delta**2

```

```

numJ =  r0**2.d0*(Jp+Jm)/delta**2+2.d0*r0*(Jp-Jm)/(2.d0*delta)
denJ =  2.d0*K0**2+r0**2*2.d0/delta**2

```

```

Kn(i) =  numK/denK
Hn(i) =  numH/denH
Jn(i) =  numJ/denJ

```

```

K_err =  (Kn(i)-K(i))

```

```

H_err = (Hn(i)-H(i))
J_err = (Jn(i)-J_var(i))

loc_err = max(K_err ,max(H_err , J_err ))
if (loc_err.gt.max_err) max_err = loc_err

K(i) = w*Kn(i) + (1.d0-w) * K(i)
H(i) = w*Hn(i) + (1.d0-w) * H(i)
J_var(i) = w*Jn(i) + (1.d0-w) * J_var(i)

enddo

write(55,*) iter , max_err

enddo

read(*,*)

!open(2 , file='ksi_K_H.dat ')
write(1,*) 'ZONE T= "N=',N,' - ', ' computational b^2=',beta_sq(j),'' '
do i=1,N+1
write(1, '(4(e28.17,1x))') rsmall+(i-1)*delta ,K(i) ,H(i) ,J_var(i)
enddo
write(1,*)
write(1,*)
!close(2)

E = 0.d0

do i=2,700

if (i.eq.(N+1)) then
r0 = rbig
K_der = (K(i)-K(i-1))/(delta) ! 1st order derivative
H_der = (H(i)-H(i-1))/(delta)
J_der = (J_var(i)-J_var(i-1))/(delta)
else
r0 = rsmall+(i-1)*delta
K_der = (K(i+1)-K(i-1))/(2.d0*delta) ! 2nd order derivative
H_der = (H(i+1)-H(i-1))/(2.d0*delta)
J_der = (J_var(i+1)-J_var(i-1))/(2.d0*delta)
endif

```

```

T      = K_der**2/r0**2+0.5d0*H_der**2+J_der**2/2.d0
U      = (K(i)**2-1.d0)**2/(2*r0**4) + K(i)**2*H(i)**2/r0**2+J_var(i)**2*K(i)*
temp   = (beta_sq(j)/2.d0) * (H(i)**2 - 1.d0)**2

E      = E + r0**2*delta*(T+U+temp)

enddo

E      = E*11.d0
write(14,*) beta_sq(j), E

enddo
deallocate (K,H, J_var ,Kn,Hn, Jn)

write(*,*) 'Enter desired resolution '

read (*,*) N

enddo
close(1)

End program

```

B.3 Monopole in curved spacetime

Program test

implicit none

```
integer          :: N,i,j,iter,loc,beta_values,max_iter
real*8,allocatable :: K(:),H(:),A(:),Kn(:),Hn(:),An(:),T(:),U(:),M(:),P(:)
real*8,allocatable :: loc_2(:)
real*8          :: r0,rsmall,rbig,delta
real*8          :: numK,denK,numH,denH,numA,denA
real*8          :: K0,Kp,Km,H0,Hp,Hm,A0,Ap,Am,w,v,rp,rm,rj,T0
real*8          :: temp,K_der,H_der,A_der
real*8,allocatable :: beta_sq(:)
real*8          :: G,Bder_B,inf_int,loc_int
real*8          :: loc_err,K_err,H_err
logical         :: converged
```

```
!-----
! Read desired input values for b^2
!-----
```

```
open(1,file='beta_input.dat')
read(1,*) beta_values
allocate(beta_sq(beta_values))
do i=1,beta_values
read(1,*) beta_sq(i)
enddo
close(1)
```

```
max_iter = 5000
```

```
!-----
! Enter resolution for the numerical solution
!-----
```

```
write(*,*) 'Enter desired G'
read (*,*) G
```

```
!-----
! Enter resolution for the numerical solution
!-----
```

```
write(*,*) 'Enter desired resolution '
read (*,*) N
```

```

open(1, file='ksi_K_H.dat')
write(1,*) 'variables="Ksi", "K", "H", "A" '

!-----
! If N is greater than 0, solve
!-----
do while (N.gt.0)

write(*,*) 'N=', N

!-----
! Allocate arrays with the desired resolution
!-----
allocate (K(N+1),H(N+1),A(N+1),Kn(N+1),Hn(N+1),An(N+1))
allocate (T(N+1),U(N+1),M(N+1),P(N+1))
allocate (loc_2(N+1))

v      = 1.d0
w      = 1.d0
rsmall = 0.01d0
rbig   = 100.01d0
delta  = (rbig-rsmall)/N

!-----
! Initial guesses for K H A
!-----
open (2, file='initial_values.dat')
do i=1,N
read(2,*) r0,K(i),H(i)
enddo
close(2)
!-----

inf_int = 0.d0
loc_2   = 0.d0

do i=2,N-1

r0      = rsmall + (i-1)*delta
if (i.eq.(N+1)) then
K_der = (K(i)-K(i-1))/(delta) ! 1st order derivative

```

```

H_der = (H(i)-H(i-1))/(delta)
else
K_der = (K(i+1)-K(i-1))/(2.d0*delta) ! 2nd order derivative
H_der = (H(i+1)-H(i-1))/(2.d0*delta)
endif

T(i) = K_der**2/r0**2 + H_der**2/2.d0
U(i) = (K(i)**2-1.d0)**2/(2.d0*r0**4) + K(i)**2*H(i)**2/(r0**2) + 0.5d0*beta_

inf_int = inf_int + G*r0*T(i)*delta

enddo

P = 0.d0
M = 0.d0

do i=2,N-1
loc_int = 0.d0
r0 = rsmall + (i-1)*delta
do j=2,i
rj = rsmall + (j-1)*delta
loc_int = loc_int + G*rj*T(j)*delta
M(i) = M(i) + rj**2 * exp(loc_int-inf_int) * (T(j)+U(j)) * delta
enddo

P(i) = inf_int - loc_int
M(i) = M(i) * exp(inf_int-loc_int)

enddo

do i=2,N-1
r0 = rsmall + (i-1)*delta
temp = G*M(i)
A(i) = r0/(r0 - temp)
enddo

!_____
! Solve for each b^2
!_____
do j=1,beta_values

K(1) = 1.d0

```

```

H(1)      =  0.d0

K(N+1)    =  v*rbig/sinh(v*rbig)
H(N+1)    =  1.d0

iter      =  1
converged=  .false.

open (5, file='residual.hist ')

do while ((.not.converged).and.(iter.le.max_iter))

print *, 'iter:', iter

loc_err = 1d-18
!---
! Solve for K and H
!---
do i=2,N-1

r0      =  rsmall+(i-1)*delta
rp      =  rsmall+(i-1+1)*delta
rm      =  rsmall+(i-1-1)*delta

K0      =  K(i)
Kp      =  K(i+1)
Km      =  K(i-1)

H0      =  H(i)
Hp      =  H(i+1)
Hm      =  H(i-1)

A0      =  A(i)
Ap      =  A(i+1)
Am      =  A(i-1)

T0      =  T(i)

Bder_B=  2.d0*G*r0*T0-((Ap-Am)/(2.d0*delta))/A0

numK    =  (Kp+Km)/delta**2 - A0*K0*(K0**2-1.d0)/r0**2 + (Bder_B - ((Ap-Am)/(2.
denK    =  A0*H0**2+2.d0/delta**2

```



```

numH = (Hp+Hm)/delta**2 + (Bder_B - ((Ap-Am)/(2.d0*delta))/A0 + 4.d0/r0) *
denH = 2.d0*A0*K0**2/r0**2+2.d0/delta**2

Kn(i) = numK/denK
Hn(i) = numH/denH

K_err = (Kn(i)-K(i))/K(i)
H_err = (Hn(i)-H(i))/H(i)

if (max(K_err , H_err) .gt. loc_err) loc_err = max(K_err , H_err)

K(i) = w*Kn(i) + (1.d0-w) * K(i)
H(i) = w*Hn(i) + (1.d0-w) * H(i)

enddo

!---
! Write residual
!---
write (5,*) iter , loc_err

inf_int = 0.d0

!-----
! T and U
!-----
do i=2,N-1

r0 = rsmall + (i-1)*delta
if (i.eq.(N+1)) then
K_der = (K(i)-K(i-1))/(delta) ! 1st order derivative
H_der = (H(i)-H(i-1))/(delta)
else
K_der = (K(i+1)-K(i-1))/(2.d0*delta) ! 2nd order derivative
H_der = (H(i+1)-H(i-1))/(2.d0*delta)
endif

T(i) = K_der**2/r0**2 + H_der**2/2.d0
U(i) = (K(i)**2-1.d0)**2/(2.d0*r0**4) + K(i)**2*H(i)**2/(r0**2) + 0.5d0*beta_

inf_int = inf_int + G*r0*T(i)*delta

```

```

enddo

!-----
! P and M
!-----
P = 0.d0
M = 0.d0

write(65,*) 'iter ', iter

do i=2,N-1
loc_int = 0.d0
r0      = rsmall + (i-1)*delta
do loc=2,i
rj      = rsmall + (loc-1)*delta
loc_int = loc_int + G*rj*T(loc)*delta
M(i)    = M(i) + rj**2 * exp(loc_int-inf_int) * (T(loc)+U(loc)) * delta
enddo
P(i) = inf_int - loc_int
M(i) = M(i) * exp(inf_int-loc_int)
write(65,*) exp(inf_int-loc_int)
enddo

!----
! Update A
!----
do i=2,N-1
r0      = rsmall + (i-1)*delta
temp    = G*M(i)
A(i)    = r0/(r0 - temp)
enddo
!write (*,*) 1.d0/A(20),rsmall+(20-1)*delta

!----
! Check for convergence
!----
if (loc_err.lt.1d-10) then
converged=.true.
write(*,'("Reached convergence at",1x,i4.4,1x," iterations")') iter
endif

```

```

iter = iter+1

enddo

write(1,*) 'ZONE T= "N=',N,' - ', 'b^2=',beta_sq(j),'' '
do i=1,N+1
write(1,'(4(e28.17,1x))') rsmall+(i-1)*delta ,K(i),H(i),A(i)
enddo
write(1,*)
write(1,*)

write(44,*) beta_sq(j), M(N-1)
enddo

deallocate (K,H,A,Kn,Hn,An,T,U,M)

write(*,*) 'Enter desired resolution '

read (*,*) N

enddo
close(1)
close(5)

End program

```

Bibliography

- [1] Alfred Actor. Classical solutions of SU(2) Yang-Mills theories. *Reviews of Modern Physics*, 51(3):461–525, 1979.
- [2] Ian J. R Aitchison and Anthony J. G Hey. *Gauge theories in particle physics*, volume 1. 2003.
- [3] Anthony J.G Aitchison, Ian J R. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics – QCD and The Electroweak Theory, Fourth Edition-CRC Press (2012)*, volume 2.
- [4] John Baez. *Gauge Fields, Knots and Gravity*, 1991.
- [5] E B Bogomol’nyi. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, 24:4, 1976.
- [6] Blas Cabrera. First results from a superconductive detector for moving magnetic monopoles. 48:1378–1381, 1982.
- [7] S Carroll. *Spacetime and Geometry: Pearson New International Edition: An Introduction to General Relativity*. 2014.
- [8] Csaba Csaki. *Solitons and Instantons LECTURE NOTES*. 2016.
- [9] P. A. M. Dirac. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 133(821):60–72, 1931.
- [10] Bjorn Felsager. *Geometry, Particles and Fields*.
- [11] JM Figueroa. *Electromagnetic Duality for Children*. 1998.
- [12] Howard Georgi and Sheldon L. Glashow. Unified weak and electromagnetic interactions without neutral currents. *Physical Review Letters*, 28(22):1494–1497, 1972.
- [13] Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*.
- [14] Jeffrey A. Harvey. *Magnetic Monopoles, Duality, and Supersymmetry*. 1996.

- [15] G. t. Hooft. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nuclear Physics, Section B*, 79(2):276–284, 1974.
- [16] Ciaran Hughes. A brief discussion on representations. pages 1–4.
- [17] Jean Iliopoulos. Introduction to the STANDARD MODEL of the Electro-Weak Interactions. 005(March 2015):4–17, 2013.
- [18] John D. Jackson. Classical Electrodynamics.
- [19] B Julia and A Zee. Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory. *Physical Review D*, 11:2227–2232, 1975.
- [20] M. Nakahara. Geometry, Topology and Physics.
- [21] M. Polyakov. Particle Spectrum in quantum field theory.
- [22] K Prasad and M. Sommerfield. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. 35(12):760–762, 1975.
- [23] John Preskill. Magnetic monopoles in particle physics aPreskill, J. (1984). Magnetic monopoles in particle physics and cosmology. *Annu Rev Nucl Part Sci*, 34, 461. <https://doi.org/10.1146/annurev.ns.34.120184.002333>nd cosmology. *Annu Rev Nucl Part Sci*, 34:461, 1984.
- [24] Julian Schwinger. A Magnetic Model of Matter. *Science (New York, N. Y.)*, 165:757–761, 1969.
- [25] Yakov M. Shnir. *Magnetic Monopoles*.
- [26] Charles G. Torre. Introduction to Classical Field Theory. 2016.
- [27] P. Van Nieuwenhuizen, David Wilkinson, and M. J. Perry. Regular solution of 't Hooft's magnetic monopole model in curved space. *Physical Review D*, 13(4):778–784, 1976.
- [28] J Weinberg. *Classical Solutions in Quantum Field Theory*. 1996.
- [29] J Weinberg and J Weinberg. Black holes in magnetic monopoles. 45(8):2751–2761, 1992.
- [30] S. Weinberg. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.