



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

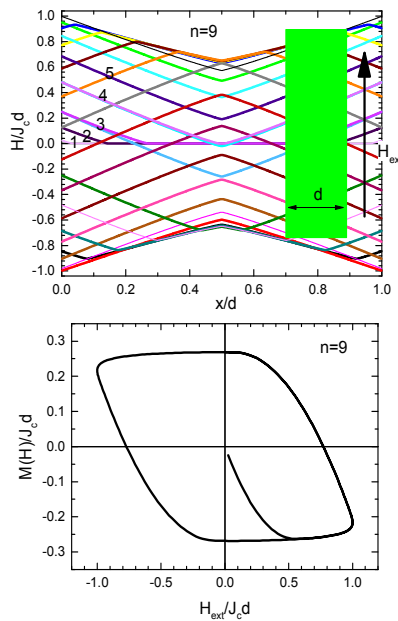
ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Δυναμική της διείδυσης του μαγνητικού πεδίου σε υπεραγώγιμη πλάκα με μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του Δημήτρη Μανιάτη

Ερευνητικός Επιβλέπων:	Ακαδημαϊκός Επιβλέπων:
Μιχάλης Πίσσας	Κωστής Παρασκευαΐδης
Ινστιτούτο Νανοεπιστήμης και Νανοτεχνολογίας, Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. «Δημόκριτος»	Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος, 2019

Με επιφύλαξη κάθε δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμηματικά για εμπορικούς σκοπούς. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για μη κερδοσκοπικό σκοπό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση ότι αναφέρεται η πηγή προέλευσης και διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύουν επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Αναπτύξαμε τον αλγόριθμο και κατασκευάσαμε τον κώδικά σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran για την αριθμητική επίλυση της μονοδιάστατης εξίσωσης διάχυσης με εξωτερική πηγή. Η συγκεκριμένη εξίσωση περιγράφει τη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό υπεραγωγίσιμης πλάκας στην οποία η σχέση ηλεκτρικού πεδίου και πυκνότητας ρεύματος είναι μη γραμμική. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα που αναπτύξαμε, εκτελέσαμε αριθμητικούς υπολογισμούς για την εκτίμηση του μαγνητικού πεδίου και πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε άπειρη υπεραγωγίσιμη πλάκα, η οποία ακολουθεί νόμο δύναμης για την σχέση ηλεκτρικού πεδίου-πυκνότητας ρεύματος $E = E_c (J/J_c)^n$. Η δυναμική της διεξόδου του μαγνητικού πεδίου οδηγείται από εναλλασσόμενο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $H_{ext}(t) = H_0 \sin(2\pi ft)$. Στις προσομοιώσεις που κάναμε μεταβάλαμε τον εκθέτη του νόμου δύναμης, n το πλάτος του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου, H_0 , και το κρίσιμο ρεύμα J_c . Για όλες τις τιμές του εκθέτη $n \geq 3$ διαπιστώσαμε ότι η διεξόδου του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου γίνεται με τη μορφή μετώπου. Από τη χρονική μεταβολή της μαγνήτισης της πλάκας υπολογίσαμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος της θεμελιώδους (πρώτης αρμονικής) μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας. Αυτή η ποσότητα μπορεί να συγκριθεί άμεσα με πειραματικές μετρήσεις. Το κύριο συμπέρασμα των υπολογισμών μας, σε σχέση με την εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα, ήταν η εξάρτηση με τον εκθέτη της μέγιστης τιμής του φανταστικού μέρους της. Συγκεκριμένα, διαπιστώσαμε ότι το μέγιστο προσδιορίζεται από τη συνθήκη $H_0/J_c d/2 = 1$ για μικρές τιμές του εκθέτη. Για μεγάλες τιμές το μέγιστο παρατηρείται όταν ικανοποιείται η συνθήκη $H_0/J_c d/2 = 4/3$.

Abstract

We developed an algorithm that solves numerically the one dimensional diffusion equation in the presence of an external source. The algorithm was implemented using Fortran programming language. This particular equation describes the variation of the magnetic field inside a superconducting plate when the relation between the electric field and the current density is non-linear. Using the Fortran code we were able to simulate numerically the magnetic and the current density inside an infinite superconducting plate which is governed by a power-law electric field – current density relation $E = E_c (J/J_c)^n$. The dynamics of the penetration of the magnetic field is driven by a harmonic external magnetic field $H_{ext}(t) = H_0 \sin(2\pi ft)$. During the simulation we used various values for the exponent (n), the amplitude of the external magnetic field (H_0) and the critical current density (J_c). For all values of the exponent $n \geq 3$ we observed that the penetration of the external magnetic field has the form of a wavefront. Using the variation of the plate's magnetization with time we calculated the real and imaginary part of the fundamental (first harmonic) complex magnetic susceptibility. This quantity can be directly compared with experimental values. The main conclusion of our calculation, with respect to the alternating magnetic susceptibility, was the dependence of the imaginary part's maximal value on the exponent. In particular we observed that for small values of the exponent the maximal value corresponds to the condition $H_0/J_c d/2 = 1$, while for large values of the exponent the condition is $H_0/J_c d/2 = 4/3$.

Ευχαριστίες

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου στο Μιχάλη Πίσσα Ερευνητή του ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος για τη μύηση μου στα ζητήματα της υπεραγωγιμότητας, αλλά και την καθοδήγηση του, σε όλη τη διάρκεια αυτής της διπλωματικής. Θα ήθελα επίσης, να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή μου κ. Κώστα Παρασκευαΐδη(ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ) για τις πολύτιμες συμβουλές του, και τη διαρκή επιστημονική υποστήριξη που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό ΦΤΕ, αλλά και στην υλοποίηση αυτής της διπλωματικής. Τέλος ευχαριστώ τον κ. Γιάννη Σανάκη για την συμμετοχή του σαν μέλος της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής.

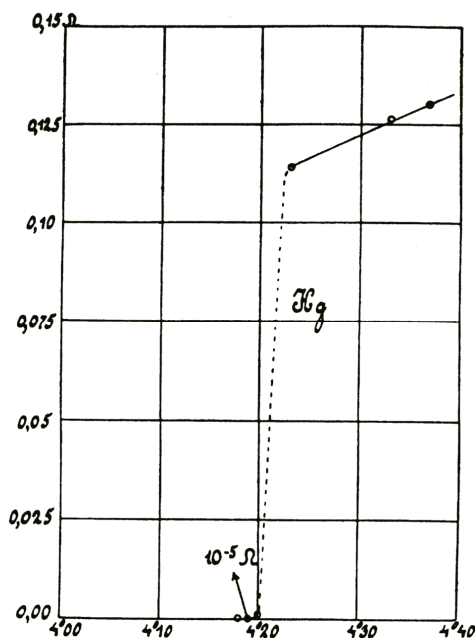
Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	7
2. Υπεραγωγοί Τύπου I.....	11
3. Υπεραγωγοί Τύπου II.....	16
4. FluxFlowResistivity.....	20
5. Κάρφωμα Φλαξονίων.....	23
6. Ερπυσμός Φλαξονίων	27
7. Ηλεκτροδυναμική Υπεραγωγών παρουσία κέντρων καρφώματος των φλαξονίων.....	29
8. Πρότυπο μονοδιάστατου υπεραγωγού.....	34
9. Αποτελέσματα της προσομοίωσης.....	41
10. Προσομοιώσεις για $n=1,3,5$, $j_c=1$, $H_0=1$, $f=1$, και $a=1$	42
11. Προσομοιώσεις για $n=5$, $H_0=1$, $f=1$, και $a=1$ σαν συνάρτηση του κρίσιμου ρεύματος.....	54
12. Συμπεράσματα.....	58
13. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ)	59
14. Βιβλιογραφία.....	69

1. Εισαγωγή

Η υπεραγωγιμότητα είναι ένα φυσικό φαινόμενο το οποίο ανακαλύφθηκε τ αιώνα πριν και εξακολουθεί να είναι το ίδιο εντυπωσιακό ακόμα και σήμερα. Η υπεραγωγιμότητα είναι εντυπωσιακή για πολλούς λόγους, οι οποίοι σχετίζονται τόσο με τις φυσικές διεργασίες που την προκαλούν, όσο και με τις απεριόριστες τεχνολογικές εφαρμογές της.

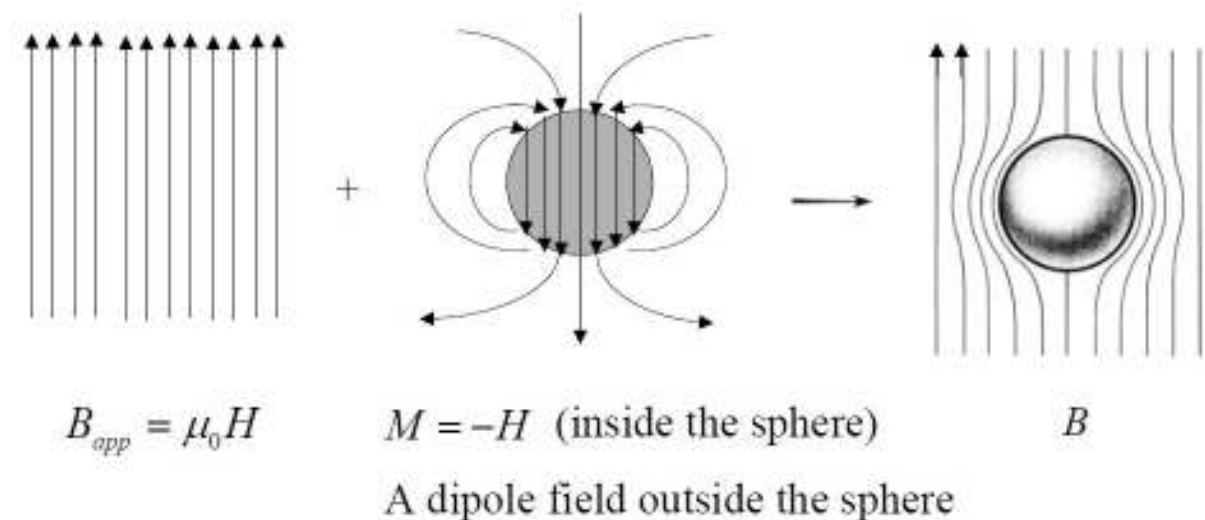
Η ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας έλαβε χώρα το 1911 στο Leiden της Ολλανδίας. Ο Kamerlingh-Onnes είχε υγροποιήσει λίγα χρόνια νωρίτερα (1908) το ήλιο, με αποτέλεσμα να έχει στην διάθεσή του ένα ψυκτικό μέσο, το οποίο μπορούσε να ψύξει υλικά σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Στα διάφορα πειράματα που πραγματοποίησε μελετώντας την αγωγιμότητα των μετάλλων σε χαμηλές θερμοκρασίες παρατήρησε ότι η αντίσταση του υδραργύρου (Hg) εκμηδενίζεται στην θερμοκρασία των $T=4.152\text{K}$. Μια ακόμα παρατήρηση ήταν ότι η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου μπορεί να καταστρέψει την υπεραγωγιμότητα. Για την μελέτη των ιδιοτήτων των υλικών σε χαμηλές θερμοκρασίες που μεταξύ άλλων οδήγησε στην υγροποίηση του ηλίου, ο Kamerlingh-Onnes τιμήθηκε με το βραβείο Nobel.



Εικόνα 1: Ο εκμηδενισμός της ειδικής αντίστασης του Hg όπως μετρήθηκε από τον Kamerlingh-Onnes το 1911.

Στην κλασική εικόνα του μοντέλου Thomson – Drude η αγωγιμότητα των μετάλλων οφείλεται στην ροή των ηλεκτρονίων μέσα από το ιοντικό πλέγμα. Σε χαμηλές θερμοκρασίες το «ρευστό» των ηλεκτρονίων αναμένεται να παγώσει, έτσι θα έπρεπε η αντίσταση του μετάλλου να απειρίζεται. Η εμφάνιση της υπεραγωγιμότητας δεν είναι συμβατή με την εικόνα του μοντέλου Thomson – Drude. Η κβαντική φυσική καθορίζει την συμπεριφορά των ηλεκτρονίων, και πιο συγκεκριμένα η μικροσκοπική ερμηνεία της υπεραγωγιμότητας από τους Bardeen, Cooper και Schrieffer(1957) στηρίζεται στον σχηματισμό ζευγών ηλεκτρονίων, τα οποία συμπεριφέρονται ως μποζονικά συσσωματώματα.

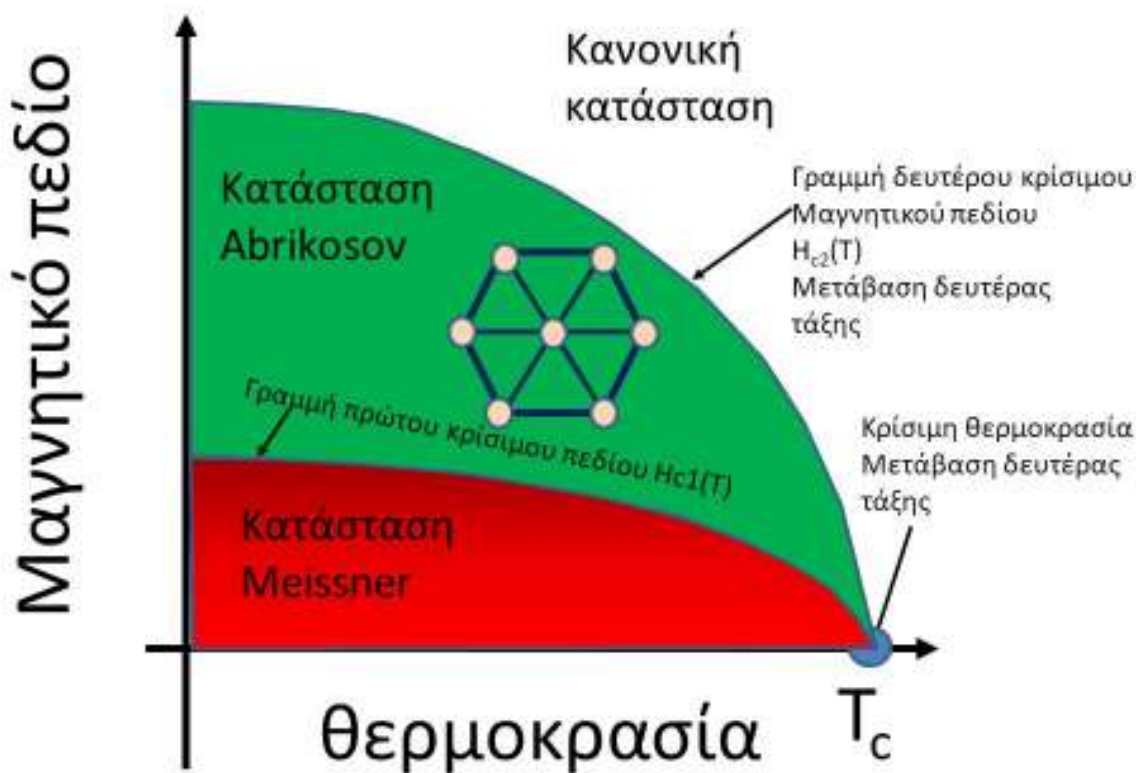
Πέρα από το χαρακτηριστικό της μηδενικής αντίστασης, η υπεραγωγιμότητα σχετίζεται και με μια άλλη ιδιότητα, τον απόλυτο διαμαγνητισμό. Ένα υλικό σε υπεραγωγική κατάσταση εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, εμφανίζει μηδενική μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του. Η συμπεριφορά αυτή ονομάζεται φαινόμενο Meissner και αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα της υπεραγωγιμότητας. Η ιδιότητα της μηδενικής αντίστασης δεν επαρκεί για να ερμηνεύσει αυτή την συμπεριφορά. Σε έναν ιδανικό αγωγό τα επαγωγικά ρεύματα θα κρατούσαν σταθερή την μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του. Μάλιστα η συμπεριφορά των υπεραγωγών σε σχέση με τα εφαρμοζόμενα εξωτερικά πεδία τους κατηγοριοποιεί σε υπεραγωγούς τύπου 1 και υπεραγωγούς τύπου 2.



Εικόνα 2: Ένας υπεραγωγός τύπου I αποβάλλει το μαγνητικό πεδίο από το εσωτερικό του, επιδεικνύοντας πλήρως διαμαγνητική συμπεριφορά

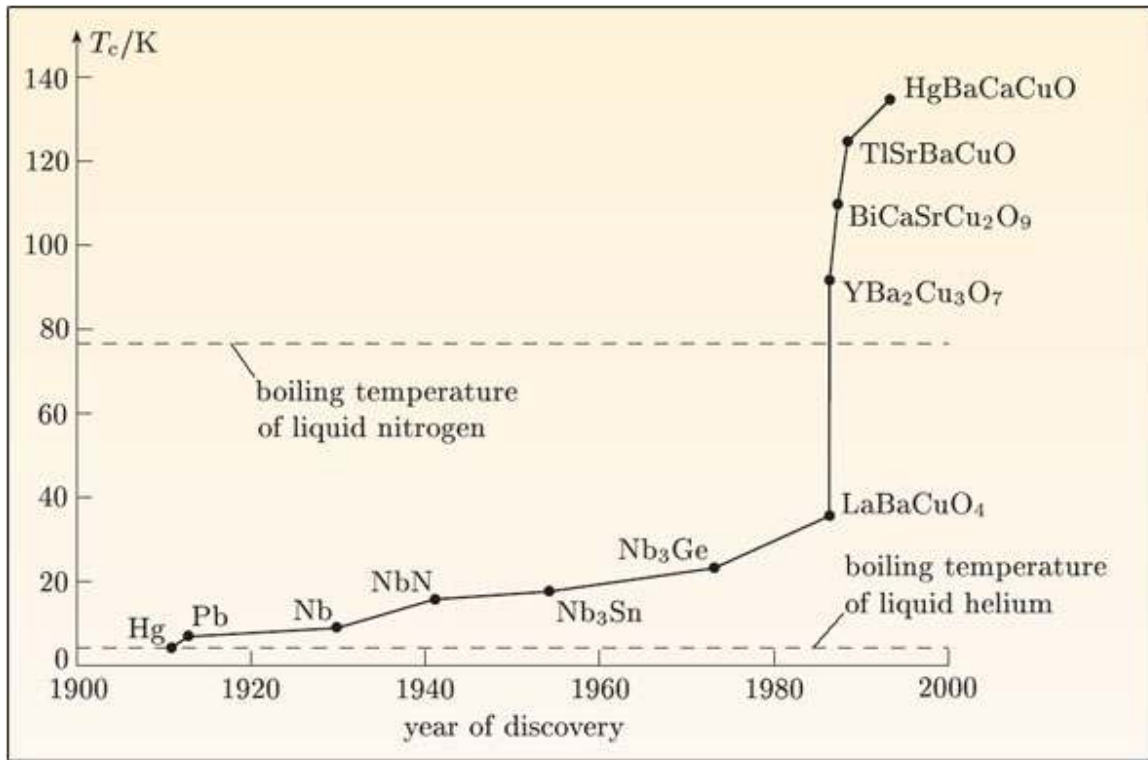
Στους υπεραγωγούς τύπου 1 ο μηδενισμός της αντίστασης συνοδεύεται από την πλήρη αποβολή του μαγνητικού πεδίου από το εσωτερικό του. Ακριβέστερα θα ισχύει ότι $\vec{B} = 0$ σε όλο το εσωτερικό, εκτός από ενός πολύ λεπτού επιφανειακού στρώματος. Η μετάβαση από την υπεραγώγιμη κατάσταση στην κανονική, παρουσία μαγνητικού πεδίου, είναι αλλαγή φάσης πρώτου είδους, η οποία συνοδεύεται από ασυνέχειες και έκλυση λανθάνουσας θερμότητας.

Στους υπεραγωγούς τύπου 2 υπάρχει μια ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ της υπεραγώγιμης και της κανονικής κατάστασης, όπου επιτρέπεται η διείσδυση μαγνητικού πεδίου υπό την μορφή σωλήνων μαγνητικής ροής (fluxtubes). Στην ενδιάμεση κατάστασή το υλικό συμπεριφέρεται βάσει μιας ισχυρά μη γραμμικής σχέσης ρεύματος – τάσης.



Εικόνα 3: Το διάγραμμα φάσεων για έναν υπεραγωγό τύπου II. Εμφανίζονται 2 κρίσιμα μαγνητικά πεδία. Το πρώτο κρίσιμο μαγνητικό πεδίο οριοθετεί την υπεραγώγιμη κατάσταση από την μικτή κατάσταση και το δεύτερο κρίσιμο μαγνητικό πεδίο οριοθετεί την μικτή κατάσταση από την κανονική κατάσταση

Εντελώς απρόσμενα το 1986 ανακαλύφθηκαν οι υπεραγωγοί υψηλών θερμοκρασιών. Πρόκειται για μίκτα οξειδία του χαλκού τα οποία εμφανίζουν θερμοκρασία μετάβασης, η οποία φτάνει τους 145 K. Γενικότερα ως υπεραγωγοί υψηλών θερμοκρασιών χαρακτηρίζονται οι υπεραγωγοί με θερμοκρασία μετάβασης μεγαλύτερη από την θερμοκρασία βρασμού του υγρού αζώτου σε ατμοσφαιρική πίεση. Είναι ευνόητο ότι οι χαμηλότερες απαιτήσεις σε ψύξη καθιστούν τους υπεραγωγούς υψηλών θερμοκρασιών έναν κλάδο έντονης επιστημονικής μελέτης, καθώς η μαζική χρήση υπεραγωγών σε πρακτικές εφαρμογές θα αποτελούσε πραγματική τεχνολογική επανάσταση.



Εικόνα 4: Το χρονικό της ανακάλυψης υπεραγώγιμων ενώσεων.

2. Υπεραγωγοί Τύπου I

Οι υπεραγωγοί τύπου I μπορούν να μελετηθούν χρησιμοποιώντας μια κλασική προσέγγιση. Στους ωμικούς αγωγούς ισχύει η μικροσκοπική μορφή του νόμου του Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

όπου σ η ειδική αγωγιμότητα. Το αντίστροφο της ειδικής αγωγιμότητας είναι η ειδική αντίσταση

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (1.2)$$

Σε ένα ιδανικό μέταλλο η ειδική αντίσταση αναμένεται να μηδενίζεται στο απόλυτο μηδέν της κλίμακας Kelvin. Χαρακτηριστικό γνώρισμα των υπεραγωγών τύπου I είναι ο απότομος μηδενισμός της ειδικής αντίστασης σε μια κρίσιμη θερμοκρασία T_c . Κάτω από αυτή την θερμοκρασία η ειδική αντίσταση παραμένει μηδενική. Παράλληλα ο υπεραγωγός συμπεριφέρεται ως τέλειος διαμαγνήτης.

Σύμφωνα με το μοντέλο των δύο ρευστών, ο υπεραγωγός περιέχει κανονικά και υπεραγωγίμα ηλεκτρόνια. Τα κανονικά ηλεκτρόνια συναντούν αντίσταση κατά την κίνησή τους, έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κινούνται με κάποια ταχύτητα ολίσθησης \vec{v}_n . Η χωρική πυκνότητα ρεύματος που αντιστοιχεί στην κίνηση αυτή θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{j}_n = -n_n \langle \mathbf{v}_n \rangle = \frac{n_n e^2 \tau}{m} \mathbf{E} \quad (1.3)$$

όπου θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου και τ είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στις κρούσεις του ηλεκτρονίου. Απουσία ηλεκτρικού πεδίου δεν μπορεί να υπάρχει μακροσκοπικό ρεύμα, το οποίο να οφείλεται σε συντονισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων.

Τα υπεραγωγίμα ηλεκτρόνια κινούνται χωρίς αντίσταση, έτσι από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα ισχύει

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_s = -e \mathbf{E}.$$

Η χωρική πυκνότητα ρεύματος για τα υπεραγώγιμα ηλεκτρόνια θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{J}_s = -n_s e \mathbf{v}_s, \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

οπότε και θα ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_s = -n_s e \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_s = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}. \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε να έχουμε χρονικά σταθερή πυκνότητα ρεύματος, ακόμα και χωρίς εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου. Θεωρώντας ότι η αγωγιμότητα οφείλεται αποκλειστικά στα υπεραγώγιμα ηλεκτρόνια θα έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανωτέρω σχέσεις θα έχουμε

$$\bar{\nabla} \times \mathbf{J}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή του στροβιλισμού θα έχουμε

$$\nabla^2 \mathbf{J}_s = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{J}_s \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Όπου το μήκος διεύδυσης London δίνεται από την σχέση

$$\lambda_L = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{1/2} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{E} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

και

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}. \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, καθώς και η χωρική πυκνότητα ρεύματος ικανοποιούν την εξίσωση διάχυσης. Με αυτή την παρατήρηση μπορούμε να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο Meissner, αφού το μαγνητικό πεδίο πρακτικά μηδενίζεται σε αποστάσεις μεγαλύτερες του ενός μήκους διείσδυσης London από την επιφάνεια του υπεραγωγού. Η προσέγγιση των αδερφών London δεν ερμηνεύει την δημιουργία των υπεραγωγίων ηλεκτρονίων, ούτε εμπεριέχει στοιχεία της κβαντικής φυσικής.

Μια πληρέστερη φαινομενολογική προσέγγιση μπορεί να γίνει από την θεωρία Ginsburg – Landau. Στα πλαίσια της θεωρίας Ginsburg – Landau θεωρούμε την αλληλεπίδραση ενός σωματιδίου, το οποίο συμπεριφέρεται κβαντικά, με ένα κλασικό μαγνητικό πεδίο. Ουσιαστικά πρόκειται για μια απλή εφαρμογή της θεωρίας αλλαγών φάσης δεύτερης τάξης του Landau, στο φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας. Η παράμετρος τάξης για την υπεραγωγιμότητα είναι η πυκνότητα των υπεραγωγίων ηλεκτρονίων $n_s = |\Psi|^2$. Η ελεύθερη ενέργεια του υπεραγωγού θα δίνεται από την σχέση

$$F_s = F_{no} + \int \left\{ \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m_e} \left| \left(-i \hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{b^2}{8\pi} \right\} d^3r$$

Το σωματίδιο που περιγράφεται από την ανωτέρω σχέση έχει διπλάσια μάζα και διπλάσιο φορτίο σε σχέση με ένα ηλεκτρονίου. Στην πραγματικότητα τα σωματίδια που περιγράφει θεωρία Ginsburg - Landau είναι τα ζεύγη Cooper, της θεωρίας BCS. Η εξίσωση κίνησης για το Ψ είναι

$$\frac{1}{4m_e} \left(-i \hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \alpha \Psi = 0$$

με την συνοριακή συνθήκη

$$\mathbf{n} \cdot \left(-i \hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi = 0.$$

Η εξίσωση κίνησης για το ανυσματικό δυναμικό δίνει τον νόμο Ampere

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

όπου η πυκνότητα ρεύματος δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{j} = -i \frac{e\hbar}{2m_e} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{m_e c} |\Psi|^2 \mathbf{A}. \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

Γράφοντας την παράμετρο τάξης Ψ σε πολική μορφή

$$\Psi = |\Psi| e^{i\Phi} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

η πυκνότητα ρεύματος γίνεται

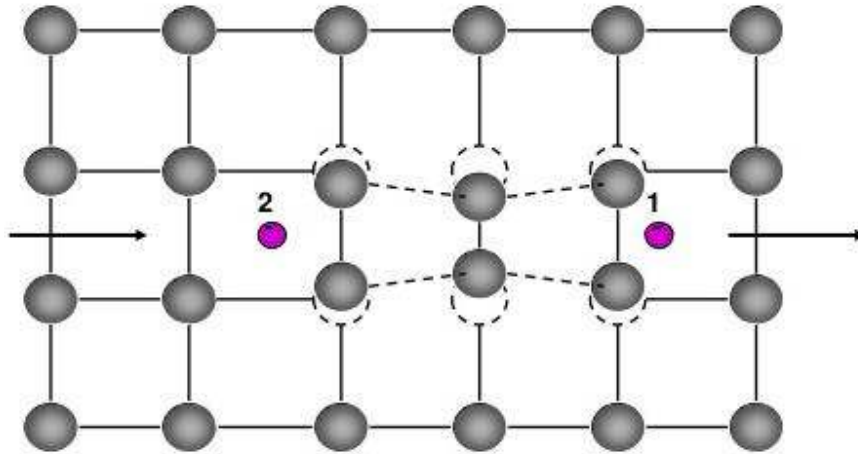
$$\mathbf{j} = \frac{|e|\hbar}{m_e} |\Psi|^2 \left(\nabla \Phi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right), \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

όπου

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2|e|} = 2.07 \times 10^{-7} \text{ G cm}^2 \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

είναι το κβάντο της μαγνητικής ροής. Η ροή αυτή σχετίζεται με λύσεις των εξισώσεων Ginsburg – Landau που περιγράφουν δίνες, οπότε έχουμε μια ερμηνεία της μερικής θωράκισης μέσω οιονεί σωματιδίων, τα οποία ονομάζονται φλαξόνια .

Η μικροσκοπική ερμηνεία της υπεραγωγιμότητας δίνεται από την θεωρία BCS των BardeenCooper και Schrieffer, οι οποίοι τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel το 1972. Τα ηλεκτρόνια καθώς κινούνται μέσα στον υπεραγωγό αλληλεπιδρούν με τα ιόντα του πλέγματος, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια ενεργός ελκτική δύναμη ανάμεσα τους, η οποία οδηγεί στον σχηματισμό ζευγών ηλεκτρονίων, τα οποία ονομάζονται ζεύγη Cooper. Το ηλεκτρόνιο καθώς αλληλεπιδρά με το πλέγμα προκαλεί τοπικές παραμορφώσεις της πυκνότητας φορτίου. Η περίσσεια θετικού φορτίου διαδίδεται ακολουθώντας την κίνηση του ηλεκτρονίου με αποτέλεσμα κάποιο άλλο ηλεκτρόνιο να υφίσταται ελκτική δύναμη και να πλησιάζει. Έτσι δημιουργείται ένας σχηματισμός, ο οποίος διαδίδεται χωρίς αντίσταση. Τα ηλεκτρόνια συζεύγγονται με αποτέλεσμα να επιδεικνύουν μποζονική συμπεριφορά, έτσι σε χαμηλές θερμοκρασίες υφίστανται συμπύκνωση Bose – Einstein.



Εικόνα 5: Ο σχηματισμός του ζεύγους Cooper μέσω της αλληλεπίδρασης με το πλέγμα.

Το σημαντικό στοιχείο είναι το γεγονός ότι η σύζευξη των ηλεκτρονίων οδηγεί στην σταθεροποίηση των ζευγών Cooper, καθώς η ρήξη ενός ζεύγους επηρεάζει τις ενέργειες όλων των ζευγών. Αυτός ο μηχανισμός οδηγεί στην εμφάνιση ενεργειακού χάσματος, το οποίο απουσιάζει στους αγωγούς. Κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία η ύπαρξη των ζευγών Cooper ευνοείται ενεργειακά, ενώ καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται προς την κρίσιμη τιμή της, το ενεργειακό χάσμα μειώνεται και τελικά η υπεραγωγιμότητα καταστρέφεται. Ωστόσο η πρωτογενής αλληλεπίδραση που οδηγεί στην εμφάνιση της ελκτικής δύναμης προβλέπει κρίσιμη θερμοκρασία της τάξης των 30-40K, έτσι η θεωρία BCS δεν μπορεί να ερμηνεύσει την ύπαρξη υπεραγωγών υψηλών θερμοκρασιών. Έτσι η θεωρητική κατανόηση των υπεραγωγών υψηλής θερμοκρασίας αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα ανοιχτά προβλήματα της φυσικής συμπυκνωμένης ύλης.

3. Υπεραγωγοί Τύπου II

Στην θεωρία Ginsburg – Landau εμφανίζονται δύο εγγενείς κλίμακες μήκους, το μήκος συσχέτισης

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m_e |a|}}, \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

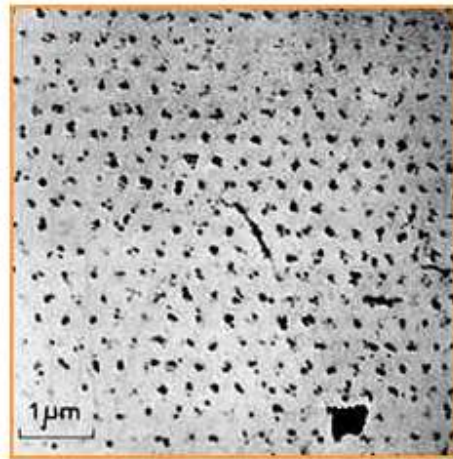
το οποίο περιγράφει την τάξη μεγέθους των αποστάσεων μεταξύ των σημείων που συσχετίζονται, λόγω της μεταβολής της φάσης του Ψ , και το μήκος διείσδυσης

$$\lambda = \sqrt{\frac{2m_e c^2 \beta}{16\pi^2 e^4 |a|}}, \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

το οποίο περιγράφει την τάξη μεγέθους του βάθους στο οποίο εισχωρεί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του υπεραγωγού. Το πηλίκο των δύο αυτών μεγεθών είναι η παράμετρος Ginsburg - Landau

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για $\kappa > 1/\sqrt{2}$ μπορούμε να έχουμε λύσεις της θεωρίας, οι οποίες περιγράφουν δίνες και επιτρέπουν την μαγνητική ροή από τον «σωλήνα» που σχηματίζουν. Γύρω από τα φλαξόνια αναπτύσσονται επιφανειακά υπερ-ρεύματα. Ο μηχανισμός αυτός περιγράφει την μικτή κατάσταση ή κατάσταση Schubnikov των υπεραγωγών τύπου II. Σε ένα ιδανικό υπεραγωγό τα φλαξόνια δημιουργούν το λεγόμενο πλέγμα Abrikosov, το οποίο είναι τριγωνικό. Καθώς πλησιάζουμε την κανονική κατάσταση του μετάλλου, η πυκνότητα των φλαξονίων αυξάνεται μέχρις ότου η αλληλοεπικάλυψη τους είναι τόσο μεγάλη, όπου επιτρέπεται η ελεύθερη ροή του μαγνητικού πεδίου από ολόκληρη την επιφάνεια του υπεραγωγού.



Εικόνα 6: Η πρώτη εικόνα του πλέγματος Abrikosov.

Αν θεωρήσουμε έναν υπεραγωγό άπειρης έκτασης, τότε η εξίσωση που περιγράφει ένα φλαξόνιο θα είναι

$$\mathbf{b} + \lambda^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \Phi_0 \delta(\rho) \mathbf{k} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Με λύση

$$b = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Όπου K_0 η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης. Στο κέντρο του φλαξονίου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$b(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln(\kappa) \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Το φλαξόνιο έχει ενέργεια ανά μονάδα μήκους

$$\varepsilon_0 = \frac{\Phi_0}{8\pi} b(0) = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \ln(\kappa) \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

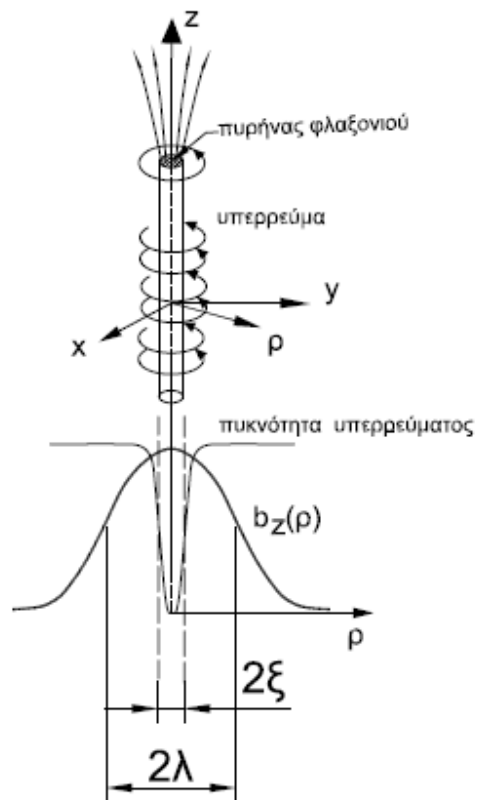
οπότε είναι ευνόητο ότι απαιτείται παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου για να είναι ενεργειακά επιτρεπτός ο σχηματισμός του. Συγκεκριμένα η τιμή του πρώτου κρίσιμου μαγνητικού πεδίου δίνεται από την σχέση

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\ln(\kappa) + 0.08) \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Προφανώς η ακριβής λύση των εξισώσεων Ginsburg – Landau είναι υπερβολικά δύσκολή, έτσι ένα σύστημα με πολλά φλαξόνια, προσεγγίζεται από πολλές λύσεις μεμονωμένων φλαξονίων. Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά καλή όταν $H \ll H_{c2}$, όπου H_{c2} είναι το κρίσιμο μαγνητικό πεδίο που χαρακτηρίζει την μετάβαση από την μικτή φάση στην κανονική φάση. Στην περιοχή αυτή η πυκνότητα των φλαξονίων είναι μικρή, οπότε η αλληλοεπικάλυψη τους είναι μικρή, με αποτέλεσμα η προσέγγιση του συστήματος ως επαλληλία πολλών μεμονωμένων φλαξονίων να είναι καλή. Η τιμή του δεύτερου κρίσιμου μαγνητικού πεδίου δίνεται από την σχέση

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Όπως ήδη αναφέραμε η μετάβαση αυτή χαρακτηρίζεται από την αλληλοεπικάλυψη των φλαξονίων σε βαθμό όπου η ροή του εξωτερικού πεδίου είναι επιτρεπτή από ολόκληρη την επιφάνεια του υπεραγωγού.



Εικόνα 7: Η δομή ενός φλαζονίου. Ο πυρήνας χαρακτηρίζεται από διάσταση της τάξης του μήκους συσχέτισης ξ , ενώ γύρω από το φλαζόνιο ρέει υπερ-ρευμα, το οποίο εισρέει σε βάθος της τάξης μεγέθους του μήκους London λ .

4. FluxFlowResistivity

Θεωρούμε έναν υπεραγωγό τύπου II, ο οποίος βρίσκεται σε μικτή κατάσταση, καθώς του εφαρμόζεται εξωτερικό μαγνητικό πεδίο κάθετα στην επιφάνειά του. Ο υπεραγωγός τροφοδοτείται με ηλεκτρικό ρεύμα, όποτε διαρρέεται από ηλεκτρόνια, τα οποία προκαλούν την ανάπτυξη χωρικής πυκνότητας ρεύματος \mathbf{j} . Το ρεύμα αυτό είναι ρεύμα μεταφοράς. Ωστόσο στον υπεραγωγό υπάρχει και το επιφανειακό ρεύμα, το οποίο αναπτύσσεται γύρω από τα φλαξόνια. Έτσι η δύναμη Lorentz που αναπτύσσεται ανάμεσα στα φλαξόνια και τα ηλεκτρόνια που διαρρέουν τον υπεραγωγό θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Η δύναμη ανά μονάδα μήκους του φλαξονίου θα είναι

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \Phi_0 \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Υπό την επίδραση της δύναμης Lorentz τα φλαξόνια θα τεθούν σε κίνηση, έτσι με αποτέλεσμα την ανάπτυξη Ηλεκτρεγερτικής Δύναμης. Το ηλεκτρικό πεδίο που θα αναπτυχθεί δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v}_L = \frac{n}{c} \Phi_0 \times \mathbf{v}_L \quad (3.1)$$

όπου n είναι η πυκνότητα φλαξονίων ανά μονάδα εμβαδού και \vec{v}_L η ταχύτητά τους. Τα ηλεκτρόνια του ρεύματος μεταφοράς θα αρχίσουν να αντιλαμβάνονται μια πτώση τάσης, η οποία είναι απόρροια της εμφάνισης αντίστασης. Ωστόσο αν η κίνηση των φλαξονίων ήταν εντελώς ελεύθερη θα έπρεπε να εμφανίζεται επιτάχυνση και κατ' επέκταση διαρκής αύξηση του ηλεκτρικού πεδίου. Το γεγονός ότι δεν παρατηρείται τέτοια αύξηση οφείλεται στην δράση δυνάμεων ιξώδους. Έτσι αντισταθμίζεται η δράση της δύναμης Lorentz. Η συνθήκη ισορροπίας θα είναι

$$\eta \mathbf{v}_L = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \Phi_0 \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Η ειδική αντίσταση θα δίνεται από την σχέση

$$\rho_f = \frac{E}{j} = \frac{B\Phi_0}{\eta c^2} \quad (3.2)$$

Για να μπορέσουμε να περάσουμε σε μακροσκοπικές παραμέτρους θα πρέπει να βασιστούμε σε ένα πρότυπο το οποίο να περιγράφει το φαινόμενο αυτό. Μια προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε ότι το ρεύμα μεταφοράς αποφεύγει τα ακίνητα φλαξόνια, διερχόμενο μέσα από περιοχές που βρίσκονται σε υπεραγώγιμη κατάσταση, ενώ διέρχεται μέσα από τον πυρήνα των κινούμενων φλαξονίων, ο οποίος βρίσκεται σε κανονική κατάσταση. Μέσω αυτής την προσέγγισης καταλήγουμε ότι η ειδική αντίσταση στην μικτή κατάσταση θα σχετίζεται με την ειδική αντίσταση στην κανονική κατάσταση μέσω της σχέσης

$$\rho_f = \rho_n \frac{B}{H_{c2}} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Η εμφάνιση αντίστασης στην μικτή κατάσταση είναι απογοητευτική για ενδεχόμενες τεχνολογικές εφαρμογές, καθώς η μικτή κατάσταση είναι πολύ πιο εύκολα επιτεύξιμη, σε σχέση με την υπεραγώγιμη. Ωστόσο τυχαίνει δυο ανεπιθύμητα χαρακτηριστικά να διευκολύνουν εν τέλει την κατάσταση αναιρώντας το ένα την επίδραση του άλλου. Η ύπαρξη πλεγματικών ατελειών οδηγεί στην δέσμευση των φλαξονίων και εν τέλει στην αποτροπή της εμφάνισης αντίστασης. Έτσι η ύπαρξη πλεγματικών ατελειών καταλήγει να είναι σωτήρια για την διατήρηση της μηδενικής αντίστασης των υπεραγωγών τύπου II στην κατάσταση Schubnikov.

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες της ακριβούς αλληλεπίδρασης των φλαξονίων με τις ατέλειες, μπορούμε να αναζητήσουμε το αίτιο της δέσμευσης στο ενεργειακό ισοζύγιο. Η βασική ιδέα είναι ότι η υπεραγώγιμη κατάσταση έχει μικρότερη ελεύθερη ενέργεια από την κανονική κατάσταση για θερμοκρασία και εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχούν σε υπεραγώγιμη κατάσταση. Ο πυρήνας του φλαξονίου βρίσκεται σε κανονική κατάσταση, έτσι καθώς κινείται καταστρέφεται η υπεραγωγιμότητα της περιοχής που καταλαμβάνει, ενώ ταυτόχρονα η περιοχή που καταλάμβανε περνά σε υπεραγώγιμη κατάσταση. Αν ένα τμήμα της περιοχής στην οποία μεταβεί το φλαξόνιο δεν είναι σε υπεραγώγιμη κατάσταση, όπως συμβαίνει με τις ατέλειες, τότε εξοικονομείται η ενέργεια μετατροπής του τμήματος την περιοχής αυτής σε υπεραγώγιμη, σε σχέση με την μετάβαση σε μια περιοχή η οποία θα ήταν εξ ολοκλήρου υπεραγώγιμη. Άρα ενεργειακά προκρίνεται η κατάληψη των περιοχών που περιλαμβάνουν ατέλειες. Αντίστοιχα η μετακίνηση από της περιοχές αυτές απαιτεί ενέργεια, ως εκ τούτου τα φλαξόνια «καρφώνονται» στις ατέλειες. Δεδομένου ότι τα φλαξόνια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, με αποτέλεσμα δυο ελεύθερα φλαξόνια να απωθούνται, το κάρφωμα ορισμένων φλαξονίων μπορεί να οδηγήσει σε σταθεροποίηση ολόκληρου του πλέγματος Abrikosov.

Θεωρώντας μια μέση μέγιστη δύναμη καρφώματος ανά μονάδα μήκος f_p , τα φλαξόνια θα παραμένουν καρφωμένα όσο η δύναμη Lorentz ανά μονάδα μήκους είναι μικρότερη από την δύναμη καρφώματος ανά μονάδα μήκους. Έτσι θα υπάρχει μια κρίσιμη τιμή ρεύματος για την οποία θα ισχύει

$$\mathbf{f}_p = -\frac{1}{c} \mathbf{j}_c \times \Phi_0 \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

όπου j_c είναι η κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος. Στο μοντέλο κρίσιμης κατάστασης του Bean δεν υπάρχει εξάρτηση της κρίσιμης τιμής του ρεύματος από το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο. Για τιμές ρεύματος μεγαλύτερες από την κρίσιμη τα φλαξόνια τίθενται πάλι σε κίνηση. Θεωρώντας ότι και σε αυτή την περίπτωση αναπτύσσεται δύναμη ιξώδους θα έχουμε

$$\eta \mathbf{v}_L = \frac{1}{c} (\mathbf{j} - \mathbf{j}_c) \times \Phi_0, \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

ενώ το ηλεκτρικό πεδίο θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{E} = \frac{B\Phi_0}{\eta c^2} (\mathbf{j} - \mathbf{j}_c). \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Συνήθως η κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος είναι αρκετά μικρότερη από την πυκνότητα ρεύματος αποδέσμευσης j_0 , η οποία στα πλαίσια της θεωρίας Ginzburg – Landau δίνεται από την σχέση

$$j_0 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{c \varepsilon_0}{\xi \Phi_0}. \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Η κρίσιμη κατάσταση είναι μετασταθής, με αποτέλεσμα να καταστρέφεται μέσω θερμικών ή κβαντικών διακυμάνσεων. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως ερπυσμός.

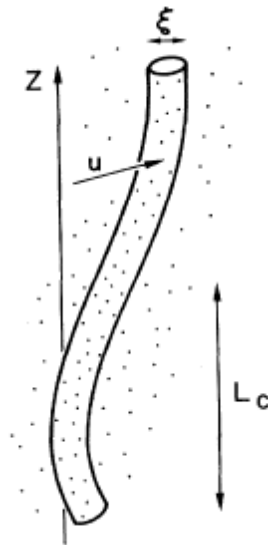
5. Κάρφωμα Φλαξονίων

Με βάση όσα αναφέραμε η φαινομενολογία των υπεραγωγών τύπου II, στην κατάσταση Schubnikov καθορίζεται από την συμπεριφορά των φλαξονίων. Η διατήρηση της υπεραγωγίμης κατάστασης παρουσία εξωτερικού ρεύματος οφείλεται στο κάρφωμα των φλαξονίων, δηλαδή στο γεγονός ότι οι ατέλειες συμβάλουν στην σταθεροποίηση του πλέγματος Abrikosov.

Ας θεωρήσουμε την ύπαρξη ενός φλαξονίου μοναδικού στον υπεραγωγό. Το φλαξόνιο θα υπόκειται σε ένα τυχαίο δυναμικό κάρφωματος ε_{pin} , το οποίο μπορεί να περιγραφεί μέσω της συνάρτησης συσχετισμού

$$K(z - z', \mathbf{u} - \mathbf{u}') = \varepsilon_{pin}(z, \mathbf{u}) \varepsilon_{pin}(z', \mathbf{u}'), \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

όπου $\mathbf{u}(z)$ είναι η μετατόπιση του φλαξονίου.



Εικόνα 8: Η γεωμετρία της δέσμευσης του φλαξονίου.

Θα εστιάσουμε στο κάρφωμα που οφείλεται σε ατέλειες, οι οποίες έχουν διαστάσεις μικρότερες από το μήκος συσχέτισης ξ . Θεωρούμε ότι οι ατέλειες έχουν αμελητέο μέγεθος κατά μήκος του φλαξονίου, ενώ το εγκάρσιο μέγεθος τους είναι της τάξης του μήκους συσχέτισης $r_p \ll \xi$.

Το δυναμικό κάρφωματος σχετίζεται με την διακύμανση των συντελεστών a και m της θεωρίας Ginzburg – Landau ως

$$\varepsilon_{pin}(z, \mathbf{u}) = \int d^2R U_{pin}(\mathbf{r}) p(\mathbf{R} - \mathbf{u}), \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

όπου \mathbf{R} είναι η εγκάρσια μετατόπιση.

Οι συναρτήσεις U_{pin} και p εξαρτώνται από το είδος της παραμέτρου που υφίσταται διακύμανση (μέση ελεύθερη διαδρομή ή κρίσιμη θερμοκρασία T_c). Συγκεκριμένα

$$U_{pin}(\mathbf{r}) = \begin{cases} |\Psi_0|^2 \delta a(\mathbf{r}), & \text{για } \delta T_c \text{ κάρφωμα} \\ \frac{a |\Psi_0|^2 \delta m(\mathbf{r})}{m}, & \text{για } \delta l \text{ κάρφωμα} \end{cases} \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

και

$$p(\mathbf{R}) = \begin{cases} 1 - |\psi_v(\mathbf{R})|^2, & \text{για } \delta T_c \text{ κάρφωμα} \\ \xi^2 |\nabla \psi_v(\mathbf{R})|^2, & \text{για } \delta l \text{ κάρφωμα} \end{cases} \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

όπου ψ_v είναι η λύση των εξισώσεων Ginzburg – Landau για μια δίνη προσανατολισμένη παράλληλα στον άξονα z . Ασυμπτωτικά θα ισχύει ότι

$$\psi_v(\mathbf{R}) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 2\xi^2}} e^{i\varphi} \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

Μπορεί να υπολογίσει κανείς ότι η συνάρτηση συσχετισμού είναι

$$K(z, \mathbf{u}) = \gamma \xi^4 k(\mathbf{u}), \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

όπου

$$\gamma = 2\pi \frac{\gamma_a}{\alpha^2} \left(\frac{H_c^2}{4\pi} \right)^2 \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

για κάρφωμα που οφείλεται σε διακυμάνσεις της κρίσιμης θερμοκρασίας και

$$\gamma = \frac{14\pi}{15} \frac{\gamma_m}{m^2} \left(\frac{H_c^2}{4\pi} \right)^2 \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

για κάρφωμα που οφείλεται σε διακυμάνσεις της κρίσιμης μέσης ελεύθερης διαδρομής. Αντίστοιχα η συνάρτηση $k(\vec{u})$ είναι διαφορετική στις δύο αυτές περιπτώσεις, αλλά ισχύει ότι $k(\mathbf{0}) = \xi^{-2}$.

Για την περίπτωση μιας σκληρής – άκαμπτης δίνης μήκους L η μέση ενέργεια καρφώματος $\varepsilon_{pin}(L)$ μηδενίζεται, ωστόσο

$$\varepsilon_{pin}^2(L) = \int dz dz' \varepsilon_{pin}(z, \mathbf{0}) \varepsilon_{pin}(z', \mathbf{0}) = \gamma \xi^2 L \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Το γεγονός ότι το ενεργό δυναμικό καρφώματος $\varepsilon_{pin}^2(L)^{1/2}$ δεν είναι ανάλογο με το μήκος της δίνης είναι απόρροια του ανταγωνισμού ανάμεσα στα ελκτικά κέντρα. Έστω n_i η πυκνότητα των κέντρων και f_{pin} η δύναμη καρφώματος. Μόνο ατέλειες οι οποίες απέχουν λιγότερο από ένα μήκος συσχέτισης ξ συνεισφέρουν, στην δυναμική ενέργεια. Ο όγκος που αντιστοιχεί είναι $V = \xi^2 L$, έτσι θα ισχύει

$$\varepsilon_{pin}^2(L)^{1/2} = \left(n_i f_{pin}^2 \xi^2 L \right)^{1/2} \xi, \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

από όπου υπολογίζουμε ότι

$$\gamma = n_i f_{pin}^2 \xi^2. \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε συνηγορεί στο γεγονός μια σκληρή δίνη δεν θα μπορούσε να είναι ευσταθής, καθώς η δύναμη Lorentz είναι γραμμική στο μήκος της δίνης. Έτσι η τιμή του κρίσιμου ρεύματος θα μηδενιζόταν. Μια πραγματική δίνη εμφανίζει ελαστικότητα, οπότε αναμένουμε να υπάρχουν διορθώσεις στην συμπεριφορά του ενεργού δυναμικού καρφώματος. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι υπάρχει ένα συλλογικό μήκος καρφώματος L_c πέρα από το οποίο η μετατόπιση της δίνης ξεπερνά την χαρακτηριστική κλίμακα διακυμάνσεων του τυχαίου δυναμικού καρφώματος. Τότε κάθε τμήμα μήκους L_c της δίνης καρφώνεται ανεξάρτητα με αποτέλεσμα η τιμή του κρίσιμου ρεύματος να είναι μη

μηδενική. Για μια δίνη μήκους L στην συνολική δυναμική ενέργεια συνεισφέρουν η ελαστική ενέργεια, η ενέργεια καρφώματος και η δυναμική ενέργεια λόγω της δύναμης Lorentz

$$V = \varepsilon_0 \frac{u^2}{L} - (\gamma \xi^2 L)^{1/2} - j \frac{\Phi_0}{c} Lu \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για μηδενική πυκνότητα ρεύματος ελαχιστοποιούμε την συνολική δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους V/L , οπότε και υπολογίζουμε ότι το συλλογικό μήκος καρφώματος είναι

$$L_c = \left(\frac{\varepsilon_0^2 \xi^2}{\gamma} \right)^{1/3} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Η δυναμική ενέργεια καρφώματος γίνεται

$$U_c = (\gamma \xi^2 L_c)^{1/2} = (\gamma \varepsilon_0 \xi^4)^{1/3} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Η ισορροπία ανάμεσα στην δύναμη Lorentz και την δύναμη καρφώματος δίνει την τιμή της κρίσιμης πυκνότητας ρεύματος

$$j_c = \frac{c}{\Phi_0} \left(\frac{\gamma}{L_c} \right)^{1/2} = j_0 \left(\frac{\xi}{L_c} \right)^2 \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για ασθενές κάρφωμα θα ισχύει ότι $\xi \ll L_c$, και επέκταση η κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος θα είναι πολύ μικρότερη από την πυκνότητα ρεύματος αποδέσμευσης $j_c \ll j_0$. Αν $\xi \cong L_c$ η προσέγγιση καταρρέει καθώς η παραμόρφωση της δίνης παύει να περιγράφεται μέσω ελαστικότητας.

6. Ερπυσμός Φλαξονίων

Όπως αναφέραμε η κρίσιμη κατάσταση είναι μετασταθής. Σε κλασική προσέγγιση οι θερμικές διακυμάνσεις μπορούν να οδηγήσουν στην κατάρρευσή της. Η ταχύτητα των φλαξονίων θα ακολουθεί μια σχέση της μορφής

$$u = u_0 e^{-\frac{U(j)}{T}}, \quad (5.1)$$

όπου $U(j)$ είναι το φράγμα δυναμικού που υφίσταται λόγω του καρφώματος. Η πυκνότητα ρεύματος ακολουθεί έναν δυναμικό νόμο της μορφής

$$\partial_t j = -\frac{j_c}{\tau_0} e^{-\frac{U(j)}{T}} \quad (5.2)$$

Η κλίμακα ενέργεια του φράγματος δυναμικού καθορίζεται από την δυναμική ενέργεια καρφώματος U_c , ενώ το γεγονός ότι το φράγμα μηδενίζεται για την κρίσιμη τιμή του ρεύματος μεταφοράς υποδηλώνει ότι

$$U(j \rightarrow j_c) = U_c \left(1 - \frac{j}{j_c}\right)^a \quad (5.3)$$

Ο εκθέτης a δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω της φαινομενολογικής προσέγγισης που έχουμε πραγματοποιήσει. Στο μοντέλο των Anderson και Kim ο εκθέτης λαμβάνει την τιμή 1

Μια άλλη περιοχή που ενδιαφέρει είναι το όριο όπου η πυκνότητα ρεύματος μηδενίζεται. Η περιοχή αυτή είναι γνωστή ως υαλώδης φάση του υπεραγωγού. Στο μοντέλο του συλλογικού καρφώματος προκύπτει ότι

$$U(j) = \frac{U_c}{\mu} \left(\left(\frac{j}{j_c} \right)^\mu - 1 \right) \quad (5.4)$$

Το πρότυπο της υαλώδους φάσης αντιστοιχεί στο όριο $\mu \rightarrow 0$ οπότε και θα ισχύει

$$U(j) = U_c \ln\left(\frac{J}{J_c}\right) \quad (5.5)$$

Στην φάση αυτή η ταχύτητα των φλαζονίων θα δίνεται από την σχέση

$$u = u_0 \left(\frac{J}{J_c}\right)^{\frac{U_c}{T}} \quad (5.6)$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο αντισταθμίζει την δύναμη Lorentz, θα ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$E \propto J^n \quad (5.7)$$

Επομένως στην υαλώδη φάση ο υπεραγωγός συμπεριφέρεται σαν ένας μη γραμμικός ωμικός αγωγός.

7. Ηλεκτροδυναμική Υπεραγωγών παρουσία κέντρων καρφώματος των φλαξονίων

Το μαγνητικό πεδίο σε ένα υπεραγωγό δευτέρου είδους διεισδύει υπό μορφή φλαξονίων Abrikosov. Όταν το διεισδύων μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται με το χρόνο ένα ηλεκτρικό πεδίο αναπτύσσεται στο εσωτερικό του υπεραγωγού σύμφωνα με το νόμο του Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, όπου \mathbf{B} είναι η μαγνητική επαγωγή. Στο εσωτερικό ενός υπεραγωγού δευτέρου είδους το πεδίο \mathbf{B} διαφέρει από το \mathbf{H} (στο κενό ισχύει η σχέση $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$). Η χρονική μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής μπορεί να οφείλεται στη μεταβολή του εξωτερικά επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου ή στο σταμάτημα της μεταβολής λόγω της μείωσης των υπεραγωγίμων ρευμάτων που προκαλείται από την κίνηση των φλαξονίων (η οποία προκαλεί κατανάλωση ενέργειας). Τα φλαξόνια οδηγούνται (driven by) από την πυκνότητα της δύναμης Lorentz $\mathbf{B} \times \mathbf{J}$ που ασκείται [2,6,15] από τα υπεραγωγίμα ρεύματα πυκνότητας \mathbf{J} . Η προκαλούμενη κίνηση των φλαξονίων με πεδίο ταχυτήτων \mathbf{v} επάγει ένα ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ το οποίο βεβαίως συμπίπτει με αυτό που δίνει ο νόμος του Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$. Εδώ αγνοούμε τη χρονική μεταβολή του επιφανειακού ρεύματος Meissner το οποίο ρέει στο εντός του μαγνητικού μήκους διείσδυσης ($H_{c1} = 0$) οπότε στον υπεραγωγό θα ισχύει $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ και $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. Σ' ένα ιδανικό υπεραγωγό δευτέρου είδους (τέλεια κρυσταλλικότητα, χωρίς προσμίξεις), στην κατάσταση Abrikosov, η εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου προκαλεί κίνηση των φλαξονίων με γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου-πυκνότητας ρεύματος, $E = \rho_n J$ όπου $\rho_n = \rho_n B / B_{c2}$, και ρ_n η ειδική ηλεκτρική αντίσταση στην κανονική κατάσταση (όταν ο υπεραγωγός βρίσκεται πάνω από το δεύτερο κρίσιμο πεδίο B_{c2}). Γραμμική σχέση $E(J)$ παρατηρείται επίσης όταν το κάρφωμα των φλαξονίων είναι αμελητέο. Αυτό συμβαίνει όταν η θερμοκρασία είναι κοντά στο δεύτερο κρίσιμο μαγνητικό πεδίο ή πυκνότητα ρεύματος είναι πολύ μεγάλη. Τέλος γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος παρατηρείται στην περιοχή της θερμικά υποβοηθούμενης ροής φλαξονίων (TAF thermal assisted flux flow regime). Σ' αυτή την περιοχή ισχύει

$$\rho = \rho_{ff} \exp(-U / k_B T) \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

όπου U είναι η ενέργεια ενεργοποίησης.

Όταν το κάρφωμα των φλαξονίων είναι ισχυρό τότε η σχέση $E(J)$ είναι μη γραμμική. Για την περιγραφή της μη γραμμικής σχέσης $E(J)$ έχουν προταθεί διάφορα πρότυπα. Το πρώτο πρότυπο προτάθηκε από τον Anderson, το οποίο προβλέπει $E(J) = E_c \exp(J/J_c - 1)$. Την εποχή που ανακαλύφθηκαν οι υπεραγωγοί με βάση τα οξείδια του χαλκού είχαν προταθεί τα πρότυπα συλλογικού καρφώματος (collective creep) και υαλώδους κατάσταση φλαξονίων (vortex glass state) τα οποία προβλέπουν $E(J) = E_c \exp(-U(J)/k_B T)$ με $U = U_0 [(J_c/J)^\beta - 1]$, όπου U_0 είναι μία χαρακτηριστική ενέργεια ενεργοποίησης, $\beta > 0$ και J_c η κρίσιμη

πυκνότητα ρεύματος [ΑΝΑΦΟΡΑ BLATERetal] . Μία ρεαλιστική προσέγγιση των μη γραμμικών σχέσεων $E(\mathbf{J})$ είναι ο νόμος δύναμης $E(\mathbf{J})=E_c(\mathbf{J}/J_c)^n$. Στα επόμενα θα περιοριστούμε σ' αυτόν το νόμο.

Για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά του υπεραγωγού στην περίπτωση μη γραμμικής σχέσης $E(\mathbf{J})$ θα αγνοήσουμε το ρεύμα μετατόπισης στο νόμο Ampere-Maxwell, άρα το μαγνητικό πεδίο και τα ρεύμα ικανοποιούν την εξίσωση

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Στην πλέον γενική της μορφή η χαρακτηριστική τάσης – ρεύματος θα έχει την μορφή

$$\mathbf{E} = R(\mathbf{B}, \mathbf{j}) \mathbf{j} \quad (6.1)$$

Ο όρος $R(\mathbf{B}, \mathbf{j})$ είναι η γενικευμένη αντίσταση. Μπορούμε να αντιστρέψουμε την ανωτέρω σχέση

$$\mathbf{j} = G(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \mathbf{E} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Ο όρος $G(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ είναι η γενικευμένη αγωγιμότητα. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Στην ωμική-γραμμική περίπτωση θα έχουμε $G(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = \sigma$, τότε ο νόμος Ampere γίνεται

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} \quad (6.2)$$

Δρούμε με τον τελεστή του στροβιλισμού και χρησιμοποιούμε τον νόμο Faraday

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Και τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό καταλήγουμε ότι το μαγνητικό πεδίο ικανοποιεί εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Δρούμε με τον τελεστή του στροβιλισμού στον νόμο Faraday, στο δεξί μέλος εναλλάσσουμε την χρονική παράγωγο με την δράση του στροβιλισμού και χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ampere

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Στο αριστερό μέλος χρησιμοποιούμε την διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

και τον νόμο του Gauss απουσία φορτίου, ενώ στο δεξί αντικαθιστούμε τον νόμο του Ohm. Καταλήγουμε ότι και το ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιεί εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{E} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για την μη γραμμική περίπτωση η διαδικασία είναι αντίστοιχη. Για ευκολία θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου $G(\mathbf{B}, \mathbf{E}) = G(\mathbf{E})$ και $R(\mathbf{B}, \mathbf{j}) = R(\mathbf{j})$. Πολλαπλασιάζουμε τον νόμο του Ampere με την γενικευμένη αντίσταση και εμφανίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο

$$R(\mathbf{j}) \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 R(\mathbf{j}) \mathbf{j} = \mu_0 \mathbf{E} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Δρούμε με τον τελεστή του στροβιλισμού και χρησιμοποιούμε τον νόμο του Faraday. Η εξίσωση που ικανοποιεί το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left(R \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \right) \nabla \times \mathbf{B} \right) \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για το ηλεκτρικό πεδίο δρούμε με τον τελεστή του στροβιλισμού στον νόμο του Faraday και χρησιμοποιούμε τον νόμο Ampere

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \quad (6.3)$$

Αντικαθιστούμε την χαρακτηριστική ρεύματος τάσης και καταλήγουμε στην εξίσωση που ακολουθεί το ηλεκτρικό πεδίο

$$\frac{\partial}{\partial t} (G(\mathbf{E})\mathbf{E}) = \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{E} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι και οι δυο μη γραμμικές, ωστόσο είναι διαφορετικής μορφής, γεγονός που μπορεί να επηρεάσει την επίλυση τους. Το σημαντικό είναι ότι όσο η γενικευμένη αντίσταση και αγωγιμότητα δεν εξαρτώνται από το μαγνητικό πεδίο οι εξισώσεις είναι αποζευγμένες. Στην γενική περίπτωση οι εξισώσεις είναι συζευγμένες.

Για να προχωρήσουμε θεωρούμε ότι η χαρακτηριστική ρεύματος - τάσης είναι της μορφής $E \sim j^a$, η οποία αντιστοιχεί στην υαλώδη φάση του υπεραγωγού. Συγκεκριμένα θα έχουμε

$$\mathbf{E} = E_o \left(\frac{j}{j_o(B)} \right)^{a-1} \frac{\mathbf{j}}{j_o(B)} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για $a=1$ έχουμε την ωμική περίπτωση, ενώ για $a \rightarrow \infty$ έχουμε ιδανικό υπεραγωγό τύπου 2, όπου θα ισχύει πάντα $j_o(B) = j_c(B)$, σε συμφωνία με το μοντέλο της κρίσιμης κατάστασης του Bean. Η γενικευμένη αντίσταση δίνεται από την σχέση

$$R(\mathbf{j}) = \frac{E_o}{j_o(B)} \left(\frac{j}{j_o(B)} \right)^{a-1} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για να υπολογίσουμε την γενικευμένη αγωγιμότητα πρέπει να αντιστρέψουμε την χαρακτηριστική τάσης ρεύματος. Έχουμε ότι

$$\frac{E}{E_o} = \left(\frac{j}{j_o(B)} \right)^a \Rightarrow j = j_o(B) \left(\frac{E}{E_o} \right)^{1/a} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Οπότε καταλήγουμε ότι

$$\mathbf{j} = j_o(B) \left(\frac{\mathbf{E}}{E_o} \right)^{\frac{a-1}{a}} \frac{\mathbf{E}}{E_o} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Η γενικευμένη αγωγιμότητα δίνεται από την σχέση

$$G(\mathbf{E}) = \left(\frac{\mathbf{E}}{E_o} \right)^{\frac{1-a}{a}} \frac{j_o(B)}{E_o} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για ευκολία σε όσα ακολουθούν θεωρούμε ότι το j_o δεν εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο.

8. Error! Bookmark not defined.Πρότυπο μονοδιάστατου υπεραγωγού

Στην παρούσα διπλωματική θα εφαρμόσουμε το γενικό φορμαλισμό στην περίπτωση μίας άπειρης πλάκας πάχους a η οποία είναι παράλληλη στο επίπεδο yz (δες σχήμα 1). Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα- z $\mathbf{H}_a = H_a \mathbf{e}_z$. Λόγω της συμμετρίας της συγκεκριμένης περίπτωσης το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από την υπεραγώγιμη πλάκα θα είναι παράλληλο με το άξονα z και θα εξαρτάται μόνο από την συντεταγμένη x . Η πυκνότητα ρεύματος και το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι παράλληλα με τον άξονα y και θα εξαρτώνται από την συντεταγμένη x . Άρα με βάση την συμμετρία έχουμε:

$$\mathbf{H}(x) = H(x)\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{B}(x) = \mu_0 \mathbf{H}(x)$$

$$\mathbf{J}(x) = J(x)\hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mathbf{E}(x) = E(x)\hat{\mathbf{e}}_y$$

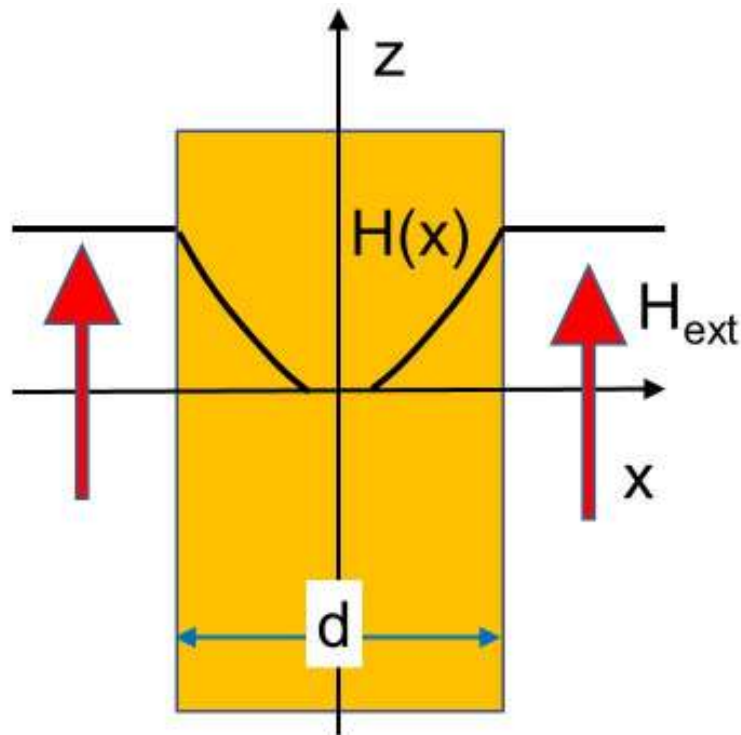
Error! Bookmark not defined.

Υπενθυμίζουμε ότι στην ανάλυση μας υποθέτουμε ότι $H_{c1}=0$, άρα $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$. Επιπρόσθετα ο υπεραγωγός περιγράφεται από μία σχέση «δύναμης» όσον αφορά τη σχέση ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n$$

Error! Bookmark not defined.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο με την πυκνότητα ρεύματος.



Εικόνα 9: Άπειρη υπεραγώγιμη πλάκα πάχους d σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

Μπορούμε να ορίσουμε τη μαγνήτιση σαν τη μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου από τη σχέση

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{L_y L_z d} = \frac{1}{L_y L_z d} 2 \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} d^3 x = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} x J(x) dx \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

όπου L_y και L_z το μήκος της πλάκας παράλληλα στο y και z άξονα, αντίστοιχα. Ο παράγοντας 2 στην προηγούμενη σχέση προέρχεται από τα εγκάρσια ηλεκτρικά ρεύματα (J_x) που ρέουν στα άκρα (στο άπειρο) της πλάκας. Η συνεισφορά αυτών των ρευμάτων είναι ίση με αυτή των διαμηκών (J_y) [αναφορά Πίσσας σημειώσεις]. Στην ομογενή στατική προσέγγιση (αγνοούμε το ρεύμα μετατόπισης) ο νόμος του Ampère δίνει :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & H(x) \end{pmatrix} = J(x) \hat{\mathbf{e}}_y \text{ Error! Bookmark not defined.}$$

ή

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = -J(x,t) . \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Ο νόμος του Faraday για το συγκεκριμένο πρόβλημα παίρνει τη μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E(x) & 0 \end{pmatrix} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

ή

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Το μαγνητικό πεδίο μπορεί να γραφτεί σαν υπέρθεση ενός διανυσματικού πεδίου \mathbf{h} που εξαρτάται από το x και το χρόνο, t , και του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου που εξαρτάται μόνο από το χρόνο:

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} + \mathbf{H}_{ext} = [h(x,t) + H_{ext}(t)]\hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Το πεδίο h παίζει το ρόλο της τοπικής μαγνήτισης. Στη συγκεκριμένη γεωμετρία η μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου (μαγνήτιση σχέση **Error! Bookmark not defined.**) ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα της τοπικής μαγνήτισης σε όλο το πλάτος της πλάκας [1, αναφορά Brandtreview]

$$M = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} h(x) dx \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Στα επόμενα θα το ονομάζουμε τοπική μαγνήτιση. Αν λάβουμε υπόψη ότι $\partial H / \partial x = \partial h / \partial x$ (το εξωτερικό πεδίο είναι ομογενές, εξαρτάται μόνο από χρόνο) και το νόμο δύναμης της σχέσης $E(J)$ ο νόμος του Faraday και του Ampere (για n περιπτώσεις ακέραιος), δίνουν

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[E_c \left(\frac{J(x,t)}{J_c} \right)^n \right] &= -\mu_0 \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{dH_{ext}(t)}{dt} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[E_c \left(\frac{-\partial H / \partial x}{J_c} \right)^n \right] &= -\mu_0 \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{dH_{ext}(t)}{dt} \right) \Rightarrow \\ \frac{E_c}{\mu_0 J_c^n} n \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{dH_{ext}(t)}{dt} \right) \Rightarrow \\ \frac{E_c}{\mu_0 J_c^n} n \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{dH_{ext}(t)}{dt} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{E_c}{\mu_0 J_c^n} n \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{dH_{ext}(t)}{dt} = \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}}$$

Στο τελευταίο βήμα λάβαμε υπόψη ότι

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η επιλογή του n να είναι περιττός δεν περιορίζει την ανάλυση που κάνουμε. Απλά απλοποιεί τη μορφή που παίρνει η εξίσωση που ικανοποιεί η τοπική μαγνήτιση. Σύμφωνα με σχέση **Error! Bookmark not defined.** η τοπική μαγνήτιση υπακούει σε μία μη-γραμμική εξίσωση διάχυσης με σταθερά διάχυσης $E_c / \mu_0 J_c^n$ και “οδηγούσα” δύναμη το ρυθμό dH_{ext}/dt . Οι αρχικές συνθήκες για τη λύση της εξίσωσης **Error! Bookmark not defined.** είναι:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial H(x, 0)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Όπως έχουμε αναφέρει στο θεωρητικό μέρος για $n \rightarrow \infty$ η εξίσωση **Error! Bookmark not defined.** είναι ισοδύναμη με την εξίσωση που περιγράφει την κρίσιμη κατάσταση υπεραγωγού

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \pm J_c \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Το πρόσημο στην προηγούμενη σχέση εξαρτάται από το αν έχουμε αύξηση ή μείωση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Στα ακόλουθα θα περιγράψουμε τον αριθμητικό αλγόριθμο που θα χρησιμοποιήσουμε για τη λύση της εξίσωσης **Error! Bookmark not defined.** Για τον υπολογισμό των παραγώγων χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Υπονήφιοι τύποι για τη χωρική μερική παράγωγο πρώτης τάξης είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &\approx \frac{h(x + \Delta x, t) - h(x, t)}{\Delta x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &\approx \frac{h(x + \Delta x, t) - h(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \end{aligned} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Για τη χωρική μερική παράγωγο δεύτερας τάξης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h'(x + \Delta x, t) - h'(x, t)}{\Delta x} \quad \text{όπου} \quad h'(x) = \frac{h(x + \Delta x, t) - h(x, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h(x + \Delta x, t) - 2h(x, t) + h(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

Error! Bookmark not defined.

Τέλος η χρονική μερική παράγωγος θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \approx \frac{h(x, t + \Delta t) - h(x, t)}{\Delta t} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Με βάση τους τύπους με τις πεπερασμένες διαφορές για τις χωρικές παραγώγους η εξίσωση **Error! Bookmark not defined.** μπορεί να λυθεί με επαναληπτική μέθοδο. Θεωρούμε τα διακριτά χωρικά σημεία και διακριτές στιγμές

$$x_i = i\Delta x, \quad \text{όπου} \quad \Delta x = a / m \quad \text{και} \quad m \text{ άρτιος ακέραιος} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

$$j = j\Delta t, \quad j \in N \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

η τοπική μαγνήτιση τη χρονική στιγμή $t_j + \Delta t$ στη θέση x_i θα δίνεται από τη σχέση:

$$h(x_i, t_j + \Delta t) = h(x_i, t_j) + \left[cn[h'(x_i, t_j)]^{n-1} h''(x_i, t_j) - \frac{dH_{ext}(t_j)}{dt} \right] \Delta t \quad \text{Error! Bookmark not defined}$$

όπου

$$c = \frac{E_c}{\mu_0 J_c^n}$$

Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι η παράμετρος J_c εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία.

Για πρακτικούς λόγους είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες μονάδες

$$a = J_c = E_c = \mu_0 = 1 . \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

Σ' αυτό το σύστημα η εξίσωση της μη γραμμικής διάχυσης, της τοπικής μαγνήτισης μονάδων παίρνει τη μορφή

$$n \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{dH_{ext}(t)}{dt} = \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}$$

Οι επαναφορά των διαστάσεων των φυσικών μεγεθών στο SI μπορεί να γίνει με την βοήθεια των σχέσεων

$$[B] = \mu_0 J_c a$$

$$[H] = J_c a$$

$$[x] = a$$

$$[J] = J_c$$

$$[m] = J_c a^2$$

$$[M] = J_c a$$

$$[t] = \frac{\mu_0 J_c a^2}{E_c}$$

$$[E] = E_c$$

Για να επιλυθεί η εξίσωση διάχυσης της τοπικής μαγνήτισης, θα πρέπει εκτός των αρχικών συνθηκών, να καθοριστεί και ο ρυθμός αλλαγής του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Βασιζόμενοι στη πειραματική μεθοδολογία μαγνητικών μετρήσεων σε υπεραγωγούς δευτέρου είδους, το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μπορεί να μεταβάλλεται είτε γραμμικά με το χρόνο, $H_{ext} = At$, (περίπτωση μαγνητόμετρων SQUID ή ταλαντευόμενου δείγματος) ή, **ημιτονοειδώς** $H_{ext} = H_0 \sin(\omega t)$, (περίπτωση εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας). Σ' αυτή την διπλωματική θα περιοριστούμε σε ημιτονοειδή μεταβολή με το χρόνο του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Συνεπώς θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$H_{ext} = H_0 \sin(2\pi ft) = \text{Im}[H_0 \exp(i2\pi ft)]$$

$$\frac{dH_{ext}(t)}{dt} = H_0 2\pi f \cos(2\pi ft)$$

.Error! Bookmark not defined.

Η μιγαδική εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα $\chi = \chi' - i\chi''$ (με βάση τη σύμβαση για το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο) μπορεί να οριστεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} M &= \text{Im}[\chi H_0 \exp(2\pi ft)] \\ &= \text{Im}[(\chi' - i\chi'')(H_0 \cos(2\pi ft) + iH_0 \sin(2\pi ft))] \\ &= H_0[\chi' \sin(2\pi ft) - \chi'' \cos(2\pi ft)] \end{aligned}$$

Επειδή το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου και η μαγνήτιση θα είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Συνεπώς μπορούμε να αναπτύξουμε τη μαγνήτιση σε σειρά Fourier

$$M(t) = \langle M \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} [M'_n \sin(n\omega t) + M''_n \cos(n\omega t)] \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

όπου

$$M'_n = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, L \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

$$M''_n = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, L$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της n στις αρμονικής της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\chi'_n = \frac{M'_n}{H_0} \quad \text{Error! Bookmark not defined.}$$

$$\chi''_n = -\frac{M''_n}{H_0}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να ορίσουμε τη μιγαδική μαγνητική επιδεκτικότητα χρησιμοποιώντας την σύμβαση $H_{ext} = \text{Re}[H_0 \exp(i2\pi ft)]$. Σ' αυτήτην περίπτωση ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} M &= \text{Re}[\chi H_0 \exp(2\pi ft)] \\ &= \text{Re}[(\chi' - i\chi'')(H_0 \cos(2\pi ft) + iH_0 \sin(2\pi ft))] \\ &= H_0[\chi' \cos(2\pi ft) + \chi'' \sin(2\pi ft)] \end{aligned}$$

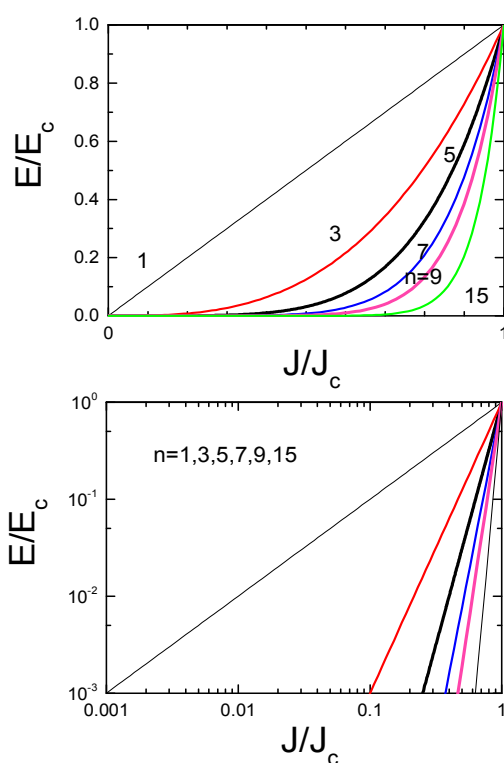
με

$$\chi'_n = \frac{M'_n}{H_0}$$

$$\chi''_n = \frac{M''_n}{H_0}$$

9. Αποτελέσματα της προσομοίωσης

Μετά την κατασκευή και τον έλεγχο του κώδικα σε γλώσσα Fortran 90 εκτελέσαμε ένα αριθμό προσομοιώσεων για διάφορες τιμές κρίσιμου ρεύματος. Λαμβάνοντας υπόψη τον διαθέσιμο υπολογιστικό χρόνο διατηρήσαμε σταθερές τις παραμέτρους πλάτος του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου ($H_0=1$), συχνότητα ($f=1$), πάχος της πλάκας ($a=1$) και κατώφλι ηλεκτρικού μαγνητικού πεδίου ($E_c=1$). Οι προσομοιώσεις έγιναν θεωρώντας νόμο δύναμης μεταξύ ηλεκτρικού πεδίου και πυκνότητας ρεύματος $E=E_c(J/J_c)^n$. Εξετάσαμε τις περιπτώσεις $n=1,3$, και 5 .

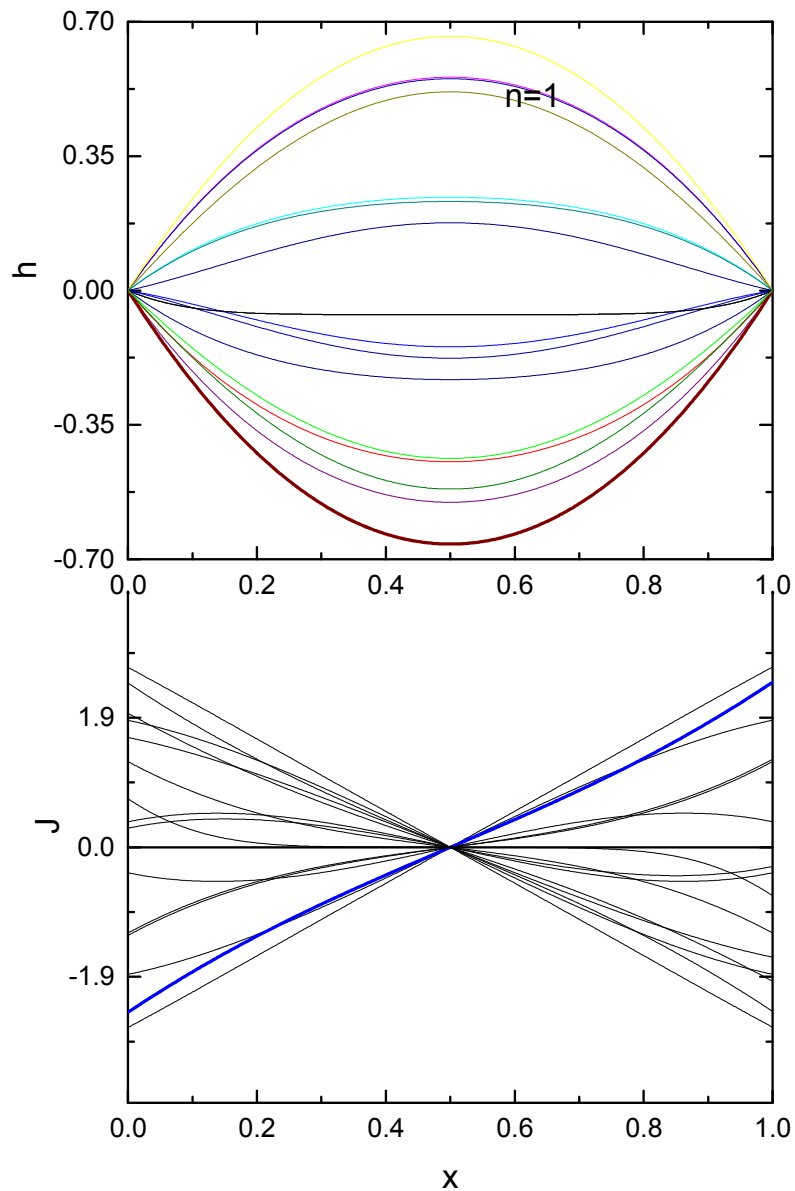


Εικόνα 10: Μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου ($E=E_c(J/J_c)^n$) στις συνάρτηση της πυκνότητας ρεύματος για $n=1,3,5,7,9$

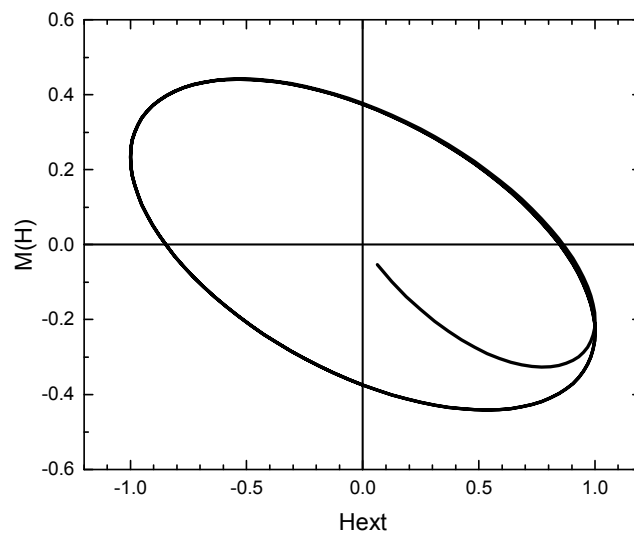
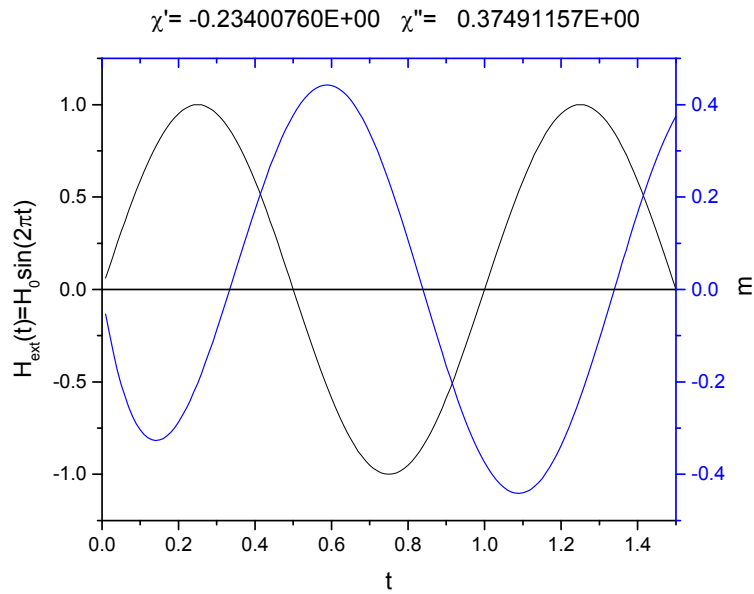
Στο σχήμα 10 φαίνεται η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου με την πυκνότητα ρεύματος σε γραμμικούς και λογαριθμικούς άξονες. Όπως έχουμε προαναφέρει το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο υποθέσαμε ότι μεταβάλλεται **ημιτονοειδώς** άρα ο ρυθμός μεταβολής του, **συνιμιτονοειδώς**. Η χρονική περίοδος που υπολογίσαμε την τοπική μαγνήτιση ήταν $3/2$ T (όπου T η περίοδος). Από τη χρονική μεταβολή της μαγνήτισης υπολογίσαμε τη θεμελιώδη εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα με αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων με τον κανόνα του τραπέζιου.

10. Προσομοιώσεις για $n=1,3,5$, $j_c=1$, $H_0=1$, $f=1$, και $a=1$.

Στο σχήμα 11 φαίνεται η μεταβολή της τοπικής μαγνήτισης και της πυκνότητας ρεύματος με το x για την περίπτωση $n=1$. Αυτή η περίπτωση είναι όμοια με αυτή της αγώγιμης πλάκας που βρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο. Σ' αυτή την περίπτωση η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου γίνεται με ομαλό τρόπο χωρίς να εμφανίζεται μέτωπο στην διείσδυση του.



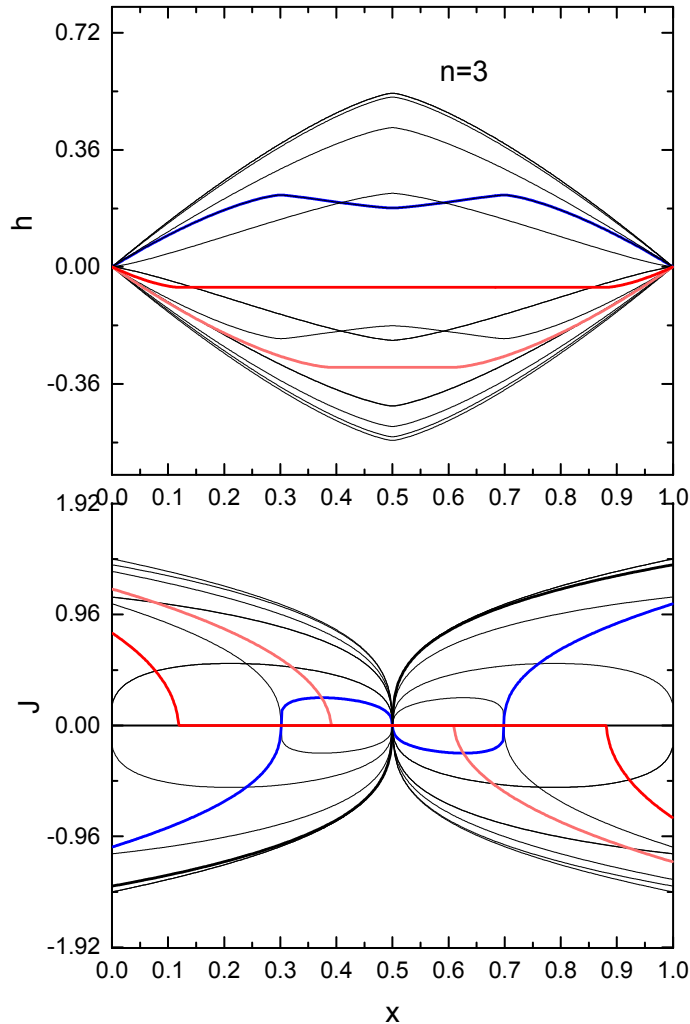
Εικόνα 11: Μεταβολή της τοπικής μαγνήτισης (πάνω σχήμα) και της πυκνότητας ρεύματος (κάτω σχήμα) συναρτήσει του x . Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=1$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$



Εικόνα 12: (πάνω σχήμα) Μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης (μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου) με το χρόνο. (κάτω σχήμα) Μεταβολή της μαγνήτισης με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=1$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$.

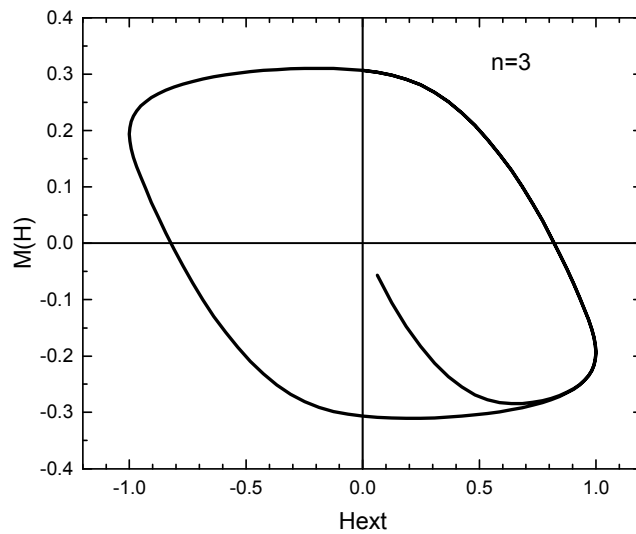
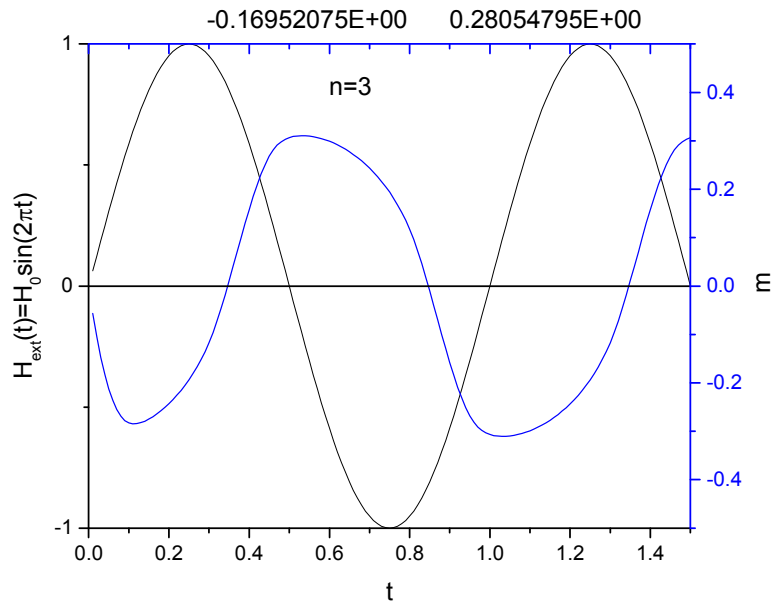
Στο Σχήμα 12 (πάνω σχήμα) φαίνεται η μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης συναρτήσει του χρόνου. Είναι προφανές ότι η υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ της μαγνήτισης και του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Αυτή η περίπτωση είναι όμοια με αυτή ενός αγωγού που βρίσκεται σε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο (περίπτωση δινορευμάτων). Στο σχήμα 12 (κάτω σχήμα) φαίνεται η

μεταβολή της μαγνήτισης συναρτήσει του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη μαγνήτισης εμφανίζει υστέρηση λόγω της διαφοράς φάσης της με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.



Εικόνα 13: Μεταβολή της τοπικής μαγνήτισης (πάνω σχήμα) και της πυκνότητας ρεύματος (κάτω σχήμα) συναρτήσει του x . Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=3$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$

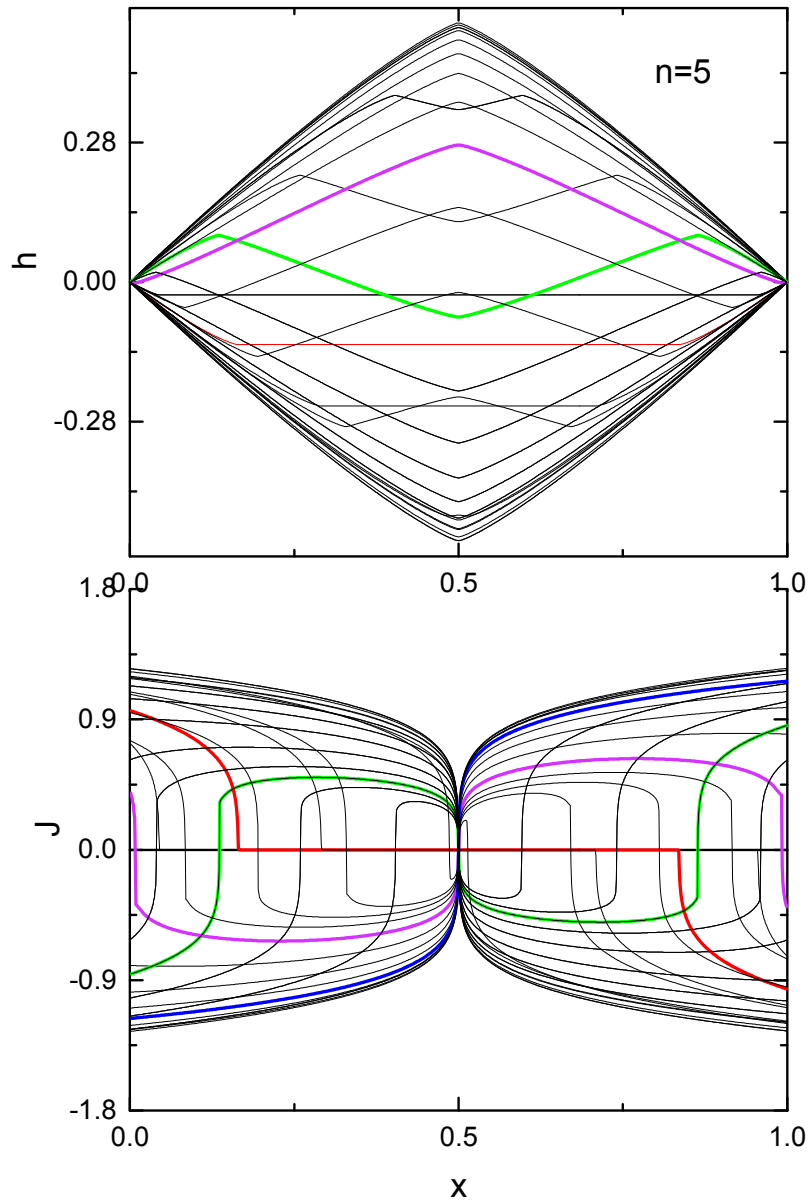
Στο σχήμα 13 παρουσιάζεται η μεταβολή της τοπικής μαγνήτισης και της πυκνότητας ρεύματος με το x για την περίπτωση $n=3$. Σ' αυτή την περίπτωση η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου γίνεται με τη μορφή μετώπου το οποίο διεισδύει προς το κέντρο της πλάκας καθώς το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο αυξάνει. Όπως φαίνεται στο κάτω γράφημα του σχήματος 13 η πυκνότητα ρεύματος ρέει μέχρι το μέτωπο του μαγνητικού πεδίου. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των καμπύλων h και J συνδέονται με τη μη γραμμική σχέση του ηλεκτρικού πεδίου με την πυκνότητα ρεύματος. Όπως θα δούμε στα επόμενα αυτά τα χαρακτηριστικά γίνονται εντονότερα καθώς ο εκθέτης, n , αυξάνει.



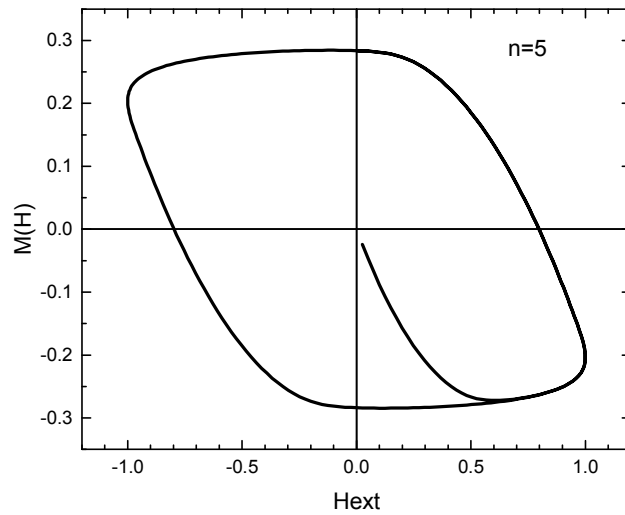
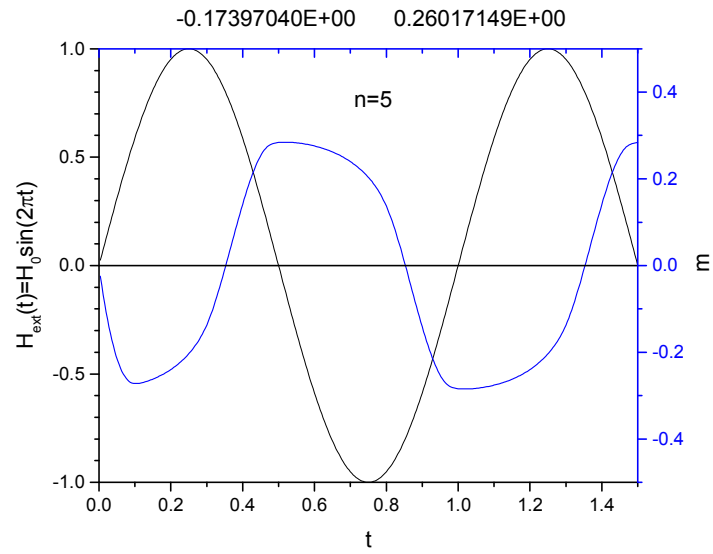
Εικόνα 14: (πάνω σχήμα) Μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης (μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου) με το χρόνο. (κάτω σχήμα) Μεταβολή της μαγνήτισης με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=3$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$

Το σχήμα 14 δείχνει την μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης συναρτήσει του χρόνου για $n=3$. Η μαγνήτιση παρουσιάζει διαφορά φάσης με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο προκαλώντας μαγνητική υστέρηση (κάτω γράφημα). Συγκρίνοντας το αυτό το γράφημα με το αντίστοιχο του σχήματος 12 (περίπτωση $n=1$) διαπιστώνουμε ότι αυτό εμφανίζει ένα πλατό για κάποια τμήματα του.

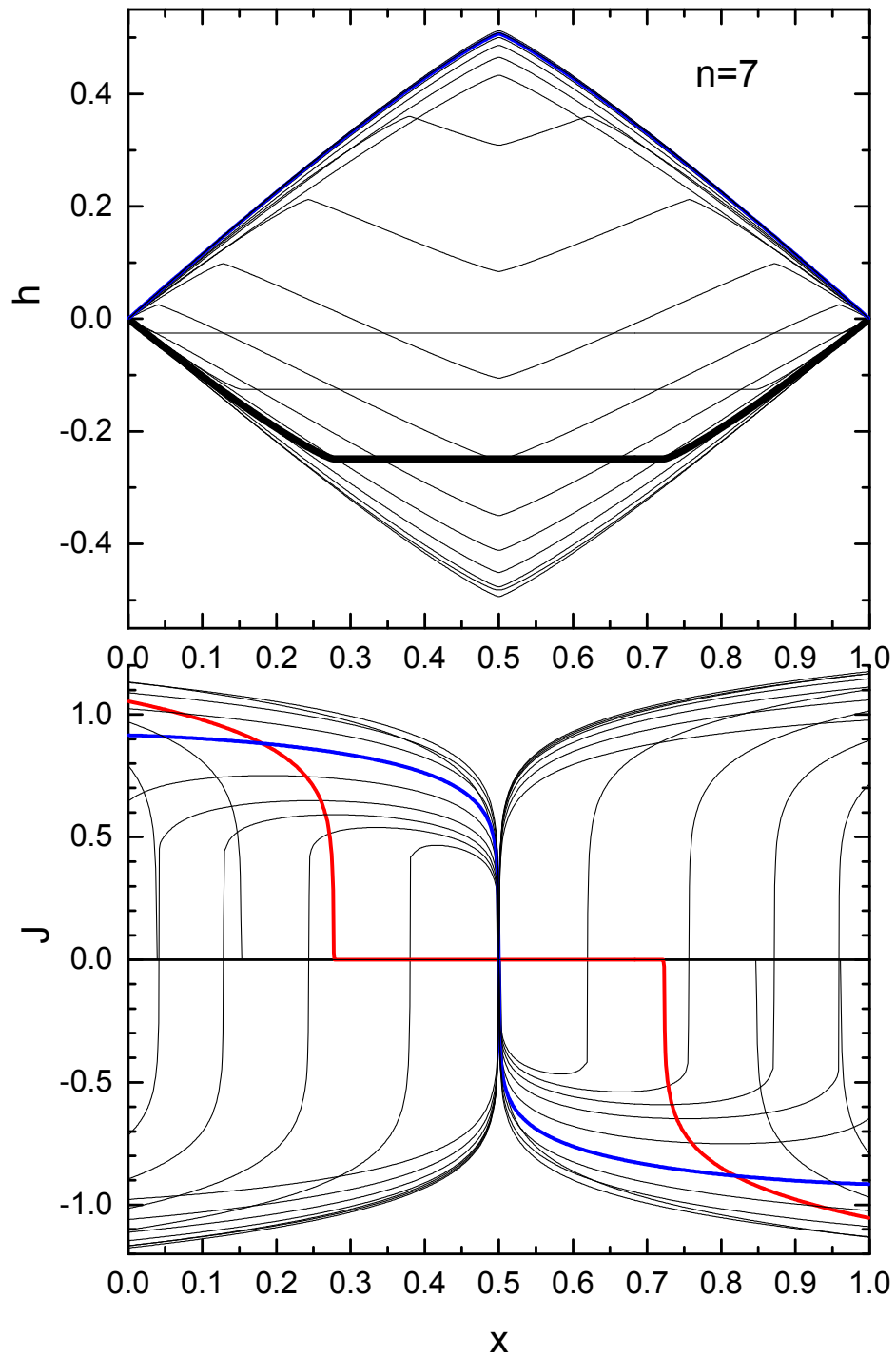
Αυτό το χαρακτηριστικό –όπως θα δούμε παρακάτω- θα γίνεται περισσότερο έντονο καθώς αυξάνει ο εκθέτης, n .



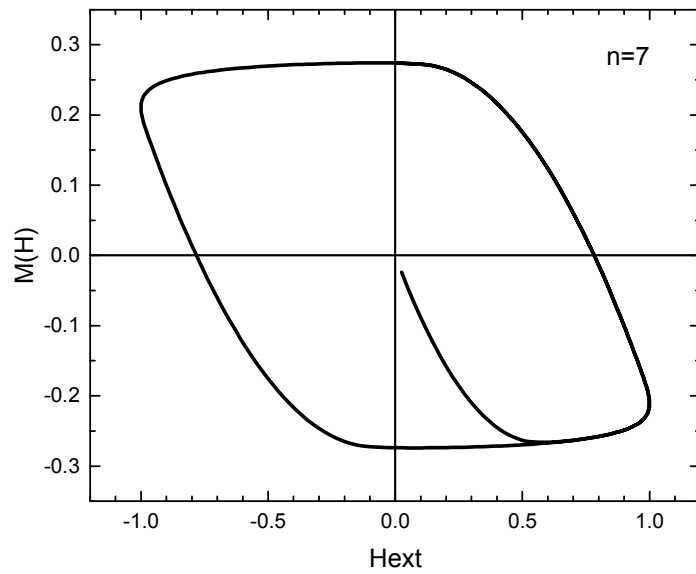
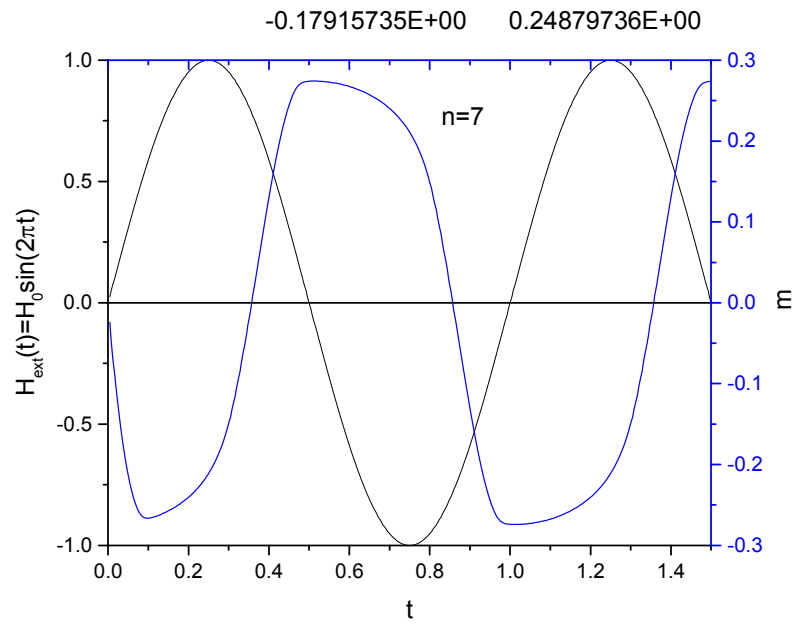
Εικόνα 15: Μεταβολή της τοπικής μαγνήτισης (πάνω σχήμα) και της πυκνότητας ρεύματος (κάτω σχήμα) συναρτήσει του x . Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=5$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$.



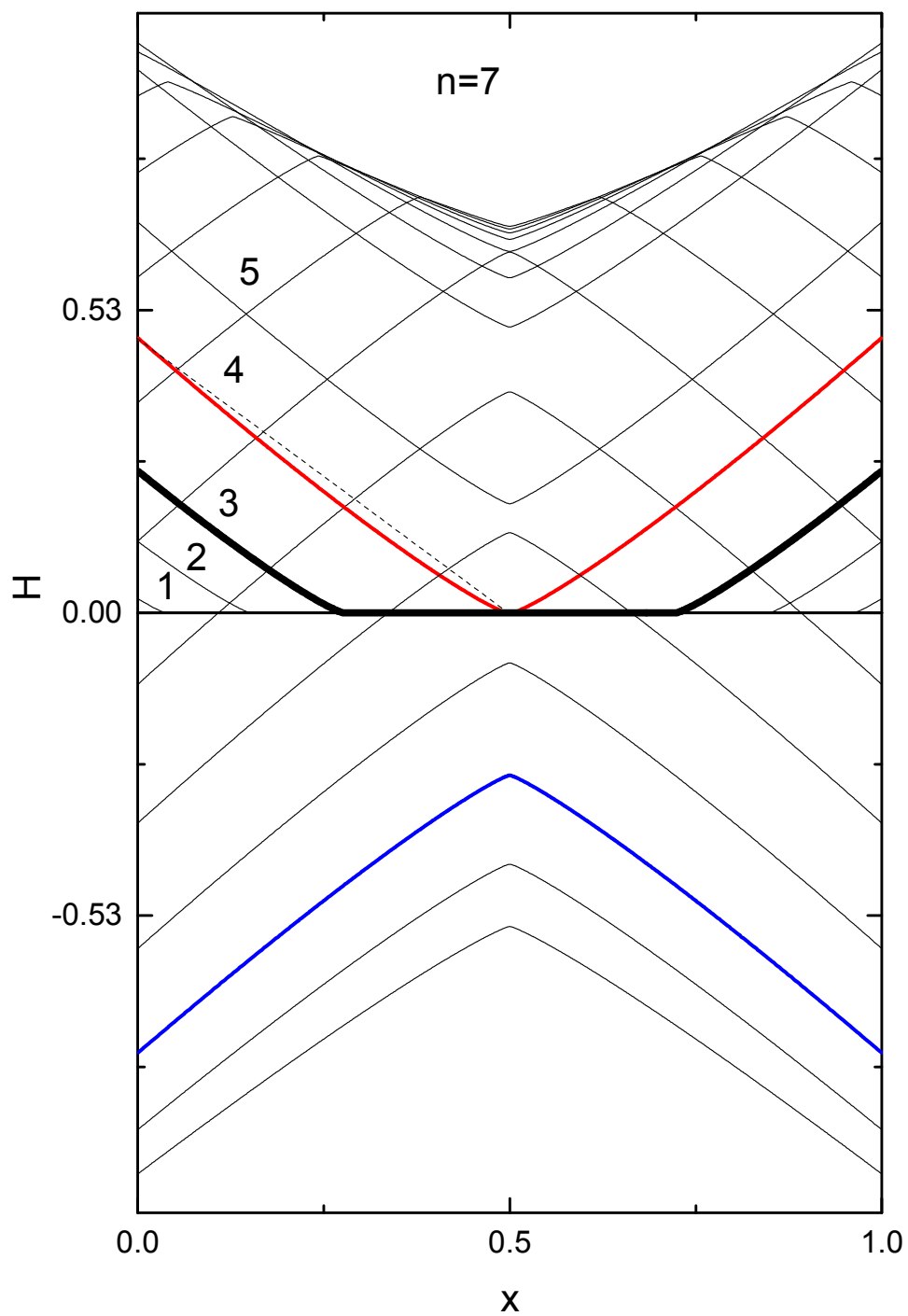
Εικόνα 16: (πάνω σχήμα) Μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης (μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου) με το χρόνο. (κάτω σχήμα) Μεταβολή της μαγνήτισης με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=5$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$.



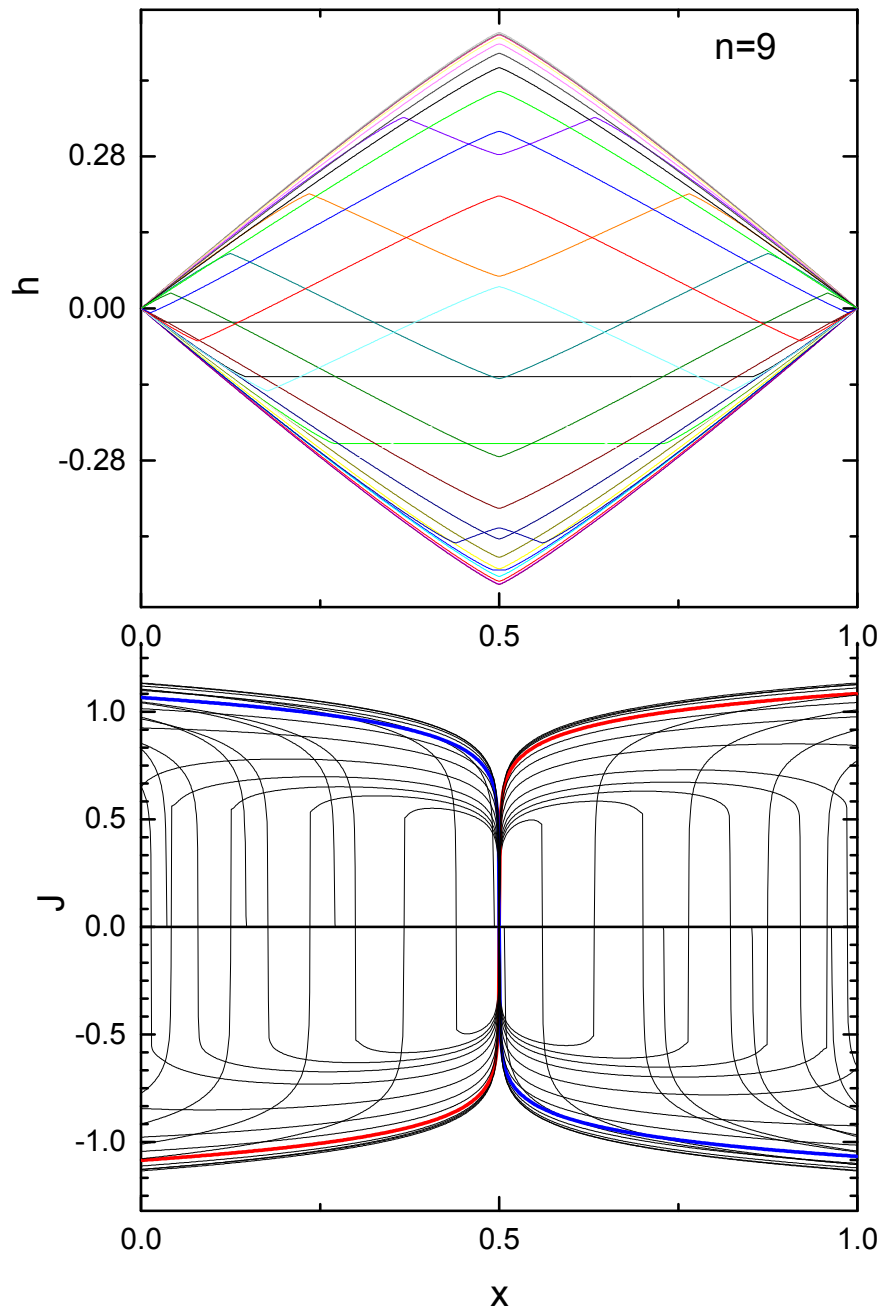
Εικόνα 17: Μεταβολή της τοπικής μαγνήτισης (πάνω σχήμα) και της πυκνότητας ρεύματος (κάτω σχήμα) συναρτήσει του x . Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=7, J_c=1, H_0=1, a=1$.



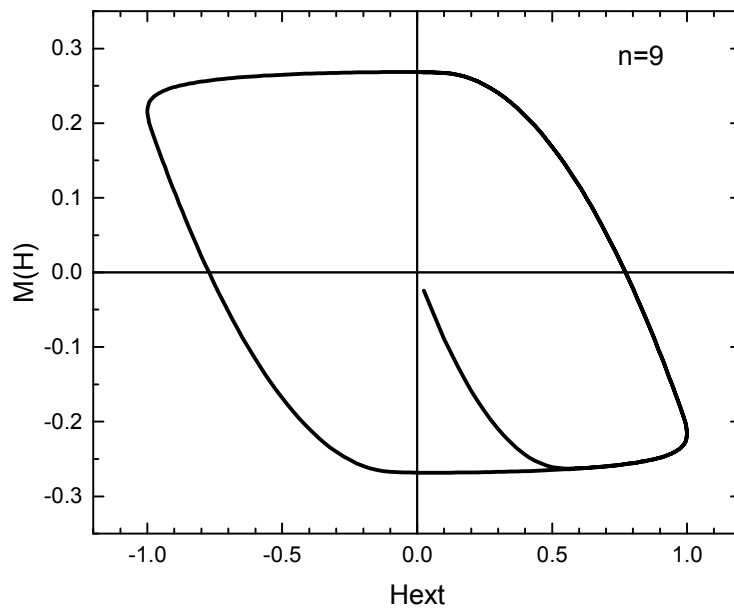
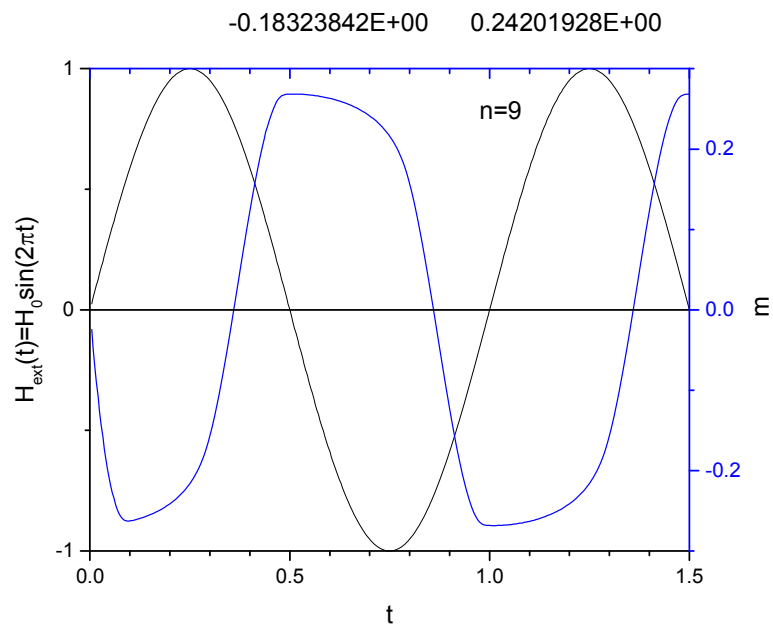
Εικόνα 18: (πάνω σχήμα) Μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης (μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου) με το χρόνο. (κάτω σχήμα) Μεταβολή της μαγνήτισης με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=7$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$.



Εικόνα 19: Μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό της πλάκας συναρτήσει του x . Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=7, J_c=1, H_0=1, a=1$.



Εικόνα 20: Μεταβολή της τοπικής μαγνήτισης (πάνω σχήμα) και της πυκνότητας ρεύματος (κάτω σχήμα) συναρτήσει του x . Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=9$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$.

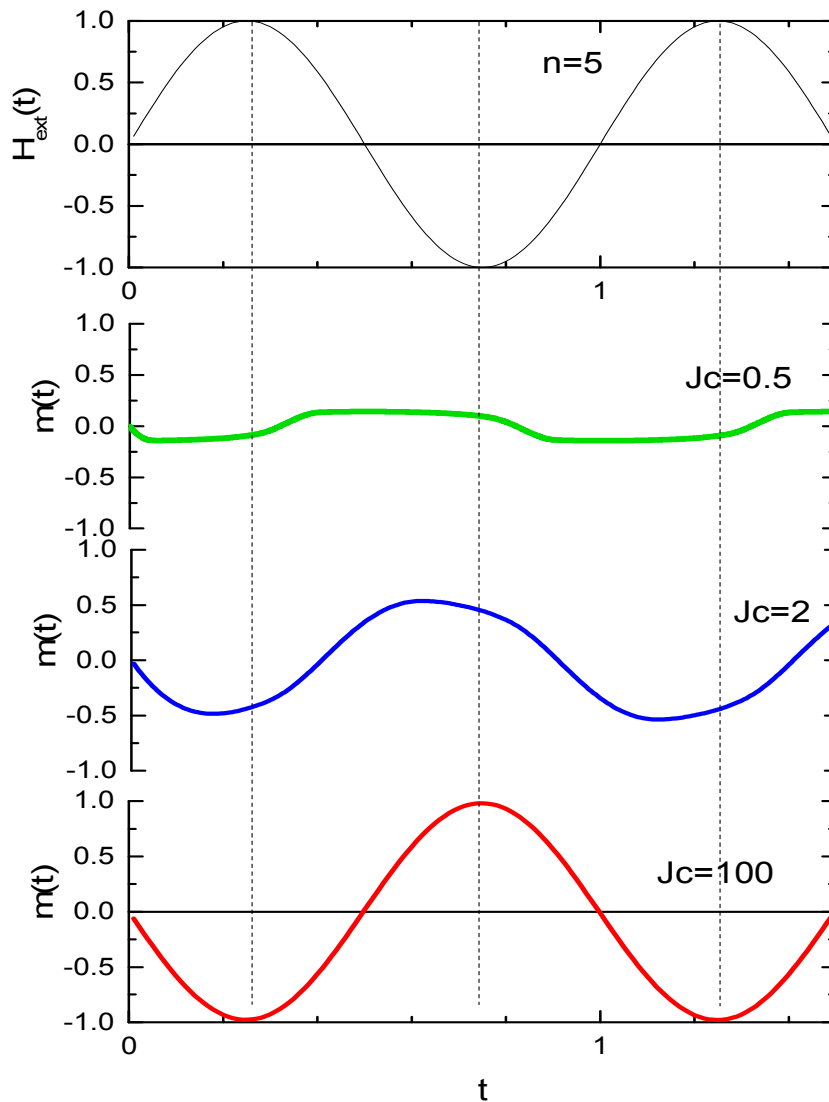


Εικόνα 21: (πάνω σχήμα) Μεταβολή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της μαγνήτισης (μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου) με το χρόνο. (κάτω σχήμα) Μεταβολή της μαγνήτισης με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Οι προσομοιώσεις έγιναν με $n=7$, $J_c=1$, $H_0=1$, $a=1$.

Στα σχήματα 15 -21 φαίνονται αντίστοιχα αποτελέσματα μ' αυτά των σχημάτων 13-14 για τις περιπτώσεις $n=5,7,9$. Όπως προαναφέραμε, καθώς ο εκθέτης n αυξάνει, η διείσδυση του μαγνητικού πεδίου γίνεται με τη μορφή μετώπου. Η πυκνότητα ρεύματος γίνεται σχεδόν σταθερή (εκτός του μετώπου) και τείνει να λάβει την τιμή J_c . Αυτό θα συμβεί στο όριο που εκθέτης n τείνει στο άπειρο. Είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι όσο ο εκθέτης n αυξάνει η μεταβολή της μαγνητικού πεδίου προσεγγίζει τη γραμμική μεταβολή με το x . Σημειώνουμε ότι στο όριο που το n τείνει στο άπειρο η χωρική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου γίνεται γραμμική και η πυκνότητα ρεύματος σταθερή.

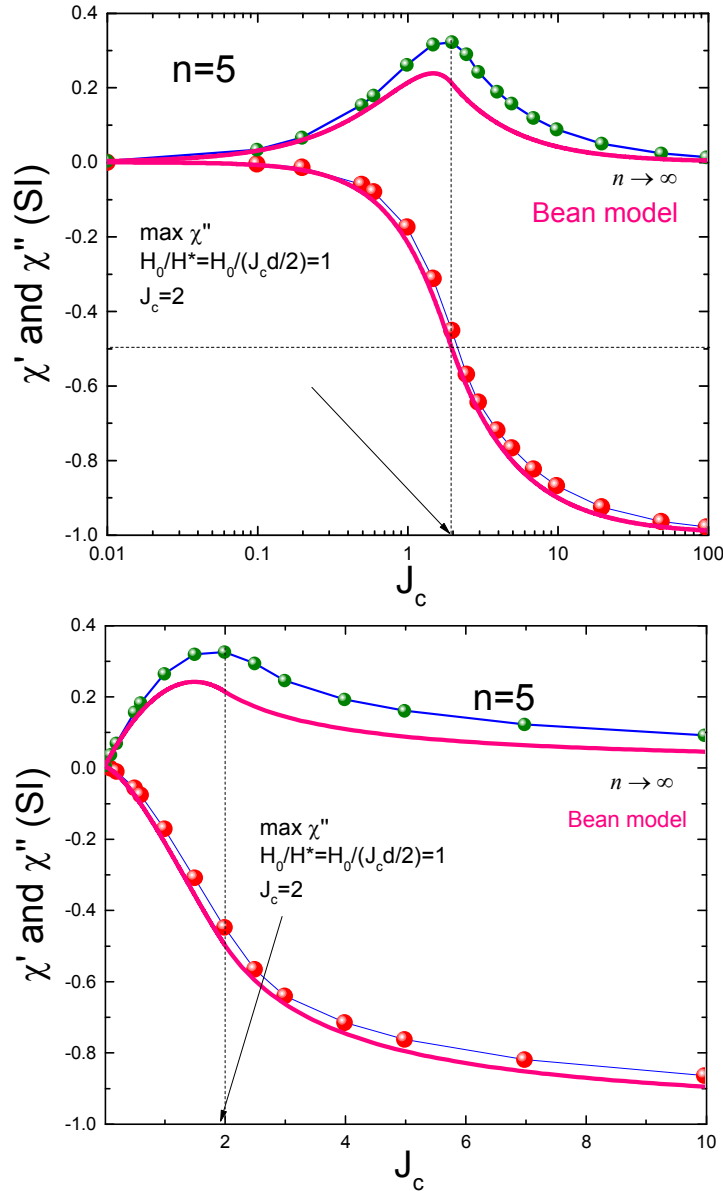
11. Προσομιώσεις για $n=5$, $H_0=1$, $f=1$, και $a=1$ σαν συνάρτηση του κρίσιμου ρεύματος.

Σ' αυτό το εδάφιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των προσομιώσεων για τον υπολογισμό της εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας συναρτήσει α) του κρίσιμου ρεύματος θεωρώντας σταθερές τις παραμέτρους, $H_0=f=a=E_c=1$ και β) του πλάτους του εναλλασσόμενου εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, θεωρώντας σταθερές τις παραμέτρους, $J_c=f=a=E_c=1$. Οι υπολογισμοί και στις δύο περιπτώσεις έγιναν θεωρώντας ότι ο εκθέτης της σχέσης ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος είναι $n=5$.



Εικόνα 22:(μαγνήτιση συναρτήσει του χρόνου) Χρονική εξέλιξη της μαγνήτισης για τρεις αντιπροσωπευτικές τιμές του κρίσιμου ρεύματος ($J_c=0.5, 2, 100$).

Στο σχήμα 22 φαίνονται η χρονική εξέλιξη του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και της υπολογισμένης μαγνήτισης για τρεις αντιπροσωπευτικές τιμές του $J_c=0.5, 2$, και 100 .



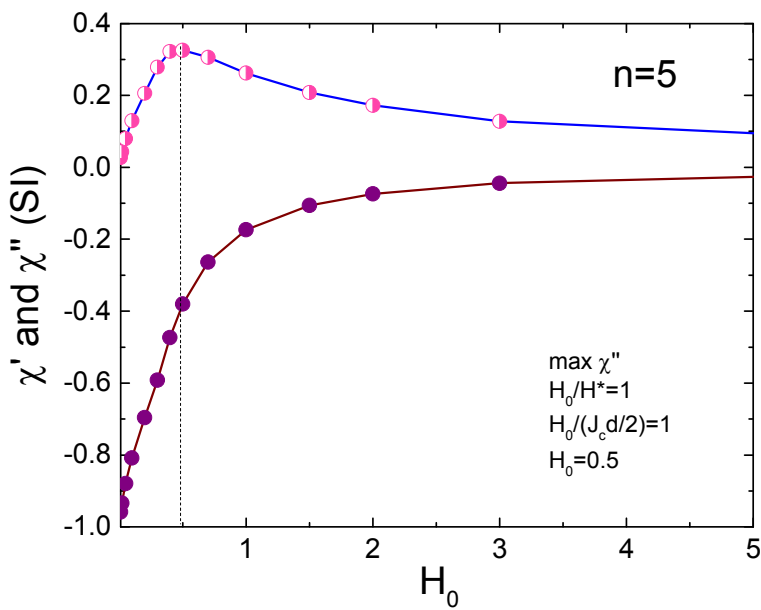
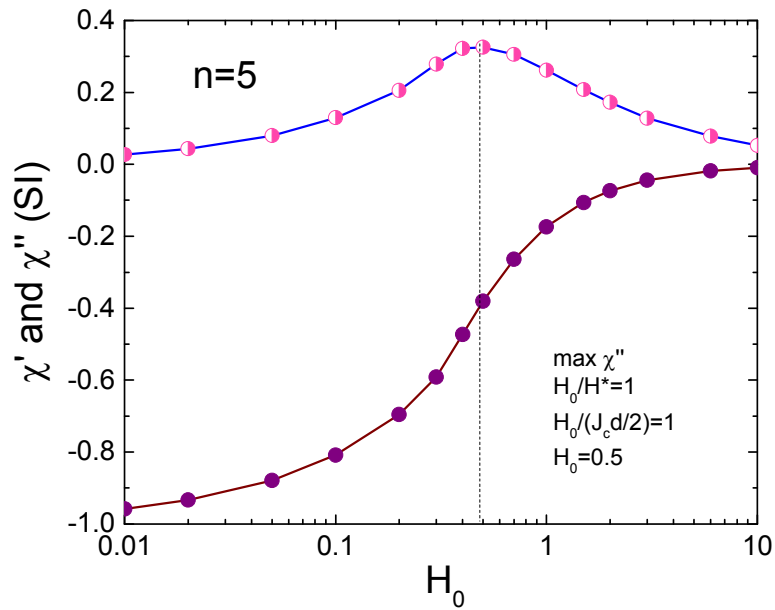
Εικόνα 23: Πραγματικό και φανταστικό μέρος της μαγνητικής εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας, συναρτήσει του κρίσιμου ρεύματος J_c , υπεραγώγιμης πλάκας με μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος $E=E_c(J/J_c)^n$. Ο υπολογισμός έγινε για $n=5$, $H_0=f=a=E_c=1$. Η γραφικές παραστάσεις με τη ροζ γραμμή αντιπροσωπεύουν τα χ' και χ'' για την περίπτωση του πρότυπου Bean (n τείνει στο άπειρο). Στο πάνω γράφημα ο άξονας J_c είναι σε λογαριθμική κλίμακα, ενώ στο κάτω σε γραμμική.

Από τις καμπύλες $M(t)$ με αριθμητική ολοκλήρωση υπολογίστηκε η εναλλασσόμενη μαγνητική επιδεκτικότητα σύμφωνα με τις σχέσεις που έχουμε προαναφέρει στην περιγραφή του προτύπου για την υπεραγώγιμη πλάκα:

$$M_1' = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \sin(\omega t) dt,$$
$$M_1'' = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \cos(\omega t) dt,$$

Στο σχήμα 23 συνοψίζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που είχαν σαν στόχο τον υπολογισμό του πραγματικού και φανταστικού μέρους της θεμελιώδους εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας συναρτήσει του κρίσιμου ρεύματος. Αυτό το σχήμα περιέχει το κεντρικό αποτέλεσμα της διπλωματικής. Στο ίδιο σχήμα έχουμε συμπεριλάβει τη μεταβολή του πραγματικού και φανταστικού μέρους της χ για την περίπτωση που εκθέτης τείνει στο άπειρο (πρότυπο Bean). Το πρώτο συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί από τους υπολογισμούς μας είναι ότι ακόμη και με εκθέτη $n=5$ η καμπύλες χ' και χ'' είναι πολύ κοντά σ' αυτές που το n είναι άπειρο (τουλάχιστον σε λογαριθμική κλίμακα). Παρόλο την μεγάλη ομοιότητα υπάρχουν ορισμένα λεπτά χαρακτηριστικά τα οποία αξίζουν κάποιο σχολιασμό. Παρατηρούμε ότι και η θέση και το ύψος του μεγίστου του φανταστικού μέρους χ'' είναι διαφορετικό από αυτό του προτύπου Bean. Στο πρότυπο Bean μέγιστο αναμένεται όταν ικανοποιείται η συνθήκη $H_0/Jcd/2=4/3$. Οι υπολογισμοί μας δείχνουν ότι για $n=5$ το μέγιστο στο χ'' προσδιορίζεται από την συνθήκη $H_0/Jcd/2=1$.

Στο σχήμα 24 συνοψίζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων για τον υπολογισμό του πραγματικού και φανταστικού μέρους της θεμελιώδους εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας συναρτήσει του πλάτους του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου.



Εικόνα 24:(επιδεκτικότητα -κρίσιμο ρεύμα) Πραγματικό και φανταστικό μέρος της μαγνητικής εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας, συναρτήσει του πλάτους του εναλλασσόμενου εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, υπεραγωγικής πλάκας με μη γραμμική σχέση ηλεκτρικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος $E=E_c(J/J_c)^n$. Ο υπολογισμός έγινε για $n=5$, $J_c=f=a=E_c=1$. Στο πάνω γράφημα ο άξονας H_0 είναι σε λογαριθμική κλίμακα, ενώ στο κάτω σε γραμμική.

12. Συμπεράσματα

Αναπτύξαμε τον αλγόριθμο και κατασκευάσαμε το κώδικά σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran για την αριθμητική επίλυση της μοναδιάστατης εξίσωσης διάχυσης με εξωτερική πηγή. Η συγκεκριμένη εξίσωση περιγράφει τη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό υπεραγωγίσιμης πλάκας στην οποία η σχέση ηλεκτρικού πεδίου και πυκνότητας ρεύματος είναι μη γραμμική. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα που αναπτύξαμε, εκτελέσαμε αριθμητικούς υπολογισμούς για την εκτίμηση του μαγνητικού πεδίου, της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος και της θεμελιώδους (πρώτης αρμονικής) μιγαδικής μαγνητικής επιδεκτικότητας.

13. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (ΚΩΔΙΚΑΣΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ)

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, οι εξισώσεις που περιγράφουν έναν υπεραγωγό τύπου II στην κατάσταση Abrikosov-Schubnikov είναι μη γραμμικές με αποτέλεσμα η αναλυτική τους επίλυση να μην έχει ευδοωθεί. Έτσι, αναπτύχθηκε κώδικας στην γλώσσα προγραμματισμού Fortran, προκειμένου να προχωρήσουμε σε αριθμητική επίλυσή τους. Η γεωμετρία που μας ενδιαφέρει είναι μια άπειρη πλάκα. Για πρακτικούς λόγους είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες μονάδες $a = J_c = E_c = \mu_0 = 1$ έτσι ώστε οι εξίσωση που περιγράφει το μαγνητικό πεδίο να γίνει αδιάστατη.

Σε αδρές γραμμές η βασική δομή του κώδικα είναι αυτή που ακολουθεί. Αρχικοποιούνται οι τιμές των διάφορες παραμέτρων. Για τις τιμές αυτές η διαδικασία της προσομοίωσης αποτελείται από ένα βρόγχο, ο οποίος αντιστοιχεί στην ροή του χρόνου. Για κάθε δεδομένη χρονική στιγμή υπολογίζεται σε όλη την έκταση του υπεραγωγού η επίδραση το μαγνητικό πεδίο, ως αποτέλεσμα της χρονική μεταβολή του εξωτερικού πεδίου και της αλληλεπίδρασης με τα γειτονικά σημεία. Υπολογίζονται η μαγνήτση και η μαγνητική επιδεκτικότητα. Ανά τακτά χρονικά διαστήματα αποθηκεύονται δεδομένα.

Παρουσία εξωτερικού πεδίου η εξίσωση **Error! Reference source not found.** διαμορφώνεται σε

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{E_c}{(\mu_0 j_c)^n} n \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^{(n-1)} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{\partial h_E}{\partial t} \quad (13.1)$$

Η εξίσωση αυτή λύνεται μέσω της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών. Η ύπαρξη των παραγώγων συσχετίζει τις τιμές του πεδίου μια δεδομένη χρονική στιγμή σε ένα σημείο με τις τιμές των γειτονικών σημείων την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή. Ουσιαστικά κάθε χρονική στιγμή απαιτείται η επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών. Στα άκρα του υπεραγωγού το πεδίο είναι ίσο με το εξωτερικό πεδίο, ενώ στις υπόλοιπα σημεία τιμή του πεδίου καθορίζεται από την εξίσωση (13.1). Η επίλυση αυτού του προβλήματος γίνεται με την μέθοδο forwardEuler. Ο υπολογισμός ξεκινά από το ένα άκρο και προχωρά προς το άλλο. Ωστόσο, καθώς ο αριθμητικός υπολογισμός προχωρά από το ένα άκρο της πλάκας προς το άλλο η

συσσώρευση αριθμητικών σφαλμάτων οδηγεί σε μεγάλες αποκλείσεις στο τελικό σημείο. Η συνοριακή συνθήκη δεν θα μπορεί να ισχύει για το τελικό σημείο.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, αλλά και να βελτιώσουμε την ταχύτητα του κώδικα, χρησιμοποιούμε την συμμετρία του κατοπτρισμού σε σχέση με το επίπεδο x-y. Υπολογίζουμε την τιμή του πεδίου στο μισό πάχος της πλάκας και στο άλλο μισό θεωρούμε το πεδίο συμμετρικό. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ αποτελεσματική, αλλά πάλι απαιτείται προσοχή. Για την εξέλιξη της εξίσωσης (13.1) χρειαζόμαστε τις παραγώγους του πεδίου, η οποίες υπολογίζονται αριθμητικά. Η παράγωγος στα διάφορα σημεία είναι ομαλή, αλλά στο μέσο της πλάκας, όπου πάλι υπάρχει συσσώρευση αριθμητικού σφάλματος η παράγωγος δεν μηδενίζεται ως όφειλε. Τουναντίον ο υπολογισμός της από τις τιμές του πεδίου είναι ιδιαίτερα ασταθείς, καθώς η ανάθεση των τιμών με συμμετρικό τρόπο, οδηγεί σε ένα πεδίο του οποίου η παράγωγος είναι ασυνεχής στο σημείο όπου ενώνονται οι δυο τιμές που υπολογίστηκαν με τις τιμές που ανατέθηκαν. Για να αποφύγουμε το πρόβλημα αυτό θεωρούμε την τιμή της παραγώγου του πεδίου στο μέσο της πλάκας μηδενική. Με την διαδικασία αυτή ο υπολογισμός γίνεται ευσταθείς και τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι αξιόπιστα.

Αναλυτικά η δομή του προγράμματος έχει ως εξής. Αρχικοποιείται η τιμή του πλήθους των διαμερίσεων του πάχους της πλάκας. Η τιμή που έχει επιλεγεί είναι $n1=1024$. Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήσαμε αδιάστατες εξισώσεις. Η απόσταση ανάμεσα στα χωρικά σημεία είναι $dx = d/n1$. Η τιμή του εκθέτη (n_ej) το κρίσιμο ρεύμα, η συχνότητα και το πλάτος του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου είναι οι παράμετροι κάθε προσομοίωσης. Για να συγκλίνει ο αλγόριθμος θα πρέπει να επιλέγεται κατάλληλα το βήμα των χρονική μεταβολής. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αποθηκεύονται μετά από συγκεκριμένο αριθμό χρονικών βημάτων, ανάλογα με χρονικό βήμα $ddt(i)$.

Το πρόγραμμα έχει την δυνατότητα να τρέξει για διάφορες τιμές του κρίσιμου ρεύματος της συχνότητα, του πλάτους του εναλλασσόμενου μαγνητικού πεδίου και του εκθέτη n_ej . Αρχικοποιείται το πεδίο(h) και οι παράγωγοί του ($deriv1$ και $deriv2$) εντός του υπεραγωγού. Για την προσομοίωση του AC πεδίου τόσο το βήμα όσο και ο συχνότητα αποθήκευσης δεδομένων εξαρτώνται από την θερμοκρασία. Τέλος υπολογίζεται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μαγνητικής επιδεκτικότητας.

```

program creep
IMPLICIT NONE
INTEGER(8), PARAMETER :: n1=1024,n2=1000,n3=30,n4=103,n5=10
INTEGER DATE_TIME(8)
INTEGER(8) :: i1,i2,i4,i5,k1,k2,k3,k4,i,j,i15,nr,nf,itime,i_count,n_ac,n_j,n_save
real(8) :: bdc,f,tc,bc2,bc20,d,sigma,mu,mu0,kb,u00,dbc20,dtemperature,m_sat,h_test
real(8) :: dx,f0,d0,e1,e2,c1,c2,ec,pi,b_d,h_d,dif,bm0,bm,tm,n,n_ej
real(8) :: dx1,d1,m1,dtime_d,TIME_DIM1,TIME_DIM2
real(8) :: total_time,ramp_time,dtime_r,dtime_ac,dtime,time,simulation_time
real(8) ::
total_time1,ramp_time1,dha_dt1,dtime_r1,dtime_ac1,dtime1,time1,simulation_time1

real(8), DIMENSION(0:n1) :: xi
real(8), DIMENSION(0:n5,0:n1) :: deriv1,deriv2,hz,h,hp,g
real(8), DIMENSION(0:n5) :: moment,bac,dha_dt,ha
real(8), DIMENSION(0:n2) :: ttime
real(8), DIMENSION(1:n3) :: jc,dtl,NSS
real(8), DIMENSION(0:n4) :: b,b1
real(8), DIMENSION(0:50000) :: t_m
real(8), DIMENSION(0:n5,50000) :: m
real(8), DIMENSION(1:n5,1:n3) :: chi1,chi2

! this function transforms a integer value to a string
character(len=25) str
!COMPLEX(4), DIMENSION(Nn1+1,Nn2+1,Nn3+1) :: spec

CHARACTER (LEN = 12) initial_time(3)
CHARACTER (LEN = 12) final_time(3)
CHARACTER (LEN = 12) current_time(3)
CHARACTER (LEN = 25) name_profile

write(*,*) ' ***** PROGRAM creep v ***** '
Write(*,*) ' ***** '

CALLDATE_AND_TIME (initial_time(1), initial_time(2))
write(*,*) ' **** Starting the calculation hh:mm:ss.ms=',
initial_time(2)(1:2),":",initial_time(2)(3:4),":",initial_time(2)(5:10)
! Boltzman constant and vacuum permeability
kb=1.38d-23
pi=4.0d0*datan(1.0d0)
! vaccum magnetic permeability N/A^2
mu0=1.0d0
!mu0=4.0*pi*1.0D-7

```

```

! crossover electric field
! Ec 1micro V/cm=10^(-4)V/m
ec=1.0d0 !1.0d-3
! normal state resistivity

! slab thickness m
d=1.0d0 !1.0d-3
dx=d/float(n1)

! exponent of E(J)=Ec(J/Jc)^n. It should be an odd integer
!n_ej=15
n_ej=5.0

! ac field amplitude (Tesla)
n_ac=1
bac(1)=1.5d0 !0.5d-4 ! 5d-3,5d-4, 0.05d-4

! critical current
n_j=1
jc(1)=1.0d0; dtt(1)=1.0d-08; NSS( 1)=100000

! frequency Hz
f=1.0d0 ! 5,50, 500,

open(unit=70,file='conditions.txt')
write(70,'(a,f10.3)') '1 mu0=',mu0
write(70,'(a,f10.3)') '2 Ec=',Ec
write(70,'(a,f10.3)') '3 d=',d
write(70,'(a,f10.3)') '4 n_ej=',n_ej
write(70,'(a,30f10.3)') '5 Bac=',(bac(i5),i5=1,n_ac)
write(70,'(a,20f10.3)') '6 jc=',(jc(k1),k1=1,n_J)
write(70,'(a,20e10.3)') 'diffussivity=', (Ec/(mu0*jc(k1)**n_ej),k1=1,n_j)
write(70,'(a,20e10.3)') 'dtime      =', (dtt(k1),k1=1,n_j)

close(70)
do 1984 k1=1,n_j ! jc loop
!***** initial profile *****
do i5=1,n_ac
do i2=1,n1; h(i5,i2)=0.0; deriv1(i5,i2)=0.0; deriv2(i5,i2)=0.0; enddo! i2
enddo! i5
!***** time interval *****
total_time=1.5/f
itime=1

```

```

time=0.0d0
i_count=1
! simulation time =3/2 periods !!!
simulation_time=total_time
! interval of ac susceptibility calculation
TIME_DIM1=0.5; TIME_DIM2=1.5

dif=Ec/(mu0*jc(k1)**n_ej)

!*****
!           the time step depends on the critical current
                dtype=dt(k1)
!*****

write(*,*) '*****'
b_d=mu0*jc(k1)*d/2.0 ! full penetration field in Tesla
h_d=   jc(k1)*d/2.0 ! full penetration field in A/m
write(*,'(a,f15.5,A)')   ' J_c                =',jc(k1), ' reduced units'
write(*,'(a,f15.5,A)')   ' H*=j_c d/2         =',h_d, ' reduced units'
write(*,'(A,f15.5,A)')   ' n_ej (exponent of the E-J) =',n_ej , ' '
write(*,'(a,e15.5,A)')   ' dtype              =',dtype, ' reduced units'
write(*,'(a,e15.5,A)')   ' diffusivity         =',dif, ' reduced units'
write(*,'(a,e15.5,A)')   ' diffusivity xdtype   =',dif*dtype, ' reduced
units'
write(*,*) '*****'

!***** T I M E   L O O P *for AC CALCULATION*****
do 10 while (time.le.total_time)
time=time+dtype

do i5=1,n_ac ! n_ac is the number of ac amplitudes
ha(i5)      =(1.0d0/mu0)*bac(i5)*sin(2.0d0*pi*f*time)
dha_dt(i5)=(1.0d0/mu0)*2.0*pi*f*bac(i5)*cos(2.0d0*pi*f*time)
enddo! i5
! zeroing the derivative at the center

do i5=1,n_ac
deriv1(i5,n1/2)=0.0
enddo!i5

do i5=1,n_ac
do 47 i2=1,n1/2-1 ! space loop

```

```

! h' calculation
deriv1(i5,i2)=(h(i5,i2)-h(i5,i2-1))/dx
! h'' calculation
deriv2(i5,i2) =(deriv1(i5,i2+1)-deriv1(i5,i2))/dx
!deriv2(i2) =(h(i2+1)-2.0d0*h(i2)+h(i2-1))/(dx**2)
! cutoff
if ( deriv2(i5,i2).gt.(2.0*jc(k1)/dx) ) then
deriv2(i5,i2)=jc(k1)/dx
endif
47enddo!i2 space loop
enddo!i5

! dif=Ec/(mu0*cc**n_ej)

do 57 i2=1,n1/2-1
! Ey(x)=E(x), Bz(x)=B(x), Hz(x)=H(x), Jy(x)=J(x) (geometry)
! B=mu0H(Hc1=0)
! h=Hz-Ha (local magnetization)
! dE/dx=-dB/dt (Faraday law)
! E=Ec(J/Jc)**n (influence of pinning)
! -dH/dx=J (Ampere law in quasi-static approximation)
! dh/dt=(Ec/mu0 cc**n)[(h')^n]'-dHa/dt (non linear diffusion equation)
do i5=1,n_ac
g(i5,i2)=dif*n_ej*deriv1(i5,i2)**(n_ej-1.0)*deriv2(i5,i2)
h(i5,i2)=(g(i5,i2)-dha_dt(i5))*dtime+h(i5,i2)
hz(i5,i2)=h(i5,i2)+ha(i5)
enddo!i5
57enddo!i2 space loop

do i5=1,n_ac
hz(i5, 0)=ha(i5); hz(i5,n1)=ha(i5)
enddo! I5

do i5=1,n_ac
moment(i5)=0.0
enddo

! the local magnetization h(x) is symmetric.
! The integral of the local magnetization gives the
! total magnetic moment.

```



```

do i5=1,n_ac
do i2=1,n1/2-1; moment(i5)=moment(i5)+h(i5,i2)*dx;enddo
moment(i5)=2.0*moment(i5)+h(i5,n1/2)*dx
enddo

! save data with step T/NSS(K1)
n_save=NSS(K1)

if (mod(itime,n_save).eq.0) then
open(unit=70,position='APPEND',file='m.txt')
!
! time external magnetic field magnetization
write(70,'(e20.8,15e15.5)') time,jc(k1),(ha(i5),moment(i5)/d,i5=1,n_ac)
close(70)
write(*,*) '===== '

!save_data      (n_ac,n1,n5,n_ej,ec,itime ,time,dtime ,dx,ha,deriv1,deriv2,h,hz)
call save_data(n_ac,n1,n5,n_ej,ec,i_count,time,dtime,dx,ha,deriv1,deriv2,h,hz)

do i5=1,n_ac
m(i5,i_count)=moment(i5)
write(*,'(a,f10.2,a,a,f12.6,a)') ' Bac=',bac(i5),' ru ', ' magnetization=',
moment(i5)/d , ' ru'
enddo! i5
write(*,*) '===== '
t_m(i_count)=time
i_count=i_count+1
endif
itime=itime+1
10end do! end time while loop
i_count=i_count-1

! *****
!
! ac susceptibility calculation
! *****

do i5=1,n_ac
chi1(i5,k1)=0.0
chi2(i5,k1)=0.0
do 78 i4=1,i_count-1
! PROSOXH TO TIME_DIM1 KAI TO TIME_DIM2 EKSARTATAI APO TO SIMULATION TIME
if ((t_m(i4).ge.TIME_DIM1/f).and.(t_m(i4).le.TIME_DIM2/f)) then
chi1(i5,k1)=chi1(i5,k1)+0.5*(m(i5,i4)*sin(2.0*pi*f*t_m(i4))+m(i5,i4+1)*sin(2.0*pi*f*t_
m(i4+1)))*(t_m(i4+1)-t_m(i4))

```

```

chi2(i5,k1)=chi2(i5,k1)+0.5*(m(i5,i4)*cos(2.0*pi*f*t_m(i4))+m(i5,i4+1)*cos(2.0*pi*f*t_
m(i4+1)))*(t_m(i4+1)-t_m(i4))
endif
78enddo
chi1(i5,k1)=(2.0*f)*(chi1(i5,k1)/(bac(i5)/mu0))/d
chi2(i5,k1)=(2.0*f)*(abs(chi2(i5,k1))/(bac(i5)/mu0))/d
enddo!i5

open(unit=75,position='APPEND',file='chi.txt')
write(75,'(16e20.8)') jc(k1),(bac(i5),chi1(i5,k1),chi2(i5,k1),i5=1,n_ac)
close(75)

1984enddo!k1 temperature loop

close(30)

!write(*,'(A,\)') ' Give the dc-magnetic field in Tesla=?'
!read(*,*) bdc

CALLDATE_AND_TIME (final_time(1), final_time(2))
write(*,*) ' *** Endting the calculation hh:mm:ss.ms=',
final_time(2)(1:2),":",final_time(2)(3:4),":",final_time(2)(5:10)

Write(*,*) ' Press ENTER to finish'
read(*,*)

ENDPROGRAM creep
! *****
!   S A V E   D A T A
! *****
SUBROUTINE save_data(n_ac,n1,n5,n_ej,ec,itime ,time,dtime,dx,ha,deriv1,deriv2,h,hz )
IMPLICIT NONE
CHARACTER (LEN = 12) REAL_CLOCK (3)
INTEGER(8) :: i,j,itime,n1,n5,n_ac,i5
real (8) time,dtime,da,dx,mu0,ec,pi,j_sat,d,n_ej,f
!INTEGER, DIMENSION(LOWER:UPPER,SMALL:LARGE) :: a,b
real (8), DIMENSION(0:n5) :: ha,rate,bac
real (8), DIMENSION(0:n5,0:n1) :: deriv1,deriv2,g,hz,h,hp
CHARACTER (LEN = 25) name_profile
! this function transforms a integer value to a string
character(len=25) str
pi=4.0*atan(1.0)
mu0=4.0*pi*1.0D-7

```

```

CALLDATE_AND_TIME (REAL_CLOCK (1), REAL_CLOCK (2))
write (*,*) ' Current real time ', 'hh=', real_clock(2) (1:2), " mm=", real_clock(2) (3:4), "
ss.ms=", real_clock(2) (5:10)

write (*, '(a,i10,a,e13.3,a,e13.3,a,e13.3)') 'step I=',itime, ' simulation time =',
time, ' step dtime =',dtime

do i5=1,n_ac
name_profile=trim(str(itime))//'- '//trim(str(i5))//'.txt'
! print profiles
open(unit=10,file=name_profile)
do i=1,n1/2-1
    h(i5, n1-i)=h(i5 ,i)
    hz(i5,n1-i)=hz(i5,i)
    deriv1(i5,n1-i)=-deriv1(i5,i)
    deriv2(i5,n1-i)=deriv2(i5,i)
    g(i5,n1-i)=g(i5,i)
enddo
h(i5,n1/2)= 0.5*(h(i5,n1/2-1)+h(i5,n1/2+1))
hz(i5,n1/2)= 0.5*(hz(i5,n1/2-1)+hz(i5,n1/2+1))
deriv2(i5,n1/2)=0.5*(deriv2(i5,n1/2-1)+deriv2(i5,n1/2+1))

do i=1,n1-1
! The h fields are expressed in Oe, the j in A/cm2 and E/EC .
write (10, '(2e25.5,1e25.12,5e25.5)') float(i)*dx,h(i5,i),hz(i5,i),-
deriv1(i5,i),deriv2(i5,i)
enddo
!write(80,*)
close (10)
!close(80)
enddo!i5
END SUBROUTINE save_data

character(len=25) function str(k)
! "Convert an integer to string."
integer(8), intent(in) :: k
write (str, *) k
    str = adjustl(str)
end function str

```


14. Βιβλιογραφία

- [1] Blatter G. and Feigel'man, M. V. and Geshkenbein, V. B. and Larkin, A. I. and Vinokur, V. M., Vortices in high-temperature superconductors, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125–1388 (1994)
- [2] E. H. Brandt The flux-line lattice in superconductors, *Rep. Prog. Phys.* **58** (1995) 1465.
- [3] G. P. Mikitik, Critical states in thin planar type-II superconductors in a perpendicular or inclined magnetic field, *Low Temperature Physics* **36**, 13 (2010); <https://doi.org/10.1063/1.3292280>.
- [4] V. Vinokur, B. Khaykovich, E. Zeldov, M. Konczykowski, R.A. Doyle, P.H. Kes, Lindemann criterion and vortex-matter phase transitions in high-temperature superconductors, *Physica C* **295** (1998) 209.
- [5] ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΥ ΥΛΙΚΩΝ Σημειώσεις για την άσκηση Μαγνητικές μετρήσεις υλικών Μ. Πίσσας, INN, ΕΚΕΦΕ «Δ».
- [6] E. H. Brandt, Electric field in superconductors with rectangular cross section, *Phys. Rev. B* **52**, 15442 (1995)
- [7] T. Matsushita, Flux Pinning in Superconductors, isbn 978-3-540-44514-2, (2007), Springer
- [8] C. P. Bean Magnetization of High-Field Superconductors, *Reviews of Modern Physics* **36**, 31 (1964).
- [9] Μ. Πίσσας, Εισαγωγή στην Υπεραγωγιμότητα, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2005).
- [10] M. Tinkham, Introduction to superconductivity, (1996) Dover Publications.
- [11] H. Ullmaier, Irreversibility Properties of Type II superconductors, (1975), Spring-Verlag.
- [12] L. Ji, R. H. Sohn, G. C. Spalding, C. J. Lobb, and M. Tinkham, Critical-state model for harmonic generation in high-temperature superconductors, *Phys. Rev. B* **40**, 10936 (1989).
- [13] T. Ishida and R. B. Goldfarb, Fundamental and harmonic susceptibilities of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$, *Phys. Rev. B* **41**, 8937 (1990).

- [14] M.J.Qin, X.X.Yao, AC response of high temperature superconductors in the flux creep region, *Physica C: Superconductivity* **272**, 142, (1996).
- [15] Jakob Rhyner, Magnetic properties and AC-losses of superconductors with power law current-voltage characteristics, *Physica C: Superconductivity* **212**, 292 (1993).
- [16] Magnetic Susceptibility of Superconductors and Other Spin Systems, R. B. Goldfarb, M. Lelental, C. A. Thompson, Alternating-field susceptometry and magnetic susceptibility of superconductors, Edited by Robert A. Hein, Thomas L. Francavilla and Donald H. Liebenberg, Springer Science+Business Media New York 1991
- [17] Αθανασία Μπράχου, Μελέτη του διαγράμματος φάσεων της ύλης φλαξονίων του υπεραγωγού, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ με μετρήσεις εναλλασσόμενης μαγνητικής επιδεκτικότητας σε κεκλιμένο μαγνητικό πεδίο, Διπλωματική Εργασία, ΣΕΜΦΕ, ΑΘΗΝΑ, 2015.
- [18] Ernst Helmut Brandt, Ac response of thin-film superconductors at various temperatures and magnetic fields *PHILOSOPHICAL MAGAZINE B*, **80**, 835 (2000).
- [19] M. J. Qin and X. X. Yao, ac susceptibility of high-temperature superconductors, *Phys. Rev. B* **54**, 7536 (1996).
- [20] Ishida T and Goldfarb R B, Fundamental and harmonic susceptibilities of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ *Phys. Rev. B* **41** 8937 (1990).