



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &
Φυσικών Επιστημών
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. "ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ"
Ινστιτούτο Πυρηνικής &
Σωματιδιακής Φυσικής
Ινστιτούτο Νανοεπιστήμης
& Νανοτεχνολογίας



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Φυσική & Τεχνολογικές Εφαρμογές"

Ηλεκτρικές τετραπολικές μεταβάσεις στα πλαίσια αλγεβρικών πυρηνικών προτύπων

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Σπυρίδων Κ. Περούλης

A.M.: 09219020

Επιβλέπων:

Δ. Μπονάτσος
Διευθυντής Ερευνών

Μέλη Τριμελούς Επιτροπής:

Γ. Κουτσούμπας - Καθηγητής
Μ. Κόκκορης - Καθηγητής

Αθήνα

Οκτώβριος 2021

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία γίνεται μια θεωρητική μελέτη των ηλεκτρικών τετραπολικών μεταβάσεων στα πλαίσια αλγεβρικών προτύπων. Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα εργασία εστιάζει στον υπολογισμό ανηγμένων πιθανοτήτων ηλεκτρικής τετραπολικής μετάβασης $B(E2)$ εντός της θεμελιώδους ζώνης, με χρήση του προτύπου proxy-SU(3), **χωρίς χρήση ελεύθερων παραμέτρων**. Στο τέλος της εργασίας παρουσιάζονται αποτελέσματα αναλυτικών υπολογισμών $B(E2)$ για τα διάφορα ισότοπα των σπάνιων γαιών όπως επίσης και υπολογισμοί της παραμόρφωσης των ίδιων πυρήνων, μέσω των ανηγμένων αυτών πιθανοτήτων μετάβασης.

Abstract

In this M.Sc. thesis a theoretical study of electric quadrupole transitions within nuclear algebraic models, is introduced. In particular, this thesis focuses on the calculation of reduced electric quadrupole probabilities (usually named as $B(E2)$ s) within the ground state band, using the proxy-SU(3) model, **without using any free parameters**. Concluding, analytical calculations of $B(E2)$ s in the rare earth region, as well as for the nuclear deformation of these nuclei are presented, using the same reduced probabilities.

Στη ΓΕΩΡΓΙΑ

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	v
Κατάλογος σχημάτων	ix
Κατάλογος πινάκων	xiii
1 Αλγεβρικά Πυρηνικά Πρότυπα	1
1.1 Πρότυπο $SU(3)$ του Elliott	1
1.2 Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων (IBM)	2
1.3 Pseudo- $SU(3)$ συμμετρία	2
2 Μαθηματικό Ιντερλούδιο	5
2.1 Άλγεβρες Lie	5
2.1.1 Βασικές Έννοιες	5
2.1.2 Αναλλοίωτοι Τελεστές Casimir	6
2.1.3 Πραγμάτωση Αλγεβρών Lie	6
2.2 Ομάδες Lie	7
2.2.1 Ομάδες Μετασχηματισμών	7
2.2.2 Συνεχείς Ομάδες Πινάκων	8
2.3 Σύνδεση Αλγεβρών και Ομάδων Lie	12
2.4 Η Ομάδα $SU(3)$	12
2.4.1 Γεννήτορες	12
2.4.2 Ταξινόμηση των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων	13
2.4.3 Τελεστές Casimir	13

2.5	Σφαιρικοί Τανυστικοί Τελεστές	14
2.5.1	Τανυστικό Γινόμενο Σφαιρικών Τανυστικών Τελεστών	16
2.5.2	Στοιχεία Πίνακα Τανυστικών Τελεστών - Θεώρημα Wigner-Eckart	16
2.5.3	Αποσύνθεση SU(3) Τανυστών και το Αντίστοιχο Θεώρημα Wigner-Eckart	19
3	Το πρότυπο proxy-SU(3)	21
3.1	Τροχιακά που διαφέρουν κατά 0[110]	21
3.2	Αντικαταστάσεις τροχιακών	24
3.3	Υπολογισμός μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της proxy-SU(3)	25
4	Υπολογισμός B(E2) στα πλαίσια της proxy-SU(3)	27
4.1	Θεωρητική Προσέγγιση των B(E2)s	27
4.2	Συστήματα μονάδων	29
4.3	Υπολογισμός B(E2; $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$) Σπάνιων Γαιών	30
4.4	Αποτελέσματα B(E2; $L + 2 \rightarrow L$) Σπάνιων Γαιών	30
4.4.1	B(E2; $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$)	31
4.4.2	B(E2; $4_1^+ \rightarrow 2_1^+$)	35
4.4.3	B(E2; $6_1^+ \rightarrow 4_1^+$)	39
4.4.4	B(E2; $8_1^+ \rightarrow 6_1^+$)	43
4.4.5	B(E2; $10_1^+ \rightarrow 8_1^+$)	47
4.4.6	B(E2; $12_1^+ \rightarrow 10_1^+$)	51
4.4.7	B(E2; $14_1^+ \rightarrow 12_1^+$)	55
4.5	Ανάλυση αποτελεσμάτων για τις B(E2)s	59
5	Η Παραμόρφωση των Σπάνιων Γαιών	61
5.1	Η Παραμόρφωση στην proxy-SU(3)	61
5.2	Υπολογισμός της παραμόρφωσης από την B(E2; $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$) για τις σπάνιες γαίες	62
5.3	Αποτελέσματα για την Παράμετρο β	62
5.4	Ανάλυση αποτελεσμάτων για την παράμετρο β	67
6	Επίλογος	69
6.1	Μελλοντικά Σχέδια	69

I	Παραδείγματα Ομάδων Lie	71
I.1	SO(2): Ειδική Ορθογώνια Ομάδα σε 2Δ	71
I.2	SO(3): Ειδική Ορθογώνια Ομάδα σε 3Δ	73
I.3	SU(2): Ειδική Μοναδιακή Ομάδα σε 2Δ	74
	Βιβλιογραφία	77

Κατάλογος σχημάτων

2.1	Σχηματική αναπαράσταση διαγραμμάτων Young. Στο σχήμα (i) δίνεται διάγραμμα Young με πλήθος f_1 κυτρίων στην πρώτη σειρά και f_2 στην δεύτερη. Στο σχήμα (ii) δίνεται το ίδιο διάγραμμα Young και παρουσιάζεται σχηματικά η σύμβαση με τους αριθμούς λ και μ	14
3.1	Διάταξη των ενεργειακών σταθμών που προκύπτει σύμφωνα με διαφορετικά μέσα πεδία, ξεκινώντας από το απλούστερο και καταλήγοντας στο Πρότυπο των Φλοιών. Είναι εμφανές πως η εισαγωγή του όρου τροχιακής στροφορμής - σπίν είναι αναγκαία ώστε να αναπαραχθούν ορθά οι μαγικοί αριθμοί.	22
3.2	Ενεργειακά επίπεδα σύμφωνα με το πρότυπο του Nilsson για νετρόνια στο φλοιό 50 – 82 συναρτήσει της παραμόρφωσης ϵ . Ο δείκτης 2 αναφέρεται στο ότι η παραμόρφωση είναι τετραπολική. [1]	23
4.1	Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	31
4.2	Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	32
4.3	Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	33
4.4	Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	34
4.5	Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	35
4.6	Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	36
4.7	Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	37

4.8	Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	38
4.9	Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	39
4.10	Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	40
4.11	Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	41
4.12	Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	42
4.13	Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	43
4.14	Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	44
4.15	Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	45
4.16	Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	46
4.17	Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	47
4.18	Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	48
4.19	Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	49
4.20	Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	50
4.21	Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	51
4.22	Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	52
4.23	Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	53
4.24	Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	54
4.25	Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	55

4.26	Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	56
4.27	Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	57
4.28	Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	58
5.1	Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	63
5.2	Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	64
5.3	Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	65
5.4	Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].	66
I.1	Η περιστροφή ενός διανύσματος σε $2\Delta - SO(2)$ ομάδα συμμετρίας.	71

Κατάλογος πινάκων

- 3.1 Nilsson τροχιακά για τα $1g_{9/2}$ και $1h_{11/2}$. Είναι εμφανές πως τα αντίστοιχα τροχιακά διαφέρουν κατά $0[110]$ με εξαίρεση το $11/2[505]$ το οποίο δεν έχει αντίστοιχο στο $1g_{9/2}$ 25
- 3.2 Στις στήλες hw δίνονται οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους της $SU(3)$ (οι οποίες είναι πάντα μοναδικές) για $U(n)$, με $n = 6, 10, 15, 21, 28, 36$ ανάλογα με το σε ποια $U(N)$ ανήκει ο αριθμός M των πρωτονίων ή νετρονίων σθένους. Στις στήλες C δίνονται αντίστοιχα οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις με την υψηλότερη ιδιοτιμή του τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της $SU(3)$. Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν με χρήση του κώδικα UNTOU3 [3]. 26

Κεφάλαιο 1

Αλγεβρικά Πυρηνικά Πρότυπα

Οι ατομικοί πυρήνες, αποτελούμενοι από πρωτόνια και νετρόνια, εμφανίζουν τόσο μονοσωματιδιακή δομή, όσο και συλλογικές ιδιότητες. Η μονοσωματιδιακή "συμπεριφορά" φαίνεται σε διάφορες εκφάνσεις όπως οι μαγικοί αριθμοί, οι μαγνητικές ροπές κ.ά., δίνοντας έτσι το έναυσμα για το **Πρότυπο Φλοιών** [4, 5]. Επιπρόσθετα, εξετάζοντας τα περιστροφικά φάσματα πυρήνων, προέκυψε η ανάγκη για ανάπτυξη συλλογικών ή γεωμετρικών προτύπων.

Ωστόσο, από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα, ένα νέο "είδος" προτύπων μπόρεσε να ενοποιήσει το Πρότυπο των Φλοιών με συλλογικά πρότυπα. Τα νέα αυτά πρότυπα ενέχουν την έννοια της **συμμετρίας** και ονομάζονται **αλγεβρικά πρότυπα**. Συνήθως τα αλγεβρικά πρότυπα χρησιμοποιούν την Θεωρία Ομάδων, τα εργαλεία της και τα συμπεράσματα της ώστε να αναδείξουν τις συμμετρίες που διέπουν τα διάφορα πυρηνικά συστήματα.

Στο παρόν Κεφάλαιο σκιαγραφούνται τα σημαντικότερα αλγεβρικά πρότυπα που αποτέλεσαν την αρχή για την μελέτη των πυρήνων με βάση την αλγεβρική μέθοδο.

1.1 Πρότυπο SU(3) του Elliott

Η πρώτη απόπειρα αλγεβρικής προσέγγισης της δομής του πυρήνα έγινε από τον Elliott [6--9]. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για μία αλγεβρική θεωρία η οποία περιγράφει μικροσκοπικά τους πυρήνες ως συστήματα πολλών νουκλεονίων "επιστρατεύοντας" ομάδες συμμετριών. Με την αξιοποίηση των μαθηματικών αυτών εννοιών αναδύεται η συλλογική συμπεριφορά των πυρήνων, δίνοντας ερμηνεία σε πληθώρα φαινομένων.

Το πρότυπο SU(3) του Elliott βασίζεται στη θεώρηση πως η κίνηση ενός νουκλεονίου εντός του πυρήνα, μπορεί να προσεγγιστεί δυναμικά από τη δράση ενός μέσου πεδίου που δημιουργείται από όλα τα υπόλοιπα νουκλεόνια και έχει μορφή τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή.

1.2 Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων (IBM)

Το Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων (Interacting Boson Model) ή όπως είναι ευρύτερα γνωστό στην επιστημονική κοινότητα IBM, δημιουργήθηκε από τους Akito Arima και Francesco Iachello και εισήχθη το 1975 [10].

Σύμφωνα με το πρότυπο αυτό, τα νουκλεόνια των άρτιων - άρτιων πυρήνων (τα οποία είναι φερμιόνια) σχηματίζουν ζεύγη τα οποία συμπεριφέρονται ως μποζόνια. Τα μποζόνια που θεωρούνται μπορούν να έχουν είτε στροφορμή $L = 0$ (s -μποζόνια) είτε στροφορμή $L = 2$ (d -μποζόνια). Η εικόνα αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα πως οι χαμηλοενεργειακές καταστάσεις μεσοβαρέων πυρήνων καθορίζονται από τα νουκλεόνια σθένους με τον υπόλοιπο πυρήνα να παραμένει αδρανής.

Κρίνεται σκόπιμο να σημειωθεί πως στην πρώτη εκδοχή του προτύπου (γνωστή και ως IBM-1) δεν γίνεται διάκριση μεταξύ πρωτονίων και νετρονίων, δηλαδή ο πυρήνας αποτελείται απλά από νουκλεόνια. Μια επέκταση του προτύπου η οποία είναι πιο κοντά στην πυρηνική πραγματικότητα είναι το IBM-2 [11] στο οποίο γίνεται διάκριση πρωτονίων και νετρονίων. Συνεπώς υπάρχουν τεσσάρων ειδών μποζόνια, $s_{\pi,\nu}$ με στροφορμή $L = 0$ και $d_{\pi,\nu}$ με στροφορμή $L = 2$. Και πάλι όμως τα ζεύγη αποτελούνται από ομοειδή νουκλεόνια (ζεύγη πρωτονίων ή ζεύγη νετρονίων).

Μια τέτοια θεώρηση είναι ασφαλής σε μεσοβαρείς πυρήνες και πυρήνες μεγαλύτερου βάρους, καθότι τα πρωτόνια και τα νετρόνια τους ανήκουν σε διαφορετικούς φλοιούς. Έτσι είναι ιδιαίτερα απίθανο να σχηματιστεί ζεύγος πρωτονίου - νετρονίου. Ωστόσο, ο σχηματισμός ζευγών πρωτονίου - νετρονίου είναι μια "κανονικότητα" για τα ελαφρά πυρηνικά συστήματα, όπου πρωτόνια και νετρόνια καταλαμβάνουν τον ίδιο φλοιό. Έτσι προέκυψαν νέες επεκτάσεις με τα χαρακτηριστικά ονόματα IBM-3 [12] και IBM-4 [13] που επέτρεπαν το σχηματισμό τέτοιων ζευγών.

Τέλος, υπάρχουν και άλλες επεκτάσεις του προτύπου αλληλεπιδρώντων μποζονίων. Το **sdg-IBM** [14] επιτρέπει την ύπαρξη και ενός νέου είδους μποζονίων με στροφορμή $L = 4$ (g -μποζόνια). Για τους πυρήνες οι οποίοι δεν έχουν άρτιο αριθμό πρωτονίων ή νετρονίων, αναπτύχθηκε το **Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων - Φερμιονίων (Interacting Boson - Fermion Model ή IBFM)**. Στη πρώτη του εκδοχή (**IBFM-1**) [15] δεν γίνεται διάκριση μεταξύ πρωτονίων και νετρονίων, ενώ στην μετέπειτα εκδοχή του (**IBFM-2**) [15] τα νουκλεόνια διακρίνονται.

1.3 Pseudo-SU(3) συμμετρία

Η εισαγωγή των όρων ψευδο-σπιν και ψευδο-τροχιακή στροφορμή, η οποία έγινε (σχεδόν) ταυτόχρονα από τις ομάδες των K.T. Hecht [16] και A. Arima [17] βασίστηκε στις εξής παρατηρήσεις:

- πως τα τροχιακά του προτύπου των φλοιών $(n, \ell, j = \ell + \frac{1}{2})$ και $(n - 1, \ell + 2, j = \ell + \frac{3}{2})$ εντός του φλοιού $\eta = 2n + \ell$ είναι σχεδόν εκφυλισμένα.

- πως η αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς "σπρώχνει" το τροχιακό με τη μεγαλύτερη τιμή στροφορμής j σε απόσταση από τα άλλα τροχιακά του φλοιού η , απομονώνοντάς το.

Ορίζοντας ως ψευδο-σπιν το μέγεθος $\tilde{s} = \frac{1}{2}$ και ψευδο-τροχιακή στροφορμή $\tilde{\ell} = \ell + 1$ αντιστοιχίζονται τα σχεδόν εκφυλισμένα τροχιακά που προαναφέρθηκαν. Επι παραδείγματι: έστω ο $\eta = 3$ φλοιός. Τα τροχιακά $2p_{3/2}$, $1f_{5/2}$ και $2p_{1/2}$ θα γίνουν τροχιακά του ψευδο-φλοιού $\tilde{\eta} = 2$ τα οποία έχουν ψευδο-τροχιακή στροφορμή $\tilde{\ell} = 2, 0$ και ψευδο-σπιν $\tilde{s} = 1/2$, ενώ το τροχιακό με τη μεγαλύτερη τιμή j (δηλαδή το $1f_{7/2}$ τίθεται εκτός του ψευδο-φλοιού $\tilde{\eta} = 2$. Επιπλέον, από τον $\tilde{\eta} = 4$ ψευδο-φλοιό θα αποχωρήσει το $1g_{9/2}$ τροχιακό. Τα τρία ψευδο-τροχιακά μαζί με το "εκτοπισμένο" τροχιακό από τον ανώτερο φλοιό, κατασκευάζουν τον μαγικό αριθμό 50. Οφείλει κανείς να παρατηρήσει στην ανωτέρω διαδικασία πως εντός του νέου ψευδο-φλοιού προκύπτουν τροχιακά με διαφορετικές ομοτιμίες. Τα ψευδο-τροχιακά έχουν τιμή ομοτιμίας $(-1)^{\tilde{\eta}+1} = -1$ ενώ το τροχιακό $1g_{9/2}$ έχει θετική ομοτιμία προερχόμενο από το φλοιό $\eta = 3$. Επειδή ο νεοεισαχθείς ψευδο-φλοιός εμφανίζει $SU(3)$ συμμετρία, επιλέγεται η συμμετρία να ονομάζεται **ψεύδο- $SU(3)$ συμμετρία (pseudo- $SU(3)$)** [18] και συμβολίζεται συχνά ως $\widetilde{SU}(3)$.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Ιντερλούδιο

2.1 Άλγεβρες Lie

2.1.1 Βασικές Έννοιες

Ένα σύνολο στοιχείων X_α , όπου $\alpha = 1, \dots, r$ θα σχηματίζει μία \mathcal{G} άλγεβρα Lie (συμβολικά $X_\alpha \in \mathcal{G}$)¹ όταν ικανοποιούνται τα εξής αξιώματα:

Αξίωμα 1. Ο μεταθέτης δύο οποιωνδήποτε στοιχείων της άλγεβρας είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της άλγεβρας, δηλαδή:

$$[X_\rho, X_\sigma] = \sum_{\tau} C_{\rho\sigma}^{\tau} X_{\tau}. \quad (2.1)$$

Αξίωμα 2. Ο διπλός μεταθέτης τριών στοιχείων ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi:

$$[X_\rho, [X_\sigma, X_\tau]] + [X_\sigma, [X_\tau, X_\rho]] + [X_\tau, [X_\rho, X_\sigma]] = 0. \quad (2.2)$$

Οι συντελεστές $C_{\rho\sigma}^{\tau}$ καλούνται **σταθερές δομής Lie (Lie structure constants)** και μάλιστα καθορίζουν την ίδια την άλγεβρα. Ειδικότερα, ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

$$C_{\rho\sigma}^{\tau} = -C_{\sigma\rho}^{\tau},$$

$$C_{\rho\sigma}^{\mu} C_{\mu\tau}^{\nu} + C_{\sigma\tau}^{\mu} C_{\mu\rho}^{\nu} + C_{\tau\rho}^{\mu} C_{\mu\sigma}^{\nu} = 0,$$

όπου οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υπονοούν άθροιση (αθροιστική σύμβαση Einstein).

¹Οι άλγεβρες συμβολίζονται είτε με πεζά είτε με κεφαλαία καλλιγραφικά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου.

2.1.2 Αναλλοίωτοι Τελεστές Casimir

Έστω ο τελεστής C ο οποίος έχει την ιδιότητα να μετατίθεται με όλα στοιχεία μιας Lie άλγεβρας g . Η παραπάνω πρόταση διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$[C, X_\tau] = 0, \forall X_\tau \in g. \quad (2.3)$$

Σε αυτή την περίπτωση ο τελεστής C θα ονομάζεται αναλλοίωτος τελεστής Casimir ή απλά **τελεστής Casimir** της άλγεβρας. Ο κάθε τελεστής Casimir μπορεί να περιλαμβάνει οποιαδήποτε δύναμη των στοιχείων X_τ (π.χ. γραμμικός, τετράγωνο, κύβος,...).

Ένας τελεστής Casimir θα είναι **τάξης p** και θα συμβολίζεται C_p εάν περιλαμβάνει γινόμενα p στοιχείων της άλγεβρας, δηλαδή:

$$C_p = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} F^{\alpha_1, \dots, \alpha_p} X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \cdots X_{\alpha_p}. \quad (2.4)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει κανείς να παρατηρήσει πως εάν $[C, X] = 0$ τότε προφανώς και $[\alpha C, X] = [C^2, X] = \dots = 0$.

2.1.3 Πραγμάτωση Αλγεβρών Lie

Οποιοδήποτε μαθηματικό σύστημα με κατάλληλες ιδιότητες και πράξεις, αποτελεί μια **πραγμάτωση (realization)** μιας αφηρημένης μαθηματικής δομής, όταν δύναται να οριστεί μια απεικόνιση μεταξύ της αφηρημένης δομής και του συγκεκριμένου μαθηματικού συστήματος, έτσι ώστε από την απεικόνιση αυτή οι πράξεις της αφηρημένης δομής να αντιστοιχίζονται στις πράξεις που έχουν οριστεί στο μαθηματικό σύστημα.

Οι άλγεβρες Lie μπορούν να πραγματωθούν με ποικίλους τρόπους. Οι πιο συχνά εμφανιζόμενοι είναι:

- (i) **Διαφορική πραγμάτωση:** Τα στοιχεία της άλγεβρας εκφράζονται ως διαφορικοί τελεστές της μορφής $E_{\alpha\beta}$, οι οποίοι επιδρούν πάνω σε συναρτήσεις $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, με

$$E_{\alpha\beta} = x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta}. \quad (2.5)$$

Οι σχέσεις μετάθεσης που ορίζουν την άλγεβρα προκύπτουν από το μεταθέτη:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, x_\beta \right] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.6)$$

- (ii) **Πραγμάτωση μέσω πινάκων:** Εδώ οι άλγεβρες πραγματώνονται μέσω τετραγωνικών πινάκων $n \times n$ οι οποίοι επιδρούν πάνω σε ανύσματα στήλες $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ με τα στοιχεία $E_{\alpha\beta}$ να

είναι της μορφής:

$$E_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right) \quad (2.7)$$

όπου εμφανίζεται η μονάδα στην n -οστή στήλη της m -οστής σειράς. Εδώ, οι σχέσεις μετάθεσης που ορίζουν την άλγεβρα προκύπτουν από τις βασικές σχέσεις μετάθεσης των πινάκων.

- (iii) **Πραγμάτωση μέσω μποζονικών τελεστών δημιουργίας/καταστροφής (Πραγμάτωση Jordan - Schwinger):** Στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία της άλγεβρας ορίζονται ως n τω πλήθει γινόμενα μεταξύ μποζονικών τελεστών δημιουργίας, b_α^\dagger , και καταστροφής, b_α , τα οποία δρουν στο κενό του προβλήματος $|0\rangle$, δηλαδή:

$$E_{\alpha\beta} = b_\alpha^\dagger b_\beta, \quad (2.8)$$

με τις σχέσεις μετάθεσης που ορίζουν την άλγεβρα (σχέσεις μετάθεσης Bose) να είναι της μορφής:

$$[b_\alpha, b_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.9)$$

2.2 Ομάδες Lie

2.2.1 Ομάδες Μετασχηματισμών

Ομάδα G ονομάζεται κάθε σύνολο στοιχείων $\{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ εφοδιασμένο με μία πράξη "πολλαπλασιασμού", που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

Αξίωμα 3. Κλειστότητα: Εάν $g_i, g_j \in G$ τότε και το γινόμενο τους $g_k \in G$, δηλαδή

$$g_i \circ g_j = g_k.$$

Αξίωμα 4. Προσεταιριστικότητα: Εάν $g_i, g_j, g_k \in G$ τότε θα ισχύει:

$$(g_i \circ g_j) \circ g_k = g_i \circ (g_j \circ g_k).$$

Αξίωμα 5. Ύπαρξη Ουδέτερου Στοιχείου (e): Το σύνολο G περιέχει στοιχείο e το οποίο καλείται ουδέτερο, με την ιδιότητα:

$$e \circ g_i = g_i \circ e = g_i.$$

Αξίωμα 6. Ύπαρξη Αντιστρόφου: Για κάθε στοιχείο $g_i \in G$ υπάρχει το (αντίστροφο) στοιχείο g_i^{-1} τέτοιο ώστε:

$$g_i \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g_i = e.$$

Οι ομάδες μετασχηματισμών μπορούν να έχουν διακριτά στοιχεία (διακριτές ομάδες) ή και συνεχή στοιχεία (συνεχείς ομάδες). Στις διακριτές ομάδες, το πλήθος των στοιχείων τους μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Το πλήθος αυτό ονομάζεται *τάξη* της ομάδας. Στην περίπτωση των συνεχών ομάδων τάξη της ομάδας καλείται το πλήθος των παραμέτρων που απαιτείται για τον καθορισμό ενός στοιχείου.

2.2.2 Συνεχείς Ομάδες Πινάκων

Μεταξύ των ομάδων μετασχηματισμών, διακρίνονται για τη σημαντικότητα τους εκείνες οι ομάδες οι οποίες έχουν ως στοιχεία **τετραγωνικούς πίνακες** της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

με διάσταση $n \times n$. Για τους πίνακες αυτούς ικανοποιούνται τα αξιώματα των ομάδων:

1. Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων εξασφαλίζει ως πράξη την κλειστότητα.
2. Ο πολλαπλασιασμός των πινάκων εξασφαλίζει ως πράξη την προσεταιριστικότητα.
3. Ο μοναδιαίος πίνακας \mathbb{I} είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας.
4. Εάν για τον πίνακα A ισχύει $\det A \neq 0$, ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, συνεπώς ικανοποιείται και η ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου.

Μία ομάδα μετασχηματισμών μετασχηματίζει το (εν γένει μιγαδικό) διάνυσμα $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ στο \mathbf{z}' σύμφωνα με τη σχέση $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, με τις συντεταγμένες να ικανοποιούν την:

$$z'_i = \sum_k A_{ik} z_k, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.10)$$

όπου A_{ik} τα στοιχεία πίνακα των (εν γένει μιγαδικών) πινάκων A .

Στη συνέχεια παρουσιάζονται επιγραμματικά κάποιες χαρακτηριστικές περιπτώσεις συνεχών ομάδων πινάκων.

Γενικές Γραμμικές Ομάδες

Στην ουσία πρόκειται για τους πλέον απλούς γραμμικούς μετασχηματισμούς. Συμβολικά οι γενικές γραμμικές ομάδες (General Linear Groups) γράφονται:

- $GL(n, \mathbb{C})$ με στοιχεία μιγαδικούς πίνακες. Η τάξη της ομάδας είναι $r = 2n^2$, δηλαδή χρειάζονται r πραγματικές παράμετροι ώστε να προσδιοριστεί πλήρως ο μετασχηματισμός.
- $GL(n, \mathbb{R})$ με στοιχεία πραγματικούς πίνακες. Εδώ προφανώς χρειάζονται οι μισές παράμετροι σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, για να προσδιοριστεί πλήρως ο μετασχηματισμός. Συνεπώς η τάξη της ομάδας είναι $r = n^2$.

Ειδικές Γραμμικές Ομάδες

Εάν στις Γενικές Γραμμικές Ομάδες μετασχηματισμών επιβληθεί και ο επιπλέον περιορισμός η ορίζουσα των πινάκων να είναι μονάδα, δηλαδή:

$$\det A = +1,$$

τότε οι ομάδες χαρακτηρίζονται ως Ειδικές Γραμμικές Ομάδες (Special Linear Groups) μετασχηματισμών. Συμβολικά γράφονται:

- $SL(n, \mathbb{C})$ με στοιχεία μιγαδικούς πίνακες. Η τάξη τώρα είναι $r = 2(n^2 - 1)$ λόγω του περιορισμού $\det A = +1$.
- $SL(n, \mathbb{R})$ με στοιχεία πραγματικούς πίνακες. Η τάξη εδώ είναι $r = n^2 - 1$ λόγω του περιορισμού $\det A = +1$.

Μοναδιακές Ομάδες

Οι μοναδιακές ομάδες (Unitary Groups) μετασχηματισμών προκύπτουν από τις γραμμικές ομάδες μετασχηματισμών όταν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$A^\dagger A = \mathbb{I}.$$

Συμβολίζονται ως $U(n, \mathbb{C})$ και η τάξη τους είναι $r = n^2$. Ορίζονται στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} και για το λόγο αυτό είθισται να μην σημειώνεται στο σύμβολο της ομάδας το σύνολο, αποκτώντας ο συμβολισμός την απλούστερη μορφή $U(n)$.

Οι μοναδιακές ομάδες έχουν την ιδιότητα να αφήνουν αναλλοίωτη την ποσότητα

$$\sum_{i=1}^n z_i z_i^*.$$

Ειδικές Μοναδιακές Ομάδες

Ο συνδυασμός της μοναδιακής συνθήκης $A^\dagger A = \mathbb{I}$ και της ειδικής συνθήκης $\det A = +1$ οδηγεί στις Ειδικές Μοναδιακές Ομάδες (Special Unitary Groups) μετασχηματισμών. Συμβολίζονται $SU(n)$ και η τάξη τους είναι $r = n^2 - 1$ (δηλαδή μία λιγότερη πραγματική παράμετρος από ότι στις $U(n)$).²

Ορθογώνιες Ομάδες

Οι ορθογώνιες ομάδες (Orthogonal Groups) μετασχηματισμών ορίζονται από τη συνθήκη ορθογωνιότητας

$$A^t A = \mathbb{I}.$$

Στις εφαρμογές συνήθως το σύνολο είναι εκείνο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} . Έτσι, όταν δεν σημειώνεται το σύνολο, υπονοείται εκείνο των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς:

- $O(n, \mathbb{C})$ όταν οι ομάδες έχουν στοιχεία μιγαδικούς πίνακες. Εδώ η τάξη δίνεται από τη σχέση $r = n(n - 1)$.
- $O(n)$ όταν οι ομάδες έχουν στοιχεία πραγματικούς πίνακες. Η τάξη πλέον δίνεται από τη σχέση $r = \frac{1}{2}n(n - 1)$.

Οι ορθογώνιες ομάδες έχουν την ιδιότητα να αφήνουν αναλλοίωτη την ποσότητα

$$\sum_{i=1}^n z_i^2,$$

για τη μεν "μιγαδική" περίπτωση, ενώ για τη δε "πραγματική" η ποσότητα που μένει αναλλοίωτη υπό τους γραμμικούς μετασχηματισμούς είναι η

$$\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Ειδικές Ορθογώνιες Ομάδες

Ο συνδυασμός της συνθήκης ορθογωνιότητας $A^t A = \mathbb{I}$ και της ειδικής συνθήκης $\det A = +1$ οδηγεί στις Ειδικές Ορθογώνιες Ομάδες (Special Orthogonal Groups) μετασχηματισμών. Συμβολίζονται:

²Για τις Ειδικές Μοναδιακές Ομάδες υπάρχει μια ιδιαίτερη περίπτωση, όπου συμβολίζεται $SU^*(2n)$ με τάξη $r = (2n)^2 - 1$. Οι ομάδες αυτές έχουν ως στοιχεία πίνακες A της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2^* & A_1^* \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

όπου οι A_1 και A_2 είναι μιγαδικοί πίνακες διάστασης $n \times n$ με την ιδιότητα $\text{Tr } A_i + \text{Tr } A_i^* = 0$, όπου $i = 1, 2$.

- $SO(n, \mathbb{C})$ όταν τα στοιχεία τους είναι μιγαδικοί πίνακες και η τάξη τους είναι $r = n(n-1)$.
- $SO(n)$ όταν τα στοιχεία τους είναι πραγματικοί πίνακες και η τάξη τους είναι $r = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Εδώ παρατηρεί κανείς πως η ειδική συνθήκη δεν οδήγησε σε μείωση της τάξης των ομάδων $SO(n)$ σε σχέση με τις $O(n)$, κάτι το οποίο συνέβη κατά τη μετάβαση από τις $U(n)$ στις $SU(n)$. Αυτή η διαφοροποίηση εμφανίζεται διότι η ειδική συνθήκη δεν αποτελεί επιπλέον περιορισμό, αφού η ορίζουσα των ορθογώνιων πινάκων είναι εξ αρχής ± 1 .³

Οι ομάδες μετασχηματισμών $SO(n)$ βρίσκουν άμεση εφαρμογή στην Κβαντική και Κλασική μηχανική. Χαρακτηριστικότερη περίπτωση είναι εκείνη της στροφορμής.

Συμπλεκτικές Ομάδες

Αρχικά, επιλέγεται τα διανύσματα \mathbf{x} και \mathbf{y} να διαχωριστούν ως εξής:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \end{cases}.$$

Οι Συμπλεκτικές Ομάδες (Symplectic Groups) μετασχηματισμών ορίζονται έτσι ώστε να αφήνουν υπό το μετασχηματισμό αναλλοίωτη την ποσότητα:

$$\sum_{i=1}^n x_i y'_i - x'_i y_i,$$

χωρίς να υπάρχει περιορισμός για το εάν τα διανύσματα \mathbf{x}, \mathbf{y} είναι πραγματικά ή μιγαδικά. Συμβολίζονται ως:

- $Sp(2n, \mathbb{C})$ όταν τα διανύσματα είναι μιγαδικά και η τάξη της ομάδας είναι $r = 2n(2n+1)$.
- $Sp(2n, \mathbb{R})$ όταν τα διανύσματα είναι πραγματικά και η τάξη της ομάδας είναι $r = n(2n+1)$.

Μοναδιακές Συμπλεκτικές Ομάδες

Επιβάλλοντας τη μοναδιακή συνθήκη $A^\dagger A = \mathbb{I}$ σε μία συμπλεκτική ομάδα, η ομάδα που προκύπτει ονομάζεται πλέον Μοναδιακή Συμπλεκτική Ομάδα (Unitary Symplectic Group) και

³Για τις Ειδικές Ορθογώνιες Ομάδες υπάρχει μια ιδιαίτερη περίπτωση, όπου συμβολίζεται $SO^*(2n)$ με τάξη $r = 2n(2n-1)$. Οι ομάδες αυτές έχουν ως στοιχεία πίνακες A της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2^* & A_1^* \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

όπου οι A_1 και A_2 είναι μιγαδικοί πίνακες διάστασης $n \times n$ με την ιδιότητα $A_i = -A_i^t$ όπου $i = 1, 2$.

συμβολικά γράφεται $USp(2n, \mathbb{C})$. Πολύ συχνά το σύμβολο U που περιγράφει τη μοναδιακότητα παραλείπεται και για αυτό θα πρέπει κανείς να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός στη βιβλιογραφία.

Τόσο οι πραγματικές Συμπλεκτικές Ομάδες όσο και οι μιγαδικές διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην Κβαντική Μηχανική. Στην Κλασική Μηχανική βρίσκουν εφαρμογή οι πραγματικές Συμπλεκτικές Ομάδες (κανονικοί μετασχηματισμοί και εξισώσεις Hamilton).

2.3 Σύνδεση Αλγεβρών και Ομάδων Lie

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η σχέση που συνδέει τις άλγεβρες Lie με τις αντίστοιχες ομάδες. Έστω g η άλγεβρα Lie και G η αντίστοιχη ομάδα Lie. Η σχέση που τις συνδέει είναι:

$$\begin{aligned} \text{Άλγεβρα Lie :} & \quad X_i \in g, \forall i = 1, \dots, r, \\ \text{Ομάδα Lie :} & \quad \exp \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i X_i \right) \in G, \end{aligned}$$

όπου α_i οι παράμετροι της ομάδας, με το i να φτάνει την τιμή που ισούται με την τάξη της ομάδας.

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως εκθετική απεικόνιση. Για άλγεβρες που έχουν τάξη $r = 1$, το εκθετικό παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} e^{\alpha X} &= 1 + \alpha X + \frac{1}{2!} \alpha^2 X^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 X^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k X^k}{k!}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

με χρήση δυναμοσειρών. Το απειροστό στοιχείο της ομάδας προκύπτει στο όριο όπου το $\alpha \rightarrow 0$. Από το ανάπτυγμα (2.13):

$$e^{\alpha X} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 1 + \alpha X. \quad (2.14)$$

2.4 Η Ομάδα SU(3)

Το σύνολο των 3×3 μοναδιακών πινάκων U με $\det(U) = 1$ θα αποτελεί μια Ειδική Μοναδιακή Ομάδα στις τρεις διαστάσεις, την $SU(3)$.

2.4.1 Γεννήτορες

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η $SU(3)$ αναμένεται να έχει $3^2 - 1 = 8$ γραμμικά ανεξάρτητους, άιχνους και ερμητιανούς γεννήτορες οι οποίοι θα γράφονται συμβολικά λ_i με $i = 1, \dots, 8$. Στην

θεμελιώδη αναπαράσταση, οι πίνακες αυτοί θα είναι τετραγωνικοί διάστασης 3×3 και η πλέον συνηθισμένη μορφή στην οποία γράφονται είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

και είναι γνωστοί ως **Πίνακες Gell - Mann**. Οι τρεις πρώτοι πίνακες είναι οι πίνακες στροφορμής για $\ell = 1$ και κλείνουν την άλγεβρα της ομάδας $SU(2)$ (Δείτε Παράρτημα I.3). Οι υπόλοιποι πέντε γεννήτορες είναι συνιστώσες ενός σφαιρικού τανυστικού τελεστή δεύτερης τάξεως. Σύμφωνα με τους παραπάνω γεννήτορες, οι σχέσεις μετάθεσής τους συνοψίζονται ως εξής:

$$\left[\frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j \right] = if_{ijk} \left(\frac{1}{2}\lambda_k \right), \quad (2.16)$$

όπου f_{ijk} είναι συντελεστές που καλούνται **σταθερές δομής (structure constants)** και είναι πλήρως αντισυμμετρικοί ως προς όλους τους δείκτες.

Η σχέση αυτή είναι η **άλγεβρα της $SU(3)$** .

2.4.2 Ταξινόμηση των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων

Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$ ομάδας μπορούν να χαρακτηριστούν με δύο ακέραιους θετικούς αριθμούς f_1 και f_2 , όπου $f_1 \geq f_2$. Οι αριθμοί αυτοί σχετίζονται με μια διαμέριση του αθροίσματος $f_1 + f_2$. Για ευκολία, στην περίπτωση της $SU(3)$, είθισται να χρησιμοποιούνται οι αριθμοί $\lambda = f_1 - f_2$ και $\mu = f_2$ (βλ. Σχήμα 2.1).

Διαγραμματικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει για την απεικόνιση μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων τα **διαγράμματα Young (Young Tableaux)**. Σε κάθε διάγραμμα Young τα κουτιά κάθε γραμμής δείχνουν το πλήθος των συμμετροποιημένων σωματιδίων ενώ ο αριθμός στηλών δείχνει το πλήθος των αντι-συμμετροποιήσεων.

2.4.3 Τελεστές Casimir

Κάθε τελεστής ο οποίος προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων των τελεστών μιας ομάδας και μάλιστα μετατίθεται με όλους τους τελεστές της καλείται **τελεστής Casimir**.



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση διαγραμμάτων Young. Στο σχήμα (i) δίνεται διάγραμμα Young με πλήθος f_1 κυττών στην πρώτη σειρά και f_2 στην δεύτερη. Στο σχήμα (ii) δίνεται το ίδιο διάγραμμα Young και παρουσιάζεται σχηματικά η σύμβαση με τους αριθμούς λ και μ .

Μπορεί κανείς να αποδείξει πως κάθε ομάδα τάξης p θα έχει και p πλήθος τελεστών Casimir. Στην περίπτωση της $SU(3)$ που έχει τάξη $p = 2$ αναμένεται να υπάρχουν δύο τελεστές Casimir.

Επιπρόσθετα, ανάλογα με την μορφή με την οποία συμμετέχουν οι διάφοροι τελεστές της ομάδας μέσα στην έκφραση του εκάστοτε τελεστή Casimir, καθορίζουν και την τάξη του τελεστή αυτού. Έτσι, στην περίπτωση της $SU(3)$ ο τελεστής Casimir δεύτερης τάξεως δίνεται από την σχέση:

$$C_2 = \sum_{j=1}^8 \lambda_j^2, \quad (2.17)$$

όπου έπειτα από πράξεις προκύπτει πως για την αναπαράσταση (λ, μ) ισχύει:

$$C_2(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + \lambda\mu, \quad (2.18)$$

ενώ ο τρίτης τάξης από την σχέση:

$$C_3 = \sum_j \sum_k \sum_l d_{jkl} \lambda_j \lambda_k \lambda_l, \quad (2.19)$$

με τους συντελεστές d_{jkl} να είναι γνωστοί. Οι συντελεστές αυτοί ονομάζονται και εδώ **σταθερές δομής (structure constants)**, ωστόσο αυτή τη φορά οι συντελεστές είναι συμμετρικοί ως προς όλους τους δείκτες. Έπειτα από πράξεις προκύπτει πως για την αναπαράσταση (λ, μ) ισχύει:

$$C_3(\lambda, \mu) = \frac{1}{9} (\lambda - \mu) (2\lambda + \mu + 3) (\lambda + 2\mu + 3). \quad (2.20)$$

2.5 Σφαιρικοί Τανυστικοί Τελεστές

Ορισμένα φυσικά μετρούμενα μεγέθη (όπως οι ηλεκτρικές/μαγνητικές πολυπολικές ροπές) αντιστοιχούν σε σύνολα τελεστών τα οποία ικανοποιούν μαζί με τους τελεστές της στροφορμής συγκεκριμένες σχέσεις μετάθεσης.

Ένας σφαιρικός τανυστής $T_q^{(k)}$ τάξης k , αποτελείται από ένα σύνολο $2k + 1$ τελεστών, οι οποίοι διακρίνονται από τον δείκτη $q = -k, -k + 1, \dots, k - 1, k$, όπου ικανοποιούν συγκεκριμένες σχέσεις μετάθεσης με τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης της στροφορμής J_{\pm} καθώς και με τον τελεστή J_z :

$$[J_{\pm}, T_q^{(k)}] = [J_x \pm iJ_y, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}, \quad (2.21)$$

$$[J_z, T_q^{(k)}] = q T_q^{(k)}. \quad (2.22)$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τανυστή τάξης λ αποτελούν οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις Y_{μ}^{λ} .

Πιο συγκεκριμένα, κάθε συνιστώσα του σφαιρικού τανυστικού τελεστή $T_q^{(k)}$ χαρακτηρίζεται από την ίδια στροφορμή ℓ και μία συγκεκριμένη προβολή της m_{ℓ} .

Το Παράδειγμα της Ηλεκτρικής Τετραπολικής Ροπής

Από την Κλασική Ηλεκτροδυναμική, η ηλεκτρική τετραπολική ροπή Q_{ij} μίας κατανομής φορτίου $\rho(\mathbf{r})$ ορίζεται να είναι

$$Q_{ij} = \int (3\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.23)$$

Για την μετάβαση από την Κλασική στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική, αρκεί η πυκνότητα φορτίου να αντικατασταθεί από την πυκνότητα πιθανότητας επί το στοιχειώδες φορτίο e . Έτσι,

$$Q_{ij} = e \int \Psi^*(\mathbf{r})(3\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j - r^2 \delta_{ij}) \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.24)$$

Οι 9 συνιστώσες της ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των σφαιρικών αρμονικών με $\ell = 2$. Επί παραδείγματι, η Q_{zz} γράφεται:

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= e \int \Psi^*(\mathbf{r})(3\mathbf{r}_z \mathbf{r}_z - r^2 \delta_{zz}) \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= e \int \Psi^*(\mathbf{r})(3z^2 - r^2) \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ισχύει για την σφαιρική αρμονική Y_{20} πως

$$\begin{aligned} Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} \\ 2z^2 - x^2 - y^2 &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20} \\ 3z^2 - r^2 &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Άρα η Q_{zz} συνιστώσα γίνεται,

$$Q_{zz} = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int \Psi^*(\mathbf{r})r^2Y_{20}\Psi(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (2.26)$$

Συνεπώς, είναι προφανής η σύνδεση της ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής με τις σφαιρικές αρμονικές τάξης Y_{2m} , $-2 \leq m \leq 2$. Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή, **μπορεί να κατασκευαστεί σφαιρικός τανυστικός τελεστής τάξης 2, ο οποίος να περιγράφει την ηλεκτρική τετραπολική ροπή.**

Έχει επικρατήσει να ορίζεται ο σφαιρικός τανυστικός τελεστής μέσω της σχέσης:

$$Q_0^{(2)} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}}r^2Y_{20}, \quad (2.27)$$

ενώ συχνά καλείται **ηλεκτρική τετραπολική ροπή** η αναμενόμενη τιμή του παραπάνω τελεστή στην κατάσταση με τη μέγιστη δυνατή προβολή στροφορμής. Δηλαδή,

$$Q = \langle ll|Q_0^{(2)}|ll \rangle. \quad (2.28)$$

Η ηλεκτρική τετραπολική ροπή συνήθως μετράται σε μονάδες $e(fm)^2$ ή $e\text{b}$, όπου το $\text{b} \equiv 10^2 fm^2$ ονομάζεται *barn*.

2.5.1 Τανυστικό Πινόμενο Σφαιρικών Τανυστικών Τελεστών

Κάθε σφαιρικός τανυστικός τελεστής τάξης k , συμπεριφέρεται ως ποσότητα με στροφορμή k και προβολή της στροφορμής q σε κάποιο άξονα (έστω στον z), με το q να βρίσκεται στο διάστημα $-k \leq q \leq k$. Για να συνδυαστούν δύο σφαιρικοί τανυστικοί τελεστές προς τη δημιουργία ενός νέου, αρκεί κανείς να σκεφτεί πως θα συνδυάζονταν δύο στροφορμές.

Η διαδικασία, λοιπόν, του συνδυασμού δύο σφαιρικών τανυστικών τελεστών $T_{q_1}^{(k_1)}$, $T_{q_2}^{(k_2)}$ προς σχηματισμό του νέου $T_q^{(k)}$ ονομάζεται **τανυστικό γινόμενο** και εκφράζεται από τη σχέση:

$$T_q^{(k)} = \left[T_{q_1}^{(k_1)} \times T_{q_2}^{(k_2)} \right]_q^{(k)} = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1q_1k_2q_2|kq \rangle T_{q_1}^{(k_1)} T_{q_2}^{(k_2)}, \quad (2.29)$$

με τον παράγοντα $\langle k_1q_1k_2q_2|kq \rangle$ να είναι κατάλληλος συντελεστής Clebsch-Gordan, σε πλήρη αντιστοιχία με τη σύζευξη στροφορμών. Αποτελεί σημείο άξιο παρατήρησης πως ο νέος σφαιρικός τανυστικός τελεστής δεν εξαρτάται από τις τιμές των δεικτών q_1 και q_2 , εφόσον έχουν εκτελεστεί τα αθροίσματα πάνω στις τιμές των δεικτών αυτών.

2.5.2 Στοιχεία Πίνακα Τανυστικών Τελεστών - Θεώρημα Wigner-Eckart

Όπως ήδη έχει επισημανθεί, οι (σφαιρικοί) τανυστικοί τελεστές περιγράφουν φυσικά μεγέθη. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό λοιπόν να μπορεί κανείς να υπολογίζει αναμενόμενες τιμές των μεγε-

θών αυτών, δηλαδή στοιχεία πίνακα των τελεστών. Γενικά, ο υπολογισμός τέτοιων στοιχείων πίνακα είναι μια ιδιαίτερα επίπονη διαδικασία εκ πρώτης όψης. Ωστόσο, υπάρχουν ορισμένες ιδιότητες που ικανοποιούν τα στοιχεία πίνακα αυτά (οι οποίες προκύπτουν από κινηματικές αλλά και γεωμετρικές θεωρήσεις) όπου εάν ληφθούν υπόψιν, η διαδικασία υπολογισμού των στοιχείων πίνακα απλουστεύεται αισθητά. Για τον υπολογισμό τέτοιων στοιχείων πίνακα, ιδιαίτερα χρήσιμο είναι το **Θεώρημα Wigner-Eckart**, το οποίο είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Κβαντικής Μηχανικής.

Θεώρημα Wigner-Eckart Τα στοιχεία πίνακα τανυστικών τελεστών στην βάση ιδιοκαταστάσεων στροφορμής ικανοποιούν τη σχέση:

$$\langle \alpha', \ell' m' | T_q^{(k)} | \alpha, \ell m \rangle = \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2\ell' + 1}} \langle \ell m k q | \ell' m' \rangle \langle \alpha' \ell' || T^{(k)} || \alpha \ell \rangle. \quad (2.30)$$

Το Θεώρημα (2.30) ορίζει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός των στοιχείων πίνακα ενός σφαιρικού τανυστικού τελεστή στη βάση $|\alpha \ell m\rangle$. Ο κβαντικός αριθμός α στην πραγματικότητα μπορεί να περιγράψει διάφορους κβαντικούς αριθμούς οι οποίοι όμως να μην σχετίζονται με τη στροφορμή (π.χ. ο κύριος κβαντικός αριθμός n) οι οποίοι ωστόσο χρειάζονται για τον πλήρη προσδιορισμό της κβαντικής κατάστασης του υπό μελέτη συστήματος.

Απόδειξη. Έστω πως θέλουμε να υπολογίσουμε στοιχεία πίνακα του σφαιρικού τανυστικού τελεστή $T_q^{(k)}$ στη βάση καταστάσεων στροφορμής της μορφής $|\alpha \ell m\rangle$. Στη γενικότερη περίπτωση, οι πρόσθετοι κβαντικοί αριθμοί α είναι δυνατόν να επηρεάζονται από τη δράση του τελεστή, συνεπώς το στοιχείο πίνακα ενδιαφέροντος είναι το

$$\langle \alpha', \ell' m' | T_q^{(k)} | \alpha, \ell m \rangle.$$

Αναπτύσσοντας το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή στην κατάσταση $|\alpha \ell m\rangle$ στη βάση ιδιοκαταστάσεων στροφορμής, προκύπτει:

$$T_q^{(k)} | \alpha \ell m \rangle = \sum_{\ell'', m''} \langle \ell k \ell'' | m q m'' \rangle | \alpha'' \ell'' m'' \rangle, \quad (2.31)$$

και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\langle \alpha' \ell' m' |$,

$$\langle \alpha', \ell' m' | T_q^{(k)} | \alpha, \ell m \rangle = \sum_{\ell'', m''} \langle \ell k \ell'' | m q m'' \rangle \langle \alpha' \ell' m' | \alpha'' \ell'' m'' \rangle. \quad (2.32)$$

Από την απαίτηση ορθογωνιότητας για τις καταστάσεις στροφορμής (δεύτερο στοιχείο πίνακα του δεύτερου μέλους), προκύπτει:

$$\langle \alpha', \ell' m' | T_q^{(k)} | \alpha, \ell m \rangle = \langle \ell k \ell' | m q m' \rangle \langle \alpha' \ell' m' | \alpha'' \ell' m' \rangle. \quad (2.33)$$

Έπειτα, από τις ιδιότητες των συντελεστών Clebsch-Gordan (πρώτο στοιχείο πίνακα του δεύτερου μέλους), προκύπτει η ζητούμενη σχέση:

$$\langle \alpha', \ell' m' | T_q^{(k)} | \alpha, \ell m \rangle = \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2\ell' + 1}} \langle \ell m k q | \ell' m' \rangle \langle \alpha' \ell' || T^{(k)} || \alpha \ell \rangle.$$



Η παραπάνω θεώρηση εκ πρώτης όψης φαίνεται να περιπλέκει τη διαδικασία υπολογισμού των στοιχείων πίνακα, παρά να την απλοποιεί. Παρακάτω δίνεται μια ερμηνεία των όσων προέκυψαν από το Θεώρημα Wigner-Eckart, ώστε να γίνει εμφανής η σπουδαιότητα του.

Ουσιαστικά ο υπολογισμός των στοιχείων πίνακα σφαιρικών τανυστικών τελεστών ανάγεται στον υπολογισμό τριών όρων:

- Ο πρώτος όρος, $\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2\ell'+1}}$, εξαρτάται από την τάξη του σφαιρικού τανυστικού τελεστή αλλά και από την στροφορμή της τελικής κατάστασης. Ο υπολογισμός του είναι τετριμμένος.
- Ο δεύτερος όρος, $\langle \ell m k q | \ell' m' \rangle$, είναι ένας συντελεστής Clebsch-Gordan, που περιγράφει τη σύζευξη δύο στροφορμών ℓ και k σε μια τρίτη στροφορμή ℓ' . Ο όρος αυτός εμπεριέχει όλη την πληροφορία για την γεωμετρία του συστήματος, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα είναι προσανατολισμένο ως προς τον άξονα z . Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός πως στον όρο αυτό ουδεμία αναφορά γίνεται στον σφαιρικό τανυστικό τελεστή, δηλαδή ο εν λόγω συντελεστής δεν περιέχει "φυσική πληροφορία" για το μελετούμενο μέγεθος. Οι συντελεστές Clebsch-Gordan μπορούν είτε να βρεθούν από πίνακες (π.χ. [19]), είτε να υπολογιστούν με χρήση υπολογιστικών πακέτων, ακόμα και σε διαδικτυακούς υπολογιστές (online calculators).
- Ο τρίτος (και πλέον ιδιαίτερος) όρος, $\langle \alpha' \ell' || T^{(k)} || \alpha \ell \rangle$ καλείται **ανηγμένο στοιχείο πίνακα (reduced matrix element)** και διακρίνεται από τα "απλά" στοιχεία πίνακα από τις διπλές κάθετες γραμμές.

Συνεπώς γίνεται εύκολα κατανοητό πως για να υπολογιστεί οποιοδήποτε στοιχείο πίνακα του σφαιρικού τανυστικού τελεστή, αρκεί η γνώση του ανηγμένου στοιχείου πίνακα. Εδώ είναι και το "σημείο - κλειδί" της παραπάνω διαδικασίας: το ανηγμένο στοιχείο πίνακα **δεν παρουσιάζει εξάρτηση από τις προβολές των στροφορμών** τόσο της βάσης όσο και του τελεστή. Αρκεί λοιπόν κανείς να υπολογίσει το στοιχείο πίνακα για την απλούστερη περίπτωση που δίνει μη-μηδενικό αποτέλεσμα και στη συνέχεια να επανέλθει για να υπολογίσει οποιοδήποτε στοιχείο πίνακα χρειάζεται!

Επιπλέον, εάν κανείς ενδιαφέρεται για σύγκριση και όχι υπολογισμό απόλυτων μεγεθών, μπορεί πολύ εύκολα να σχηματίσει λόγους μεταξύ των στοιχείων πίνακα του σφαιρικού τανυστικού τελεστή. Σε τέτοια περίπτωση, τα ανηγμένα στοιχεία πίνακα απλοποιούνται και ο λόγος καταλήγει να είναι λόγος συντελεστών Clebsch - Gordan.

2.5.3 Αποσύνθεση $SU(3)$ Τανυστών και το Αντίστοιχο Θεώρημα Wigner-Eckart

Ένας τελεστής T θα είναι $SU(3)$ τανυστής της μορφής $T_{M\Lambda_0}^{(\lambda_0, \mu_0)\epsilon_0\Lambda_0}$ για την αποσύνθεση $SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$ εάν ικανοποιεί τη σχέση μετάθεσης [20]:

$$\left[\lambda_{ij}, T_{M\Lambda_0}^{(\lambda_0, \mu_0)\epsilon_0\Lambda_0} \right] = \sum_{\epsilon'_0 \Lambda'_0 M'_0} \langle (\lambda_0, \mu_0)\epsilon'_0 \Lambda'_0 M'_0 | \lambda_{ij} | (\lambda_0, \mu_0)\epsilon_0 \Lambda_0 M_{\Lambda_0} \rangle T_{M'_0 \Lambda'_0}^{(\lambda_0, \mu_0)\epsilon'_0 \Lambda'_0}, \quad (2.34)$$

όπου λ_{ij} η γεννήτορες της $SU(3)$ άλγεβρας, όπως δίνονται στη σχέση (2.15).

Επιπρόσθετα, για την αποσύνθεση της $SU(3)$ στην $SO(3)$ (η οποία και εμφανίζει εντονότερο ενδιαφέρον λόγω της στροφορμής) ένας τελεστής T θα είναι τανυστής $SU(3) \supset SO(3)$ της μορφής $T_{M_0}^{(\lambda_0, \mu_0)k_0 L_0}$ εάν ικανοποιεί τη σχέση μετάθεσης:

$$\left[G_q^p, T_{M_0}^{(\lambda_0, \mu_0)k_0 L_0} \right] = \sum_{k'_0 L'_0 M'_0} \langle (\lambda_0, \mu_0)k'_0 L'_0 M'_0 | G_q^p | (\lambda_0, \mu_0)k_0 L_0 M_0 \rangle T_{M'_0}^{(\lambda_0, \mu_0)k'_0 L'_0}, \quad (2.35)$$

όπου G_q^p ένας εκ των τελεστών L_q^1 (τροχιακή στροφορμή) ή Q_q^2 (τετραπολικός). Για τους τελεστές αυτούς ισχύει πως μετασχηματίζονται σαν την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $(1, 1)$. Συνεπώς, για τον μεν τελεστή της τροχιακής στροφορμής ισχύει πως $L_q^1 = T_q^{(1,1), K=1, L=1}$ ενώ για τον τετραπολικό τελεστή $Q_q^2 = T_q^{(1,1), k=1, L=2}$.

Για την περίπτωση της $SU(3)$ το Θεώρημα Wigner-Eckart εκφράζεται ως εξής [20]:

$$\begin{aligned} & \langle (\lambda', \mu')k'\ell'm' | T^{(\lambda_0, \mu_0)k_0 \ell_0 m_0} | (\lambda, \mu)k\ell m \rangle = \\ & = \sum_{\rho} \langle (\lambda, \mu)k\ell m; (\lambda_0, \mu_0)k_0 \ell_0 m_0 | (\lambda, \mu)k'\ell'm' \rangle_{\rho} \langle (\lambda', \mu') || T^{(\lambda_0, \mu_0)} || (\lambda, \mu) \rangle_{\rho} = \\ & = \sum_{\rho} \langle \ell \mathbf{m}, \ell_0 \mathbf{m}_0 | \ell' \mathbf{m}' \rangle \langle (\lambda, \mu) \mathbf{k} \ell; (\lambda_0, \mu_0) \mathbf{k}_0 \ell_0 | (\lambda' \mu') \mathbf{k}' \ell' \rangle_{\rho} \times \\ & \times \langle (\lambda', \mu') || T^{(\lambda_0, \mu_0)} || (\lambda, \mu) \rangle_{\rho} \end{aligned} \quad (2.36)$$

όπου το στοιχείο πίνακα με τις τριπλές γραμμές δεν είναι τίποτε άλλο παρά **ανηγμένο στοιχείο πίνακα της $SU(3)$** . Τέτοια ανηγμένα στοιχεία πίνακα μπορούν για ορισμένες περιπτώσεις τελεστών με φυσική σημασία (όπως π.χ. στροφορμή) να υπολογιστούν για αναπαραστάσεις μικρής διάστασης με χρήση του κώδικα [21].

Κεφάλαιο 3

Το πρότυπο PROXY-SU(3)

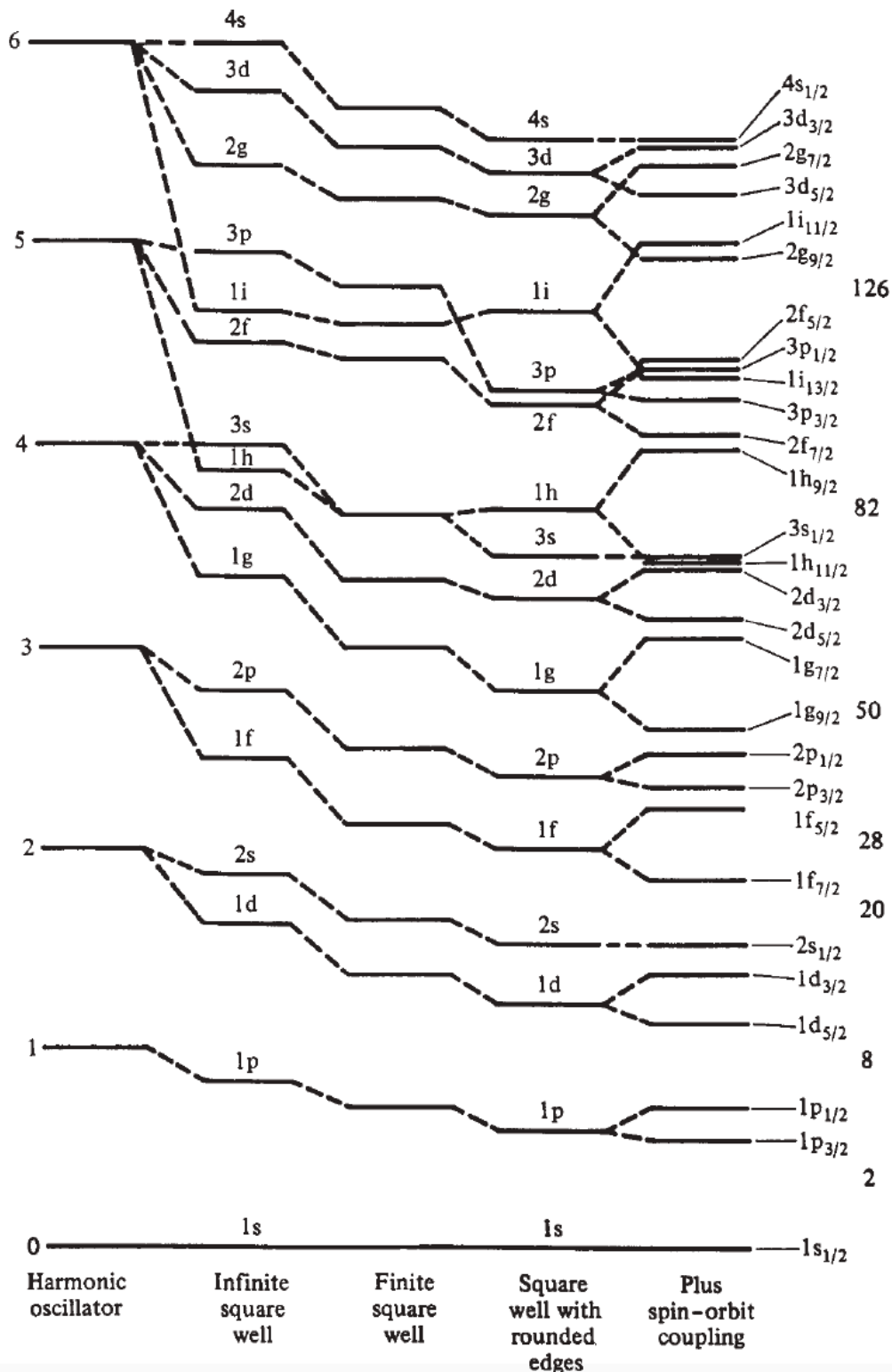
Στο παρόν κεφάλαιο θα επεξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίο θεμελιώθηκε η συμμετρία proxy-SU(3) στους ατομικούς πυρήνες. Όπως είναι γνωστό, ο τρισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής έχει SU(3) συμμετρία. Βασικός σκοπός, λοιπόν, είναι να επανεμφανιστεί η SU(3) συμμετρία στους ατομικούς πυρήνες.

Ποιος είναι όμως ο λόγος για τον οποίο έχει χαθεί η εν λόγω συμμετρία; Αρχικά λόγω της ύπαρξης της σύζευξης σπιν - τροχιάς, τροχιακά με αντίθετη ομοτιμία έχουν οδηγηθεί σε κατώτερο φλοιό από τον αρχικό τους (για $n < 3$) ή και σε ανώτερο φλοιό (για $n \geq 3$) όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1. Αφετέρου, η ύπαρξη παραμόρφωσης στους ατομικούς πυρήνες αλλάζει την κατανομή των τροχιακών στο χώρο με αποτέλεσμα η εικόνα του αρμονικού ταλαντωτή να απομακρύνεται, όπως αντίστοιχα φαίνεται στο Σχήμα 3.2 για τα Nilsson τροχιακά.

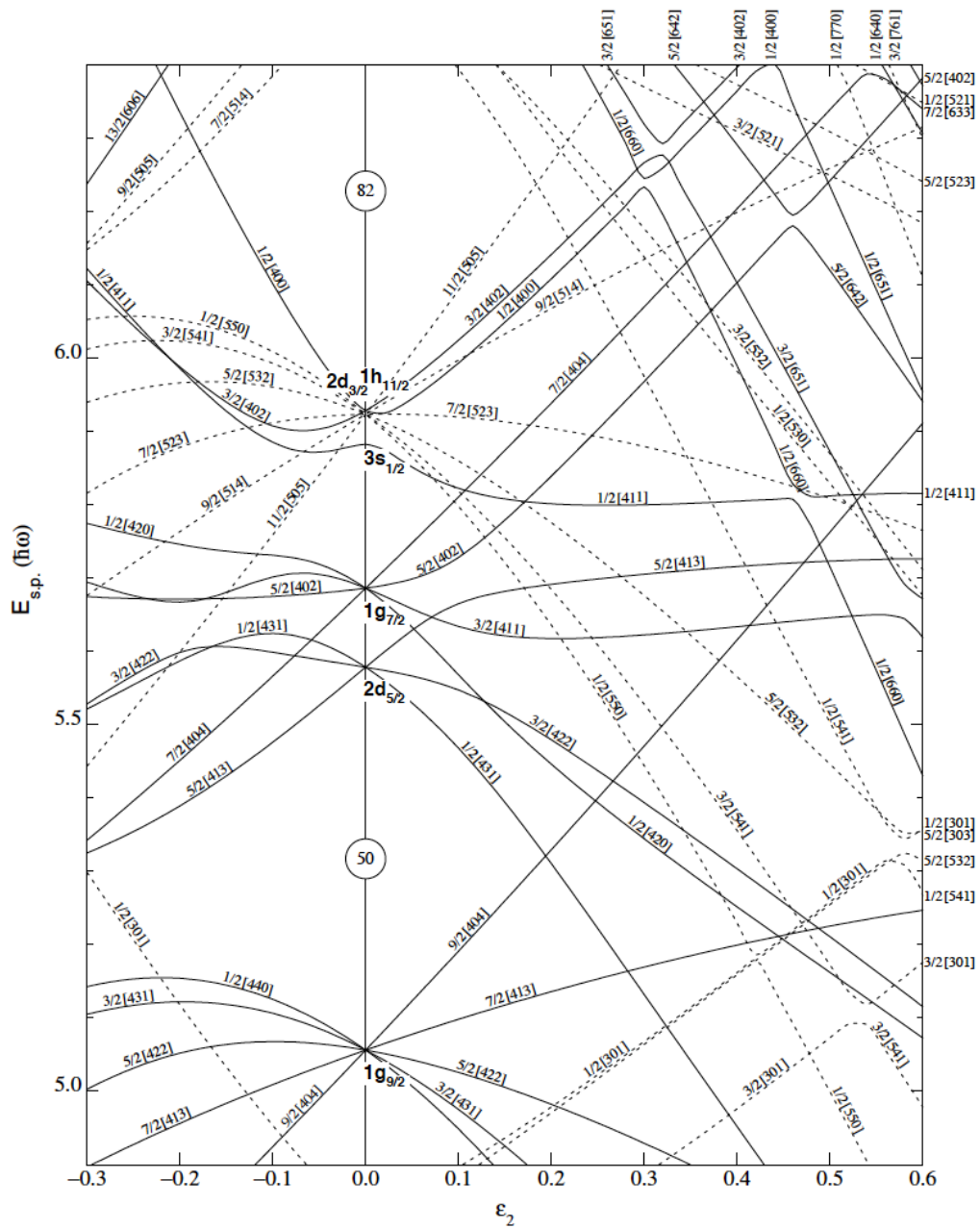
Μια πρώτη ιδέα είναι να γίνει μια ανακατανομή των τροχιακών (άρα προσέγγιση) ώστε να επανέλθει η SU(3) συμμετρία. Πώς μπορεί κανείς όμως να αντικαταστήσει τροχιακά μεταξύ τους και να μην έχει κάνει εξ αρχής ένα ολέθριο σφάλμα; Θα πρέπει τα τροχιακά αυτά να μην διαφέρουν κατά πολύ μεταξύ τους.

3.1 Τροχιακά που διαφέρουν κατά 0[110]

Έχει παρατηρηθεί πως τα τροχιακά Nilsson τα οποία διαφέρουν κατά $\Delta K [\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$ έχουν πολύ μεγάλη χωρική επικάλυψη. Ο λόγος είναι εύκολα κατανοητός καθώς κανείς μπορεί να μεταβεί από το ένα στο άλλο μέσω των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής του z -άξονα (α_z^\dagger και α_z). Αυτό σημαίνει πως τα ζεύγη 0[110] διαφέρουν μόνο ως προς τον z βαθμό ελευθερίας, όντας πανομοιότυπα στο xy επίπεδο, γεγονός που τους προσδίδει μεγάλη χωρική επικάλυψη [22].



Σχήμα 3.1: Διάταξη των ενεργειακών σταθμών που προκύπτει σύμφωνα με διαφορετικά μέσα πεδία, ξεκινώντας από το απλούστερο και καταλήγοντας στο Πρότυπο των Φλοίων. Είναι εμφανές πως η εισαγωγή του όρου τροχιακής στροφορμής - σπίν είναι αναγκαία ώστε να αναπαραχθούν ορθά οι μαγικοί αριθμοί.



Σχήμα 3.2: Ενεργειακά επίπεδα σύμφωνα με το πρότυπο του Nilsson για νετρόνια στο φλοιό 50 – 82 συναρτήσει της παραμόρφωσης ϵ_2 . Ο δείκτης 2 αναφέρεται στο ότι η παραμόρφωση είναι τετραπολική. [1]

3.2 Αντικαταστάσεις τροχιακών

Στην ενότητα αυτή θα παρατεθεί ένα παράδειγμα ώστε να γίνει κατανοητό το πώς θεμελιώνεται η συμμετρία *prox*y-SU(3). Πιο συγκεκριμένα θα ληφθεί ως υπόθεση εργασίας ο φλοιός 50-82 ($n = 4$).

- Ο φλοιός αυτός "ιστορικά" προέρχεται από το τροχιακό του αρμονικού ταλαντωτή $n = 4$. Ο $n = 4$ αποτελείται από τα τροχιακά $1g_{9/2}$, $1g_{7/2}$, $2d_{5/2}$, $2d_{3/2}$ και $3s_{1/2}$ κατά αύξουσα ενεργειακή σειρά. Ο φλοιός τώρα έχει U(15) συμμετρία (άρα και SU(3)) και καλείται συχνά *sdg*.
- Λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν - τροχιάς το τροχιακό $1g_{9/2}$ "χαμηλώνει" ενεργειακά με συνέπεια να καλύπτει το χάσμα με τη $n = 3$ ομάδα τροχιακών του ταλαντωτή (έτσι δημιουργείται ο μαγικός αριθμός 50). Αντίστοιχα από τη $n = 5$ ομάδα τροχιακών, το χαμηλότερο ενεργειακά $1h_{11/2}$ οδηγείται σε αυτά με $n = 4$. Γίνεται εύκολα κατανοητό πως η συμμετρία που υπήρχε "έσπασε" αφού μεταξύ των τροχιακών με $n = 3$ εισήλθε ένα τροχιακό με $n = 4$ και σε αυτά με $n = 4$ εισήλθε ένα τροχιακό με $n = 5$.
- Η προσέγγιση που θα γίνει θα είναι η εξής: θα αντικατασταθεί το τροχιακό που "έφυγε" ($1g_{9/2}$) με αυτό που "ήρθε" ($1h_{11/2}$). Αυτό οδηγεί στο σχηματισμό ενός νέου φλοιού τροχιακών, ο οποίος όμως θα έχει καθορισμένη ομοτιμία (λόγω κοινού n) επαναφέροντας την συμμετρία SU(3) που προηγουμένως είχε χαθεί.
- Τα τροχιακά $1g_{9/2}$ και $1h_{11/2}$ αποτελούνται από τα Nilsson τροχιακά που φαίνονται στον Πίνακα 3.1. Είναι εύκολο κανείς να παρατηρήσει πως τα τροχιακά αυτά διαφέρουν κατά $\Delta K [\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$, εφ' όσον κανείς εξαιρέσει το $11/2[505]$. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί πως λόγω της αντικατάστασης των τροχιακών έχουν μεταβληθεί κατά μία μονάδα οι κβαντικοί αριθμοί N και n_z . Η προσέγγιση που γίνεται με την απόρριψη του τροχιακού $11/2[505]$ λόγω έλλειψης αντικαταστάτη του εντός του $1g_{9/2}$, αναμένεται να μην έχει μεγάλο αντίκτυπο στην εκτίμηση μεγεθών πυρηνικής δομής σε βαρείς πυρήνες, αφού είναι το υψηλότερο (ενεργειακά) στα Nilsson διαγράμματα. Ωστόσο, το τροχιακό αυτό θα παίζει πιο σημαντικό ρόλο σε πυρήνες που έχουν περί τα 82 νουκλεόνια, χωρίς αυτοί να είναι παραμορφωμένοι.
- Τι έχει επιτευχθεί ως τώρα; Με τις δύο αυτές προσεγγίσεις έχει προκύψει εκ νέου ο ακριβής *sdg* φλοιός. Ο φλοιός *sdg* του σφαιρικού αρμονικού ταλαντωτή έχει U(15) συμμετρία και SU(3) υποάλγεβρα. Συνεπώς αναμένεται να εκδηλώνονται χαρακτηριστικά της SU(3) συμμετρίας στους πυρήνες όταν αυτοί περιγράφονται μέσω αυτού του προσεγγιστικού προτύπου. Στην περίπτωση τώρα των αξονικά παραμορφωμένων πυρήνων, θα πρέπει να υιοθετηθεί κυλινδρική συμμετρία και όχι σφαιρική. Στις περιπτώσεις αυτές, δεν θα εμφανίζονται U(N) άλγεβρες Lie αλλά πιο σύνθετες παραμορφωμένες άλγεβρες, στις οποίες μόνο ο τελεστής L_z έχει την ίδια φυσική σημασία με τον αντίστοιχο στο πρότυπο του Nilsson.
- Η παραπάνω διαδικασία μπορεί αντίστοιχα να γίνει και σε άλλους φλοιούς όπως οι 28-50, 82-126, 126-184 εμπλέκοντας τα αντίστοιχα τροχιακά. Αυτό θα οδηγήσει σε νέους προσεγγιστικούς φλοιούς *pf*, *pfh* και *sdgi* κατ' αντιστοιχία.

Εδώ μπορεί κανείς να κατανοήσει και την ονομασία του μοντέλου. "Prox"y" σημαίνει πληρε-

$1g_{9/2}$	$1h_{11/2}$
1/2[440]	1/2[550]
3/2[431]	3/2[541]
5/2[422]	5/2[532]
7/2[413]	7/2[523]
9/2[404]	9/2[514]
-	11/2[505]

Πίνακας 3.1: Nilsson τροχιακά για τα $1g_{9/2}$ και $1h_{11/2}$. Είναι εμφανές πως τα αντίστοιχα τροχιακά διαφέρουν κατά $0[110]$ με εξαίρεση το $11/2[505]$ το οποίο δεν έχει αντίστοιχο στο $1g_{9/2}$.

ξούσιος. Στην περίπτωση του παραπάνω παραδείγματος ο *sdg* φλοιός που δημιουργήθηκε μέσω της αντικατάστασης κατάλληλων τροχιακών εξουσιοδοτείται να περιγράψει τον φλοιό 50-82. Αυτή η συμμετρία που προκύπτει δεν είναι ακριβής SU(3) αλλά πληρεξούσια της SU(3), δηλαδή μια proxy-SU(3) συμμετρία.

Στο σημείο αυτό ενδέχεται κάποιος να μην έχει πειστεί για την ορθότητα των παραπάνω συλλογισμών. Περαιτέρω τεκμηρίωση δίνεται στην [23], όπου έχει γίνει Nilsson υπολογισμός για τα νέα τροχιακά με το αποτέλεσμα να είναι περισσότερο από ικανοποιητικό.

3.3 Υπολογισμός μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της proxy-SU(3)

Μέσω των αντικαταστάσεων των τροχιακών που υποδείχθηκε παραπάνω επανήλθε η εκάστοτε U(N) συμμετρία στους διάφορους φλοιούς. Είναι γνωστό πως οι U(n) άλγεβρες Lie περιέχουν SU(3) υποάλγεβρες [24].

Έτσι λοιπόν, μπορεί κανείς για τα νουκλεόνια σθένους κάθε πυρήνα να εξάγει μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της μορφής (λ, μ) οι οποίες θα τον χαρακτηρίζουν. Μαζικός υπολογισμός των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων για κάθε αριθμό νουκλεονίων σθένους έγινε με χρήση του κώδικα UNTOU3 [3]. Τα αποτελέσματα τόσο για τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους (highest weight irreps - h.w.) όσο και για τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις που μεγιστοποιούν την τιμή του δεύτερης τάξης τελεστή Casimir της SU(3), παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2 που ακολουθεί.

M	irrep	8-20	8-20	28-50	28-50	50-82	50-82	82-126	82-126	126-184	184-258
		sd	sd	pf	pf	sdg	sdg	pfh	pfh	sdgi	pfhj
		U(6) hw	U(6) C	U(10) hw	U(10) C	U(15) hw	U(15) C	U(21) hw	U(21) C	U(28) hw	U(36) hw
0		(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
1	[1]	(2,0)	(2,0)	(3,0)	(3,0)	(4,0)	(4,0)	(5,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)
2	[2]	(4,0)	(4,0)	(6,0)	(6,0)	(8,0)	(8,0)	(10,0)	(10,0)	(12,0)	(14,0)
3	[21]	(4,1)	(4,1)	(7,1)	(7,1)	(10,1)	(10,1)	(13,1)	(13,1)	(16,1)	(19,1)
4	[2 ²]	(4,2)	(4,2)	(8,2)	(8,2)	(12,2)	(12,2)	(16,2)	(16,2)	(20,2)	(24,2)
5	[2 ² 1]	(5,1)	(5,1)	(10,1)	(10,1)	(15,1)	(15,1)	(20,1)	(20,1)	(25,1)	(30,1)
6	[2 ³]	(6,0)	(0,6)	(12,0)	(12,0)	(18,0)	(18,0)	(24,0)	(24,0)	(30,0)	(36,0)
7	[2 ³ 1]	(4,2)	(1,5)	(11,2)	(11,2)	(18,2)	(18,2)	(25,2)	(25,2)	(32,2)	(39,2)
8	[2 ⁴]	(2,4)	(2,4)	(10,4)	(10,4)	(18,4)	(18,4)	(26,4)	(26,4)	(34,4)	(42,4)
9	[2 ⁴ 1]	(1,4)	(1,4)	(10,4)	(10,4)	(19,4)	(19,4)	(28,4)	(28,4)	(37,4)	(46,4)
10	[2 ⁵]	(0,4)	(0,4)	(10,4)	(4,10)	(20,4)	(20,4)	(30,4)	(30,4)	(40,4)	(50,4)
11	[2 ⁵ 1]	(0,2)	(0,2)	(11,2)	(4,10)	(22,2)	(22,2)	(33,2)	(33,2)	(44,2)	(55,2)
12	[2 ⁶]	(0,0)	(0,0)	(12,0)	(4,10)	(24,0)	(24,0)	(36,0)	(36,0)	(48,0)	(60,0)
13	[2 ⁶ 1]			(9,3)	(2,11)	(22,3)	(22,3)	(35,3)	(35,3)	(48,3)	(61,3)
14	[2 ⁷]			(6,6)	(0,12)	(20,6)	(20,6)	(34,6)	(34,6)	(48,6)	(62,6)
15	[2 ⁷ 1]			(4,7)	(1,10)	(19,7)	(7,19)	(34,7)	(34,7)	(49,7)	(64,7)
16	[2 ⁸]			(2,8)	(2,8)	(18,8)	(6,20)	(34,8)	(34,8)	(50,8)	(66,8)
17	[2 ⁸ 1]			(1,7)	(1,7)	(18,7)	(3,22)	(35,7)	(35,7)	(52,7)	(69,7)
18	[2 ⁹]			(0,6)	(0,6)	(18,6)	(0,24)	(36,6)	(36,6)	(54,6)	(72,6)
19	[2 ⁹ 1]			(0,3)	(0,3)	(19,3)	(2,22)	(38,3)	(38,3)	(57,3)	(76,3)
20	[2 ¹⁰]			(0,0)	(0,0)	(20,0)	(4,20)	(40,0)	(40,0)	(60,0)	(80,0)
21	[2 ¹⁰ 1]					(16,4)	(4,19)	(37,4)	(4,37)	(58,4)	(79,4)
22	[2 ¹¹]					(12,8)	(4,18)	(34,8)	(0,40)	(56,8)	(78,8)
23	[2 ¹¹ 1]					(9,10)	(2,18)	(32,10)	(3,38)	(55,10)	(78,10)
24	[2 ¹²]					(6,12)	(0,18)	(30,12)	(6,36)	(54,12)	(78,12)
25	[2 ¹² 1]					(4,12)	(1,15)	(29,12)	(7,35)	(54,12)	(79,12)
26	[2 ¹³]					(2,12)	(2,12)	(28,12)	(8,34)	(54,12)	(80,12)
27	[2 ¹³ 1]					(1,10)	(1,10)	(28,10)	(7,34)	(55,10)	(82,10)
28	[2 ¹⁴]					(0,8)	(0,8)	(28,8)	(6,34)	(56,8)	(84,8)
29	[2 ¹⁴ 1]					(0,4)	(0,4)	(29,4)	(3,35)	(58,4)	(87,4)
30	[2 ¹⁵]					(0,0)	(0,0)	(30,0)	(0,36)	(60,0)	(90,0)
31	[2 ¹⁵ 1]							(25,5)	(2,33)	(56,5)	(87,5)
32	[2 ¹⁶]							(20,10)	(4,30)	(52,10)	(84,10)
33	[2 ¹⁶ 1]							(16,13)	(4,28)	(49,13)	(82,13)
34	[2 ¹⁷]							(12,16)	(4,26)	(46,16)	(80,16)
35	[2 ¹⁷ 1]							(9,17)	(2,25)	(44,17)	(79,17)
36	[2 ¹⁸]							(6,18)	(0,24)	(42,18)	(78,18)
37	[2 ¹⁸ 1]							(4,17)	(1,20)	(41,17)	(78,17)
38	[2 ¹⁹]							(2,16)	(2,16)	(40,16)	(78,16)
39	[2 ¹⁹ 1]							(1,13)	(1,13)	(40,13)	(79,13)
40	[2 ²⁰]							(0,10)	(0,10)	(40,10)	(80,10)
41	[2 ²⁰ 1]							(0,5)	(0,5)	(41,5)	(82,5)
42	[2 ²¹]							(0,0)	(0,0)	(42,0)	(84,0)
43	[2 ²¹ 1]									(36,6)	(79,6)
44	[2 ²²]									(30,12)	(74,12)
45	[2 ²² 1]									(25,16)	(70,16)
46	[2 ²³]									(20,20)	(66,20)
47	[2 ²³ 1]									(16,22)	(63,22)
48	[2 ²⁴]									(12,24)	(60,24)
49	[2 ²⁴ 1]									(9,24)	(58,24)
50	[2 ²⁵]									(6,24)	(56,24)
51	[2 ²⁵ 1]									(4,22)	(55,22)
52	[2 ²⁶]									(2,20)	(54,20)
53	[2 ²⁶ 1]									(1,16)	(54,16)
54	[2 ²⁷]									(0,12)	(54,12)
55	[2 ²⁷ 1]									(0,6)	(55,6)
56	[2 ²⁸]									(0,0)	(56,0)

Πίνακας 3.2: Στις στήλες hw δίνονται οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους της $SU(3)$ (οι οποίες είναι πάντα μοναδικές) για $U(n)$, με $n = 6, 10, 15, 21, 28, 36$ ανάλογα με το σε ποια $U(N)$ ανήκει ο αριθμός M των πρωτονίων ή νετρονίων σθένους. Στις στήλες C δίνονται αντίστοιχα οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις με την υψηλότερη ιδιοτιμή του τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της $SU(3)$. Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν με χρήση του κώδικα UNTOU3 [3].

Κεφάλαιο 4

Υπολογισμός B(E2) στα πλαίσια της PROXY-SU(3)

Στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος υπολογισμού των B(E2) στα πλαίσια του προτύπου proxy-SU(3), αλλά και αποτελέσματα των υπολογισμών αυτών. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το φάσμα παραμορφωμένων άρτιων - άρτιων πυρήνων "οργανώνεται" σε ζώνες οι οποίες διακρίνονται μέσω του κβαντικού αριθμού K . Στην αναπαράσταση με $K = 0$ περιλαμβάνονται η ζώνη θεμελιώδους κατάστασης (ground state band ή g.s.b.) καθώς και η διηγερμένη β ζώνη, για $K = 2$ η γ ζώνη και πολλές άλλες ζώνες.

4.1 Θεωρητική Προσέγγιση των B(E2)s

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να υπάρχει μια σχέση η οποία θα μπορεί να υπολογίζει απόλυτες τιμές των B(E2)s τόσο μέσα στην θεμελιώδη ζώνη όσο και μεταξύ σταθμών που ανήκουν σε διαφορετικές ζώνες, οι οποίες να ανήκουν στην ίδια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση. Στα πλαίσια των SU(3) προτύπων, η εξαγωγή μιας τέτοιας σχέσης είναι εφικτή. Παρακάτω παρουσιάζεται η διαδικασία εξαγωγής της.

Ο τελεστής ηλεκτρικής τετραπολικής μετάβασης ορίζεται ως [25]:

$$T_M^2(E) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} b_0^2 \sum_{\sigma} e_{\sigma} Q_M^{\sigma}, \quad (4.1)$$

όπου:

- η άθροιση γίνεται πάνω στα πρωτόνια και τα νετρόνια, δηλαδή $\sigma = \pi$ ή $\sigma = \nu$,
- e_{σ} είναι το φορτίο του πρωτονίου και του νετρονίου, για τις διάφορες τιμές του δείκτη σ ,
- $b_0 = 1.01 A^{\frac{1}{6}} \text{ fm}$ είναι το μήκος του αρμονικού ταλαντωτή [26] και

- Q_M^σ είναι ο τετραπολικός τελεστής, ο οποίος δίνεται από τη σχέση [25]:

$$Q_M^\sigma = \sum_i \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r_\sigma^2(i) Y_{2M}[\hat{r}_\sigma(i)]. \quad (4.2)$$

Στην παρούσα θεώρηση, δεν θα υιοθετηθούν ενεργά φορτία (effective charges). Ουσιαστικά αυτό σημαίνει πως θα θεωρηθεί πως το φορτίο του νετρονίου είναι μηδενικό, εν αντιθέση με άλλα μοντέλα που έχουν θεωρήσει την ύπαρξη ενεργού φορτίου για το νετρόνιο, το οποίο προκύπτει ως ελεύθερη παράμετρος η οποία προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα. Άμεση συνέπεια αυτής της επιλογής είναι πως μόνο τα πρωτόνια σχετίζονται με τις $B(E2)$ s ενώ τα νετρόνια επηρεάζονται από τον τετραπολικό τελεστή.

Οι ανηγμένες πιθανότητες ηλεκτρικής τετραπολικής μετάβασης $B(E2)$ ορίζονται ως [20]:

$$B(E2; J_i \rightarrow J_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle J_f || Q^2 || J_i \rangle|^2}{2J_i + 1} \quad (4.3)$$

στη βάση της στροφορμής. Η σχέση αυτή δίνει τις $B(E2)$ s σε μονάδες τέταρτης δύναμης της σταθεράς μήκους ταλαντωτή (b_0^4) επί το τετράγωνο του φορτίου του πρωτονίου (e^2).

Εν προκειμένω, θα χρησιμοποιηθεί η ισχυρά συζευγμένη βάση $|(\lambda, \mu) K L S J\rangle$ με αποτέλεσμα η (4.3) να γίνεται:

$$\begin{aligned} B(E2; (\lambda, \mu) K_i L_i S_i J_i \rightarrow (\lambda, \mu) K_f L_f S_f J_f) = \\ = \frac{5}{16\pi} \frac{1.01^4 A^{\frac{2}{3}}}{2J_i + 1} |\langle (\lambda, \mu) K_f L_f S_f J_f || Q^2 || (\lambda, \mu) K_i L_i S_i J_i \rangle|^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

έχοντας εισαγάγει στη σχέση τις κατάλληλες σταθερές ώστε οι $B(E2)$ s να προκύπτουν σε μονάδες $e^2 \text{fm}^4$.

Η επόμενη μεγάλη πρόκληση είναι να υπολογιστεί το ανηγμένο στοιχείο πίνακα του τετραπολικού τελεστή Q^2 . Τέτοια στοιχεία πίνακα υπολογίζονται με τη βοήθεια του Θεωρήματος Wigner - Eckart. Εδώ όμως θα χρειαστεί το θεώρημα Wigner-Eckart το οποίο αναφέρεται στην $SU(3)$, όπως αυτό παρουσιάζεται στην Παράγραφο 2.5.3. Έτσι, για το ανηγμένο στοιχείο πίνακα ενδιαφέροντος προκύπτει:

$$\begin{aligned} \langle (\lambda, \mu) K_f L_f S_f J_f || Q^2 || (\lambda, \mu) K_i L_i S_i J_i \rangle = \sqrt{(2J_f + 1)(2J_i + 1)(2L_f + 1)} \\ (-1)^{\phi_\mu} W(S_i J_i L_f 2; L_i J_f) \sqrt{4C_2^{(\lambda, \mu)}} \\ \langle (\lambda, \mu) K_i L_i; (1, 1) 2 || (\lambda, \mu) K_f L_f \rangle, \end{aligned} \quad (4.5)$$

όπου:

- $W(S_i J_i L_f 2; L_i J_f)$ είναι ένας $SU(2)$ συντελεστής Racah, ο οποίος συνδέεται με τα σύμβολα $6 - j$ μέσω της σχέσης

$$\left\{ \begin{array}{ccc} S_i & J_i & L_i \\ 2 & L_f & J_f \end{array} \right\} = (-1)^{S_i + J_i + L_f + 2} W(S_i J_i L_f 2; L_i J_f), \quad (4.6)$$

- $C_2^{(\lambda,\mu)}$ είναι ο τελεστής Casimir της SU(3) για δεδομένη αναπαράσταση (λ, μ) και δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} C_2^{(\lambda,\mu)} &= (\lambda + \mu + 3)(\lambda + \mu) - \lambda\mu \\ &= \lambda^2 + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + \lambda\mu, \end{aligned} \quad (4.7)$$

- ο παράγοντας φάσης $(-1)^{\phi_\mu}$ ο οποίος είναι -1 εάν $\mu \neq 0$ και +1 εάν $\mu = 0$ και τέλος
- ο όρος $\langle (\lambda, \mu)KL; (1, 1)2 || (\lambda, \mu)K'L' \rangle$, ο οποίος είναι ένας συντελεστής που περιγράφει την αποσύνθεση $SU(3) \supset SO(3)$ και ονομάζεται **ανηγμένος συντελεστής Wigner (reduced Wigner coefficient)**.

Στη συνέχεια γίνεται η υπόθεση πως υπάρχει σχηματισμός μόνο ζευγών νουκλεονίων με ισospin $T = 1$ (δηλαδή ζεύγη πρωτονίου - πρωτονίου και νετρονίου - νετρονίου). Η υπόθεση αυτή είναι βάσιμη στην περίπτωση των σπάνιων γαιών μιας και τα πρωτόνια τους βρίσκονται σε διαφορετικό φλοιό (50-82) από ότι τα νετρόνια τους (82-126), με αποτέλεσμα ο σχηματισμός ζευγών πρωτονίου - νετρονίου να είναι εξαιρετικά απίθανος. Στην περίπτωση αυτή, το spin είναι $S = 0$ με αποτέλεσμα η συνολική στροφορμή J να ταυτίζεται με την τροχιακή στροφορμή L , δηλαδή $J = L$.

Άμεση συνέπεια της παραπάνω υπόθεσης είναι πως η ιδιοκατάσταση του πυρήνα μπορεί να περιγραφεί μόνο από τους κβαντικούς αριθμούς (λ, μ) της SU(3), την στροφορμή J καθώς και από τον κβαντικό αριθμό K που απαριθμεί τις ζώνες. Επιπλέον, ισχύει πως [27]:

$$W(S_i J_i L_f 2; L_i J_f) = \frac{1}{\sqrt{(2J_i + 1)(2J_f + 1)}}. \quad (4.8)$$

Η κίνηση αυτή απλοποιεί κατά πολύ τον υπολογισμό, με τη σχέση (4.4) να γίνεται:

$$\mathbf{B}(E2; K_i L_i \rightarrow K_f L_f) = \frac{5}{4\pi} \frac{2L_f + 1}{2L_i + 1} C_2^{(\lambda,\mu)} \mathbf{1.01^4 A}^{\frac{2}{3}} |\langle (\lambda, \mu) K_i L_i; (1, 1) 2 || (\lambda, \mu) K_f L_f \rangle|^2 \quad (4.9)$$

ανάγοντας τον υπολογισμό των B(E2)s ουσιαστικά στον υπολογισμό του ανηγμένου συντελεστή Wigner για την αποσύνθεση $SU(3) \supset SO(3)$ για τη μετάβαση αυτή. Οι συντελεστές Wigner υπολογίστηκαν χάρη στον κώδικα SU3CGVCS των Bahri, Rowe και Draayer [21].

4.2 Συστήματα μονάδων

Η εξίσωση (4.9) δίνει απόλυτες τιμές για τις B(E2)s με μονάδες $e^2 \text{fm}^4$. Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να μετατρέψει τα αποτελέσματα σε μονάδες $e^2 b^2$, έχοντας δεδομένο πως $e^2 \text{fm}^4 = 10^{-4} e^2 b^2$. Τέλος, για την ευκολότερη σύγκριση των προβλέψεων με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα στη βάση δεδομένων του ENSDF [28] (τα οποία δίνονται σε W.u.) χρειάζεται οι τιμές

των $B(E2)$ s (εκπεφρασμένες σε e^2b^2) να διαιρεθούν με την ποσότητα $5.94 \times 10^{-6} \times A^{\frac{4}{3}}$ [29], δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$B(E2) W.u. = \frac{B(E2) e^2 b^2}{5.94 \times A^{\frac{4}{3}}} \times 10^6. \quad (4.10)$$

4.3 Υπολογισμός $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ Σπάνιων Γαιών

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.9) έγινε θεωρητικός υπολογισμός των $B(E2)$ s για την αποδιέγερση από την κατάσταση $J_i^{\pi_i} = 2^+$ στην $J_f^{\pi_f} = 0^+$ της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης (ground state band - g.s.b.).

Ως περιοχή μελέτης του ισοτοπικού χάρτη επιλέχθηκαν οι σπάνιες γαίες ($Z = 62 - 76$) για διάφορους λόγους. Αρχικά ο αριθμός των πρωτονίων τους είναι περί το μέσο του φλοιού, κάτι το οποίο σημαίνει πως σε ότι αφορά τα πρωτόνια, ο πυρήνας είναι παραμορφωμένος. Έτσι η $SU(3)$ συμμετρία με την οποία προσεγγίζεται στην παρούσα εργασία, είναι εδραιωμένη. Αφετέρου, όπως ήδη έχει αναφερθεί στην Παράγραφο 4.1, τα πρωτόνια σθένους και τα νετρόνια σθένους ανήκουν σε διαφορετικό φλοιό, κάτι το οποίο σημαίνει πως είναι ιδιαίτερα απίθανη η δημιουργία ζευγών πρωτονίου - νετρονίου. Κάτι τέτοιο θα ήταν αντίθετο με την προσέγγιση όπου υιοθετήθηκε για την εξαγωγή της σχέσης (4.9).

Για την αποδιέγερση στις σπάνιες γαίες, η σχέση (4.9) γίνεται:

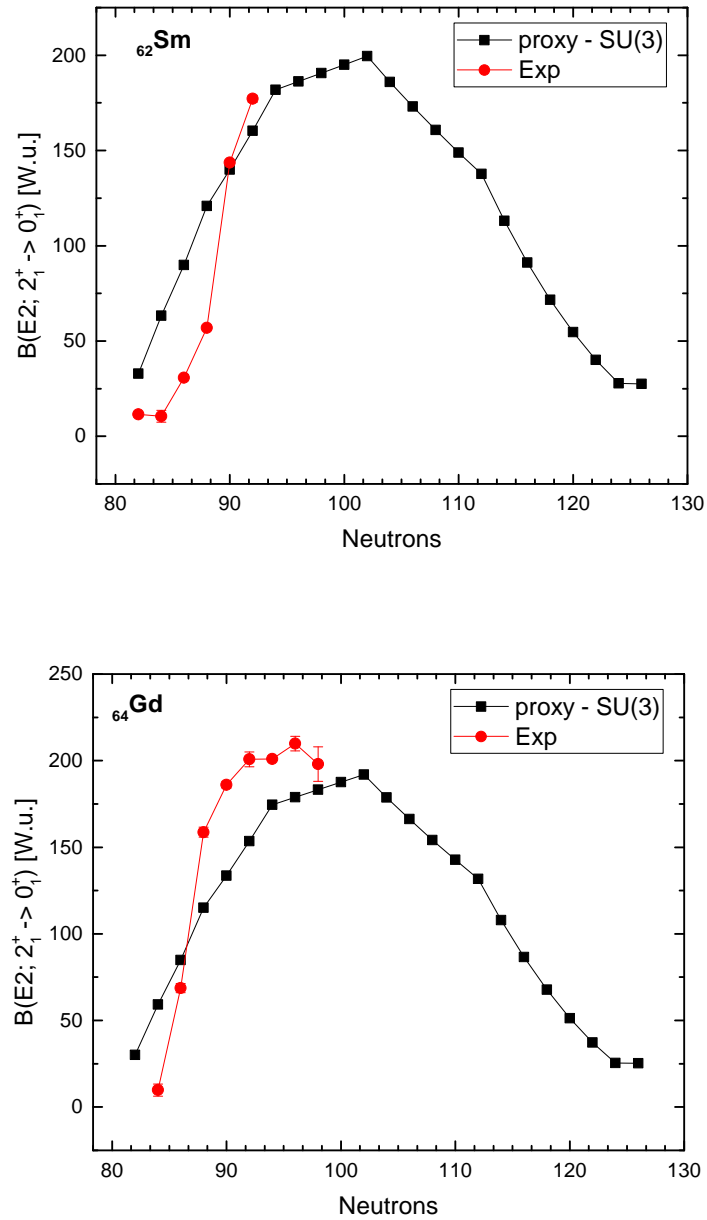
$$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) = \frac{1.01^4 A^{\frac{2}{3}}}{4\pi} C_2^{(\lambda, \mu)} |\langle (\lambda, \mu) 12; (1, 1) 2 | (\lambda, \mu) 10 \rangle|^2 e^2 \text{fm}^4, \quad (4.11)$$

ή για απευθείας σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα

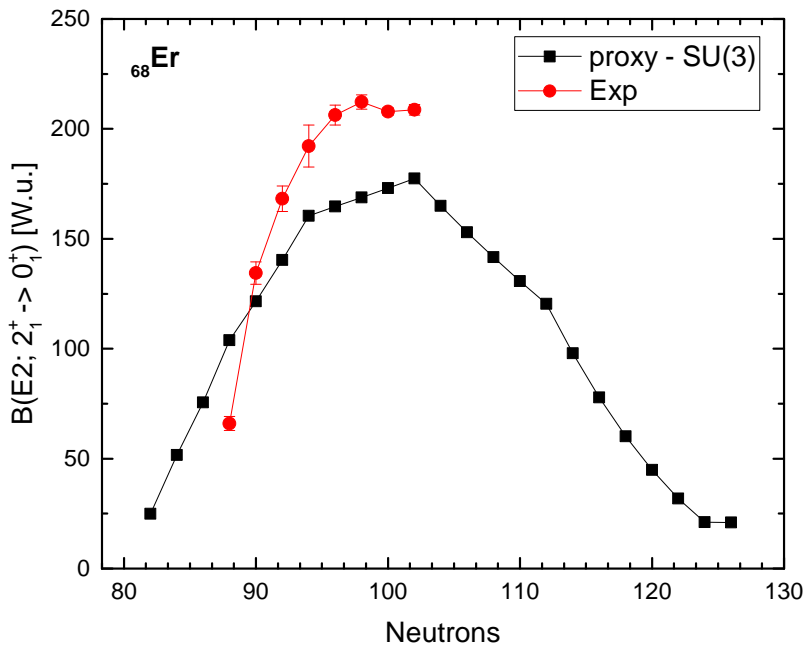
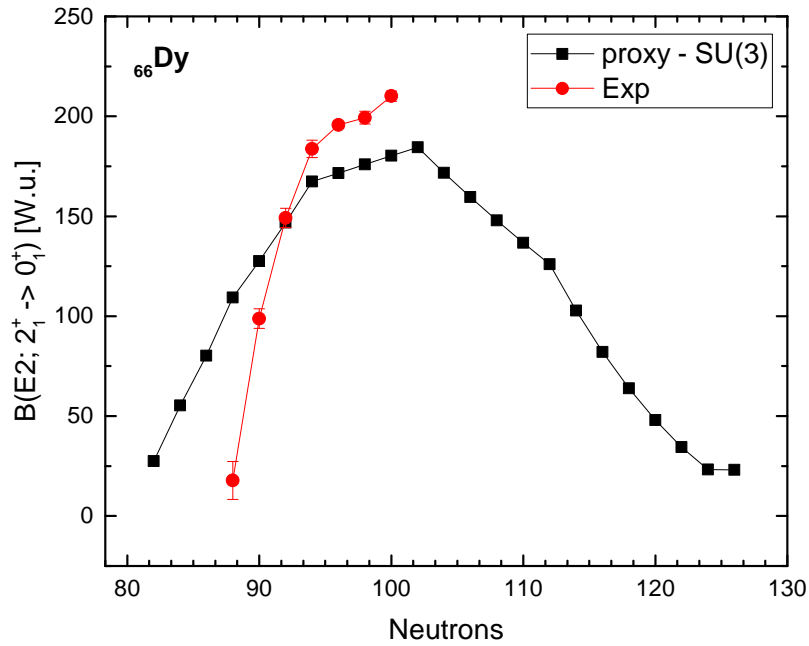
$$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) = \frac{1.01^4}{4\pi 0.297 A^{\frac{2}{3}}} C_2^{(\lambda, \mu)} |\langle (\lambda, \mu) 12; (1, 1) 2 | (\lambda, \mu) 10 \rangle|^2 W.u. \quad (4.12)$$

4.4 Αποτελέσματα $B(E2; L + 2 \rightarrow L)$ Σπάνιων Γαιών

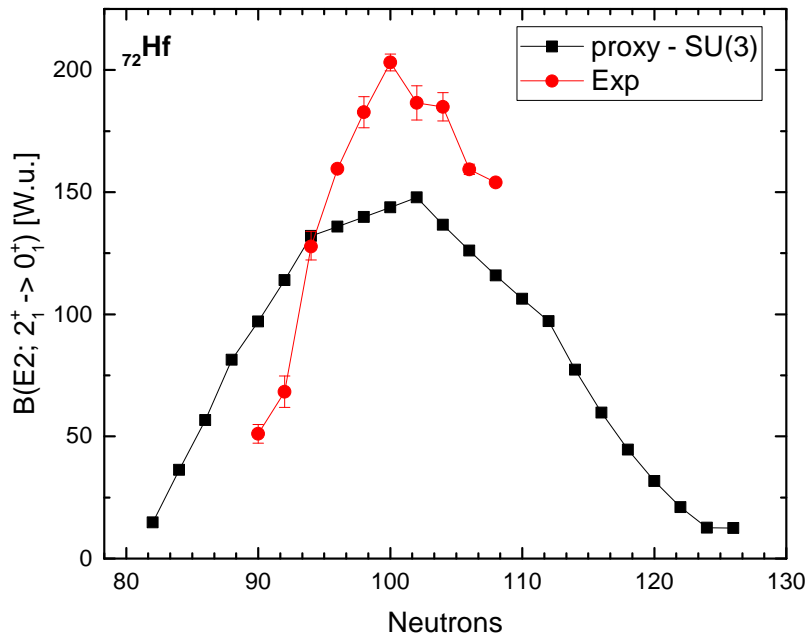
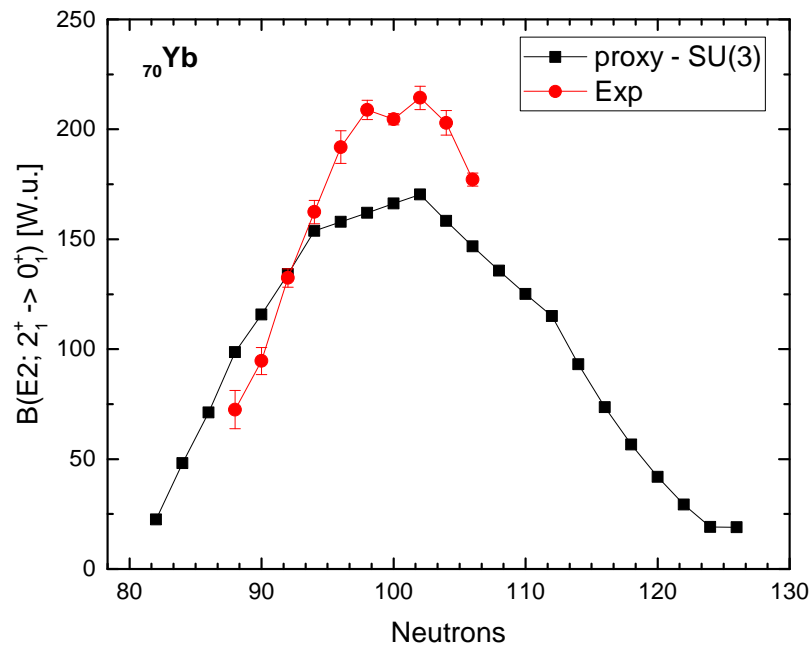
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τις σπάνιες γαίες, όπως αυτές υπολογίστηκαν με βάση την σχέση (4.12).

4.4.1 $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ 

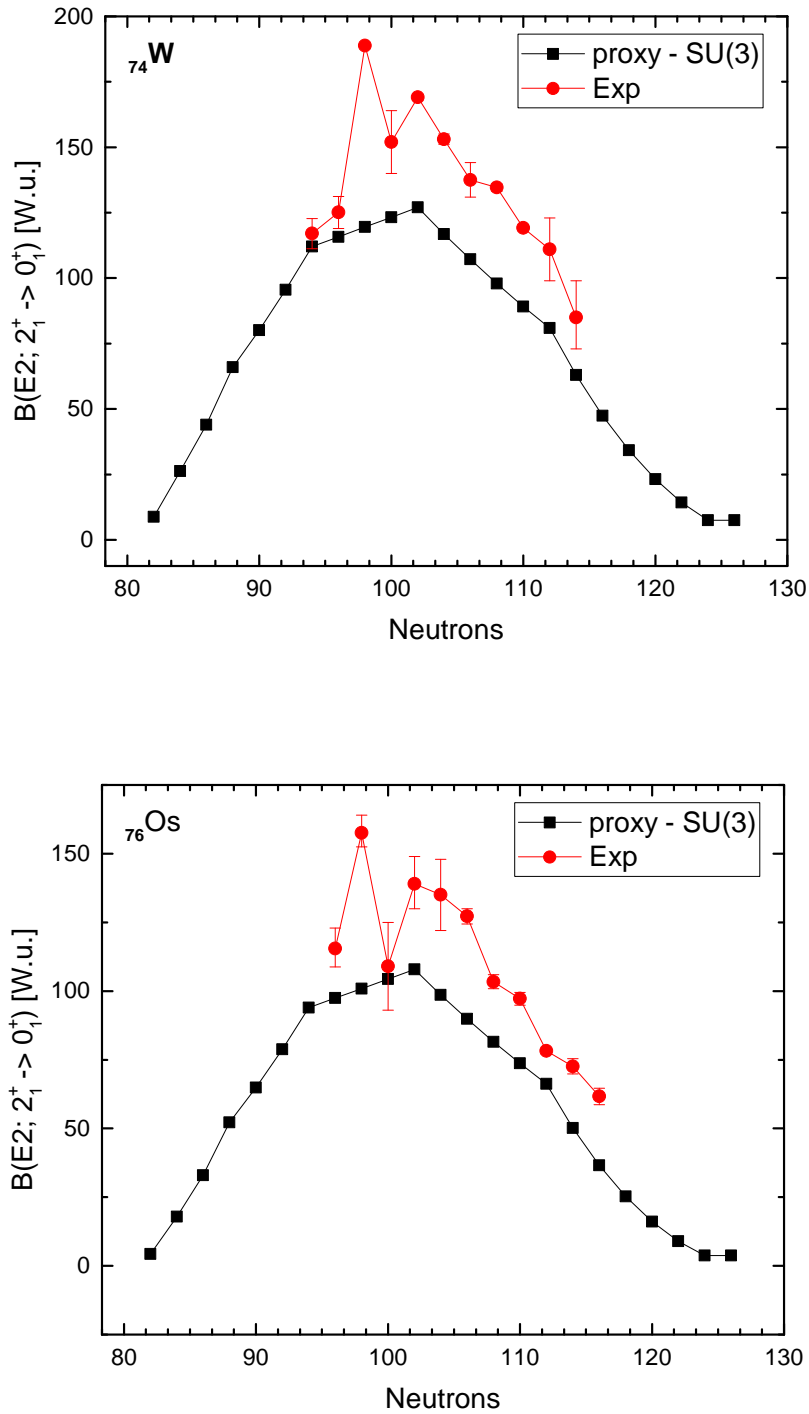
Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



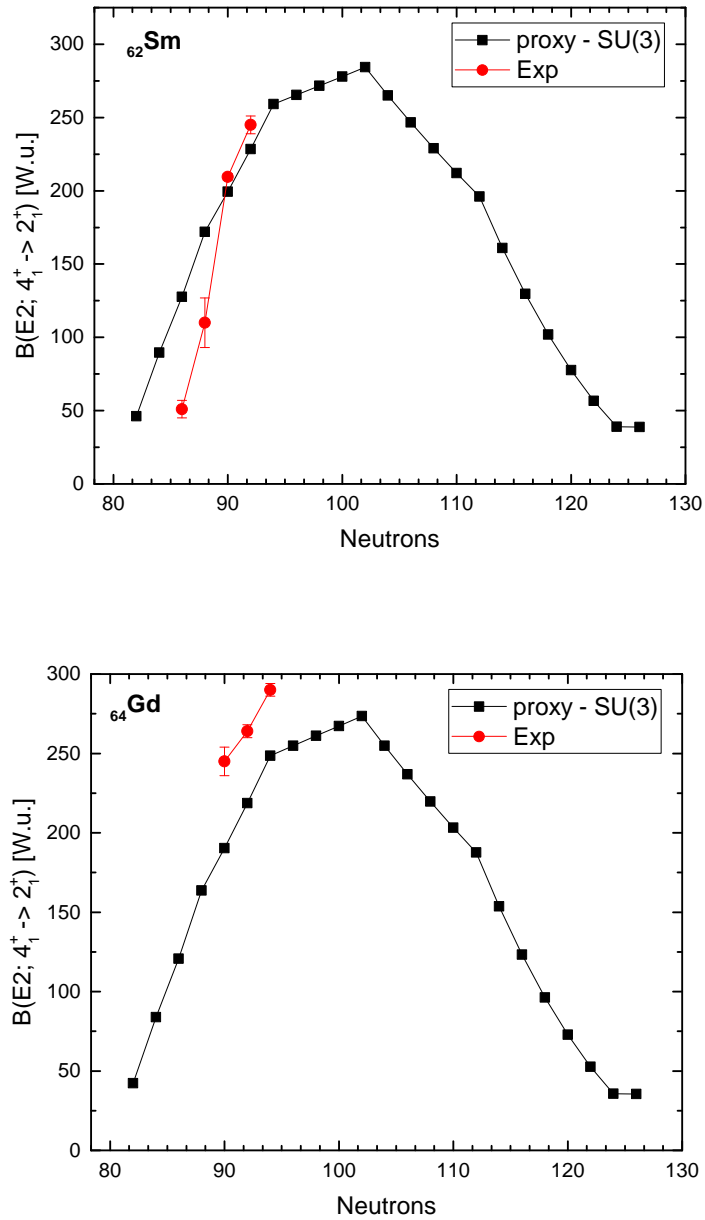
Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



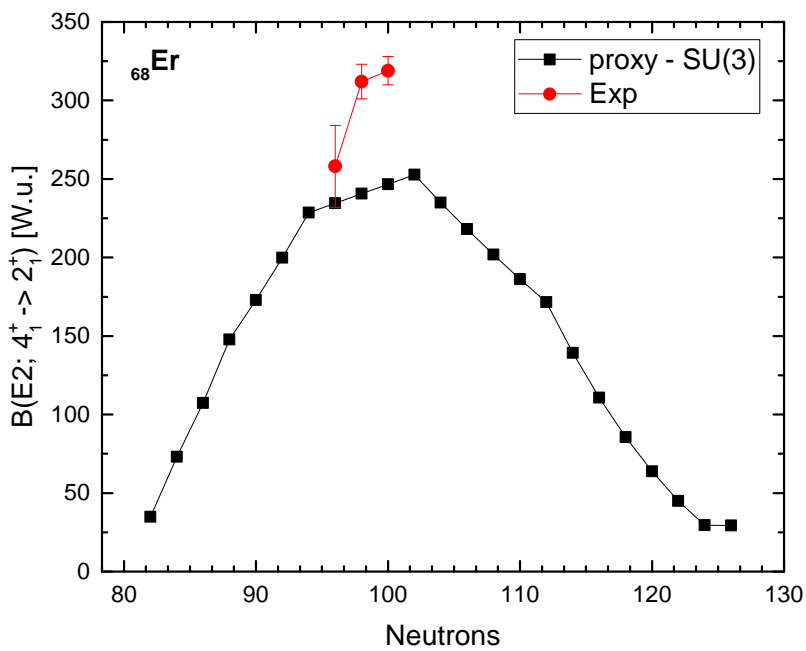
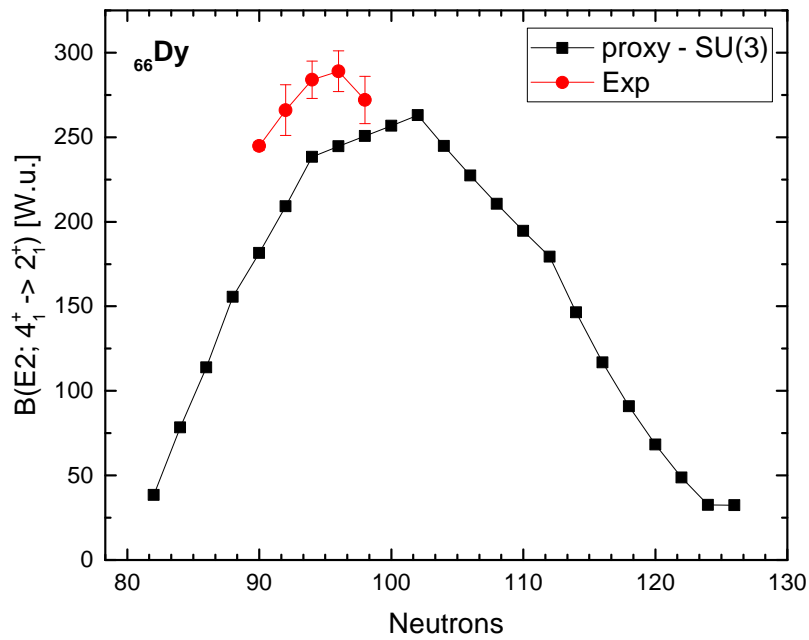
Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



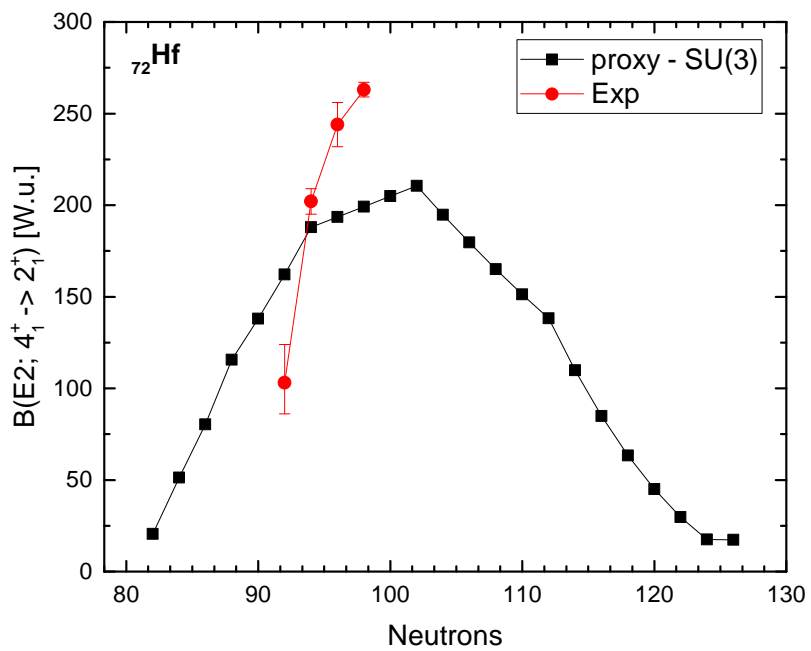
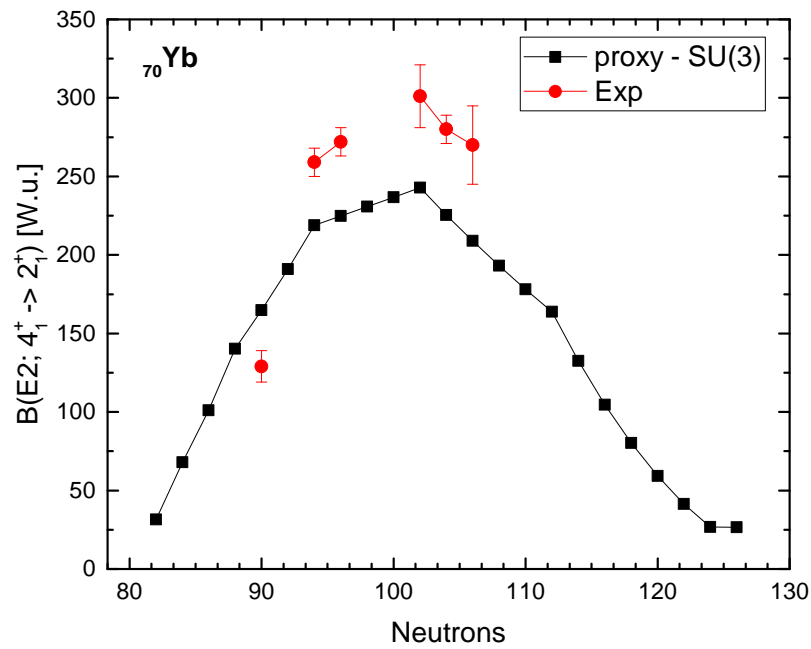
Σχήμα 4.4: Γραφική παράσταση της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

4.4.2 $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ 

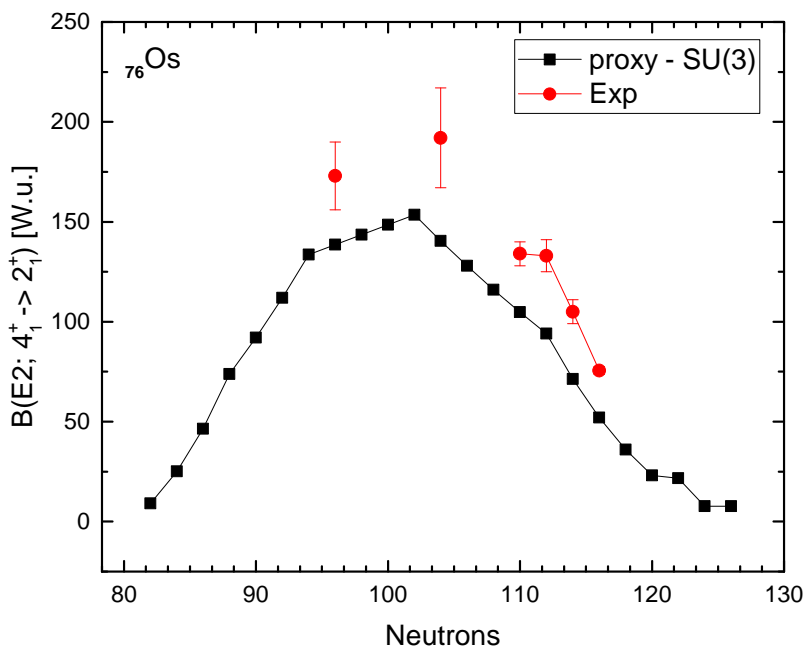
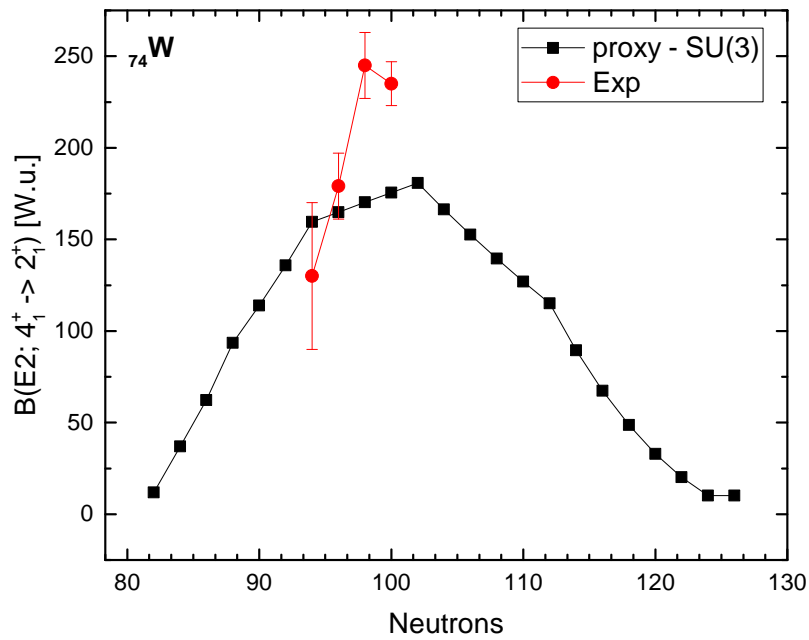
Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



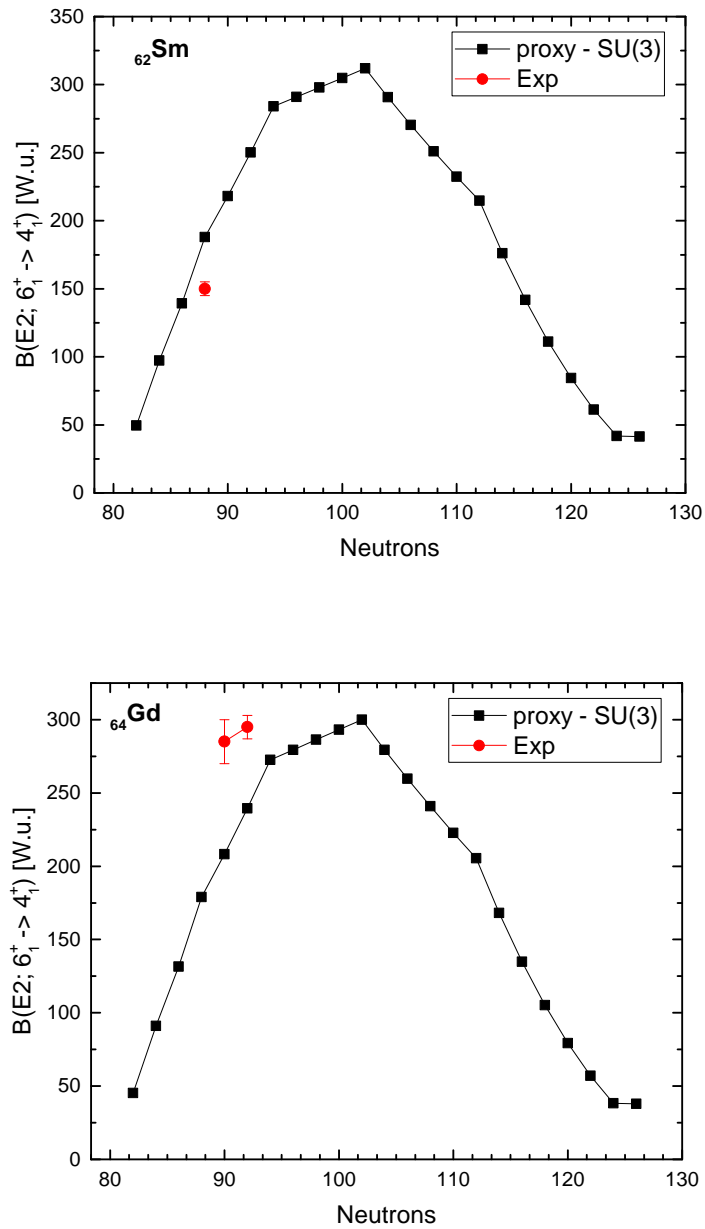
Σχήμα 4.6: Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



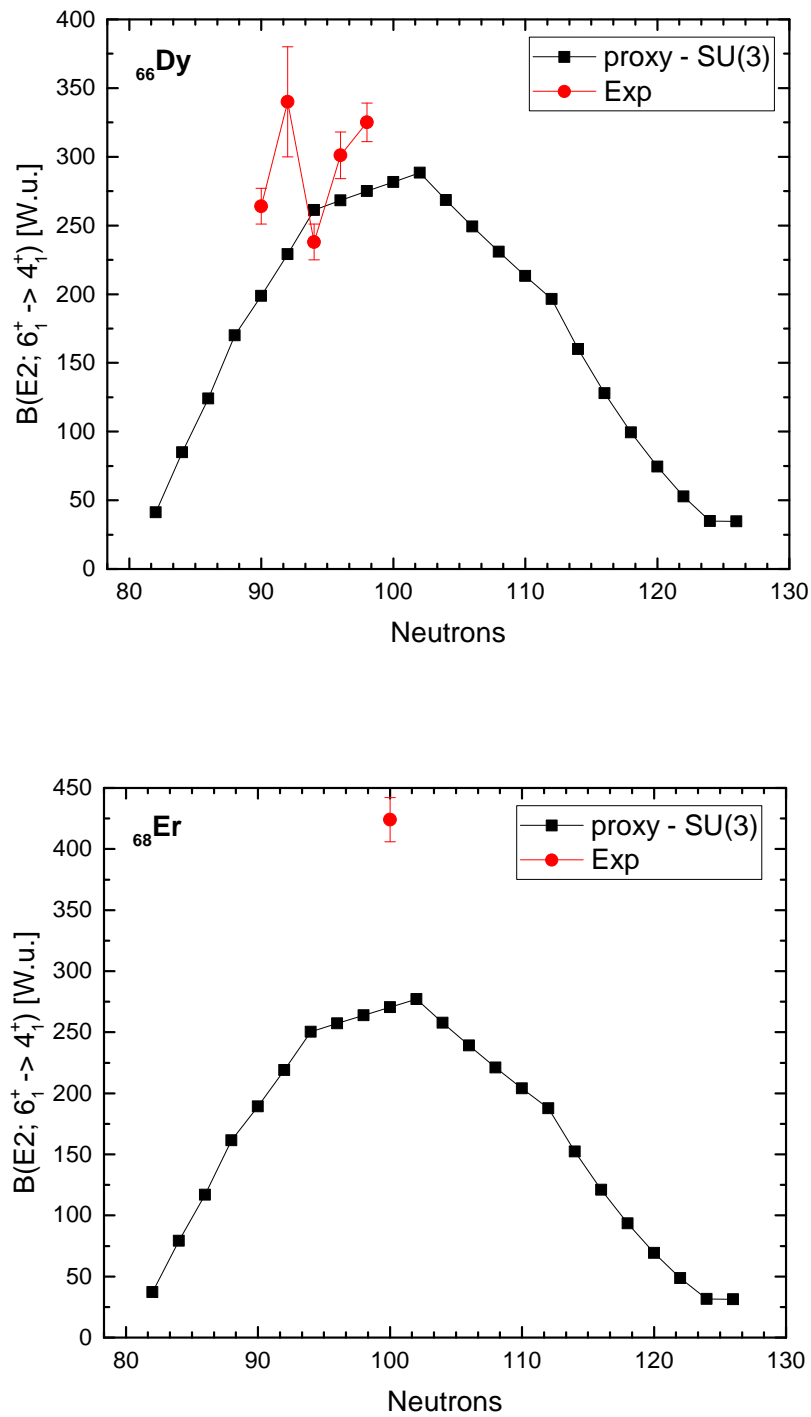
Σχήμα 4.7: Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



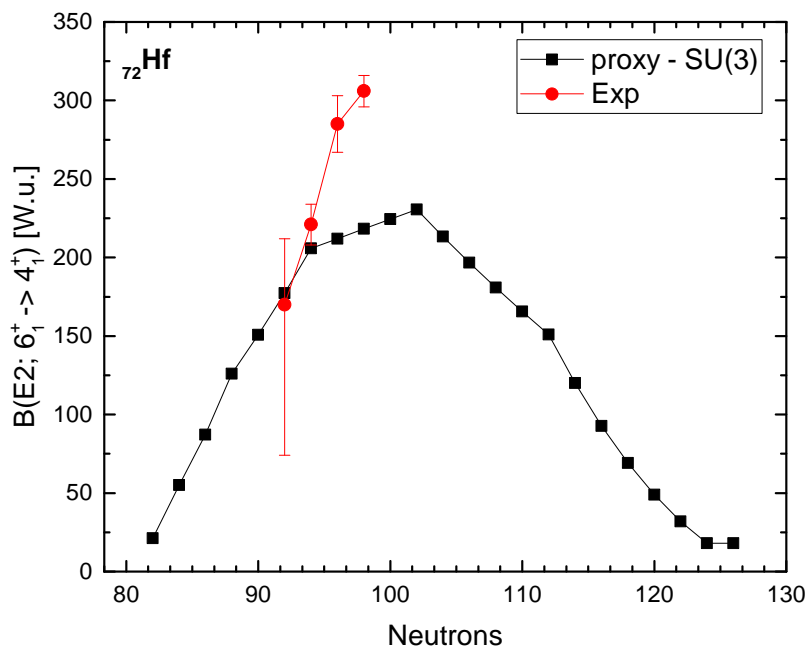
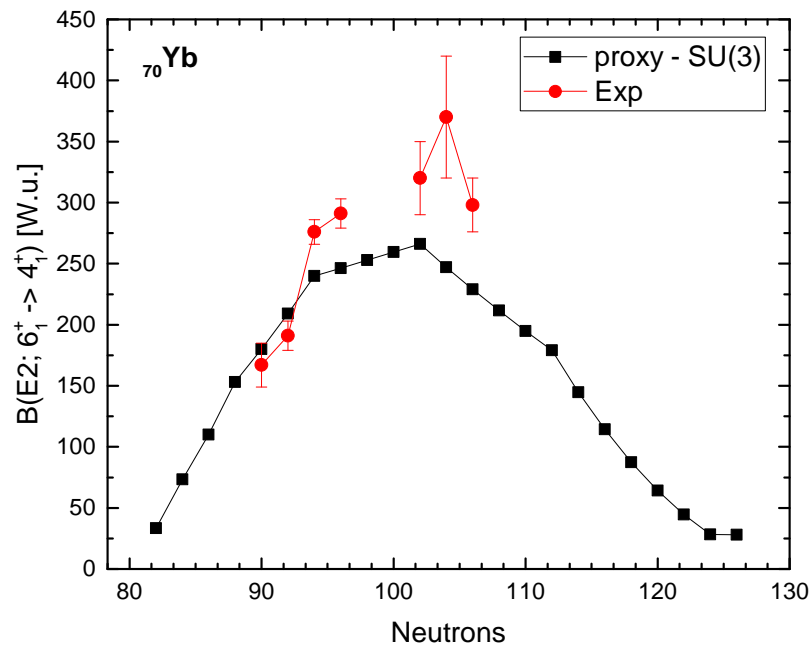
Σχήμα 4.8: Γραφική παράσταση της $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

4.4.3 $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ 

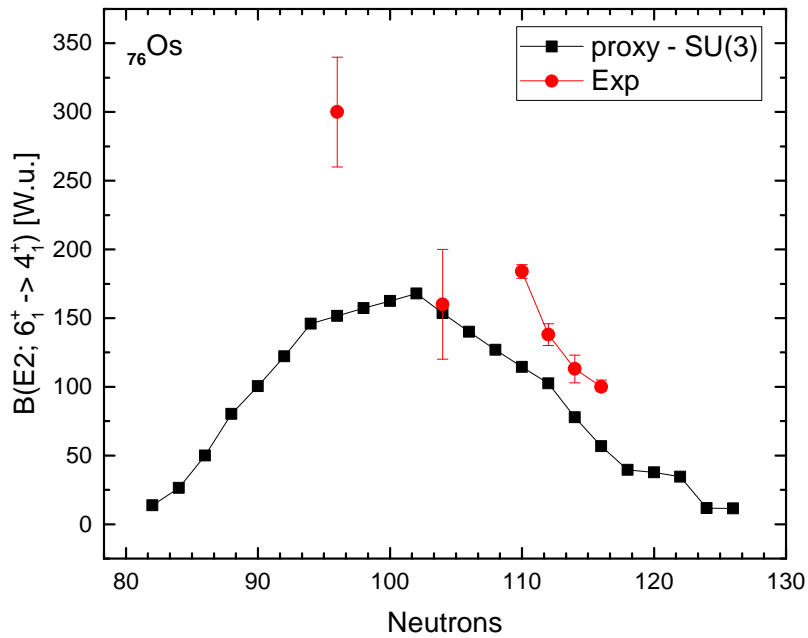
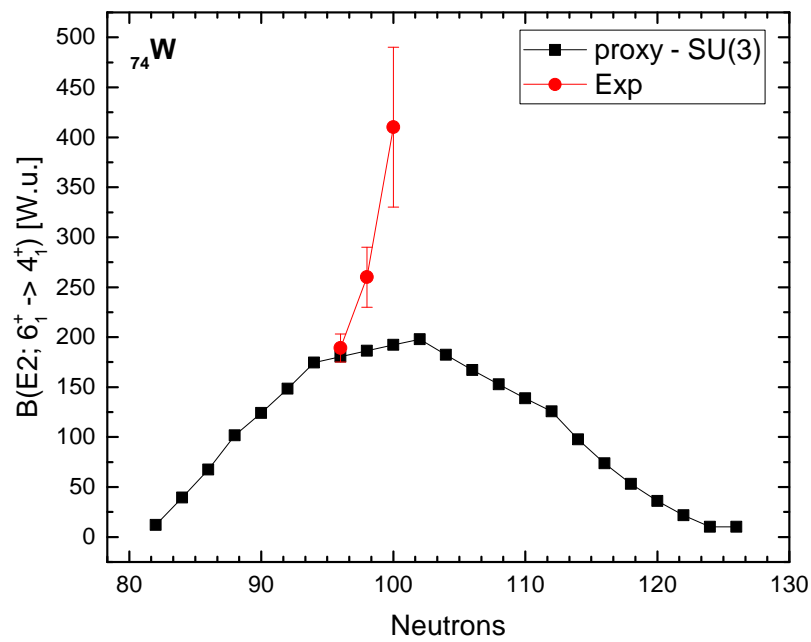
Σχήμα 4.9: Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



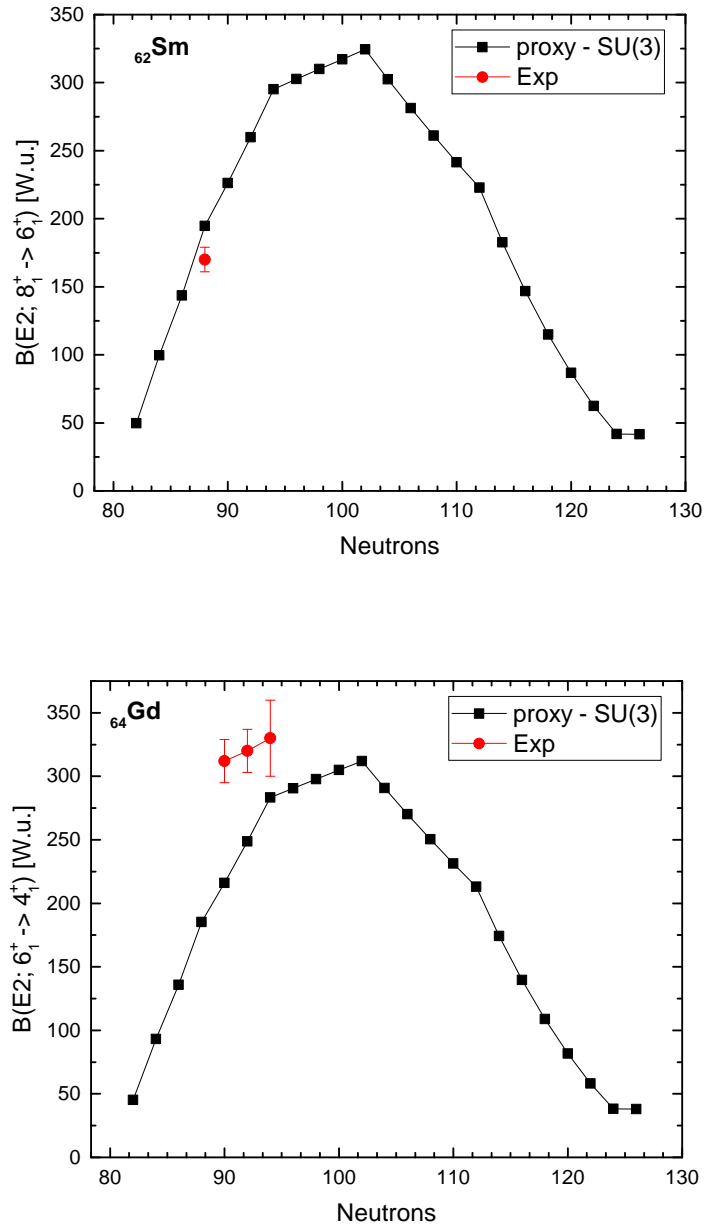
Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



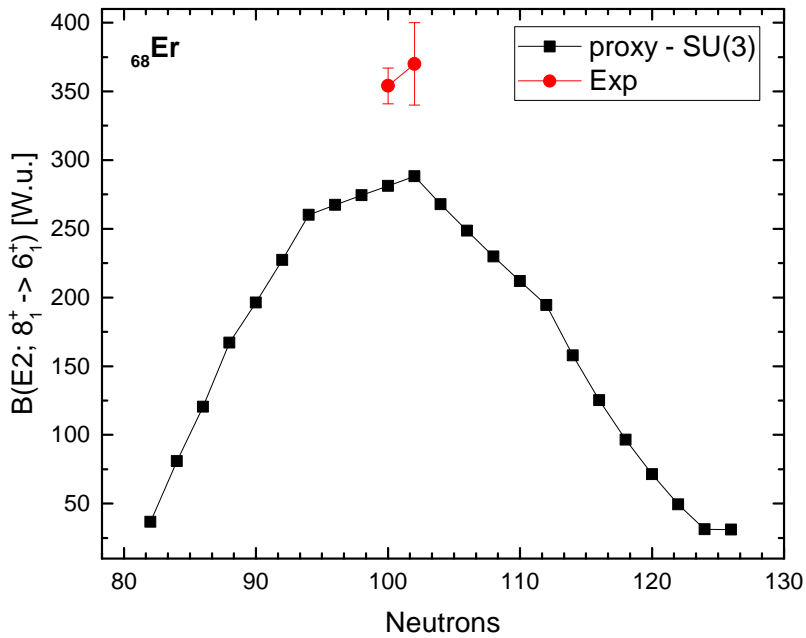
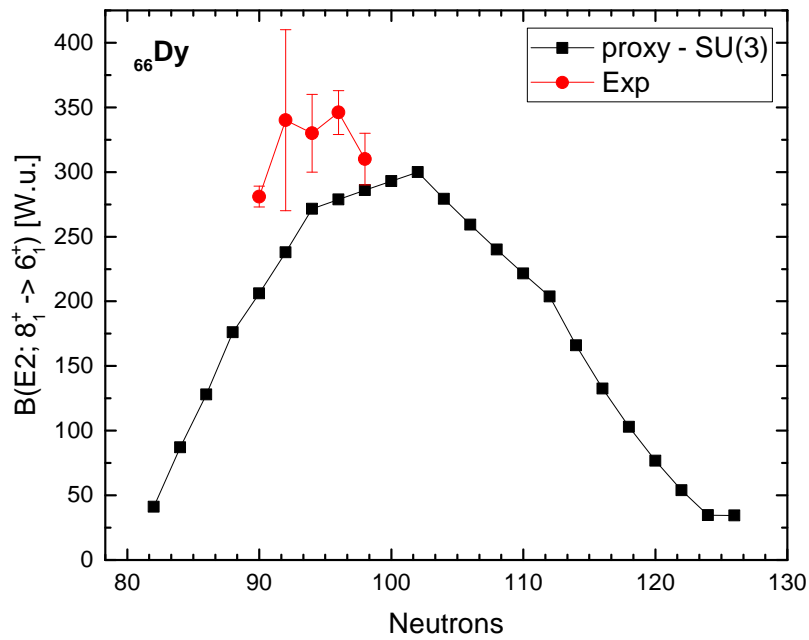
Σχήμα 4.11: Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



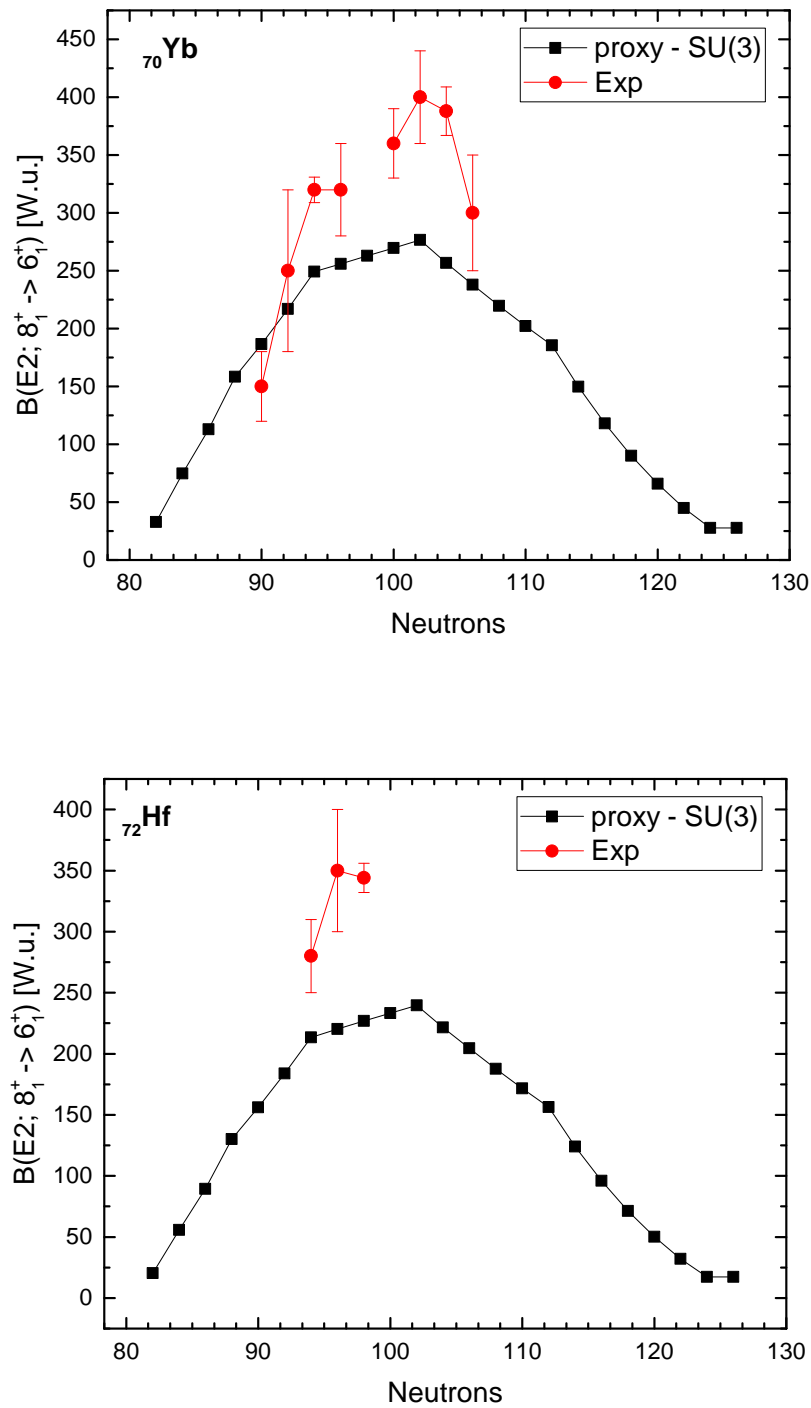
Σχήμα 4.12: Γραφική παράσταση της $B(E2; 6_1^+ \rightarrow 4_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

4.4.4 $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ 

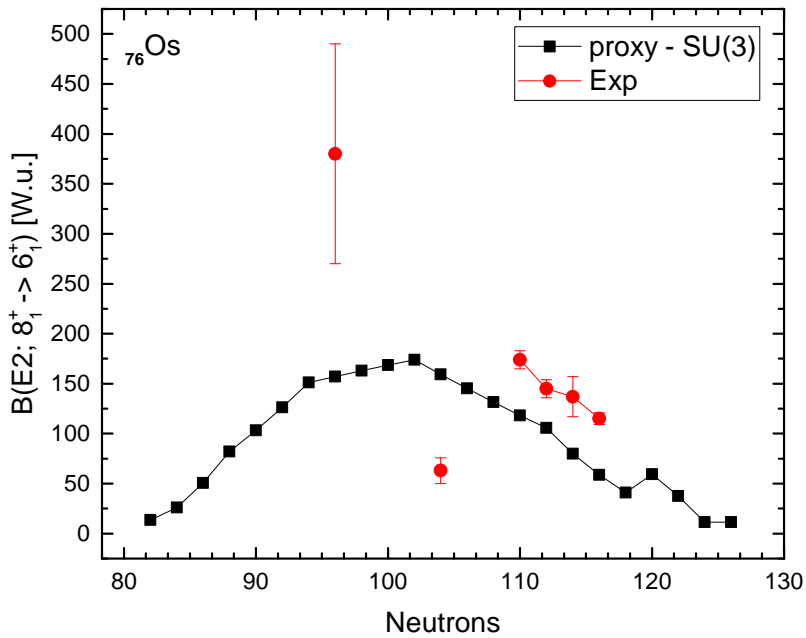
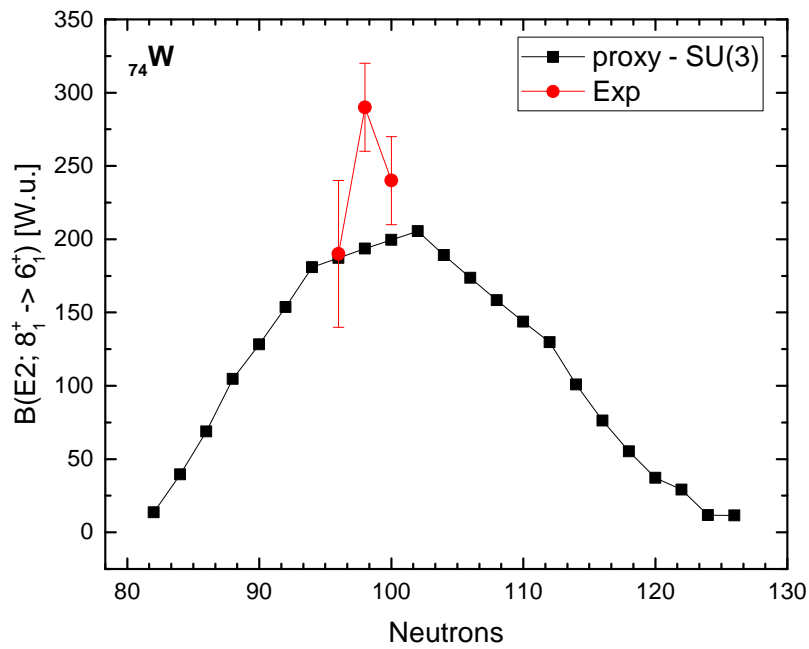
Σχήμα 4.13: Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



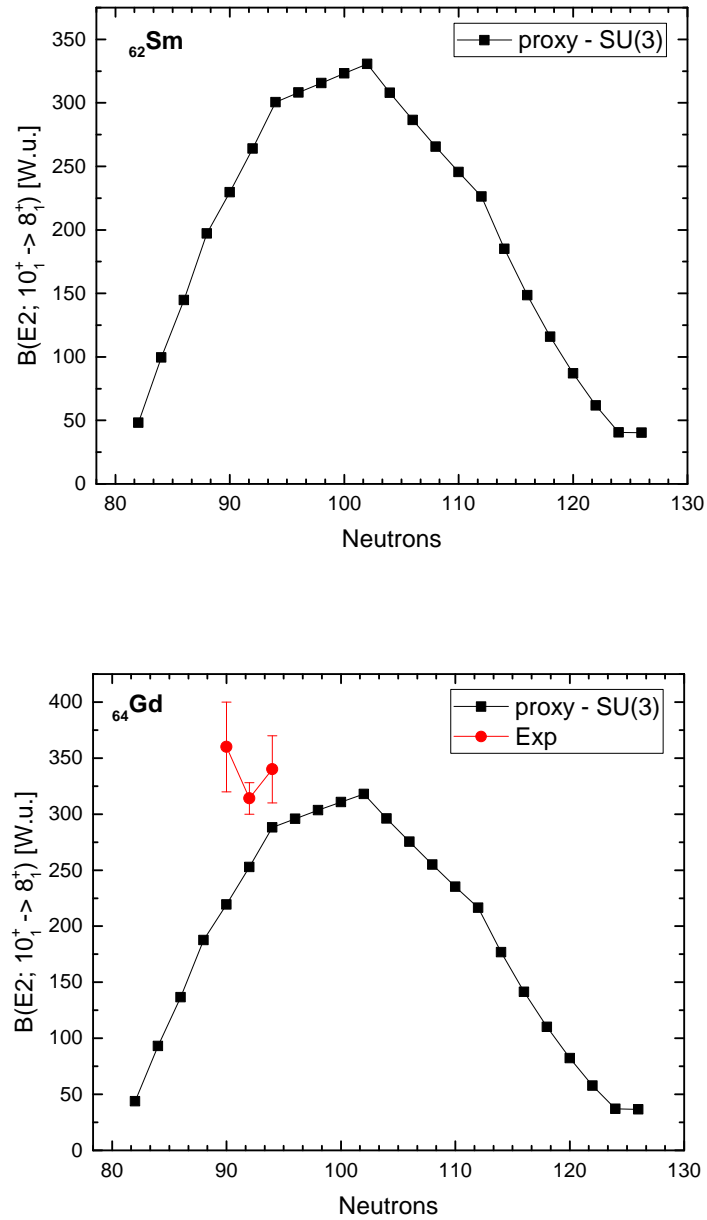
Σχήμα 4.14: Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



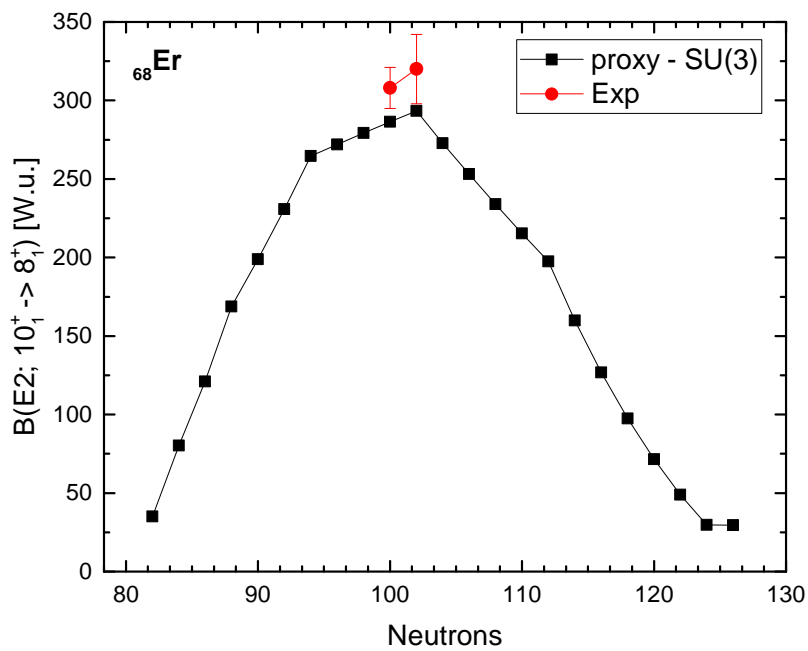
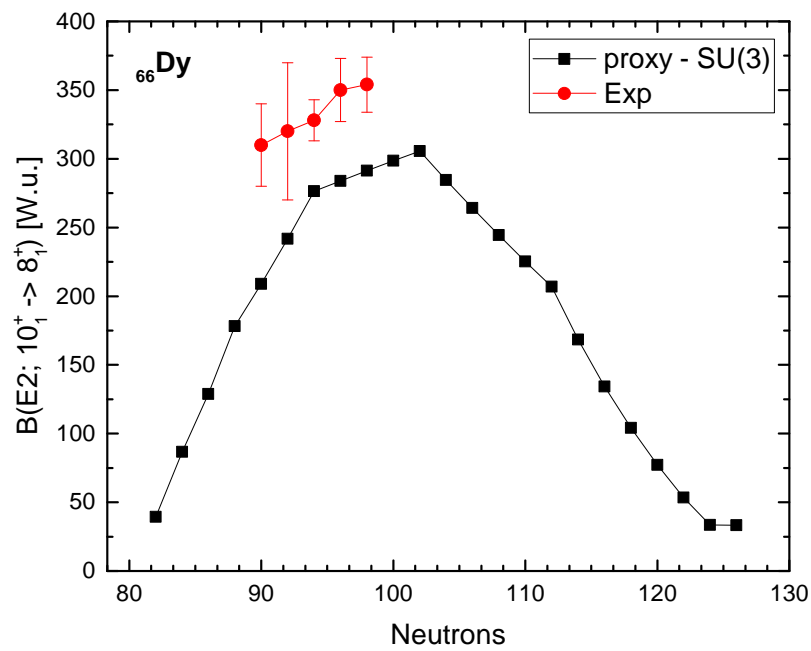
Σχήμα 4.15: Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



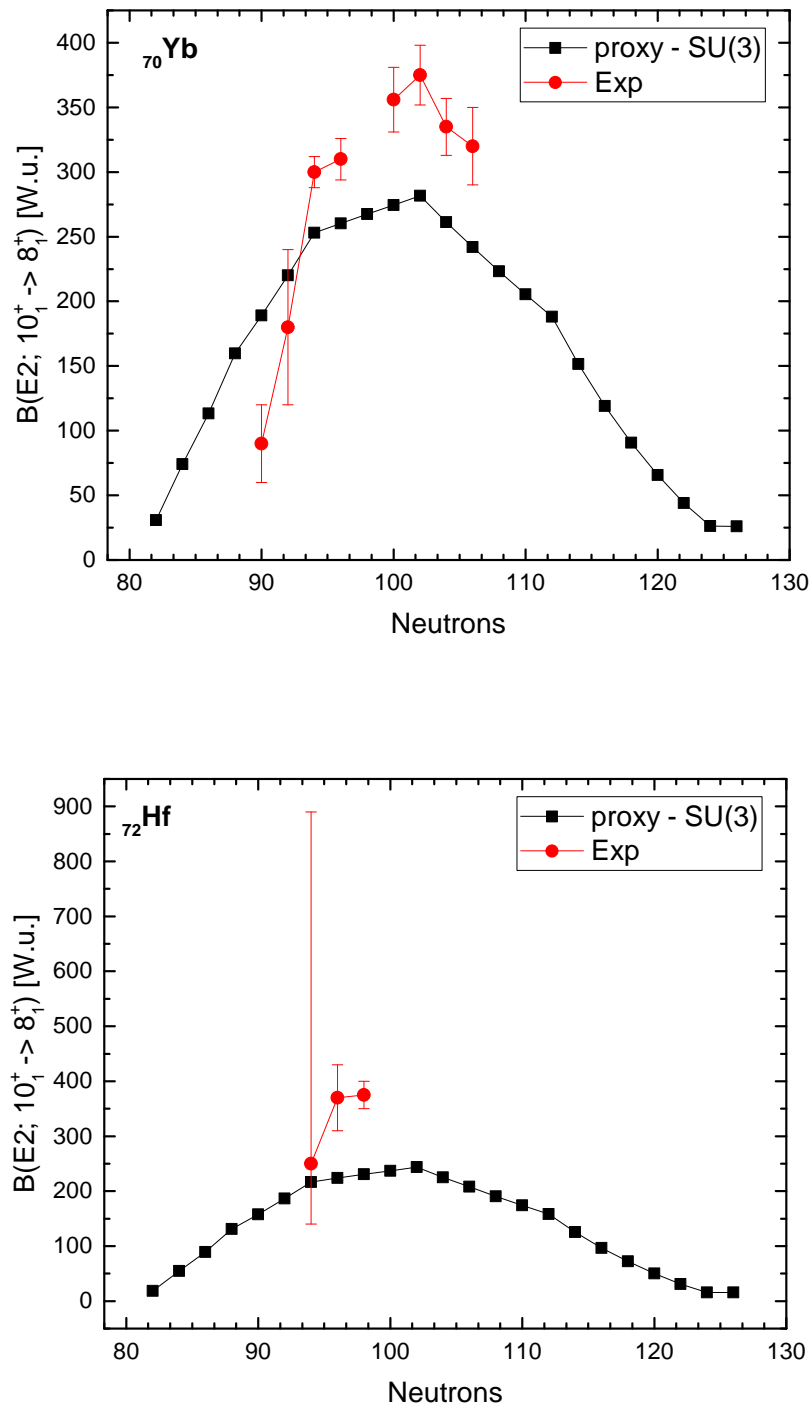
Σχήμα 4.16: Γραφική παράσταση της $B(E2; 8_1^+ \rightarrow 6_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

4.4.5 $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ 

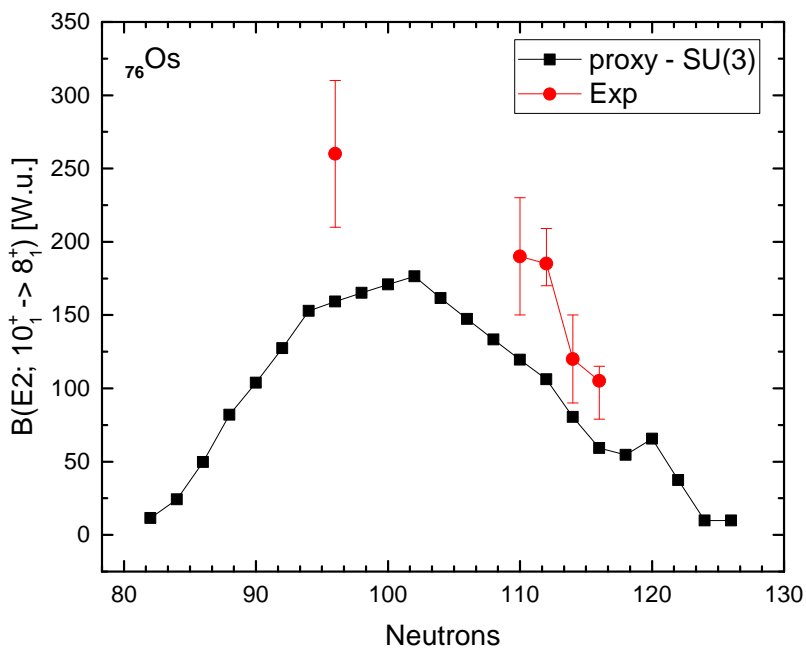
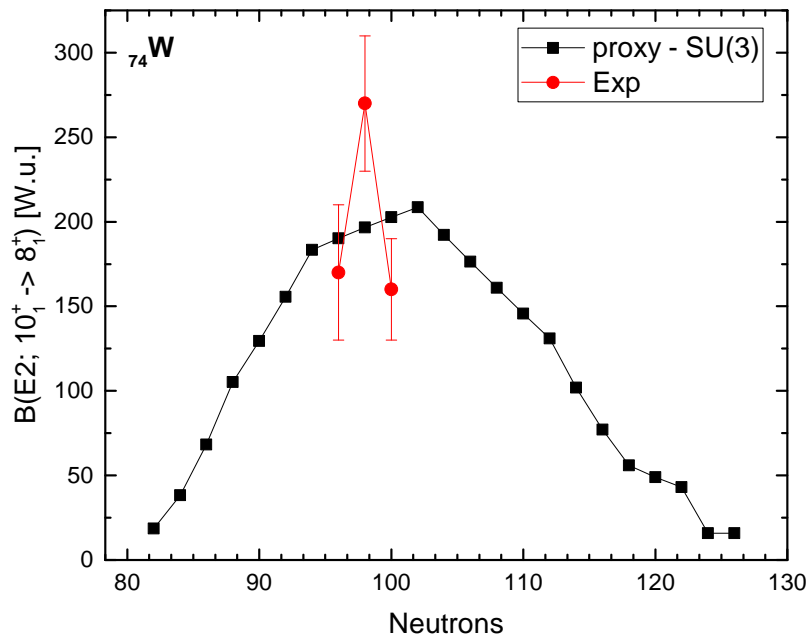
Σχήμα 4.17: Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



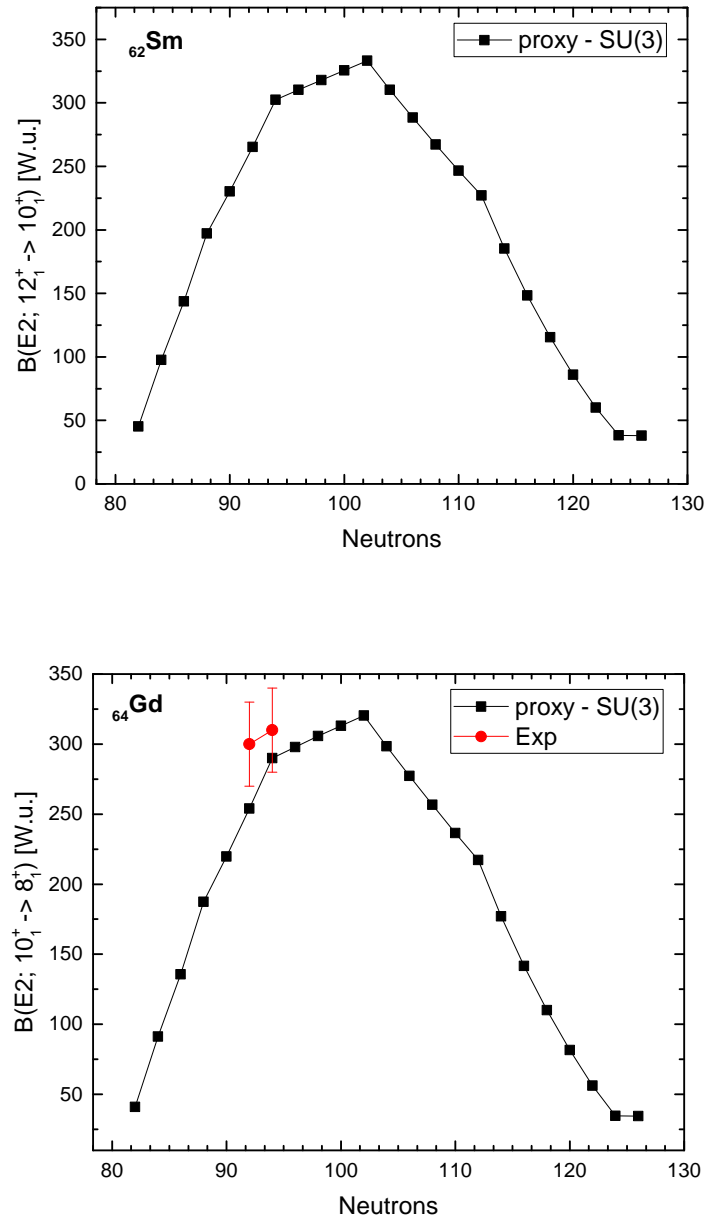
Σχήμα 4.18: Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



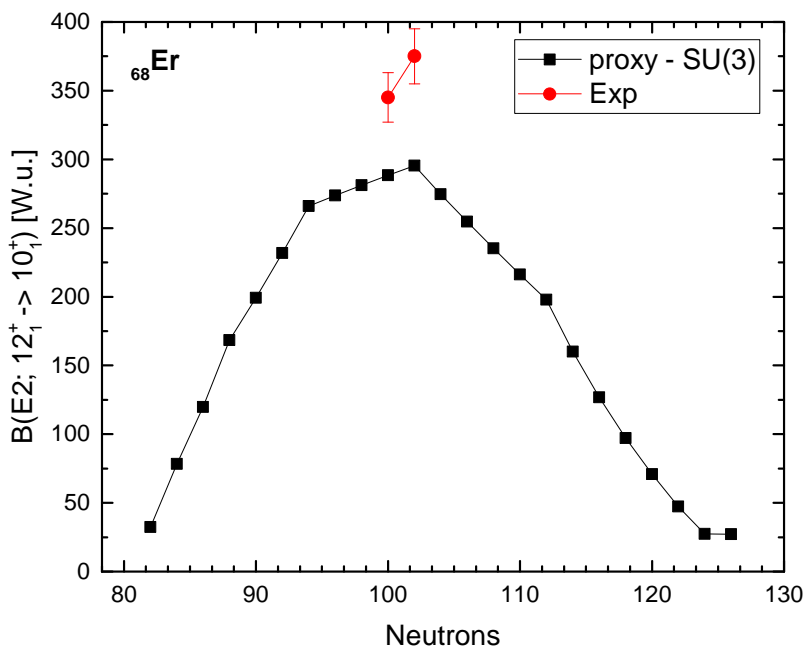
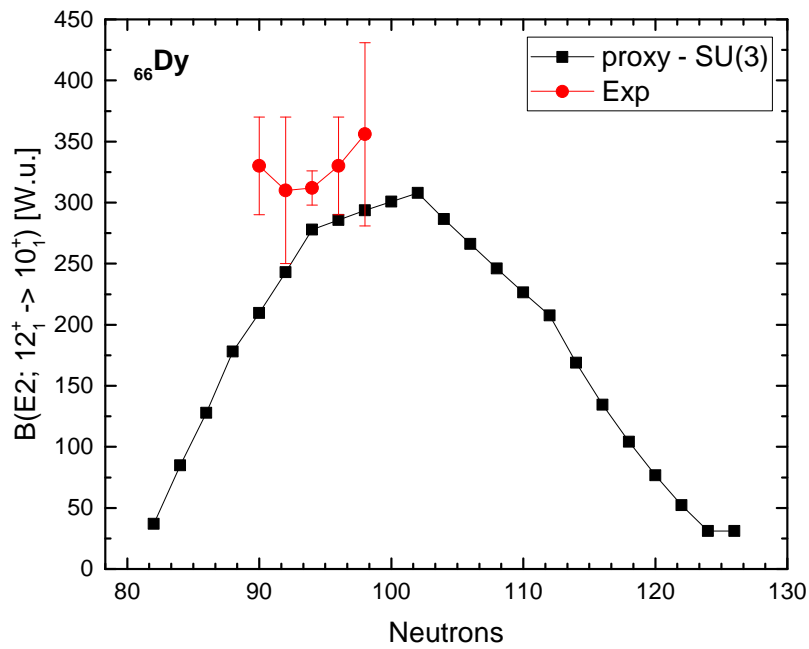
Σχήμα 4.19: Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



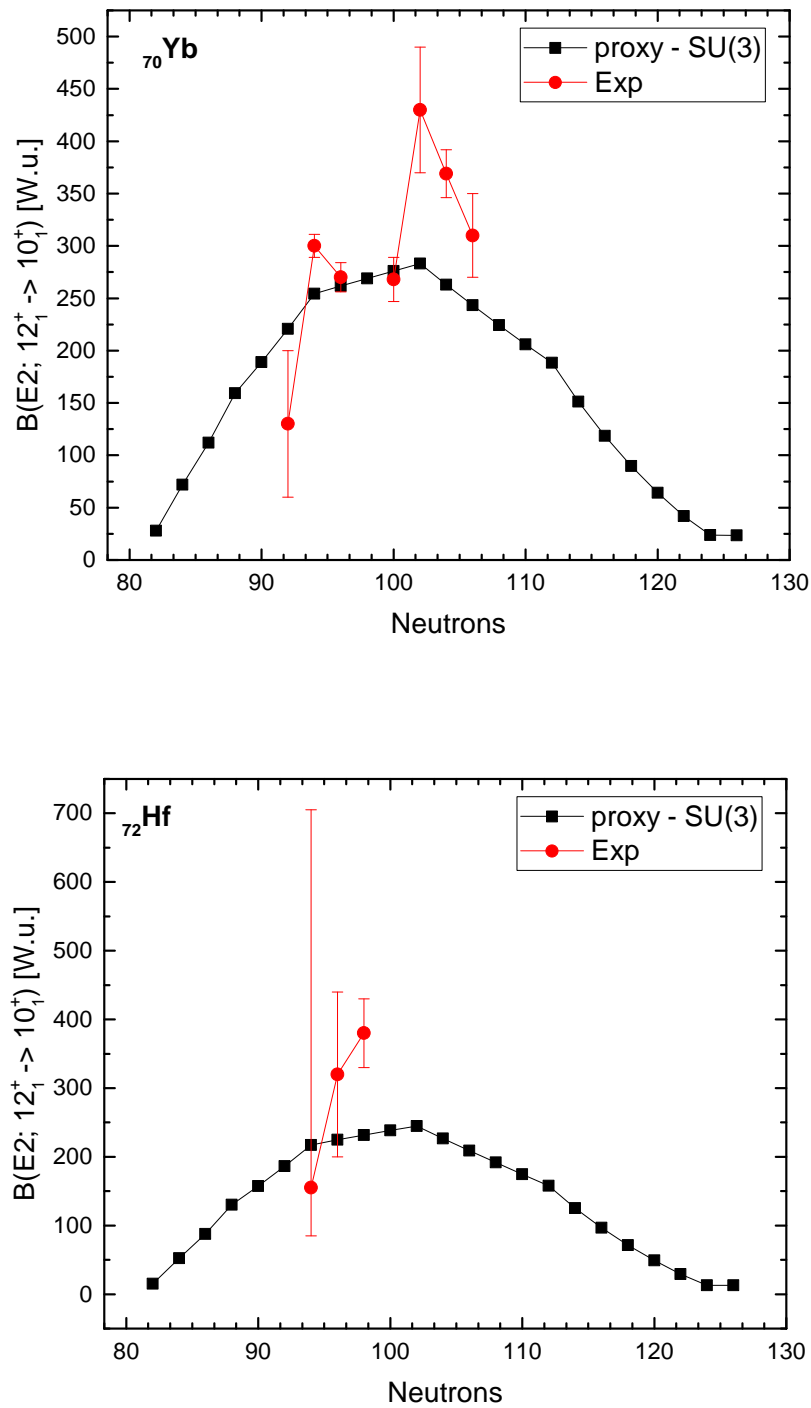
Σχήμα 4.20: Γραφική παράσταση της $B(E2; 10_1^+ \rightarrow 8_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

4.4.6 $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ 

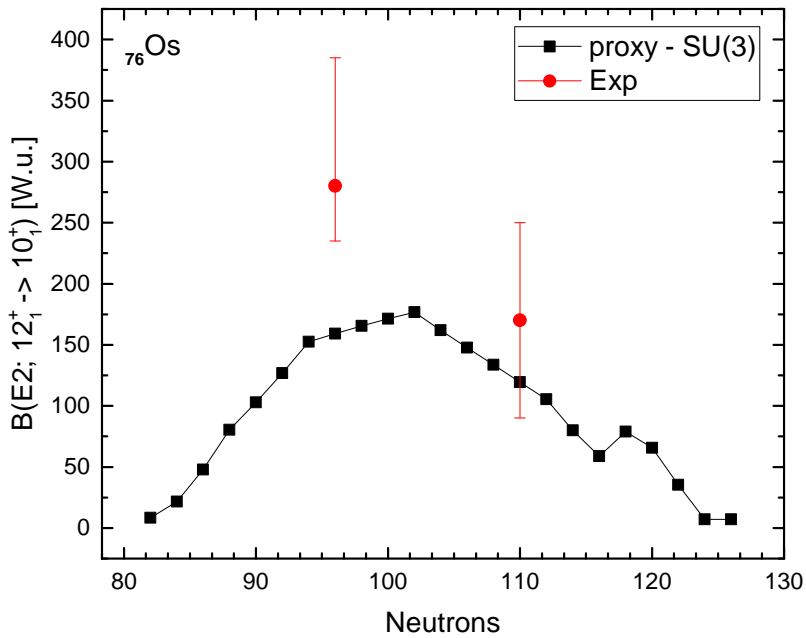
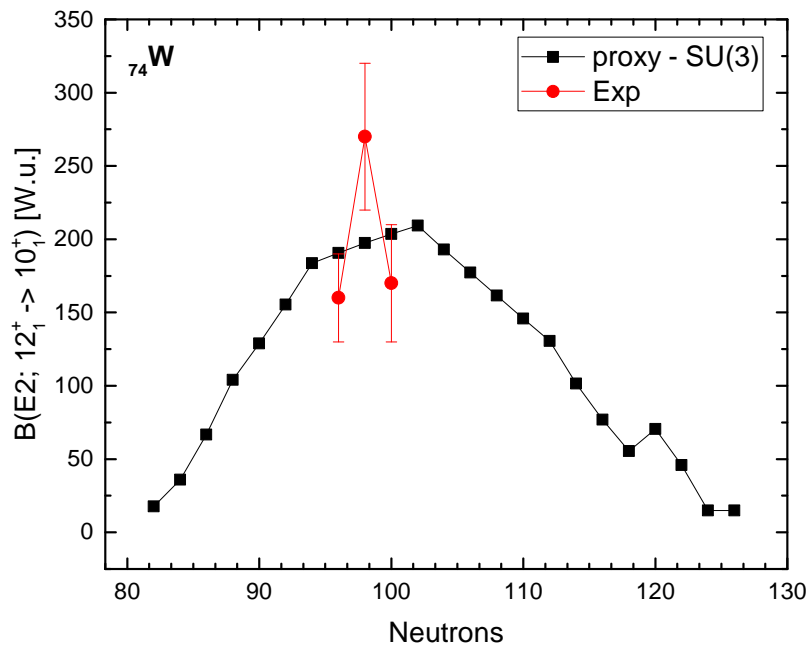
Σχήμα 4.21: Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



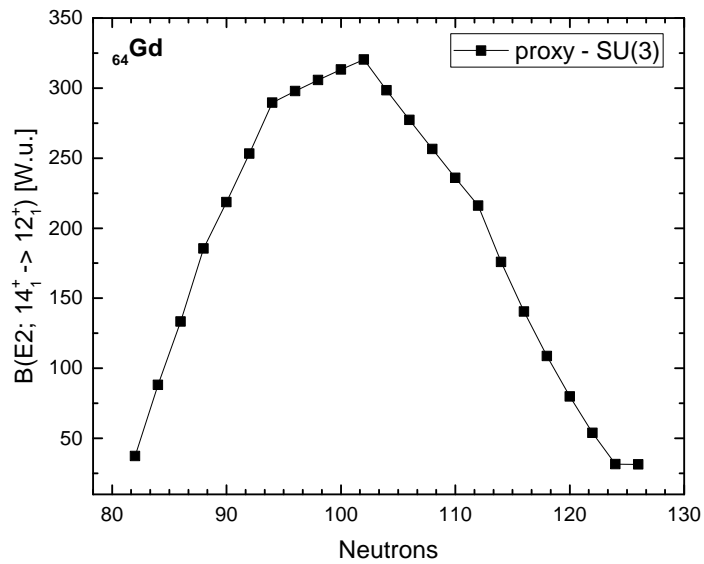
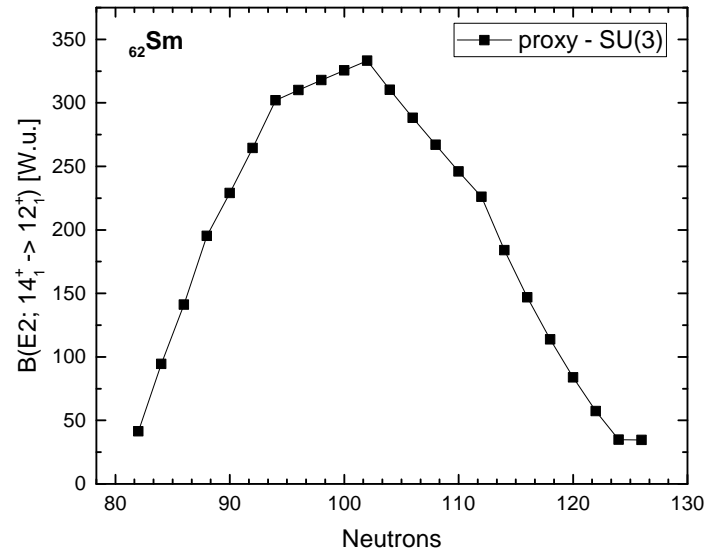
Σχήμα 4.22: Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



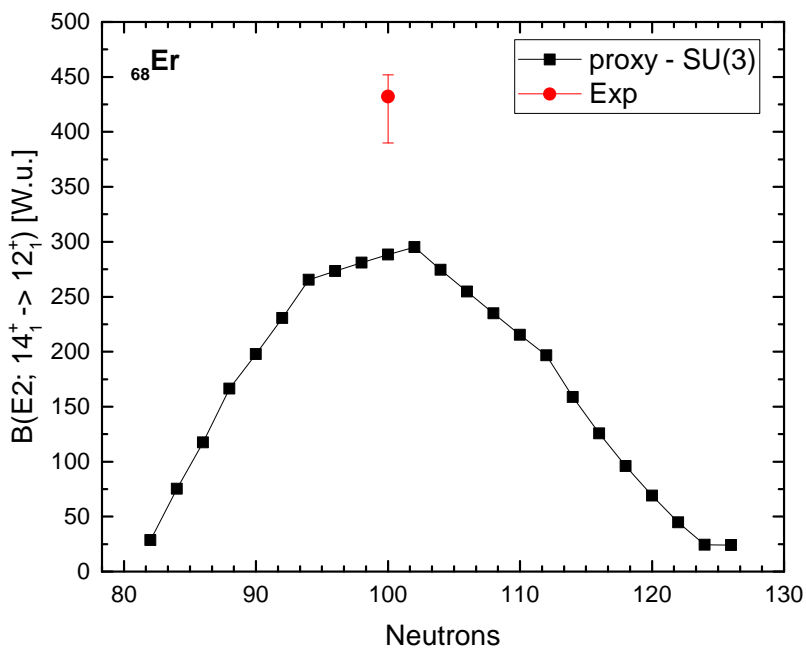
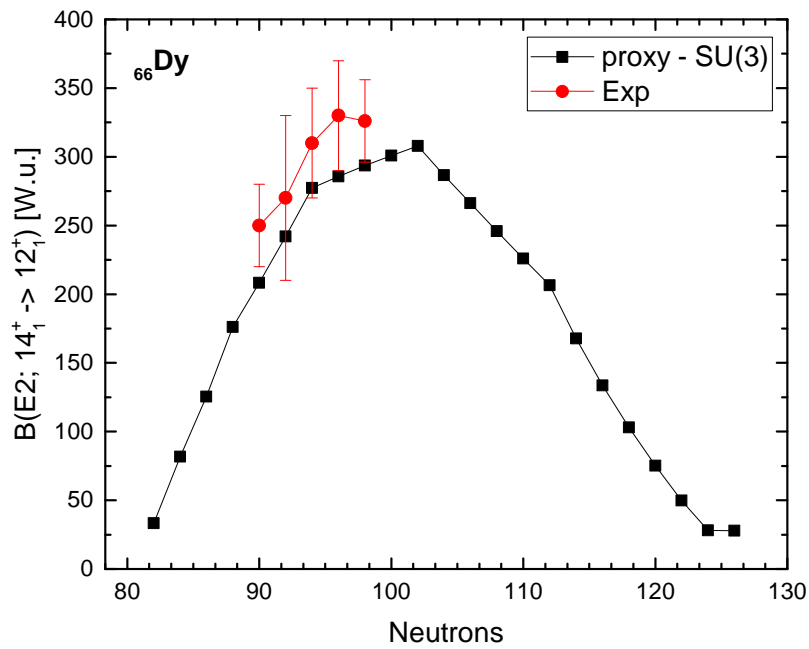
Σχήμα 4.23: Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



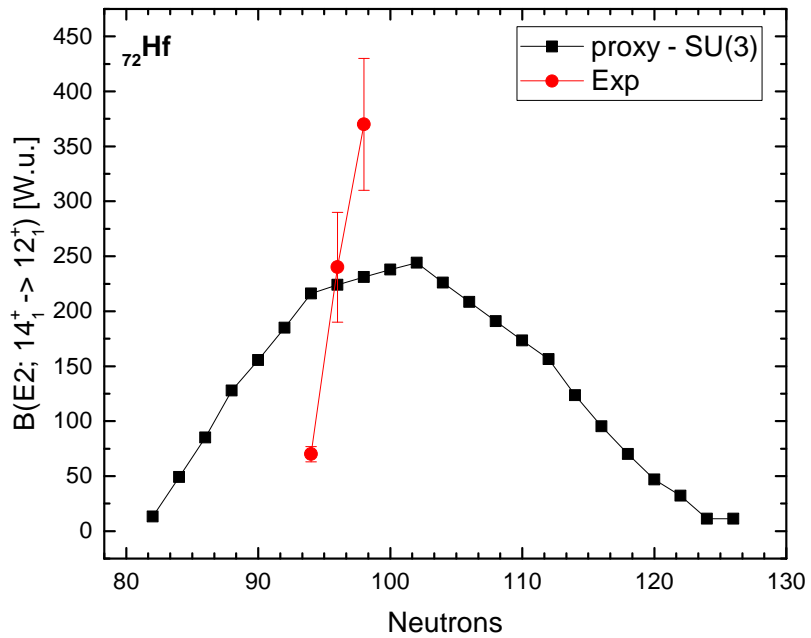
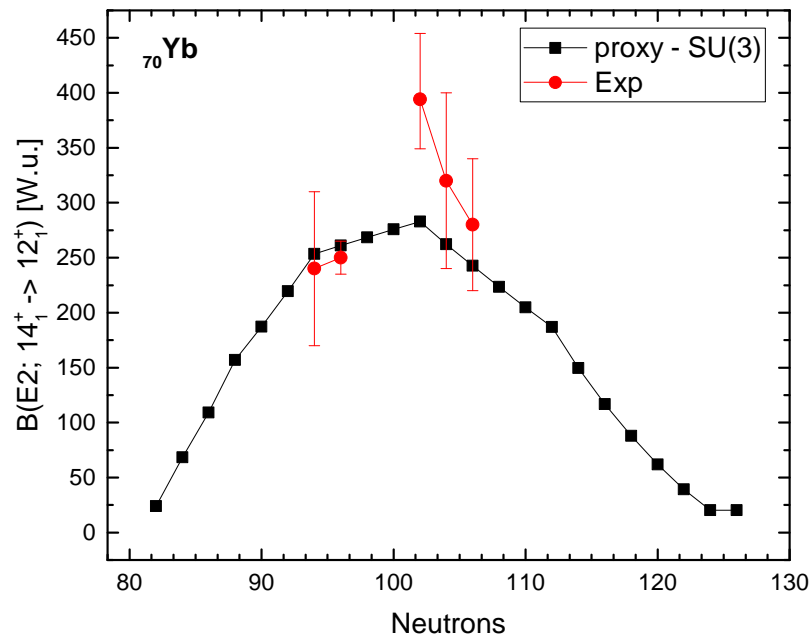
Σχήμα 4.24: Γραφική παράσταση της $B(E2; 12_1^+ \rightarrow 10_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

4.4.7 $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ 

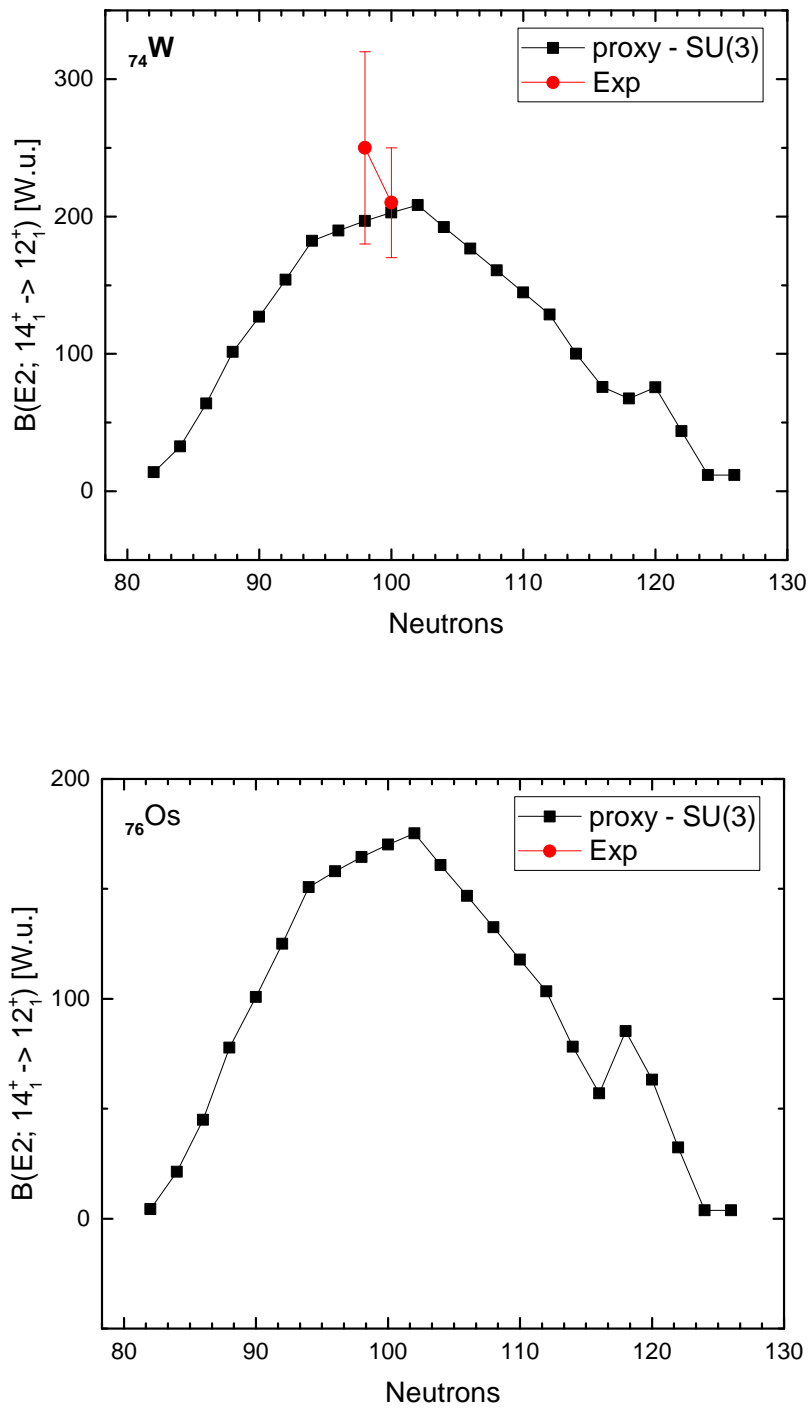
Σχήμα 4.25: Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



Σχήμα 4.26: Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



Σχήμα 4.27: Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



Σχήμα 4.28: Γραφική παράσταση της $B(E2; 14_1^+ \rightarrow 12_1^+)$ για τα διάφορα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

4.5 Ανάλυση αποτελεσμάτων για τις $B(E2)$ s

Μελετώντας τα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.4, μπορεί κανείς να οδηγηθεί στο συμπέρασμα πως η χρήση του προτύπου $proxym-SU(3)$ για τον υπολογισμό των $B(E2)$ στην περιοχή των σπάνιων γαιών αποδεικνύεται ιδιαίτερα επιτυχής στο μεγαλύτερο ποσοστό των πυρήνων.

Ιδιαίτερα, θα πρέπει να τονιστεί εκ νέου πως όλοι οι υπολογισμοί που έχουν παρουσιαστεί είναι αναλυτικοί και έχουν γίνει χωρίς να υπεισέρχεται ουδεμία ελεύθερη παράμετρος που να προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα (fitting). Ωστόσο, υπάρχουν κάποιες παρατηρήσεις οι οποίες χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης.

Πιο συγκεκριμένα:

- Οι υπολογισμοί οδηγούν σε αποτελέσματα τα οποία δίνουν την ορθή τάξη μεγέθους για τις $B(E2)$. Αυτό δεν πρέπει να εκλαμβάνεται ως κάτι δεδομένο. Οι παρόντες υπολογισμοί ουσιαστικά είναι το πρώτο βήμα για τον υπολογισμό ενός ιδιαίτερα ευαίσθητου μεγέθους, έχοντας γίνει αρκετές υποθέσεις οι οποίες εκ του αποτελέσματος αποδεικνύεται πως είναι βάσιμες.
- Παρατηρείται πως κατά μέσο όρο για $N < 90$ η $proxym-SU(3)$ δίνει μεγαλύτερες τιμές από τις πειραματικές, ενώ για $N > 90$ οι θεωρητικές προβλέψεις είναι μικρότερες. Αυτό σχετίζεται άμεσα με τη θεμελίωση του προτύπου που έχει χρησιμοποιηθεί. Η απόκλιση αυτή οφείλεται στη μη εισαγωγή της αλληλεπίδρασης "ζευγαρώματος" (pairing interaction) στην $proxym-SU(3)$. Η εισαγωγή της αλληλεπίδρασης αυτής αναμένεται όπως είναι κατανοητό να καθυστερήσει την ανάπτυξη συλλογικότητας στους πυρήνες. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται πως στους πυρήνες υπάρχουν δύο αλληλεπιδράσεις που αντιμάχονται η μία την άλλη: η μία είναι η αλληλεπίδραση "ζευγαρώματος", η οποία είναι υπεύθυνη για την ανάπτυξη συλλογικότητας στους πυρήνες, ενώ η άλλη είναι ο σχηματισμός ζευγών πρωτονίου - νετρονίου, η οποία είναι υπεύθυνη για την ανάπτυξη της παραμόρφωσης. Καθώς προχωρά κανείς προσθέτοντας νουκλεόνια στους πυρήνες, η αλληλεπίδραση ζευγαρώματος εξασθενεί ενώ ο σχηματισμός ζευγών πρωτονίου νετρονίου ευνοείται.
- Η χρήση "καθαρών" μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων (pure irreps) και όχι αναμιγμένων (mixed) αναμενόμενα οδηγεί σε απλούστευση της "συμβίωσης" των πρωτονίων με τα νετρόνια. Τα νουκλεόνια του πυρήνα δεν "συμβιώνουν" απλά μέσα στον πυρήνα, αλλά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με την τελική εικόνα να είναι πολυσύνθετη. Συνεπώς το να ισχυριζόμαστε πως η μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση του πυρήνα είναι το ευθύ άθροισμα των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων των πρωτονίων και των νετρονίων είναι μια πρώτη προσέγγιση αλλά απαιτεί και τις κατάλληλες "διορθώσεις" που θα προκύψουν λόγω αλληλεπιδράσεων. Η χρήση αναμιγμένων μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων αναμένεται να βοηθήσει και στην εμφάνιση όλων εκείνων των διακυμάνσεων που εντοπίζονται στα πειραματικά δεδομένα, όχι όμως και στις θεωρητικές προβλέψεις.

Κεφάλαιο 5

Η Παραμόρφωση των Σπάνιων Γεών

5.1 Η Παραμόρφωση στην proxy-SU(3)

Στην proxy-SU(3) κάθε πυρήνας χαρακτηρίζεται από μια αναπαράσταση της μορφής (λ, μ) . Από τις [30, 31] είναι ήδη γνωστή η σύνδεση των μεγεθών β και γ του Γεωμετρικού Προτύπου με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις αυτές.

Η αντιστοίχιση για το τετράγωνο της συλλογικής μεταβλητής β είναι [30, 31]:

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5} \frac{1}{(Ar^2)^2} (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu + 3), \quad (5.1)$$

όπου A ο μαζικός αριθμός του πυρήνα και r^2 το τετράγωνο της μέσης ακτίνας του πυρήνα, το οποίο είναι αδιάστατο. Για την ακρίβεια ορίζεται ως η ακτίνα του πυρήνα διαιρεμένη με το μήκος ταλαντωτή $1.010 \times A^{1/6}$ fm [26]. Τελικά, το r^2 προκύπτει να είναι [32]:

$$r^2 = 0.86 \times A^{1/3}.$$

Όπως φαίνεται, το τετράγωνο της συλλογικής μεταβλητής β είναι ανάλογο του τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της SU(3) (βλ. εξίσωση (2.4.3)).

Για τη συλλογική μεταβλητή γ η αντιστοίχιση δίνει:

$$\gamma = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}(\mu + 1)}{2\lambda + \mu + 3} \right). \quad (5.2)$$

Κατά τον υπολογισμό της παραμέτρου β , χρησιμοποιείται και ένας παράγοντας scaling ο οποίος προκύπτει από τη σύγκριση του διαθέσιμου χώρου που έχουν τα νουκλεόνια σθένους σε σχέση με το συνολικό μέγεθος του πυρήνα. Ο παράγοντας αυτός ισούται με $\left(\frac{A}{S}\right)$, με $S = S_\pi + S_\nu$ να είναι το μέγεθος των φλοιών σθένους.

5.2 Υπολογισμός της παραμόρφωσης από την $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για τις σπάνιες γαίες

Έχοντας γνώση της τιμής της $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ για ένα συγκεκριμένο ισότοπο, μπορεί κανείς αρκετά εύκολα να υπολογίσει την τιμή της τετραπολικής παραμόρφωσης β για το ισότοπο αυτό. Η σχέση η οποία συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη είναι [2]:

$$\beta = \frac{4\pi}{3ZR_0^2} \sqrt{\frac{B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{e^2}}, \quad (5.3)$$

όπου η $B(E2)$ θα είναι σε μονάδες $e^2 \text{fm}^4$ και για την πυρηνική ακτίνα R_0 είναι γνωστό πως ισχύει:

$$\begin{aligned} R_0^2 &= \left(1.2 \times A^{\frac{1}{3}}\right)^2 \text{fm}^2 \\ &= 1.44 \times A^{\frac{2}{3}} \text{fm}^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Επειδή η $B(E2)$ που έχει υπολογιστεί είναι εκείνη της αποδιέγερσης ($2_1^+ \rightarrow 0_1^+$) θα πρέπει για ευκολία στην σχέση (5.3) να εμφανιστεί αυτή και όχι εκείνη της διέγερσης ($0_1^+ \rightarrow 2_1^+$). Γενικά, ισχύει [2]:

$$B(E2) \uparrow = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} B(E2) \downarrow, \quad (5.5)$$

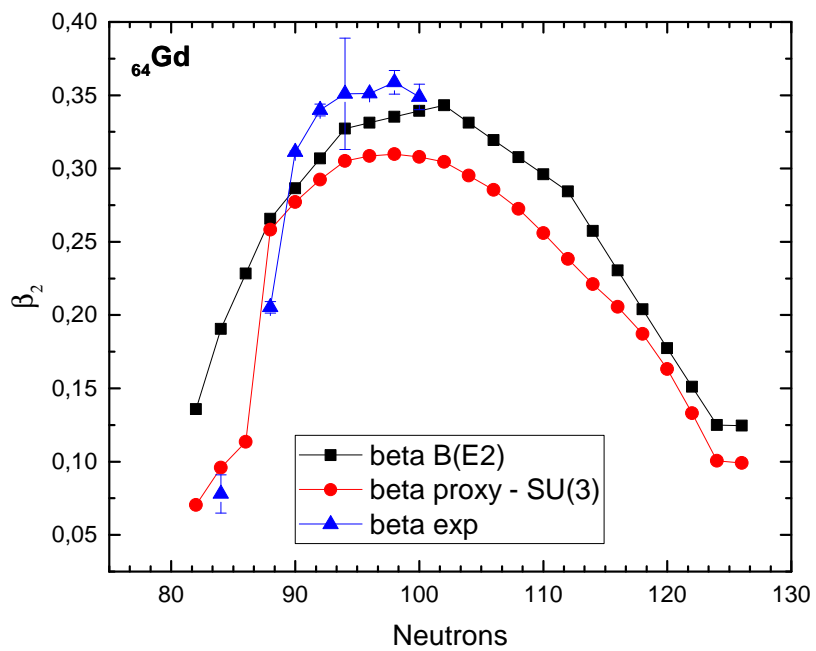
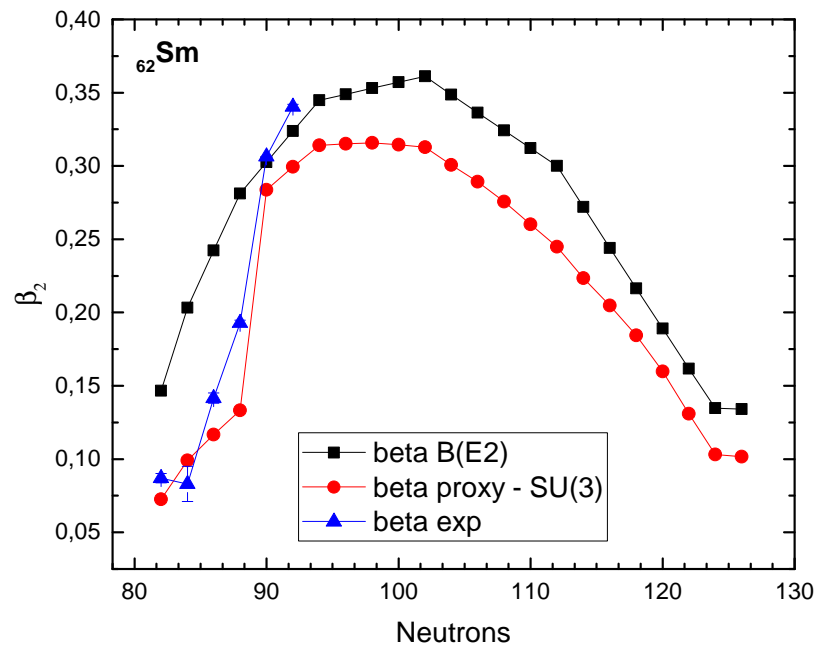
όπου για την εν λόγω περίπτωση $J_i = 0$ και $J_f = 2$.

Συνεπώς η σχέση (5.3) μπορεί να μετασχηματιστεί στην εξής:

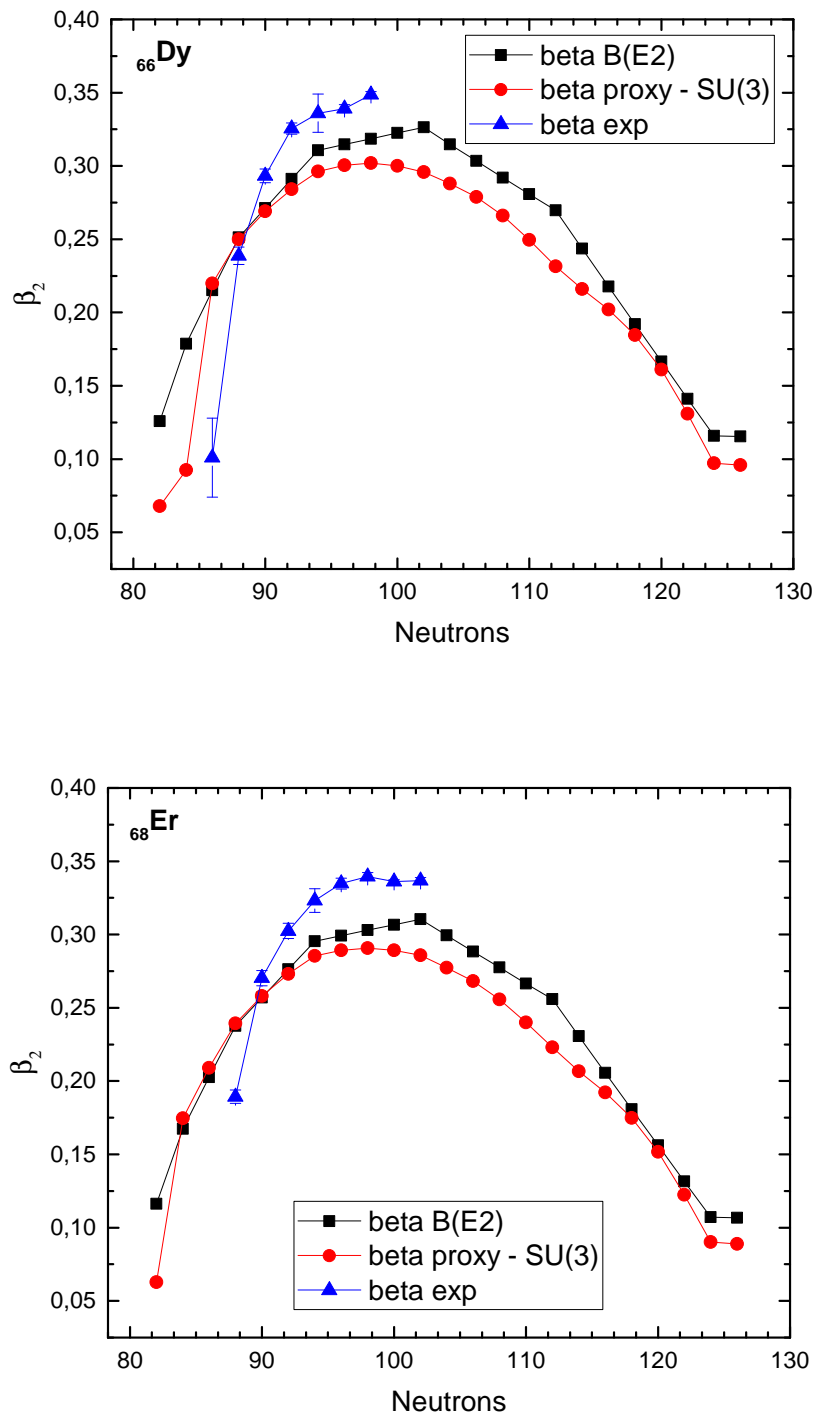
$$\beta = \frac{4\pi}{4.32ZA^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{5B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}{e^2}}. \quad (5.6)$$

5.3 Αποτελέσματα για την Παράμετρο β

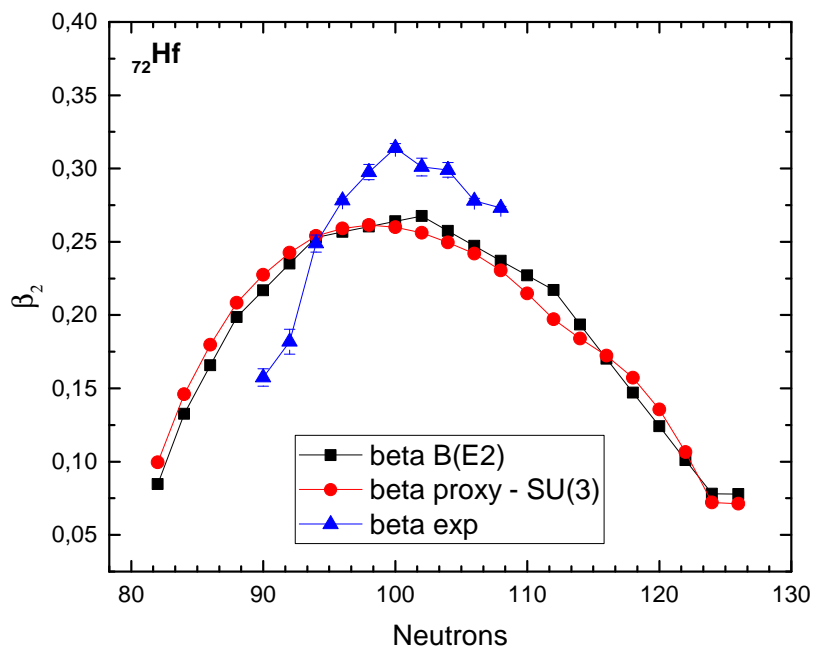
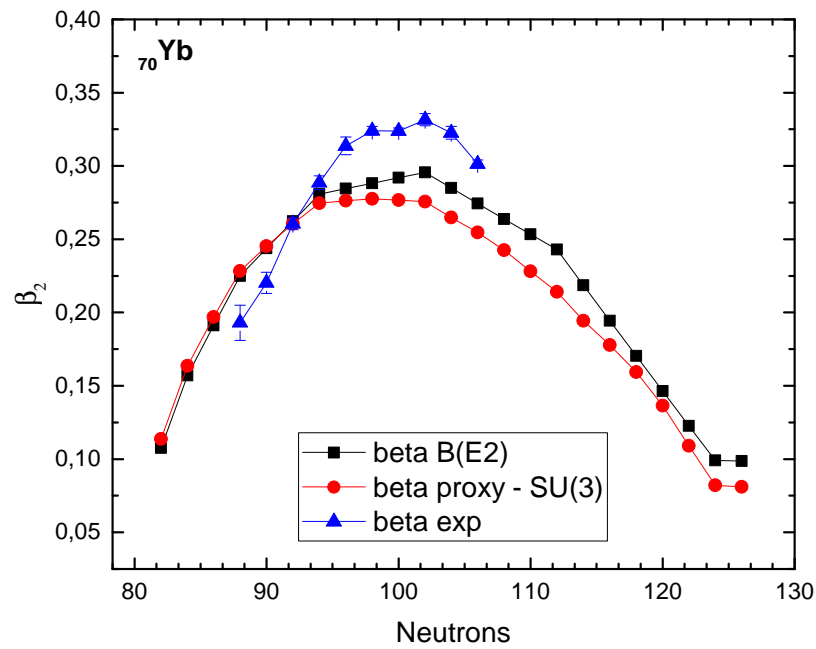
Στα σχήματα της ενότητας αυτής παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις για τις προβλεπόμενες τιμές της παραμέτρου β για τα διάφορα ισότοπα σπάνιων γαιών ($Z = 62 - 76$) με νετρόνια στο φλοιό 82 - 126.



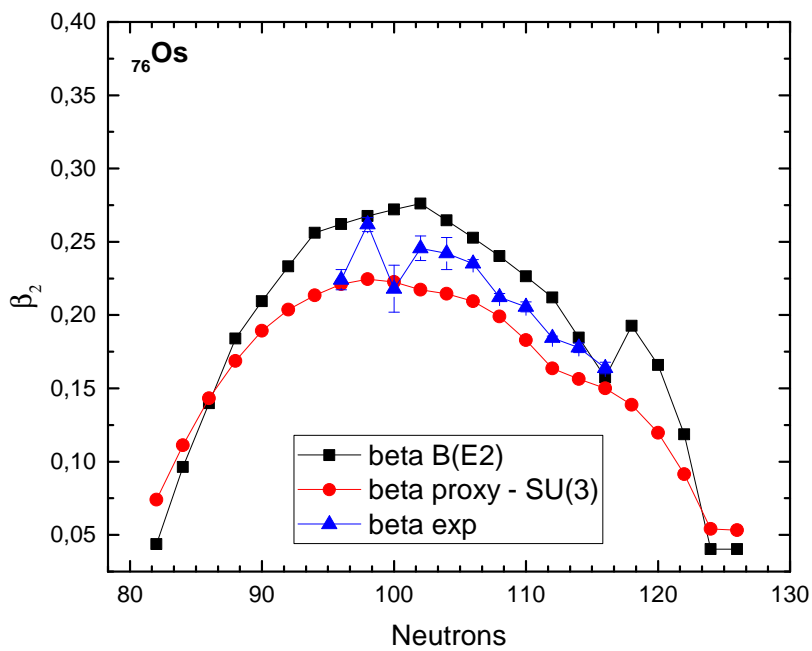
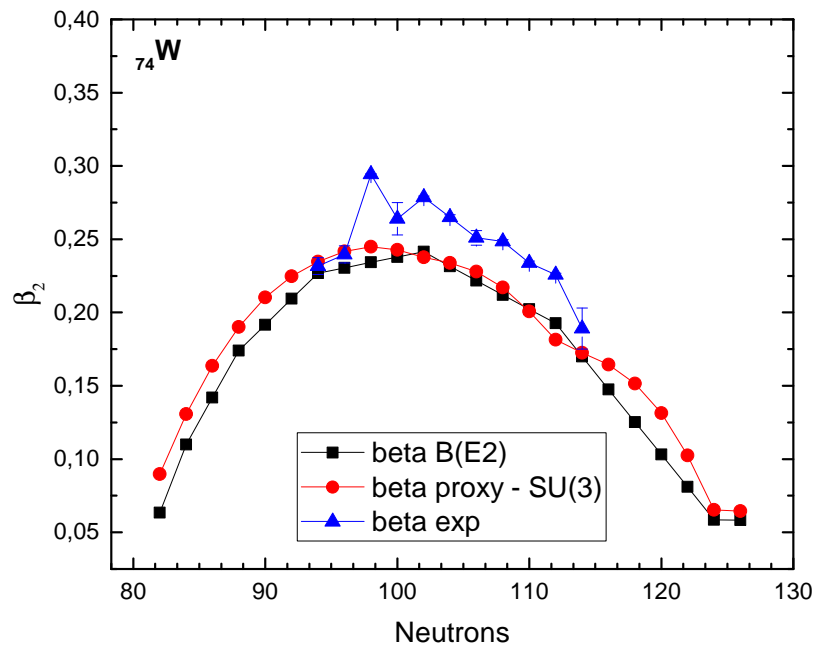
Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα Sm και Gd. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα Dy και Er. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα Yb και Hf. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].



Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση της παραμέτρου β όπως αυτή προκύπτει μέσω των $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ σε σύγκριση με την αντίστοιχη που προκύπτει από ευθύ υπολογισμό στα πλαίσια της proxy-SU(3) για τα ισότοπα W και Os. Τα πειραματικά δεδομένα αντλήθηκαν από την [2].

5.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων για την παράμετρο β

Συνοψίζοντας τα όσα παρουσιάζονται στα γραφήματα της ενότητας 5.3, προκύπτουν τα εξής ενδιαφέροντα συμπεράσματα:

- Αρχικά, η εικόνα που σχηματίζει κανείς βλέποντας τα γραφήματα της ενότητας 5.3 είναι πως οι θεωρητικές προβλέψεις για την παράμετρο β που προέκυψαν τόσο μέσω του ευθέως proxy-SU(3) υπολογισμού (βλ. σχέση (5.1)) όσο και μέσω των B(E2) (βλ. σχέση (5.6)) είναι σε πολύ καλή συμφωνία μεταξύ τους.
- Επιπλέον εμφανίζεται πολύ καλή συμφωνία των θεωρητικών προβλέψεων με τα πειραματικά δεδομένα. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν μια πολύ ενθαρρυντική πρώτη προσέγγιση, για δύο λόγους:
 1. Επιβεβαιώνεται η καλή προβλεπτική ισχύς της proxy-SU(3) για την παραμόρφωση των πυρήνων, χωρίς χρήση ελεύθερων παραμέτρων, εφόσον οι υπολογισμοί συγκρίνουν με δύο διαφορετικές μεθόδους.
 2. Οι υποθέσεις που έχουν γίνει εξαρχής ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός των B(E2), φαίνεται πως είναι βάσιμες, αφού είναι δυνατή η προσέγγιση και ενός άλλου φυσικού μεγέθους.
- Σχεδόν σε όλα τα γραφήματα της Ενότητας 5.3 παρατηρείται πως η παραμόρφωση που προκύπτει με χρήση των B(E2) είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη που υπολογίστηκε μέσω του ευθέως υπολογισμού από την proxy-SU(3). Η διαφορά τους είναι μικρή κοντά στο άνοιγμα και στο κλείσιμο του φλοιού των νετρονίων, ενώ γίνεται μέγιστη περί τα $N = 112$ νετρόνια. Η διαφορά αυτή προκύπτει λόγω των διαφορετικών τετραπολικών τελεστών που χρησιμοποιούνται σε κάθε υπολογισμό. Για τον υπολογισμό της παραμέτρου β μέσω της proxy-SU(3) γίνεται χρήση του τετραπολικού τελεστή μάζας (mass quadrupole operator) ενώ για τον υπολογισμό των B(E2) γίνεται χρήση του τετραπολικού τελεστή φορτίου (charge quadrupole operator). Η διαφοράς που προκύπτουν, είναι ενδεικτικές των δύο αυτών τελεστών [20, 30].
- Επίσης, σε όλα τα γραφήματα οι πειραματικές τιμές φαίνονται κατά κύριο λόγο να είναι μικρότερες της θεωρητικής πρόβλεψης για (περίπου) $N < 92$ ενώ για ισότοπα με περισσότερα νετρόνια η πειραματικές τιμές είναι μεγαλύτερες των προβλέψεων.
- Στην αρχή του φλοιού των νετρονίων και οι δύο προσεγγίσεις δίνουν μεγαλύτερη παραμόρφωση από την πειραματικά επιβεβαιωμένη. Αυτή η συμπεριφορά αναμένεται να διορθωθεί με την εισαγωγή των αλληλεπιδράσεων "ζευγαρώματος" και σχηματισμού ζευγών πρωτονίου - νετρονίου. Η πρώτη αναμένεται να είναι καταλυτική στην μείωση της παραμόρφωσης στο άνοιγμα του φλοιού των νετρονίων, ενώ δεν αναμένεται να επηρεάσει ιδιαίτερα στο μέσο και προς το κλείσιμο του φλοιού, καθότι αυξανόμενη της συλλογικότητας η εν λόγω αλληλεπίδραση εξασθενεί.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκαν οι ηλεκτρικές τετραπολικές μεταβάσεις με χρήση του προτύπου $prox\text{-}SU(3)$. Η μελέτη αυτή εκπονήθηκε χωρίς την χρήση ελεύθερων παραμέτρων και με μόνο απαιτούμενο τον αριθμό πρωτονίων και νετρονίων για κάθε πυρήνα. Κρίνεται ιδιαίτερα σκόπιμο να αναφερθεί πως σε αντίθεση με άλλα αλγεβρικά πυρηνικά πρότυπα, στους υπολογισμούς δεν χρησιμοποιήθηκαν ενεργά φορτία. Στο τελευταίο κεφάλαιο υπολογίστηκε η παράμετρος β , η οποία σχετίζεται με την παραμόρφωση του πυρήνα, μέσω των $B(E2)s$.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν κρίνονται ιδιαίτερα ενθαρρυντικά για τη συνέχεια. Σκοπός είναι να γίνουν αντίστοιχοι υπολογισμοί αλλά πιο γενικοί, με τελικό στόχο την συστηματοποίηση των $B(E2)s$ σε όλο τον ισοτοπικό χάρτη και όχι μόνο εντός της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης (ground state band).

Οι υπολογισμοί αυτοί απαιτούν αρχικά τη διάκριση πρωτονίων - νετρονίων, τη χρήση αναμιγμένων αναπαραστάσεων (mixed irreps) (λ, μ) σε αντίθεση με τις "καθαρές" αναπαραστάσεις (pure irreps) που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία αλλά και την ενσωμάτωση της αλληλεπίδρασης ζευγαρώματος πρωτονίου - νετρονίου (pairing interaction).

6.1 Μελλοντικά Σχέδια

Στη συνέχεια, παρατίθεται μια λίστα από θέματα τα οποία απασχολούν ή θα απασχολήσουν την ερευνητική ομάδα της $prox\text{-}SU(3)$ στο εγγύς μέλλον, χωρίς η σειρά να είναι ενδεικτική της προτεραιότητας:

- Υπολογισμός αναμιγμένων μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων (λ, μ) της $prox\text{-}SU(3)$.
- Υπολογισμός των $B(E2)s$ και της παραμόρφωσης πυρήνων με περιττό αριθμό νουκλεονίων.
- Εισαγωγή της αλληλεπίδρασης "ζευγαρώματος" (pairing interaction) των νουκλεονίων στο μοντέλο.
- Υπολογισμός φασμάτων πυρήνων στα πλαίσια της $prox\text{-}SU(3)$, σε συνδυασμό με τις $B(E2)$.

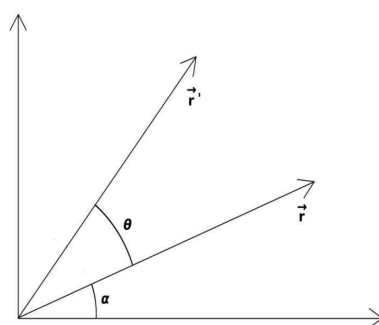
- Υπολογισμός συμβόλων $\vartheta - (\lambda, \mu)$ για μεγάλες τιμές των κβαντικών αριθμών λ και μ . Ο υπολογισμός αυτός θα ανοίξει το δρόμο για τον υπολογισμό των $B(E2)$ χωρίς να χρειάζεται τα πρωτόνια και τα νετρόνια να θεωρείται πως σχηματίζουν ζεύγη με ισοσπίν $T = 1$ (ζεύγη πρωτονίου-νετρονίου).
- Υπολογισμός μαγνητικών διπολικών μεταβάσεων $B(M1)$.
- Υπολογισμός χρόνων ημιζωής.
- Υπολογισμοί μαγνητικών ροπών.

Παράρτημα Ι

Παραδείγματα Ομάδων ΛΙΕ

I.1 $SO(2)$: Ειδική Ορθογώνια Ομάδα σε 2Δ

Έστω το πρόβλημα της περιστροφής διανύσματος \mathbf{r} σε 2 διαστάσεις. Σε πολικές συντεταγμένες το διάνυσμα αυτό περιγράφεται από το ζεύγος (r, α) . Η περιστροφή του θα οδηγήσει σε ένα άνυσμα \mathbf{r}' με συντεταγμένες $(r, \alpha + \theta)$ (Σχήμα I.1). Πριν την περιστροφή, ισχύει ότι $x = r \cos \alpha$,



Σχήμα I.1: Η περιστροφή ενός διανύσματος σε 2Δ - $SO(2)$ ομάδα συμμετρίας.

$y = r \sin \alpha$, ενώ μετά την περιστροφή:

$$\begin{aligned}x' &= r \cos(\alpha + \theta) \\ &= r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= r \sin(\alpha + \theta) \\
&= r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta \\
&= x \sin \theta + y \cos \theta.
\end{aligned}$$

Με χρήση πινάκων, οι δύο τελευταίες σχέσεις συνοψίζονται στην μορφή:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1})$$

Θέτοντας

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{I.2})$$

προκύπτει ότι:

$$X' = R(\theta)X. \quad (\text{I.3})$$

Παρατηρείται δε, πως:

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2 + \theta_1). \quad (\text{I.4})$$

Συνεπώς οι δύο μετασχηματισμοί μετατίθενται.

Ο αντίστροφος πίνακας του $R(\theta)$, συμβολικά $R^{-1}(\theta)$, δίνεται από την σχέση:

$$R^{-1}(\theta) = \frac{\text{Adj } R(\theta)}{\det |R(\theta)|} = R(-\theta). \quad (\text{I.5})$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Είναι προφανές ότι $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$, άρα ο μετασχηματισμός $R(\theta)$ είναι **ορθογώνιος**.
- Για $\theta = 0$ παίρνουμε το ταυτοτικό στοιχείο.
- Ο μετασχηματισμός $R(\theta)$ σχηματίζει μια συνεχή ομάδα η οποία καθορίζεται μόνο από την παράμετρο θ . Έτσι, ο $R(\theta)$ ορίζει τις ομάδες των περιστροφών στις δύο διαστάσεις, συμβολικά $O(2)$.
- Η ομάδα αυτή είναι **αβελιανή** αφού $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta)$.
- Επειδή $R^T(\theta)R(\theta) = R(\theta)R^T(\theta) = 1$ και $\det R(\theta) = 1$, η ομάδα θα είναι και ειδική, δηλαδή $SO(2)$.

- Τέλος, στο όριο που η παράμετρος θ γίνει πολύ μικρή, προκύπτει ότι

$$R(\theta) \xrightarrow{\theta \ll 1} \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\theta \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx 1 + i\theta X, \quad (\text{I.6})$$

όπου:

$$X = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.7})$$

είναι ο γεννήτορας της $SO(2)$ ομάδας.

I.2 $SO(3)$: Ειδική Ορθογώνια Ομάδα σε 3Δ

Το σύνολο των περιστροφών σε 2Δ σχηματίζει την αβελιανή ομάδα $SO(2)$. Ωστόσο, θα δειχθεί στην συνέχεια πως οι περιστροφές σε τρεις διαστάσεις δεν σχηματίζουν εκ νέου αβελιανή ομάδα ¹.

Μια αυθαίρετη περιστροφή ενός ανύσματος στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να περιγραφεί από το γινόμενο έως και τριών πινάκων διάστασης 3×3 . Κάθε ένας από αυτούς περιγράφει την περιστροφή γύρω από τον άξονα 1, 2 ή 3 αντίστοιχα:

$$R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.8})$$

$$R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.9})$$

$$R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.10})$$

Οι πίνακες αυτοί είναι 3×3 μη ομοιόμορφοι (με ορίζουσα $\det R = 1$) και ορθογώνιοι ($R^T = R^{-1}$). Άρα σχηματίζουν μια ειδική ορθογώνια ομάδα στις τρεις διαστάσεις, η οποία συμβολικά γράφεται $SO(3)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα πως οι στροφές είναι απειροστά μικρές,

$$R_j(\theta_j) = \mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 \theta_j X_j. \quad (\text{I.11})$$

¹ Πάρτε το απλό παράδειγμα της περιστροφής ενός απλού αντικειμένου (λ.χ. αυτής της πτυχιακής). Περιστρέψετε το βιβλίο κατά $\frac{\pi}{2}$ ως προς τους άξονες x, y, z κατά σειρά. Αλλάζοντας την σειρά των αξόνων και περιστρέφοντας πάλι κατά την ίδια γωνία δεν θα επιστρέψει το βιβλίο στον αρχικό προσανατολισμό του.

Έτσι ορίζονται οι τρεις γεννήτορες των στροφών,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.12})$$

οι οποίοι είναι πίνακες άιχνοι και αντισυμμετρικοί ($X_j^T = -X_j$). Επίσης ικανοποιούν την εξής άλγεβρα:

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k. \quad (\text{I.13})$$

Στο σημείο αυτό γενικεύοντας για πεπερασμένες στροφές προκύπτει ότι:

$$R(\theta) = e^{\theta \cdot X} = e^{\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3}, \quad (\text{I.14})$$

με τα στοιχεία $R(\theta)$ να ανήκουν στην $SO(3)$. Τα στοιχεία αυτά διατηρούν αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Όπως είναι γνωστό, στην περίπτωση της Κβαντικής Μηχανικής απαιτείται οι τελεστές να είναι ερμιτιανοί, κάτι το οποίο δεν είναι απαραίτητο στην κλασική εικόνα στροφών που υιοθετήθηκε παραπάνω. Έτσι, οι γεννήτορες ορίζονται να είναι οι:

$$J_j = iX_j \quad \text{με} \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{I.15})$$

Συνεπώς, οι γεννήτορες παίρνουν την τελική τους μορφή:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.16})$$

όπου τώρα οι πίνακες είναι άιχνοι και ερμιτιανοί ($J_j^\dagger = J_j$). Οι γεννήτορες αυτοί ικανοποιούν την σχέση μετάθεσης:

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm} J_m, \quad (\text{I.17})$$

η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά η άλγεβρα της στροφορμής στην Κβαντική Μηχανική. Συνεπώς, η $SO(3)$ άλγεβρα είναι ισομορφική με την άλγεβρα της στροφορμής. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απρόσμενο. Κάθε άλλο. Το γεγονός ότι ο χώρος είναι ισοτροπικός οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το οποιοδήποτε φυσικό σύστημα θα πρέπει να παραμένει αμετάβλητο κάτω από στροφές. Το αναλλοίωτο ενός συστήματος ως προς τις στροφές δεν είναι τίποτε άλλο από την Διατήρηση της Στροφορμής. Αυτός ο ισομορφισμός λοιπόν, είναι ένα ανάλογο της παραπάνω συμμετρίας, αλλά αυτή τη φορά στην Κβαντική Μηχανική.

I.3 SU(2): Ειδική Μοναδιακή Ομάδα σε 2Δ

Όπως έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2 οι ομάδες $SU(n)$ περιγράφουν στροφές σε n - διάστατο μιγαδικό χώρο. Ο γενικότερος πίνακας για μία τέτοια στροφή θα έχει τη μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (\text{I.18})$$

και καθορίζεται από 8 παραμέτρους, αφού τα α , β , γ και δ είναι μιγαδικά.

Η απαίτηση να είναι η ομάδα ειδική, προστάζει πως:

$$\det A = 1 \Leftrightarrow \alpha\delta - \gamma\beta = 1, \quad (\text{I.19})$$

ενώ η απαίτηση να είναι μοναδιακή προστάζει:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = A^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}. \quad (\text{I.20})$$

Έτσι ο A παίρνει την μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (\text{I.21})$$

Εάν $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ και $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ οι (αρχικά) 8 παράμετροι έχουν μειωθεί στους τέσσερις. Μάλιστα, η συνθήκη $\det A = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ τις μειώνει σε τρεις. Στη συνέχεια θα αποδειχθεί πως ο πίνακας A είναι μοναδιακός. Αρχικά,

$$A^\dagger = \tilde{A}^* = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix},$$

ενώ ταυτόχρονα,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix}.$$

Έτσι λοιπόν, προκύπτει ότι $A^\dagger = A^{-1}$, συνθήκη που οδηγεί στο ότι ο A είναι μοναδιακός.

Είναι δυνατό στο σημείο αυτό κανείς να ορίσει γεννήτορες για την $SU(2)$. Το πλήθος των γεννητόρων της ομάδας αυτής θα ισούται με το πλήθος των ελεύθερων παραμέτρων, δηλαδή τρεις.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial A}{\partial \operatorname{Re} \beta} \right|_{(\alpha, \beta)=(1,0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \\ \left. \frac{\partial A}{\partial \operatorname{Im} \beta} \right|_{(\alpha, \beta)=(1,0)} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1, \\ \left. \frac{\partial A}{\partial \operatorname{Im} \alpha} \right|_{(\alpha, \beta)=(1,0)} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i\sigma_3, \end{aligned}$$

όπου σ_i οι πίνακες Pauli. Είναι εύκολο κανείς να διαπιστώσει πως οι γεννήτορες αυτοί ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης που συνοψίζονται στην

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}, \quad (\text{I.22})$$

η οποία είναι ίδια με την εξίσωση (I.2), η οποία έδινε την σχέση μετάθεσης για τους γεννήτορες της $SO(3)$, αυτή τη φορά για $J = \frac{\sigma}{2}$. Αυτός ο συσχετισμός των σχέσεων μετάθεσης υποδεικνύει

ότι οι άλγεβρες Lie των $SO(3)$ και $SU(2)$ είναι ισομορφικές. Ωστόσο, οι αντίστοιχες ομάδες δεν είναι ισομορφικές αλλά **ομοιομορφικές**. Το γιατί θα επιχειρηθεί να δοθεί μέσω ενός απλού παραδείγματος. Στην περίπτωση της $SO(3)$, τα στοιχεία έχουν τη μορφή

$$R = e^{i\theta_i J_i},$$

ενώ στην $SU(2)$ (σύμφωνα με τα παραπάνω) τα στοιχεία θα είναι:

$$U = e^{\frac{i\phi_j \sigma_j}{2}}.$$

- Στην περίπτωση όπου $\theta_i = 2\pi$ το στοιχείο της $SO(3)$ είναι το ίδιο με το στοιχείο της $SU(2)$ για $\frac{\phi_j}{2} = \pi$ προκύπτοντας μια σταθερά φάση -1 για το στοιχείο της $SU(2)$.
- Στην περίπτωση όπου $\theta_i = 4\pi$ το στοιχείο της $SO(3)$ είναι το ίδιο με το στοιχείο της $SU(2)$ για $\frac{\phi_j}{2} = \pi$ προκύπτοντας μια σταθερά φάση $+1$ για το στοιχείο της $SU(2)$.

Συμπέρασμα: Υπάρχει μια "2-1" (και όχι "1-1") αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των $SU(2)$ και $SO(3)$ ομάδων Lie. Άρα δεν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ τους αλλά **ομοιομορφισμός**.

Βιβλιογραφία

- [1] S.G. Nilsson. Binding states of individual nucleons in strongly deformed nuclei. *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.*, 29N16, 1955.
- [2] B. Pritychenko, M. Birch, B. Singh, and M. Horoi. Tables of $e2$ transition probabilities from the first 2^+ states in even - even nuclei. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 107:1--139, 2016.
- [3] J. P. Draayer, L. Leschber, S. C. Park, and R. Lopez. Representations of $U(3)$ in $U(N)$. *Computer Physics Communications*, 56(2):279, 1989.
- [4] M.G. Mayer. Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. i. empirical evidence. *Physical Review*, 78(1):16, 1950.
- [5] M.G. Mayer. Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. II. theoretical considerations. *Physical Review*, 78(1):22, 1950.
- [6] J. P. Elliott. Collective Motion in the Nuclear Shell Model. I. Classification Schemes for States of Mixed Configurations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 245:128, 1957.
- [7] J. P. Elliott. Collective Motion in the Nuclear Shell Model. II. The Introduction of Intrinsic Wave-Functions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 245:562, 1958.
- [8] J. P. Elliott and M. Harvey. Collective Motion in the Nuclear Shell Model. III. The Calculation of Spectra. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272:557, 1963.
- [9] J. P. Elliott and C. E. Wilsdon. Collective motion in the nuclear shell model IV. Odd-mass nuclei in the sd shell. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 302:509, 1968.
- [10] F. Iachello and A. Arima. *The Interacting Boson Model*. Cambridge University Press, 2006.
- [11] A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello, and I. Talmi. Collective nuclear states as symmetric couplings of proton and neutron excitations. *Physics Letters B*, 66:21, 1977.

- [12] J. P. Elliot and A. P. White. An isospin invariant form of the interacting boson model. *Physics Letters B*, 97:169, 1980.
- [13] J. P. Elliott and J. A. Evans. An intrinsic spin for interacting bosons. *Physics Letters B*, 101:216, 1981.
- [14] Y. Akiyama. sdg boson model in the SU(3) scheme. *Nuclear Physics A*, 433(3):369, 1985.
- [15] F. Iachello and P. van Isacker. *The Interacting Boson-Fermion Model*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1991.
- [16] K.T. Hecht and A. Adler. Generalized seniority for favored $j\pi nq_0$ pairs in mixed configurations. *Nuclear Physics A*, 137:129, 1969.
- [17] A. Arima, M. Harvey, and K. Shimizu. Pseudo LS coupling and pseudo SU_3 coupling schemes. *Physics Letters B*, 30(8):517, 1969.
- [18] R. D. Ratna Raju, J. P. Draayer, and K. T. Hecht. Search for a coupling scheme in heavy deformed nuclei: The pseudo SU(3) model. *Nucl. Phys. A*, 202:433, 1973.
- [19] K. Hagiwara et al. Review of Particle Physics. *Physical Review D*, 66:010001, 2002.
- [20] V. K. B. Kota. *SU(3) Symmetry in Atomic Nuclei*. Springer, 2020.
- [21] C. Bahri, D. J. Rowe, and J. P. Draayer. Programs for generating Clebsch–Gordan coefficients of SU(3) in SU(2) and SO(3) bases. *Computer Physics Communications*, 159:121, 2004.
- [22] D. Bonatsos, S. Karampagia, R. B. Cakirli, R. F. Casten, K. Blaum, and L. Amon Susam. Emergent collectivity in nuclei and enhanced proton-neutron interactions. *Physical Review C*, 88(5):054309, 2013.
- [23] D. Bonatsos, I. E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R. B. Cakirli, R. F. Casten, and K. Blaum. Proxy-SU(3) symmetry in heavy deformed nuclei. *Phys. Rev. C*, 95:064325, 2017.
- [24] D. Bonatsos. *Interacting Boson Models of Nuclear Structure*. Oxford Science Publications. Clarendon Press, 1988.
- [25] O. Castaños, J. P. Draayer, and Y. Leschber. Towards a shell-model description of the low-energy structure of deformed nuclei II. Electromagnetic properties of collective M1 bands. *Annals of Physics*, 180(2):290, 1987.
- [26] P. Ring and P. Schuck. *The Nuclear Many-Body Problem*. Physics and astronomy online library. Springer, 2004.
- [27] A.R. Edmonds. *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics - Investigations in Physics. Princeton University Press, 1957.
- [28] Brookhaven National Laboratory. Evaluated Nuclear Structure Data File (ENSDF), <https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>.

- [29] I. Hossain, H. Y. Abdullah, I. M. Ahmad, and M. A. Saeed. B(E2) value of even-even $^{108-112}$ Pd isotopes by interacting boson model-1*. *Chinese Physics C*, 38(2):024103, 2014.
- [30] O. Castaños, J. P. Draayer, and Y. Leschber. Shape variables and the shell model. *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, 329:33, 1988.
- [31] J. P. Draayer, S. C. Park, and O. Castaños. Shell-Model Interpretation of the Collective-Model Potential-Energy Surface. *Phys. Rev. Lett.*, 62:20, 1989.
- [32] J. R. Stone, N. J. Stone, and S. A. Moszkowski. Incompressibility in finite nuclei and nuclear matter. *Phys. Rev. C*, 89:044316, 2014.
- [33] A. Bohr and B.R. Mottelson. *Nuclear Structure*. Nuclear Structure. World Scientific, 1998.
- [34] R.F. Casten. *Algebraic approaches to nuclear structure: Interacting boson and fermion models*. Harwood Academic Publishers, 1993.
- [35] R. F. Casten. *Nuclear Structure from a Simple Perspective*. Oxford University Press, 2000.
- [36] W. Greiner, J.A. Maruhn, and D.A. Bromley. *Nuclear Models*. Springer London, 1997.
- [37] W. Greiner, D.A. Bromley, and B. Müller. *Quantum Mechanics: Symmetries*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [38] K. S. Krane. *Introductory Nuclear Physics*. Wiley, 1987.
- [39] H.J. Lipkin. *Lie Groups for Pedestrians*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 2002.
- [40] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson. *Shapes and Shells in Nuclear Structure*. Cambridge University Press, 1995.
- [41] H. Wu. Bosons with large angular momentum and rotation of even-even nuclei. *Physics Letters B*, 110(1):1, 1982.
- [42] J. Chen, J. Ping, and F. Wang. *Group Representation Theory for Physicists*. World Scientific, 2002.
- [43] F. Iachello. *Lie Algebras and Applications*. Springer, 2014.
- [44] A. Shalit and I. Talmi. *Nuclear shell theory*. Dover, Mineola, N.Y, 2004.
- [45] K. Heyde. *The nuclear shell model*. Springer, Berlin New York, 1994.
- [46] J. P. Elliott. *Symmetry in physics*, volume 1. Oxford University Press, New York, 1979.
- [47] J. P. Elliott. *Symmetry in physics*, volume 2. Oxford University Press, London, 1984.
- [48] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Pearson, Boston, 2011.
- [49] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.

-
- [50] U. Fano and G. Racah. *Irreducible tensorial sets*. Pure and applied physics. Academic Press, 1959.
- [51] N.A. Jelley. *Fundamentals of Nuclear Physics*. Cambridge University Press, 2007.
- [52] M. Harvey. The nuclear SU(3) model. In *Advances in Nuclear Physics*, pages 67--182. Springer US, 1968.
- [53] S.S.M. Wong. *Introductory Nuclear Physics*. Wiley, 1998.