



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»**

# **Μείωση της Κοσμολογικής Διαφοροποίησης στο H0 μέσω Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**της Μαρίας Πετρονικολού**

**Επιβλέπων: Εμμανουήλ Σαριδάκης**

**Αθήνα, Ιούνιος, 2020**



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**Μείωση της Κοσμολογικής Διαφοροποίησης στο  $H_0$  μέσω  
Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

της

**Πετρονικολού Μαρίας**

**Επιβλέπων:** Εμμανουήλ Σαριδάκης  
Κύριος Ερευνητής ΕΑΑ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την .

.....  
Εμμανουήλ Σαριδάκης  
Κύριος Ερευνητής ΕΑΑ

.....  
Γεώργιος Κουτσούμπας  
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

.....  
Αλέξανδρος Κεχαγιάς  
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2020.



# Περίληψη

Το θέμα που πραγματεύεται αυτή η εργασία είναι η μείωση της κοσμολογικής διαφοροποίησης στην τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$ , μέσω τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας και συγκεκριμένα μέσω της θεωρίας Horndeski.

Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής εργασίας μελετάται η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και συγκεκριμένα πραγματοποιείται η εξαγωγή των Εξισώσεων Πεδίου του Einstein, αφού πρώτα ορισθούν τα απαραίτητα μεγέθη.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζουμε την χρησιμότητα των Εξισώσεων Πεδίου στην Κοσμολογία και μέσω της μετρικής Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) εξάγουμε τις δύο εξισώσεις Friedmann που περιγράφουν το σύμπαν μας. Γίνεται ακόμη μια μικρή μελέτη των παραμέτρων που διέπουν το σύμπαν μας.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται οι τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας και πιο συγκεκριμένα οι  $f(R)$  και οι θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή (Scalar-Tensor) με έμφαση στην θεωρία Horndeski, αλλά και σε μια άλλη περίπτωση θεωρίας βαθμωτού-τανυστή, την Μη Ελάσσιον Σύζευξη Παραγώγων (Non-minimal derivative Coupling). Τελικά εξετάζεται η ισοδυναμία μεταξύ των  $f(R)$  και θεωριών Βαθμωτού-Τανυστή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα της κοσμολογικής διαφοροποίησης στο  $H_0$ , που αποτελεί το θέμα αυτής της εργασίας. Αναφέρονται αναλυτικά τα δεδομένα του προβλήματος και αρκετές θεωρητικές και πειραματικές εκτιμήσεις. Στην συνέχεια παρατίθενται πιθανές λύσεις του προβλήματος που προτείνονται από την σύγχρονη έρευνα, όπως είναι οι θεωρίες τροποποιημένης βαρύτητας .

Στο πέμπτο κεφάλαιο μέσω της θεωρίας Horndeski και συγκεκριμένα τροποποιώντας κάποιες από τις παραμέτρους της, επιχειρούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα της σταθεράς του Hubble, δηλαδή να μειώσουμε την διαφορά που προκύπτει μεταξύ της εκτίμησης που δίνει το CMB, υπό την θεώρηση του  $\Lambda$ CDM, και των άμεσων τοπικών μετρήσεων κλίμακας αποστάσης. Τέλος αναφέρουμε τα αποτελέσματα που πήραμε με την βοήθεια του προγράμματος Wolfram Mathematica.



# Abstract

This thesis discusses about the alleviation of  $H_0$  cosmological tension through modified gravity, specifically through Horndeski's theory .

In chapter one, we study the theory of General Relativity and derive Einstein's Field Equations, by firstly defining the necessary quantities.

In chapter two, we examine the usage of Einstein's Field Equations on Cosmology and through the FRW metric, we derive Friedmann's Equations which describe our universe. Also a study of cosmological parameters takes place.

In chapter three, we study Theories of Modified Gravity, specifically  $f(R)$  and Scalar-Tensor theories, emphasizing on Horndeski and Non-minimal derivative Coupling theories. Finally we study the equivalence between Scalar-Tensor theories and  $f(R)$ -gravity.

In chapter four, we examine the Hubble's constant  $H_0$  tension, between the CMB estimation of  $H_0$ , under the assumption of the  $\Lambda$ CDM model and the direct local distance ladder measurements. Data and estimations of the constant are reported and possible solutions for the tension are discussed, all given by recent research.

In chapter five, by modifying some parameters of the Horndeski's theory, we try to alleviate the  $H_0$  tension, i.e to reduce the difference between the CMB estimation and the direct local distance ladder measurements. Finally, we get the wanted results by using the Mathematica computing programm.





## *Ευχαριστίες*

Με την περάτωση αυτής της διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Κύριο Ερευνητή του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών κ.Σαριδάκη Εμμανουήλ, για την καθοδήγησή του και την πολύτιμη βοήθειά του κατά την διάρκεια της εκπόνησής της. Ευχαριστώ επίσης την οικογένειά μου, για την αμέριστη συμπαράστασή τους και την διαρκή στήριξή τους.



# Περιεχόμενα

Εισαγωγή	8
<b>1 Γενική Σχετικότητα</b>	<b>12</b>
1.1 Τανυστής Riemann . . . . .	12
1.2 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής . . . . .	13
1.3 Εξισώσεις Πεδίου του Einstein . . . . .	14
<b>2 Κοσμολογία στην Γενική Σχετικότητα</b>	<b>17</b>
2.1 Μετρική Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker ( <i>FLRW</i> ) . . . . .	17
2.2 Οι Εξισώσεις Friedmann . . . . .	18
<b>3 Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας</b>	<b>24</b>
3.1 Θεωρίες $f(R)$ . . . . .	24
3.2 Σύμμορφος Μετασχηματισμός των $f(R)$ θεωριών . . . . .	28
3.3 Palatini $f(R)$ . . . . .	30
3.4 Θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή . . . . .	30
3.4.1 Θεωρία Horndeski . . . . .	30
3.4.2 Θεωρία Μη Ελάσσονος Σύζευξης Παραγώγων . . . . .	32
3.5 Οι $f(R)$ θεωρίες ως υποπερίπτωση των θεωριών Βαθμωτού-Τανυστή . . . . .	33
<b>4 Το Πρόβλημα της Κοσμολογικής Διαφοροποίησης στη σταθερά <math>H_0</math> του Hubble</b>	<b>35</b>
4.1 Τα Δεδομένα του Προβλήματος . . . . .	35
4.2 Πιθανοί Τρόποι Επίλυσης του Προβλήματος . . . . .	36
<b>5 Αντιμετώπιση του Προβλήματος της σταθεράς <math>H_0</math></b>	<b>41</b>
Βιβλιογραφία	49



*“The most beautiful experience we can have is the mysterious. It is the fundamental emotion that stands at the cradle of true art and true science.”*

—Albert Einstein



# Εισαγωγή

Μετά απο εντατική θεωρητική και παρατηρησιακή έρευνα, τα τελευταία είκοσι χρόνια φαίνεται να έχει καθιερωθεί ένα Πρότυπο Μοντέλο Κοσμολογίας, που ονομάζεται  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$ -Cold Dark Matter). Σε ένα τέτοιο αρμονικό μοντέλο, η υποκείμενη θεωρία βαρύτητας είναι η Γενική Σχετικότητα μαζί με μια κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$ .

Η θεωρία αυτή όπως διατυπώθηκε το 1916 από τον Άλμπερτ Άινσταϊν είναι μέχρι σήμερα η ικανοποιητικότερη περιγραφή της βαρύτητας, κυρίως σε μεγάλης κλίμακας φαινόμενα όπου οι Νευτώνειες εξισώσεις δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σύμφωνα με αυτή την θεωρία η βαρύτητα δεν θεωρείται ως το αποτέλεσμα μιας δύναμης, αλλά οφείλεται στην καμπύλωση του χωροχρόνου, η οποία προκαλείται από την περιεχόμενη στον χωρόχρονο μάζα και ενέργεια. Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας, η μάζα αποδεικνύεται ότι είναι μέρος μιας γενικότερης ποσότητας που ονομάζεται ταυυστής ενέργειας-ορμής που θεωρείται ως πηγή του βαρυτικού πεδίου στις εξισώσεις πεδίου, ενώ αντλώντας επιπλέον την αναλογία με την γεωμετρικά νευτώνεια βαρύτητα, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι η εξίσωση πεδίου για τη βαρύτητα σχετίζεται με τον ταυυστή Ricci, που προκύπτει από τον ταυυστή Riemann, ο οποίος περιγράφει μια συγκεκριμένη κατηγορία παλιρροιακών φαινομένων.

Έτσι, ο Einstein με την εισαγωγή των κατάλληλων γεωμετρικών στοιχείων και ταυυστών που περιγράφουν το περιεχόμενο αλλά και την γεωμετρία του σύμπαντος όπως ο ταυυστής Einstein, κατασκεύασε τις διάσημες Εξισώσεις Πεδίου.

Οι Εξισώσεις Πεδίου είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και, ως εκ τούτου, είναι δύσκολο να επιλυθούν ακριβώς. Οι πιο γνωστές ακριβείς λύσεις, καθώς επίσης και οι πιο ενδιαφέρουσες από την άποψη της φυσικής, είναι η Schwarzschild λύση, η Reissner-Nordström λύση και η Kerr μετρική, κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε μία ορισμένου τύπου μαύρη τρύπα σε ένα κατά τα άλλα άδειο σύμπαν, και τα σύμπαντα Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker και de Sitter, κάθε ένα από αυτά περιγράφει έναν επεκταμένο κόσμο. Ακριβείς λύσεις μεγάλου θεωρητικού ενδιαφέροντος περιλαμβάνουν το Gödel σύμπαν (που ανοίγει την ενδιαφέρουσα δυνατότητα ταξιδιού στο χρόνο σε γεωδαισιακές), η Taub-NUT λύση (ένα μοντέλο σύμπαντος που είναι ομοιογενές, αλλά ανισότροπο) και τον αντι-de Sitter χώρο.

Οι Εξισώσεις Πεδίου βρίσκουν εφαρμογή στην κοσμολογία καθώς μέσω αυτών και της κατάλληλης μετρικής, συγκεκριμένα της Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker μετρικής, μας δίνεται η δυνατότητα να μοντελοποιήσουμε το σύμπαν, ύπο την θεώρηση ότι είναι γεμάτο από ένα τέλειο ρευστό, και να μελετήσουμε την εξέλιξή του με την βοήθεια των εξισώσεων Friedmann.

Επιστρέφοντας, στο αρμονικό μοντέλο που αρχικά αναφέραμε, το περιεχόμενο του σύμπαντος συμπεριλαμβάνει τα συνήθη σωματίδια του πρότυπου μοντέλου της σωματιδιακής φυσικής (βαρυόνια, νετρίνα, φωτόνια κλπ.), καθώς και τον παράγοντα της Ψυχής Σκοτεινής Ύλης. Επιπλέον, υπάρχει η γενική επικρατούσα άποψη πως στο παραπάνω μοντέλο θα πρέπει να συμπεριληφθεί μια αρχική “πληθωριστική” φάση με τα απαραίτητα χαρακτηριστικά.

Ωστόσο, όσον αφορά το αρμονικό μοντέλο της κοσμολογίας, υπάρχουν κάποια ανοιχτά θεωρητικά και παρατηρησιακά προβλήματα.

Τα θεωρητικά προβλήματα περιλαμβάνουν:

1. Το πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda$ , πιο συγκεκριμένα τι είναι η κοσμολογική σταθερά και κυρίως γιατί η παρατηρήσιμη τιμή της είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερη από το αποτέλεσμα που προκύπτει από οποιονδήποτε θεωρητικό υπολογισμό.
2. Ποιά είναι η φύση της σκοτεινής ενέργειας και της σκοτεινής ύλης.
3. Ποιος είναι ο ακριβής μηχανισμός που οδηγεί στην επιτυχή πραγματοποίηση του πληθωρισμού (inflation).
4. Η Γενική Σχετικότητα δεν είναι επανακανονικοποιήσιμη και επομένως δεν μπορεί να χβαντωθεί με βάση τις δεδομένες προσεγγίσεις.

Τα παρατηρησιακά προβλήματα (εκτός αν υπάρχουν άγνωστα συστηματικά σφάλματα) περιλαμβάνουν:

1. Το πρόβλημα της σταθεράς του Hubble  $H_0$ : Η σταθερά του Hubble  $H_0$ , μετρά τον σημερινό ρυθμό διαστολής του σύμπαντος και είναι αδιαμφισβήτητα ένα από τα πιο σημαντικά παρατηρήσιμα κοσμολογικά μεγέθη. Ωστόσο, οι άμεσες μετρήσεις της σημερινής τιμής της παραμέτρου του Hubble, δίνουν μια τιμή μεγαλύτερη ( $\sim 5\sigma$ ) της εκτιμώμενης από τον ανιχνευτή Planck μέσω του φάσματος του CMB, στο πλαίσιο της κοσμολογίας του  $\Lambda$ CDM.  
Για την αντιμετώπιση αυτής της διαφοροποίησης, στην βιβλιογραφία προτείνονται διάφορες πιθανές λύσεις όπως:
  - Η δυνατότητα να έχουμε επιπλέον σχετικιστικούς βαθμούς ελευθερίας στην επανασύνδεση. Αν έχουμε περισσότερους σχετικιστικούς βαθμούς ελευθερίας, έχουμε περισσότερη ακτινοβολία και μπορούμε να μετρήσουμε την επίδραση στο φάσμα θερμοκρασίας του CMB. Έτσι το  $H_0$  θα αυξανόταν έως ότου πάρει την τιμή πρόσθετης ακτινοβολίας στην επανασύνδεση.
  - Η ομαδική μεταβολή των κοσμολογικών παραμέτρων, ώστε ένας κατάλληλος συνδιασμός τους να μπορεί να βελτιώσει το πρόβλημα. Με την μέθοδο των πολλών παραμέτρων μας δίνεται η δυνατότητα να μας οδηγήσουν τα ίδια τα δεδομένα, αποφεύγοντας τυχόν αβεβαιότητες λόγω της επιλογής του μοντέλου.
  - Η συνιστώσα της σκοτεινής ενέργειας με καταστατική εξίσωση  $w$  διαφορετική του  $-1$ , δηλαδή διαφορετική μιας κοσμολογικής σταθεράς. Μεταβάλλοντας το  $w$  σημαίνει φυσικά πως αλλάζει ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος μέσω της πρώτης εξίσωσης του Friedmann, συνεπώς επηρεάζεται η τιμή της σταθεράς  $H_0$ .
  - Η πρώιμη σκοτεινή ενέργεια (Early Dark Energy, EDE) αποτελεί μία ακόμη πιθανή λύση. Σε αυτά τα μοντέλα, η EDE συμπεριφέρεται ως μια κοσμολογική σταθερά των πρώιμων ετών του σύμπαντος, που αργότερα αποσυντίθεται σαν ακτινοβολία ή γρηγορότερα. Για την περίπτωση της EDE ο ηχητικός ορίζοντας στην αποσύνδεση μειώνεται, με επακόλουθο μια μεγαλύτερη τιμή της σταθεράς του Hubble που προκύπτει από το CMB.
  - Η αλληλεπιδρούσα σκοτεινή ενέργεια. Στο μοντέλο της αλληλεπιδρούσας σκοτεινής ενέργειας (Interactive Dark Energy, IDE) οι εξισώσεις διατήρησης της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας μπορούν να τροποποιηθούν με την εισαγωγή ενός ποσοστού αλληλεπίδρασης.



- Η Τροποποιημένη Βαρύτητα. Αν η βαρύτητα είναι ασθενέστερη σε ενδιάμεσες κλίμακες από ότι αναμενόταν στην Γενική Σχετικότητα, τότε η εκτίμηση της σταθεράς του Hubble  $H_0$  από το CMB μπορεί να δίνει μεγαλύτερες τιμές. Η ανακατασκευή των βαρυτικών θεωριών και των μοντέλων σκοτεινής ενέργειας σε κοσμολογικές κλίμακες, με βάση τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Ενεργού Θεωρίας Πεδίου (Effective Field Theory, EFT), η οποία περιορίζει την ελευθερία καθορισμού τέτοιων μοντέλων, στην επιλογή μιας ομάδας συναρτήσεων που ανακατασκευάζονται αναλόγως των κοσμικών ετών που εξετάζονται. Με βάση την προσέγγιση της EFT κάποια μοντέλα όπως το Βαθμωτό Horndeski (Scalar Horndeski) και το Πλήρες Horndeski (Full Horndeski) είναι υποψήφια για την επίλυση της διαφοράς στην εκτίμηση της τιμής της σταθεράς  $H_0$ . Στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε με βάση την θεωρία Horndeski και συγκεκριμένα την διερεύνηση των παραμέτρων της να μειώσουμε αυτήν την διαφοροποίηση στο  $H_0$ .

2. Το πρόβλημα της  $\sigma_8$ : μια πιθανή απόκλιση παρατηρήθηκε μεταξύ των μετρήσεων που προκύπτουν από τις έρευνες των CMB και LSS.

Τα παραπάνω είχαν ως αποτέλεσμα, τις τελευταίες δύο δεκαετίες ένα μεγάλο ποσοστό της έρευνας να είναι αφιερωμένο στην κατασκευή σεναρίων ή/και θεωριών που είναι ικανές να μειώσουν ή να ενσωματώσουν τα προαναφερθέντα προβλήματα.

Η πρώτη βασική κατεύθυνση της έρευνας είναι να διατηρήσει την Γενική Σχετικότητα ως την θεμελιώδη βαρυτική θεωρία, και να τροποποιήσει το περιεχόμενο του σύμπαντος εισάγοντας τα πληθωριστικά πεδία (inflaton) και την έννοια της σκοτεινής ενέργειας.

Η δεύτερη κατεύθυνση είναι να επεκτείνει/τροποποιήσει την ίδια την βαρυτική θεωρία, κυρίως να κατασκευάσει βαρυτικές θεωρίες που έχουν ως συγκεκριμένο όριο την Γενική Σχετικότητα, αλλά γενικά θα παρέχουν επιπλέον βαθμούς ελευθερίας που θα μπορούν να ενσωματώσουν τα προαναφερθέντα προβλήματα. Αυτές αποτελούν τις λεγόμενες Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας. Η πρώτη τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας ήταν η ίδια η  $\Gamma\Theta\Sigma$ , που ενσωμάτωσε κοσμολογικά φαινόμενα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο με ασθενές όριο την Νευτώνια Βαρύτητα.

Δύο βασικές κατηγορίες τροποποιημένων θεωριών είναι οι  $f(R)$  και Βαθμωτού-Τανυστή.

Οι  $f(R)$  Θεωρίες Βαρύτητας προέρχονται από την  $\Gamma\Theta\Sigma$ , γενικεύοντας την δράση Hilbert-Einstein καθώς αντικαθιστούν το βαθμωτό Ricci με μια πιο γενική συνάρτηση του,  $f(R)$ . Οι  $f(R)$  θεωρίες επιδέχονται βελτιωμένες επανακανονικοποιήσιμες ιδιότητες και μπορούν να οδηγήσουν σε μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής, την πληθωριστική (inflation), στην πρώιμη ηλικία του σύμπαντος. Ακόμη οι θεωρίες  $f(R)$  χρήζουν ιδιαίτερου ενδιαφέροντος ως πιθανή εξήγηση στην παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος στην εποχή μας. Μέσω αυτών μπορούμε να εξάγουμε τις  $f(R)$  τροποποιημένες εξισώσεις πεδίου, αλλά και τις τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann στην κοσμολογία.

Οι Θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή (Scalar-Tensor Theories) είναι οι πιο γνωστές και περισσότερο μελετημένες εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας. Χρησιμοποιούνται ως πρότυπο μοντελοποίησης αποκλίσεων από την Γενική Σχετικότητα και χρήζουν ιδιαίτερου ενδιαφέροντος καθώς η σχετικά απλή δομή των Εξισώσεων Πεδίου, οδηγεί στην εύρεση αναλυτικών λύσεων ακριβείας σε πλήθος καταστάσεων φυσικού ενδιαφέροντος. Προκύπτουν από τροποποιήσεις της  $\Gamma\Theta\Sigma$ , με την εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου στην δράση  $S$ . Η γενικότερη θεωρία βαθμωτού-τανυστή, δημοσιεύθηκε το 1974 από τον G.Horndeski. Η γενικότητα του πλαισίου των θεωριών Horndeski, θέτει το ερώτημα του κατά πόσο υπάρχουν συγκεκριμένες υποθεωρίες με εξέχουσες ιδιότητες. Η Horndeski “περιέχει” πολλές θεωρίες βαρύτητας συμπερ-

λαμβανομένων των: ΓΘΣ, Brans-Dicke, Πεμπτουσίας (Quintessence), Δίλατον (Dilaton). Μεταξύ των  $f(R)$  θεωριών και βαθμωτού-τανυστή προκύπτει δυναμική ισοδυναμία.

Φυσικά με βάση τα παραπάνω μπορούν να ακολουθηθούν και οι δύο βασικές προαναφερθείσες κατευθύνσεις συγχρόνως.

Ως εκ τούτου, σε μια βιβλιογραφία χιλιάδων εργασιών μπορεί κανείς να βρει θεωρίες που αποτελούνται από διάφορα βαθμωτά πεδία όπως, το Πληθωριστικό (inflaton), της Πεμπτουσίας (quintessence), της  $k$ -essence και διανυσματικά πεδία με διάφορα δυναμικά, όπως το τετραγωνικό (quadratic), τεταρτικό (quartic), εκθετικά, ή επιδρώντα ρευστά (διάφορες παραμετροποιήσεις σκοτεινής ενέργειας, όπως CPL,  $w$ CDM, κλπ.).

Επιπροσθέτως, κάποιος μπορεί να βρει τις θεωρίες βαθμωτού-τανυστή (Scalar-Tensor Theories), όπως είναι η Brans-Dicke, η Galileon, η γενική θεωρία Horndeski, ή θεωρίες πέραν της Horndeski. Επιπλέον, υπάρχουν ευρείες τάξεις θεωριών, οι οποίες γενικεύουν την δράση Einstein-Hilbert όπως προαναφέραμε χρησιμοποιώντας αντί του βαθμωτού Ricci  $R$ , διάφορους όρους καμπυλότητας υψηλότερης τάξης, όπως είναι στις  $f(R)$  και  $f(G)$ , στην Κυβική (cubic), Weyl, Lovelock, στις μη-τοπικές, κλπ., βαρύτητες.

Θα μπορούσαμε επίσης, να θεωρήσουμε επιπλέον διανυσματικούς βαθμούς ελευθερίας, όπως στην Einstein-Aether ή στην Hořava-Lifshitz βαρύτητα, ή ακόμη και επιπλέον τανυστικούς βαθμούς ελευθερίας, όπως στην μη γραμμική, εκτενή βαρύτητα και στην διμετρική ή πολυμετρική βαρύτητα.

Μια ενδιαφέρουσα τάξη επεκτειμένων θεωριών βαρύτητας προκύπτει, αν ξεκινήσουμε από την ισοδύναμη με στρέψη/τηλεπαράλληλη περιγραφή της βαρύτητας, και χρησιμοποιήσουμε παρόμοιες μεθόδους τροποποίησης, με αποτέλεσμα την βαρύτητα  $f(T)$ , την βαρύτητα με στρέψη σε μεγαλύτερες τάξεις, την κατασκευή βαθμωτού-στρέψης, τις θεωρίες μη μέτρησης (non-metricity) ή μη-μετάθεσης (non-commutativity), κλπ.

Επιπλέον, θεωρίες εμπνευσμένες από την θεωρία χορδών προκύπτουν από επιπλέον διαστάσεις, συμπιεσμένες ή μεγάλες, όπως η Κοσμολογία Μεμβρανών (Braneworld).

Τελικά μπορούμε να κάνουμε όλες τις παραπάνω τροποποιήσεις και να προσθέσουμε μη τετριμμένες συζεύξεις με τον όρο της ύλης.

Οι παραπάνω θεωρίες και σενάρια, ή οι μίξεις αυτών, έχουν σχεδιαστεί και κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο που είναι ικανές να ενσωματώσουν μερικά από τα προαναφερθέντα ανοικτά προβλήματα, του αρμονικού κοσμολογικού μοντέλου.

Σε πρώτο στάδιο, πρέπει να είναι “υγιείς”, δηλ να μην υπόκεινται σε θεωρητικές ασυνέπειες και προβλήματα (απουσία ασταθειών και παθολογιών στο επίπεδο του υποβάθρου και των διαταραχών). Σε δεύτερο στάδιο, θα πρέπει να είναι “βιώσιμες”, και συγκεκριμένα θα πρέπει να προβλέπουν μια κοσμολογική συμπεριφορά, που βρίσκεται σε συμφωνία με τεράστια ποσότητα παρατηρησιακών δεδομένων που στην εποχή μας είναι διαθέσιμα στην κοσμολογία και την αστροφυσική γενικότερα (δεδομένα σχετικά με την διαστολή του σύμπαντος, όπως δεδομένα από τύπου Ia Υπερκαινοφανείς (SNIa), Βαρυονικών Ακουστικών Ταλαντώσεων (Baryon Acoustic Oscillations) (BAO), Εκλάμψεων Ακτινοβολίας Γάμμα (Gamma Ray Bursts), άμεσες παρατηρήσεις της παραμέτρου του Hubble, ή δεδομένα σχετικά με την συμπεριφορά διαταραχών, όπως δεδομένα από Δομές Μεγάλης Κλίμακας (LSS), δεδομένα θερμοκρασίας και πόλωσης του φάσματος του Κοσμικού Υποβάθρου Ακτινοβολίας (CMB), παρατηρήσεις βαρυτικών κυμάτων).

Τελικά, όλες οι παραπάνω θεωρίες και σενάρια πρέπει να βρίσκονται σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις του Ηλιακού Συστήματος, καθώς και με άλλα παρατηρησιακά και πειραματικά δεδομένα, όπως είναι τα όρια Lorentz και οι παραβιάσεις της αρχής της ισοδυναμίας. Μια υγιής και “βιώσιμη” θεωρία/σενάριο, δηλαδή που πληροί όλες τις παραπάνω προϋποθέσεις, θεωρείται ως επιτυχημένος υποψήφιος για την περιγραφή της φύσης.

# Κεφάλαιο 1

## Γενική Σχετικότητα

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) όπως διατυπώθηκε το 1915 από τον Άλμπερτ Άϊνσταϊν είναι μέχρι σήμερα η ικανοποιητικότερη περιγραφή της βαρύτητας, κυρίως σε μεγάλης κλίμακας φαινόμενα όπου οι Νευτώνιες εξισώσεις δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

### 1.1 Τανυστής Riemann

Θεμελιώδες μέγεθος της γεωμετρίας Riemann αποτελεί ο τανυστής τέταρτης τάξης, γνωστός και ως τανυστής Riemann που καθορίζει με μοναδικό τρόπο την καμπυλότητα ενός χώρου. Ο τανυστής εκφράζεται ως:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad , \quad (1.1)$$

όπου γενικά:  $\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(\partial_{\rho}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\nu}g_{\rho\mu})$  η έκφραση των συμβόλων του Christoffel, τα οποία έχουν εμφανή εξάρτηση από την γεωμετρία του χώρου.

Από την σχέση (1.1) μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι ο τανυστής Riemann είναι αντισυμμετρικός ως προς τους δύο τελευταίους δείκτες:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = -R^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu} \quad .$$

Αν θεωρήσουμε την συναλλοίωτη μορφή του τανυστή:  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}$ , τότε μέσω αυτής μπορούμε να εξάγουμε άλλες τρεις ιδιότητες του:

1. Είναι αντισυμμετρικός ως προς τους πρώτους δύο δείκτες:  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$ .
2. Είναι συμμετρικός ως προς την εναλλαγή του πρώτου ζεύγους δεικτών με το δεύτερο:  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ .
3. Από τις προηγούμενες ιδιότητες καταλήγουμε στην τέταρτη ιδιότητα σύμφωνα με την οποία όλες οι συνιστώσες του τανυστή Riemann για τις οποίες ισχύει  $\rho=\sigma$  ή  $\mu=\nu$  μηδενίζονται:  $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$  [1].

Ο μηδενισμός του τανυστή Riemann μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο χώρος είναι επίπεδος. Συστέλλοντας τον τανυστή όπως δίνεται από την σχέση (1.1) οδηγούμαστε σε έναν τανυστή δεύτερης τάξης, τον τανυστή Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \quad . \quad (1.2)$$

Ο τανυστής Ricci αποδεικνύεται πως είναι συμμετρικός, κάτι που προκύπτει ως συνέπεια των

συμμετριών του τανυστή Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad . \quad (1.3)$$

Το ίχνος του τανυστή Ricci αποτελεί την βαθμωτή καμπυλότητα Ricci (*Ricci scalar*):

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad . \quad (1.4)$$

Ο μηδενισμός του τανυστή Ricci μας πληροφορεί πως ο χώρος είναι κενός ύλης-ενέργειας, ωστόσο αυτό δεν συνεπάγεται μηδενική καμπυλότητα. Δηλαδή η εξίσωση  $R_{\mu\nu} = 0$ , δεν οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και ο τανυστής Riemann μηδενίζεται, αφού σε χώρους τεσσάρων διαστάσεων ο τανυστής Ricci έχει δέκα ανεξάρτητες συνιστώσες, ενώ αυτός του Riemann είκοσι.

## 1.2 Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Ως πηγή του βαρυτικού πεδίου στις εξισώσεις πεδίου του Einstein όπως θα δούμε παρακάτω, εισάγεται ένας τανυστής δευτέρας τάξεως, ο τανυστής ενέργειας-ορμής (*energy momentum tensor*)  $T^{\mu\nu}$ . Ο τανυστής αυτός αποτελεί βασικό στοιχείο κάθε θεωρίας σχετικής με την βαρύτητα και είναι ιδανικός για να εκφράσει την ενεργειακή κατάσταση ενός συστήματος με τρόπο ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων. Σε χώρο τεσσάρων διαστάσεων ο τανυστής ενέργειας-ορμής παριστάνεται ως τετραδιάστατος πίνακας που περιγράφει την πυκνότητα ενέργειας και ορμής καθώς και την πυκνότητα ροής των εν λόγω μεγεθών. Έτσι κάθε στοιχείο  $T^{\mu\nu}$  του τανυστή παριστάνει την ροή της  $\mu$ -συνιστώσας της τετραορμής που διαρρέει την επιφάνεια  $x^\nu = \text{σταθ}$ .

Οι εκφράσεις των γνωστών νόμων διατήρησης διευκολύνονται με την χρήση του τανυστή ενέργειας-ορμής και της συναλλοίωτης παραγώγου :

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (1.5)$$

όπου στην συνέχεια μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} = 0 \quad , \quad (1.6)$$

η οποία σε τοπικό επίπεδο (μηδενισμός των συμβόλων Christoffel) δίνει:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (1.7)$$

όπου για  $\mu = 1, 2, 3$  μελετάται η διατήρηση της ορμής, ενώ για  $\mu = 0$  η διατήρηση της ενέργειας.

Στην Κοσμολογία θεωρούμε πως η ύλη διαχέεται στο σύμπαν ως ένα τέλειο ρευστό. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής σε καμπυλωμένο χωρόχρονο παίρνει τότε την μορφή

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \quad , \quad (1.8)$$

όπου  $\rho$  η ενεργειακή πυκνότητα,  $p$  η πίεση και  $U^\mu$  η τετραταχύτητα του τέλειου ρευστού [4].

### 1.3 Εξισώσεις Πεδίου του Einstein

Το 1915 ο Albert Einstein δημοσίευσε για πρώτη φορά τις γνωστές *Εξισώσεις Πεδίου* (*Einstein's Field Equations*) που αποτελούν μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων οι οποίες συσχετίζουν την τοπική καμπυλότητα του χωρόχρονου με την τοπική ενέργεια και ορμή. Αποτελούν δηλαδή μια γενίκευση των εξισώσεων του Νεύτωνα σε καμπύλο χωρόχρονο, όπου πηγή είναι ο ταυιστής ενέργειας-ορμής  $T^{\mu\nu}$ . Τις εξισώσεις αυτές θα εξάγουμε παρακάτω μέσω της Αρχής Ελαχίστου Δράσεως.

#### Εξισώσεις Πεδίου Απουσία Ύλης

Όλες οι θεμελιώδεις θεωρίες στην φυσική περιγράφονται από αρχές δράσεων, συνεπώς η βαρύτητα δεν θα μπορούσε να διαφέρει. Θεωρούμε έτσι την δράση με την πιο απλή μορφή λαγκρανζιανής, που εκφράζεται με το βαθμωτό Ricci  $R$ , για το βαρυτικό πεδίο

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad . \quad (1.9)$$

Η σχέση αυτή είναι η δράση *Einstein-Hilbert*. Το πρόσημο μείον στην ρίζα εμφανίζεται καθώς βρισκόμαστε σε χωρόχρονο Lorentz και η μετρική έχει μια αρνητική ιδιοτιμή, έτσι η ποσότητα  $g = \det g_{\mu\nu}$  είναι αρνητική.

Από την σχέση (1.9) θα εξάγουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Καθορίζουμε αρχικά το  $g_{\mu\nu}$  ως εξής :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad .$$

Εκφράζουμε το βαθμωτό Ricci επίσης ως  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Έτσι η δράση Einstein-Hilbert αλλάζει ως εξής:

$$\delta S = \int d^4x \left[ (\delta\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \quad . \quad (1.10)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τους νέους όρους που προέκυψαν στην σχέση (1.9), ξεκινώντας από τον όρο  $\delta\sqrt{-g}$  [2].

Γνωρίζουμε ότι για κάθε διαγωνοποιήσιμο πίνακα  $M$  ισχύει ότι:

$$\log \det M = \text{tr} \log M \quad \text{και} \quad \frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{tr}(M^{-1} \delta M).$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα παίρνουμε:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} (-g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad . \quad (1.11)$$

Τελικά από την (1.11) και αφού  $g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$  παίρνουμε την ζητούμενη ποσότητα

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Η μεταβολή της δράσης μας τώρα έχει την μορφή :

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Ακολουθώντας υπολογίζουμε τον όρο  $\delta R_{\mu\nu}$ . Ο τανυστής Ricci εκφράζεται ως:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \quad .$$

Άρα η ζητούμενη μεταβολή είναι:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & \Gamma_{\mu\beta}^a \left( \delta \Gamma_{a\nu}^{\beta} \right) + \left( \delta \Gamma_{\mu\beta}^a \right) \Gamma_{a\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^a \left( \delta \Gamma_{a\beta}^{\beta} \right) - \left( \delta \Gamma_{\mu\nu}^a \right) \Gamma_{a\beta}^{\beta} + \left( \delta \Gamma_{\mu a}^a \right)_{,\nu} - \left( \delta \Gamma_{\mu\nu}^a \right)_{,a} = \\ & \left( \delta \Gamma_{\mu a}^a \right)_{;\nu} - \left( \delta \Gamma_{\mu\nu}^a \right)_{;a} \quad . \end{aligned} \quad (1.14)$$

Η διαφορά των συμβόλων Christoffel αποτελεί τανυστή. Επιλέγουμε να δουλέψουμε σε κανονικές συντεταγμένες όπου  $\partial_{\rho} g_{\mu\nu} = 0$  και κατά συνέπεια  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ , για αυτόν τον λόγο εξαφανίζονται στην εξίσωση (1.14) τα σύμβολα Christoffel. Επίπλέον  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu} C^{\nu}$  όπου το διάνυσμα  $C^{\nu} \equiv g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu a}^a - g^{\mu a} \delta \Gamma_{\mu a}^{\nu}$  [3]. Συνεπώς η δράση μας μέσω της σχέσεως (1.14) και των παραπάνω γίνεται τελικά

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\nu} C^{\nu} \right] \quad . \quad (1.15)$$

Από το θεώρημα της απόκλισης ο τελευταίος όρος της (1.15) μηδενίζεται και απαιτώντας  $\delta S = 0$  τελικά παίρνουμε

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (1.16)$$

όπου  $G_{\mu\nu}$  ο τανυστής *Einstein* που εκφράζει την καμπυλότητα του χωρόχρονου. Αυτές είναι οι *Εξισώσεις Πεδίου του Einstein* απουσία ύλης, δηλαδή στον κενό χώρο (σχέση (1.16)).

## Εξισώσεις Πεδίου Παρουσία της Κοσμολογικής Σταθεράς $\Lambda$

Στην παραπάνω ενότητα παρουσιάσαμε την δράση Einstein-Hilbert ως την πιο απλή δράση που δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα για την δυναμική του βαρυτικού πεδίου, αλλά σε αυτήν θα μπορούσαμε να προσθέσουμε έναν ακόμη απλούστερο όρο, μια σταθερά. Αυτή είναι η γνωστή *κοσμολογική σταθερά*  $\Lambda$ . Η δράση θα πάρει τότε την μορφή

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad . \quad (1.17)$$

Η κοσμολογική σταθερά έχει διαστάσεις  $L^{-2}$  και στην παραπάνω δράση θα μπορούσαμε να πούμε πως παίζει τον ρόλο του δυναμικού στην λαγκρανζιανή (T-V). Εισήχθη ως ποσότητα στις εξισώσεις από τον A.Einstein, για την επίτευξη συμφωνίας με την τότε επικρατούσα θεωρία ενός στατικού σύμπαντος. Σήμερα, γνωρίζουμε ότι το σύμπαν μας διαστέλλεται, ωστόσο η κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  εξακολουθεί να παίζει σημαντικό ρόλο στις εξισώσεις πεδίου και μάλιστα κατά ένα μικρό ποσοστό είναι σημαντική για την ερμηνεία της ίδιας της διαστολής του Σύμπαντος.

Μεταβάλλοντας την δράση όπως παραπάνω καταλήγουμε στις εξισώσεις Einstein, για το κενό με κοσμολογική σταθερά

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad . \quad (1.18)$$

## Εξισώσεις Πεδίου Παρουσία Ύλης

Θεωρούμε την δράση της μορφής

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_M \quad , \quad (1.19)$$

όπου  $S_M$  είναι η δράση για ένα πεδίο με ύλη. Ορίζουμε τον συμμετρικό τανυστή ενέργειας-ορμής για τον οποίο μιλήσαμε σε προηγούμενη ενότητα ως εξής

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad . \quad (1.20)$$

Αν μεταβάλλουμε την σχέση (1.19) ως προς το  $g_{\mu\nu}$  θα έχουμε

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad . \quad (1.21)$$

Θέτοντας  $\delta S = 0$  παίρνουμε τις ολοκληρωμένες Εξισώσεις Πεδίου που περιγράφουν την σύζευξη της βαρυτητας με την ύλη [7]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad . \quad (1.22)$$

Οι Εξισώσεις Πεδίου έχουν την μορφή (1.22) σύμφωνα με τις απαιτήσεις που είχαν τεθεί, πριν τελικά διατυπωθούν:

1. Πηγή του βαρυτικού πεδίου πρέπει να αποτελεί ο τανυστής ενέργειας-ορμής  $T_{\mu\nu}$ , λόγω της ισοδυναμίας μάζας-ενέργειας.
2. Η καμπύλωση του χωρόχρονου προκαλείται από την ύπαρξη μάζας. Επειδή η καμπύλωση περιγράφεται με την βοήθεια των συμβόλων Christoffel, πρέπει οι εξισώσεις να είναι συναρτήσεις του μετρικού τανυστή.
3. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής θα πρέπει να εξισωθεί με έναν τανυστή ίσης τάξης. Αυτός ο τανυστής είναι ο  $G_{\mu\nu}$  (τανυστής Einstein).





## Κεφάλαιο 2

# Κοσμολογία στην Γενική Σχετικότητα

### 2.1 Μετρική Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

Το Σύμπαν είναι χωρικά ομογενές και ισότροπο [13]. Αυτό περιορίζει τις επιλογές μας σε μία από τις τρεις παρακάτω γεωμετρίες

- Ευκλείδειος χώρος  $R^3$ : χώρος μηδενικής καμπυλότητας ( $k = 0$ ) με μετρική

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

- Σφαίρα  $S^3$ : χώρος με ομοιόμορφη θετική καμπυλότητα ( $k = 1$ ), ακτίνας ίσης με 1, με μετρική

$$ds^2 = \frac{1}{1-r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

- Υπερβολοειδές  $H^3$ : χώρος με ομοιόμορφη αρνητική καμπυλότητα ( $k = -1$ ) με μετρική

$$ds^2 = \frac{1}{1+r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Στην Κοσμολογία θέλουμε να περιγράψουμε έναν χωρόχρονο του οποίου ο χώρος διαστέλλεται καθώς το Σύμπαν εξελίσσεται. Αυτό το επιτυγχάνουμε μέσα από μετρικές της μορφής [18]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (2.1)$$

Αυτή είναι η μετρική *Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)*. Σε μορφή πίνακα μπορεί να εκφραστεί ως

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Ο όρος  $a(t)$  ονομάζεται *παράγοντας κλίμακας*, περιγράφει την διαστολή του σύμπαντος και ορίζεται από την σχέση

$$R(t) = a(t) R_0, \quad ,$$

όπου  $R(t)$  η απόσταση δύο σημείων την χρονική στιγμή  $t$  και  $R_0$  η αρχική τους απόσταση.

## 2.2 Οι Εξισώσεις Friedmann

Με βάση την μετρική FLRW, σχέση (2.1), μπορούμε να εξάγουμε τις *Εξισώσεις Friedmann* διαμέσω των *Εξισώσεων Πεδίου του Einstein*.

Θα πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά τις συνιστώσες του ταυστή Ricci. Ο ταυστής Ricci όπως έχει προαναφερθεί εκφράζεται ως

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \quad . \quad (2.3)$$

Συνεπώς για τον υπολογισμό των συνιστωσών του, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των παρακάτω συμβόλων Christoffel με την βοήθεια της μετρικής, που δίνονται από την σχέση

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) \quad . \quad (2.4)$$

Έτσι για την συνιστώσα  $R_{00}$  έχουμε

$$R_{00} = \Gamma_{00,\beta}^{\beta} - \Gamma_{0\beta,0}^{\beta} + \Gamma_{00}^{\beta} \Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^{\lambda} \quad , \quad (2.5)$$

όπου

$$\Gamma_{00}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\beta} (g_{0\beta,0} + g_{0\beta,0} - g_{00,\beta}) = \frac{1}{2} g^{\beta\beta} g_{0\beta,0} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

ομοίως υπολογίζουμε τα

$$\Gamma_{0\beta}^{\beta} = 3 \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{και} \quad \Gamma_{0\lambda}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^{\lambda} = 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad , \quad (2.7)$$

με  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . Άρα η σχέση (2.5) γίνεται τώρα

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad . \quad (2.8)$$

Για την εξαγωγή των υπόλοιπων συνιστωσών του ταυστή Ricci εργαζόμαστε όπως παραπάνω και με την βοήθεια των παρακάτω συμβόλων Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2} & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2\theta & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2\theta & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta \quad , & & \end{aligned} \quad (2.9)$$

προκύπτουν τελικά

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad \text{και} \quad R_{11} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad \text{και} \quad R_{33} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta \quad . \quad (2.10)$$

Από τα παραπάνω και την σχέση:  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , προκύπτει και το βαθμωτό Ricci

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.11)$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει τα απαραίτητα μεγέθη είμαστε σε θέση να εξάγουμε τις εξισώσεις Friedmann.

Υποθέτουμε πως το Σύμπαν γεμίζει από ένα τέλειο ρευστό που “αντικαθιστά” την ύλη και την ενέργεια. Θεωρούμε το ρευστό αυτό ακίνητο, οπότε η τετρα-ταχύτητα του θα είναι:  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Ο ταυσιτής ενέργειας-ορμής, σχέση (1.8), ικανοποιεί την σχέση (1.5) από την οποία παίρνουμε

$$U^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + P) \nabla_\mu U^\mu = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) = 0 \quad . \quad (2.12)$$

Η παραπάνω σχέση είναι η γνωστή *Εξίσωση Συνέχειας*. Εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας σε ένα διασταλλόμενο σύμπαν. Ένα ρευστό σαν αυτό που θεωρήσαμε έχει καταστατική εξίσωση της μορφής

$$P = w\rho, \quad (2.13)$$

όπου ο όρος  $w$  είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου. Τα πιο δημοφιλή παραδείγματα κοσμολογικών ρευστών αποτελούν η ύλη και η ακτινοβολία. Ως ύλη αντιμετωπίζουμε κάθε σύνολο μη συγκρουόμενων, μη σχετικιστικών σωματιδίων μηδενικής πίεσης. Ως ακτινοβολία θεωρούμε είτε την πραγματική ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, είτε σωματίδια με μη μηδενική μάζα ηρεμίας που κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός, έτσι που να είναι πανομοιότυπα των φωτονίων. Για σύμπαν κυριαρχούμενο από ασυμπίεστη ύλη το  $w = 0$ , ενώ για σύμπαν που κυριαρχεί η ακτινοβολία το  $w = 1/3$ . Μέσω της σχέσης (2.13), η εξίσωση συνέχειας γίνεται

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.14)$$

από την οποία προκύπτει

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}, \quad (2.15)$$

όπου  $\rho_0$  η σταθερά ολοκλήρωσης. Δηλαδή προκύπτει πως η ενεργειακή πυκνότητα  $\rho$  εξασθενεί καθώς το σύμπαν διαστέλλεται. Η ενεργειακή πυκνότητα  $\rho$  προκύπτει και ως άθροισμα των επιμέρους ενεργειακών πυκνοτήτων των ποσοτήτων που ενδέχεται να απαρτίζουν το υπό μελέτη σύμπαν, δηλαδή [10]

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (2.16)$$

όπου  $\rho_m, \rho_r, \rho_\Lambda$  οι ενεργειακές πυκνότητες της ύλης, ακτινοβολίας και κοσμολογικής σταθεράς με  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ .

Η ενεργειακή πυκνότητα για σύμπαν κυριαρχούμενο από ύλη μειώνεται ως [6]

$$\rho_m \propto a^{-3}, \quad (2.17)$$

ενώ για σύμπαν κυριαρχούμενο από ακτινοβολία

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (2.18)$$

Έχοντας εξετάσει τα παραπάνω, αντικαθιστούμε τελικά την μετρική FLRW, το βαθμωτό Ricci (σχέση (2.11)) και τον ταυιστή ενέργειας-ορμής (σε πιο βολική έκφραση:  $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ ) στις εξισώσεις πεδίου σχέση (1.22).

Παίρνουμε για  $\mu\nu = 00$

$$R_{00} - \frac{1}{2}R g_{00} + \Lambda g_{00} = 8\pi G T_{00} \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.19)$$

και για  $\mu\nu = ij$  μέσω και της (2.18) έχουμε

$$R_{ij} - \frac{1}{2}R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi G T_{ij} \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3P + \rho) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.20)$$

(λόγω συμμετρίας οι τρεις διευθύνσεις  $ij$  είναι ισοδύναμες)

Οι εξισώσεις (2.19) και (2.20) είναι οι *Εξισώσεις Friedmann* [9].

Η σχέση (2.19) η *πρώτη Εξίσωση Friedmann* μας πληροφορεί για τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος. Η *δεύτερη Εξίσωση Friedmann*, σχέση (2.20) μας πληροφορεί για την αναλογία μεταξύ της επιτάχυνσης και των μεγεθών της ενεργειακής πυκνότητας και πίεσης του σύμπαντος. Οι δύο εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με παραγωγή της (2.19) ως προς την μεταβλητή του χρόνου, εξάγεται η σχέση (2.20). (Σε όλους τους υπολογισμούς θεωρούμε την ταχύτητα του φωτός  $c = 1$ .)

Το μέτρο της διαστολής του σύμπαντος περιγράφεται από την παράμετρο του Hubble που ορίζεται ως

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.21)$$

Την σημερινή τιμή της παραμέτρου του Hubble την ονομάζουμε *σταθερά του Hubble* και την συμβολίζουμε ως  $H_0$ . Πρόσφατες μετρήσεις έδειξαν πως η τιμή της σταθεράς  $H_0$  είναι  $H_0 = (70 \pm 10) \text{ km/sec/Mpc}$ .

Αν θεωρήσουμε το  $k = 0$  (επίπεδο σύμπαν) και  $\Lambda > 0$ , σε σύμπαν παρουσία ύλης ( $w = 0$ ) με την βοήθεια της σχέσης (2.15) και της  $\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ , μπορούμε να βρούμε την λύση της σχέσης (2.19), που έχει την μορφή

$$a(t) = \left(\frac{\rho_0}{\rho_{\Lambda}}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{\sqrt{3\Lambda}t}{2}\right). \quad (2.22)$$

Η παραπάνω λύση εμφανίζει αναπόφευκτα Big Bang για  $t = 0$ , όπου  $a(t = 0) = 0$ .

Για την περίπτωση που  $k = 0$  (επίπεδο σύμπαν) και  $\Lambda = 0$ , η λύση τώρα γίνεται

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3w)}, \quad (2.23)$$

για την οποία ισχύει  $a_0 = a(t_0) = 1$  και  $t_0 = \left[\frac{3}{2}(1+w)D\right]^{-1}$ , με  $D^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$ .

- Για ύλη ( $w = 0$ ): Για επίπεδο σύμπαν γεμάτο ψυχρή ύλη ισχύει

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} . \quad (2.24)$$

Το σύμπαν αυτό είναι γνωστό ως Einstein-de Sitter. Η σταθερά του Hubble προκύπτει σε αυτή την περίπτωση ως

$$H_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} , \quad (2.25)$$

όπου αν μας είναι γνωστή η τιμή της μέσω μετρήσεων, μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του σύμπαντος,  $t_0$ . Για  $H_0 \approx 70 \text{ km/sec/Mpc}$ , η ηλικία του σύμπαντος προκύπτει περίπου ίση με  $t_0 \approx 9 \times 10^9$  έτη.

Στο σύμπαν Einstein-de Sitter η πυκνότητα της ύλης δίνεται από την σχέση

$$\rho_m(t) = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2} . \quad (2.26)$$

- Για ακτινοβολία ( $w = 1/3$ ): Για επίπεδο σύμπαν γεμάτο ακτινοβολία, η λύση θα έχει την μορφή

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/2} . \quad (2.27)$$

Σε ένα τέτοιο σύμπαν η ενεργειακή πυκνότητα μεταβάλλεται ως

$$\rho_r(t) = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2} . \quad (2.28)$$

- Για καμπυλότητα ( $w = -1/3$ ): Μπορούμε να εφαρμόσουμε τους υπολογισμούς μας και για σύμπαν απουσία ύλης, με όρους καμπυλότητας. Έτσι η εξίσωση (2.19), χωρίς καμία συνεισφορά ρευστού έχει λύση για σύμπαν με αρνητική καμπυλότητα,  $k = -1$

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right) , \quad (2.29)$$

γνωστό ως σύμπαν Milne.

Ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος αποτελεί η παράμετρος πυκνότητας που ορίζεται ως

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}} , \quad (2.30)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του σύμπαντος, ενώ  $\rho_{crit}$  η κρίσιμη πυκνότητα που ορίζεται ως

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} , \quad (2.31)$$

και σήμερα έχει τιμή  $\rho_{0crit} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3$ , όπου  $h$  η σταθερά του Hubble σε μονάδες  $100 \text{ km/s/Mpc}$ .

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2.21), (2.30) και (2.31) στην πρώτη εξίσωση Friedmann, σχέση (2.19), παίρνουμε ότι

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} , \quad (2.32)$$

σχέση που φανερώνει τον κρίσιμο ρόλο των μεγεθών  $\rho_{crit}$  και κατά συνέπεια του  $\Omega$ , για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικών με την χωρική γεωμετρία του σύμπαντος (Σχήμα 2.1).

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Για  $\rho < \rho_{crit} \leftrightarrow \Omega < 1$  και κατά συνέπεια καμπυλότητα  $k < 0$ , προκύπτει πως το σύμπαν μας είναι ανοιχτό.
- Για  $\rho = \rho_{crit} \leftrightarrow \Omega = 1$  και κατά συνέπεια καμπυλότητα  $k = 0$ , προκύπτει πως το σύμπαν μας είναι επίπεδο.
- Για  $\rho > \rho_{crit} \leftrightarrow \Omega > 1$  και κατά συνέπεια καμπυλότητα  $k > 0$ , προκύπτει πως το σύμπαν μας είναι κλειστό.

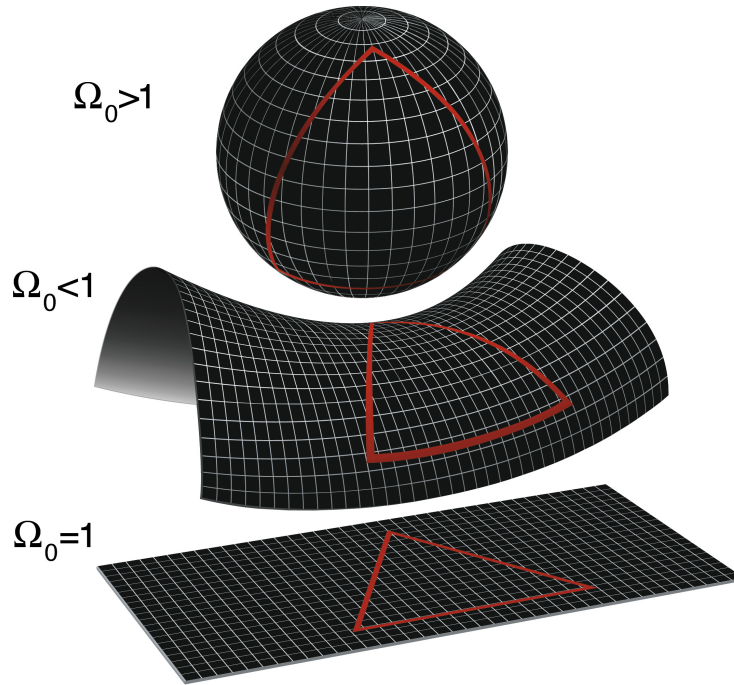


Figure 2.1: Οι τρεις χωρικές γεωμετρίες που περιγράφουν το Σύμπαν μας, σύμφωνα με την τιμή της παραμέτρου  $\Omega_0$ .

Πρόσφατες μετρήσεις της ανισοτροπίας της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB) μας οδηγούν στο συμπέρασμα πως η τιμή της παραμέτρου  $\Omega$  είναι πολύ κοντά στην μονάδα.

Για μια αυθαίρετη τιμή του  $k$  και αν υποθέσουμε πιο γενικά πως το σύμπαν αποτελείται από μια μίξη ενέργειας κενού, ψυχρής και θερμής ύλης, φτιάχνουμε τα κλάσματα  $\Omega_\Lambda, \Omega_m$  και  $\Omega_r$  για τα οποία ισχύει

$$\Omega = \Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r = 1 \quad , \quad (2.33)$$

και για την ενεργειακή πυκνότητα προκύπτει ότι [6]

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[ \Omega_\Lambda + \Omega_m \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_r \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \right]. \quad (2.34)$$

Σήμερα οι τιμές των κλασμάτων μέσω μετρήσεων, προκύπτουν

- $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$
- $\Omega_{m0} \approx 0.3$
- $\Omega_{r0} \approx 10^{-4}$





## Κεφάλαιο 3

# Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας

Για την καλύτερη μελέτη και κατανόηση της βαρύτητας χρειαζόμαστε περισσότερες προβλέψεις και άλλων θεωριών πέραν της ΓΘΣ. Για αυτόν τον λόγο εκτός της ΓΘΣ, αναπτύχθηκαν και εναλλακτικές θεωρίες που την τροποποιούν ή την γενικεύουν αλλά και βοηθούν στην περαιτέρω κατανόηση της ίδιας της Γενικής Σχετικότητας. Αυτές αποτελούν τις λεγόμενες “Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας” (*Modified Theories of Gravity*). Φυσικά κίνητρο για την ανάπτυξη αυτών των θεωριών αποτελούν προβλήματα που ανακύπτουν στην σύγχρονη έρευνα όπως για παράδειγμα ο λόγος της επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος, η ανάγκη να ελέγξουμε την βαρύτητα, ιδιαίτερα μετά την ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων ή ακόμη η ανάγκη για επεξήγηση της συμπεριφοράς του σύμπαντος σε μεγάλες αποστάσεις όπου η ΓΘΣ δεν το επιτυγχάνει [15]. Η πρώτη τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας ήταν η ίδια η ΓΘΣ, που ενσωμάτωσε κοσμολογικά φαινόμενα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο με ασθενές όριο την *Νευτώνια Βαρύτητα*. Ομοίως μια τροποποιημένη θεωρία πρέπει να επιφέρει ένα πιο γενικό πλαίσιο μελέτης που όριο του θα έχει την ΓΘΣ. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε δύο βασικές κατηγορίες τροποποιημένων θεωριών: τις  $f(R)$  και βαθμωτού-τανυστή (*scalar-tensor*).

### 3.1 Θεωρίες $f(R)$

Οι  $f(R)$  Θεωρίες Βαρύτητας προέρχονται από την ΓΘΣ, γενικεύοντας την δράση Hilbert-Einstein καθώς αντικαθιστούν το βαθμωτό Ricci με μια πιο γενική συνάρτηση του,  $f(R)$ . Οι  $f(R)$  θεωρίες επιδέχονται βελτιωμένες επανακανονικοποιήσιμες ιδιότητες και μπορούν να οδηγήσουν σε μια περίοδο επιταχυνόμενης διαστολής, την Πληθωριστική (*inflation*), στην πρώιμη ηλικία του σύμπαντος. Ακόμη οι θεωρίες  $f(R)$  χρήζουν ιδιαίτερου ενδιαφέροντος ως πιθανή εξήγηση στην παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος στην εποχή μας [65].

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που παράγει τις  $f(R)$  γενικεύσεις των εξισώσεων πεδίου Einstein, είναι της μορφής

$$L = \sqrt{-g} f(R) \quad . \quad (3.1)$$

Στην συνέχεια θα εξάγουμε τις τροποποιημένες Εξισώσεις Πεδίου κατά τις  $f(R)$  θεωρίες. Η δράση που τις περιγράφει είναι της μορφής [16]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} f(R) + L_M \right] \quad , \quad (3.2)$$

όπου  $L_M$  η λαγκρανζιανή της ύλης και  $c = 1$ .

Μεταβάλλουμε την δράση (3.2) ως προς  $g_{\mu\nu}$  και έχουμε (όπου  $\kappa = 8\pi G$ )

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(\sqrt{-g}f(R))}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \\ &\int d^4x \left[ \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{f(R)\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

που με πράξεις καταλήγουμε

$$\frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{f(R)\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}} = -2\kappa \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad . \quad (3.4)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τους όρους του α' μέλους της (3.4). Έτσι έχουμε

$$\frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{df(R)}{dR} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} f_R \quad ,$$

όπου  $f_R = \frac{df(R)}{dR}$ . Στην συνέχεια για τον υπολογισμό του  $\delta R$ , γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \Rightarrow \\ \delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \\ &R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho) \Rightarrow \\ \delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (\nabla_\rho g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho) \quad , \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση (1.14) για το  $\delta R_{\mu\nu}$ . Επίσης ισχύει ότι

- $\delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} - \nabla_\lambda \delta g_{\nu\mu}) \quad ,$
- $\delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\nabla_\rho \delta g_{\lambda\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho} - \nabla_\lambda \delta g_{\rho\mu}) = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\nabla_\mu \delta g_{\rho\lambda}) \quad .$

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις στην (3.5) και λαμβάνοντας υπόψιν τις ταυτότητες:  $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}$  και  $\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu}$  έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( -g_{\lambda\mu} g^{\rho\lambda} \nabla_\rho \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - g_{\lambda\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_\rho \nabla_\mu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_\rho \nabla_\lambda \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &+ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Η τελευταία σχέση (3.6), μέσω της ταυτότητας  $\delta g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\gamma} = \delta_\beta^\gamma$  γίνεται

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( -\delta_\mu^\rho \nabla_\rho \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \delta_\nu^\rho \nabla_\rho \nabla_\mu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_\rho \nabla_\lambda \delta g^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} g_{\lambda\mu} \delta_\rho^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_\rho \nabla_\lambda \delta g^{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας την σχέση (3.7) (αφού  $\frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} f_R$ ) αλλά και τον ταυνοστή ενέργειας-ορμής σχέση (1.20) στην σχέση (3.4) παίρνουμε

$$(R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) f_R - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad (3.8)$$

με  $\square = g^{\rho\lambda} \nabla_\rho \nabla_\lambda$ . Η σχέση (3.8) αποτελεί τις τροποποιημένες Εξισώσεις Πεδίου στην θεωρία  $f(R)$ .

## Τροποποιημένες Εξισώσεις Friedmann

Αφού εξάγαμε τις τροποποιημένες εξισώσεις πεδίου είμαστε σε θέση να εξάγουμε και τις *Τροποποιημένες Εξισώσεις Friedmann* σύμφωνα με την αρχή ότι το σύμπαν μας είναι επίπεδο, ισότροπο και ομογενές.

Η μετρική FLRW για επίπεδο σύμπαν έχει την μορφή

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) dx^2 \quad , \quad (3.9)$$

με  $g_{00} = -1$  και  $g_{ii} = a^2(t)$  , ενώ για το στοιχείο  $g$

$$g = a^6(t) \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3(t) \quad , \quad (3.10)$$

Επιπλέον τα σύμβολα Christoffel που είναι διάφορα του μηδενός, προκύπτουν μέσω της σχέσης (1.26) και είναι

$$\Gamma_{ii}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{i0}^i = \frac{\dot{a}}{a} \quad . \quad (3.11)$$

Με την βοήθεια της σχέσης (2.3) και του  $\Gamma_{ii}^0$  που υπολογίσαμε, βρίσκουμε το  $R_{00}$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{00,\beta}^\beta - \Gamma_{0\beta,0}^\beta + \Gamma_{00}^\beta \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^\beta \Gamma_{0\beta}^\lambda \\ &= -3\Gamma_{01,0}^1 - 3(\Gamma_{01}^1)^2 = -3\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\ &\Rightarrow R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} = -3(\dot{H} + H^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Για τον υπολογισμό του  $R_{ii}$ , χρησιμοποιούμε την (3.11)

$$\begin{aligned} R_{ii} &= \Gamma_{ii,\beta}^\beta - \Gamma_{i\beta,i}^\beta + \Gamma_{ii}^\beta \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda - \Gamma_{i\lambda}^\beta \Gamma_{i\beta}^\lambda \\ &= \Gamma_{ii,\beta}^\beta + 3\Gamma_{01}^1 \Gamma_{ii}^0 - 2\Gamma_{ii}^0 \Gamma_{i0}^i \\ &\Rightarrow R_{ii} = \Gamma_{ii,0}^0 + \Gamma_{0i}^i \Gamma_{ii}^0 = 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Υπολογίζουμε ακόμη το βαθμωτό Ricci  $R$

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + 3g^{ii} R_{ii} \\ &= (-1) \left( -3\frac{\ddot{a}}{a} \right) + 3\frac{1}{a^2} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \\ &\Rightarrow R = 6 \left( \frac{\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 6(\dot{H} + 2H^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Θεωρούμε το σύμπαν όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο γεμάτο με τέλειο ρευστό, έτσι θα χρειαστούμε ακόμη τον ταυιστή ενέργειας-ορμής στην μορφή

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad \text{και} \quad T_{\mu\nu} = T^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \quad .$$

Με την βοήθεια της (3.14) το  $R_{00}$  γίνεται

$$R_{00} = -3(\dot{H} + H^2) = -\frac{1}{2} R + 3H^2 \quad . \quad (3.15)$$

Τελικά αντικαθιστώντας την (3.15) στην (3.8) καταλήγουμε στην

$$f_R R_{00} - \frac{1}{2} f(R) g_{00} - \nabla_0 \nabla_0 f_R + g_{00} \square f_R = \kappa T_{00} \quad , \quad (3.16)$$

όπου

$$\begin{aligned} g_{00} \square f_R &= (-1) \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 f_R) \\ &= -\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left( -a^3 \frac{\partial}{\partial t} f_R \right) = 3H \dot{f}_R + \ddot{f}_R \quad . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Με αντικατάσταση της τελευταίας στην (3.16) παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} f_R \left( 3H^2 - \frac{1}{2} R \right) + \frac{1}{2} f(R) + 3H \dot{f}_R &= \kappa \rho \\ \Rightarrow 3f_R H^2 = (f_R R - f)/2 - 3H \dot{f}_R + \kappa \rho \quad . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την *1η Τροποποιημένη εξίσωση Friedmann* κατά την θεωρία  $f(R)$ .

Για την εξαγωγή της δεύτερης τροποποιημένης εξίσωσης Friedmann εργαζόμαστε παρόμοια, με βάση την (3.8) για τις συνιστώσες (ii)

$$f_R R_{ii} - \frac{1}{2} f(R) g_{ii} - \nabla_i \nabla_i f_R + g_{ii} \square f_R = \kappa T_{ii} \quad , \quad (3.19)$$

όπου υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} g_{00} \square f_R &= a^2 \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \right) \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu f_R) \\ &= a^2 \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \right) \partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 f_R) + a^2 \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \right) \partial_i (\sqrt{-g} g^{ii} \partial_i f_R) \\ &= -a^2 \frac{1}{a^3} 3a^2 \dot{a} \dot{f}_R - a^2 \frac{a^3}{a^3} \ddot{f}_R + \frac{1}{a} (\partial_i a) (\partial_i f_R) + \frac{a}{a} \partial_i \partial_i f_R \\ &= -3a^2 H \dot{f}_R - a^2 \ddot{f}_R + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} a \right) \left( \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} f_R \right) + \partial_i \partial_i f_R \\ &\Rightarrow g_{00} \square f_R = -2a^2 H \dot{f}_R - a^2 \ddot{f}_R + \nabla_i \nabla_i f_R \quad , \end{aligned} \quad (3.20)$$

Αντικαθιστώντας την (3.20) και την (3.13) στην (3.19) παίρνουμε

$$\begin{aligned} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) f_R - \frac{a^2}{2} f(R) - 2a^2 H \dot{f}_R - a^2 \ddot{f}_R &= \kappa a^2 p \\ \Rightarrow \left( \frac{\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} \right) f_R - \frac{1}{2} f(R) - 2H \dot{f}_R - \ddot{f}_R &= \kappa p \quad . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Λύνοντας την (3.18) ως προς

$$-\frac{f(R)}{2} = 3H^2 f_R - \frac{1}{2} f_R R + 3H \dot{f}_R - \kappa \rho$$

και αντικαθιστώντας την παραπάνω ποσότητα στην σχέση (3.21) έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \dot{H}f_R + 6H^2f_R - \frac{1}{2}f_R6(2H^2 + \dot{H}) + H\dot{f}_R - \ddot{f}_R &= \kappa(\rho + p) \\ \Rightarrow -2\dot{H}f_R &= \ddot{f}_R - H\dot{f}_R + \kappa(\rho + p) \quad . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την 2η Τροποποιημένη Εξίσωση Friedmann σε επίπεδο σύμπαν, που περιγράφεται από μια  $f(R)$  θεωρία βαρύτητας [19].

### 3.2 Σύμμορφος Μετασχηματισμός των $f(R)$ θεωριών

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε την μαθηματική ισοδυναμία μεταξύ των  $f(R)$  θεωριών και της βαρυτικής θεωρίας του Einstein.

Αν  $(M, g_{\mu\nu})$  είναι ένας χωρόχρονος, τότε η ανακατασκευή του μετρικού τανυστή, που εξαρτάται από τα σημεία

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad , \quad (3.23)$$

όπου η  $\Omega = \Omega(x)$  είναι μια κανονική συνάρτηση, ονομάζεται σύμμορφος μετασχηματισμός (*conformal transformation*) ή μετασχηματισμός Weyl.

Όπως έχουμε ήδη αποδείξει στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, οι Εξισώσεις Πεδίου των  $f(R)$  θεωριών, σχέση (3.8), είναι τέταρτης τάξης και δύναται να μειωθούν στις Εξισώσεις Πεδίου του Einstein μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού. Για μη γραμμικές θεωρίες βαρύτητας, ο σύμμορφος μετασχηματισμός που αντιστοιχίζει την θεωρία σε αυτή του Einstein, μετατρέπεται σε μετασχηματισμό Legendre.

Μπορούμε να ξεκινήσουμε με μια καθαρή βαρυτική, μη γραμμική θεωρία που περιγράφεται από την δράση

$$S = \int d^m x \sqrt{-g} \left[ F(\phi, R) - \frac{\epsilon}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \right] \quad , \quad (3.24)$$

όπου  $m$  οι διαστάσεις του χωρόχρονου,  $F(\phi, R)$  μια αυθαίρετη συνάρτηση των  $\phi$ ,  $R$  και  $\epsilon$  μια ελεύθερη παράμετρος (που έχει συνήθως τιμή 0 ή 1).

Οι εξισώσεις πεδίου που προκύπτουν είναι [21]

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F}{\partial R} \right) \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) &= \frac{\epsilon}{2} \left( \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( F - \frac{\partial F}{\partial R} R \right) \\ + \nabla_\mu \nabla_\nu \left( \frac{\partial F}{\partial R} \right) &- g_{\mu\nu} \square \left( \frac{\partial F}{\partial R} \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\epsilon \square = - \frac{\partial F}{\partial \phi} \quad . \quad (3.26)$$

Η σύμμορφη ανακατασκευή σχέση (3.23), όπου

$$\Omega^2 = \left[ 16\pi G \left| \frac{\partial F}{\partial R} \right| + \text{constant} \right]^{2/(m-2)} \quad , \quad (3.27)$$

και ο επαναπροσδιορισμός του βαθμωτού πεδίου

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{8\pi G} \sqrt{\frac{m-1}{m-2}} \ln \left( \sqrt{32\pi G} \left| \frac{\partial F}{\partial R} \right| \right) , \quad (3.28)$$

μειώνουν την δράση (3.24) σε

$$S = \alpha \int d^m x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} - \frac{\epsilon\alpha}{2} \exp \left( -\sqrt{8\pi G \frac{m-2}{m-1}} \tilde{\phi} \right) - U(\phi, \tilde{\phi}) \right] , \quad (3.29)$$

όπου εμφανίζονται τα δύο βαθμωτά πεδία  $\tilde{\phi}$ ,  $\phi$  και

$$\alpha = \frac{\partial F / \partial R}{|\partial F / \partial R|} , \quad (3.30)$$

$$U(\phi, \tilde{\phi}) = \alpha \exp \left( -\frac{m\sqrt{8\pi G} \tilde{\phi}}{\sqrt{(m-1)(m-2)}} \right) \left[ \frac{\alpha}{16\pi G} R(\phi, \tilde{\phi}) \exp \left( \sqrt{\frac{m-2}{m-1}} 8\pi G \tilde{\phi} \right) - F(\phi, \tilde{\phi}) \right] , \quad (3.31)$$

και  $F(\phi, \tilde{\phi}) = F(\phi, R(\phi, \tilde{\phi}))$ . Το σύστημα που εξάγαμε είναι μη γραμμικό μοντέλο σ, κανονικής βαρύτητας με δύο βαθμωτά πεδία  $\phi$  και  $\tilde{\phi}$ .

Στην περίπτωση όπου η  $F(\phi, R)$  είναι γραμμική συνάρτηση της καμπυλότητας Ricci

$$F(\phi, R) = f(\phi)R - V(\phi) , \quad (3.32)$$

ο επαναπροσδιορισμός του βαθμωτού πεδίου

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{8\pi G} \int d\phi \left[ \frac{\epsilon(m-2)f(\phi) + 2(m-1) [df(\phi)/d\phi]^2}{2(m-2)f^2(\phi)} \right]^{1/2} , \quad (3.33)$$

οδηγεί στην δράση Einstein με ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  :

$$S = \frac{|f|}{f} \int d^m x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right] . \quad (3.34)$$

Η δράση είναι ισοδύναμη των Εξισώσεων Πεδίου Einstein

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} = 8\pi G \tilde{T}_{\mu\nu}[\tilde{\phi}] , \quad (3.35)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu}[\tilde{\phi}] = \nabla_\mu \tilde{\phi} \nabla_\nu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\sigma} \nabla_\alpha \tilde{\phi} \nabla_\beta \tilde{\phi} + U \tilde{g}_{\mu\nu} , \quad (3.36)$$

όπου

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{|f|}{f} [16\pi G |f(\phi)|]^{-\frac{m}{m-2}} V(\phi) , \quad (3.37)$$

και  $\phi = \phi(\tilde{\phi})$ .

Ο σύμμορφος μετασχηματισμός δημιουργεί μια μαθηματική ισοδυναμία μεταξύ των θεωριών που διατυπώνονται στα δύο διαμορφωμένα πλαίσια. Ο χώρος των λύσεων της θεωρίας στο ένα πλαίσιο είναι ισόμορφος του χώρου των λύσεων στο σύμμορφα συσχετισμένο πλαίσιο.

### 3.3 Palatini f(R)

Ο φορμαλισμός *Palatini* διαφέρει από αυτόν που μόλις περιγράψαμε για τις θεωρίες f(R), στο γεγονός πως αντιμετωπίζει τον μετρικό τανυστή  $g_{\mu\nu}$  και το connection  $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$  ως ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην περίπτωση της Γενικής Σχετικότητας μια μεταβολή ως προς το connection οδηγεί στην ίδια Εξίσωση Πεδίου με την μεταβολή ως προς  $g_{\mu\nu}$ . Ωστόσο στις θεωρίες f(R), η προσέγγιση Palatini οδηγεί σε δύο διαφορετικές Εξισώσεις Πεδίου, λόγω των επιπλέον όρων καμπυλότητας [14]. Μεταβάλλοντας την σχέση (3.2) ως προς  $g_{\mu\nu}$  παίρνουμε

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad (3.38)$$

όπου τώρα το  $R_{\mu\nu}$  ορίζεται από τα connections και είναι ανεξάρτητο του  $g_{\mu\nu}$ . Αν τώρα μεταβάλλουμε την ίδια σχέση ως προς το  $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$  θα πάρουμε [5]

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} f_R)_{;\mu} = 0 \quad , \quad (3.39)$$

που είναι μια δεύτερη μορφή εξισώσεων πεδίου. Παρατηρούμε από τα παραπάνω πως η σχέση (3.38) δεν περιλαμβάνει παραγώγους του μετρικού τανυστή, παρά μόνο πρώτης τάξης παραγώγους του connection. Οι σχέσεις (3.38) και (3.39) διαφέρουν από την (3.8) και πρέπει να θεωρούνται ως διαφορετικό ζεύγος εξισώσεων Πεδίου από αυτές που προκύπτουν από τις f(R).

### 3.4 Θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή

Οι Θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή (*Scalar-Tensor Theories*) είναι οι πιο γνωστές και περισσότερο μελετημένες εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας. Χρησιμοποιούνται ως πρότυπο μοντελοποίησης αποκλίσεων από την Γενική Σχετικότητα και χρήζουν ιδιαίτερου ενδιαφέροντος καθώς η σχετικά απλή δομή των Εξισώσεων Πεδίου, οδηγεί στην εύρεση αναλυτικών λύσεων ακριβείας σε πλήθος καταστάσεων φυσικού ενδιαφέροντος.

Μία από τις απλούστερες τροποποιήσεις της ΓΘΣ συνίσταται στην εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου στην δράση S, με αποτέλεσμα την δημιουργία των Θεωριών Βαθμωτού-Τανυστή (scalar-tensor) τις οποίες προαναφέραμε. Η αλληλεπίδραση του βαθμωτού γίνεται σε πρώτο βαθμό εφικτή, μέσω μιας αλληλεπίδρασης ελάχιστονος σύζευξης (minimal-coupling), ενώ στην πλήρη της μορφή μέσω μιας αλληλεπίδρασης μη ελάχιστονος σύζευξης (non-minimal coupling) με την βαρύτητα. Απαραίτητη προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιείται κατά την κατασκευή μιας προτύπου θεωρίας βαθμωτού-τανυστή, είναι οι εξισώσεις κίνησης να παραμένουν δευτέρας τάξεως ως προς της παραγώγους (προς αποφυγή των ασταθειών Ostrogradski) [17], [23].

#### 3.4.1 Θεωρία Horndeski

Η γενικότερη θεωρία που πληροί την προϋπόθεση που αναφέραμε παραπάνω, δημοσιεύθηκε το 1974 από τον G. Horndeski [11]. Η γενικότητα του πλαισίου των θεωριών Horndeski, θέτει το ερώτημα του κατά πόσο υπάρχουν συγκεκριμένες υποθεωρίες με εξέχουσες ιδιότητες. Η

Horndeski “περιέχει” πολλές θεωρίες βαρύτητας συμπεριλαμβανομένων των: ΓΘΣ, Brans-Dicke, Πευπουσία (Quintessence), Δίλατον (Dilaton).

Η λαγκρανζιανή που περιγράφει αυτήν την θεωρία είναι της μορφής

$$L = \sum_{i=2}^5 L_i \quad , \quad (3.40)$$

όπου

$$L_2 = K(\phi, X) \quad , \quad (3.41)$$

$$L_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi \quad , \quad (3.42)$$

$$L_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4,X} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)] \quad , \quad (3.43)$$

$$L_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square \phi)^3 - 3(\square \phi) (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) + 2(\nabla^\mu \nabla_\alpha \phi) (\nabla^\alpha \nabla_\beta \phi) (\nabla^\beta \nabla_\mu \phi)] \quad . \quad (3.44)$$

Οι συναρτήσεις  $K$  και  $G_i (i = 3, 4, 5)$  εξαρτώνται από το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  και την κινητική του ενέργεια  $X = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi / 2$ , ενώ  $G_{\mu\nu}$  είναι ο ταυσιτής Einstein και  $R$  το βαθμωτό Ricci. Οι όροι  $G_{i,X}, G_{i,\phi}$  ( $i = 3, 4, 5$ ) ορίζονται ως μερικοί παράγωγοι των  $G_i$  ως προς τα  $X$  και  $\phi$  αντίστοιχα.

Η δράση που περιγράφει την θεωρία, λαμβάνοντας υπόψιν την ύλη που περιέχεται στο σύμπαν μέσω της λαγκρανζιανής  $L_m$ , αλλά και την θεώρησή της ως τέλειο ρευστό πίεσης  $p_m$  και ενεργειακής πυκνότητας  $\rho_m$  κατά την Κοσμολογία, θα είναι

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (L + L_m) \quad . \quad (3.45)$$

Θεωρούμε πως το σύμπαν είναι επίπεδο οπότε χρησιμοποιούμε την μετρική Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) της μορφής

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + a^2(t) dx^2 \quad , \quad (3.46)$$

όπου  $N(t)$  η παρεκλίνοσα συνάρτηση και  $a(t)$  ο παράγοντας κλίμακας.

Αν μεταβάλλουμε την δράση  $S$  ως προς το βαθμωτό πεδίο  $\phi$ , οδηγούμαστε τελικά στην εξίσωση εξέλιξης του

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (a^3 J) = P_\phi \quad , \quad (3.47)$$

όπου

$$J \equiv \dot{\phi} K_{,X} + 6H X G_{3,X} - 2\dot{\phi} G_{3,\phi} + 6H^2 \dot{\phi} (G_{4,X} + 2X G_{4,XX}) - 12H X G_{4,\phi X} + 2H^3 X (3G_{5,X} + 2X G_{5,XX}) + 6H^2 \dot{\phi} (G_{5,\phi} + X G_{5,\phi X}) \quad (3.48)$$

$$P_\phi \equiv K_{,\phi} - 2X (G_{3,\phi\phi} + \ddot{\phi} G_{3,\phi X}) + 6(2H^2 + \dot{H}) G_{4,\phi} + 6H (\dot{X} + 2H X) G_{4,\phi X} - 6H^2 X G_{5,\phi\phi} + 2H^3 X \dot{\phi} G_{5,\phi X} \quad . \quad (3.49)$$



Μεταβάλλοντας την δράση της σχέσης (3.45) ως προς  $N(t)$  και  $a(t)$  αντίστοιχα και θέτοντας  $N = 1$  καταλήγουμε στις τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann κατά την θεωρία Horndeski[12]

$$\begin{aligned} & 2XK_{,X} - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} - 6H^2G_4 + 24H^2X(G_{4,X} + XG_{4,XX}) \\ & - 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} + 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) \\ & - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) = -\rho_m \quad , \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & K - 2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 - 12H^2XG_{4,X} - 4H\dot{X}G_{4,X} - 8\dot{H}XG_{4,X} \\ & - 8HX\dot{X}G_{4,XX} + 2(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi})G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} + 4X(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi})G_{4,\phi X} \\ & - 2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4HX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} \\ & + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} = -p_m \quad , \end{aligned} \quad (3.51)$$

όπου οι τελείες συμβολίζουν παραγωγίσεις ως προς τον χρόνο  $t$ , ενώ έχουμε ακόμη αντικαταστήσει την παράμετρο του Hubble  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ .

Η εξίσωση εξέλιξης για την ύλη παίρνει την μορφή

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (3.52)$$

### 3.4.2 Θεωρία Μη Ελάσσονος Σύζευξης Παραγώγων

Άλλη μια θεωρία βαρύτητας προκύπτει όταν ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  αλληλεπιδρά μέσω μη ελάσσονος σύζευξης παραγώγου (*nonminimal derivative coupling*) με την καμπυλότητα [39], [38]. Η δράση που περιγράφει αυτήν την θεωρία βαθμωτού-τανυστή είναι [8]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mu\nu} - \zeta G_{\mu\nu})\phi^{,\mu}\phi^{,\nu} - V(\phi) \right] + S_m + S_r \quad , \quad (3.53)$$

όπου  $\zeta$  η παράμετρος σύζευξης με διαστάσεις  $m^{-2}$  και  $V(\phi)$  το βαθμωτό δυναμικό. Για την μελέτη ενός ρεαλιστικού κοσμολογικού μοντέλου, συμπεριλαμβάνουμε τις συνήθεις δράσεις ύλης και ακτινοβολίας  $S_m$  και  $S_r$  αντίστοιχα, που αναπαρίστανται από ένα ρευστό ενεργειακής πυκνότητας  $\rho_m$  και πίεσης  $p_m$  (συνιστώσα ύλης) καθώς και μια συνιστώσα ακτινοβολίας με ενεργειακή πυκνότητα  $\rho_r$  και πίεση  $p_r$ . Μεταβάλλοντας την δράση ως προς  $g_{\mu\nu}$  καταλήγουμε στις Εξισώσεις Πεδίου

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + \zeta\Theta_{\mu\nu}) - 8\pi Gg_{\mu\nu}V(\phi) \quad , \quad (3.54)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\Theta_{\mu\nu}^{(1)} + \Theta_{\mu\nu}^{(2)} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R + 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi R_{\nu)}^\alpha - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} + \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta} + \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi \\ &\quad - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\Box\phi + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Μεταβάλλοντας την σχέση (3.53) ως προς  $\phi$  παίρνουμε την εξίσωση κίνησης του βαθμωτού πεδίου

$$(\varepsilon g^{\mu\nu} + \zeta G^{\mu\nu}) \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = V_\phi \quad , \quad (3.56)$$

με  $V_\phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$ . Γνωρίζοντας τα παραπάνω και θεωρώντας ένα χωρικά επίπεδο, κοσμολογικό μοντέλο με μετρική

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad (3.57)$$

όπου  $a(t)$  ο παράγοντας κλίμακας, μπορούμε να απλοποιήσουμε τις σχέσεις (3.54) και (3.56) στο ακόλουθο σύστημα

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} (\varepsilon + 9\zeta H^2) + V(\phi) + \rho_m + \rho_r \right] \quad , \quad (3.58)$$

$$2\dot{H}^2 + 3H^2 = -8\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left[ \varepsilon - \zeta \left( 2\dot{H}^2 + 3H^2 + \frac{4H\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) \right] - V(\phi) + p_m + p_r \quad , \quad (3.59)$$

$$\varepsilon (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + 3\zeta (H^2\ddot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^3\dot{\phi}) + V_\phi = 0 \quad , \quad (3.60)$$

με τις τελείες να συμβολίζουν παραγώγιση ως προς τον χρόνο και το  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ .

Παρατηρούμε πως οι Εξισώσεις Πεδίου περιέχουν δεύτερης τάξης παραγώγους ως προς  $g_{\mu\nu}$  και  $\phi$ . Συνεπώς από φυσική άποψη η θεωρία αυτή αποτελεί μια καλή δυναμική θεωρία.

### 3.5 Οι f(R) θεωρίες ως υποπερίπτωση των θεωριών Βαθμωτού-Τανυστή

Μεταξύ των f(R) θεωριών βαρύτητας και των Βαθμωτού-Τανυστή (Scalar-Tensor theories) προκύπτει μια δυναμική ισοδυναμία, την οποία θα μελετήσουμε παρακάτω μέσω της πιο απλής περίπτωσης μιας λαγκρανζιανής τέταρτης τάξης.

Η δράση που περιγράφει μια θεωρία f(R) όπως έχουμε ήδη ανεφέρει είναι

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m \quad , \quad (3.61)$$

όπου

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m \quad . \quad (3.62)$$

η δράση της ύλης και  $L_m$  η λαγκρανζιανή της.

Μέσω της μεταβολής της δράσης σχέση (3.61) ως προς τον όρο  $g_{\mu\nu}$  καταλήγουμε μέσω πράξεων (που έγιναν στο υποκεφάλαιο 3.1) στις εξισώσεις κίνησης

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f_R} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - R f_R) + f_{R,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square f_R \right] + \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{f_R} \quad , \quad (3.63)$$

όπου  $G_{\mu\nu}$  και  $T_{\mu\nu}$  οι τανυστές Einstein και ενέργειας-ορμής αντίστοιχα.

Θα θεωρήσουμε στην συνέχεια την δράση μιας θεωρίας βαθμωτού-τανυστή, που επιλέγουμε σε αυτή την περίπτωση να είναι αυτή της Πεμπτουσίας (Quintessence). Η Πεμπτουσία είναι

μια υποθετική μορφή (σκοτεινής) ενέργειας κενού, που αναπαρίσταται από ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$ . Εισήχθη ως μια προσπάθεια εξήγησης της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος αντί αυτής της κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda$  που αποτελεί επίσης υποθετική πηγή σκοτεινής ενέργειας. Η Πεμπτουσία διαφέρει από την κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$ , καθώς αποτελεί δυναμική θεώρηση της ενέργειας κενού δηλαδή μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο [22]. Η δράση που περιγράφει αυτή την θεωρία βαθμωτού-τανυστή είναι της μορφής

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi) + (R - \phi)f'(\phi)] + S_m \quad . \quad (3.64)$$

Μεταβάλλοντας την τελευταία σχέση ως προς τον μετρικό τανυστή, παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης [20]

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(\phi)} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f(R) - \phi f'(\phi)) + f'(\phi)_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square f'(\phi) \right] + \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{f'(\phi)} \quad , \quad (3.65)$$

ενώ μια μεταβολή ως προς το βαθμωτό πεδίο  $\phi$  δίνει την εξίσωση

$$(R - \phi) f''(\phi) = 0 \quad . \quad (3.66)$$

Ως συνέπεια των παραπάνω είναι εύκολο να συμπαιράνουμε, πως υπό την προϋπόθεση ότι για την συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $f''(\phi) \neq 0$ , η εξίσωση (3.65) συμπίπτει με την (3.63) για την λύση της εξίσωσης (3.66), δηλαδή όταν

$$R = \phi \quad . \quad (3.67)$$

Συνεπώς προκύπτει ότι οι  $f(R)$  θεωρίες βαρύτητας αποτελούν υποπερίπτωση των θεωριών Βαθμωτού-Τανυστή σε σύστημα Jordan.



## Κεφάλαιο 4

# Το Πρόβλημα της Κοσμολογικής Διαφοροποίησης στη σταθερά $H_0$ του Hubble

Τα τελευταία δεδομένα του 2018, που έδωσε ο δορυφόρος Planck [40] για το φάσμα της θερμοκρασίας και των ανισοτροπιών της πόλωσης της Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου (CMB), μας παρείχαν μια εξαιρετική επιβεβαίωση του πρότυπου κοσμολογικού μοντέλου  $\Lambda$  Cold Dark Matter (ΛCDM). Ωστόσο κάποιες ανωμαλίες και διαφορές μεταξύ του Planck και ανεξάρτητων κοσμολογικών ανιχνευτών, παρουσιάζουν αποκλίσεις άνω του 3σ που εδραιώνονται όλο και περισσότερο, δικαιολογώντας έτσι πιθανές επεκτάσεις του πρότυπου κοσμολογικού μοντέλου.

Το πιο διάσημο πρόβλημα που ανακύπτει είναι η διαφοροποίηση στην τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$  (Hubble constant  $H_0$  tension) μεταξύ της εκτίμησης που δίνει το CMB, υπό την θεώρηση του ΛCDM, και των άμεσων τοπικών μετρήσεων κλίμακας αποστάσης.

### 4.1 Τα Δεδομένα του Προβλήματος

Η σταθερά του Hubble  $H_0$ , μετρά τον σημερινό ρυθμό διαστολής του σύμπαντος και είναι αδιαμφισβήτητα ένα από τα πιο σημαντικά παρατηρήσιμα κοσμολογικά μεγέθη. Η ομάδα Planck εκτίμησε την τιμή της σταθεράς [41] ίση με  $H_0 = 67.27 \pm 0.60$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης, αλλά αυτή η τιμή εξαρτάται από το μοντέλο και επηρεάζεται από τον εκφυλισμό με τις υπόλοιπες παραμέτρους του. Αυτή η τιμή βρίσκεται σε ασυμφωνία της τάξης του 3.3σ με το 2.4% της προσδιοριζόμενης τιμής της σταθεράς  $H_0$ , από τον Riess (2016) [42],  $H_0 = 73.24 \pm 1.74$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης, που βασίστηκε στην ανάλυση των παρατηρήσεων του Διαστημικού Τηλεσκοπίου Hubble (HST), χρησιμοποιώντας τέσσερις γεωμετρικές βαθμονομήσεις απόστασης των Κηφείδων. Επιπλέον, η διαφορά αυξάνεται στο 3.6σ αν θεωρήσουμε το 2.4% της εκτιμώμενης τιμής της σταθεράς από τον Riess (2018) [43],  $H_0 = 73.48 \pm 1.66$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης, που περιλαμβάνει μετρήσεις παράλλαξης επτά Κηφείδων μακράς περιόδου του Milky Way.

Η διαφορά αυξάνεται σε 4.4σ με την τελευταία εκτίμηση της σταθεράς του Hubble το 2019, από την ομάδα SH0ES (R19) [44],  $H_0 = 73.08 \pm 1.42$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης, που προέκυψε χρησιμοποιώντας τις παρατηρήσεις 70 Κηφείδων μεγάλης περιόδου στο Μέγα Νέφος του Μαγγελάνου, από το τηλεσκόπιο Hubble.

Επιπλέον η ομάδα H0LiCOW το 2018 [45] εκτίμησε την σταθερά,  $H_0 = 72.5^{+2.1}_{-2.3}$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης και την 2.4% εκτιμώμενη τιμή της H0LiCOW το 2019 [46] ίση με  $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8}$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης. Συνεπώς αν συνδιάσουμε τις πιο πρόσφατες εκτιμήσεις, για το σύμπαν (H0LiCOW και SH0ES 2019) θα έχουμε,  $H_0 = 73.8 \pm 1.1$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης, εμφανίζοντας μια

διαφορά 5.3σ με τις τιμές του πρώιμου σύμπαντος όπως ελήφθησαν από το  $\Lambda$ CDM, καταλήγοντας σε ένα σύμπαν που διαστέλλεται γρηγορότερα σε μεταγενέστερο χρόνο σε αντίθεση με ένα που κυριαρχείται από την κοσμολογική σταθερά.

Τελικά μεταξύ και άλλων πολλών αποτελεσμάτων που προκύπτουν από διαφορές μετρήσεις, μέσω των: διαφορετικών συνδιασμών Βαρυονικών Ακουστικών Ταλαντώσεων (Baryon Acoustic Oscillation, BAO) [58]-[60], του πειράματος Επισκοπήσης Σκοτεινής Ενέργειας (Dark Energy Survey, DES) [61]-[63], ή από υπερκαινοφανείς αστέρες από τον πρόσφατο κατάλογο Pantheon [64], αναφέρουμε και την εκτίμηση της σταθεράς του Hubble όπως ελήφθη, θεωρώντας την κοσμολογική διαστολή της απόστασης της φωτεινότητας [47],  $H_0 = 73.35 \pm 1.68 \text{ km/s/Mpc}$  σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης. Η τιμή συμφωνεί με αυτή της SH0ES, αλλά διαφέρει κατά 4.5σ από αυτή του Planck 2018.

## 4.2 Πιθανοί Τρόποι Επίλυσης του Προβλήματος

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα αναφερθούμε στις πιθανές λύσεις του προβλήματος που αποτελούν επεκτάσεις του μοντέλου  $\Lambda$ CDM.

### Ο Ενεργός Αριθμός Σχετικιστικών Βαθμών Ελευθερίας

Μία από τις πιο γνωστές επεκτάσεις και προτεινόμενες λύσεις στην βιβλιογραφία για την επίλυση της διαφοράς στην σταθερά  $H_0$ , θεωρείται η δυνατότητα να έχουμε επιπλέον σχετικιστικούς βαθμούς ελευθερίας στην επανασύνδεση. Παραμετροποιούμε την πυκνότητα ακτινοβολίας  $\rho_r$  ως συνάρτηση της πυκνότητας φωτονίων  $\rho_\gamma$

$$\rho_r = \left[ 1 + \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} N_{eff} \right] \rho_\gamma \quad , \quad (4.1)$$

όπου  $\left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{T_\nu}{T_\gamma}$  ο λόγος μεταξύ των θερμοκρασιών υποβάθρου των νετρίνων και των φωτονίων που προέρχονται από την προσέγγιση μιας ακαριαίας αποσύνδεσης νετρίνων. Ο αριθμός  $N_{eff}$  αναμένεται να ισούται με 3.046 για τρεις ενεργές, άμαζες οικογένειες νετρίνων [24]. Αν έχουμε περισσότερους σχετικιστικούς βαθμούς ελευθερίας, έχουμε περισσότερη ακτινοβολία και μπορούμε να μετρήσουμε την επίδραση στο φάσμα θερμοκρασίας του CMB από την επικάλυψη και την μεταβολή των ακουστικών κορυφών στην αποσβεννύμενη ουρά του [25]. Αν αφήσουμε την παράμετρο  $N_{eff}$  ελεύθερη να μεταβληθεί, γνωρίζοντας τον εκφυλισμό των  $N_{eff}$  και  $H_0$ , το  $H_0$  θα αυξανόταν έως ότου πάρει την τιμή πρόσθετης ακτινοβολίας στην επανασύνδεση, λόγω επιπρόσθετων σχετικιστικών ειδών, όπως για παράδειγμα θερμών αξιονίων [48]-[52]. Με τα επιπλέον δεδομένα πόλωσης από το Planck και την νέα εκτίμηση  $\tau$ , που μετατοπίζουν την τιμή του  $N_{eff}$  σε μικρότερες τιμές λόγω της συσχέτισής τους, ένα επιπλέον ποσό σκοτεινής ακτινοβολίας που παράγει έναν αποτελεσματικό αριθμό νετρίνων διαφορετικής τιμής από την πρότυπη 3.046, δεν μοιάζει πια ως αποτελεσματική λύση στο πρόβλημα της σταθεράς  $H_0$ .

### Επέκταση Πολλών Παραμέτρων

Ένας άλλος πιθανός τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι η ομαδική μεταβολή των κοσμολογικών παραμέτρων, ώστε ένας κατάλληλος συνδιασμός τους να μπορεί να βελτιώσει το πρόβλημα. Παρότι το μοντέλο  $\Lambda$ CDM βρίσκεται σε καλή συμφωνία με τα δεδομένα, κάποιες υποθέσεις του και απλοποιήσεις που συμβαίνουν στην προσέγγιση των έξι παραμέτρων δεν δικαιολογούνται πια πλήρως. Μάλιστα η απλοποίηση μπορεί να είναι υπέρμετρη και να κρύβει κάποιες φυσικές πτυχές που είναι κινητήριες για την εξέλιξη του σύμπαντος. Με την μέθοδο των πολλών παραμέτρων μας δίνεται η δυνατότητα να μας οδηγήσουν τα ίδια τα δεδομένα,

αποφεύγοντας τυχόν αβεβαιότητες λόγω της επιλογής του μοντέλου. Δοκιμές έχουν γίνει μεταβάλλοντας 10, 11 ακόμη και 12 παραμέτρους την ίδια στιγμή [26]. Πιο συγκεκριμένα για το Planck (2018) για το σενάριο των 10 παραμέτρων παίρνουμε ,  $H_0 > 65.2$  km/s/Mpc σε 95% διάστημα εμπιστοσύνης, για 11 παραμέτρους,  $H_0 = 73_{-20}^{+10}$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης, ενώ για το σενάριο των 12 παραμέτρων,  $H_0 = 72 \pm 20$  km/s/Mpc σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης. Το συμπέρασμα αυτής της προσέγγισης των παραμέτρων είναι πως το  $H_0$  δεν προσδιορίζεται τόσο καλά, λόγω εκφυλισμών καθιστώντας το πρόβλημα ως υψηλής σημασίας.

## Η Καταστατική Εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας

Άλλη μια σημαντική επέκταση του  $\Lambda$ CDM που μπορούμε να θεωρήσουμε, αποτελεί μια συνιστώσα της σκοτεινής ενέργειας με καταστατική εξίσωση  $w$  διαφορετική του  $-1$ , δηλαδή διαφορετική μιας κοσμολογικής σταθεράς. Μεταβάλλοντας το  $w$  σημαίνει φυσικά πως αλλάζει ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος μέσω της πρώτης εξίσωσης του Friedmann. Η εκτίμηση που παίρνουμε (Planck 2018) είναι  $w = -1.58_{-0.35}^{+0.16}$  σε 68% διάστημα εμπιστοσύνης, που αντιστοιχεί σε  $H_0 > 69.9$  km/s/Mpc σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% , που λύνει το πρόβλημα της διαφοράς μειώνοντας την σε 2σ. Η τιμή της σταθεράς του Hubble στην πραγματικότητα δεν περιορίζεται αρκετά σε αυτό το μοντέλο, λόγω του γεωμετρικού εκφυλισμού που παρουσιάζει με την καταστατική εξίσωση της σκοτεινής ενέργειας  $w$ , έτσι μπορεί να βρίσκεται σε τέλεια συμφωνία με την εκτίμηση της SH0ES, με συμβολή στην τιμή μιας φανταστικής σκοτεινής ενέργειας. Αυτή η φανταστική σκοτεινή ενέργεια, παρουσιάζει ωστόσο διάφορα θεωρητικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα ότι παραβιάζει την συνθήκη  $\rho \geq |p|$ , κάτι που σημαίνει ότι η ύλη θα μπορούσε να κινηθεί πιο γρήγορα από το φως και ένας κινούμενος παρατηρητής θα μπορούσε να μετρήσει μια αρνητική πυκνότητα ενέργειας, ενώ η Χαμιλτονιανή θα παρουσίαζε αστάθειες κενού, λόγω της αρνητικής κινητικής ενέργειας.

Μία άλλη θεώρηση είναι αυτή όπου η εξίσωση της σκοτεινής ενέργειας μεταβάλλεται με την ερυθρομετατόπιση  $z$ , θεωρώντας την παρακάτω παραμετροποίηση [27], [28] της καταστατικής εξίσωσης  $w(a)$  με δύο παραμέτρους

$$w(a) = w_0 + (1 - a)w_a \quad , \quad (4.2)$$

όπου  $a$  είναι ο αδιάστατος παράγοντας κλίμακας με σημερινή τιμή ίση με την μονάδα. Αυτή η θεώρηση μειώνει την διαφορά στην σταθερά  $H_0$  σε 2σ.

## Πρώιμη Σκοτεινή Ενέργεια

Η πρώιμη σκοτεινή ενέργεια (Early Dark Energy, EDE) αποτελεί μία ακόμη πιθανή λύση που έχει προταθεί και ερευνάται. Σε αυτά τα μοντέλα, η Πρώιμη Σκοτεινή Ενέργεια συμπεριφέρεται ως μια κοσμολογική σταθερά των πρώιμων ετών του σύμπαντος ( $z \geq 3000$ ) που αργότερα αποσυντίθεται σαν ακτινοβολία ή γρηγορότερα. Για την περίπτωση της EDE ο ηχητικός ορίζοντας στην αποσύνδεση μειώνεται, με επακόλουθο μια μεγαλύτερη τιμή της σταθεράς του Hubble που προκύπτει από το CMB.

Δύο φυσικά μοντέλα που προτείνονται για την EDE είναι τα ακόλουθα [53]:

α) Ένα βαθμωτό πεδίο που ταλαντώνεται με  $V(\phi) \propto (1 - \cos[\phi/f])^n$  [30]. Στις απαρχές του σύμπαντος το πεδίο συμπεριφέρεται σαν μια κοσμολογική σταθερά, αλλά σε ένα συγκεκριμένο σημείο αρχίζει την ταλάντωση και συμπεριφέρεται σαν ρευστό με καταστατική εξίσωση  $w_n = (n - 1)/(n + 1)$ .

β) Ένα πεδίο που κυλάει αργά σε ένα δυναμικό που είναι γραμμικό του  $\phi$  στο πρώιμο σύμπαν και πλησιάζει ασυμπτωτικά το μηδέν σε μεταγενέστερο χρόνο.

Τα δύο μοντέλα εξαρτώνται από την τιμή του  $n$  και με βάση αυτό η ομογενής πυκνότητα

της EDE εξασθενεί σαν την ύλη ( $n = 1$ ), σαν την ακτινοβολία ( $n = 2$ ) ή πιο γρήγορα από αυτήν ( $n \geq 3$ ). Με βάση αυτά τα μοντέλα η απόκλιση από την εκτίμηση της SH0ES για την σταθερά του Hubble μειώνεται στο  $2\sigma$ ,  $1.8\sigma$  και  $2.2\sigma$  αντιστοίχως (με τις τιμές του  $n$ ) [29]. Ωστόσο σε αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα του Riess 2018 και των Βαρυονικών Ακουστικών Ταλαντώσεων που βρίσκονται δυνητικά σε διαφορά μεταξύ τους και μπορούν να επηρεάσουν τα αποτελέσματα. Επιπλέον χρησιμοποιούν δεδομένα του Planck 2015 αντί του 2018, όπου στο πρώτο η πόλωση που δόθηκε δεν είναι απολύτως αξιόπιστη. Επιπλέον τα μοντέλα της EDE πλήττονται από το πρόβλημα της “λεπτής ρύθμισης” (fine-tuning), αφού με σκοπό την επίλυση του προβλήματος της σταθεράς  $H_0$ , η πρωταρχική συνιστώσα σκοτεινής ενέργειας πρέπει να ενεργοποιηθεί περίπου την στιγμή που προκύπτει η ισότητα ύλης-ακτινοβολίας, και αυτές οι ποσότητες είναι πλήρως αποσυνδεδεμένες.

### Αλληλεπιδρούσα Σκοτεινή Ενέργεια

Μία ακόμη πιθανή λύση στο πρόβλημα που εξετάζουμε είναι να θεωρήσουμε πως η σκοτεινή ενέργεια (Dark Energy, DE) και η σκοτεινή ύλη (Dark Matter, DM) αλληλεπιδρούν (εκτός της βαρυτικής αλληλεπίδρασης). Στο μοντέλο της αλληλεπιδρούσας σκοτεινής ενέργειας (IDE) [32], [33] οι εξισώσεις διατήρησης της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας μπορούν να τροποποιηθούν με την εισαγωγή ενός ποσοστού αλληλεπίδρασης

$$Q = \xi H \rho_{DE} \quad , \quad (4.3)$$

ανάλογου του αναλλοίωτου βαθμού  $H$  του Hubble και της πυκνότητας σκοτεινής ενέργειας  $\rho_{DE}$ , μέσω μιας αρνητικής αδιάστατης παραμέτρου  $\xi$  που ποσοτικοποιεί την δύναμη της σύζευξης. Συνεπώς μέσω του παραπάνω μοντέλου με μια μη μηδενική σύζευξη ερευνάται η πιθανότητα επίλυσης του προβλήματος. [55], [56], [57]

### Τροποποιημένη Βαρύτητα

Μία ακόμη επέκταση του  $\Lambda$ CDM και πιθανή λύση στο πρόβλημα, αποτελεί η Τροποποιημένη Βαρύτητα. Αν η βαρύτητα είναι ασθενέστερη σε ενδιάμεσες κλίμακες από ότι αναμενόταν στην Γενική Σχετικότητα, τότε η εκτίμηση της σταθεράς του Hubble  $H_0$  από το CMB μπορεί να δίνει μεγαλύτερες τιμές.

Στην βιβλιογραφία προτείνονται διάφορες μέθοδοι πάνω στο κομμάτι της τροποποιημένης βαρύτητας, όπως είναι η ανακατασκευή των βαρυτικών θεωριών και των μοντέλων σκοτεινής ενέργειας σε κοσμολογικές κλίμακες, με βάση τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Ενεργού Θεωρίας Πεδίου (Effective Field Theory, EFT), η οποία περιορίζει την ελευθερία καθορισμού τέτοιων μοντέλων, στην επιλογή μιας ομάδας συναρτήσεων που ανακατασκευάζονται αναλόγως των κοσμικών έτων που εξετάζονται [35]. Με βάση την προσέγγιση της Ενεργού Θεωρίας Πεδίου, κάποια μοντέλα όπως το Βαθμωτό Horndeski (Scalar Horndeski) και το Πλήρες Horndeski (Full Horndeski) είναι υποψήφια για την επίλυση της διαφοράς στην εκτίμηση της τιμής της σταθεράς  $H_0$ , μεταξύ των Planck και R19.

Σε ένα άλλο μοντέλο η Ενεργός Θεωρία Πεδίου εφαρμόζεται σε μια βαρυτική θεωρία με στρέψη (Torsional Gravity). Η χρήση της μας επιτρέπει την συστηματική μελέτη των εξισώσεων εξέλιξης στα επίπεδα του υποβάθρου και των διαταραχών ξεχωριστά, με τρόπο ανεξάρτητο του μοντέλου, εξετάζοντας τον ρόλο των συντελεστών στην επίλυση του προβλήματος. Η EFT εφαρμόζεται και πιο συγκεκριμένα στην  $f(T)$  βαρύτητα, όπου το  $T$  είναι το βαθμωτό της στρέψης. Επιβάλλοντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες στην τελική σχέδαση, αναπαράγοντας το σενάριο του  $\Lambda$ CDM και επιβάλλοντας ακόμη τις πιο πρόσφατες τιμές των τοπικών μετρήσεων, τα μοντέλα  $f(T)$  που περιγράφονται από την παραμετροποίηση

$$f(T) = -T - 2\Lambda/M_p^2 + aT^\beta \quad , \quad (4.4)$$



θα μπορούσαν να λύσουν το πρόβλημα. Συγκεκριμένα μελετώνται δύο μοντέλα σε αυτήν την περίπτωση [34] που δίνουν (αριθμητικά) τις παρακάτω συναρτησιακές μορφές για την επίλυση του προβλήματος της σταθεράς  $H_0$

$$f(T) \approx 375.47 \left( \frac{T}{6H_0^2} \right)^{-1.65}, \quad (4.5)$$

και

$$f(T) \approx 375.47 \left( \frac{T}{6H_0^2} \right)^{-1.65} + 25T^{1/2}. \quad (4.6)$$

Φυσικά χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες μπορούμε να θεωρήσουμε και επιπλέον επεκτάσεις, δηλαδή και άλλα μοντέλα όπως για παράδειγμα αυτό της  $f(T, B)$  βαρύτητας όπου το  $B$  είναι η συνοριακή συνθήκη  $B = -2\nabla_\mu T_\nu^{\nu\mu}$ . Ωστόσο λείπει ένα fit των δεδομένων και των παραπάνω μοντέλων ώστε να κατανοήσουμε τον βαθμό της αποτελεσματικότητάς τους στην επίλυση του προβλήματος που μελετάμε.

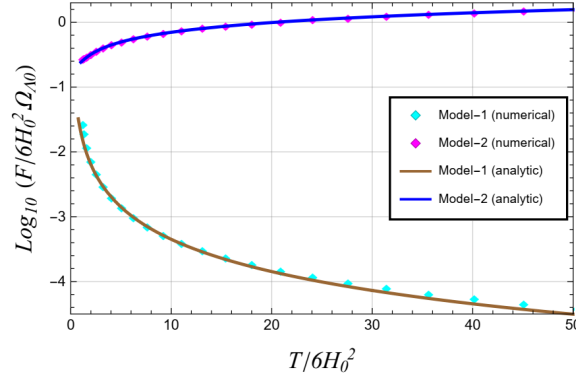


Figure 4.1: Ανακατασκευή των δύο  $f(T)$  μοντέλων. Οι κυανοί και ματζέντα ρόμβοι αντιπροσωπεύουν τα αριθμητικά αποτελέσματα των μοντέλων 1, 2 που προτείνουν οι συγγραφείς του [34], αντίστοιχα. Οι καφέ και μπλέ καμπύλες είναι οι παραμετροποιήσεις που δίνονται από τις εξισώσεις (4.5) και (4.6) αντίστοιχα.

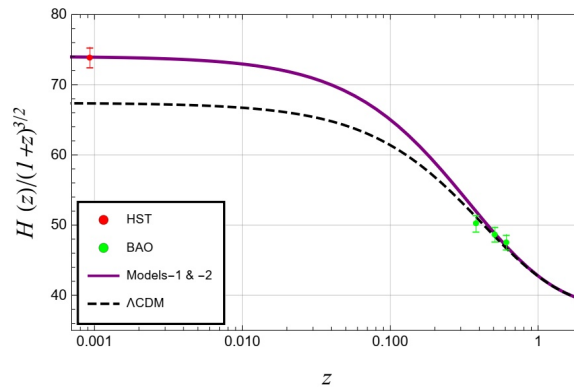


Figure 4.2: Η χρονική εξέλιξη της παραμέτρου του Hubble  $H(z)$  με βάση τα δύο μοντέλα  $f(T)$  που προαναφέραμε, (μωβ καμπύλη) και την κοσμολογία κατά το μοντέλο  $\Lambda$ CDM (μάυρη διακεκομμένη γραμμή). Τα πράσινα σημεία είναι δεδομένα από μετρήσεις Βαρυονικών Ακουστικών Ταλαντώσεων από το SDSS-III DR12 [36], ενώ το κόκκινο σημείο αντιπροσωπεύει την τελευταία μέτρηση από εξωγαλαξιακούς Κηφείδες εκ των δεδομένων των υπερκαινοφανών τύπου Ia, για το  $H_0$ .

Στην βιβλιογραφία μπορούμε να δούμε ακόμη περισσότερα μοντέλα που χρησιμοποιούνται ως υποψήφια για την λύση του προβλήματος, εκτός των μοντέλων για τα οποία κάναμε λόγο παραπάνω .

Σε αυτήν την εργασία θα επιχειρήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα της διαφοράς στην τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$ , μέσω της θεωρίας της τροποποιημένης βαρύτητας που αναφέραμε παραπάνω και πιο συγκεκριμένα με την βοήθεια της θεωρίας Horndeski.

## Κεφάλαιο 5

# Αντιμετώπιση του Προβλήματος της σταθεράς $H_0$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να μειώσουμε την κοσμολογική διαφοροποίηση στην τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$ , χρησιμοποιώντας την θεωρία Horndeski. Όπως αναφέραμε στο τρίτο κεφάλαιο, η λαγκρανζιανή που περιγράφει την θεωρία αυτή είναι (όλοι οι όροι έχουν επεξηγηθεί στο τρίτο κεφάλαιο)

$$L = \sum_{i=2}^5 L_i \quad , \quad (5.1)$$

όπου

$$L_2 = K(\phi, X) \quad , \quad (5.2)$$

$$L_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi \quad , \quad (5.3)$$

$$L_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4,X} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)] \quad , \quad (5.4)$$

$$L_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square \phi)^3 - 3(\square \phi) (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) + 2(\nabla^\mu \nabla_\alpha \phi) (\nabla^\alpha \nabla_\beta \phi) (\nabla^\beta \nabla_\mu \phi)] \quad . \quad (5.5)$$

Θεωρήσαμε το σύμπαν μας επίπεδο, γεμάτο με τέλειο ρευστό και χρησιμοποιήσαμε την μετρική FLRW της μορφής (3.46). Μεταβάλλοντας την δράση (3.45) ως προς  $N(t)$  και  $a(t)$ , για  $N = 1$ , πήραμε τις εξισώσεις Friedmann υπό την θεώρηση της Horndeski

$$\begin{aligned} 2XK_{,X} - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,X} - 6H^2G_4 + 24H^2X(G_{4,X} + XG_{4,XX}) \\ - 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} + 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) \\ - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) = -\rho_m \quad , \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} K - 2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 - 12H^2XG_{4,X} - 4H\dot{X}G_{4,X} - 8\dot{H}XG_{4,X} \\ - 8HX\dot{X}G_{4,XX} + 2(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi})G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} + 4X(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi})G_{4,\phi X} \\ - 2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4HX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} \\ + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} = -p_m \quad , \end{aligned} \quad (5.7)$$

ενώ με μεταβολή της ίδιας δράσης ως προς το βαθμωτό πεδίο  $\phi$ , οδηγούμαστε τελικά στην εξίσωση εξέλιξης του

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(a^3 J) = P_\phi \quad , \quad (5.8)$$

όπου

$$J \equiv \dot{\phi} K_{,X} + 6H X G_{3,X} - 2\dot{\phi} G_{3,\phi} + 6H^2 \dot{\phi} (G_{4,X} + 2X G_{4,XX}) - 12H X G_{4,\phi X} + 2H^3 X (3G_{5,X} + 2X G_{5,XX}) + 6H^2 \dot{\phi} (G_{5,\phi} + X G_{5,\phi X}) \quad (5.9)$$

$$P_\phi \equiv K_{,\phi} - 2X (G_{3,\phi\phi} + \ddot{\phi} G_{3,\phi X}) + 6(2H^2 + \dot{H}) G_{4,\phi} + 6H (\dot{X} + 2H X) G_{4,\phi X} - 6H^2 X G_{5,\phi\phi} + 2H^3 X \dot{\phi} G_{5,\phi X} \quad (5.10)$$

Με βάση τις εξισώσεις (5.6), (5.7) και (5.8) (στην οποία αντικαθιστούμε τις σχέσεις (5.9), (5.10)) επιχειρήσαμε να επιλύσουμε αριθμητικά, το πρόβλημα της διαφοροποίησης στην τιμή της σταθεράς  $H_0$ , μέσω του προγράμματος Wolfram Mathematica.

Στο Wolfram Mathematica ορίσαμε αρχικά όλες τις απαραίτητες ποσότητες, όπως

- την πυκνότητα της ύλης:  $\rho_m = \rho_{m0}/a^3$ ,
- την πίεση της ύλης:  $p_m = 0$ ,
- την πυκνότητα της ακτινοβολίας:  $\rho_r = \rho_{r0}/a^4$ ,
- την παράμετρο του Hubble:  $H(t) = \dot{a}/a$ ,
- την παράμετρο πυκνότητας για την ύλη:  $\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m$ ,
- την παράμετρο πυκνότητας για την ακτινοβολία:  $\Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_r$ ,
- την κοσμολογική ερυθρομετάθεση (*redshift*)  $z$ :  $z = -1 + a_0/a$ .

Στην συνέχεια ορίσαμε τους απαραίτητους όρους που απαρτίζουν τις εξισώσεις δηλ

- την κινητική ενέργεια:  $X = \dot{\phi}^2/2$ ,
- την συνάρτηση:  $K = -V_0 \phi + X$ , έτσι οι μερικές παράγωγοι ως προς  $X$ ,  $\phi$  προκύπτουν  $K_X = 1$  και  $K_\phi = -V_0$  αντίστοιχα.

Επιλέξαμε τους όρους  $G_i$ , ( $i = 3, 4, 5$ ) των παραπάνω εξισώσεων ίσους με

- $G_3 = 0$ ,
- $G_4 = 1/2$ ,
- $G_5 = X^2$ ,

όπου με βάση τα προηγούμενα, οι υπόλοιποι όροι  $G_{i,X}$ ,  $G_{i,\phi}$ ,  $G_{i,\phi\phi}$ ,  $G_{i,\phi X}$ ,  $G_{i,XX}$ , ( $i = 3, 4, 5$ ), είναι ίσοι με μηδέν, πλην των  $G_{5,X} = 2X$  και  $G_{5,XX} = 2$ .

Θέτοντας ακόμη:  $G = 1/8\pi$ ,  $V_0 = 0.1$ ,  $\rho_{m0} = 8.3$ ,  $\rho_{r0} = 0.7$ , αλλά και τις αρχικές συνθήκες

- αρχικός χρόνος:  $t_0 = 1.001s$ ,
- τελικός χρόνος:  $t_f = 4.8s$ ,
- $a(t_0) = 1.05$ ,  $a'(t_0) = 1.75$ ,
- $\phi(t_0) = 1.02$ ,  $\phi'(t_0) = 0.23877$ .

Έτσι λύνουμε αριθμητικά τις εξισώσεις (5.7) και (5.8) ως προς  $a$ ,  $\phi$ .

Με βάση τις λύσεις του παραπάνω συστήματος, το αποτέλεσμα σχετικά με την εξέλιξη του  $a$  ως προς την ερυθρομετάθεση  $z$ , φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα (Figure 5.1).

Από την παρακάτω γραφική παράσταση, παρατηρούμε πως το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε, συμφωνεί με τις προβλέψεις του  $\Lambda$ CDM και των παρατηρησιακών δεδομένων για τον παράγοντα κλίμακας  $a$  (σχέση (2.22)) σε επίπεδο σύμπαν ( $k=0$ ).

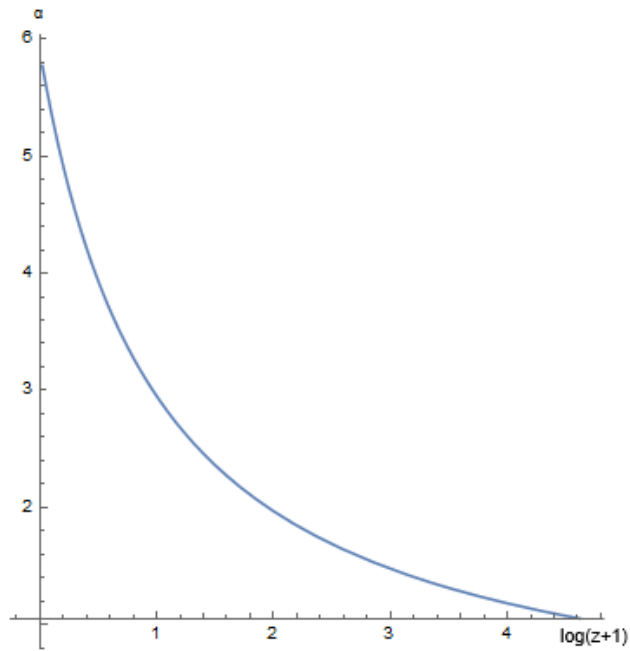


Figure 5.1: Η χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας  $a$  με την ερυθρομετάθεση.

Ένα ακόμη αποτέλεσμα που παίρνουμε αφορά την ποσότητα  $\Omega_m$  και την εξέλιξή της με την ερυθρομετάθεση  $z$ :

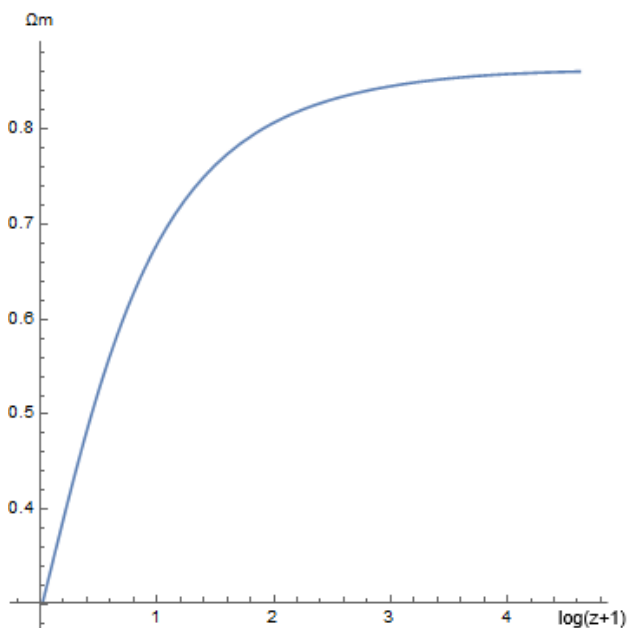


Figure 5.2: Η χρονική εξέλιξη της παραμέτρου πυκνότητας  $\Omega_m$  με την ερυθρομετάθεση  $z$ .

Με βάση την τελευταία γραφική παράσταση, παρατηρούμε πως η παραμέτρος πυκνότητας  $\Omega_m$ , μειώνεται από μια αρχική τιμή 0.85 για  $z < 500$  σε μια τιμή  $\Omega_{m0} = 0.3$  για  $z$  στο μηδέν, κάτι που συμφωνεί σε μεγάλο βαθμό με τα παρατηρησιακά μας δεδομένα. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις η τιμή αυτής της ποσότητας έφτασε στην κορύφωσή της ( $\Omega_m \approx 1$ ) κατά την εποχή που ονομάζουμε “εποχή κυριαρχίας της ύλης” μεταξύ 47000 και 9.8 δισεκατομμυρίων ετών μετά το “Big Bang”, δηλαδή όταν η πυκνότητα της ύλης (μη-σχετικιστικά σωματίδια) κυριάρχησε έναντι των πυκνοτήτων ενέργειας της ακτινοβολίας και αυτής του κενού, που απαρτίζουν το σύμπαν μας. Έπειτα μειώθηκε έως ότου έφτασε στην σημερινή τιμή της που προκύπτει περίπου 0.3 για  $z = 0$ .

Ακόμη, εξάγαμε την γραφική παράσταση της παραμέτρου πυκνότητας ακτινοβολίας  $\Omega_r$  συναρτήσει της κοσμικής ερυθρομετάθεσης

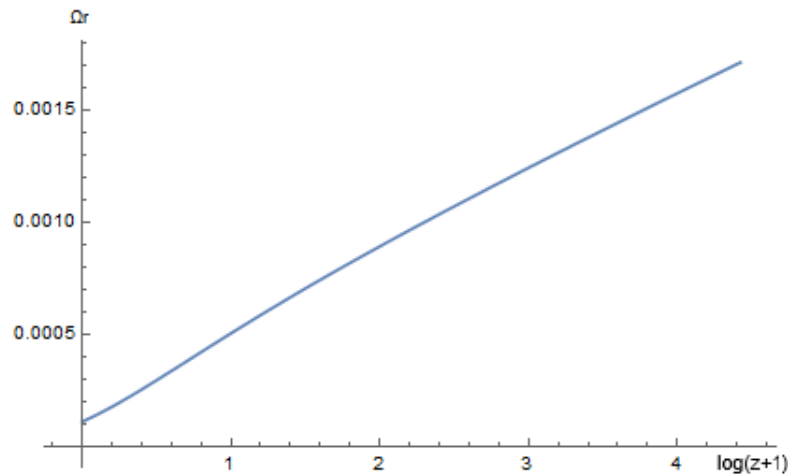


Figure 5.3: Η χρονική εξέλιξη της παραμέτρου πυκνότητας  $\Omega_r$  με την ερυθρομετάθεση  $z$ .

Παρατηρούμε πως η τιμή αυτής της παραμέτρου είναι ιδιαίτερα χαμηλή για  $z$  περίπου 200 και μειώνεται συνεχώς έως σχεδόν μηδενισμού της καθώς πλησιάζουμε την τιμή  $z = 0$ , που αντιστοιχεί στο σήμερα. Και από αυτό το αποτέλεσμα βλέπουμε πως το μοντέλο μας συμφωνεί σε ικανοποιητικό βαθμό με τα παρατηρησιακά δεδομένα από τα οποία αντλούμε την πληροφορία πως η τιμή της παραμέτρου σήμερα, είναι περίπου  $\Omega_{r0} \approx 10^{-4}$ , αφού η πυκνότητα της ακτινοβολίας στο σύμπαν μας έχει εξασθενήσει σημαντικά.

Στα πρώτα στάδια μετά το Big Bang, την “εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας”, η ενέργεια είχε κυρίως την μορφή ακτινοβολίας, δηλαδή η τιμή της ποσότητας  $\Omega_r$  υπερτερούσε κατά πολύ των  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ . Στην συνέχεια με την διαστολή του σύμπαντος, η θερμοκρασία του μειώθηκε και τον ρόλο της κυριαρχούσας συνιστώσας πήρε η ύλη (περίπου 47000 έτη μετά το Big Bang), όπως αναφέραμε και παραπάνω.

Εστιάζοντας στο βασικό πρόβλημα της διαφοροποίησης στην τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$ , συγκρίνουμε το αποτέλεσμα που δίνει το μοντέλο  $\Lambda$ CDM για την παράμετρο  $H$  του Hubble, σε επίπεδο σύμπαν, σύμφωνα με την σχέση [37]

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} (1+z)^3 + 1 - \Omega_{m0}} \quad , \quad (5.11)$$

(όπου  $H_0 = 67.27 \text{ km/Mpc/s}$  και  $\Omega_{m0} = 0.3$ ), με το αποτέλεσμα του μαθηματικού μας μοντέλου κατά την θεωρία Horndeski, που επιλύσαμε αριθμητικά, με στόχο την μείωση της διαφοράς μεταξύ του θεωρητικού μας μοντέλου και των εκτιμήσεων από άμεσες μετρήσεις.

Έτσι προέκυψε η παρακάτω γραφική παράσταση (Figure 5.4)

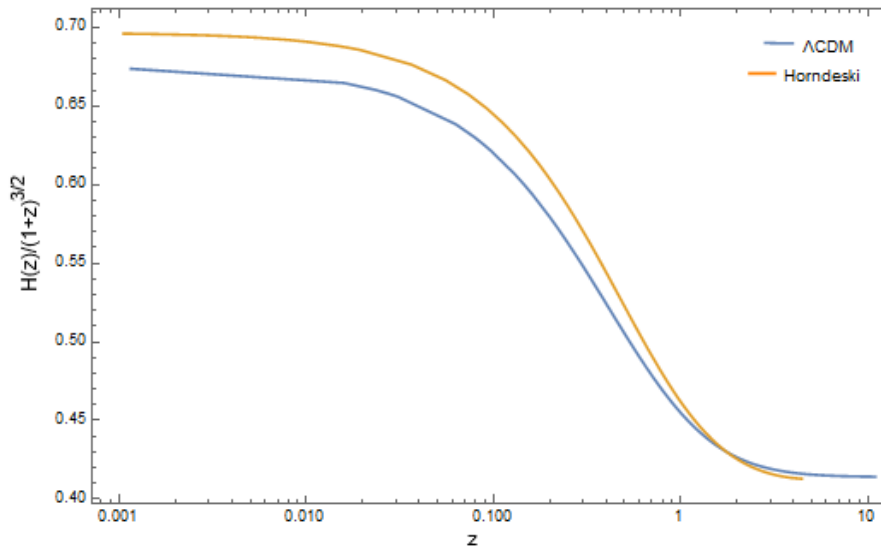


Figure 5.4:  $H$  χρονική εξέλιξη της παραμέτρου του Hubble  $H$  σε σχέση με την ερυθρομετάθεση  $z$ , με βάση τα μοντέλα  $\Lambda$ CDM (κυανή γραμμή) και το μοντέλο μας που προέκυψε με βάση της θεωρία Horndeski (πορτοκαλί γραμμή).

Με βάση την τελευταία γραφική, παρατηρούμε πως για μεγάλα  $z$  ( $z \approx 10$ ) η τιμή της σταθεράς του Hubble που περιγράφει το μέτρο της διαστολής του σύμπαντος, σύμφωνα με το μοντέλο μας (κυανή γραμμή) είναι ιδιαίτερα μικρή κάτι που συμφωνεί με τα παρατηρησιακά μας δεδομένα και το  $\Lambda$ CDM (πορτοκαλί γραμμή). Για  $z$  κοντά στο μηδέν (σήμερα) η τιμή που δίνει το μοντέλο μας έχει αυξηθεί, προσεγγίζοντας το αποτέλεσμα που δίνει το μοντέλο  $\Lambda$ CDM, δίνει ωστόσο μεγαλύτερη εκτιμώμενη τιμή από αυτή του  $\Lambda$ CDM για την σταθερά  $H_0$ , που είναι και το επιθυμητό αποτέλεσμα αυτής της εργασίας.

Συνεπώς το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε επιφέρει ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα και μπορεί να παίξει τον ρόλο μιας πιθανής λύσης του προβλήματος της σταθεράς  $H_0$ .

Σε μελλοντική εργασία θα μελετήσουμε εκτενέστερα και άλλες συναρτήσεις της θεωρίας Horndeski, που μπορούν να είναι πιθανές λύσεις του προβλήματος της διαφοροποίησης στην τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$ , μεταξύ άμεσων μετρήσεων και εκτιμήσεων από την θεωρία.





# Επίλογος

Το θέμα που πραγματεύτηκε η εν λόγω διπλωματική εργασία, είναι το πρόβλημα της κοσμολογικής διαφοροποίησης στο  $H_0$ , μέσω τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας και συγκεκριμένα μέσω της θεωρίας Horndeski. Σκοπός της εκπόνησής της είναι η μείωση της διαφοράς αυτής, με την κατασκευή μιας πιθανής λύσης που προκύπτει από την θεωρία Horndeski.

Για την επίτευξη του στόχου μας, μελετήσαμε τις απαραίτητες θεωρίες βαρύτητας και τις εφαρμογές τους στην κοσμολογία, καθώς και τα μεγέθη από τα οποία περιγράφονται.

Αρχικά μελετήσαμε την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, την υποκείμενη θεωρία βαρύτητας στο καθιερωμένο μοντέλο  $\Lambda$ CDM. Η Γενική Σχετικότητα αποτελεί μέχρι σήμερα την ικανοποιητικότερη περιγραφή της βαρύτητας. Πρόκειται για μια θεωρία όπου η βαρύτητα δεν θεωρείται ως το αποτέλεσμα μιας δύναμης, αλλά οφείλεται στην καμπύλωση του χωροχρόνου, η οποία προκαλείται από την περιεχόμενη στον χωρόχρονο μάζα και ενέργεια.

Εισάγαμε και μελετήσαμε τα απαραίτητα μεγέθη, για την εξαγωγή του πυρήνα αυτής της θεωρίας, που δεν είναι άλλος από τις Εξισώσεις Πεδίου του Einstein. Αυτά τα μεγέθη είναι ο τανυστής Riemann, θεμελιώδες μέγεθος της γεωμετρίας Riemann που καθορίζει με μοναδικό τρόπο τον χωρόχρονο, ο τανυστής ενέργειας-ορμής που αποτελεί πηγή του βαρυτικού πεδίου στις εξισώσεις πεδίου και είναι ιδανικός για να εκφράσει την ενεργειακή κατάσταση ενός συστήματος με τρόπο ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων, καθώς και ο τανυστής Einstein που περιγράφει την καμπυλότητα του χωρόχρονου.

Στην συνέχεια εξάγαμε τις Εξισώσεις Πεδίου για τον κενό χώρο, για χώρο παρουσία ύλης αλλά και κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda$ , μέσω της μεταβολής της δράσης Einstein-Hilbert. Οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και, ως εκ τούτου, είναι δύσκολο να επιλυθούν ακριβώς.

Φυσικά ο καλύτερος τρόπος για να μελετήσουμε την αποτελεσματικότητά και την χρησιμότητά των προαναφερθέντων εξισώσεων, ήταν η εφαρμογή τους στο πεδίο της Κοσμολογίας. Συγκεκριμένα, αφού ορίσαμε την απαραίτητη μετρική για την μελέτη του σύμπαντός μας, που δεν είναι άλλη από την Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, και υπό την θεώρηση ότι το σύμπαν γεμίζει με τέλειο ρευστό, εξάγαμε τις Εξισώσεις Friedmann που το διέπουν. Φυσικά ορίσαμε και κάποιες σημαντικές κοσμολογικές ποσότητες, όπως την ενεργειακή πυκνότητα και την παράμετρο του Hubble, που εκφράζει το μέτρο της διαστολής του σύμπαντος.

Ακολούθως, μελετήσαμε τις Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας και πιο συγκεκριμένα τις κατηγορίες των θεωριών  $f(R)$  και Βαθμωτού-Τανυστή (Scalar-Tensor). Κίνητρο για την ανάπτυξη αυτών των θεωριών αποτελούν προβλήματα που ανακύπτουν στην σύγχρονη έρευνα όπως για παράδειγμα ο λόγος της επιταχυνόμενης διαστολής του Σύμπαντος και η τιμή της κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda$ , η ανάγκη να ελέγξουμε την βαρύτητα, ιδιαίτερα μετά την ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων ή ακόμη η ανάγκη για επεξήγηση της συμπεριφοράς του σύμπαντος σε μεγάλες αποστάσεις όπου η ΓΘΣ δεν το επιτυγχάνει.

Οι Θεωρίες Βαρύτητας  $f(R)$  προέρχονται από την ΓΘΣ, γενικεύοντας την δράση Hilbert-Einstein, καθώς αντικαθιστούν το βαθμωτό Ricci με μια πιο γενική συνάρτησή του,  $f(R)$ . Μέσω της θεωρίας αυτής εξάγαμε τις Τροποποιημένες  $f(R)$  Εξισώσεις Πεδίου, κατά τρόπο παρόμοιο της εξαγωγής των Εξισώσεων Πεδίου του Einstein, και με την βοήθεια αυτών υπό την υπόθεση ότι το σύμπαν μας είναι γεμάτο με τέλειο ρευστό αλλά και επίπεδο, εξάγαμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann κατά την  $f(R)$ . Μελετήσαμε ακόμη την ισοδυναμία της  $f(R)$  και της βαρυτικής θεωρίας του Einstein, μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού.

Οι θεωρίες Βαθμωτού-Τανυστή χρησιμοποιούνται ως πρότυπο μοντελοποίησης αποκλίσεων από την Γενική Σχετικότητα και χρήζουν ιδιαίτερου ενδιαφέροντος καθώς η σχετικά απλή δομή των Εξισώσεων Πεδίου, οδηγεί στην εύρεση αναλυτικών λύσεων ακριβείας σε πλήθος καταστάσεων φυσικού ενδιαφέροντος.

Η γενικότερη θεωρία των βαθμωτού-τανυστή είναι η θεωρία Horndeski, την οποία μελετήσαμε αναλυτικά και για την οποία εξάγαμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann κατά Horndeski. Οι εξισώσεις αυτές παίζουν καθοριστικό ρόλο στην παρούσα διπλωματική, καθώς στην συνέχεια χρησιμοποιούνται για την επίτευξη του στόχου της.

Επιπλέον εξετάσαμε μια ακόμη σημαντική θεωρία αυτής της κατηγορίας, την Μη Ελάσσονα Σύζευξη Παραγώγων (Nonminimal Derivative Coupling), η οποία μας δίνει την δυνατότητα να κατανοήσουμε τα αποτελέσματα, μιας θεωρίας που προκύπτει από την αλληλεπίδραση ενός βαθμωτού πεδίου μέσω μη ελάχιστης σύζευξης παραγώγου, με την καμπυλότητα. Εξετάσαμε ακόμη την ισοδυναμία μεταξύ  $f(R)$  και θεωριών Βαθμωτού-Τανυστή.

Αφού χτίσαμε το απαραίτητο υπόβαθρο, στην συνέχεια είμαστε σε θέση να μελετήσουμε αναλυτικά το πρόβλημα της διαφοροποίησης στην τιμή της σταθεράς του Hubble  $H_0$  (*Hubble's constant  $H_0$  tension*), μεταξύ της εκτίμησης που δίνει το CMB, υπό την θεώρηση του  $\Lambda$ CDM, και των άμεσων τοπικών μετρήσεων κλίμακας αποστάσης.

Μελετήσαμε τα δεδομένα και τις εκτιμήσεις που έδωσαν διάφορες ομάδες και στην συνέχεια αναφέραμε περιληπτικά μερικές από τις πιθανές λύσεις του προβλήματος, που προτείνονται από την σύγχρονη βιβλιογραφία.

Αυτές είναι

- Ο ενεργός αριθμός σχετικιστικών βαθμών ελευθερίας  $N_{eff}$
- Η επέκταση πολλών παραμέτρων
- Η Καταστατική Εξίσωση της Σκοτεινής Ενέργειας
- Η Πρώιμη Σκοτεινή Ενέργεια
- Η αλληλεπιδρούσα Σκοτεινή Ενέργεια
- Η Τροποποιημένη Βαρύτητα

εστιάζοντας περισσότερο στην τελευταία πιθανή λύση και αναφέροντας αποτελέσματα ερευνών.

Ακολούθως, μέσω της τροποποιημένης θεωρίας βαρύτητας Horndeski, επιχειρήσαμε να μειώσουμε την διαφορά στις εκτιμήσεις της σταθεράς  $H_0$ .

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήσαμε ως μαθηματικό μοντέλο τις τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann κατά την θεωρία Horndeski και επιλέξαμε τις καθοριστικές συναρτήσεις που εμπλέκονται στις εξισώσεις αυτές έτσι, ώστε να οδηγηθούμε στην επίλυση του προβλήματος. Ορίσαμε ακόμη τις κατάλληλες παραμέτρους, όπως η πυκνότητα και η πίεση της ύλης υπό

την θεώρηση του τέλειου ρευστού του σύμπαντος, η παράμετρος του Hubble, η κοσμολογική ερυθρομετάθεση (redshift), αλλά και τις απαραίτητες αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Έτσι μέσω του προγράμματος Wolfram Mathematica και με όλα τα παραπάνω δεδομένα, επιλύσαμε αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων της εξέλιξης και της δεύτερης τροποποιημένης εξίσωσης του Friedmann κατά Horndeski, ως προς τον παράγοντα κλίμακας  $a$  και το βαθμωτό πεδίο  $\phi$ .

Μέσω της αριθμητικής λύσης που προκύπτει για τον παράγοντα κλίμακας, συγκρίναμε το αποτέλεσμα που έδωσε το μοντέλο μας για την παράμετρο  $H$  του Hubble (και άρα και για την σημερινή της τιμή  $H_0$ ), με το αποτέλεσμα που δίνει το μοντέλο  $\Lambda$ CDM και παρατηρήσαμε πως η απόκλιση τους ήταν μικρή, ωστόσο αρκετή αφού προέκυψε μεγαλύτερη εκτίμηση της τιμής του  $H_0$  από το μοντέλο μας και άρα μειώθηκε η διαφοροποίηση στην τιμή του  $H_0$ , μεταξύ της θεωρίας και των άμεσων μετρήσεων. Καταλήξαμε έτσι στο συμπέρασμα, πως το αποτέλεσμά μας για την σημερινή σταθερά του Hubble είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό, καθώς δείχνει να μειώνει το προαναφερθέν πρόβλημα της διαφοράς στην εκτίμησή της.

Το εν λόγω εγχείρημα αυτής της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας μπορεί να θεωρηθεί σαν μια προσέγγιση της λύσης του προβλήματος της σταθεράς  $H_0$ , που είναι εξαιρετικής σημασίας (εφόσον αποκλείσουμε πως η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται σε συστηματικά σφάλματα), καθώς αποτελεί σημαντική ένδειξη για την ανάγκη επέκτασης της φυσικής πέραν του καθιερωμένου προτύπου  $\Lambda$ CDM.



# Βιβλιογραφία

- [1] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson New International Edition 2014. Pearson Higher Education & Professional Group. ISBN 13: 978-1-292-02663-3.
- [2] David Tong, *Lectures on General Relativity*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos 2019 . <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html>
- [3] A.K. Raychaudhuri, S. Banerji, A. Banerjee, *General Relativity, Astrophysics, and Cosmology*, Astronomy and Astrophysics Library. Springer Science & Business Media 2003. 038740628X, 9780387406282
- [4] David Tong, *Lectures on Cosmology*. University of Cambridge Part III Mathematical Tripos 2019 . <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/cosmo.html>
- [5] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, Constantinos Skordis *Modified Gravity and Cosmology*. (2011) arXiv: 1106.2476v3 [astro-ph.CO]
- [6] Steven Weinberg, *Cosmology*. Oxford University Press 2008  
ISBN: 9780198526827 .
- [7] Robert M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010  
ISBN:0226870375, 9780226870373
- [8] James B. Dent, Sourish Dutta, Emmanuel N. Saridakis, Jun-Qing Xiae *Cosmology with non-minimal derivative couplings: perturbation analysis and observational constraints*. (2013) arXiv:1309.4746v2 [astro-ph.CO]
- [9] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler *Gravitation*. Princeton University Press, 2017. ISBN: 140088909X, 9781400889099.
- [10] Steven Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. 1972, ISBN:0471925675, 9780471925675.
- [11] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10** (1974), 363-384 doi:10.1007/BF01807638
- [12] Genly Leon, Emmanuel N. Saridakis, *Dynamical analysis of generalized Galileon cosmology*. (2012) arXiv: 1211.3088 [astro-ph.CO]
- [13] Andrew Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. Third Edition. John Wiley & Sons 2015. ISBN: 1118690257, 9781118690253.
- [14] Gonzalo J. Olmo, *Palatini Approach to Modified Gravity:  $f(R)$  Theories and Beyond*. (2011) arXiv:1101.3864 [gr-qc].
- [15] Tsutomu Kobayashi, *Horndeski theory and beyond: a review*. (2019) arXiv: 1901.07183 [gr-qc]

- [16] Thomas P. Sotiriou, Valerio Faraoni, *f(R) Theories Of Gravity*. (2010) arXiv: 0805.1726v4 [gr-qc]
- [17] Valerio Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Fundamental Theories of Physics, Springer Science & Business Media, (2004) ISBN:1402019890, 9781402019890
- [18] James B. Hartle, *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity* Addison-Wesley, 2003. ISBN: 0805386629, 9780805386622 .
- [19] Antonio De Felice, Shinji Tsujikawa, *f(R) theories*. (2010) arXiv: 1002.4928 [gr-qc]
- [20] Monica Capone, Matteo Luca Ruggiero, *Jumping from Metric f(R) to Scalar-Tensor Theories and the relations between post-Newtonian parameters*. (2010) arXiv: 0910.0434 [gr-qc]
- [21] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*. (1999) arXiv:gr-qc/9811047 [gr-qc].
- [22] Shinji Tsujikawa, *Quintessence: A Review*. (2013) arXiv:1304.1961 [gr-qc]
- [23] Yasunori Fujii, Kei-ichi Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, (2003) ISBN:1139436023, 9781139436021
- [24] Gianpiero Mangano, Gennaro Miele, Sergio Pastor, Teguyco Pinto, Ofelia Pisanti, Pasquale D. Serpico, *Relic neutrino decoupling including flavour oscillations*. (2015) arXiv:hep-ph/0506164 .
- [25] P.F.de Salas and S.Pastor, *Relic neutrino decoupling with flavour oscillations revisited*. (2016) arXiv:1606.06986 [hep-ph].
- [26] E. Di Valentino, A. Melchiorri and J. Silk, *Cosmological constraints in extended parameter space from the Planck 2018 Legacy release*. (2019) arXiv:1908.01391 [astro-ph.CO].
- [27] M. Chevallier, D. Polarski, *Accelerating Universes with Scaling Dark Matter*. (2000) arXiv:gr-qc/0009008 .
- [28] Eric V. Linder (LBL), *Exploring the Expansion History of the Universe*. (2002) arXiv:astro-ph/0208512 .
- [29] N. Aghanim et al. [Planck Collaboration], *Planck 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters*. (2016) arXiv:1507.02704 [astro-ph.CO].
- [30] M. Kamionkowski, J. Pradler and D. G. E. Walker, Phys. Rev. Lett. 113, no. 25, 251302 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.113.251302 [arXiv:1409.0549 [hep-ph]]
- [31] J. Sakstein and M. Trodden, arXiv:1911.11760 [astro-ph.CO].
- [32] E. Di Valentino, A. Melchiorri, O. Mena and S. Vagnozzi, *Non-minimal dark sector physics and cosmological tensions*. (2019) arXiv:1910.09853 [astro-ph.CO].
- [33] E. Di Valentino, A. Melchiorri, O. Mena and S. Vagnozzi, *Interacting dark energy after the latest Planck, DES, and H0 measurements: an excellent solution to the H0 and cosmic shear tensions*. (2019) arXiv:1908.04281 [astro-ph.CO].
- [34] S. F. Yan, P. Zhang, J. W. Chen, X. Z. Zhang, Y. F. Cai and E. N. Saridakis, *Interpreting cosmological tensions from the effective field theory of torsional gravity*. (2019) arXiv:1909.06388 [astro-ph.CO].

- [35] Marco Raveri, *Reconstructing Gravity on Cosmological Scales.* (2019) arXiv:1902.01366 [astro-ph.CO].
- [36] S. Alam et al. [BOSS Collaboration], *The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample.* (2016) arXiv:1607.03155 [astro-ph.CO].
- [37] Gabriel R. Bengochea, *What do we talk about when we speak of cosmological redshift?.* (2018) arXiv:1802.02444 [astro-ph.CO].
- [38] Tiberiu Harko, Francisco S. N. Lobo, Emmanuel N. Saridakis, Minas Tsoukalas, *Cosmological models in modified gravity theories with extended nonminimal derivative couplings.* (2016) arXiv:1609.01503 [gr-qc].
- [39] Burin Gumjudpai (IF Naresuan), Phongsaphat Rangdee (IF Naresuan), *Non-minimal derivative coupling gravity in cosmology.* (2020) arXiv:1511.00491v3 [gr-qc].
- [40] Y. Akrami et al. [Planck Collaboration], arXiv:1807.06205 [astro-ph.CO].
- [41] N. Aghanim et al. [Planck Collaboration], Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO].
- [42] A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* 826, no. 1, 56 (2016) doi:10.3847/0004-637X/826/1/56 [arXiv:1604.01424 [astro-ph.CO]].
- [43] A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* 855, no. 2, 136 (2018) doi:10.3847/1538-4357/aaadb7 [arXiv:1801.01120 [astro-ph.SR]].
- [44] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri and D. Scolnic, *Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond  $\Lambda$ CDM*, *Astrophys. J.* 876, no. 1, 85 (2019) [arXiv:1903.07603 [astro-ph.CO]].
- [45] S. Birrer et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 484, 4726 (2019) doi:10.1093/mnras/stz200 [arXiv:1809.01274 [astro-ph.CO]].
- [46] K. C. Wong et al., arXiv:1907.04869 [astro-ph.CO].
- [47] D. Camarena and V. Marra, arXiv:1906.11814 [astro-ph.CO].
- [48] S. Carneiro, P. C. de Holanda, C. Pigozzo and F. Sobreira, *Phys. Rev. D* 100, no. 2, 023505 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.100.023505 [arXiv:1812.06064 [astro-ph.CO]].
- [49] D. Green et al., *Bull. Am. Astron. Soc.* 51, no. 7, 159 (2019) [arXiv:1903.04763 [astro-ph.CO]].
- [50] R. Z. Ferreira and A. Notari, *Phys. Rev. Lett.* 120, no. 19, 191301 (2018) doi:10.1103/PhysRevLett.120.191301 [arXiv:1801.06090 [hep-ph]].
- [51] [92] E. Di Valentino, E. Giusarma, M. Lattanzi, O. Mena, A. Melchiorri and J. Silk, *Phys. Lett. B* 752, 182 (2016) doi:10.1016/j.physletb.2015.11.025 [arXiv:1507.08665 [astro-ph.CO]].
- [52] A. Paul, A. Ghoshal, A. Chatterjee and S. Pal, *Eur. Phys. J. C* 79, no. 10, 818 (2019) doi:10.1140/epjc/s10052-019-7348-5 [arXiv:1808.09706 [astro-ph.CO]].
- [53] V. Poulin, T. L. Smith, T. Karwal and M. Kamionkowski, *Early Dark Energy Can Resolve The Hubble Tension*, *Phys. Rev. Lett.* 122, no. 22, 221301 (2019) [arXiv:1811.04083 [astro-ph.CO]].

- [54] J. L. Bernal, L. Verde and A. G. Riess, JCAP 1610, 019 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/10/019 [arXiv:1607.05617 [astro-ph.CO]].
- [55] E. Di Valentino, A. Melchiorri and O. Mena, Can interacting dark energy solve the H0 tension?, Phys. Rev. D 96, no. 4, 043503 (2017) [arXiv:1704.08342 [astro-ph.CO]].
- [56] W. Yang, A. Mukherjee, E. Di Valentino and S. Pan, Interacting dark energy with time varying equation of state and the H0 tension, Phys. Rev. D 98, no. 12, 123527 (2018) [arXiv:1809.06883 [astro-ph.CO]].
- [57] W. Yang, O. Mena, S. Pan and E. Di Valentino, Dark sectors with dynamical coupling, arXiv:1906.11697 [astro-ph.CO].
- [58] F. Beutler et al., The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 416, 3017 (2011) [arXiv:1106.3366 [astro-ph.CO]].
- [59] A. J. Ross, L. Samushia, C. Howlett, W. J. Percival, A. Burden and M. Manera, The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample I. A 4 per cent distance measure at  $z = 0:15$ , Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 449, no. 1, 835 (2015) [arXiv:1409.3242 [astro-ph.CO]].
- [60] S. Alam et al. [BOSS Collaboration], The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 470, no. 3, 2617 (2017) [arXiv:1607.03155 [astro-ph.CO]].
- [61] M. A. Troxel et al. [DES Collaboration], Dark Energy Survey Year 1 results: Cosmological constraints from cosmic shear, Phys. Rev. D 98, no. 4, 043528 (2018) [arXiv:1708.01538 [astro-ph.CO]].
- [62] T. M. C. Abbott et al. [DES Collaboration], Dark Energy Survey Year 1 Results: Cosmological Constraints from Galaxy Clustering and Weak Lensing, [arXiv:1708.01530 [astro-ph.CO]].
- [63] E. Krause et al. [DES Collaboration], Dark Energy Survey Year 1 Results: Multi-Probe Methodology and Simulated Likelihood Analyses, [arXiv:1706.09359 [astro-ph.CO]].
- [64] Scolnic, D. M. et al., *The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed Type Ia Supernovae from PanSTARRS1 and Cosmological Constraints from The Combined Pantheon Sample*, 2018, ApJ, 859, 101, arXiv:1710.00845.
- [65] Austin Joyce, Bhuvnesh Jain, Justin Khoury, Mark Trodden, *Beyond the Cosmological Standard Model*. (2014) arXiv:1407.0059 [astro-ph.CO].



