ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Η Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας σε Μεταθετικούς και Μη Μεταθετικούς Χώρους

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της Μαρίας - Δανάης Ρουμελιώτη

Επιβλέπων:
Γεώργιος Ζουπάνος

Αθήνα, Ιούλιος, 2021

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Γιώργο Ζουπάνο, για την άμεση στήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας, και την ταχύτητα με την οποία βρήκε λύση σε ό,τι πρόβλημα αντιμετώπισα. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου για τον Γιώργο Μανωλάκο, χωρίς τον οποίο η συγγραφή της εργασίας αυτής ίσως να ήταν αδύνατη, καθώς και τον Σπύρο Κονιτόπουλο για το ενδιαφέρον και την άμεση ανταπόκρισή του σε κάθε κλήση για βοήθεια.

Πρόλογος

Σύμφωνα με τη σύγχρονη Φυσική όλες οι αλληλεπιδράσεις στο σύμπαν είναι τεσσάρων ειδών. Οι τέσσερεις αυτές Θεμελιώδεις Αλληλεπιδράσεις είναι η Ηλεκτρομαγνητική, η Ι-σχυρή Πυρηνική, η Ασθενής Πυρηνική και η Βαρύτητα. Αποτελεί στόχο της Φυσικής το να αντιμετωπίζει, όσο γίνεται, ως ενιαία τα φαινόμενα στη φύση, καθώς όσο πιο επιτυχημένα γίνεται αυτό από μία θεωρία, τόσο αυτή έχει μεγαλύτερη προβλεπτική αξία αλλά και σημασία, αφού μεγαλώνει η καθολικότητά της. Η Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία (Maxwell) είναι η πρώτη που κατάφερε την ενοποίηση του Ηλεκτρισμού και του Μαγνητισμού, αφού μέχρι τότε τα δύο αυτά φαινόμενα θεωρούνταν ασύνδετα. Παρόλα αυτά διαφαίνεται μέσω του Ηλεκτρομαγνητισμού ότι δεν είναι παρά η ίδια αλληλεπίδραση, η οποία παρατηρείται κάθε φορά ως ηλεκτρισμός ή μαγνητισμός, ανάλογα με την σχετική κίνηση μεταξύ παρατηρητή και φορτίου. Η επόμενη ενοποίηση Θεμελιωδών Αλληλεπιδράσεων έγινε από τους Glashow, Weinberg και Salam οι οποίοι έφτιαξαν το Καθιερωμένο Πρότυπο των Στοιχειωδών Σωματιδίων. Σύμφωνα με το Καθιερωμένο Πρότυπο, η Ηλεκτρομαγνητική και η Ασθενής Αλληλεπίδραση ενοποιούνται, και συμπεριφέρονται ενιαία ως Ηλεκτρασθενής Αλληλεπίδραση, σε μεγαλύτερη ενεργειακή κλίμακα σε σχέση με την τωρινή του σύμπαντος, σχηματίζοντας έτσι μία μεγαλύτερη συμμετρία η οποία έσπασε καθώς το σύμπαν διαστελλόταν με την πάροδο του χρόνου και έπεφτε η θερμοκρασία του. Με την εισαγωγή του Μηχανισμού Higgs στο Καθιερωμένο Πρότυπο, ο οποίος περιγράφει τον ακριβή τρόπο με τον οποίο γίνεται το σπάσιμο συμμετρίας, δηλαδή το σπάσιμο της Ηλεκτρασθενούς Αλληλεπίδρασης σε Ηλεκτρομαγνητική και Ασθενή, αποδίδοντας μάζες στα φερμιόνια, το δεύτερο έγινε μία πλήρης θεωρία η οποία όμως πάσχει από αρκετά ζητήματα όπως ο μεγάλος αριθμός ελεύθερων παραμέτρων, το Πρόβλημα της Ιεραρχίας κλπ. Για να θεραπευτούν αυτά τα ζητήματα έχουν προταθεί διάφορες θεωρίες είτε στο πλαίσιο της Μεγάλης Ενοποίησης, είτε στο πλαίσιο της Υπερσυμμετρίας, οι οποίες σε κάθε περίπτωση οδηγούν σε μία ακόμα ενοποίηση, σε ακόμα μεγαλύτερες ενέργειες, της Ισχυρής Πυρηνικής και της Ηλεκτρασθενούς Αλληλεπίδρασης.

Η μόνη αλληλεπίδραση που δεν ενοποιείται με τις υπόλοιπες, μέσω αυτών των θεωριών, είναι η Βαρύτητα. Ο λόγος είναι ότι μέσω της παραδοσιακής διατύπωσής της, από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, δεν αντιμετωπίζεται ως συμμετρία βαθμίδας, σε αντίθεση τις περιγραφές των υπολοίπων Θεμελιωδών Αλληλεπιδράσεων. Συνεπώς το πρώτο βήμα για την ενοποίηση της Βαρύτητας με τις άλλες Αλληλεπιδράσεις είναι να διατυπωθεί ως θεωρία βαθμίδας, που να είναι ισοδύναμη με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, αφού αυτή αποτελεί μία από τις πλέον επιβεβαιωμένες πειραματικά θεωρίες στη Φυσική. Ο Utiyama, πρώτος περιέγραψε τη βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας $SO(1,3)$, όμως δεν έτυχε της γενικής αναγνώρισης μιας και εισήγαγε αυθαίρετα το vierbein, [1]. Το 1980, οι Stelle και West κατάφεραν να ανακτήσουν τη βαρύτητα παίρνοντας μια αναλλοίωτη κάτω από $SO(1,4)$ δράση τύπου Yang - Mills, με την εισαγωγή ενός βαθμωτού, έτσι ώστε να σπάει αυθόρμητα η συμμετρία.

Στο δεύτερο μέρος της, η εργασία αφορά την βαρύτητα σε μη μεταθετικούς χώρους, δηλαδή σε χώρους των οποίων οι συντεταγμένες δεν μετατίθενται. Εν τέλει, περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο ανακτάται η τετραδιάστατη βαρύτητα Einstein, ως αυθόρμητα σπασμένη συμμετρία, μιας θεωρίας βαθμίδας πάνω σε μη μεταθετικό χώρο.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας το εσωτερικό γινόμενο εκφράζεται ως εξής:

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \tag{1.1}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου για ένα διάνυσμα r σε ένα χώρο με μετρική g, $\Delta s^2 = \tilde{r}^T g r$, όπου στον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski, το διάνυσμα r έχει τη μορφή:

$$r = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

και συνεπώς, το δυϊκό του διάνυσμα, $\tilde{r}^T$, ισούται με:

$$\tilde{r}^T = \begin{pmatrix} c\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Η μετρική στον χώρο αυτό είναι:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \eta \tag{1.4}$$

Προκειμένου να εξασφαλίζεται το αναλλοίωτο του εσωτερικού γινομένου, μπορούμε να κάνουμε μετασχηματισμούς για τους οποίους ισχύει $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

Γενικά αναμένουμε στους μετασχηματισμούς αυτούς να αναμιγνύονται οι γνωστοί μετασχηματισμοί των στροφών, όπως και στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Παρόλα αυτά, λόγω του ότι στο χωρόχρονο Minkowski ο χρόνος αποτελεί και αυτός μία διάσταση, βλέπουμε ότι οι ανεξάρτητοι μετασχηματισμοί στροφών που μπορούν να γίνουν είναι 6. Αυτοί είναι οι γνωστοί R_{xy}, R_{xz}, R_{yz}, οι οποίοι υπάρχουν και στις 3 διαστάσεις, αλλά και οι άγνωστοι έως τώρα R_{tx}, R_{ty}, R_{tz}. Οι τελευταίοι τρεις αποτελούν γενίκευση της έννοιας της στροφής, αφού αφορούν στροφές τόσο στο χρόνο όσο και στο χώρο, και ονομάζονται προώσεις. Οι προώσεις αντιστοιχούν σε μετασχηματισμό της χωροχρονικής θέσης του παρατηρητή ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, το οποίο έχει μία σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ σε σχέση με το αρχικό. Συνεπώς έχουμε 6 ανεξάρτητα επίπεδα πάνω στα οποία δρουν οι μετασχηματισμοί των στροφών και των προώσεων.

Οι μετασχηματισμοί αυτοί, συνολικά καλούνται μετασχηματισμοί Lorentz και σε αντιστοιχία με την τρισδιάστατη περίπτωση[1], ικανοποιούν την συνθήκη ορθογωνιότητας $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί.

Προκειμένου να μπορούμε να εργαστούμε πάνω στη Θεωρία, θα πρέπει να μπορούμε να εφαρμόσουμε διαφορικό λογισμό. Αυτό είναι κάτι που δεν επιτρέπουν όλοι οι δυνατοί μετασχηματισμοί. Συγκεκριμένα, μετασχηματισμοί όπως οι κάποιοι κατοπτρισμοί, η ομοτιμία κλπ, λόγω της διακριτής τους φύσης, δεν μπορούν όλοι να αναχθούν σε απειροστούς μετασχηματισμούς - και άρα ούτε και να ιδωθούν ως στροφές - και επομένως θα πρέπει να μην συμπεριλαμβάνονται στη θεωρία.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι μετασχηματισμοί αυτοί, οι οποίοι δεν ανάγονται σε απειροστούς, έχουν $det\Lambda = -1$. Συνεπώς έχουμε άλλον ένα περιορισμό για την ομάδα συμμετρίας στην οποία βρισκόμαστε, και αντί για την $O(1,3)$, αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την $SO(1,3)$. Δηλαδή την ορθογώνια ομάδα στροφών στον τετραδιάστατο χώρο, με γεννήτορες ορίζουσας $+1$.

Η επιλογή αυτή αυτόματα αποκλείει οποιαδήποτε αντιστροφή της φοράς του χρόνου, αφού

$$\begin{aligned}
&\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \xRightarrow{\alpha,\beta=0} \\
&\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} = \eta_{00} \Rightarrow \\
&(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = (\Lambda^{i}{}_{0})^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \\
&\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \quad ή \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1.
\end{aligned}$$

Οι δύο αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν σε ορθή ή ανάστροφη πορεία του χρόνου και εφόσον δεν υπάρχει συνεχής τρόπος, για να περάσουμε από το $+1$ στο -1 και αντίστροφα, πρέπει να κάνουμε μία εκλογή, αποκλείοντας έτσι την αντιστροφή της φοράς του χρόνου. Επιλέγουμε το $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$ και γι΄ αυτό το λόγο η $SO(1,3)$, μετά από αυτήν την επιλογή, λέγεται και Ορθόχρονη Ομάδα Lorentz.

[1]Στον Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο, $\mathbb{R}^3$, η συνθήκη ορθογωνιότητας διατυπώνεται ως εξής: $R^T R = I$, αφού ισχύει $g = I$.

Μέχρι στιγμής έχουμε εκφράσει τις συμμετρίες της Ειδικής Σχετικότητας για κάποιο σύστημα αναφοράς το οποίο δεν μετατοπίζεται. Για να διατυπωθούν ολοκληρωμένα όλες οι υπάρχουσες συμμετρίες, θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας και αυτήν της παράλληλης μεταφοράς του συστήματος αναφοράς (συμμετρία ως προς τα translations), δηλαδή την ισοδυναμία περιγραφής της θεωρίας από συστήματα αναφοράς που έχουν υποστεί μετατοπίσεις. Η ομάδα που εκφράζει ολοκληρωμένα όλες τις συμμετρίες της Ειδικής σχετικότητας είναι η $ISO(1,3)$ και ονομάζεται ομάδα Poincaré. Η $ISO(1,3)$ αποτελεί το αριστερό ημιευθύ γινόμενο[2] της ομάδας P^4 η οποία εκφράζει τις μετατοπίσεις - μία για κάθε διάσταση - και της Ομάδας Lorentz, $SO(1,3)$.

$$ISO(1,3) = P^4 \ltimes SO(1,3). \tag{1.5}$$

Η Ομάδα Poincaré έχει επιπλέον 4 γεννήτορες σε σχέση με την Ομάδα Lorentz, λόγω της προσθήκης της συμμετρίας ως προς τις μετατοπίσεις, επομένως συνολικά έχει 10 γεννήτορες.

[2]βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄

1.2 Νόμοι μετασχηματισμών

1.2.1 Διανύσματα

Τα διανύσματα, για να είναι συνεπής η θεωρία, θα πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Επίσης, έπειτα από επιλογή κάποιου συστήματος συντεταγμένων, οι συνιστώσες των διανυσμάτων θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιο συγκεκριμένο νόμο μετασχηματισμού. Προκειμένου όμως να μιλήσουμε για τα διανύσματα, θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τον χώρο στον οποίο υπάρχουν. Οι καμπύλοι χώροι δεν μπορούν να είναι διανυσματικοί χώροι. Επομένως, στη γενική περίπτωση όπου ο χωροχρόνος έχει κάποια καμπυλότητα, ορίζουμε έναν εφαπτομενικό χώρο (tangent space), σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας (manifold)[3], στον οποίο ζουν τα διανύσματα. Επίσης, ορίζουμε και τον συνεφαπτομενικό ή δυϊκό χώρο (cotangent ή dual space) στον οποίο υπάρχουν τα δυϊκά διανύσματα (dual vectors).

Το τετράνυσμα απειροστής μετατόπισης, ds, μπορεί να αναλυθεί στις συνιστώσες του ως εξής: $ds = dx^\mu \hat{e}_{(\mu)}$, όπου $\hat{e}_{(\mu)}$ τα διανύσματα μιας βάσης. Ως διάνυσμα, το ds, θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο υπό τον μετασχηματισμό Λ.

$$\begin{aligned} ds = dx^\mu \hat{e}_{(\mu)} &\rightarrow ds' = dx^{\mu'} \hat{e}_{(\mu')} \\ ds' = \Lambda^{\mu'}_{\mu} dx^\mu \Lambda^{\nu}_{\mu'} \hat{e}_{(\nu)} &= \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu'} dx^\mu \hat{e}_{(\nu)}. \end{aligned}$$

Όμως θα πρέπει να ισχύει $ds = ds'$, συνεπώς:

$$\begin{gathered} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu'} dx^\mu \hat{e}_{(\nu)} = dx^\mu \hat{e}_{(\mu)} \Rightarrow \\ \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu'} = \delta^{\nu}_{\mu} \Rightarrow \Lambda^{\nu}_{\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} \Rightarrow \\ \Lambda^{-1}\Lambda = I. \end{gathered}$$

Αντίστοιχα, ένα τυχαίο διάνυσμα V, θα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu \rightarrow V^{\mu'} \hat{e}_{\mu'} = V^\mu \hat{e}_\mu \Rightarrow$$

$$V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} V^\mu. \tag{1.6}$$

Αυτός είναι ο νόμος μετασχηματισμού ενός τυχαίου διανύσματος, συνεπώς οτιδήποτε μετασχηματίζεται με τον παραπάνω τρόπο είναι διάνυσμα. Με άλλα λόγια ο νόμος μετασχηματισμού ενός μαθηματικού αντικειμένου, αρκεί για να ορίσουμε τη φύση του.[2]

[3]βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄

Με όμοιο τρόπο ορίζουμε και τα δυϊκά διανύσματα, τα οποία ανήκουν στον συνεφαπτομενικό χώρο. Όπως και τα διανύσματα του εφαπτομενικού χώρου, τα δυϊκά διανύσματα επίσης παραμένουν αναλλοίωτα, με τις συνιστώσες τους να μετασχηματίζονται με κάποιον συγκεκριμένο τρόπο. Για να βρούμε τον μετασχηματισμό τους, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε δυϊκό διάνυσμα, ω, το οποίο γράφεται αναλυτικά ως προς τις συνιστώσες του ως $\omega = \omega_\mu \hat{e}^{(\mu)}$, με $\hat{e}^{(\mu)}$ να είναι τα διανύσματα κάποιας βάσης στον συνεφαπτομενικό χώρο (ή δυϊκό χώρο). Ο μετασχηματισμός του θα γίνει ως εξής:

$$\omega \to \omega' = \omega_{\mu'} \hat{e}^{(\mu')} \Rightarrow$$
$$\omega = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \omega_\mu \Lambda^{\mu'}_{\mu} \hat{e}^{(\mu)}$$

$$\omega_\mu \to \omega_{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \omega_\mu. \tag{1.7}$$

Τα διανύσματα βάσης του δυϊκού χώρου συνδέονται με αυτά του εφαπτομενικόύ μέσω των σχέσεων:

$$\hat{e}^{(\mu)} \hat{e}_{(\nu)} = \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{αν } \mu = \nu \\ 0 & \text{αν } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.8}$$

Συνεπώς όταν ένα δυϊκό διάνυσμα δρα πάνω σε ένα διάνυσμα του εφαπτομενικού χώρου, έχουμε:

$$\omega(V) = \omega_\mu \hat{e}^{(\mu)} V^\nu \hat{e}_{(\nu)} = \omega_\mu V^\nu \delta^\mu_\nu \Rightarrow$$

$$\omega(V) = \omega_\mu V^\mu = \text{βαθμωτό}. \tag{1.9}$$

1.2.2 Τανυστές

Οι τανυστές, όπως και τα διανύσματα, παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς, αλλά οι συνιστώσες τους έχουν καλά ορισμένους νόμους μετασχηματισμών. Οι τανυστές ορίζονται στον εφαπτομενικό και στον συνεφαπτομενικό χώρο:

$$T = T^{\mu\nu\rho}{}_{\kappa\lambda\alpha\beta} \hat{e}^{(\kappa)} \otimes \hat{e}^{(\lambda)} \otimes \hat{e}^{(\alpha)} \otimes \hat{e}^{(\beta)} \otimes \hat{e}_{(\mu)} \otimes \hat{e}_{(\nu)} \otimes \hat{e}_{(\rho)}. \tag{1.10}$$

Τα γινόμενα των διανυσμάτων και των δυϊκών διανυσμάτων βάσης, όπως είδαμε παραπάνω, είναι βαθμωτά. Επομένως, όταν ένας τανυστής δρα πάνω σε, κατάλληλων συνολικών τάξεων, διανύσματα και δυϊκά διανύσματα, το αποτέλεσμα είναι βαθμωτό:

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\kappa\lambda\alpha\beta} \omega_\mu \alpha_\nu \beta_\rho \gamma^\kappa \delta^\lambda \epsilon^\alpha \zeta^\beta = \text{βαθμωτό}. \tag{1.11}$$

Συγκεντρωτικά οι νόμοι μετασχηματισμών για διάφορες τάξεις τανυστών στον εφαπτομενικό/συνεφαπτομενικό χώρο είναι:

- $c \to c' = c$ βαθμωτό $(0,0)$
- $V^{\mu} \to V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} V^{\mu}$ διάνυσμα $(1,0)$
- $\omega_{\mu} \to \omega_{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\ \mu'} \omega_{\mu}$ δυϊκό διάνυσμα $(0,1)$
- $T_{\mu\nu} \to T_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\ \mu'} \Lambda^{\nu}_{\ \nu'} T_{\mu\nu}$ τανυστής $(0,2)$
- $T^{\mu\nu} \to T^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} T^{\mu\nu}$ τανυστής $(2,0)$
- $T^{\mu}_{\nu} \to T^{\mu'}_{\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\ \nu'} T^{\mu}_{\nu}$ τανυστής $(1,1)$

Επειδή οι τανυστές παραμένουν αναλλοίωτοι και οι συνιστώσες τους έχουν καλά ορισμένους μετασχηματισμούς, δηλαδή είναι συναλλοίωτες (covariant), προσπαθούμε να δουλεύουμε με τανυστικές εξισώσεις, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται το ότι οι φυσικοί νόμοι είναι ανεξάρτητοι από το σύστημα αναφοράς ή τουλάχιστον αλλάζουν κατά τρόπο ο οποίος είναι γνωστός.

1.2.3 Γενίκευση σε μη γραμμικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων

Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί μόνο με γραμμικούς μετασχηματισμούς. Για να ασχοληθούμε με τη γενική περίπτωση μη γραμμικών μετασχηματισμών παίρνουμε δύο συναρτήσεις οι οποίες έστω ότι εξαρτώνται από 2 μεταβλητές:$f_1 = f_1(g_1, g_2)$, $f_2 = f_2(g_1, g_2)$ και $g_1 = g_1(x, y)$,$g_2 = g_2(x, y)$. Ο κανόνας της αλυσίδας δίνει:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x},$$

και αντίστοιχα

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial y}.$$

Δηλαδή με πιο συμπαγή συμβολισμό παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} f^{\nu}(g^{\lambda}(x^{\mu})) = \frac{\partial f^{\nu}}{\partial g^{\lambda}}\frac{\partial g^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}. \tag{1.12}$$

Θέτοντας $g^{\lambda}(x^{\mu}) = x^{\lambda'}(x^{\mu})$ τελικά παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} f^{\nu}(x^{\mu'}) = \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}. \tag{1.13}$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί το νόμο μετασχηματισμού της μερικής παραγώγου.[2]

Αντίστοιχα εύκολα αποδεικνύεται ότι και ένα διάνυσμα μετασχηματίζεται με βάση τον κανόνα της αλυσίδας:

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} V^{\mu}. \tag{1.14}$$

όπως το ίδιο ισχύει και για ένα δυϊκό διάνυσμα:

$$\omega'_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \omega_{\mu}. \tag{1.15}$$

Γενικεύοντας, ένας τανυστής ο οποίος έχει δείκτες και πάνω και κάτω θα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$T^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \to T^{\mu'\nu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} T^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}. \tag{1.16}$$

Ας πάρουμε τώρα την μερική παράγωγο ενός τανυστή και συγκεκριμένα ενός δυϊκού διανύσματος. Όπως έχει ειπωθεί και παραπάνω, θέλουμε τα μεγέθη που χρησιμοποιούμε να είναι αναλλοίωτα ή να έχουν καλώς ορισμένους μετασχηματισμούς.

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} T_{\nu} \to \partial'_{\mu} T'_{\nu} =& \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\nu} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} T_{\nu} \right) \\ = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \partial_{\mu} T_{\nu} +& \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu'}} T_{\nu}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Εξ αιτίας του δεύτερου όρου, βλέπουμε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός δεν είναι ο μετασχηματισμός ενός τανυστή. Επομένως το $\partial_{\mu} T_{\nu}$ δεν αποτελεί τανυστικό μέγεθος και γι' αυτό δεν μετασχηματίζεται συναλλοίωτα.

Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η αναβάθμιση της μερικής παραγώγου, ∂_{μ}, στην συναλλοίωτη παράγωγο (covariant derivative), ∇_{μ}, η οποία εξασφαλίζει ότι η ποσότητα $\nabla_{\mu} T_{\nu}$ αποτελεί τανυστή. Επιπρόσθετα η συναλλοίωτη παράγωγος θα πρέπει να έχει τέσσερεις ιδιότητες έτσι ώστε να είναι συνεπής με τις ιδιότητες της συνήθους μερικής παραγώγου:

- Να δρα επιμεριστικά: $\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$
- Να δρα σύμφωνα με τον Κανόνα Leibniz: $\nabla(V \otimes W) = (\nabla V) \otimes W + V \otimes (\nabla W)$
- Να μετατίθεται με τις συστολές δεικτών: $\nabla_{\mu}(V^{\rho}{}_{\rho\nu}) = (\nabla V)_{\mu}{}^{\rho}{}_{\rho\nu}$
- Να έχει την ίδια δράση πάνω σε βαθμωτά με τη μερική παράγωγο: $\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi$

Η επιλογή της συναλλοίωτης παραγώγου σε συνέπεια με όλες τις παραπάνω συνθήκες, μας οδηγεί στην παρακάτω μορφή της δράσης της πάνω σε ένα διάνυσμα:

$$\nabla_{\mu} T^{\nu} = \partial_{\mu} T^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} T^{\rho}, \tag{1.18}$$

όπου η ποσότητα $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$ ονομάζεται συσχετιστική συνοχή (affine connection), και καθορίζει το πώς μετασχηματίζονται τα τανυστικά μεγέθη.

Αντίστοιχα η δράση της συναλλοίωτης παραγώγου πάνω σε ένα δυϊκό διάνυσμα είναι η εξής:

$$\nabla_\mu T_\nu = \partial_\mu T_\nu - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} T_\rho. \tag{1.19}$$

Το affine connection δεν είναι τανυστής. Δεδομένου κάποιου γενικού μετασχηματισμού, το μη συναλλοίωτο μέρος του, ακυρώνει τον μη συναλλοίωτο όρο της μερικής παραγώγου, έτσι ώστε η συνολική δράση της συναλλοίωτης παραγώγου, πάνω σε κάποιο τανυστικό μέγεθος, να αποτελεί τανυστή. Δηλαδή το Γ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\rho'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu x^\rho}. \tag{1.20}$$

Συγκρίνοντας τον μετασχηματισμό αυτόν με αυτόν της μερικής παραγώγου, (1.17), εύκολα βλέπουμε ότι πράγματι, το άθροισμά τους, δηλαδή ο μετασχηματισμός της συναλλοίωτης παραγώγου είναι τανυστικός.

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή τότε γίνεται

$$\nabla_\mu T_\nu{}^\alpha = \partial_\mu T_\nu{}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha T_\nu{}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}{}^\beta T_\beta{}^\alpha, \tag{1.21}$$

και αποτελεί πλέον τανυστική ποσότητα.

Μέσω του affine connection ορίζουμε τον τανυστή Στρέψης (Torsion):

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda := \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda. \tag{1.22}$$

Η απαίτηση $T_{\mu\nu}{}^\lambda = 0$, λέγεται συνθήκη μηδενικής στρέψης (torsionless condition). Εφόσον την υιοθετούμε, επιβάλουμε το να μην υπάρχει στρέψη στη θεωρία. Για να ισχύει η συνθήκη αυτή, προφανώς θα πρέπει η ποσότητα $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ να είναι συμμετρική ως προς την εναλλαγή των κάτω δεικτών ($\mu \longleftrightarrow \nu$). Στην περίπτωση αυτή τα $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ ονομάζονται σύμβολα Christoffel.

Εάν απαιτήσουμε, επιπρόσθετα στα παραπάνω, το να μετατίθεται η μετρική με την συναλλοίωτη παράγωγο, δηλαδή εάν υιοθετήσουμε και τη συνθήκη της metric compatibility,

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.23}$$

τότε καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} \right), \tag{1.24}$$

η οποία είναι η γνωστή, και μοναδική, έκφραση τον συμβόλων Christoffel, που έχουμε στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.[2]

1.3 Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δουλεύουμε σε πολλαπλότητες με καμπυλότητα και με μηδενική στρέψη, (1.22). Η μετρική είναι η ακόλουθη:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.25}$$

όπου $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$.

Ο τανυστής που εκφράζει την καμπυλότητα είναι ο τανυστής Riemann και ορίζεται ως εξής:

$$R^\alpha{}_{\mu\rho\sigma} := \partial_\rho \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\beta}\Gamma^\beta{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\beta}\Gamma^\beta{}_{\rho\mu}, \tag{1.26}$$

όπου $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ είναι τα σύμβολα Christoffel, που όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εκφράζονται ως

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right). \tag{1.27}$$

Όταν ο τανυστής Riemann ισούται με μηδέν, βρισκόμαστε σε επίπεδο χώρο, ενώ, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, ο χώρος έχει κάποια καμπυλότητα. Ο τανυστής Riemann, επίσης, έχει τις εξής ιδιότητες:

- αντισυμμετρία ως προς την εναλλαγή των πρώτων δύο δεικτών, $R_{\alpha\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\alpha\rho\sigma}$
- αντισυμμετρία ως προς την εναλλαγή των δύο τελευταίων δεικτών, $R^\alpha{}_{\mu\rho\sigma} = -R^\alpha{}_{\mu\sigma\rho}$
- συμμετρία ως προς την εναλλαγή του πρώτου και του δεύτερου ζεύγους δεικτών, $R_{\alpha\mu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\alpha\mu}$
- Πρώτη ταυτότητα Bianchi, $R^\alpha{}_{\mu\rho\sigma} + R^\alpha{}_{\rho\sigma\mu} + R^\alpha{}_{\sigma\mu\rho} = 0$
- Δεύτερη ταυτότητα Bianchi, $R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0$

όπου ο συμβολισμός «$;x$» σημαίνει ότι δρα η συναλλοίωτη παράγωγος ∇_x.

Οι παραπάνω ιδιότητες λειτουργούν ως δεσμοί, με αποτέλεσμα ο τανυστής Riemann, αντί για n^n, να έχει $n^2(n^2-1)/12$ ανεξάρτητα στοιχεία, όπου n η διάσταση της πολλαπλότητας

Μέσω συστολής δεικτών του τανυστή Riemann ορίζεται ο τανυστής Ricci, ο οποίος στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι συμμετρικός[4],

$$R := R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}, \tag{1.28}$$

[4]Αυτό ισχύει λόγω της Συνθήκης Μηδενικής Στρέψης (Torsionless Condition), την οποία, όπως είπαμε, υιοθετούμε στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Στην περίπτωση που υπάρχει στρέψη, η συμμετρία στους τανυστές Riemann και Ricci χάνεται.

και αντίστοιχα από συστολή δεικτών του τανυστή Ricci ορίζεται το βαθμωτό Ricci,

$$R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{1.29}$$

Μέσω αυτών των τανυστών ορίζεται ο τανυστής Einstein,

$$G^{\alpha\beta} := R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R. \tag{1.30}$$

Η δράση την οποία χρησιμοποιούμε στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, ονομάζεται Δράση Einstein-Hilbert:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g} d^4x, \tag{1.31}$$

ή γενικότερα και με παρουσία Κοσμολογικής Σταθεράς,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) d^4x, \tag{1.32}$$

όπου $g = det(g_{\mu\nu})$ η ορίζουσα της μετρικής, R το βαθμωτό Ricci, G η Βαρυτική Σταθερά του Newton και Λ η Κοσμολογική Σταθερά.

Τελικά, επιλύοντας την Αρχή της Ελάχιστης Δράσης για τη Δράση Einstein-Hilbert και κάνοντας χρήση του Τανυστή Ενέργειας - Ορμής (Stress-Energy Tensor), ο οποίος εκφράζει την κατανομή της ύλης στο χωρόχρονο και λειτουργεί ως πηγή στις εξισώσεις, καταλήγουμε στη διατύπωση των πεδιακών εξισώσεων του Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.33}$$

για την περίπτωση της Δράσης Einstein-Hilbert, απουσία Κοσμολογικής Σταθεράς, ενώ παρουσία Κοσμολογικής Σταθεράς οι πεδιακές εξισώσεις παίρνουν τη μορφή,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.34}$$

Στην περίπτωση μοντέλου χωρίς ύλη, οι πεδιακές εξισώσεις Einstein, παίρνουν τη μορφή

$$G_{\mu\nu} = 0, \tag{1.35}$$

απουσία Κοσμολογικής Σταθεράς και αντίστοιχα,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{1.36}$$

παρουσία Κοσμολογικής Σταθεράς [2], [3].

Μέρος I

Η Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας

Κεφάλαιο 2

Φορμαλισμός Πρώτης Τάξης

2.1 Ο φορμαλισμός veirbein

Συνήθως η Γενική Σχετικότητα περιγράφεται με χρήση μίας βάσης σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων στον εφαπτομενικό χώρο T_p. Η βάση αυτή ορίζεται σε κάποιο σημείο p του εφαπτομενικού χώρου και αποτελείται από τις μερικές παραγώγους στο σημείο αυτό,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{(\mu)} = \partial_{(\mu)}, \tag{2.1}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{e}}_{(\mu)} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$, τα διανύσματα βάσης.

Ένα ανταλλοίωτο (contravariant) διάνυσμα το οποίο ανήκει στον εφαπτομενικό χώρο, αναλύεται σε αυτή τη βάση ως εξής:

$$A = A^{\mu}\hat{\boldsymbol{e}}_{(\mu)} = (A_0, A_1, A_2, A_3). \tag{2.2}$$

Στο ίδιο σημείο p, ορίζεται και ένας συνεφαπτομενικός χώρος T_p* ο οποίος φέρει ένα σύστημα συντεταγμένων με βάση

$$\hat{\boldsymbol{e}}^{(\mu)} = \boldsymbol{dx}^{(\mu)}, \tag{2.3}$$

όπου $\boldsymbol{dx}^{(\dots)} \in (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$

Στον συνεφαπτομενικό χώρο, T_p*, ανήκουν τα συναλλοίωτα (covariant) διανύσματα για τα οποία ισχύει:

$$A = A_{\mu}\hat{\boldsymbol{e}}^{(\mu)} = g_{\mu\nu}A^{\nu}\hat{\boldsymbol{e}}^{(\mu)}. \tag{2.4}$$

Μεταξύ τους τα διανύσματα βάσης στον εφαπτομενικό και τον συνεφαπτομενικό χώρο ικανοποιούν τη σχέση:

$$\hat{\boldsymbol{e}}^{(\mu)} \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_{(\nu)} = \mathbf{1}^{\mu}{}_{\nu}. \tag{2.5}$$

Εισάγουμε μία νέα βάση διανυσμάτων η οποία δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες (non-coordinate basis). Σε αντίθεση με τις βάσεις μέχρι στιγμής, σε αυτήν θα χρησιμοποιηθούν λατινικά γράμματα στους δείκτες, έτσι ώστε να φαίνεται ότι μιλάμε για βάση ανεξάρτητη συστήματος συντεταγμένων. Η προϋπόθεση που θα πρέπει να πληρούν τα διανύσματα μιας τέτοιας βάσης, ώστε πράγματι να περιγράφουν χώρους εφαπτομενικούς στην πολλαπλότητα, δηλαδή χώρους Minkowski, είναι το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με τη μετρική Minkowski[1]

$$(\hat{\boldsymbol{e}}_{(a)}, \hat{\boldsymbol{e}}_{(b)}) = \eta_{ab}. \tag{2.6}$$

Η ορθοκανονική non-coordinate βάση, ονομάζεται βάση tetrad. Επιλέγουμε δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε τη βάση tetrad κάθε σημείου της πολλαπλότητας και να περιγράφουμε κάθε φορά τα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων βάσης της.

Η μετάβαση από τη βάση tetrad στην συνήθη - εξαρτώμενη από το σύστημα συντεταγμένων βάση (coordinate basis) - γίνεται μέσω της σχέσης:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\mu(x) = e_\mu{}^a(x)\hat{\boldsymbol{e}}_a. \tag{2.7}$$

Ο 4×4 πίνακας που σχηματίζουν όλες οι 16 συνιστώσες $e_\mu{}^a(x)$ ονομάζεται πεδίο vierbein από τις γερμανικές λέξεις vier και bein που σημαίνουν «τέσσερα» και «πόδι» λόγω της τετράδας των συνιστωσών vierbein, $e_\mu{}^a(x)$ η οποία σχηματίζεται για $a = 1, 2, 3, 4$.

Τα ανάστροφα των vierbein ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$e^\mu{}_a(x)e_\nu{}^a(x) = \delta^\mu_\nu, \quad e_\mu{}^a(x)e^\mu{}_b(x) = \delta^a_b. \tag{2.8}$$

Μέσω του ανάστροφου vierbein μπορούμε να κάνουμε τον ανάστροφο μετασχηματισμό, δηλαδή να περνάμε από την coordinate βάση πίσω στην βάση tetrad,

$$\hat{\mathbf{e}}_{(a)} = e^\mu{}_a(x)\hat{\mathbf{e}}_{(\mu)}. \tag{2.9}$$

Χρησιμοποιώντας τη μετρική $g_{\mu\nu}$ εισάγουμε το εσωτερικό γινόμενο των vierbein:

$$g_{\mu\nu}(x)e^\mu{}_a(x)e^\nu{}_b(x) = \eta_{ab}. \tag{2.10}$$

Αντίστοιχα από την (2.8) παίρνουμε την ισοδύναμη εξίσωση

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu{}^a(x)e_\nu{}^b(x)\eta_{ab}. \tag{2.11}$$

Συνεπώς το vierbein είναι η «τετραγωνική ρίζα» της μετρικής.

[1] Υπενθυμίζουμε ότι η μετρική του Minkowski ισούται με $\eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1)$.

Πλέον μπορούμε να εισαγάγουμε μία δυϊκή ορθοκανονική βάση, $\hat{\boldsymbol{e}}^a$, η οποία γεννά τα 1-forms (δυϊκά διανύσματα), του συνεφαπτομενικού χώρου T_p*, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\hat{\mathbf{e}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{(b)} = \mathbf{1}^a{}_b. \tag{2.12}$$

Αυτή η non-coordinate βάση, αποτελούμενη από 1-form (δηλαδή δυϊκά διανύσματα) μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των 1-forms της coordinate βάσης:

$$\hat{\mathbf{e}}^{(a)} = e_\mu{}^a(x)\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}, \tag{2.13}$$

όπου $\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)} = dx^\mu$. Αντίστοιχα,

$$\hat{\mathbf{e}}^{(\mu)}(x) = e^\mu{}_a(x)\hat{\mathbf{e}}^{(a)}. \tag{2.14}$$

Κάθε διάνυσμα σε κάποιο χωροχρονικό σημείο έχει συνιστώσες που εκφράζονται και στην coordinate και στην non-coordinate βάση,

$$\mathbf{V} = V^\mu \hat{\mathbf{e}}_{(\mu)} = V^a \hat{\mathbf{e}}_{(a)}. \tag{2.15}$$

Σε όρους vierbein οι συνιστώσες αυτές εκφράζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$V^a = e_\mu{}^a V^\mu \quad \text{και} \quad V^\mu = e^\mu{}_a V^a. \tag{2.16}$$

Μία τανυστική ποσότητα με μεικτούς δείκτες εκφράζεται με κατάλληλο συνδυασμό vierbein και αντιστρόφων vierbein όπως στο ακόλουθο παράδειγμα

$$V^a_b = e_\mu{}^a V^\mu_b = e^\nu{}_b V^a_\nu = e_\mu{}^a e^\nu{}_b V^\mu{}_\nu. \tag{2.17}$$

Από τη σχέση (2.10) υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} e^\mu{}_a e^\nu{}_b = \eta_{ab} \Rightarrow \\ g_{a\nu} e^\nu{}_b = \eta_{ab} \Rightarrow \\ g_{ab} = \eta_{ab}. \end{aligned}$$

Δηλαδή οι συνιστώσες τις μετρικής, στην ορθοκανονική βάση, είναι ίσες με αυτές της επίπεδης μετρικής Minkowski. Γι' αυτό το λόγο οι δείκτες μ, ν, ρ καλούνται καμπύλοι δείκτες (curved indices), ενώ οι a, b, c επίπεδοι (flat indices).

Εφόσον πλέον δουλεύουμε στη non-coordinate βάση, μπορούμε να μετασχηματίζουμε τα διανύσματα βάσης ανεξάρτητα από τις συντεταγμένες. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Lorentz:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{(a)} \rightarrow \hat{\boldsymbol{e}}_{(a')} = \Lambda^a{}_{a'}(x)\hat{\boldsymbol{e}}_{(a)}. \tag{2.18}$$

Αντίστοιχα,

$$\Lambda^a{}_{a'}\Lambda^b{}_{b'}\eta_{ab} = \eta_{a'b'}. \tag{2.19}$$

Με άλλα λόγια, έχουμε την ελευθερία να κάνουμε τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz σε κάθε σημείο του χώρου. Φυσικά διατηρούμε την ελευθερία να κάνουμε και γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων την ίδια στιγμή:

$$T^{a\mu}{}_{b\nu} \to T^{a'\mu'}{}_{b'\nu'} = \Lambda^{a'}{}_{a} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \Lambda_{b'}{}^{b} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} T^{a\mu}{}_{b\nu}. \tag{2.20}$$

Στο τελευταίο παράδειγμα, ενώ ως προς τους δείκτες a, b έχουμε τοπικό μετασχηματισμό Lorentz, ως προς τους δείκτες $\mu\nu$ ο μετασχηματισμός είναι γενικός μετασχηματισμός συντεταγμένων.[4]

2.2 Συσχετιστική συνοχή (affine connection)

Όπως έχουμε προαναφέρει το affine connection καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζονται τα διανύσματα και τα τανυστικά μεγέθη εν γένει. Σε μία καμπύλη πολλαπλότητα, ο μετασχηματισμός ενός διανύσματος X^a από ένα σημείο, x^a, σε ένα άλλο, $x^a + \delta x^a$, δεν είναι τετριμμένος. Εξαιτίας της καμπυλότητας, το μετασχηματισμένο διάνυσμα, $X^a(x + \delta x)$ θα έχει μία διαφορά $\delta X^a(x)$ σε σχέση με το αρχικό.

$$X^a(x + \delta x) = X^a(x) + \delta X^a(x) \tag{2.21}$$

Αυτή η διαφορά προκύπτει ότι ισούται με $\delta X^a(x) = \delta x^\beta \partial_\beta X^a$.

Η διαφορά αυτή, εξαιτίας της καμπυλότητας, θα πρέπει να είναι διαφορετική από αυτήν που προκύπτει μετά από παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $X^a(x)$ στο σημείο $x^a + \delta x^a$. Έστω ότι μετά από παράλληλη μεταφορά, το νέο διάνυσμα είναι το εξής:

$$X^a(x) \to X^a(x) + \tilde{\delta} X^a. \tag{2.22}$$

Τότε, η διαφορά των δύο διανυσμάτων, του παράλληλα μεταφερμένου και του μετασχηματισμένου στο ίδιο σημείο, θα είναι

$$[X^a(x) + \delta X^a(x)] - [X^a(x) + \tilde{\delta} X^a] = \delta X^a(x) - \tilde{\delta} X^a. \tag{2.23}$$

Η ποσότητα $\tilde{\delta} X^a$ θα πρέπει να μηδενίζεται εάν $\delta x^a = 0$ ή $X^a = 0$. Στην πρώτη περίπτωση επειδή τότε δεν συμβαίνει καμία μεταφορά, ενώ στη δεύτερη επειδή, προφανώς, το μηδενικό διάνυσμα, ακόμα και αν μεταφερθεί σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του χώρου, θα πρέπει να παραμείνει μηδενικό. Συνεπώς η $\tilde{\delta} X^a$ θα πρέπει να είναι ανάλογη αυτών των δύο μαζί με κάποιον πολλαπλασιαστικό συντελεστή. Καταλήγουμε, δηλαδή σε μία έκφραση σαν την ακόλουθη:

$$\tilde{\delta} X^a = -\Gamma^a{}_{\beta\gamma}(x) X^\beta(x) \delta x^\gamma. \tag{2.24}$$

Προς το παρόν το μόνο πράγμα που γνωρίζουμε για τον πολλαπλασιαστικό συντελεστή $\Gamma^a{}_{\beta\gamma}(x)$ είναι ότι μέσα από αυτόν μεταφέρεται η πληροφορία της καμπυλότητας της πολλαπλότητας σε κάθε σημείο. Ονομάζουμε το $\Gamma^a{}_{\beta\gamma}(x)$ affine connection.

Σε ένα τέτοιο χώρο, η συμβατική παράγωγος δεν περιγράφει σωστά τις μετατοπίσεις των διανυσμάτων αφού δεν λαμβάνει υπόψιν της την καμπυλότητα. Επομένως χρειαζόμαστε την αντικατάστασή της από την συναλλοίωτη παράγωγο. Εξ ορισμού της παραγώγου, αυτή προκύπτει να είναι

$$\nabla_\gamma X^a(x) := \frac{1}{\delta x^\gamma}\{X^a(x+\delta x) - [X^a(x) + \tilde{\delta} X^a]\}. \tag{2.25}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.21),(2.2),(2.24) και (2.25) βρίσκουμε ότι

$$\nabla_\gamma X^a(x) = \frac{1}{\delta x^\gamma}\{X^a(x) + \delta x^\gamma \partial_\gamma X^a - X^a(x) + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) X^\beta(x)\delta x^\gamma\}. \tag{2.26}$$

Τελικά δηλαδή η δράση της συναλλοίωτης παραγώγου είναι η

$$\nabla_\gamma X^a = \partial_\gamma X^a + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} X^\beta, \tag{2.27}$$

$$\nabla_\gamma X_a = \partial_\gamma X_a - \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} X_\beta, \tag{2.28}$$

η οποία είναι η ίδια ακριβώς με αυτήν που βρήκαμε στην παράγραφο 1.2.3. Μία αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι ότι το αποτέλεσμα προκύπτει να είναι ανεξάρτητο της ποσότητας δx^γ.[4]

2.3 Συνοχή σπιν (spin connection) και συνθήκη tetrad (tetrad postulate)

Το non-coordinate ανάλογο του affine connection ονομάζεται spin connection. Δηλαδή αντίστοιχα με το $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ που χρησιμοποιούμε στην coordinate γεωμετρία, εισάγουμε και ένα ακριβώς ανάλογο μέγεθος, $\omega_\mu{}^a{}_b$, το οποίο έχει ακριβώς τον ίδιο ρόλο - να καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζονται οι τανυστικές ποσότητες - αυτή τη φορά σε non-coordinate όρους. Ο κάθε λατινικός δείκτης παίρνει έναν διορθωτικό όρο ανάλογο του spin connection, όπως ακριβώς και στην περίπτωση του affine connection[2]. Για ένα διάνυσμα έχουμε

$$\nabla_\mu X^a = \partial_\mu X^a + \omega_\mu{}^a{}_b X^b, \tag{2.29}$$

ενώ για ένα 1-form έχουμε

$$\nabla_\mu X_a = \partial_\mu X_a - \omega_\mu{}^b{}_a X_b. \tag{2.30}$$

Ακολουθώντας τον ίδιο κανόνα για έναν τανυστή (1,1), παίρνουμε:

$$\nabla_\mu X^a_b = \partial_\mu X^a_b + \omega_\mu{}^a{}_c X^c{}_b - \omega_\mu{}^c{}_b X^a{}_c. \tag{2.31}$$

[2]Το spin connection έχει πάρει το όνομά του από το γεγονός ότι αποτελεί τη συνοχή ενός non-coordinate συστήματος. Το γεγονός αυτό μας δίνει την ελευθερία να μεταχειριζόμαστε μαθηματικά αντικείμενα όπως οι σπίνορες, τους οποίους δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε ένα coordinate σύστημα. Γι΄ αυτό το λόγο η συνοχή του non-coordinate συστήματος ονομάστηκε spin connection.

Οι τανυστές είναι αναλλοίωτες ποσότητες επομένως μπορούν να γραφούν τόσο σε coordinate όσο και σε non-coordinate βάση, και αντίστοιχα να εκφραστούν συναρτήσει και των affine αλλά και των spin connections.

$$\nabla X = \nabla_\mu X^\nu dx^\mu \otimes \partial_\nu = \left(\partial_\mu X^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} x^\lambda\right) dx^\mu \otimes \partial_\nu \quad \text{συναρτήσει affine connection.} \tag{2.32}$$

Ο μετασχηματισμός της ίδιας ποσότητας, από μεικτή βάση, σε coordinate, είναι

$$\begin{aligned}
\nabla X &= \nabla_\mu X^\nu dx^\mu \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_{(a)} \\
&= (\partial_\mu X^a + \omega_\mu{}^a{}_b X^b) dx^\mu \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_{(a)} \\
&= (\partial_\mu (e_\nu{}^a X^\nu) + \omega_\mu{}^a{}_b e_\lambda{}^b X^\lambda) dx^\mu \otimes (e^\sigma{}_a \partial_\sigma) \\
&= e^\sigma{}_a (e_\nu{}^a \partial_\mu X^\nu + X^\nu \partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\lambda{}^b X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\sigma \\
&= (\partial_\mu X^\sigma + e^\sigma{}_a \partial_\mu e_\nu{}^a X^\nu + e^\sigma{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\sigma .
\end{aligned}$$

Έχουμε καταφέρει να εκφράσουμε λοιπόν τον ίδιο μετασχηματισμό συναρτήσει μόνο των spin connections.

Όλοι οι δείκτες είναι βωβοί, επομένως μπορούμε να τους αλλάξουμε με συνεπή τρόπο σε $\sigma \to \nu$ και $\nu \to \lambda$:

$$\nabla X = (\partial_\mu X^\nu + (e^\nu{}_a \partial_\mu e_\lambda{}^a + e^\nu{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b) X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\nu \quad \text{συνατρτήσει spin connection.} \tag{2.33}$$

Εξισώνοντας τα δύο αριστερά μέλη των (2.32) και (2.33), βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει το affine και το spin connection:

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = e^\nu{}_a \partial_\mu e_\lambda{}^a + e^\nu{}_a e_\lambda{}^b \omega_\mu{}^a{}_b, \tag{2.34}$$

καθώς και την αντίστροφή της:

$$\omega_\mu{}^a{}_b = e_\nu{}^a e^\lambda{}_b \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda{}^a . \tag{2.35}$$

Η τελευταία εξίσωση εάν πολλαπλασιαστεί με το $e_\nu{}^b$ θα δώσει

$$\nabla_\mu e_\nu{}^a = 0.$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως «συνθήκη tetrad» (tetrad postulate). Η ισχύς της συνθήκης tetrad είναι καθολική. Δεν χρειάστηκε να επιβάλουμε κάποια συνθήκη (όπως metric compatibility ή torsionless condition). Αντιθέτως, η συνθήκη tetrad οδηγεί στην εξίσωση

$$\nabla_\mu g_{ab} = -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba}, \tag{2.36}$$

η οποία με την επιπλέον απαίτηση της metric compatibility οδηγεί στην αντισυμμετρία του spin connection, $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$, η σημασία της οποίας θα φανεί στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η δράση της συναλλοίωτης παραγώγου πάνω σε διανύσματα και 1-forms στο coordinate και στο non-coordinate σύστημα είναι:

$$\nabla_\gamma X^a = \partial_\gamma X^a + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} X^\beta,$$
$$\nabla_\gamma X_a = \partial_\gamma X_a - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma} X_\beta,$$

και

$$\nabla_\mu X^a = \partial_\mu X^a + \omega_\mu{}^a{}_b X^b,$$
$$\nabla_\mu X_a = \partial_\mu X_a - \omega_\mu{}^b{}_a X_b.$$

Απαιτούμε η συναλλοίωτη παράγωγος να είναι τέτοια, ώστε η ποσότητα $\nabla_\mu X^a$ να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz,

$$\nabla_\mu X^a \to \nabla_\mu \left(\Lambda^{a'}{}_a X^a\right) = \left(\nabla_\mu \Lambda^{a'}{}_a\right) X^a + \Lambda^{a'}{}_a \nabla_\mu X^a. \tag{2.37}$$

Για να έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, θα πρέπει ο πρώτος όρος να μηδενίζεται, δηλαδή θα πρέπει η συναλλοίωτη παράγωγος του μετασχηματισμού Lorentz να είναι μηδέν. Έτσι θα ισχύει

$$\nabla_\mu X^a = \Lambda^{a'}{}_a \nabla_\mu X^a \qquad \text{και} \qquad \nabla_\mu \Lambda^{a'}{}_a = 0. \tag{2.38}$$

Η συνθήκη αυτή, του μηδενισμού της παραγώγου του μετασχηματισμού Lorentz, μας οδηγεί στον εξής περιορισμό:

$$\nabla_\mu \Lambda^{a'}{}_b = \partial_\mu \Lambda^{a'}{}_b + \omega_\mu{}^{a'}{}_c \Lambda^c{}_b - \omega_\mu{}^c{}_b \Lambda^{a'}{}_c = 0. \tag{2.39}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Lambda^b{}_{b'} \Lambda^c{}_b = \delta^c_{b'}$, από την συναλλοίωτη παράγωγο του μετασχηματισμού Lorentz, καταλήγουμε στον μετασχηματισμό του spin connection:

$$\omega_\mu{}^{a'}{}_{b'} = \omega_\mu{}^c{}_{b'} \Lambda^b{}_{b'} \Lambda^{a'}{}_c - \Lambda^b{}_{b'} \partial_\mu \Lambda^{a'}{}_b. \tag{2.40}$$

Βλέπουμε ότι προκειμένου το $\nabla_\mu X^a$ να μετασχηματίζεται ως τετράνυσμα, ο μετασχηματισμός του ίδιου του spin connection προκύπτει να είναι εξαρτώμενος από τις συντεταγμένες (inhomogeneous). Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, μιας και το spin connection εξ αρχής χρειάστηκε για να διορθώσει τον μετασχηματισμό της συναλλοίωτης παραγώγου.[4]

2.4 Εξωτερική παράγωγος και συμβολισμός Cartan

Μέχρι στιγμής, με την εισαγωγή του νέου φορμαλισμού, έχουμε εξασφαλίσει την δυνατότητα περιγραφής σπινορικών πεδίων και των παραγώγων τους στον χωροχρόνο, καθώς επίσης και τη νέα αντιμετώπιση των τανυστών ως διαφορικών forms που λαμβάνουν ως τιμές τανυστές (tensor-valued differential forms). Για παράδειγμα το $X_\mu{}^a$, το οποίο σκεφτόμαστε ως $(1,1)$ τανυστή, μπορεί να ιδωθεί ως ένα 1-form που έχει λάβει ως τιμή ένα διάνυσμα (vector-valued 1-form).

Με λίγα λόγια, με βάση τον κάθε κάτω ελληνικό δείκτη βρίσκουμε την τάξη του form, ενώ με βάση τους πάνω λατινικούς δείκτες βρίσκουμε την τάξη του τανυστή που έχει λάβει ως τιμή. Παραδείγματος χάριν το $A_{\mu\nu}{}^a{}_b$ είναι ένα 2-form με τιμή $(1,1)$-τανυστή.

Η χρησιμότητα αυτής της οπτικής φαίνεται όταν χρησιμοποιούμε εξωτερικές παραγώγους. Η συνήθης εξωτερική παράγωγος του $X_\mu{}^a$ θα γραφόταν ως εξής:

$$(\mathrm{d}X)_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu X_\nu{}^a - \partial_\nu X_\mu{}^a. \tag{2.41}$$

Παρόλα αυτά, η παραπάνω μορφή προκύπτει ότι, αν και μετασχηματίζεται ως 2-form κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, δεν μετασχηματίζεται ως τανυστής κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα, όπως και με την μερική παράγωγο, είναι ο επαναορισμός της εξωτερικής παραγώγου σε:

$$(\mathrm{d}X)_{\mu\nu}{}^a \coloneqq \nabla_\mu X_\nu{}^a - \nabla_\nu X_\mu{}^a. \tag{2.42}$$

Αντικαθιστώντας την συναλλοίωτη παράγωγο βρίσκουμε ότι

$$(\mathrm{d}X)_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu X_\nu^a + \omega_\mu{}^a X_\nu{}^b - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda{}^a - \partial_\nu X_\mu{}^a - \omega_\nu{}^a{}_b X_\mu{}^b + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} X_\lambda{}^a, \tag{2.43}$$

ή αλλιώς

$$(\mathrm{d}X)_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a + \omega_\mu{}^a X_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a X_\mu{}^b. \tag{2.44}$$

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό Cartan, όπου,

$$e^a \coloneqq \hat{\mathbf{e}}^{(a)} = e^a_\mu dx^\mu \tag{2.45}$$

και

$$\omega^a_b \coloneqq \omega_\mu{}^a{}_b dx^\mu. \tag{2.46}$$

Επίσης ορίζουμε την διαφορική μορφή

$$(dA)_{\mu\nu} \coloneqq \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.47}$$

και το γινόμενο wedge[3]

$$(A \wedge B)_{\mu\nu} \coloneqq A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu, \tag{2.48}$$

τα οποία και τα δύο παρουσιάζουν αντισυμμετρία κάτω από εναλλαγή των ελληνικών δεικτών.[4]

[3]βλ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ′

2.5 Εξισώσεις δομής Maurer-Cartan

Προκειμένου να εξάγουμε τη μορφή του τανυστή στρέψης, χρησιμοποιούμε τη συνθήκη tetrad

$$\nabla_\mu e_\nu{}^a = 0 \qquad \text{και} \qquad \nabla_\nu e_\mu{}^a = 0, \tag{2.49}$$

και αφαιρούμε κατά μέλη,

$$\begin{aligned}
&\nabla_\mu e_\nu{}^a - \nabla_\nu e_\mu{}^a = 0 \Rightarrow \\
&\partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda e_\lambda{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} e_\lambda{}^a = 0 \Rightarrow \\
&T^\lambda_{\ \mu\nu} = e^\lambda{}_a T^a_{\ \mu\nu} = e^\lambda{}_a(\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b) \Rightarrow
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση (2.34) και ο ορισμός του τανυστή στρέψης, (1.22) και η σχέση

$$T_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b. \tag{2.50}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.45), (2.46), καθώς και της έκφρασης

$$T^a = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}{}^a dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.51}$$

η οποία προκύπτει από το γινόμενο wedge δύο 1-form[4], βρίσκουμε την έκφραση του τανυστή στρέψης.

Ο τανυστής στρέψης, torsion, λοιπόν, σύμφωνα με τον νέο φορμαλισμό, επαναδιατυπώνεται ως εξής

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b. \tag{2.52}$$

Αυτή είναι η μία από τις δύο εξισώσεις δομής των Maurer-Cartan. Βέβαια από τον φορμαλισμό αυτόν, μπορούμε να περάσουμε πάλι στις αναλυτικές μορφές στην coordinate βάση:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}{}^\lambda &= e^\lambda{}_a T_{\mu\nu}{}^a \\
&= e^\lambda{}_a \left(\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b\right),
\end{aligned}$$

και επαναφέροντας το affine connection,

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e^\lambda{}_a \partial_\mu e_\nu{}^a + e^\lambda{}_a e_\nu{}^b \omega_\mu{}^a{}_b \tag{2.53}$$

τελικά να καταλήξουμε πίσω στην σχέση

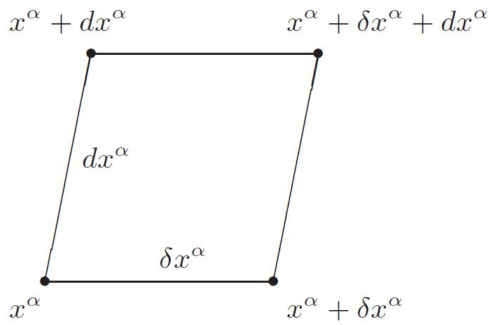
$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda, \tag{2.54}$$

η οποία αποτελεί και τον ορισμό της στρέψης, (1.22).

[4] βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ′

Η δεύτερη από τις εξισώσεις δομής Maurer-Cartan, αφορά την διατύπωση του τανυστή Riemann.

Πριν εξάγουμε τον τανυστή Riemann στο νέο φορμαλισμό, θα αποδείξουμε τη μορφή του όπως αυτή έχει στον συνήθη φορμαλισμό. Προκειμένου να γίνει αυτό, θα πρέπει να ποσοτικοποιήσουμε την καμπυλότητα της πολλαπλότητας. Επομένως παίρνουμε την παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $X^a(x)$, από δύο διαφορετικές διαδρομές στο ίδιο σημείο, οι οποίες σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Για τον αριστερόστροφο μετασχηματισμό, ($x^\alpha \to x^\alpha + \delta x^\alpha \to x^\alpha + \delta x^\alpha + dx^\alpha$), στο σημείο $x + \delta x$ έχουμε:

$$\begin{aligned} X^\alpha(x+\delta x) &= X^\alpha(x) + \tilde{\delta} X^\alpha(x) \\ &= X^\alpha(x) - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) X^\beta(x) \delta x^\gamma, \end{aligned} \tag{2.55}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ίδια έκφραση για το $\tilde{\delta} X^\alpha(x)$, όπως και στην περίπτωση της εύρεσης της συναλλοίωτης παραγώγου, (2.24).

Με την ίδια λογική στο σημείο $x + \delta x + dx$, θα έχουμε

$$X^\alpha(x+\delta x+dx) = X^\alpha(x+\delta x) + \tilde{\delta} X^\alpha(x+\delta x), \tag{2.56}$$

και αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση και ακολουθώντας την ίδια λογική,

$$X^\alpha(x+\delta x+dx) = X^\alpha(x) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) X^\beta(x) \delta x^\gamma + \tilde{\delta} X^\alpha(x+\delta x) \tag{2.57}$$

Το $\tilde{\delta} X^\alpha(x+\delta x)$, αντίστοιχα με το $\tilde{\delta} X^\alpha(x)$ θα ισούται με

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} X^\alpha(x+\delta x) &= -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x+\delta x) X^\beta(x+\delta x) dx^\gamma \\ &= -\left[\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) + \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x)\delta x^\delta\right]\left[X^\beta(x) - \Gamma^\beta{}_{\mu\nu}(x) X^\mu(x) \delta x^\nu\right] dx^\gamma \\ &= -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} X^\beta dx^\gamma - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} X^\beta \delta x^\delta dx^\gamma + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} X^\mu \delta x^\nu dx^\gamma + \\ &\quad + \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} X^\mu \delta x^\delta \delta x^\nu dx^\gamma. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Ο τελευταίος όρος είναι τρίτης τάξης ως προς τις σχεδόν απειροστές μετατοπίσεις, επομένως παραλείπεται ως αμελητέος. Εισάγοντας την τελευταία σχέση πίσω στην (2.57), και αλλάζοντας τους δείκτες των δx και dx στους τελευταίους δύο όρους, παίρνουμε

$$X^\alpha(x+\delta x+dx) = X^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}X^\beta\delta x^\gamma - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}X^\beta dx^\gamma - \partial_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}X^\beta\delta x^\gamma dx^\delta + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}X^\mu\delta x^\gamma dx^\nu. \tag{2.59}$$

Αντικαθιστώντας τον δείκτη ν με δ, τελικά

$$X^\alpha(x+\delta x+dx) = X^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}X^\beta\delta x^\gamma - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}X^\beta dx^\gamma - \partial_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}X^\beta\delta x^\gamma dx^\delta + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}X^\mu\delta x^\gamma dx^\delta. \tag{2.60}$$

Όμοια για τον δεξιόστροφο μετασχηματισμό, ($x^\alpha \to x^\alpha + dx^\alpha \to x^\alpha + dx^\alpha + \delta x^\alpha$), καταλήγουμε στην έκφραση

$$X^\alpha(x+\delta x+dx) = X^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}X^\beta dx^\delta - \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}X^\beta\delta x^\delta - \partial_\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}X^\beta dx^\delta\delta x^\gamma + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\Gamma^\beta{}_{\mu\delta}X^\mu dx^\delta\delta x^\gamma. \tag{2.61}$$

Η διαφορά των τελικών διανυσμάτων από τις δύο διαδρομές, τελικά είναι

$$\begin{aligned}\triangle X^\alpha &= X^\alpha(x+\delta x+dx) - X^\alpha(x+dx+\delta x)\\ &= \left(\partial_\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}X^\beta - \partial_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}X^\beta + \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}\Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}X^\mu - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\Gamma^\beta{}_{\mu\delta}X^\mu\right)\delta x^\gamma dx^\delta\\ &= \left(\partial_\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}\right)X^\beta\delta x^\gamma dx^\delta.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Έτσι, η διαφορά των τελικών διανυσμάτων τελικά γράφεται

$$\triangle X^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma}X^\beta\delta x^\gamma dx^\delta, \tag{2.63}$$

όπου

$$R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma} := \partial_\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \partial_\gamma\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}, \tag{2.64}$$

ο τανυστής καμπυλότητας Riemann.

Ο τανυστής Riemann μπορεί να εκφραστεί μέσω της διαφοράς $(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)e_{d\rho}$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)e_{d\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu}e^\sigma{}_d + (\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu})\nabla_\lambda e_{\rho d}. \tag{2.65}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση $R_{\rho\sigma\mu\nu} = e_\rho{}^a e_\sigma{}^b R_{ab\mu\nu}$, για να περάσουμε σε $2-$form, και την σχέση (2.35), βρίσκουμε

$$R_{ab\mu\nu} = \partial_\mu\omega_{\nu ab} - \partial_\nu\omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ac}\omega_\nu{}^c{}_b - \omega_{\nu ac}\omega_{\mu b}^{c}, \tag{2.66}$$

δηλαδή την έκφραση του Riemann ως $2-$form, συναρτήσει του veirbein και του spin connection. Χρησιμοποιώντας τα (2.45), (2.46) μαζί με την εξίσωση

$$R_{ab} = \frac{1}{2}R_{ab\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu = \frac{1}{2}R_{abcd}e^c\wedge e^d, \tag{2.67}$$

η οποία προκύπτει και αυτή από το γινόμενο wedge δύο $1-$forms[5], βρίσκουμε την έκφραση του τανυστή Riemann σε συμβολισμό Cartan:

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b, \tag{2.68}$$

η αποτελεί τη δεύτερη εξίσωση δομής Maurer-Cartan. Στην περίπτωση αυτή, αντί για τανυστή Riemann, μιλάμε για $2-$form καμπυλότητας (curvature 2-form).

Εάν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση αυτή τον συνήθη φορμαλισμό, μπορούμε να ανακτήσουμε την έκφραση του ορισμού του τανυστή Riemann, (2.64):

$$R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = e^\lambda{}_a e_\sigma{}^b(\partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b) \tag{2.69}$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (2.35), αντικαθιστούμε και εν τέλει καταλήγουμε πίσω στην σχέση ορισμού του τανυστή Riemann,

$$R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma} = \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}. \tag{2.70}$$

Από τη μορφή του curvature $2-$form, (2.67), μπορούμε να δούμε ότι είναι αντισυμμετρικό ως προς την εναλλαγή των δύο δεικτών του, δηλαδή παρουσιάζει πλήρη αντισυμμετρία. [4]

2.6 Δράση Palatini

Η δράση που παίρνουμε για να περιγράψει τη θεωρία μας θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με την δράση Einstein-Hilbert έτσι ώστε η περιγραφή της βαρύτητας να είναι απολύτως ισοδύναμη με αυτήν στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας [5]. Η μορφή που εξετάζουμε είναι η ακόλουθη:

$$S \propto \int \frac{1}{2}\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd}. \tag{2.71}$$

Χρησιμοποιούμε τον τελεστή δυϊκότητας Hodge, ο οποίος είναι ο τελεστής «star» (συμβολίζεται με «$*$»). Η απεικόνιση Hodge απεικονίζει $n-$forms σε $(m-n)-$forms, όπου m η διάσταση του χώρου, και ορίζεται ως εξής[6]

$$*(e^{a_1} \wedge ... \wedge e^{a_n}) := \frac{1}{(m-n)!}\epsilon^{a_1 ... a_n}{}_{a_{n+1} ... a_m} e^{a_{n+1}} \wedge ... \wedge e^{a_m}. \tag{2.72}$$

Εφαρμόζοντας, για $m = 4$ και $n = 2$, το γινόμενο star, παίρνουμε ότι

$$*(e_c \wedge e_d) = \frac{1}{2}\epsilon_{cdab} e^a \wedge e^b, \tag{2.73}$$

και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$S \propto \int *(e_a \wedge e_b) \wedge R^{ab}. \tag{2.74}$$

[5]βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ′.
[6]βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ′.

Από την εξίσωση (2.67), παίρνουμε

$$S \propto \int \frac{1}{2} * (e_a \wedge e_b) \wedge e^c \wedge e^d R^{ab}{}_{cd}, \tag{2.75}$$

δηλαδή

$$S \propto \int \frac{1}{2}(e_a \wedge e_b, e^c \wedge e^d) R^{ab}{}_{cd} \epsilon, \tag{2.76}$$

όπου $(e_a \wedge e_b, e^c \wedge e^d)$ το εσωτερικό γινόμενο των $(e_a \wedge e_b)$ και $(e^c \wedge e^d)$ και ϵ το στοιχείο όγκου[7].

Το στοιχείο όγκου, ϵ, ισούται με την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού, δηλαδή με $\sqrt{-g}d^4x$, συνεπώς το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$S \propto \int \frac{1}{2}(\delta^c_a \delta^d_b - \delta^c_b \delta^d_a) R^{ab}{}_{cd} \sqrt{-g} d^4x \tag{2.77}$$

$$= \int \frac{1}{2}(R^{ab}{}_{ab} - R^{ab}{}_{ba}) \sqrt{-g} d^4x \tag{2.78}$$

Χρησιμοποιούμε τη συμμετρία $R^{ab}{}_{cd} = -R^{ab}{}_{dc}$, η οποία ισχύει τόσο για τον τανυστή Riemann όσο και για το 2−form καμπυλότητας, και τελικά:

$$S \propto \int R \sqrt{-g} d^4x \tag{2.79}$$

Συγκρίνοντας με την δράση Einstein-Hilbert, (1.31), βλέπουμε ότι τελικά:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd}. \tag{2.80}$$

Η δράση αυτή ονομάζεται δράση Palatini, και όπως είδαμε, μπορεί να αναχθεί στην δράση Einstein-Hilbert. Με τη νέα διατύπωση, βλέπουμε ότι η δράση Palatini περιέχει μέχρι πρώτης τάξης όρους ως προς το vierbein και το spin connection, σε αντίθεση με την δράση Einstein-Hilbert η οποία περιέχει όρους δεύτερης τάξης ως προς τη μετρική. Γι΄ αυτό το λόγο η διατύπωση της βαρύτητας μέσω της δράσης Palatini ονομάζεται φορμαλισμός πρώτης τάξης, ενώ η διατύπωση μέσω της Einstein-Hilbert ονομάζεται φορμαλισμός δεύτερης τάξης. Έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα το να χρησιμοποιήσουμε τον φορμαλισμό πρώτης τάξης εάν θέλουμε να αντιμετωπίσουμε την βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας. Επίσης ο φορμαλισμός πρώτης τάξης, όπως έχουμε αναφέρει ξανά, επιτρέπει την εισαγωγή σπινόρων στη θεωρία, κάτι που είναι απαραίτητο για θεωρίες στις οποίες υπάρχει σύζευξη μεταξύ φερμιονίων και βαρύτητας.[5][6]

[7]βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε΄.

Κεφάλαιο 3

Η τετραδιάστατη Βαρύτητα Einstein ως Θεωρία Βαθμίδας

Η δράση Palatini είναι της μορφής $\int e \wedge e \wedge (d\omega + \omega^2)$. Εάν θέλουμε να αντιμετωπίσουμε το vierbein και το spin connection ως πεδία βαθμίδας, ποιοτικά η δράση αυτή θα είναι της μορφής $\int A \wedge A \wedge (dA + A^2)$. Μία δράση σαν την τελευταία δεν μπορεί να προέλθει απευθείας από θεωρία βαθμίδας [7], παρόλα αυτά όμως μπορεί να εξαχθεί έμμεσα μέσω μίας δράσης τύπου Yang-Mills, κάτω από κατάλληλο χειρισμό που θα δούμε παρακάτω. Αυτό το πρόβλημα υπάρχει συγκεκριμένα στις τέσσερεις διαστάσεις και δεν συναντάται γενικότερα, μιας και στην τρισδιάστατη περίπτωση η δράση που προκύπτει, $\int Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \rightarrow \int (AdA + A^3)$, είναι μία γενική δράση Chern-Simons, [7], στις τρεις διαστάσεις, και επομένως δίνει άμεσα Chern-Simons θεωρίες βαθμίδας.

3.1 Ανάκτηση των Torsion και Curvature 2-forms μέσω της συμμετρίας βαθμίδας Poincaré

Προκειμένου να περιγράψουμε τη βαρύτητα, απουσία κοσμολογικής σταθεράς, ως θεωρία βαθμίδας, θα χρησιμοποιήσουμε τον Φορμαλισμό Πρώτης Τάξης και θα πάρουμε ως ομάδα βαθμίδας, την ομάδα Poincaré, $ISO(1,3)$. Η άλγεβρα Poincaré αποτελείται από 10 γεννήτορες, 4 από την υποομάδα των μετατοπίσεων P^4, και 6 από την υποομάδα Lorentz, (1.5). Η άλγεβρα της ομάδας P^4 είναι η

$$[P_a, P_b] = 0, \tag{3.1}$$

ενώ η άλγεβρα της ομάδας Lorentz είναι η

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ac} M_{db} - \eta_{ad} M_{cb} - \eta_{bc} M_{da} + \eta_{bd} M_{ca}. \tag{3.2}$$

Η μεταθετική σχέση που συμπληρώνει την συνολική άλγεβρα Poincaré, είναι η

$$[P_a, M_{bc}] = \eta_{ab} P_c - \eta_{ac} P_b, \tag{3.3}$$

όπου $\eta = diag(-1,1,1,1)$ η μετρική Minkowski.

Ορίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο της θεωρίας η οποία εκφράζεται μέσω του πεδίου βαθμίδας A_μ,

$$D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot]. \tag{3.4}$$

Η συνοχή εδώ είναι το ίδιο το πεδίο A_μ, το οποίο γράφεται σε ανάπτυγμα πάνω στους γεννήτορες ως,

$$A_\mu(x) = A_\mu{}^a(x) P_a + A_\mu{}^{ab}(x) M_{ab}. \tag{3.5}$$

Στο ανάπτυγμα αυτό συμβολίζουμε τις συνιστώσες με $e_\mu{}^a, \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}$, τα οποία προς το παρόν είναι απλώς οι συνιστώσες του πεδίου βαθμίδας για μετασχηματισμούς μετατοπίσεων και μετασχηματισμούς Lorentz αντίστοιχα.

Ο νόμος μετασχηματισμού του πεδίου βαθμίδας, λόγω του συναλλοίωτου μετασχηματισμού της συναλλοίωτης παραγώγου, θα είναι:

$$\delta A_\mu = D_\mu \epsilon = \partial_\mu \epsilon + [A_\mu, \epsilon], \tag{3.6}$$

όπου $\epsilon = \epsilon(x)$ είναι η παράμετρος του μετασχηματισμού βαθμίδας. Το $\epsilon(x)$ αναλύεται κι αυτό πάνω στους γεννήτορες της $ISO(1,3)$ ως

$$\epsilon(x) = \xi^a(x) P_a + \frac{1}{2}\lambda^{ab}(x) M_{ab}, \tag{3.7}$$

όπου ξ^a και λ^{ab} είναι απειροστές παράμετροι. Με κατάλληλο συνδυασμό των τριών τελευταίων εξισώσεων καταλήγουμε στους μετασχηματισμούς των πεδίων βαθμίδας:

$$\delta e_\mu{}^a = \partial_\mu \xi^a + \omega_\mu{}^{ab}\xi_b - \lambda^a{}_b e_\mu{}^b, \tag{3.8}$$

$$\delta \omega_\mu{}^{ab} = \partial_\mu \lambda^{ab} + \lambda^a{}_c \omega_\mu{}^{bc} - \lambda^b{}_c \omega_\mu{}^{ac}. \tag{3.9}$$

Οι αντίστοιχοι τανυστές δύναμης πεδίου, $T_{\mu\nu}{}^a$ και $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ για τις συνιστώσες $e_\mu{}^a, \omega_\mu{}^{ab}$ θα βρεθούν μέσω του τανυστή δύναμης πεδίου του πεδίου βαθμίδας, A_μ, $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \Rightarrow \tag{3.10}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{3.11}$$

Αναλύοντας τον τανυστή δύναμης πεδίου, $R_{\mu\nu}$, πάνω στους γεννήτορες,

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}{}^a P_a + \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{ab} M_{ab}, \tag{3.12}$$

και συγκρίνοντας με την (3.10), μετά από αντικατάσταση του πεδίου βαθμίδας από την (3.5), παίρνουμε τελικά

$$T_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} e_{\nu b} - \omega_\nu{}^{ab} e_{\mu b} \tag{3.13}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac}\omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu{}^{ac}\omega_{\mu c}{}^b \tag{3.14}$$

Συγκρίνοντας με τις εκφράσεις (2.50) και (2.66), βλέπουμε ότι οι τανυστές δύναμης πεδίου του e και του ω είναι αντίστοιχα το torsion και το curvature 2-form που προκύπτουν από τον φορμαλισμό πρώτης τάξης της Γενικής Σχετικότητας, αλλά και ότι οι συνιστώσες του πεδίου βαθμίδας e και ω είναι αντίστοιχα το vierbein και το spin connection.

3.2 Εύρεση δράσης Yang-Mills με ομάδα συμμετρίας βαθμίδας την de Sitter $SO(1,4)$

Η προσπάθεια για να βρεθεί μία κατάλληλη δράση για τη θεωρία οδηγεί στο να προσπαθήσουμε να βρούμε μία τύπου Yang-Mills δράση της ομάδας βαθμίδας Poincaré. Μία τέτοια δράση, παρόλα αυτά, δεν μπορεί να είναι ισοδύναμη με την Einstein-Hilbert, αφού η μορφή της δεν μπορεί να εξαχθεί από δράση Yang-Mills, και επομένως να περιγράφει την Γενική Σχετικότητα ως θεωρία βαθμίδας. Παρόλα αυτά γίνεται να εξάγουμε τη βαρύτητα Einstein, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική συμμετρία από την Poincaré, μιας και η δράση που επιθυμούμε να διατυπώσουμε θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη μόνο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και όχι από γενικούς μετασχηματισμούς Poincaré. Έτσι, για να ελαττώσουμε την συμμετρία της δράσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν μηχανισμό αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας με την εισαγωγή ενός βαθμωτού πεδίου. Με αυτόν τον τρόπο, μία δράση τύπου Yang-Mills, μετά από την ελάττωση των επιπλέον βαθμών ελευθερίας, μπορεί να καταλήξει στην δράση Einstein-Hilbert[8], [9] [10], [11].

Αντί της ομάδας Poincaré, χρησιμοποιούμε ως ομάδα βαθμίδας, για την αρχική δράση Yang-Mills, την ομάδα de Sitter $SO(1,4)$. Κάνουμε αυτήν την επιλογή επειδή η ομάδα de Sitter $SO(1,4)$ έχει ίσο αριθμό γεννητόρων με την ομάδα Poincaré, μόνο που στην περίπτωση της πρώτης μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τους γεννήτορες ως ένα μόνο πεδίο βαθμίδας, ${\omega_\mu}^{AB}, A, B = 1...5$, αφού η de Sitter $SO(1,4)$ είναι ημι-απλή ομάδα[1], σε αντίθεση με την Poincaré η οποία όπως είδαμε έχει ως υποομάδα της την P^4 και λόγω της δομής της ως ημιευθύ γινόμενο της P^4 με την Lorentz, δεν επιτρέπει μια τέτοια ενοποιημένη αντιμετώπιση μεταξύ των γεννητόρων που προέρχονται από τις δύο υποομάδες της. Συνεπώς εισάγουμε το βαθμωτό πεδίο ϕ^a για την θεμελιώδη αναπαράσταση της $SO(1,4)$, μέσω του οποίο θα επέλθει το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας $SO(1,4) \to SO(1,3)$. Το σπάσιμο αυτό θα κρατήσει ανέπαφη τη συμμετρία Lorentz ενώ θα σπάσει η συμμετρία κάτω από τις μετατοπίσεις.

Η συνοχή βαθμίδας (gauge connection) της θεωρίας βαθμίδας $SO(1,4)$, είναι η

$$A_\mu = \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{AB} M_{AB} = \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{ab} M_{ab} + {e_\mu}^a P_a, \tag{3.15}$$

όπου ${\omega_\mu}^{AB}$ το πεδίο βαθμίδας και M_{AB} οι δέκα γεννήτορες της ομάδας $SO(1,4)$. Ο τανυστής δύναμης πεδίου είναι ο

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \Rightarrow$$

$${F_{\mu\nu}}^{AB} = \partial_\mu {\omega_\nu}^{AB} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{AB} + {\omega_\mu}^A{}_C {\omega_\nu}^{CB} - {\omega_\nu}^A{}_C {\omega_\mu}^{CB}, \tag{3.16}$$

Προκειμένου να κατασκευάσουμε τη δράση θα πρέπει να βρούμε αναλλοίωτες μορφές κάτω από μετασχηματισμούς $SO(1,4)$. Για να φτάσουμε σε δράση τύπου Yang-Mills, η

[1] Ημι-απλή (semisimple) είναι μία ομάδα εάν δεν έχει μη τετριμμένες αβελιανές ομάδες ως υποομάδες της.

μόνη αναλλοίωτη ποσότητα, η οποία να είναι πολυωνυμική σε όρους $F_{\mu\nu}$, που μπορούμε να κατασκευάσουμε είναι η λαγκραντζιανή πυκνότητα Pontryagin,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}{}^{AB} F_{\rho\sigma AB}, \tag{3.17}$$

η οποία δίνει τελικά την δράση της θεωρίας:

$$S = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}{}^{AB} F_{\rho\sigma AB}. \tag{3.18}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι μπορούμε να ακολουθήσουμε αντίστοιχη διαδικασία για την ομάδα anti-de Sitter $SO(2,3)$ και να καταλήξουμε σε δράση Yang-Mills η οποία επίσης να δίνει, έπειτα από σπάσιμο συμμετρίας, την δράση Einstein-Hilbert. Επίσης υπάρχουν και άλλες αναλλοίωτες ποσότητες (μη πολυωνυμικές ως προς τον τανυστή δύναμης πεδίου) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πυκνότητες για άλλου τύπου δράσεις οι οποίες επίσης γίνεται να καταλήξουν στην Einstein-Hilbert.

Προκειμένου να συμπεριλάβουμε στη θεωρία το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, όπως έχουμε πει, θα πρέπει να προσθέσουμε ένα βαθμωτό πεδίο ϕ^a. Η εισαγωγή του πεδίου αυτού γίνεται μαζί με μία παράμετρο m η οποία έχει διαστάσεις αντιστρόφου μήκους. Η δράση της θεωρίας, μετά τις παραπάνω τροποποιήσεις, γίνεται:

$$S_{SO(1,4)} = \int d^4x (im\phi^A \epsilon_{ABCDE} F_{\mu\nu}{}^{BC} F_{\rho\sigma}{}^{DE} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \lambda(\phi^A\phi_A + m^{-2})), \tag{3.19}$$

όπου η παράμετρος $\lambda = \lambda(x)$, ως πολλαπλασιαστής Lagrange, μετά από μεταβολή της δράσης, οδηγεί στον περιορισμό

$$\phi^A\phi_A = -m^{-2}. \tag{3.20}$$

Παίρνοντας την on-shell περίπτωση, όπου επιβάλλεται η τελευταία σχέση, και κάνοντας την επιλογή βαθμίδας:

$$\phi^A = (0, 0, 0, 0, -im^{-1}), \tag{3.21}$$

όπου συμβολίζουμε ως

$$\phi^A = (\phi^a, \phi^5) \Rightarrow \begin{cases} \phi^a(x) = 0 \\ \phi^5(x) = -im^{-1} \end{cases}, \tag{3.22}$$

μεταφέρουμε, λόγω της μη μηδενικής συνιστώσας, ϕ^5, το σπάσιμο συμμετρίας της $SO(1,4)$ στο little group της, $SO(1,3)$.

Αντικαθιστούμε την επιλογή βαθμίδας στη δράση και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S_{SO(1,3)} &= \int d^4x (im\phi^5 \epsilon_{5bcde} F_{\mu\nu}{}^{bc} F_{\rho\sigma}{}^{de} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \lambda(\cancel{\phi^5\phi_5}^{=-m^{-2}} + m^{-2})) \xrightarrow{\phi^5 = m^{-1}} \\ &= \int d^4x (\epsilon_{5bcde} F_{\mu\nu}{}^{bc} F_{\rho\sigma}{}^{de} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}). \end{aligned}$$

Τέλος, εξαλείφουμε τον άχρηστο πλέον δείκτη, 5, μετονομάζουμε τους υπόλοιπους κεφαλαίους δείκτες και παίρνουμε την τελική έκφραση της δράσης που φέρει την σπασμένη πλέον συμμετρία,

$$S_{SO(1,3)} = \int d^4x \epsilon_{abcd} F_{\mu\nu}{}^{ab} F_{\rho\sigma}{}^{cd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{3.23}$$

Η δράση αυτή διατηρεί μόνο τη συμμετρία Lorentz, και όχι ολόκληρη την $SO(1,4)$.

Οι συνιστώσες του πεδίου βαθμίδας, $e_\mu{}^a$ και $\omega_\mu{}^{a5}$, συνδέονται μεταξύ τους, λόγω της επιλογής βαθμίδας, μέσω της σχέσης $e_\mu{}^a = im^{-1}\omega_\mu{}^{a5}$. Αναλύοντας και τον τανυστή δύναμης πεδίου σε συνιστώσες, $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab} + F_{\mu\nu}{}^{a5}M_{a5}$, όπου $M_{a5} = im^{-a}P_a$, και συγκρίνοντας με την (3.16) και την (3.13), βλέπουμε τελικά ότι

$$F_{\mu\nu}{}^{a5} = -imT_{\mu\nu}{}^a, \tag{3.24}$$

όπου $T_{\mu\nu}{}^a$ ο τανυστής torsion, και

$$F_{\mu\nu}{}^{ab} = R_{\mu\nu}{}^{ab} + m^2(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - \epsilon_\nu{}^a e_\mu{}^b), \tag{3.25}$$

όπου $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ το curvature 2-form.

Παρατηρούμε ότι η δράση (3.23) δεν περιέχει το $F_{\mu\nu}{}^{a5}$, συνεπώς ο τανυστής torsion μπορεί να θεωρηθεί μηδενικός. Στο εξής, λοιπόν, θεωρούμε σε ισχύ την συνθήκη μηδενικής στρέψης (torsionless condition). Ο μηδενισμός αυτός, λόγω της πρώτης εξίσωσης από τις (3.13), δίνει:

$$\begin{aligned} \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} e_{\nu b} - \omega_\nu{}^{ab} e_{\mu b} &= 0 \\ e^\mu{}_c e^\nu{}_d (\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} e_{\nu b} - \omega_\nu{}^{ab} e_{\mu b}) &= 0. \end{aligned}$$

Εάν εναλλάξουμε κυκλικά τρεις φορές τους ελεύθερους λατινικούς δείκτες στην τελευταία εξίσωση, συνδυάζοντας τις τρεις εξισώσεις που προκύπτουν, παίρνουμε

$$\omega_{\mu ab} = \frac{1}{2}(\Omega_{\mu ab} - \Omega_{\mu ba} - \Omega_{ab\mu}), \tag{3.26}$$

όπου

$$\Omega_{abc} := 2e^\mu{}_a e^\nu{}_b \partial_{[\mu} e_{\nu]c}. \tag{3.27}$$

Τελικά, αντικαθιστούμε την (3.25) στη δράση και παίρνουμε:

$$S_{SO(1,3)} = \int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}\Big(R_{\mu\nu}{}^{ab} + m^2(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b)\Big)\Big(R_{\rho\sigma}{}^{cd} + m^2(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d)\Big)$$
$$= \int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}\Bigg(R_{\mu\nu}{}^{ab}R_{\rho\sigma}{}^{cd} + m^2\Big(R_{\mu\nu}{}^{ab}(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d) + R_{\rho\sigma}{}^{cd}(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b)\Big) +$$
$$+ m^4(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b)(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d)\Bigg)$$
$$= \int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}\Bigg(R_{\mu\nu}{}^{ab}R_{\rho\sigma}{}^{cd} + 2m^2(R_{\mu\nu}{}^{ab}(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d) +$$
$$+ m^4(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b)(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d)\Bigg)$$

Στην τελευταία έκφραση της δράσης ονομάζουμε σχηματικά τους όρους,

$$S_{SO(1,3)} = \int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}\Bigg(R_{\mu\nu}{}^{ab}R_{\rho\sigma}{}^{cd} + 2m^2 R_{\mu\nu}{}^{ab}(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d) + \quad (3.28)$$
$$+ m^4(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b)(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d - e_\sigma{}^c e_\rho{}^d)\Bigg) \rightarrow$$

$$S_{SO(1,3)} = \int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}\big(\mathcal{L}_{RR} + m^2\mathcal{L}_{eeR} + m^4\mathcal{L}_{eeee}\big). \quad (3.29)$$

Ο πρώτος όρος δε συνεισφέρει στις πεδιακές εξισώσεις επειδή είναι τοπολογικά αναλλοίωτος όρος Gauss-Bonnet. Ο δεύτερος όρος είναι το ανάλογο της δράσης Einstein-Hilbert. Ο τρίτος όρος είναι σταθερός και παίζει το ρόλο κοσμολογικής σταθεράς. Από αυτήν την δράση, οι λύσεις που προκύπτουν είναι ένας χώρος de Sitter,

$$F_{\mu\nu}{}^{ab} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu}{}^{ab} = m^2(e_\mu{}^a e_\nu{}^b - e_\nu{}^a e_\mu{}^b). \quad (3.30)$$

Η τετριμμένη λύση είναι (για $m = 0$) ο επίπεδος χώρος Minkowski.

Παρατηρούμε όμως ότι οι μετασχηματισμοί (3.8) και (3.9), δεν συμπίπτουν με αυτούς οι οποίοι προκύπτουν μέσω του Φορμαλισμού Πρώτης Τάξης της Βαρύτητας. Ο τελευταίος όρος των σχέσεων (3.8),(3.9), δεν αποτελεί πρόβλημα, μιας και είναι ένας τοπικός μετασχηματισμός Lorentz, καθώς το πεδίο λ είναι ο συντελεστής των γεννητόρων M της ομάδας Lorentz. Οι υπόλοιποι δύο όροι, παρόλα αυτά, δεν μπορούν να συσχετιστούν με κάτι ανάλογο κατευθείαν. Αποδεικνύεται ότι στην πραγματικότητα αποτελούν διαφορομορφισμούς, δηλαδή είναι ανάλογοι με μετασχηματισμούς συντεταγμένων και συνεπώς δεν κάνουν ασύμβατη τη θεωρία με την κλασσική Βαρύτητα Einstein.

Ας πάρουμε τους μετασχηματισμούς του veirbein και του spin connection κάτω από κάποιον διαφορομορφισμό ο οποίος παράγεται από ένα διάνυσμα υ^ν. Οι μετασχηματισμοί αυτοί διατυπώνονται μέσω της κατευθυντικής παραγώγου Lie στην κατεύθυνση υ^ν:

$$\tilde{\delta} e_\mu{}^a = \mathcal{L}_\upsilon e_\mu{}^a = \upsilon^\nu(\partial_\nu e_\mu{}^a - \partial_\mu e_\nu{}^a) + \partial_\mu(\upsilon^\nu e_\nu{}^a) \tag{3.31}$$

$$\tilde{\delta} \omega_\mu{}^{ab} = \mathcal{L}_\upsilon \omega_\mu{}^{ab} = \upsilon^\nu(\partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab}) + \partial_\mu(\upsilon^\nu \omega_\nu{}^{ab}). \tag{3.32}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη την (3.8) με την (3.31) και την (3.9) με την (3.32), αντικαθιστώντας $\xi^a \to e_\nu{}^a \upsilon^\nu$ και $\lambda^{ab} \to \omega_\nu{}^{ab}\upsilon^\nu$, και βρίσκουμε:

$$\tilde{\delta} e_\mu{}^a - \delta e_\mu{}^a = \upsilon^\nu(\partial_\nu e_\mu{}^a - \partial_\mu e_\nu{}^a) + e_{\mu b}\omega_\nu{}^{ab}\upsilon^\nu - \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b \upsilon^\nu \tag{3.33}$$

$$\tilde{\delta} \omega_\mu{}^{ab} - \delta \omega_\mu{}^{ab} = \upsilon^\nu(\partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab}) + \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^{cb}\upsilon^\nu - \omega_\mu{}^{ac}\omega_\nu{}^c{}_b \upsilon^\nu. \tag{3.34}$$

Συγκρίνοντας τις (3.33),(3.34) με τις (3.13), (3.14), βλέπουμε ότι τελικά:

$$\tilde{\delta} e_\mu{}^a - \delta e_\mu{}^a = -\upsilon^\nu T_{\mu\nu}{}^a \tag{3.35}$$

$$\tilde{\delta} \omega_\mu{}^{ab} - \delta \omega_\mu{}^{ab} = -\upsilon^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}. \tag{3.36}$$

Η εξίσωση (3.35) μηδενίζεται όταν είναι σε ισχύ η torsionless condition. Εδώ, όπως έχουμε δει παραπάνω, υιοθετούμε αναγκαστικά την torsionless condition, επομένως,

$$\tilde{\delta} e_\mu{}^a = \delta e_\mu{}^a. \tag{3.37}$$

Αντίστοιχα, η εξίσωση (3.36) στην on-shell περίπτωση, όπου η εξίσωση κίνησης δίνει $R_{\mu\nu}{}^{ab} = 0$, επίσης μηδενίζεται έτσι ώστε τελικά

$$\tilde{\delta} \omega_\mu{}^{ab} = \delta \omega_\mu{}^{ab} \qquad \text{on-shell}. \tag{3.38}$$

Καταλήγοντας, βλέπουμε ότι πράγματι οι μετασχηματισμοί βαθμίδας είναι ισοδύναμοι με μετασχηματισμούς διαφορομορφισμών on-shell. Η αναλλοιωτότητα της δράσης υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας, συνεπώς, είναι ισοδύναμη με την γενική συναλλοιωτότητα της θεωρίας, κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων και πράγματι επιβεβαιώνεται ότι η τετραδιάστατη Βαρύτητα Einstein, μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως θεωρία βαθμίδας $SO(1,3)$, η οποία έχει προέλθει από το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας της de Sitter $SO(1,4)$.

Κεφάλαιο 4

Η τετραδιάστατη Βαρύτητα Weyl ως Θεωρία Βαθμίδας

Η Βαρύτητα Weyl, όπως και η Βαρύτητα Einstein, μπορεί να αναπαραχθεί μέσω μίας θεωρίας βαθμίδας. Συγκεκριμένα, επιλέγοντας τη σύμμορφη (conformal) ομάδα $SO(2,4)$, ως ομάδα συμμετρίας βαθμίδας, μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτήν βάζοντας κάποιους περιορισμούς, και όχι μέσω αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας όπως στην περίπτωση της Einstein. Η $SO(2,4)$, όπως και η $SO(1,4)$ προηγουμένως, θα πρέπει να εμπεριέχει την γενική συμμετρία κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, έτσι ώστε η τελική θεωρία βαθμίδας που θα πάρουμε να είναι συναλλοίωτη.

Η ομάδα $SO(2,4)$ έχει 15 γεννήτορες, 6 γεννήτορες της υποομάδας Lorentz, M_{ab}, 4 γεννήτορες μετατοπίσεων, P_a, 4 γεννήτορες που αντιστοιχούν σε σύμμορφες προώσεις, K_a, και τον μετασχηματισμό κλίμακας D, (dilatation). Η άλγεβρα που σχηματίζουν είναι η

$$
\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cb}] &= \eta_{bc}M_{ad} + \eta_{ad}M_{bc} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} \\
[M_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \\
[M_{ab}, K_c] &= \eta_{bc}K_a - \eta_{ac}K_b \\
[P_a, D] &= P_a \\
[K_a, D] &= -K_a \\
[K_a, P_b] &= -2(\eta_{ad}D + M_{ab}),
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

όπου η η_{ab} είναι η κυρίως θετική τετραδιάστατη μετρική Minkowski. Προχωράμε στην κατασκευή της θεωρίας βαθμίδας με το να βρούμε την συνοχή βαθμίδας:

$$
A_\mu = e_\mu{}^a P_a + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}M_{ab} + b_\mu D + f_\mu{}^a K_a, \tag{4.2}
$$

όπου οι συναρτήσεις $e_\mu{}^a$, $\frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}$, b_μ, $f_\mu{}^a$ είναι τα επιμέρους πεδία βαθμίδας για κάθε γεννήτορα της $SO(2,4)$. Όπως και στην περίπτωση της Einstein, το πεδίο βαθμίδας που συσχετίζεται με τους γεννήτορες των μετατοπίσεων είναι το vierbein, ενώ αυτό για τους γεννήτορες της ομάδας Lorentz είναι το spin connection. Βρίσκουμε τον μετασχηματισμό του πεδίου βαθμίδας μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου, όπως και στην Einstein:

$$\delta A_\mu = D_\mu \epsilon = \partial_\mu \epsilon + [A_\mu, \epsilon]\,, \tag{4.3}$$

όπου $\epsilon = \epsilon(x)$, αυτή τη φορά θα είναι το

$$\epsilon = \xi^a P_a + \frac{1}{2}\lambda^{ab} M_{ab} + \kappa D + \rho^a K_a. \tag{4.4}$$

Συνδυασμός των (4.2), (4.3), (4.4) δίνει τους μετασχηματισμούς των επιμέρους πεδίων βαθμίδας:

$$\delta e_\mu{}^a = \partial_\mu \xi^a + \omega_\mu{}^a{}_b \xi^b - b_\mu \xi^a - \lambda^a{}_b e_\mu{}^b + \kappa e_\mu{}^a \tag{4.5}$$

$$\delta \omega_\mu{}^{ab} = \partial_\mu \lambda^{ab} - 2\omega_\mu{}^{ac} \lambda^b{}_c - 4 f_\mu{}^{[a} \xi^{b]} - 4 e_\mu{}^{[a} \rho^{b]} \tag{4.6}$$

$$\delta b_\mu = \partial_\mu \kappa - 2\xi^a f_{\mu a} + 2\rho^a e_{\mu a} \tag{4.7}$$

$$\delta f_\mu{}^a = \partial_\mu \rho^a + \omega_\mu{}^{ab} \rho_b + b_\mu \rho^a - \lambda^{ab} f_{\mu b} - \kappa f_\mu{}^a \tag{4.8}$$

Ο τανυστής δύναμης πεδίου της θεωρίας δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\,. \tag{4.9}$$

Αναλύοντας τον τανυστή δύναμης πεδίου πάνω στους γεννήτορες, παίρνουμε:

$$F_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu}{}^a P_a + \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{ab} M_{ab} + R_{\mu\nu} D + R_{\mu\nu}{}^a K_a. \tag{4.10}$$

Αντικαθιστώντας, τώρα, στην (4.9), το πεδίο βαθμίδας, παίρνουμε τον τανυστή δύναμης πεδίου συναρτήσει των επιμέρους πεδίων βαθμίδας. Συγκρίνοντας με την (4.10) τελικά παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$\tilde{R}_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} e_{\nu b} - \omega_\nu{}^{ab} e_{\mu b} - 2 b_{[\mu} e_{\nu]}{}^a \tag{4.11}$$

$$= T^{(0)a}_{\mu\nu} - 2 b_{[\mu} e_{\nu]}{}^a \tag{4.12}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \omega_\mu{}^{ac} \omega_\nu{}^b{}_c + \omega_\nu{}^{ac} \omega_\mu{}^b{}_c - 8 e_{[\mu}{}^{[a} f_{\nu]}{}^{b]} \tag{4.13}$$

$$= R^{(0)ab}_{\mu\nu} - 8 e_{[\mu}{}^{[a} f_{\nu]}{}^{b]} \tag{4.14}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu + 4 e_{[\mu}{}^a f_{\nu]a} \tag{4.15}$$

$$R_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu f_\nu{}^a - \partial_\nu f_\mu{}^a + \omega_\mu{}^{ab} f_{\nu b} - \omega_\nu{}^{ab} f_{\mu b} + 2 b_{[\mu} f_{\nu]}{}^a \tag{4.16}$$

όπου, $T^{(0)a}_{\mu\nu}$ και $R^{(0)ab}_{\mu\nu}$ είναι οι τετραδιάστατες συνιστώσες των τανυστών torsion και curvature 2-form, από την τετραδιάστατη βαρύτητα Einstein από το προηγούμενο κεφάλαιο.

Στη συνέχεια επιβάλλουμε κάποιους δεσμούς [12] έτσι ώστε να καταλήξουμε στην τελική συμμετρία που θα περιγράφει τη Βαρύτητα Weyl. Ανταλλάσσουμε τη συμμετρία κάτω από μετατοπίσεις με την συμμετρία κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, X. Η ομάδα βαθμίδας που παίρνουμε δηλαδή είναι η $H = (SO(2,4) - \{P\}) \otimes X$. Παίρνοντας την παράγωγο Lie πάνω στη διεύθυνση του v, βρίσκουμε το $\tilde{\delta} e_\mu{}^a$,

$$\tilde{\delta} e_\mu{}^a = \mathcal{L}_v e_\mu{}^a = v^\nu(\partial_\nu e_\mu{}^a + \partial_\mu e_\nu{}^a) - \partial_\mu(v^\nu e_\nu{}^a) \tag{4.17}$$
$$\tag{4.18}$$

και αφαιρώντας με τον μετασχηματισμό του vierbein, (4.5), μετά από τις αντικαταστάσεις, $\xi^a = v^\nu e_\nu{}^a, \quad \lambda^a{}_b = v^\nu \omega^a{}_{\nu h}$ και $\kappa = v^\nu b_\nu$, παίρνουμε αντίστοιχα με την Einstein:

$$\tilde{\delta} e_\mu{}^a - \delta e_\mu{}^a = v^\nu \left(\partial_\nu e_\mu{}^a - \partial_\mu e_\nu{}^a - \omega^a{}_{\mu b} e_\nu{}^b + \omega^a{}_{\nu b} e_\mu{}^b + b_\mu e_\nu{}^a - b_\nu e_\mu{}^a\right) = -v^\nu \tilde{R}_{\mu\nu}{}^a. \tag{4.19}$$

Δηλαδή έτσι ώστε να έχουμε συμμετρία κάτω από μετατοπίσεις, θα πρέπει να μηδενίσουμε τον τανυστή torsion $\tilde{R}_{\mu\nu}{}^a$. Αυτός είναι και ο δεσμός που επιβάλλουμε στην θεωρία, ο οποίος τελικά απαιτείται για να οδηγηθούμε σε ισοδύναμη θεωρία βαθμίδας με την βαρύτητα Weyl:

$$\tilde{R}_{\mu\nu}{}^a = 0. \tag{4.20}$$

Με τον περιορισμό αυτό, οι γεννήτορες των μετατοπίσεων σπάνε. Η επιθυμητή τελική συμμετρία, H, παράγεται από τους υπόλοιπους γεννήτορες, M, D και K. Ακόμα όμως για να φτάσουμε στη συμμετρία H, θα πρέπει να γίνει η ανταλλαγή και των υπολοίπων μετασχηματισμών με τους διαφορομορφισμούς, έτσι ώστε η ομάδα συμμετρίας να γίνει τελικά $SO(2,4) \to H$. Γι΄ αυτό το λόγο επιβάλουμε επίσης τον περιορισμό,

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} e_b{}^\nu = 0. \tag{4.21}$$

Η πρώτη συνθήκη οδηγεί στην σχέση που συνδέει το veirbein με το spin connection:

$$\omega_\mu^{ab} = -\frac{1}{2}\left(\hat{\Omega}_{\mu ab} - \hat{\Omega}_{\mu ba} - \hat{\Omega}_{ab\mu}\right) = -\omega_\mu{}^{ab}(e) + 2b^{[a} e_\mu^{b]}, \tag{4.22}$$

όπου $\hat{\Omega}_{abc} = 2 e_a{}^\mu e_b{}^\nu \hat{\partial}_{[\mu} e_{\nu]c}$, με την μερική παράγωγο να έχει αναβαθμιστεί στο σύμμορφο ανάλογό της, $\hat{\partial}_\mu e_\mu{}^a = (\partial_\mu + b_u)\, e_\mu{}^a$, το οποίο αποτελεί την συναλλοίωτη παράγωγο Weyl. Το $\omega_\mu{}^{ab}(e)$ είναι η σχέση μεταξύ spin connection και vierbein που προκύπτει στην Βαρύτητα Einstein ως θεωρία βαθμίδας, (3.26). Με την ίδια λογική ορίζουμε και τον τελεστή $\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}$, αντίστοιχα με τον $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ αλλά βάζοντας όπου ∂_μ την $\hat{\partial}_\mu$.

Ο δεύτερος δεσμός, (4.21), λόγω της (4.13) δίνει:

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} e_b{}^\nu = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu}^{(0)ab} e_b{}^\nu - 8 e_{[\mu}{}^{[a} f_{\nu]}{}^{b]} = 0, \tag{4.23}$$

όπου χρησιμοποιώντας την ανάλυση Weyl του τανυστή $R_{\mu\nu}{}^{ab}$,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}=C_{\mu\nu\rho\sigma}+\frac{2}{n-2}\left(g_{\mu[\rho}R_{\sigma]\nu}-g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu}\right)-\frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu}, \tag{4.24}$$

όπου $C_{\mu\nu\rho\sigma}$, τελικά παίρνουμε, κάνοντας χρήση των δύο τελευταίων σχέσεων:

$$R^{(0)ab}_{\mu\nu}e^{\nu}_{b}-8e_{[\mu}{}^{[a}f_{\nu]}{}^{b]}=0\Rightarrow\frac{1}{(n-1)(n-2)}e_{\mu}{}^{a}R-R_{\mu}{}^{a}=4f_{\mu}{}^{a}, \tag{4.25}$$

όπου $R^{a}_{\mu}=R^{(0)ab}_{\mu\nu}e_{b}{}^{\nu}$ και $R=e_{a}{}^{\mu}R_{\mu}{}^{a}$. Για $n=4$ προκύπτει ότι:

$$f_{\mu}{}^{a}=-\frac{1}{4}\left(R_{\mu}{}^{a}-\frac{1}{6}e_{\mu}{}^{a}R\right). \tag{4.26}$$

Μέσω των δύο δεσμών, βλέπουμε ότι προκύπτει ότι και το πεδίο f και το spin connection είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων πεδίων βαθμίδας e και b. Επίσης, στο πεδίο f, το οποίο σχετίζεται με τους ειδικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς (σύμμορφες προώσεις), έχει γίνει επιλογή βαθμίδας, λόγω του δεύτερου δεσμού.

Η αναλλοίωτη δράση υπό την συμμετρία H, λαμβάνοντας υπόψιν τους δύο δεσμούς, είναι:

$$S_W=\frac{1}{8a^2}\int d^4x\epsilon_{abcd}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(R_{\mu\nu}{}^{ab}R_{\rho\sigma}{}^{ab}\right)^{\omega(e,b)}_{f(e,b)}. \tag{4.27}$$

Για τον τανυστή $R_{\mu\nu}{}^{ab}$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\omega_{\mu}{}^{ab}(e,b)$ και $f_{\mu}{}^{a}(e,b)$, βρίσκουμε:

$$\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\right]^{f(e,b)}_{\omega(e,b)}=-\left(R^{(0)ab}_{\mu\nu}-2e_{[\mu}{}^{[a}R_{\nu]}{}^{b]}-\frac{1}{3}e_{[\mu}{}^{[a}e_{\nu]}{}^{b]}R\right)=-C_{\mu\nu}{}^{ab}, \tag{4.28}$$

όπου,

$$R^{(0)ab}_{\mu\nu}=R^{(0)ab}_{\mu\nu}(\omega(e))=-\left[\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega)\right]^{f_{\mu}{}^{a}=0}_{b_{\mu}=0}. \tag{4.29}$$

Βλέπουμε ότι ο τανυστής καμπυλότητας, $[\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega)]^{f_{\mu}{}^{a}=0}_{b_{\mu}=0}$, είναι ανεξάρτητος του πεδίου b_{μ}. Αυτό μας δίνει την ελευθερία να θέσουμε $b_{\mu}=0$, κάνοντας επιλογή βαθμίδας (βαθμίδα K). Μετά από αυτήν την επιλογή, το μόνο ανεξάρτητο πεδίο που βρίσκεται μέσα στη δράση, είναι το vierbein και επομένως η δράση είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας. Το πεδίο b_{μ} είναι το μοναδικό στη θεωρία το οποίο δεν μετασχηματίζεται τετριμμένα κάτω από μετασχηματισμούς K_a. Εφόσον η δράση δεν εξαρτάται από αυτό, τότε θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς K. Παρόλη την αναλλοιωτότητα της δράσης κάτω από D και K μετασχηματισμούς, η τελική συμμετρία της δράσης εξακολουθεί να δίνεται από την ομάδα H, και είναι στην ουσία οι Wey μετασχηματισμοί μαζί με τους διαφορομορφισμούς, αφού μετά την επιλογή βαθμίδας, οι ειδικοί σύμμορφοι μετασχηματισμοί δεν αποτελούν ανεξάρτητους μετασχηματισμούς. Η δράση, τελικά, γράφεται σε όρους του τανυστή Weyl ως εξής:

$$S_W=\frac{1}{2a^2}\int d^4x\sqrt{g}C_{\lambda\mu\nu\rho}C^{\lambda\mu\nu\rho}=\frac{1}{a^2}\int d^4x\sqrt{g}\left(R^2_{\mu\nu}-\frac{1}{3}R^2\right). \tag{4.30}$$

Επομένως, καταλήξαμε μέσα από το σπάσιμο συμμετρίας της σύμμορφης ομάδας $SO(2,4)$, στην γνωστή δράση Weyl.

Ένας άλλος τρόπος να καταλήξουμε στην δράση Weyl, θα ήταν να συμπεριλάβουμε στη θεωρία δύο βαθμωτά πεδία στην θεμελιώδη αναπαράσταση της $SO(2,4)$ και να οδηγηθούμε στην τελική συμμετρία Lorentz μέσω αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας. Με αυτήν την προσέγγιση οι δύο δεσμοί θα προέκυπταν μέσα από την θεωρία, χωρίς να πρέπει να επιβληθούν εξωτερικά.

Καταλήγοντας, είδαμε ότι ξεκινώντας από την σύμμορφη ομάδα συμμετρίας $SO(2,4)$ βρήκαμε μια συνοχή βαθμίδας και ένα πεδίο βαθμίδας για κάθε γεννήτορα. Έτσι ώστε να υπάρχει αναλλοιωτότητα υπό μετασχηματισμούς μετατοπίσεων της τελικής θεωρίας, προέκυψε ο δεσμός της torsionless condition και προκειμένου να υπάρχει γενική συναλλοιωτότητα επιβάλαμε και τον δεύτερο περιορισμό, (4.21). Ο πρώτος δεσμός οδήγησε στην εξάρτηση του spin connection από τα πεδία e, b, ενώ ο δεύτερος στην εξάρτηση του πεδίου f από το βαθμωτό Ricci και τον τανυστή Ricci. Συνεπώς οι δύο ομάδες των πεδίων βαθμίδας εκφράστηκαν συναρτήσει των υπολοίπων δύο. Η δράση που προέκυψε είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας και μάλιστα με ελευθερία να θέσουμε το αντίστοιχο πεδίο, $b_\mu = 0$, πράγμα το οποίο κάνει την δράση ανεξάρτητη του μοναδικού πεδίου που μετασχηματίζεται με μη τετριμμένο τρόπο κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς. Γι' αυτόν τον λόγο, η δράση προκύπτει αναλλοίωτη και κάτω από μετασχηματισμούς K. Παρόλα αυτά η K δεν είναι ανεξάρτητη συμμετρία μετά την επιλογή βαθμίδας, και άρα οι δύο συμμετρίες που παραμένουν είναι η συμμετρία κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, X, και η συμμετρία κάτω από μετασχηματισμούς Weyl, D. Συνεπώς, πράγματι η Βαρύτητα Weyl μπορεί να εκφραστεί ως θεωρία βαθμίδας της σύμμορφης ομάδας $SO(2,4)$.

Μέρος II

Η Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας σε Μη Μεταθετικούς Χώρους

Κεφάλαιο 5

Εισαγωγή στη μη μεταθετικότητα

Η ιδέα περί μη μεταθετικότητας του χώρου προέρχεται από την Κβαντομηχανική. Το γεγονός ότι μάλλον υπάρχει ελάχιστο μήκος (μήκος Planck) κάτω από το οποίο δεν εφαρμόζονται οι γνωστοί νόμοι της Φυσικής, καθώς και το ότι δύο χωρικές συντεταγμένες δεν γίνεται να μετρηθούν με απόλυτη ακρίβεια ταυτόχρονα, οδηγούν στην ιδέα της διακριτότητας του χώρου, η οποία εν γένει τον κάνει μη μεταθετικό[13], [14].

Στην Κβαντομηχανική ο φασικός χώρος της θέσης, x^i, και της ορμής, p_j, κβαντώνεται, έτσι ώστε αυτές τελικά να αντικαθίστανται από τους ερμητιανούς (ή και αντιερμητιανούς ισοδύναμα) τελεστές $\hat{x}^i$ και $\hat{p}_j$, οι οποίοι δεν μετατίθενται, αλλά υπακούν στην σχέση,

$$\left[\hat{x}^i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta_i{}^j. \tag{5.1}$$

Γενικά ένας χώρος μπορεί να κβαντωθεί εάν οι συντεταγμένες του, x^i, αντικατασταθούν από τελεστές, $\hat{x}^i$, μιας $C*$-άλγεβρας συναρτήσεων, A.

Μια C^*-άλγεβρα είναι μια μιγαδική άλγεβρα, A, συνεχών γραμμικών τελεστών πάνω σε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert με δύο ακόμα ιδιότητες:

- Η A είναι ένα τοπολογικά κλειστό σύνολο στην τοπολογία νόρμας των τελεστών.
- Η A κλείνει κάτω από την διαδικασία μετατροπής των τελεστών στους συζυγοανάστροφούς τους.

Εφόσον ισχύουν τα παραπάνω οι τελεστές συντεταγμένων υπακούν στην σχέση μετάθεσης,

$$\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\theta^{ij}(x), \tag{5.2}$$

όπου $\theta^{ij}(x)$ είναι μια ποσότητα εξαρτώμενη από τις συντεταγμένες η οποία παραμετροποιεί το είδος της μη μεταθετικότητας του χώρου.

5.1 Αναπαράσταση με πίνακες

Η άλγεβρα C^* είναι μια προσεταιριστική και επιλεκτικά μεταθετική άλγεβρα. Το πιο τυπικό παράδειγμα μιας τέτοιας μεταθετικής άλγεβρας, είναι αυτό των συναρτήσεων πάνω σε μια πολλαπλότητα M, οι οποίες λαμβάνουν μιγαδικές τιμές και έχουν ως διμελείς πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{και} \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x). \tag{5.3}$$

Ένα τυπικό παράδειγμα μη μεταθετικής άλγεβρας είναι η άλγεβρα των μιγαδικών πινάκων $N \times N$, $Mat(N, \mathbb{C})$. Η άλγεβρα αυτή γενικεύεται με το να αντλούνται τα στοιχεία της από την άλγεβρα A. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται όπως και στην περίπτωση της A. Η αναπαράσταση με πίνακες μιας μη μεταθετικής άλγεβρας, με τελεστές ως στοιχεία, αποτελεί πολύ ομαλό τρόπο αντιμετώπισης της άλγεβρας αυτής, αφού είναι σε ταύτιση με την οπτική της Κβαντομηχανικής, όπου οι διαφορικοί τελεστές αναπαρίστανται ως πίνακες που δρούν σε διανύσματα του χώρου Hilbert.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε μη μεταθετικές θεωρίες πεδίου, θα πρέπει να ορίσουμε τους τελεστές παραγώγισης, e_i και ολοκλήρωσης, $\int Tr$. Αυτοί οι τελεστές θα πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

- τον κανόνα του Leibniz, $e_i(A, B) = e_i(A)B + Ae_i(B)$, ο οποίος, μαζί με την γραμμικότητα των τελεστών, οδηγεί στον μηδενισμό της παραγώγου ενός βαθμωτού,
- τον μηδενισμό του ολοκληρώματος του ίχνους μιας ολικής παραγώγου, $\int Tr e_i(A) = 0$,
- τον μηδενισμό του ολοκληρώματος του ίχνους ενός μεταθέτη, $\int Tr[A, B] = 0$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες, ένας υποψήφιος για την παραγώγιση είναι ο $e_i(A) = [d_i, A]$, όπου d_i ένα στοιχείο της άλγεβρας A. Εφόσον η έννοια της ολοκλήρωσης και του ίχνους, σε μη μεταθετικές άλγεβρες, ταυτίζονται, η ολοκλήρωση από εδώ και στο εξής θα γίνεται μέσω του ίχνους μόνο.

Υιοθετούμε την αναπαράσταση των τελεστών ως πίνακες, μιας και σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς της παραγώγισης και ολοκλήρωσης, μας επιτρέπει να μελετήσουμε μη μεταθετικές θεωρίες πεδίου.

5.1.1 Η κανονική περίπτωση

Σε προηγούμενη παράγραφο, το θ^{ij} της εξίσωσης (5.2), εξέφραζε την παραμετροποίηση της μη μεταθετικότητας του χώρου. Ασχέτως με το εάν έχουμε επιλέξει ερμητιανούς ή αντιερμητιανούς τελεστές, το θ^{ij} είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, εφόσον ο μεταθέτης στο αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι πάντα αντισυμμετρικός.

Η « κανονική περίπτωση » είναι το απλούστερο παράδειγμα μη μεταθετικότητας, όπου το θ^{ij} είναι ένας $N \times N$ σταθερός μιγαδικός αντισυμμετρικός τανυστής, ανεξάρτητος συντεταγμένων. Η σχέση μετάθεσης των συντεταγμένων σε έναν τέτοιο χώρο είναι η:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \quad i, j = 1, ..., N. \tag{5.4}$$

Οι χώροι για τους οποίους ισχύει η παραπάνω σχέση, συμβολίζονται ως $\mathbb{R}^N_\theta$ και συγκεκριμένα για την περίπτωση όπου $N = 2$, ο $\mathbb{R}^2_\theta$ ονομάζεται χώρος (ή επίπεδο) Moyal.

5.1.2 Η Lie-τύπου περίπτωση

Η περίπτωση στην οποία η παράμετρος θ^{ij} εξαρτάται γραμμικά από της συντεταγμένες, ονομάζεται Lie-τύπου μη μεταθετικότητα. Η σχέση μεταθετικότητας είναι η:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = iC^{ij}{}_k \hat{x}^k, \quad i, j = 1, ..., N, \tag{5.5}$$

όπου $C^{ij}{}_k$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Η μορφή αυτή είναι πολύ παρόμοια με την δομή μιας Lie άλγεβρας και γι΄ αυτό το λόγο ονομάζεται Lie-τύπου περίπτωση. Ειδικά στην περίπτωση όπου $N = 3$, η εξίσωση (5.5) ταυτίζεται στην πραγματικότητα με τον ορισμό της άλγεβρας $SU(2)$. Η ασαφής σφαίρα, S^2_F, βασίζεται ακριβώς σε αυτό, όπως θα δούμε παρακάτω.

5.1.3 Κβάντωση Weyl

Υπάρχει και ένας εναλλακτικός τρόπος να μελετήσουμε μη μεταθετικές θεωρίες πεδίου, και αυτός είναι να συσχετίσουμε τους τελεστές μιας μη μεταθετικής άλγεβρας με κοινές συναρτήσεις οι οποίες κατά τα άλλα μετατίθενται, και όχι με πίνακες, αλλά να ορίσουμε μια νέα μη μεταθετική διμελή πράξη στη θέση του απλού γινομένου Με αυτόν τον τρόπο η μη μεταθετικότητα θα οφειλόταν στην ίδια την πράξη του γινομένου και όχι στα στοιχεία της ομάδας. Με άλλα λόγια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια απεικόνιση από τελεστές που δεν μετατίθενται, σε συναρτήσεις που μετατίθενται, και συγχρόνως να αναβαθμίσουμε το κοινό γινόμενο σε ένα νέο μη μεταθετικό $*-$γινόμενο σύμφωνα με το οποίο θα πολλαπλασιάζονται οι συναρτήσεις. Η αντιστοιχία από τελεστές σε συναρτήσεις είναι ένα-προς-ένα και ονομάζεται αντιστοιχία Weyl, ή αλλιώς κβάντωση Weyl.

Ένα από τα πιθανά γινόμενα μεταξύ συναρτήσεων τα οποία μπορούν να παίξουν αυτόν τον ρόλο (το συγκεκριμένο που θα πούμε αφορά την κανονική περίπτωση), ορίζεται ως εξής:

$$\begin{gathered} f \star g = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n p e^{i(k_j + p_j)x^j - \frac{i}{2} k_i \theta^{ij} p_j} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \Rightarrow \\ f \star g = e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i}} f(x) g(x) \Big|_{y \to x}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Το γινόμενο αυτό ονομάζεται γινόμενο Moyal-Weyl, και προκύπτει ότι μεταξύ συντεταγμένων εκφράζεται ως εξής:

$$x_i \star x_j = \left(1 + \frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) x_i x_j = x_i x_j + \frac{i}{2}\theta^{ij} \tag{5.7}$$

και αντίστοιχα,

$$x_j \star x_i = x_i x_j - \frac{i}{2}\theta^{ij}. \tag{5.8}$$

Η μεταθετική σχέση που προκύπτει με αυτήν την θεώρηση είναι πράγματι η εξής:

$$\left[x_i \stackrel{\star}{,} x_j\right] = i\theta^{ij}, \quad i,j = 1,...,N, \tag{5.9}$$

η οποία, όπως βλέπουμε, είναι σε συμφωνία με την (5.4), η οποία για ερμητιανούς τελεστές συντεταγμένων παίρνει τη μορφή:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \quad i,j = 1,...,N, \tag{5.10}$$

δηλαδή ακριβώς την ίδια με την (5.9).

Συνεπώς, μπορούμε πράγματι να περιγράψουμε έναν μη μεταθετικό χώρο μεταφέροντας την πληροφορία της μη μεταθετικότητας, από τα στοιχεία της ομάδας, στο γινόμενο που ορίζεται μεταξύ του.

5.2 Η Ασαφής Σφαίρα (Fuzzy Σφαίρα)

Η απλούστερη περίπτωση Lie-τύπου μη μεταθετικού χώρου, είναι η ασαφής σφαίρα S_F^2. Ένας ασαφής χώρος ορίζεται ως μία διακριτή προσέγγιση μιας συνεχούς πολλαπλότητας, με τον περιορισμό να διατηρεί τις ισομετρίες. Δηλαδή, πρόκειται για ένα μη μεταθετικό χώρο ο οποίος διατηρεί τις ισομετρίες του μεταθετικού ανάλογού του.

Η συνήθης σφαίρα S^2 μπορεί να οριστεί ως μία υποπολλαπλότητα διάστασης 2 ενός Ευκλείδιου χώρου διάστασης 3, $\mathbb{R}^3$, με τις καρτεσιανές της συντεταγμένες να ικανοποιούν την συνθήκη:

$$\sum_{a=1}^{3} x_a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, \qquad a = 1,2,3, \tag{5.11}$$

όπου R είναι η ακτίνα της σφαίρας. Η σφαίρα αυτή είναι συμμετρική ως προς τις τρισδιάστατες στροφές, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς της ομάδας ισομετριών, $SO(3)$ [13]. Η ομάδα $SO(3)$ έχει τρεις γεννήτορες, οι οποίοι αποτελούν τους τελεστές στροφορμής σε κάθε μια από τις τρεις διαστάσεις, και ορίζονται ως εξής:

$$L_a = -i\epsilon_{abc} x_b \partial_c. \tag{5.12}$$

Οι γεννήτορες αυτοί μπορούν επίσης να εκφραστούν και ως προς τις σφαιρικές συντεταγμένες:

$$L_a = -\xi_a^i \partial_i, \text{ όπου } i = \theta, \phi \tag{5.13}$$

και ξ^a οι συνιστώσες των διανυσμάτων Killing. Ο τελεστής Laplace ορίζεται πάνω στη σφαίρα ως εξής:

$$L^2 = -R^2 \Delta_{S^2} = -R^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{g} \partial_j \right), \tag{5.14}$$

όπου g_{ij} είναι η μετρική της σφαίρας. Τα ιδιοδιανύσματα των παραπάνω τελεστών είναι οι γνωστές σφαιρικές αρμονικές,

$$Y_l^m(\theta, \phi) = N e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta), \tag{5.15}$$

όπου P_l^m τα αντίστοιχα πολυώνυμα Legendre. Οι σφαιρικές αρμονικές ακολουθούν την σχέση ορθοκανονικότητας:

$$\int d\Omega Y_{lm}^{\dagger} Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \tag{5.16}$$

Έστω μια συνάρτηση $f(\theta, \phi)$ πάνω στην S^2. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να αναλυθεί πάνω στο πλήρες σύνολο των σφαιρικών αρμονικών ως εξής:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \tag{5.17}$$

όπου c_{lm} μιγαδικές παράμετροι.

Πάνω στην ασαφή σφαίρα οι συναρτήσεις $f(\theta, \phi)$, εφόσον εξαρτώνται από τις συντεταγμένες, θα πρέπει να μη μετατίθενται κάτω από το απλό γινόμενο. Προκειμένου να διακριτοποιηθεί ο χώρος, αντικαθιστούμε το άπειρο σύνολο των σφαιρικών αρμονικών Y_{lm} με τις φραγμένες συναρτήσεις, μέχρι κάποιο $l = N$, $\hat{Y}_{lm}$. Η συνάρτηση $\hat{f}(\theta, \phi)$ αναλύεται πάνω στο σύνολο των $\hat{Y}_{lm}$ ως εξής [15]:

$$\hat{f} = \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} \hat{Y}_{lm}. \tag{5.18}$$

Το γινόμενο δύο τέτοιων συναρτήσεων θα πρέπει να εμπεριέχει όρους που να υπερβαίνουν το όριο του $l = N$. Αυτό σημαίνει ότι η περικομμένη άλγεβρα των συναρτήσεων δεν κλείνει κάτω από τον πολλαπλασιασμό. Ένας τρόπος να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό είναι να επαναορίσουμε το γινόμενο των συναρτήσεων, έτσι ώστε ο πολλαπλασιασμός τους να μην ξεπερνάει το όριο $l = N$. Το γινόμενο αυτό είναι το γινόμενο μεταξύ πινάκων, το οποίο φυσικά είναι μη μεταθετικό. Συνεπώς, γίνεται να αντικαταστήσουμε την απειροδιάστατη μεταθετική άλγεβρα των συναρτήσεων, με μια πεπερασμένη $N+1$-διάστατη μη μεταθετική άλγεβρα, και έτσι να κατασκευάσουμε την ασαφή σφαίρα. Γι΄ αυτό το λόγο οι ασαφείς χώροι, γενικά, θεωρούνται προσεγγίσεις, με χρήση πινάκων, συνήθων συνεχών χώρων.

Ο απλούστερος τρόπος να διατυπώσουμε την ασαφή σφαίρα είναι να πάρουμε μια τέτοια περικομμένη άλγεβρα πινάκων πάνω σε έναν, πεπερασμένης διάστασης, διανυσματικό χώρο. Παίρνουμε τρεις $(N+1)$-διάστατους πίνακες, $J_a, a = 1,2,3$, οι οποίοι σχηματίζουν μια βάση για την $(N+1)$-διάστατη μη αναγώγιμη αναπαράσταση της $SU(2)$. Η άλγεβρα των γεννητόρων J_a, είναι η:

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c. \tag{5.19}$$

Εφόσον η αναπαράσταση, με τους πίνακες αυτούς, των γεννητόρων J_a, είναι μη αναγώγιμη, μπορούμε να βρούμε τον τελεστή Casimir για αυτήν την $N+1$-διάστατη αναπαράσταση:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)1_{N+1}, \tag{5.20}$$

όπου 1_{N+1} ο $N+1$-διάστατος ταυτοτικός πίνακας.

Συνεπώς, η ασαφής σφαίρα, S_F^2, είναι ο μη μεταθετικός χώρος με συναρτήσεις συντεταγμένων τις $\hat{X}_a = \hat{X}^a, a = 1,2,3$, οι οποίες ορίζονται ως οι $(N+1)\times(N+1)$ ερμητιανοί πίνακες που είναι ανάλογοι των γεννητόρων J_a της $(N+1)$-διάστατης μη αναγώγιμης αναπαράστασης της $SU(2)$:

$$\hat{X}_a = \kappa J_a, \tag{5.21}$$

όπου κ είναι μια σταθερά αναλογίας, διάστασης μήκους, η οποία καθορίζεται από τον δεσμό στον οποίο πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες:

$$\sum_{a=1}^{3}\hat{X}_a\hat{X}_a = \hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 + \hat{X}_3^2 = r^2, \tag{5.22}$$

όπου r η ακτίνα της ασαφούς σφαίρας. Λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (5.20) και αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.21) και (5.22), παίρνουμε ότι η σταθερά κ ισούται με:

$$\kappa = \frac{r}{\sqrt{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)}} = \lambda_N r, \tag{5.23}$$

όπου $\lambda_N := \dfrac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)}}$. Επαναδιατυπώνουμε την άλγεβρα των γεννητόρων J_a ως:

$$\left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] = i\kappa\epsilon_{abc}\hat{X}_c = i\lambda_N C_{abc}\hat{X}_c, \tag{5.24}$$

όπου $C_{abc} = r\epsilon_{abc}$.

Μπορούμε κάνουμε την αντικατάσταση:

$$X_a = \frac{1}{i\kappa r}\hat{X}_a = \frac{1}{ir}J_a, \tag{5.25}$$

έτσι ώστε να δουλέψουμε με τους αντιερμητιανούς τελεστές, X_a, και να πάρουμε τις σχέσεις

$$[X_a, X_b] = C_{abc} X_c \tag{5.26}$$

και

$$\sum_{a=1}^{3} X_a X_a = -\frac{\lambda_N^{-2}}{r^2}, \tag{5.27}$$

όπου $C_{abc} = \dfrac{\epsilon_{abc}}{r}$. Και στις δυο περιπτώσεις οι περιγραφές της άλγεβρας της ασαφούς σφαίρας είναι ισοδύναμες.

Οι νέες σφαιρικές αρμονικές που χρησιμοποιήσαμε ονομάζονται ασαφείς σφαιρικές αρμονικές και ισούνται με

$$\hat{Y}_{lm} = r^{-l} \sum_{\vec{a}} f^{(lm)}_{a_1 \dots a_l} \hat{X}^{a_1} \dots \hat{X}^{a_l}, \tag{5.28}$$

όπου $f^{(lm)}_{a_1 \dots a_l}$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής της $SO(3)$ τάξης l και μηδενικού ίχνους. Τέλος, οι ασαφείς σφαιρικές αρμονικές υπακούν στην ιδιότητα ορθοκανονικότητας:

$$\mathrm{Tr}_N \left(\hat{Y}^{\dagger}_{lm} \hat{Y}_{l'm'} \right) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{5.29}$$

Κεφάλαιο 6

Θεωρίες βαθμίδας σε ασαφείς χώρους

6.1 Κατασκευή θεωριών βαθμίδας σε ασαφείς χώρους

Προκειμένου να χτίσουμε μια θεωρία βαθμίδας σε έναν ασαφή χώρο, θα πρέπει να εισαγάγουμε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(X)$ - στοιχείο της άλγεβρας A, και μιας ομάδας βαθμίδας G [14], [16]. Ένας απειροστός μετασχηματισμός βαθμίδας δίνεται από τη σχέση:

$$\delta\phi(X) = i\alpha(X)\phi(X), \tag{6.1}$$

η οποία αποτελεί συναλλοίωτο μετασχηματισμό για το πεδίο $\phi(X)$, και με το $a(X)$ να είναι μία απειροστή παράμετρος βαθμίδας εξαρτώμενη από τις συντεταγμένες, που αποτελεί τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας. Επίσης, η παράμετρος $a(X)$ μπορεί να είναι αβελιανή ή και μη αβελιανή ανάλογα με την ομάδα στην οποία ανήκει. Εάν το $a(X)$ ανήκει στην άλγεβρα A, η οποία έχει ως στοιχεία σειρές, τότε είναι αβελιανός μετασχηματισμός, ενώ, εάν ανήκει στην ομάδα $Mat(A)$, η οποία έχει ως στοιχεία πίνακες, τότε είναι μη αβελιανός μετασχηματισμός. Ο μετασχηματισμός βαθμίδας πάνω στις ίδιες τις συντεταγμένες δεν επιφέρει καμία αλλαγή, δηλαδή

$$\delta X_a = 0. \tag{6.2}$$

Παρόλα αυτά στις συνήθεις θεωρίες βαθμίδας ο μετασχηματισμός της μερικής παραγώγου ενός πεδίου, $(\partial_\mu\phi(x))'$, δεν είναι συναλλοίωτος, και αντίστοιχα και στην περίπτωση ασαφούς χώρου, ο μετασχηματισμός του γινομένου $X_a\phi(X)$ είναι:

$$\delta\left(X_a\phi(X)\right) = iX_a a(X)\phi(X), \tag{6.3}$$

δηλαδή μη συναλλοίωτος, αφού $iX_a a(X)\phi(X) \neq ia(X)X_a\phi(X)$ και τόσο το X_a όσο και το $a(X)$ αποτελούν στοιχεία μη μεταθετικής άλγεβρας. Συνεπώς, για να προχωρήσουμε, χρειαζόμαστε μια αναβάθμιση της μερικής παραγώγου, όπως και στις συνήθεις θεωρίες βαθμίδας, έτσι ώστε να μετασχηματίζεται συναλλοίωτα. Το ασαφές ανάλογο της συναλλοίωτης παραγώγου ονομάζεται συναλλοίωτη συντεταγμένη και συμβολίζεται ως $\hat{X}_a$. Εξ ορισμού η συναλλοίωτη συντεταγμένη ικανοποιεί τον μετασχηματισμό:

$$\delta\left(\hat{X}_a\phi(X)\right) = ia(X)\hat{X}_a\phi(X). \tag{6.4}$$

Από αυτήν την εξίσωση, βρίσκουμε το μετασχηματισμό της συναλλοίωτης συντεταγμένης $\hat{X}_a$:

$$\delta\hat{X}_a = i\left[a(x), \hat{X}_a\right]. \tag{6.5}$$

Η συναλλοίωτη συντεταγμένη, σχετίζεται με τη συντεταγμένη, X_a, ως εξής:

$$\hat{X}_a = X_a + A_a(X), \tag{6.6}$$

όπου το $A_a(x)$ είναι στοιχείο της άλγεβρας A και αποτελεί το μη μεταθετικό ανάλογο της συνοχής βαθμίδας. Από την εξίσωση (6.5), βρίσκουμε τον μετασχηματισμό του:

$$\delta A_a = i\left[a(X), A_a(X)\right] - i\left[X_a, a(X)\right]. \tag{6.7}$$

Στη συνέχεια, προχωράμε στην εύρεση του τανυστή δύναμης πεδίου σε μια τέτοια θεωρία.

Τανυστής δύναμης πεδίου στην κανονική περίπτωση

Στην κανονική περίπτωση, ο τανυστής δύναμης πεδίου ορίζεται ως εξής:

$$T_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - i\theta_{ab}. \tag{6.8}$$

Αντικαθιστώντας την (6.6), βρίσκουμε την σχέση:

$$T_{ab} = \left[X_a, A_b\right] - \left[X_b, A_a\right] + \left[A_a, A_b\right], \tag{6.9}$$

η οποία έχει εμφανή αναλογία με τα αποτελέσματα από συνήθη θεωρία βαθμίδας, μιας και οι μεταθέτες παίζουν τον αντίστοιχο ρόλο της παραγώγισης σε μια συνήθη θεωρία. Ο μετασχηματισμός του τανυστή δύναμης πεδίου, είναι:

$$\delta T_{ab} = \left[X_a, \delta A_b\right] - \left[X_b, \delta A_a\right] + \left[\delta A_a, A_b\right] + \left[A_a, \delta A_b\right]. \tag{6.10}$$

Αντικαθιστώντας την (6.7), και κάνοντας χρήση της ταυτότητας Jacobi, βρίσκουμε τελικά:

$$\delta T_{ab} = i\left[a, T_{ab}\right]. \tag{6.11}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, βλέπουμε ότι ο τανυστής δύναμης πεδίου μετασχηματίζεται συναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Τανυστής δύναμης πεδίου στην Lie-τύπου περίπτωση
Στην περίπτωση Lie-τύπου, ο σχετιζόμενος τανυστής δύναμης πεδίου ορίζεται ως εξής:

$$F_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - iC_{ab}{}^c\hat{X}_c, \tag{6.12}$$

όπου το $C_{ab}{}^c$ σχετίζεται με τον πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως και στην κανονική περίπτωση, παίρνουμε αντίστοιχα την μορφή του τανυστή δύναμης πεδίου:

$$F_{ab} = [X_a, A_b] - [X_b, A_a] + [A_a, A_b] - iC_{ab}{}^c A_c, \tag{6.13}$$

και τον αντίστοιχο μετασχηματισμό βαθμίδας του:

$$\delta F_{ab} = i\left[a, F_{ab}\right], \tag{6.14}$$

ο οποίος επίσης προκύπτει συναλλοίωτος.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία μη αβελιανή ομάδα, G, με γεννήτορες T^a, παράμετρο βαθμίδας $\epsilon(X)$ και πεδία βαθμίδας $A_m(x)$. Ο μεταθέτης $[\epsilon, A]$ συναντάται στην κατασκευή της μη μεταθετικής θεωρίας και μπορεί να γραφεί ως:

$$[\epsilon, A] = \left[\epsilon^a T^a, A^b T^b\right] = \frac{1}{2}\left\{\epsilon^a, A^b\right\}\left[T^a, T^b\right] + \frac{1}{2}\left[\epsilon^a, A^b\right]\left\{T^a, T^b\right\} \tag{6.15}$$

Στις συνήθεις θεωρίες βαθμίδας, ο αντιμεταθέτης του πρώτου όρου αποτελεί γινόμενο δύο όρων, ενώ ο μεταθέτης του δεύτερου όρου μηδενίζεται αφού πρόκειται για μεταθέτη συναρτήσεων της θέσης. Συνεπώς ο αντιμεταθέτης $\left\{T^a, T^b\right\}$ δεν εμφανίζεται στη θεωρία. Παρόλα αυτά στη μη μεταθετική περίπτωση, ο μεταθέτης αυτός υπάρχει. Εν γένει ένας αντιμεταθέτης σε μία Lie άλγεβρα δεν επιστρέφει γεννήτορες της άλγεβρας, αλλά στοιχεία που δεν ανήκουν σε αυτή. Έτσι, εφόσον οι αντιμεταθέτες δεν κλείνουν, η αρχική άλγεβρα δεν καλύπτει την θεωρία πράγμα το οποίο μας οδηγεί σε αλλεπάλληλες επεκτάσεις της, οι οποίες εν γένει θα παρουσιάζουν διαρκώς το ίδιο πρόβλημα. Εν τέλει δηλαδή, επιλέγοντας αυτήν την οδό θα καταλήξουμε σε μία απειροδιάστατη άλγεβρα η οποία θα πρέπει οπωσδήποτε να εμπεριέχει οποιοδήποτε στοιχείο στο οποίο κλείνουν οι αντιμεταθέτες. Μια απειροδιάστατη άλγεβρα δημιουργεί πάρα πολλά προβλήματα στη χρήση της για τον σκοπό μας, συνεπώς πρέπει να βρεθεί ένας εναλλακτικός τρόπος για να λυθεί το πρόβλημα. Ο τρόπος αυτός είναι το να επιλέξουμε κάποια κατάλληλη αναπαράσταση των γεννητόρων, η οποία να δίνει αντιμεταθέτες που να παράγουν περιορισμένο αριθμό στοιχείων εκτός άλγεβρας. Τα στοιχεία αυτά, έπειτα, μπορούν να ενσωματωθούν στην αρχική άλγεβρα ως επιπλέον γεννήτορες. Με αυτόν τον τρόπο θα καταλήξουμε σε μία μεγαλύτερη, αλλά πεπερασμένης διάστασης, άλγεβρα η οποία θα ακολουθεί μόνο αυτή τη συγκεκριμένη αναπαράσταση την οποία έχουμε επιλέξει. Αυτήν την λογική θα ακολουθήσουμε από εδώ και στο εξής.

6.2 Μη μεταθετικοί συναλλοίωτοι χώροι και ασαφής χώρος dS_4

Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε την ασαφή εκδοχή του χώρου de Sitter, dS_4. Γενικά, ο de Sitter χώρος, dS_n είναι μία μέγιστα συμμετρική μη συμπαγής πολλαπλότητα Lorentz, με θετική καμπυλότητα [17][18][19]. Ορίζεται ως μια εμβάπτιση του $(n+1)$-διάστατου χώρου Minkowski μέσω της σχέσης $\eta_{ab}x^a x^b = r^2$, όπου $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$, είναι η $(n+1)$-διάστατη μετρική Minkowski. Συγκεκριμένα, για $n = 4$, ο χώρος de Sitter, dS_4, υπακούει στον δεσμό:

$$\sum_{A,B=0}^{4} \eta_{AB}x^A x^B = r^2 \Rightarrow -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = r^2. \tag{6.16}$$

Προκειμένου να πάρουμε την ασαφή εκδοχή του χώρου αυτού, οι συντεταγμένες του θα πρέπει να αντικατασταθούν με τους τελεστές μιας άλγεβρας, A, αναπαριστάμενους μέσω πινάκων, και έτσι ώστε να ακολουθούν την μεταθετική σχέση (5.2) (εδώ, στην περίπτωση ερμητιανών πινάκων):

$$[X_A, X_B] = i\theta_{AB}(X). \tag{6.17}$$

Η τελευταία σχέση δεν είναι συναλλοίωτη. Παρατηρούμε ότι αν ξεκινήσουμε με την ομάδα ισομετριών του χώρου, και αντιστοιχίσουμε σε 5 γεννήτορες τις συντεταγμένες, τότε απομένουν 5 γεννήτορες οι οποίοι δεν σχηματίζουν Lorentz υποομάδα, κάτω από την οποία θα πρέπει οι συντεταγμένες να μετασχηματίζονται ως διανύσματα. Για τον λόγο αυτόν η ελάχιστη επέκταση της ομάδας που μπορεί να γίνει είναι η $dS_4 \rightarrow SO(6)$. Χρησιμοποιώντας την $SO(6)$, έχουμε επιλέξει την Ευκλείδια μετρική (θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και την $SO(1,5)$) επομένως ουσιαστικά μιλάμε για την 6-διάστατη ασαφή σφαίρα.

Η ομάδα $SO(6)$ έχει 15 γεννήτορες J_{AB} με $A, B = 1, ..., 6$, οι οποίοι σχηματίζουν την άλγεβρα:

$$[J_{AB}, J_{CD}] = i\left(\delta_{AC}J_{BD} + \delta_{BD}J_{AC} - \delta_{BC}J_{AD} - \delta_{AD}J_{BC}\right). \tag{6.18}$$

Αναλύοντας τους παραπάνω γεννήτορες, σε αυτούς της $SO(4)$, παίρνουμε

$$J_{mn} = \frac{1}{\hbar}\Theta_{mn}, \quad J_{m5} = \frac{1}{\lambda}X_m, \quad J_{m6} = \frac{\lambda}{2\hbar}P_m, \quad J_{56} = \frac{1}{2}\,\mathrm{h}, \tag{6.19}$$

όπου $m, n = 1, ..., 4$. Η παράμετρος λ φέρει διάσταση μήκους και εισήχθη ακριβώς για διαστατικούς λόγους. Οι γεννήτορες X_m, P_m, Θ_{mn} αφορούν τις συντεταγμένες, τις ορμές και τον τανυστή μη μεταθετικότητας, αντίστοιχα. Διατυπωμένη ως προς αυτούς τους γεννήτορες, η άλγεβρα γίνεται:

$$
\begin{aligned}
[X_m, X_n] &= i\frac{\lambda^2}{\hbar}\Theta_{mn} && (6.20)\\
[P_m, P_n] &= 4i\frac{\hbar}{\lambda^2}\Theta_{mn} && (6.21)\\
[X_m, P_n] &= i\hbar\delta_{mn}\ \mathrm{h}, && (6.22)\\
[X_m\ \mathrm{h}] &= i\frac{\lambda^2}{\hbar}P_m && (6.23)\\
[P_m,\ \mathrm{h}] &= 4i\frac{\hbar}{\lambda^2}X_m && (6.24)\\
[X_m, \Theta_{np}] &= i\hbar\left(\delta_{mp}X_n - \delta_{mn}X_p\right) && (6.25)\\
[P_m, \Theta_{np}] &= i\hbar\left(\delta_{mp}P_n - \delta_{mn}P_p\right) && (6.26)\\
[\Theta_{mn}, \Theta_{pq}] &= i\hbar\left(\delta_{mp}\Theta_{nq} + \delta_{nq}\Theta_{mp} - \delta_{np}\Theta_{mq} - \delta_{mq}\Theta_{np}\right) && (6.27)\\
[\mathrm{h}, \Theta_{mn}] &= 0 && (6.28)
\end{aligned}
$$

Από τη σχέση μετάθεσης μεταξύ θέσης και ορμής, βλέπουμε ότι ο χώρος είναι κβαντωμένος με ανάλογο τρόπο με της Κβαντομηχανικής. Επίσης, από τις σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των συντεταγμένων και μεταξύ των ορμών ξεχωριστά, βλέπουμε ότι το κομμάτι της $SO(4)$ συμμετρίας, κλείνει ξεχωριστά από την συνολική $SO(6)$, καθώς επίσης και το ότι οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται ως διανύσματα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ((6.27)), πράγμα το οποίο επιβεβαιώνει την συναλλοιωτότητα του χώρου. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις για τα X_m, P_m και Θ_m, έτσι ώστε να κατασκευάσουμε πεπερασμένο κβαντικό σύστημα ως μοντέλο χωροχρόνου.

6.2.1 Συναλλοίωτος τανυστής δύναμης πεδίου στον ασαφή χώρο dS_4

Όπως περιγράψαμε νωρίτερα, οι τανυστές δύναμης πεδίου της κανονικής και της Lie-τύπου περίπτωσης, δίνονται από τις εξισώσεις:

$$T_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - i\theta_{ab}, \quad F_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - iC^c_{ab}\hat{X}_c, \tag{6.29}$$

αντίστοιχα, οι οποίες εκτός των μεταθετών περιέχουν και από έναν επιπλέον όρο, ο οποίος σχετίζεται με τις σχέσεις μετάθεσης των συντεταγμένων:

$$[X_a, X_b] = i\theta_{ab}, \quad [X_a, X_b] = iC^c_{ab}X_c. \tag{6.30}$$

Στην κανονική περίπτωση, όπου οι συντεταγμένες έχουν μη συναλλοίωτη σχέση μετάθεσης, ο επιπλέον όρος είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, ενώ στην Lie-τύπου περίπτωση ο επιπλέον όρος περιέχει γραμμική αναλογία με τις συντεταγμένες. Παρόλα αυτά, η παρουσία του επιπλέον όρου σε κάθε περίπτωση, είναι απαραίτητη έτσι ώστε οι μετασχηματισμοί των τανυστών δύναμης πεδίου να προκύπτουν συναλλοίωτοι [5].

Στην περίπτωσή μας, ο τανυστής μη μεταθετικότητας είναι ένας σταθερός αντισυμμετρικός τανυστής. Το γεγονός αυτό παραπέμπει σε κανονική περίπτωση. Παρόλα αυτά περιέχει επίσης έναν γεννήτορα της ομάδας, το οποίο παραπέμπει σε Lie-τύπου περίπτωση. Συνεπώς δεν γίνεται να αποφανθούμε για το σε ποια από τις δύο κατηγορίες εμπίπτει ο ασαφής χώρος de Sitter. Αντίθετα, προκύπτει τελικά ότι δεν μπορεί να καταταχθεί σε καμία από τις δύο αυτές περιπτώσεις, αλλά θα πρέπει να εξεταστεί αναλυτικά. Από τις πρώτες δύο μεταθετικές σχέσεις της άλγεβρας, (6.20) και (6.21), ο ασαφής χώρος de Sitter ορίζεται ως

$$[X_a, X_b] = i\frac{\lambda^2}{\hbar}\Theta_{ab} \otimes \mathbf{1}, \tag{6.31}$$

όπου $\mathbf{1}$ είναι ο $p \times p$ μοναδιαίος πίνακας, όπου p η διάσταση της αναπαράστασης της ομάδας βαθμίδας. Εξαιτίας της ανεξαρτησίας του δεξιού μέλους της σχέσης από τις συντεταγμένες, X_a, η προφανής επιλογή τανυστή δύναμης πεδίου θα ήταν η:

$$F_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - i\frac{\lambda^2}{\hbar}\Theta_{ab} \otimes \mathbf{1}. \tag{6.32}$$

Παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός του τανυστή δύναμης πεδίου, που προκύπτει από αυτήν την θεώρηση, λαμβάνοντας υπόψιν το ότι $\delta X_a = \delta\Theta_{ab} = 0$, είναι ο:

$$\delta F_{ab} = [\epsilon, F_{ab}] - i\frac{\lambda^2}{\hbar}\left[\epsilon, \Theta_{ab} \otimes \mathbf{1}\right], \tag{6.33}$$

όπου $\epsilon = \epsilon(X)$ είναι μια παράμετρος βαθμίδας. Είναι προφανές ότι ο παραπάνω τανυστής δύναμης πεδίου δεν μετασχηματίζεται συναλλοίωτα, αφού δεν υπάρχει λόγος ο δεύτερος μεταθέτης της παραπάνω εξίσωσης να μηδενιστεί, όπως συμβαίνει τόσο στην κανονική όσο και στην Lie-τύπου περίπτωση. Προκειμένου να διορθωθεί το πρόβλημα, επαναορίζουμε τον τανυστή δύναμης πεδίου ως εξής:

$$\hat{F}_{ab} = \left[\hat{X}_a, \hat{X}_b\right] - \frac{i\lambda^2}{\hbar}\hat{\Theta}_{ab}, \tag{6.34}$$

όπου ο $\hat{\Theta}_{ab}$ είναι ένας τανυστής που ορίζεται ως:

$$\hat{\Theta}_{ab} = \Theta_{ab} \otimes \mathbf{1} + \mathcal{B}_{ab}, \tag{6.35}$$

όπου $\mathcal{B}_{ab}$ είναι ένα μη αβελιανό 2−form πεδίο βαθμίδας, το οποίο λαμβάνει τιμές εντός της ομάδας βαθμίδας της θεωρίας. Ο απειροστός μετασχηματισμός του τανυστή δύναμης πεδίου που προκύπτει τώρα είναι ο εξής:

$$\delta\hat{F}_{ab} = i\left[\epsilon, \hat{F}_{ab}\right], \tag{6.36}$$

ο οποίος αποτελεί συναλλοίωτο μετασχηματισμό.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην κατασκευή θεωριών βαθμίδας πάνω σε ασαφείς χώρους όπως ο dS_4, με την μεθοδολογία που περιγράφηκε.

Κεφάλαιο 7

Μη μεταθετική τετραδιάστατη βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τον ασαφή χώρο de Sitter, dS_4, έτσι ώστε να κατασκευάσουμε ένα τετραδιάστατο βαρυτικό μοντέλο ως μη μεταθετική θεωρία βαθμίδας. Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ομάδα ισομετριών θα πρέπει να επεκταθεί στην $SO(6)$ έτσι ώστε να μπορούμε να πάρουμε κλειστή συναλλοίωτη άλγεβρα. Προκειμένου να διατυπώσουμε τη βαρύτητα ως θεωρία βαθμίδας σε αυτόν τον ασαφή χώρο, επιλέγουμε να κατασκευάσουμε μια θεωρία βαθμίδας πάνω στην ομάδα $SO(5)$, η οποία είναι και η μέγιστη υποομάδα της $SO(6)$. Θα ξεκινήσουμε την κατασκευή μιας θεωρίας βαθμίδας πάνω στην $SO(5)$, αλλά λόγω της μη κλειστότητας των αντιμεταθετών, η ομάδα βαθμίδας που θα χρειαστούμε τελικά θα είναι η $SO(6) \times U(1)$ σε συγκεκριμένη αναπαράσταση. Η ομάδα βαθμίδας στην οποία θα καταλήξουμε, συνδέεται με τη σύμμορφη ομάδα με Ευκλείδεια μετρική. Εξ αιτίας της τελευταίας ιδιότητας, θα μπορέσουμε να εξετάσουμε το μεταθετικό όριο της θεωρίας, στο οποίο θα μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με την τετραδιάστατη Βαρύτητα Weyl ως θεωρία βαθμίδας, που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4.

7.1 Η ομάδα βαθμίδας και η αναπαράστασή της

Πρόκειται να χτίσουμε ένα τετραδιάστατο βαρυτικό μοντέλο ως θεωρία βαθμίδας μίας ομάδας συμμετρίας ενός μη μεταθετικού συναλλοίωτου χώρου. Ο χώρος που επιλέγουμε, όπως είπαμε παραπάνω, είναι ο ασαφής συναλλοίωτος χώρος de Sitter, dS_4, ο οποίος φέρει την συμμετρία του μεταθετικού ανάλογού του, $SO(5)$ με Ευκλείδια μετρική. Όπως και στις μεταθετικές περιπτώσεις στις οποίες η βαρύτητα περιγράφεται ως θεωρία βαθμίδας των ομάδων ισομετριών των χώρων στους οποίους κατασκευάζεται, έτσι και στην περίπτωση αυτή, ως ομάδα βαθμίδας επιλέγεται η $SO(5)$, αποτελώντας υποομάδα της διευρυμένης συμμετρίας $SO(6)$ μετά την επέκτασή της [20].

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, όμως, προκειμένου οι αντιμεταθέτες να κλείνουν θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μεγαλύτερη ομάδα σε κάποια συγκεκριμένη αναπαράσταση. Η ομάδα αυτή έπειτα από την επιλογή βαθμίδας προκύπτει να είναι η $SO(6) \times U(1)$, η οποία λόγω της σύμπτωσης του να έχει την $SO(6)$ ως υποομάδα της, μπορεί να αναπαρασταθεί με βάση τους γεννήτορές της, και εν τέλει να συσχετισθεί με την σύμμορφη βαρύτητα. Συγκεκριμένα, οι πίνακες που αναπαριστούν τους 16 γεννήτορες της $SO(6) \times U(1)$, κατασκευάζονται ως συνδυασμοί των Γ πινάκων, με Ευκλείδια μετρική, οι οποίοι ικανοποιούν την παρακάτω αντιμεταθετική σχέση (η οποία αποτελεί άλγεβρα Clifford):

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\delta_{ab}\mathbf{1}, \tag{7.1}$$

όπου $a, b = 1, ..., 4$. Σε αυτό το σημείο διασαφηνίζεται το ότι οι δείκτες $m, n, ...$ αφορούν τον χώρο, ενώ οι δείκτες $a, b, ...$ αφορούν την ομάδα βαθμίδας.

Ορίζουμε ακόμα τον Γ_5 πίνακα ως: $\Gamma_5 = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$.

Οι γεννήτορες της υποομάδας $SO(6)$ είναι οι ακόλουθοι:

- 6 γεννήτορες που αντιστοιχούν σε στροφές Lorentz, $\mathrm{M}_{ab} = -\frac{i}{4}[\Gamma_a, \Gamma_b] = -\frac{i}{2}\Gamma_a\Gamma_b, a < b$,
- 4 γεννήτορες που αντιστοιχούν σε σύμμορφες προώσεις, $\mathrm{K}_a = \frac{1}{2}\Gamma_a$,
- 4 γεννήτορες που αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις, $\mathrm{P}_a = -\frac{i}{2}\Gamma_a\Gamma_5$,
- 1 γεννήτορας που αντιστοιχεί σε ειδικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς $\mathrm{D} = -\frac{1}{2}\Gamma_5$,

  και για την υποομάδα $U(1)$:

- 1 γεννήτορας που αποτελεί τον ταυτοτικό πίνακα.

Οι Γ πίνακες ορίζονται ως εξής:

$$\begin{gathered}\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \sigma_1, \quad \Gamma_2 = \sigma_1 \otimes \sigma_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_1 \otimes \sigma_3 \\ \Gamma_4 = \sigma_2 \otimes 1, \quad \Gamma_5 = \sigma_3 \otimes 1,\end{gathered} \tag{7.2}$$

όπου σ οι πίνακες Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Οι εκφράσεις των γεννητόρων ως προς τους πίνακες Pauli, οδηγούν στην παρακάτω διατύπωση της άλγεβρας:

$$\begin{aligned}
[K_a, K_b] &= iM_{ab}, \quad [P_a, P_b] = iM_{ab} \\
[P_a, D] &= iK_a, \quad [K_a, P_b] = i\delta_{ab}D, \quad [K_a, D] = -iP_a \\
[K_a, M_{bc}] &= i\left(\delta_{ac}K_b - \delta_{ab}K_c\right) \\
[P_a, M_{bc}] &= i\left(\delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c\right) \\
[M_{ab}, M_{cd}] &= i\left(\delta_{ac}M_{bd} + \delta_{bd}M_{ac} - \delta_{bc}M_{ad} - \delta_{ad}M_{bc}\right) \\
[D, M_{ab}] &= 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

καθώς επίσης και στον υπολογισμό των εξής αντιμεταθετικών σχέσεων:

$$\begin{aligned}
\{M_{ab}, M_{cd}\} &= \frac{1}{8}\left(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{bc}\delta_{ad}\right)\mathbf{I}_4 - \frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon_{abcd}D \\
\{M_{ab}, K_c\} &= \sqrt{2}\epsilon_{abcd}P_d, \quad \{M_{ab}, P_c\} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon_{abcd}K_d \\
\{K_a, K_b\} &= \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathbf{I}_4, \quad \{P_a, P_b\} = \frac{1}{8}\delta_{ab}\mathbf{I}_4, \quad \{K_a, D\} = \{P_a, D\} = 0 \\
\{P_a, K_b\} &= \{M_{ab}, D\} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon_{abcd}M_{cd}
\end{aligned} \quad . \tag{7.5}$$

Εφόσον η ομάδα βαθμίδας και η άλγεβρά της έχουν διατυπωθεί, μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατασκευή της μη μεταθετικής θεωρίας βαθμίδας.

7.2 Κατασκευή της μη μεταθετικής θεωρίας βαθμίδας

Ούτως ώστε να κατασκευάσουμε την $SO(6) \times U(1)$ θεωρία βαθμίδας, θα πρέπει να εισαγάγουμε την συναλλοίωτη συντεταγμένη της θεωρίας,[20]

$$\hat{X}_m = X_m \otimes 1 + \mathcal{A}_m(X), \tag{7.6}$$

όπου $m = 1, ..., 4$. Από τον ορισμό της συναλλοίωτης συντεταγμένης γνωρίζουμε ότι θα πρέπει να ικανοποιεί τον συναλλοίωτο μετασχηματισμό βαθμίδας,

$$\delta\hat{X}_m = i\left[\epsilon, \hat{X}_m\right], \tag{7.7}$$

όπου $\epsilon = \epsilon(X)$, η απειροστή παράμετρος βαθμίδας. Το ϵ λαμβάνει ως τιμές τις συντεταγμένες του χώρου dS_4, δηλαδή $N \times N$ πίνακες, με N τη διάσταση της αναπαράστασής τους. Επίσης το ϵ, παίρνει τιμές από την επιλεγμένη αναπαράσταση της άλγεβρας $SO(6) \times U(1)$, δηλαδή 4×4 πίνακες. Γι΄ αυτό το λόγο μπορούμε να γράψουμε:

$$\epsilon(X) = \epsilon_0(X) \otimes 1 + \xi^a(X) \otimes K_a + \tilde{\epsilon}_0(X) \otimes D + \lambda^{ab}(X) \otimes M_{ab} + \tilde{\xi}^a(X) \otimes P_a \tag{7.8}$$

Ο κάθε όρος αποτελεί ένα τανυστικό γινόμενο των $N \times N$ πινάκων που εκφράζουν τις συντεταγμένες, με τους 4×4 πίνακες που αναπαριστούν τους γεννήτορες, συνεπώς ο κάθε όρος θα έχει διάσταση $4N \times 4N$. Η συντεταγμένη X_a δεν επηρεάζεται από τον μετασχηματισμό βαθμίδας, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Μπορούμε συνεπώς να βρούμε τον μετασχηματισμό του $\mathcal{A}_m$ εξαιτίας της εξίσωσης (7.7). Όπως και στη μεταθετική περίπτωση, ο μετασχηματισμός του $\mathcal{A}_m$ υποδεικνύει ότι μπορεί να ιδωθεί ως η συνοχή βαθμίδας της θεωρίας. Στην περίπτωσή μας, το $\mathcal{A}_m$, αποτελεί συνάρτηση των πινάκων συντεταγμένων X_a του ασαφούς χώρου dS_4, και λαμβάνει τιμές μέσα στην άλγεβρα $SO(6) \times U(1)$. Επομένως μπορεί να αναπτυχθεί πάνω στους γεννήτορες, αντίστοιχα με την παράμετρο βαθμίδας, ως εξής:

$$\mathcal{A}_m(X) = e_m{}^a(X)\otimes P_a+\omega_m{}^{ab}(X)\otimes M_{ab}(X)+b_m{}^a(X)\otimes K_a(X)+\tilde{a}_m(X)\otimes D+a_m(X)\otimes\mathbf{1}. \tag{7.9}$$

Λόγω της παραπάνω εξίσωσης, θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε ένα πεδίο βαθμίδας σε κάθε γεννήτορα. Τα επιμέρους πεδία βαθμίδας αυτά, θα εξαρτώνται από τις συντεταγμένες, X_m, του χώρου, και ως εκ τούτου θα αποτελούν $N \times N$ πίνακες.

Σύμφωνα με τις παραπάνω εκφράσεις, η συναλλοίωτη παράγωγος, (7.7), μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{X}_m = X_m \otimes \mathbf{1} + e_m{}^a(X) \otimes P_a + \omega_m{}^{ab}(X) \otimes M_{ab} + b_m{}^a \otimes K_a + \tilde{a}_m \otimes D + a_m \otimes \mathbf{1} \tag{7.10}$$

Ο τανυστής δύναμης πεδίου της $SO(6)\times U(1)$ θεωρίας βαθμίδας, όπως αναφέρθηκε στην εξίσωση (6.34), δίνεται από την έκφραση:

$$\mathcal{R}_{mn} = \left[\hat{X}_m, \hat{X}_n\right] - \frac{i\lambda^2}{\hbar}\hat{\Theta}_{mn} \tag{7.11}$$

Αναλύοντας τον τανυστή δύναμης πεδίου, παίρνουμε:

$$\mathcal{R}_{mn}(X) = R^{ab}_{mn}(X)\otimes M_{ab} + \tilde{R}^a_{mn}(X)\otimes P_a + R^a_{mn}(X)\otimes K_a + \tilde{R}_{mn}(X)\otimes D + R_{mn}(X)\otimes\mathbf{1}. \tag{7.12}$$

Επιπλέον, το πεδίο 2−form, $\mathcal{B}_{mn}$, ως στοιχείο της ομάδας βαθμίδας, $SO(6)\times U(1)$, μπορεί επίσης να αναλυθεί ως εξής:

$$\mathcal{B}_{mn} = B_{mn} \otimes \mathbf{1} + \tilde{B}^{\mu}_{mn} \otimes P_a + B^{ab}_{mn} \otimes M_{ab} + B^a_{mn} \otimes K_a + \tilde{B}_{mn} \otimes D. \tag{7.13}$$

Από την τελευταία έκφραση βρίσκουμε ότι το $\mathcal{B}_{mn}$ μετασχηματίζεται συναλλοίωτα ως:

$$\delta\mathcal{B}_{mn} = i\left[\epsilon, \hat{\Theta}_{mn}\right] \tag{7.14}$$

και δίνει ουσιαστικά τον μετασχηματισμό του $\hat{\Theta}_{mn}$.

Με ανάλογη διαδικασία όπως και στην μεταθετική περίπτωση, μπορούμε να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς των πεδίων βαθμίδας:

$$
\begin{aligned}
\delta\omega_m^{ab} =& -i\left[X_m,\lambda^{ab}\right]-i\left[a_m,\lambda^{ab}\right]+i\left[\epsilon_0,\omega_m^{ab}\right]-2\left\{\xi^a,b_m^b\right\}-\frac{1}{2}\left\{\lambda^a,\omega_m^{bc}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\tilde{\xi}^a,e_m^b\right\}\\
&+i\left[\xi^c,e_m^d\right]\epsilon_{abcd}+\frac{i}{2}\left[\tilde{\epsilon}_0,\omega_m^{cd}\right]\epsilon_{abcd}+\frac{i}{2}\left[\lambda^{cd},\tilde{a}_m\right]\epsilon_{abcd}-i\left[\tilde{\xi}^c,b_m^d\right]\epsilon_{abcd}\\
\delta e_m^a =& -i\left[X_m,\tilde{\xi}^a\right]-i\left[a_m,\tilde{\xi}^a\right]+i\left[\epsilon_0,e_m^a\right]-\left\{\xi^a,\tilde{a}_m\right\}+\left\{\tilde{\epsilon}_0,b_m^a\right\}+\frac{1}{4}\left\{\lambda_b^a,e_m^b\right\}-\frac{1}{4}\left\{\tilde{\xi}_b,\omega_m^{ab}\right\}\\
&+i\left[\xi^c,\omega_m^{bd}\right]\epsilon_{abcd}-i\left[\lambda^{cd},b_m^b\right]\epsilon_{abcd}\\
\delta b_m^a =& -i\left[X_m,\xi^a\right]-i\left[a_m,\xi^a\right]+i\left[\epsilon_0,b_m^a\right]-\left\{\xi_b,\omega_m^{ab}\right\}-2\left\{\tilde{\epsilon}_0,e_m^a\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lambda^a{}_b,b_m^b\right\}+\left\{\tilde{\xi}^a,\tilde{a}_m\right\}\\
&+i\left[\lambda^{bc},e_m^d\right]\epsilon_{abcd}+i\left[\tilde{\xi}^b,\omega_m^{cd}\right]\epsilon_{abcd}\\
\delta a_m =& -i\left[X_m,\epsilon_0\right]-i\left[a_m,\epsilon_0\right]+i\left[\xi^a,b_m^a\right]+i\left[\tilde{\epsilon}_0,\tilde{a}_m\right]+\frac{i}{2}\left[\lambda_{ab},\omega_m^{ab}\right]+\frac{i}{2}\left[\tilde{\xi}_a,e_m^a\right]\\
\delta\tilde{a}_m =& -i\left[X_m,\tilde{\epsilon}_0\right]-i\left[a_m,\tilde{\epsilon}_0\right]+i\left[\epsilon_0,\tilde{a}_m\right]+\left\{\xi_a,e_m^a\right\}-\left\{\tilde{\xi}_a,b_m^a\right\}+\frac{i}{2}\left[\lambda^{ad},\omega_m^{bc}\right]\epsilon_{abcd}
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας των 2-form πεδίων βαθμίδας, υπολογίζονται:

$$
\begin{aligned}
\delta B_{mn} =& -i\left[\Theta_{mn},\epsilon_0\right]-i\left[B_{mn},\epsilon_0\right]+i\left[\xi^a,B^a_{mn}\right]+i\left[\tilde{\epsilon}_0,\tilde{B}_{mn}\right]+\frac{\imath}{2}\left[\lambda_{ab},B^{ab}_{mn}\right]+\frac{\imath}{2}\left[\tilde{\xi}_a,\tilde{B}^a_{mn}\right]\\
\delta\tilde{B}_{mn} =& -i\left[\Theta_{mn},\tilde{\epsilon}_0\right]-i\left[B_{mn},\tilde{\epsilon}_0\right]+i\left[\epsilon_0,\tilde{B}_{mn}\right]+\left\{\xi_a,\tilde{B}^a_{mn}\right\}-\left\{\tilde{\xi}_a,B^a_{mn}\right\}+\frac{i}{2}\left[\lambda^{ab},B^{bc}_{mn}\right]\epsilon_{abcd}\\
\delta\tilde{B}^a_{mn} =& -i\left[\Theta_{mn},\tilde{\xi}^a\right]-i\left[B_{mn},\tilde{\xi}^a\right]+i\left[\epsilon_0,\tilde{B}^a_{mn}\right]-\left\{\xi^a,\tilde{B}_{mn}\right\}+\left\{\tilde{\epsilon}_0,B^a_{mn}\right\}+\frac{1}{4}\left\{\lambda^a_b,\tilde{B}^b_{mn}\right\}\\
&-\frac{1}{4}\left\{\tilde{\xi}_b,B^{ab}_{mn}\right\}+i\left[\xi^c,B^{cd}_{mn}\right]\epsilon_{abcd}-i\left[\lambda^{cd},B^b_{mn}\right]\epsilon_{abcd}\\
\delta B^a_{mn} =& -i\left[\Theta_{mn},\xi^a\right]-i\left[B_{mn},\xi^a\right]+i\left[\epsilon_0,B^a_{mn}\right]-\left\{\xi_b,B^{ab}_{mn}\right\}-2\left\{\tilde{\epsilon}_0,\tilde{B}^a_{mn}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\lambda^a_b,B^b_{mn}\right\}\\
&+\left\{\tilde{\xi}^a,\tilde{B}_{mn}\right\}+\frac{i}{2}\left[\lambda^{bc},\tilde{B}^d_{mn}\right]\epsilon_{abcd}+i\left[\tilde{\xi}^b,B^{cd}_{mn}\right]\epsilon_{abcd}\\
\delta B^{ab}_{mn} =& -i\left[\Theta_{mn},\lambda^{ab}\right]-i\left[B_{mn},\lambda^{ab}\right]+i\left[\epsilon_0,B^{ab}_{mn}\right]-2\left\{\xi^a,B^a_{mn}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\lambda^a,B^{bc}_{mn}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\tilde{\xi}^a,\tilde{B}^b_{mn}\right\}\\
&+i\left[\xi^c,\tilde{B}^d_{mn}\right]\epsilon_{abcd}+\frac{i}{2}\left[\tilde{\epsilon}_0,B^{cd}_{mn}\right]\epsilon_{abcd}+\frac{i}{2}\left[\lambda^{cd},\tilde{B}_{mn}\right]-\left[\tilde{\xi}^c,B^d_{mn}\right]\epsilon_{abcd}
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

Τέλος, οι συνιστώσες του τανυστή $\mathcal{R}_{mn}$, υπολογίζονται ως:

$$
\begin{aligned}
R_{mn} =& \left[X_m,a_n\right]-\left[X_n,a_m\right]+\left[a_m,a_n\right]+\left[b^a_m,b_{na}\right]+\left[\tilde{a}_m,\tilde{a}_n\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\omega^{ab}_m,\omega_{nab}\right]+\left[e_{ma},e^a_n\right]-\frac{i\hbar}{\lambda^2}B_{mn}\\
\tilde{R}_{mn} =& \left[X_m,\tilde{a}_n\right]+\left[a_m,\tilde{a}_n\right]-\left[X_n,\tilde{a}_m\right]-\left[a_n,\tilde{a}_m\right]-i\left\{b_{ma},e^a_n\right\}+i\left\{b_{na},e^a_m\right\}\\
&+\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\left[\omega^{ab}_m,\omega^{cd}_n\right]-\frac{i\hbar}{\lambda^2}\tilde{B}_{mn}\\
R^a_{mn} =& \left[X_m,b^a_n\right]+\left[a_m,b^a_n\right]-\left[X_n,b^a_m\right]-\left[a_n,b^a_m\right]+i\left\{b_{mb},\omega^{ab}_m\right\}-i\left\{b_{nb},\omega^{ab}_m\right\}\\
&+i\left\{\tilde{a}_m,e^a_n\right\}-i\left\{\tilde{a}_n,e^a_m\right\}+\epsilon_{abcd}\left(\left[e^b_m,\omega^{cd}_n\right]-\left[e^b_n,\omega^{cd}_m\right]\right)-\frac{i\hbar}{\lambda^2}B^a_{mn}\\
\tilde{R}^a_{mn} =& \left[X_m,e^a_n\right]+\left[a_m,e^a_n\right]-\left[X_n,e^a_m\right]-\left[a_n,e^a_m\right]+i\left\{b^a_m,\tilde{a}_n\right\}-i\left\{b^a_n,\tilde{a}_m\right\}\\
&-\left(\left[b^b_m,\omega^{cd}_n\right]-\left[b^b_n,\omega^{cd}_m\right]\right)\epsilon_{abcd}-i\left\{\omega^{ab}_m,e_{nb}\right\}+i\left\{\omega^{ab}_n,e_{mb}\right\}-\frac{i\hbar}{\lambda^2}\tilde{B}^a_{mn}\\
R^{ab}_{mn} =& \left[X_m,\omega^{ab}_n\right]+\left[a_m,\omega^{ab}_n\right]-\left[X_n,\omega^{ab}_m\right]-\left[a_n,\omega^{ab}_m\right]+2i\left\{b^a_m,b^b_n\right\}+\left(\left[b^c_m,e^d_n\right]-\left[b^c_n,e^d_m\right]\right)\epsilon_{abcd}\\
&+\frac{1}{2}\left(\left[\tilde{a}_m,\omega^{cd}_n\right]-\left[\tilde{a}_n,\omega^{cd}_m\right]\right)\epsilon_{abcd}+2i\left\{\omega^{ac}_m,\omega^b_{nc}\right\}+2i\left\{e^a_m,e^b_n\right\}-\frac{i\hbar}{\lambda^2}B^{ab}_{mn}.
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

Οι παραπάνω εκφράσεις των συνιστωσών των τελεστών, οδηγούν στην αναλυτική διατύπωση της δράσης της θεωρίας. Πριν προχωρήσουμε στην δράση όμως, θα πρέπει να αναφερθεί ότι, στο μεταθετικό όριο, όπου ο μεταθέτης αντικαθίσταται από την παράγωγο και ο αντιμεταθέτης με το διπλάσιο γινόμενο, οι παραπάνω εκφράσεις ανάγονται στις αντίστοιχες μεταθετικές τους, για Ευκλείδιο χώρο. Επίσης στο μεταθετικό όριο η ομάδα

$U(1)$ που εισήχθη λόγω της μη μεταθετικότητας, παύει να υφισταται στη συμμετρία, με αποτέλεσμα τελικά να παίρνουμε την συμμετρία $SO(6)$, δηλαδή τη σύμμορφη βαρύτητα σε Ευκλείδιο χώρο.

7.3 Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας και δράση της μη μεταθετικής θεωρίας βαθμίδας

Σε αυτή την παράγραφο, θα περάσουμε στο δυναμικό κομμάτι της θεωρίας, δηλαδή στη δράση. Η δράση θα πρέπει να γραφεί συναρτήσει των τανυστών καμπυλότητας (7.17)[20][21]. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε απευθείας κάποια δράση τύπου Yang-Mills η οποία να καταλήγει σε θεωρία αναλλοίωτη κάτω από την συμμετρία βαθμίδας, $SO(6) \times U(1)$. Παρόλα αυτά η επιθυμητή συμμετρία δεν είναι ολόκληρη η $SO(6) \times U(1)$, αλλά μόνο το κομμάτι της συμμετρίας Lorentz. Ο πιο φυσικός τρόπος για να γίνει το σπάσιμο συμμετρίας $SO(6) \times U(1) \to SO(4) \times U(1)$, είναι ο μηχανισμός του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας, μέσω της εισαγωγής κάποιου βαθμωτού πεδίου Φ. Ακολουθώντας τη λογική του [17], εξετάζουμε την ακόλουθη δράση:

$$\mathcal{S} = \mathrm{Trtr}_G\, \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}_{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{7.18}$$

Θέλουμε να καταλήξουμε σε μια δράση που να εμπεριέχει τον όρο $R(M)^2$, όπου $R(M)$ είναι ο επιμέρους τανυστής $2-$form καμπυλότητας ο οποίος σχετίζεται με του γεννήτορες Lorentz, του ολικού τανυστή δύναμης πεδίου $\mathcal{R}$. Εισάγουμε το βαθμωτό πεδίο Φ, το οποίο ανήκει στην συζυγοανάστροφη αναπαράσταση της $SO(4) \times U(1)$, έτσι ώστε να προκύψει το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας $SO(6) \times U(1) \to SO(4) \times U(1)$.

Εισάγοντας το βαθμωτό πεδίο Φ μαζί με την διαστατική παράμετρο, λ, καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\mathcal{S} = \mathrm{Trtr}_G\, \lambda\Phi(X)\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}_{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} + \eta\left(\Phi(X)^2 - \lambda^{-2}\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_4\right), \tag{7.19}$$

όπου η είναι ένας πολλαπλασιαστής Lagrange, ο οποίος, μέσω μεταβολών στη δράση δίνει του ακόλουθο δεσμό:

$$\Phi^2(X) = \lambda^{-2}\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_4, \tag{7.20}$$

ο οποίος ισχύει on-shell. Ο πολλαπλασιαστής Lagrange έχει διάσταση $[M]^2$. Το βαθμωτό πεδίο Φ, ως στοιχείο της άλγεβρας $SO(4) \times U(1)$, αναλύεται πάνω στους γεννήτορές της ως εξής:

$$\Phi(X) = \tilde{\phi}^a(X) \otimes P_a + \phi^{ab}(X) \otimes M_{ab} + \phi^a(X) \otimes K_a + \phi(X) \otimes \mathbf{I}_4 + \tilde{\phi}(X) \otimes D. \tag{7.21}$$

Επιστρέφοντας στην δράση, (7.19), προκειμένου να υπολογίσουμε τον πρώτο όρο της, κάνουμε επιλογή βαθμίδας για το πεδίο Φ, στην κατεύθυνση του D, για το οποίο υπενθυμίζουμε ότι ισχύει $D = -1/2\Gamma_5$, σε μία συγκεκριμένη τιμή, $\tilde{\phi} = -2\lambda^{-1}$. Συνεπώς, από την ανάλυση του Φ πάνω στους γεννήτορες, τελικά βρίσκουμε:

$$\Phi(X) = \tilde{\phi}(X) \otimes D\Big|_{\tilde{\phi}=-2\lambda^{-1}} = -2\lambda^{-1}\mathbf{I}_N \otimes D. \tag{7.22}$$

Έχοντας υπολογίσει κανείς τις αντιμεταθετικές σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων της άλγεβρας, καθώς και τα ίχνη που προκύπτουν, καταλήγει στην δράση της σπασμένης συμμετρίας:

$$\mathcal{S}_{br} = \mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\varepsilon_{abcd}{R_{mn}}^{ab}{R_{rs}}^{cd} - 4R_{mn}\tilde{R}_{rs}\right)\varepsilon^{mnrs}. \tag{7.23}$$

Η δράση αυτή προκύπτει και με την άλλη εναλλακτική σπασίματος συμμετρίας, μέσω επιβολής δεσμών, όπως παρουσιάζεται στο []. Επίσης, λόγω του σπασίματος της συμμετρίας των μετατοπίσεων, βλέπουμε ότι η δράση που προέκυψε είναι ανεξάρτητη του πολλαπλασιαστή Lagrange. Βασιζόμενοι πάνω στην δουλειά του Chamseddine, [22], θέτουμε $\tilde{a}_m = 0$, $b^a_m = \alpha e^a_m$ καθώς και ${B_{mn}}^a = \alpha {\hat{B}_{mn}}{}^a$, όπου a μία σταθερά αναλογίας. Επιπλέον θεωρούμε την ισχύ της torsionless condition αφού έχει επέλθει σπάσιμο της συμμετρίας των μετατοπίσεων.

Εφόσον έχουμε πάρει $\tilde{a}_m = 0$ και τα b, e να είναι ανάλογα μεταξύ τους, προκύπτει ότι εάν ισχύει $a = i/2$, ο τανυστής ${R_{mn}}^a$ ισούται με τον τανυστή στρέψης, ${\tilde{R}_{mn}}{}^a$, με την σταθερά αναλογίας αυτή:

$$\begin{aligned}R^a_{mn} =& [X_m + a_m, {b_m}^a] - [X_n + a_n, {b_m}^a] + i\left\{b_{mb}, {\omega_n}^{ab}\right\} - i\left\{b_{nb}, {\omega_m}^{ab}\right\}\\ &+ \frac{\sqrt{2}}{8}\epsilon_{abcd}\left(\left[{e_m}^b, {\omega_n}^{cd}\right] - \left[{e_n}^b, {\omega_m}^{cd}\right]\right) - i\frac{\lambda^2}{\hbar}{B_{mn}}^a\\ =&\frac{i}{2}\Big([X_m + a_m, {e_n}^a] - [X_n + a_n, {e_m}^a] + i\left\{e_{mb}, {\omega_n}^{ab}\right\} - i\left\{e_{nb}, {\omega_m}^{ab}\right\}\\ &- \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon_{abcd}\left(\left[{b_m}^b, {\omega_n}^{cd}\right] - \left[{b_n}^b, {\omega_m}^{cd}\right]\right) - i\frac{\lambda^2}{\hbar}{\tilde{B}_{mn}}{}^a\Big) = \frac{i}{2}{\tilde{R}_{mn}}{}^a.\end{aligned} \tag{7.24}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι ο σχετιζόμενος με το K τανυστής δύναμης πεδίου, ${R_{mn}}^a$, μηδενίζεται, και άρα και οι σχετιζόμενοι γεννήτορες έχουν σπάσει. Επιπλέον, αξίζει να αναφερθεί ότι στην βαθμίδα που έχουμε επιλέξει ($\tilde{a}_m = 0, b^a_m = \frac{i}{2}e^a_m, {B_{mn}}^a = \frac{i}{2}{\tilde{B}_{mn}}{}^a$), ο τανυστής καμπυλότητας ${R_{mn}}^{ab}$, ισούται με

$$\begin{aligned}{R_{mn}}^{ab} =& \left[X_m + a_m, {\omega_n}^{ab}\right] - \left[X_n + a_n, {\omega_m}^{ab}\right] + i\left\{{\omega_m}^{ac}, {\omega_{nc}}^b\right\} - i\left\{{\omega_m}^{bc}, {\omega_{nc}}^a\right\}\\ &+ \frac{3i}{8}\left\{{e_m}^a, {e_n}^b\right\} - \frac{i\lambda^2}{\hbar}{B_{mn}}^{ab}\end{aligned}, \tag{7.25}$$

Όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο, ο τανυστής αυτός, στο μεταθετικό όριο, ανάγεται στον $R^{(0)\,ab}_{mn}$ curvature 2-form του φορμαλισμού Palatini της Βαρύτητας Einstein.[17]

7.4 Το μεταθετικό όριο

Προκειμένου να εξετάσουμε την συμπεριφορά του μοντέλου μας, σε ενέργειες χαμηλότερες από την κλίμακα Planck, θα πρέπει να την εφαρμόσουμε μετά το μεταθετικό όριο. Σε αυτό το όριο, ο ασαφής τετραδιάστατος χώρος *deSitter* ανάγεται στο σύνηθες συνεχές του ανάλογο. Η μετάβαση από τη μη μεταθετικότητα στην μεταθετικότητα γίνεται μέσω των ακολούθων παρατηρήσεων και αντιστοιχιών:

- Το πεδίο 2-form $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ το οποίο σχετίζεται, όπως είδαμε με την διατήρηση της συναλλοιωτότητας, αποσυζεύγνεται καθώς η μη μεταθτικότητα παύει να υφίσταται. Το ίδιο ισχύει και για το πεδίο a_m.
- Οι μεταθέτες συναρτήσεων της θέσης μηδενίζονται: $[f(x), g(x)] \to 0$.
- Οι αντιμεταθέτες των συναρτήσεων ανάγονται στα διπλάσια γινόμενα: $\{f(x), g(x)\} \to 2f(x)g(x)$.
- Η εσωτερική παραγώγιση μέσω μεταθετών γίνεται: $[X_\mu, f] \to \partial_\mu f$.
- Το ίχνος ανάγεται σε ολοκλήρωμα: $\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{Tr} \to \int d^4x$.
- Στη συγκεκριμένη βαθμίδα που χρησιμοποιήσαμε προκύπτει:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\epsilon_{abcd}\left[\omega_\mu^{ab}, \omega_\nu^{cd}\right] - \frac{i\lambda^2}{\hbar}\tilde{B}_{\mu\nu} \tag{7.26}$$

Επιπλέον θέτοντας τις ακόλουθες παραμετροποιήσεις,

$$\begin{aligned} &{e_\mu}^a \to im{e_\mu}^a, \quad P_a \to -\frac{i}{m}P_a, \quad {\tilde{R}_{\mu\nu}}{}^a \to im{T_{\mu\nu}}^a \\ &{\omega_\mu}^{ab} \to -\frac{i}{2}{\omega_\mu}^{ab}, \quad M_{ab} \to 2iM_{ab}, \quad {R_{\mu\nu}}^{ab} \to -\frac{i}{2}{R_{\mu\nu}}^{ab}, \end{aligned} \tag{7.27}$$

όπου m είναι μια μιγαδική σταθερά διάστασης $[L]^{-1}$ που εισάγεται έτσι ώστε το ${e_\mu}^a$ να προκύπτει αδιάστατο στο μεταθετικό όριο, έτσι ώστε τελικά να συμπίπτει με το vierbein. Εν τέλει με αυτές τις αντικαταστάσεις καταλήγουμε σε ακριβώς τις ίδιες εκφράσεις με την μεταθετική Βαρύτητα Einstein ως θεωρία βαθμίδας. Συγκεκριμένα, καταλήγουμε στην έκφραση του τανυστή torsion:

$$\begin{aligned} &im{T_{\mu\nu}}^a = im\partial_\mu {e_\nu}^a - im\partial_\nu {e_\mu}^a - 2i\left(-\frac{i}{2}{\omega_\mu}^{ab}\right)ime_{\nu b} + 2i\left(-\frac{i}{2}{\omega_\nu}^{ab}\right)ime_{\mu b} \Rightarrow \\ &\quad {T_{\mu\nu}}^a = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu {e_\mu}^a - {\omega_\mu}^{ab}e_{\nu b} + {\omega_\nu}^{ab}e_{\mu b} = 0 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Εξαιτίας του αποτελέσματος αυτού, συμπεραίνουμε ότι και οι σχέσεις μεταξύ e, ω είναι οι ίδιες με της μεταθετικής περίπτωσης. Επίσης, αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν και για τον curvature 2-form:

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab} =& -\frac{i}{2}\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} + \frac{i}{2}\partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} + 2i\left(-\frac{i}{2}\omega_\mu{}^{ac}\right)\left(-\frac{i}{2}\omega_\nu{}^{bb}\right) \\
& - 2i\left(-\frac{i}{2}\omega_\mu{}^{bc}\right)\left(-\frac{i}{2}\omega_\nu{}^{a}{}_{c}\right) + \frac{3i}{4}\left(ime_\mu{}^a ime_\nu{}^b\right) \Rightarrow \\
R_{\mu\nu}{}^{ab} =& \partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac}\omega_\nu{}^{b}{}_{c} - \omega_\mu{}^{bc}\omega_\nu{}^{a}{}_{c} + \frac{3}{2}m^2 e_\mu{}^a e_\nu{}^b \Rightarrow \\
R_{\mu\nu}{}^{ab} =& R^{(0)ab}_{\mu\nu} + \frac{3}{2}m^2 e_\mu{}^a e_\nu{}^b.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Στην έκφραση αυτή, του curvature 2-form, προκύπτει ο επιπλέον όρος ο οποίος θα οδηγήσει στον σχηματισμό του Gauss-Bonnet τοπολογικού όρου, της δράσης. Η δράση περιέχει μόνο $R(M)^2$ όρους που συνεισφέρουν στην εξαγωγή πεδιακών εξισώσεων, όπως ήταν επιθυμητό. Δεδομένου ότι η αναλλοιωτότητα υπο μετασχηματισμούς κλίμακας έχει σπάσει, η μόνη παραμένουσα συμμετρία στην δράση που προκύπτει μετά το σπάσιμο, είναι η Lorentz.[17]

Προχωρώντας στον υπολογισμό της δράσης στο μεταθετικό όριο, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{br}^{comm} &= \int \epsilon_{abcd} R_{\mu\nu}{}^{ab} R_{\rho\sigma}{}^{cd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x \\
&= \int \epsilon_{abcd}\left(R^{(0)ab}_{\mu\nu} + \frac{3}{2}m^2 e^a_\mu e^b_\nu\right)\left(R^{(0)cd}_{\rho\sigma} + \frac{3}{2}m^2 e^c_\rho e^d_\sigma\right) e^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x \\
&= \int \epsilon_{abcd} R^{(0)ab}_{\mu\nu} R^{(0)cd}_{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x + 3m^2 \int \epsilon_{abcd} e^a_\mu e^b_\nu R^{(0)cd}_{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x \\
&\quad + \frac{9}{4}m^4 \int \epsilon_{abcd} e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho e^d_\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Ο πρώτος όρος είναι ο τοπολογικός όρος Gauss-Bonnet, συνεπώς δεν συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης. Ο δεύτερος όρος είναι η δράση Palatini και ο τελευταίος παίζει το ρόλο κοσμολογικής σταθεράς.

Τελικά σε «γλώσσα» γενικής σχετικότητας η παραπάνω δράση είναι ισοδύναμη με την:

$$\mathcal{S}_{br}^{comm} = 12m^2\left(\int \sqrt{\det g} R d^4x + \frac{9m^2}{2}\int \sqrt{\det g} d^4x\right), \tag{7.31}$$

όπου εάν θέσουμε $\Lambda = -\frac{9}{4}m^2$, παίιρνουμε την ανάλογη δράση με την Einstein-Hilbert:

$$\mathcal{S}_{br}^{comm} = 12m^2 \mathcal{S}_{EH}^{(\Lambda)}, \tag{7.32}$$

όπου $\mathcal{S}_{EH}^{(\Lambda)}$ η δράση Einstein-Hilbert. Τέλος, οι πεδιακές εξισώσεις που προκύπτουν, είναι οι ακόλουθες:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{7.33}$$

Υποθέτοντας ότι $\Lambda > 0$, δηλαδή, έχουμε πάρει την τετραδιάστατη Βαρύτητα de Sitter.

Σύνοψη και Συμπεράσματα

Η ανάλυση που ακολουθήθηκε αποτελείται από δύο μέρη: από την διατύπωση του φορμαλισμού πρώτης τάξης, και ακολούθως, των αναλόγων θεωριών βαθμίδας για τις τετραδιάστατες θεωρίες βαρύτητας Einstein και Weyl, και από την διατύπωση των θεωριών βαθμίδας πάνω σε μη μεταθετικούς χώρους, και εν τέλει του μη μεταθετικού ανάλογου της Βαρύτητας Einstein ως θεωρίας βαθμίδας. Ως γνωστόν, ο φορμαλισμός που ακολουθείται στην Γενική Σχετικότητα δεν επιτρέπει την κβάντωση της βαρύτητας, πράγμα το οποίο σβήνει κάθε ελπίδα για ενοποίησή της με τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις, στο πλαίσιο του φορμαλισμού αυτού.

Είδαμε ότι η βαρύτητα μπορεί να διατυπωθεί, εναλλακτικά, ως θεωρία βαθμίδας, πράγμα το οποίο ανοίγει τον δρόμο για την πολυπόθητη κβάντωσή της, και κατόπιν, μελλοντικά, για ενδεχόμενη ενοποίησή της με τις υπόλοιπες θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις.

Παράρτημα Α΄

Κανονική υποομάδα και ημιευθύ γινόμενο

Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια του ημιευθέως γινομένου, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την κανονική υποομάδα.

Α΄.1 Κανονική υποομάδα

Η κανονική υποομάδα (normal subgroup) λέγεται επίσης αναλλοίωτη υποομάδα (invariant subgroup) και αυτοσυζυγής υποομάδα (self-conjugate subgroup).

Μια υποομάδα N της ομάδας G είναι κανονική ως προς την G αν και μόνο αν $gng^{-1} \in N$, για κάθε $g \in G$ και $n \in N$. Συνήθως συμβολίζεται ως $N \triangleleft G$.

Α΄.2 Ημιευθύ γινόμενο

Δεδομένης μιας ομάδας G με ταυτοτικό στοιχείο e, μία υποομάδα H και μία κανονική υποομάδα $N \triangleleft G$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- Η G αποτελεί γινόμενο υποομάδων $G = NH$, οι οποίες έχουν τετριμμένη τομή: $N \cap H = \{e\}$.
- Για κάθε $g \in G$, υπάρχουν μοναδικά $n \in N$ και $h \in H$, τέτοια ώστε $g = nh$.
- Για κάθε $g \in G$, υπάρχουν μοναδικά $h \in H$ και $n \in N$, τέτοια ώστε $g = hn$.
- Η σύνθεση $\pi \circ i$ της φυσικής ένθεσης $i : H \to G$ με την φυσική προβολή $\pi : G \to G/N$ είναι ισομορφισμός μεταξύ της υποομάδας H και της ομάδας πηλίκο G/N.
- Υπάρχει ομομορφισμός $G \to N$ ο οποίος είναι η ταυτότητα στην H και του οποίου ο πυρήνας είναι N.

Εάν μία από τις παραπάνω προτάσεις ισχύει (και τότε ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες), η ομάδα G αποτελεί ημιευθύ γινόμενο των ομάδων N και H,[23]

$$G = N \rtimes H \qquad \text{ή} \qquad G = H \ltimes N. \tag{A$'$.1}$$

Παράρτημα Β΄

Η έννοια της πολλαπλότητας (Manifold)

Μία πολλαπλότητα διάστασης m είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι τοπικά ομομορφικός με τον $\mathbb{R}^m$

Η ιδιότητά της αυτή, του τοπικού ομομορφισμού της με επίπεδο χώρο, μας επιτρέπει να φτιάχνουμε σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων. Στη γενική περίπτωση όπου ο ομομορφισμός αυτός δεν ισχύει σε μη τοπικό επίπεδο (όταν δηλαδή δεν είναι global ιδιότητα της πολλαπλότητας) το κάθε σημείο μπορεί να περιγράφεται από δύο ή περισσότερα συστήματα συντεταγμένων. Απαιτούμε η μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο να είναι ομαλή. Η απαίτηση αυτή, εξασφαλίζει το να μπορούμε να εφαρμόσουμε διαφορικό λογισμό πάνω στην πολλαπλότητα.

Συνεπώς μία πολλαπλότητα, ως τοπολογικός χώρος, έχει εξ ορισμού συνέχεια, και επιπρόσθετα ομαλότητα.

Η M είναι μία $m-$διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα εάν:

- Η M αποτελεί τοπολογικό χώρο
- Η M περιέχει μία οικογένεια ζευγών $\{(U_i, \phi_i)\}$
- Η $\{U_i\}$ είναι μία οικογένεια ανοιχτών συνόλων η οποία καλύπτει την M, έτσι ώστε $\cup_i U_i = M$. Η ϕ_i είναι ομομορφισμός από τη $\{U_i\}$ σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $\{U_i'\}$ του $\mathbb{R}^m$
- Δεδομένων U_i και U_j, τέτοιων ώστε $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, η απεικόνιση $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ από το $\phi_j(U_i \cap U_j)$ στο $\phi_i(U_i \cap U_j)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

Το ζεύγος (U_i, ϕ_i) καλείται χάρτης (chart), ενώ η οικογένεια $\{(U_i, \phi_i)\}$ καλείται άτλας (atlas). Το υποσύνολο U_i ονομάζεται γειτονιά συντεταγμένων (coordinate neighbourhood), ενώ η ϕ_i είναι η συνάρτηση συντεταγμένων. [24]

Παράρτημα Γ΄

Γινόμενο wedge και εξωτερική παράγωγος διαφορικών μορφών

Μέσω του γινομένου wedge, εκφράζουμε βάσεις για υψηλότερης τάξης διαφορικές μορφές. Έστω ότι έχουμε μία πολλαπλότητα M_m, όπου m η διάσταση της πολλαπλότητας. Οι βάσεις για τα $n-$forms θα είναι οι εξής:

- Βάση $1-$forms: dx^i
- Βάση $2-$forms: $dx^i \wedge dx^j$
- Βάση $p-$forms: $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$
- Βάση $m-$forms: $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge ... \wedge dx^{i_p} ... \wedge dx^{i_n}$,

όπου $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ και $dx^i \wedge dx^i = 0$. Γι΄ αυτό και δεν υπάρχουν $(m+1)-$forms.

Ένα $p-$form μπορεί να γραφτεί ως

$$a = \frac{1}{p!} a_{a_1 ... a_p} \boldsymbol{dx}^{(a_1)} \wedge ... \wedge \boldsymbol{dx}^{(a_p)}.$$

Το γινόμενο wedge δύο forms, είναι το εξής

$$a_p \wedge b_q = (-1)^{pq} b_q \wedge a_p, \tag{Γ΄.1}$$

όπου p, q οι τάξεις των δύο forms.

Θεωρώντας $\Lambda^p(x)$ όλα τα $p-$forms της πολλαπλότητας και $C^\infty(\Lambda^p)$ τον χώρο όλων των ομαλών $p-$forms που αναπαριστούν τους πλήρως αντισυμμετρικούς τανυστές $(0, p)$, έχουμε:

- $C^\infty(\Lambda^0) : \{f(x)\}$, $\quad dim = 1$
- $C^\infty(\Lambda^1) : \{f_i(x) dx^i\}$, $\quad dim = m$
- $C^\infty(\Lambda^1) : \{f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j\}$, $\quad dim = \frac{m(m-1)}{2}$

- $C^\infty(\Lambda^{m-1}) : \{f_{i_1,i_2,...i_{m-1}}(x)dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_{m-1}}\},$ $\qquad dim = m$

- $C^\infty(\Lambda^{m}) : \{f_{i_1,i_2,...i_{m}}(x)dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_{m}}\},$ $\qquad dim = 1.$

Παρατηρούμε ότι $dim(\Lambda^p) = dim(\Lambda^{m-p})$.

Ένα $p-$form και ένα $q-$form μπορούν να πολλαπλασιαστούν και να δώσουν ένα $(p+q)-$form, εφόσον ισχύει $p+q \leq m$. Για παράδειγμα για $m=3$,

$$\begin{aligned} a_1 \wedge a_1 &= a_i dx^i \wedge a_j dx^j = a_i a_j dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} a_i a_j dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2} a_i a_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2}\left(a_i a_j - a_j a_i\right) dx^i \wedge dx^j, \end{aligned} \tag{Γ'.2}$$

$$a_1 \wedge a_2 = a_i dx^i \wedge \frac{1}{2} a_{jk} dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{6}\left(a_i a_{jk} + a_j a_{ki} + a_k a_{ij}\right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k. \tag{Γ'.3}$$

Η εξωτερική παράγωγος, d, ενός $p-$form είναι μία απεικόνιση $p-$forms σε $(p+1)$forms, $d : C^\infty(\Lambda^p) \to C^\infty(\Lambda^{p+1})$, και ορίζεται ως

$$da_{a_1 \dots a_{p+1}} = (p+1)\partial_{[a_1} a_{a_2 \dots a_{p+1}]}. \tag{Γ'.4}$$

Για παράδειγμα:

- $p=0$: $\qquad d(f(x)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

- $p=1$: $\qquad d(f_j(x)dx^j) = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j$

- $p=2$: $\qquad d(f_{jk}(x)dx^j \wedge dx^k) = \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

και ούτω καθεξής.

Η εξωτερική παράγωγος ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^p a \wedge db$

- $d^2 = 0$.

Ένα form, a, τάξης ίσης με τη διάσταση της πολλαπλότητας ονομάζεται top form και, επειδή δεν ορίζεται $p-$form με $p \leq m$, όπου m η διάσταση της πολλαπλότητας, ισχύει γι' αυτό $da = 0$.[25]

Παράρτημα Δ΄

Τελεστής δϋικότητας Hodge

Ο τελεστής δϋικότητας Hodge (Hodge duality operator) είναι μία απεικόνιση $n-$forms σε $(m-n)-$forms, $* : C^{\infty}(\Lambda^n) \to C^{\infty}(\Lambda^{m-n})$, όπου m η διάσταση της πολλαπλότητας, και ορίζεται:

$$*(e^{a_1} \wedge ... \wedge e^{a_n}) \coloneqq \frac{1}{(m-n)!} \epsilon^{a_1 \dots a_n}{}_{a_{n+1} \dots a_m} e^{a_{n+1}} \wedge ... \wedge e^{a_m}. \tag{Δ΄.1}$$

Ο τελεστής αυτός ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $*(a \wedge b) = a \times b$
- $*\left[a \wedge (*b)\right] = a \cdot b$
- $*^2 a = (-1)^{n(m-n)} a$

Επίσης σημειώνεται ότι εάν η διάσταση m είναι άρτια, ισχύει $*^2 = 1$ για κάθε n.[25]

Παράρτημα Ε΄

Στοιχείο όγκου διαφορικών μορφών

Η ποσότητα $m-$form, $\epsilon = e^1 \wedge ... \wedge e^m$, όπου m η διάσταση της πολλαπλότητας, είναι ένα top-form, δηλαδή είναι ένα form τάξης ίσης με τη διάσταση. Το $m-$form αυτό αποτελεί το στοιχείο όγκου του χώρου. Οι συνιστώσες του, $\epsilon_{a_1...a_m}$, εκφράζονται μέσω του πλήρως αντισυμμετρικού συμβόλου Levi-Civita:

$$\epsilon_{a_1...a_m} = \begin{cases} +1, & \text{αν} \quad a_1...a_m \quad \text{άρτια μετάθεση των} \quad (1,...,m) \\ -1, & \text{αν} \quad a_1...a_m \quad \text{περιττή μετάθεση των} \quad (1,...,m) \\ \ \ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{Ε΄.1}$$

Ο χώρος Λ_m των $m-$forms έχει διάσταση 1. Επομένως ένα $m-$form μπορεί να γραφτεί ως $a = fe^1 \wedge ... \wedge e^m$, όπου f μία σταθερά. Το $m-$form

$$\sqrt{|g|}e^1 \wedge ... \wedge e^m, \tag{Ε΄.2}$$

όπου $|g| = detg_{\mu\nu}$ και $g_{\mu\nu}$ η μετρική Riemann, ονομάζεται στοιχειώδης όγκος Riemann.[25]

Βιβλιογραφία

[1] R. Utiyama, "Invariant theoretical interpretation of interaction," *Phys. Rev.*, vol. 101, pp. 1597–1607, Mar 1956.

[2] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity.* Cambridge University Press, 2020.

[3] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, and D. Kaiser, *Gravitation.* Princeton University Press, 2017.

[4] J. Yepez, "Einstein's vierbein field theory of curved space," 2011.

[5] G. Manolakos, *Construction of gravitational models as noncommutative gauge theories.* PhD thesis, Natl. Tech. U., Athens, 2019.

[6] P. Ramond, *FIELD THEORY. A MODERN PRIMER*, vol. 51. 1981.

[7] E. Witten, "2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system," *Nuclear Physics B*, vol. 311, no. 1, pp. 46–78, 1988.

[8] K. S. Stelle and P. C. West, "Spontaneously broken de sitter symmetry and the gravitational holonomy group," *Phys. Rev. D*, vol. 21, pp. 1466–1488, Mar 1980.

[9] T. W. B. Kibble and K. S. Stelle, *Gauge theories of gravity and supergravity.* 1985.

[10] S. W. MacDowell and F. Mansouri, "Unified geometric theory of gravity and supergravity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 38, pp. 1376–1376, Jun 1977.

[11] T. W. B. Kibble, "Lorentz invariance and the gravitational field," *J. Math. Phys.*, vol. 2, pp. 212–221, 1961.

[12] M. Kaku, P. K. Townsend, and P. van Nieuwenhuizen, "Gauge Theory of the Conformal and Superconformal Group," *Phys. Lett. B*, vol. 69, pp. 304–308, 1977.

[13] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess, "Gauge theory on noncommutative spaces," *The European Physical Journal C*, vol. 16, p. 161–167, Aug 2000.

[14] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess, "Gauge theory on noncommutative spaces," *The European Physical Journal C*, vol. 16, p. 161–167, Aug 2000.

[15] R. Andrews and N. Dorey, "Deconstruction of the maldacena–núñez compactification," *Nuclear Physics B*, vol. 751, p. 304–341, Sep 2006.

[16] M. Douglas and N. Nekrasov, "Noncommutative field theory," *Reviews of Modern Physics*, vol. 73, p. 977–1029, Nov 2001.

[17] G. Manolakos, P. Manousselis, and G. Zoupanos, "Four-dimensional gravity on a covariant noncommutative space," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2020, Aug 2020.

[18] M. Buric and J. Madore, "Noncommutative de sitter and frw spaces," *The European Physical Journal C*, vol. 75, 08 2015.

[19] E. A. Ivanov and J. Niederle, "Gauge formulation of gravitation theories. i. the poincaré, de sitter, and conformal cases," *Phys. Rev. D*, vol. 25, pp. 976–987, Feb 1982.

[20] G. Manolakos, P. Manousselis, and G. Zoupanos, "Four-Dimensional Gravity on a Covariant Noncommutative Space (II)," 4 2021.

[21] G. Manolakos, P. Manousselis, and G. Zoupanos, "Gauge theory of gravity on a four-dimensional covariant noncommutative space," *PoS*, vol. CORFU2019, p. 236, 2020.

[22] A. Chamseddine and P. West, "Supergravity as a gauge theory of supersymmetry," *Nuclear Physics B*, vol. 129, no. 1, pp. 39–44, 1977.

[23] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley, 2003.

[24] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. Graduate student series in physics, Bristol: Hilger, 1990.

[25] P. G. Labropoulos, "Differential forms - lecture notes,"

[26] R. Szabo, "Quantum field theory on noncommutative spaces," *Physics Reports*, vol. 378, p. 207–299, May 2003.