



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής
Δ.Π.Μ.Σ. «Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Διπλωματική εργασία του φοιτητή Γιάννη Τρίμπ

Ανακανονικοποίηση στο Καθιερωμένο Πρότυπο και σχετικά ζητήματα

Επιβλέπων Καθηγητής:
κος Νικόλαος Τράκας

Αθήνα, 2020

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	2
2	Σκέδαση σωματιδίων και διαγράμματα Feynman	3
3	Η ανακανονικοποίηση της QED	6
3.1	Κατασκευάζοντας την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική	6
3.2	Οι κανόνες Feynman της QED	9
3.3	Τα αποκλίνοντα διαγράμματα της QED	10
3.3.1	Υπολογισμός των διαγραμμάτων	11
3.4	Η ανακανονικοποίηση	22
4	Η ανακανονικοποίηση των $SU(N)$ συμμετρικών θεωριών	29
4.1	Εισαγωγικά	29
4.2	Γιατί $SU(N)$?	29
4.3	Λίγα πράγματα για τις ομάδες Lie	31
4.3.1	Η $SU(N)$ αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή	32
4.3.2	Οι αναπαραστάσεις των $SU(N)$ ομάδων	35
4.4	Οι κανόνες Feynman	37
4.5	Μερικά αποκλίνοντα διαγράμματα	39
4.6	Η ανακανονικοποίηση	45
5	Οι τρέχουσες σταθερές σύζευξης και η RGE	47
5.1	Διορθώνοντας τον νόμο του Coulomb	47
5.2	Η εξίσωση RGE	50
5.2.1	Ο σωλήνας, το νερό και το μελάνι	51
5.2.2	Η τρέχουσα σταθερά σύζευξης	52
5.3	Υπολογίζοντας beta functions	54
5.3.1	Η beta function της QED	54
5.3.2	Η beta function της $SU(N)$ συμμετρικής θεωρίας	55
6	Οι τρέχουσες σταθερές σύζευξης του Standard Model	56
6.1	Εισαγωγικά	56
6.2	Η Λαγκρανζιανή του Standard Model	57
6.3	Αποκλίνοντα διαγράμματα με Higgs	58
6.4	Οι beta functions του Standard Model	60
6.5	Οι καμπύλες	62
7	Λίγα λόγια για τη δομή του πρωτονίου	64
7.1	Μη ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου	64
7.2	Τα παρτόνια και η Deep Inelastic Scattering	68
7.3	Παραβίαση του Bjorken scaling και QCD διορθώσεις	70
7.4	Η εξίσωση Altarelli-Parisi ως άλλη RGE	74
8	Μια ανασκόπηση	75
	Βιβλιογραφία	76

1 Πρόλογος

Τερματικός σταθμός αυτής της εργασίας είναι η εξαγωγή της γνωστής σχέσης που συνδέει τις “τρέχουσες” σταθερές σύζευξης του Καθιερωμένου Προτύπου με την ενέργεια. Για να φτάσουμε ως εκεί επιχειρούμε μια σύντομη αλλά συνεκτική διαδρομή, που ξεκινά από τις βάσεις την Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής, περνά από την ανακανονικοποίηση και την “Renormalisation Group Equation” και φτάνει στις “beta” συναρτήσεις του Καθιερωμένου Προτύπου.

Τα διάφορα ζητήματα φυσικού ενδιαφέροντος που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της διαδρομής εξηγούνται, ενώ επιχειρούνται συνδέσεις των “μοντέρνων” μεθόδων της ανακανονικοποίησης με στοιχεία παλαιότερων προσεγγίσεων, οι οποίες συχνά ενδείκνυνται για την κατανόηση εννοιών.

Τέλος, γίνεται μια αναφορά σε ένα κομμάτι της μελέτης της δομής των αδρονίων, με αφορμή ορισμένες μεθοδολογικές ομοιότητες που παρουσιάζει με την ανακανονικοποίηση.

Θέλω να ευχαριστήσω τον κύριο Τράκα για την βοήθεια και την καθοδήγηση.

Γιάννης Τρίμης
Ιούνιος 2020

2 Σκέδαση σωματιδίων και διαγράμματα Feynman

Ας αρχίσουμε τη συζήτηση με την σκέδαση δύο όμοιων σωματιδίων.

Η σκέδαση διαρκεί πεπερασμένο χρονικό διάστημα, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι πριν και μετά από αυτήν το σύστημα χαρακτηρίζεται από μία ελεύθερη χαμιλτονιανή H_0 . Οι ιδιοκαταστάσεις της H_0 είναι της μορφής $|p_1 p_2\rangle$, όπου p_1 και p_2 οι ορμές του πρώτου και του δεύτερου σωματιδίου, αντίστοιχα. Κατά τη διάρκεια της σκέδασης η χαμιλτονιανή είναι $H_0 + H'$ και η H' νοείται ως διαταραχή.

Έστω ότι πριν την σκέδαση, πριν δηλαδή επιδράσει η H' , τα σωματίδια βρίσκονται σε μία ιδιοκατάσταση της H_0 , την $|p_1 p_2\rangle \equiv |i\rangle$.

Από εδώ και στο εξής, καταστάσεις και τελεστές θα εννοούνται στην εικόνα αλληλεπίδρασης.¹

Μετά την σκέδαση, τα δύο σωματίδια θα βρίσκονται σε μία κατάσταση $|\psi\rangle$. Οι δύο καταστάσεις συνδέονται μέσω του τελεστή S :

$$|\psi\rangle = S|i\rangle \quad (2.1)$$

Ο S μπορεί να υπολογιστεί μέσω του αναπτύγματος Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n T[\mathcal{H}'(x_1) \dots \mathcal{H}'(x_n)] \quad (2.2)$$

όπου \mathcal{H}' η Χαμιλτονιανή πυκνότητα που αντιστοιχεί στην Χαμιλτονιανή H' .

Αυτό που συνήθως ενδιαφέρει σε μία σκέδαση είναι το πλάτος της πιθανότητας να βρεθεί το σύστημα, μετά τη σκέδαση, σε μία συγκεκριμένη κατάσταση, έστω στην $|p'_1 p'_2\rangle \equiv |f\rangle$. Το πλάτος αυτό είναι:

$$S_{fi} \equiv \langle f|S|i\rangle \quad (2.3)$$

Για να το υπολογίσουμε, πρέπει να κάνουμε δύο υποθέσεις που άπτονται της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Η πρώτη είναι ότι και τα δύο (όμοια) σωματίδια είναι διεγέρσεις ενός βαθμωτού πεδίου ϕ . Η δεύτερη αφορά το κομμάτι αλληλεπίδρασης της χαμιλτονιανής (δηλ. το H'). Μπορούμε για απλότητα να θεωρήσουμε τη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - g \frac{\phi^4}{4!} \quad (2.4)$$

όπου m η μάζα των σωματιδίων. Συνεπώς:

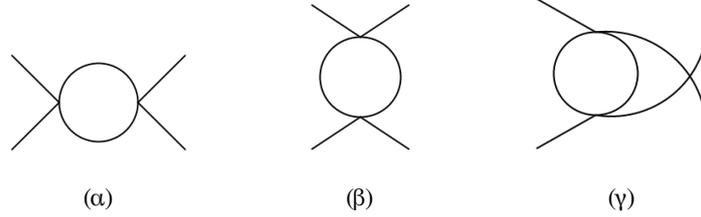
$$\mathcal{H}' = g \frac{\phi^4}{4!} \quad (2.5)$$

Το g είναι η λεγόμενη “σταθερά σύζευξης” και το γεγονός ότι είναι μικρή ποσότητα δίνει στην H' τον χαρακτήρα διαταραχής. Αντικαθιστώντας λοιπόν την (2.5) στην (2.2) και αυτήν με τη σειρά της στην (2.3), παίρνουμε ένα διαταρακτικό ανάπτυγμα για το πλάτος σκέδασης S_{fi} . Ο όρος τάξης g^2 , για παράδειγμα, είναι:

$$\frac{g^2}{(4!)^2} \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle p'_1 p'_2 | T[\phi^4(x_1) \phi^4(x_2)] | p_1 p_2 \rangle \quad (2.6)$$

¹Η $|i\rangle$ στην εικόνα αλληλεπίδρασης δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, δεδομένου φυσικά ότι δεν έχει επιδράσει ακόμη η H' .

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Wick, γράφουμε την $T[\phi^4(x_1)\phi^4(x_2)]$ και συνεπώς την (2.6) ως άθροισμα απλούστερων όρων, καθέναν από τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε ως διάγραμμα Feynman. Παρακάτω παριστάνονται ως διαγράμματα Feynman εκείνοι οι όροι της (2.6), οι οποίοι δίνουν μη τετριμμένο αποτέλεσμα:



Σχήμα 1

Θεωρούμε πάντοτε ότι το πρώτο σωματίδιο εισέρχεται πάνω αριστερά και εξέρχεται πάνω δεξιά, και το δεύτερο εισέρχεται κάτω αριστερά και εξέρχεται κάτω δεξιά.

Τα διαγράμματα αντιστοιχούν στους εξής όρους:

$$(\alpha): \quad \frac{1}{2}(-ig)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{i(p'_1+p'_2)_\mu x_1^\mu} e^{-i(p_1+p_2)_\mu x_1^\mu} \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle$$

$$(\beta): \quad \frac{1}{2}(-ig)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{i(p'_1-p_1)_\mu x_1^\mu} e^{i(p'_2-p_2)_\mu x_1^\mu} \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle$$

$$(\gamma): \quad \frac{1}{2}(-ig)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{i(p'_2-p_1)_\mu x_1^\mu} e^{i(p'_1-p_2)_\mu x_1^\mu} \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle$$

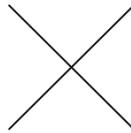
Αν κάνουμε τους υπολογισμούς, θα βρούμε:

$$(\alpha): \quad \frac{1}{2}(-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2}$$

$$(\beta): \quad \frac{1}{2}(-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_1 - p'_1 - k)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2}$$

$$(\gamma): \quad \frac{1}{2}(-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_1 - p'_2 - k)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2}$$

Επιπλέον, και χωρίς να κάνουμε λεπτομερή υπολογισμό, ο όρος τάξης g^1 του S_{fi} παριστάνεται ως:



Σχήμα 2

και ισούται με:

$$(-ig)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)$$

ενώ ο g^0 τάξης όρος είναι απλώς το γινόμενο $\langle f|i \rangle$, ο οποίος συνήθως δεν λαμβάνεται υπ' όψιν αφού αντιπροσωπεύει το ενδεχόμενο να μην συμβεί σκέδαση.

Αν τελικά προσθέσουμε όλους τους παραπάνω όρους θα πάρουμε μια $O(g^2)$ προσέγγιση για το S_{fi} .

Αυτό βέβαια που κάνει κανείς συνήθως για να βρει πλάτη σκέδασης, σε κάποια τάξη ως προς g , δεν είναι να υπολογίζει ξανά και ξανά ολοκληρώματα σαν το (2.6), αλλά να σχεδιάζει πρώτα τα διαγράμματα Feynman που βρίσκονται στην επιθυμητή τάξη και έπειτα να τα “αποκωδικοποιεί”, χρησιμοποιώντας κάποιους κανόνες. Για την δικιά μας ϕ^4 θεωρία, οι κανόνες είναι οι εξής:

1. Για κάθε κορυφή του διαγράμματος γράφουμε $-ig$.
2. Θεωρούμε διατήρηση της 4-ορμής σε κάθε κορυφή.
3. Για κάθε εσωτερική γραμμή του διαγράμματος, η οποία φέρει ορμή k , γράφουμε

$$\frac{i}{k^2 - m^2}$$

(παραλείποντας για απλότητα το $i\epsilon$ από τον παρονομαστή).

4. Για κάθε βρόχο (όπως αυτούς στο σχήμα 1) ολοκληρώνουμε την απροσδιόριστη ορμή k :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

5. Πολλαπλασιάζουμε με

$$(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f)$$

όπου μέσα στην δέλτα συνάρτηση υπάρχει η διαφορά ολικής αρχικής και τελικής ορμής.

6. Τέλος, διαιρούμε με τον παράγοντα συμμετρίας του αντίστοιχου διαγράμματος. Για να βρει κανείς έναν γενικό τύπο του παράγοντα συμμετρίας πρέπει να επιστρατεύσει δύσκολα μαθηματικά. Ωστόσο, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον παράγοντα συμμετρίας στις εξής δύο συνηθισμένες περιπτώσεις: Για κάθε γραμμή που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή πολλαπλασιάζουμε με το 2. Επίσης, για κάθε n εσωτερικές γραμμές με κοινά άκρα πολλαπλασιάζουμε με το $n!$ ¹

Έχοντας γράψει και “αποκωδικοποιήσει” κανείς όλα τα διαγράμματα Feynman έως και την επιθυμητή τάξη ως προς g , είναι πλέον σε θέση να γράψει το διαταρακτικό ανάπτυγμα του πλάτους S_{fi} , από το οποίο μετά μπορεί να υπολογίσει τις πειραματικά μετρήσιμες ενεργούς διατομές. Και θα σταματούσαμε την συζήτηση εδώ, αν δεν υπήρχε το σοβαρό πρόβλημα ότι κάποια από τα διαγράμματα Feynman οδηγούν σε άπειρες συνεισφορές στο διαταρακτικό ανάπτυγμα. Ακόμα και τα τρία διαγράμματα με βρόχους που υπολογίσαμε παραπάνω απειρίζονται, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει αν επιχειρήσει να υπολογίσει τα προκύπτοντα ολοκληρώματα στις ορμές των βρόχων.

Από την άλλη, βλέπουμε ότι η πειραματική μέτρηση σκεδάσεων, που στη θεωρία περιέχουν τέτοιους απειρισμούς, δίνει πεπερασμένα αποτελέσματα. Και ακόμη, βλέπουμε ότι η πρώτη τάξης διαταρακτική προσέγγιση των σκεδάσεων αυτών- που συνήθως δεν απειρίζεται- προσφέρει μία καλή εκτίμηση των πειραματικών μετρήσεων.²

¹Για παράδειγμα, ο παράγοντας $1/2$ που εμφανίστηκε στα πλάτη για τα διαγράμματα του σχήματος 1 είναι ένας παράγοντας συμμετρίας που οφείλεται στις δύο εσωτερικές γραμμές με κοινά άκρα.

²Η σκέδαση Compton, λόγω χάρη, περιγράφεται αρκετά καλά από την πρώτη τάξης διαταρακτική προσέγγιση, παρόλο που η δεύτερης τάξης έχει βρόχους και απειρίζεται.

Οπότε τίθεται το ερώτημα αν οι απειρίες αυτές έχουν πράγματι κάποια φυσική ερμηνεία, ή αν πρόκειται απλώς για ένα τετράτυπ της θεωρίας, το οποίο μπορεί να παρακαμφθεί μέσω κάποιου “νόμιμου” τεχνάσματος. Και όντως βρέθηκε ένα τέτοιο τέχνασμα, το οποίο όχι μόνο έλυσε τα προβλήματα των απειρισμών των διαγραμμάτων, αλλά οδήγησε σε νέες ανακαλύψεις και βαθύτερη κατανόηση των στοιχειωδών σωματιδίων και των αλληλεπιδράσεών τους.

Το τέχνασμα αυτό είναι η ανακανονικοποίηση.

3 Η ανακανονικοποίηση της QED

3.1 Κατασκευάζοντας την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική

Η κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED) είναι η μορφή που παίρνει ο ηλεκτρομαγνητισμός στην κβαντική θεωρία πεδίου. Για να γίνουν όμως κατανοητά τα φυσικά επιχειρήματα που οδηγούν σε αυτή τη μορφή, είναι χρήσιμο κανείς να δει κάποια βασικά σημεία του περάσματος από τον κλασσικό ηλεκτρομαγνητισμό στην κβαντική μηχανική και τέλος στην θεωρία πεδίου.

Η χαμιλτονιανή ενός κλασσικού σωματιδίου μάζας m , ορμής \mathbf{p} και φορτίου q μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δυναμικού (ϕ, \mathbf{A}) είναι:

$$H = \frac{1}{2m} |\mathbf{p} - q\mathbf{A}|^2 + q\phi \quad (3.1)$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτήν τη Χαμιλτονιανή σε κάποια από τις εξισώσεις της κβαντικής μηχανικής, οι οποίες περιγράφουν την χρονική εξέλιξη των συστημάτων-δηλαδή στην Schrödinger, την Klein-Gordon ή την Dirac. Ας αντικαταστήσουμε για απλότητα στην Schrödinger στον χώρο των θέσεων:

$$\left[\frac{1}{2m} | -i\nabla - q\mathbf{A} |^2 + q\phi \right] \psi(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (3.2)$$

όπου ψ η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου μάζας m και φορτίου q . Ξαναγράφουμε την (3.2):

$$\frac{1}{2m} | -i\nabla - q\mathbf{A} |^2 \psi(\mathbf{x}, t) = i \left[\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi \right] \psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.3)$$

και παρατηρούμε ότι μοιάζει με την εξίσωση ενός ελεύθερου σωματιδίου, με τις εξής αντικαταστάσεις:

$$\begin{aligned} \nabla &\longrightarrow \nabla - iq\mathbf{A} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι αντικαθιστώντας στην ελεύθερη εξίσωση Schrödinger τους τελεστές παραγωγίσης, όπως ορίζει η (3.4), φτιάξαμε την (3.3), δηλαδή μία εξίσωση που περιγράφει ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις στα πλαίσια της κβαντικής μηχανικής. Με την τεχνική αυτή μπορούμε να εισάγουμε τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις και στην θεωρία πεδίου. Υπάρχει όμως ένα ακόμη γνώρισμα του κλασσικού ηλεκτρομαγνητισμού το οποίο δεν έχει συμπεριληφθεί στην κβαντική περιγραφή, και αυτό είναι η συμμετρία βαθμίδας του δυναμικού.

Αυτή η συμμετρία εκφράζει το γεγονός ότι στο φυσικό σύστημα σωματίδιο-ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δεν αλλάζει τίποτα αν τα δυναμικά που περιγράφουν το πεδίο υποστούν τους εξής μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{x}, t) \\ \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου χ μία βαθμωτή συνάρτηση πάνω στις χωροχρονικές συντεταγμένες.

Σε κλασσικό επίπεδο οι μετασχηματισμοί αυτοί αφήνουν αναλλοίωτα τα πεδία και συνεπώς τις ασκούμενες δυνάμεις¹. Σε κβαντικό επίπεδο τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά, καθώς βλέπουμε ότι αν στην (3.3) αλλάξουμε τα δυναμικά από \mathbf{A} και ϕ σε \mathbf{A}' και ϕ' , σύμφωνα με τις σχέσεις (3.5), τότε θα αλλάξει και η κυματοσυνάρτηση που λύνει την εξίσωση από $\psi(\mathbf{x}, t)$ σε $\psi'(\mathbf{x}, t)$.

Αυτό δεν αποτελεί επί της αρχής πρόβλημα, καθώς η κυματοσυνάρτηση καθαυτή δεν είναι φυσικό μέγεθος και συνεπώς η μεταβολή της δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αλλάζει κάτι στο φυσικό σύστημα που περιγράφεται- πρέπει όμως να βρούμε πώς συνδέεται η ψ με την ψ' . Η (3.3) μετά τον μετασχηματισμό βαθμίδας γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} | -i\nabla - q\mathbf{A}' |^2 \psi' &= i \left[\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi' \right] \psi' \Rightarrow \\ \frac{1}{2m} | -i\nabla - q\mathbf{A} - q\nabla\chi(\mathbf{x}, t) |^2 \psi' &= i \left[\frac{\partial}{\partial t} + iq\phi - iq\frac{\partial\chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \psi' \end{aligned} \quad (3.6)$$

και όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει με απλή αντικατάσταση, η

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{iq\chi(\mathbf{x}, t)} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.7)$$

λύνει την (3.6).

Η (3.7) επιβεβαιώνει πως η φυσική του συστήματος σωματίδιο-πεδίο δεν άλλαξε, αφού δεν άλλαξε ούτε η πυκνότητα πιθανότητας για το σωματίδιο:

$$|\psi'(\mathbf{x}, t)|^2 = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$$

αλλά ούτε και μεγέθη όπως το ρεύμα², η μέση ορμή κ.α., μιας και ποσότητες σαν το

$$\psi^*(\nabla - iq\mathbf{A})\psi$$

είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, οι οποίοι τελικά ορίζονται στην κβαντική μηχανική ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{x}, t) \\ \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \psi &\longrightarrow \psi' = e^{iq\chi}\psi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Στην θεωρία πεδίου αντιμετωπίζουμε πεδία και σωματίδια με ισότιμο τρόπο, καθώς τα πάντα λογίζονται ως πεδία. Ας υποθέσουμε για αρχή ότι έχουμε φερμιόνια μάζας m στο κενό. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από την εξής Λαγκρανζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (3.9)$$

και βλέπουμε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange για αυτήν τη Λαγκρανζιανή είναι ακριβώς η εξίσωση Dirac για τα πεδία ψ και $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned} (i\cancel{\partial} - m)\psi &= 0 \\ \bar{\psi}(i\overleftarrow{\cancel{\partial}} + m) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

¹Η αλλιώς, αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την (3.1).

²Ο τελεστής ∇ που εμφανιζόταν στον ορισμό του ρεύματος έχει πλέον αλλάξει σύμφωνα με την (3.4).

Μπορούμε να εισάγουμε την αλληλεπίδραση των φερμιονίων με φωτόνια (δηλ. με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) και πάλι με την αντικατάσταση (3.4), γραμμένη σε συναλλοίωτο φορμαλισμό¹:

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iqA_\mu \quad (3.11)$$

όπου q το φορτίο των φερμιονίων, ενώ το τετράνυσμα A με δείκτες κάτω ισούται με $(\phi, -\mathbf{A})$. Παρατηρούμε ότι η προκύπτουσα Λαγκρανζιανή

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \\ &= \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \end{aligned} \quad (3.12)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\begin{aligned} A^\mu &\longrightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi(x) \\ \psi &\longrightarrow e^{iq\chi(x)} \psi \end{aligned} \quad (3.13)$$

Έχοντας βρει την Λαγκρανζιανή για τα φερμιόνια (δηλ. την \mathcal{L}_1), καλούμαστε να κατασκευάσουμε την λαγκρανζιανή του πεδίου των φωτονίων, το οποίο ονομάζεται και πεδίο βαθμίδας. Ξέρουμε ότι αναζητούμε μία λαγκρανζιανή για την οποία οι εξισώσεις Euler-Lagrange θα είναι οι εξισώσεις του Maxwell (στο κενό):

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0 \Rightarrow \\ \partial_\mu [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] &= 0 \Rightarrow \\ [g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \partial^\nu \partial^\mu] A_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Η λαγκρανζιανή αυτή είναι η $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}$:

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

και είναι και αυτή αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας (3.13). Μάλιστα, η αναλλοιότητα αυτή δημιουργεί ένα πρόβλημα: Ο τελεστής που δρα στο A_μ στην (3.14) δεν αντιστρέφεται, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να οριστεί διαδότης για το πεδίο βαθμίδας². Το πρόβλημα λύνεται αν προσθέσουμε έναν "gauge-fixing" όρο στην $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}$:

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.16)$$

οπότε οι Euler-Lagrange είναι:

$$\left[g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \partial^\nu \partial^\mu \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] A_\mu = 0 \quad (3.17)$$

Αυτός ο τελεστής αντιστρέφεται και δίνει τον διαδότη του φωτονίου³, στις διάφορες "βαθμίδες" ξ - και η \mathcal{L}_ξ δεν είναι πλέον αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Μπορούμε ωστόσο να ξεχάσουμε τα πάντα γύρω από τον νέο όρο (εκτός φυσικά από τον διαδότη που χάρη σε αυτόν μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε!), καθώς η παρουσία του δεν θα διαφοροποιούσε σε τίποτα την συνέχεια της εργασίας. Οπότε η Λαγκρανζιανή της QED για εμάς θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} \\ &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \end{aligned} \quad (3.18)$$

¹Θεωρούμε τον μετρικό τανυστή $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$

²Για τα φερμιόνια π.χ. ο διαδότης είναι ο αντίστροφος του τελεστή $i\not{\partial} - m$ (που εμφανίζεται στην εξίσωση Dirac), δηλαδή ο

$$S_F(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{i}{\not{k} - m}$$

³Βλ. την συζήτηση μετά την σχέση (4.32).

3.2 Οι κανόνες Feynman της QED

Οι κανόνες Feynman για τα πλάτη σκέδασης στην QED προκύπτουν, όπως και στην ϕ^4 θεωρία, μέσω υπολογισμού πλατών S_{fi} για απλές διαδικασίες.

1. Εισερχόμενα και εξερχόμενα σωματίδια

Στην QED, σε αντίθεση με την ϕ^4 , εμφανίζονται στα πλάτη σκέδασης όροι που αφορούν τα εισερχόμενα και εξερχόμενα φερμιόνια ή φωτόνια.¹ Θεωρούμε για τα φερμιόνια τις κυματικές λύσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας της ελεύθερης εξίσωσης Dirac που χαρακτηρίζονται αντιστοίχως από τους σπινόρες

$$u(\mathbf{p}, s) \text{ και } v(\mathbf{p}, s)$$

όπου το s παίρνει τιμές 1, 2 και αφορά τον βαθμό ελευθερίας του σπιν.² Επίσης, για ένα φωτόνιο ορμής \mathbf{k} θεωρούμε το διάνυσμα πόλωσης $\epsilon_\mu(\mathbf{k})$. Έχοντας θεωρήσει τα παραπάνω, γράφουμε τον κανόνα Feynman για τα εξωτερικά σωματίδια:

Για εισερχόμενο φωτόνιο ορμής \mathbf{k} συμπληρώνουμε $\epsilon_\mu(\mathbf{k})$.

Για εξερχόμενο φωτόνιο ορμής \mathbf{k} συμπληρώνουμε $\epsilon_\mu^*(\mathbf{k})$.

Για εισερχόμενο φερμιόνιο με δείκτη σπιν s και ορμή \mathbf{p} συμπληρώνουμε $u(\mathbf{p}, s)$.

Για εξερχόμενο φερμιόνιο με δείκτη σπιν s και ορμή \mathbf{p} συμπληρώνουμε $\bar{u}(\mathbf{p}, s)$.

Για εισερχόμενο αντιφερμιόνιο με δείκτη σπιν s και ορμή \mathbf{p} συμπληρώνουμε $\bar{v}(\mathbf{p}, s)$.

Για εξερχόμενο αντιφερμιόνιο με δείκτη σπιν s και ορμή \mathbf{p} συμπληρώνουμε $v(\mathbf{p}, s)$.

2. Για κάθε κορυφή του διαγράμματος γράφουμε $-ie\gamma^\mu$, όπου e το φορτίο του εμπλεκόμενου φερμιονίου. Το συμβολίζουμε με e και όχι με το ίσως γενικότερο q , επειδή το σύνηθες στην QED είναι να μιλάει κανείς για ηλεκτρόνια. Το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι και η “σταθερά σύζευξης” της QED.
3. Θεωρούμε διατήρηση της 4-ορμής σε κάθε κορυφή. Για τα εξωτερικά φωτόνια, φερμιόνια και αντιφερμιόνια η κατεύθυνση της ορμής είναι “προς τα μέσα”, αν είναι εισερχόμενα και “προς τα έξω” αν είναι εξερχόμενα. Για τα εσωτερικά φωτόνια η κατεύθυνση της ορμής είναι αυθαίρετη, ενώ για τα εσωτερικά φερμιόνια και αντιφερμιόνια η ορμή ακολουθεί πάντοτε τη ροή του φορτίου.
4. Για κάθε εσωτερική φερμιονική γραμμή του διαγράμματος, η οποία φέρει ορμή k γράφουμε

$$\frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2}$$

το οποίο ενίοτε συμβολίζεται και ως $i/(\not{k} - m)$. Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε πως είναι πίνακας.

¹Τα εξωτερικά σωματίδια λέμε ότι είναι “on shell” επειδή το τετράγωνο της τετραορμής τους ισούται με το τετράγωνο της μάζας τους- δηλαδή μηδέν στην περίπτωση των φωτονίων. Βέβαια, καμιά φορά μελετά κανείς ένα διάγραμμα όπου οι εξωτερικές γραμμές δεν είναι on shell, δηλαδή δεν αντιστοιχούν σε πραγματικά σωματίδια, επειδή το διάγραμμα αυτό αποτελεί κομμάτι ενός μεγαλύτερου διαγράμματος.

²Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ο σπινόρας $v(\mathbf{p}, s)$ περιγράφει μία λύση της ελεύθερης εξίσωσης Dirac με αρνητική ενέργεια και ορμή $-\mathbf{p}$. Την λύση αυτή την ερμηνεύουμε ως αντιφερμιόνιο θετικής ενέργειας και ορμής \mathbf{p} .

5. Για κάθε εσωτερική φωτονική γραμμή που φέρει ορμή k γράφουμε

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$$

προσέχοντας ώστε οι Lorentz δείκτες να αθροίζονται με τους αντίστοιχους δείκτες των γ πινάκων στα άκρα της φωτονικής γραμμής.

6. Για κάθε βρόχο ολοκληρώνουμε την απροσδιόριστη ορμή k :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

7. Πολλαπλασιάζουμε με

$$(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f)$$

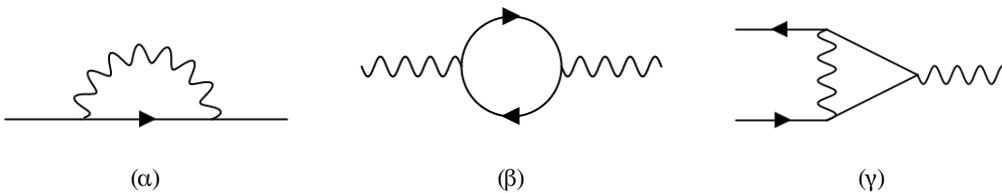
όπου μέσα στην δέλτα συνάρτηση υπάρχει η διαφορά ολικής αρχικής και τελικής ορμής.

8. Αν στο διάγραμμα υπάρχει περιττός αριθμός φερμιονικών βρόχων τότε πολλαπλασιάζουμε το πλάτος με -1 .

9. Τέλος, αν το διάγραμμα προκύπτει από κάποιο άλλο με εναλλαγή του ενός άκρου δύο εξωτερικών φερμιονικών γραμμών τότε τα πλάτη των δύο διαγραμμάτων πρέπει να έχουν αντίθετο πρόσημο. Ο κανόνας αυτός στην πραγματικότητα είναι γενικότερος: Αν εναλλάξουμε το ένα άκρο οποιωνδήποτε δύο φερμιονικών γραμμών σε ένα διάγραμμα τότε το προκύπτον διάγραμμα πρέπει να έχει αντίθετο πρόσημο με το αρχικό.¹

3.3 Τα αποκλίνοντα διαγράμματα της QED

Στην QED, όπως και στην ϕ^4 , αν προσπαθήσει κανείς να υπολογίσει συνεισφορές ανώτερης τάξης (ως προς e) στο πλάτος σκέδασης, θα έρθει αντιμέτωπος με διαγράμματα που περιέχουν βρόχους. Η συνεισφορά κάποιων βρόχων στο πλάτος είναι άπειρη, και το πρόβλημα είναι ότι σε αυτούς ανήκουν και οι τρεις απλούστεροι βρόχοι που συναντά κανείς στην QED (Σχήμα 3):



Σχήμα 3

Οπότε, όποιο διάγραμμα περιέχει τουλάχιστον έναν από τους παραπάνω βρόχους δίνει άπειρη συνεισφορά και έτσι έχουμε διαταρακτικά αναπτύγματα πλάτων σκέδασης που καταρρέουν κίολας από την επόμενη, μετά τη θεμελιώδη, τάξη. Η ανακανονικοποίηση θα δείξει ότι στην πραγματικότητα τα διαγράμματα με βρόχους δεν απειρίζονται και ότι τα διαταρακτικά αναπτύγματα δεν καταρρέουν. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν την πορεία προς την ανακανονικοποίηση υπολογίζοντας και μελετώντας τις (άπειρες...) συνεισφορές των βρόχων του σχήματος 3.

¹βλ. σελ. 149,150 του [2].

3.3.1 Υπολογισμός των διαγραμμάτων

Το πρώτο διάγραμμα που θα υπολογίσουμε είναι το (α) του σχήματος 3, το γνωστό και ως **self-energy graph**.

Θεωρούμε πως το εισερχόμενο (και εξερχόμενο) φερμιόνιο έχει (τετρα)ορμή p και πως το φωτόνιο έχει ορμή $p-k$. Δεν θα ασχοληθούμε με τις δύο εξωτερικές φερμιονικές γραμμές του διαγράμματος, άλλωστε αυτές δεν συμμετέχουν στον απειρισμό του. Γράφουμε λοιπόν την συνεισφορά του διαγράμματος¹, βασιζόμενοι στους κανόνες Feynman και παρουσιάζοντας όλους τους Lorentz και σπινοριακούς δείκτες:

$$i\Sigma(p)_{ad} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_{ab}^\mu)(-ie\gamma_{cd}^\nu) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p-k)^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{k} + m)_{bc}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.19)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την εξής ταυτότητα:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[A + (B-A)x]^2} \quad (3.20)$$

Τα A και B λέγονται **Feynman parameters**. Αν $A = k^2 - m^2 + i\epsilon$ και $B = (p-k)^2 + i\epsilon$ τότε η (3.19) γίνεται:

$$i\Sigma(p)_{ad} = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_{ab}^\mu (\not{k} + m)_{bc} \gamma_\mu^{cd}}{[(k^2 - m^2)(1-x) + (p-k)^2 x + i\epsilon]^2}$$

η οποία με τη σειρά της, αξιοποιώντας τις ταυτότητες $\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu = -2\not{k}$ και $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$ γίνεται (κρύβοντας τους σπινοριακούς δείκτες):

$$i\Sigma(p) = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2\not{k} - 4m}{[(k^2 - m^2)(1-x) + (p-k)^2 x + i\epsilon]^2}$$

Προσθαφαιρούμε $p^2 x^2$ μέσα στην αγκύλη στον παρονομαστή και έχουμε:

$$i\Sigma(p) = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2\not{k} - 4m}{[(k-px)^2 - (m^2 - p^2 x)(1-x) + i\epsilon]^2}$$

Θέτουμε $l = k - px$ και $\Delta = (m^2 - p^2 x)(1-x)$:

$$i\Sigma(p) = 2e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\not{l} + \not{p}x - 2m}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2}$$

και παρατηρούμε ότι όλες οι συνιστώσες της ποσότητας $\not{l} = \gamma^\mu l_\mu$ είναι περιττές συναρτήσεις (στον χώρο του l) ενώ ο παρονομαστής είναι άρτιος. Οπότε στην ολοκλήρωση η συνεισφορά του \not{l} μηδενίζεται:

$$i\Sigma(p) = 2e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}x - 2m}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (3.21)$$

Και αφού έχει κανείς φέρει το ολοκλήρωμα σε αυτήν την αρκετά φιλικότερη μορφή, συνειδητοποιεί ότι το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι σε χώρο Minkowski. Ένας τρόπος για να χειριστεί κανείς πιο εύκολα αυτό το ολοκλήρωμα είναι να το μετατρέψει σε ευκλείδειο, και αυτή η μετατροπή επιτυγχάνεται μέσω της "**στροφής Wick**". Ας δούμε πώς λειτουργεί.

¹Η συνεισφορά ενός διαγράμματος στο πλάτος σκέδασης μπορεί να γραφτεί πάντα ως

$$i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i - \sum p_f)$$

οπότε για απλότητα στο εξής όταν γίνεται λόγος για συνεισφορά διαγράμματος θα εννοείται μόνο ο παράγοντας $i\mathcal{M}$.

Το πρώτο που πρέπει να θυμηθούμε είναι ότι η ποσότητα $i\epsilon$ τοποθετήθηκε στον παρονομαστή κατά τον ορισμό του διαδότη Feynman. Για παράδειγμα, σε ένα βαθμωτό πεδίο ο διαδότης Feynman είναι

$$D_F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ikx} \quad (3.22)$$

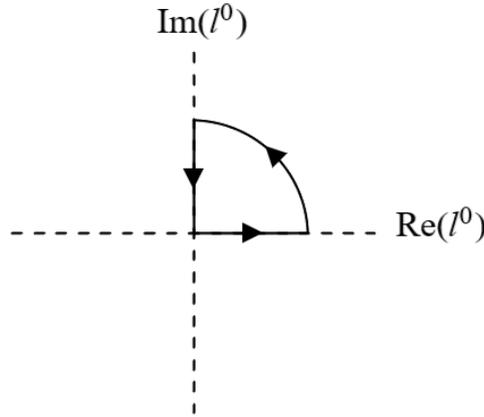
$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int dk^0 \frac{i}{(k^0 - E_{\mathbf{k}} + i\epsilon)(k^0 + E_{\mathbf{k}} - i\epsilon)} e^{ik^0 x^0} \quad (3.23)$$

όπου πλέον το ολοκλήρωμα στο k^0 υπολογίζεται με μιγαδική contour-ολοκλήρωση και το $i\epsilon$ χρησιμεύει στο να συμπεριληφθούν οι πόλοι με τον σωστό τρόπο στην καμπύλη ολοκλήρωσης.¹ Επίσης, ο παράγοντας $\exp(k^0 x^0)$ υπαγορεύει ότι η καμπύλη θα πρέπει να κλείσει είτε στο κάτω είτε στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο, ανάλογα με το πρόσημο του x^0 .²

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την (3.21) στην λογική της (3.23):

$$i\Sigma(p) = \frac{2\epsilon^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^3\mathbf{l} \int dl^0 \frac{\not{p}x - 2m}{[(l^0 - \sqrt{\mathbf{l}^2 + \Delta} + i\epsilon)(l^0 + \sqrt{\mathbf{l}^2 + \Delta} - i\epsilon)]^2} \quad (3.24)$$

Εστιάζουμε στην l^0 ολοκλήρωση. Εδώ φυσικά δεν υπάρχει όρος σαν το $\exp(k^0 x^0)$ και συνεπώς μπορούμε να πειραματιστούμε με την καμπύλη ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε αρχικά ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι αναλλοίωτη ως προς $l^0 \rightarrow -l^0$ και συνεπώς η ολοκλήρωση πάνω στον θετικό ημιάξονα του $\text{Re}(l^0)$ θα δώσει αποτέλεσμα ίσο με το μισό του συνολικού. Οπότε είναι βολική μία καμπύλη ολοκλήρωσης όπως στο σχήμα 4:



Σχήμα 4

Και οι δύο (διπλοί) πόλοι του παρονομαστή της (3.24) βρίσκονται εκτός της καμπύλης, οπότε το ολοκλήρωμα επί αυτής είναι μηδέν. Μηδέν όμως είναι και το ολοκλήρωμα επί του τόξου: συγκεκριμένα, μηδενίζεται σαν $\lim_{R \rightarrow \infty} (1/R^3)$, όπου R η ακτίνα του. Επομένως τα ολοκληρώματα πάνω στα ευθύγραμμα κομμάτια της καμπύλης είναι αντίθετα και συνεπώς η ολοκλήρωση πάνω στον πραγματικό άξονα δίνει ίδιο αποτέλεσμα με την ολοκλήρωση στον φανταστικό άξονα. Πάνω στον φανταστικό άξονα το l^0 είναι

¹Το όριο $\epsilon \rightarrow 0$ που πήραμε στις (3.22) και (3.23) εννοείται και κάθε άλλη φορά που εμφανίζεται το $i\epsilon$.

²Βλ. λήμμα του Jordan.

φανταστικό και μπορούμε να θεωρήσουμε $l^0 = il_E^0$, όπου $-\infty \leq l_E^0 \leq +\infty$. Οπότε:

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) &= \frac{2e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^3\mathbf{l} \int dl^0 \frac{\not{p}x - 2m}{[(l^0 - \sqrt{\mathbf{l}^2 + \Delta} + i\epsilon)(l^0 + \sqrt{\mathbf{l}^2 + \Delta} - i\epsilon)]^2} \\ &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^3\mathbf{l} \int dl_E^0 \frac{\not{p}x - 2m}{[(il_E^0 - \sqrt{\mathbf{l}^2 + \Delta})(il_E^0 + \sqrt{\mathbf{l}^2 + \Delta})]^2} \\ &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^3\mathbf{l} \int dl_E^0 \frac{\not{p}x - 2m}{[-(l_E^0)^2 - \mathbf{l}^2 - \Delta]^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Διώξαμε τα $i\epsilon$ διότι δεν υπάρχουν πόλοι επάνω στον φανταστικό άξονα. Τέλος, θεωρούμε το ευκλείδειο τετράνυσμα $l_E = (l_E^0, \mathbf{l})$ και η (3.25) γίνεται:

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4l_E \frac{\not{p}x - 2m}{(-l_E^2 - \Delta)^2} \\ &= \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4l_E \frac{\not{p}x - 2m}{(l_E^2 + \Delta)^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Εδώ τελειώνει η διαδικασία της στροφής Wick, αφού έχουμε πλέον ένα ολοκλήρωμα σε ευκλείδειο χώρο. Η ονομασία “στροφή” προέκυψε διότι ενώ ξεκινήσαμε να υπολογίζουμε με μιγαδική contour-ολοκλήρωση ένα ολοκλήρωμα στον πραγματικό άξονα, καταλήξαμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα στον φανταστικό άξονα- “στρίψαμε” δηλαδή κατά 90 μοίρες.

Ήρθε η στιγμή να αντιμετωπίσουμε τον απειρισμό του ολοκληρώματος. Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων σε n -διάστατο ευκλείδειο χώρο υπάρχει η εξής τεχνική:

$$\int d^n l = \int d\Omega_n \int_0^{+\infty} l^{n-1} dl \quad (3.27)$$

όπου $d\Omega_n$ η στοιχειώδης στερεά γωνία στον n -διάστατο χώρο. Εφαρμόζοντας την τεχνική αυτή στην (3.26) βρίσκουμε:

$$i\Sigma(p) = \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (\not{p}x - 2m) \int d\Omega_4 \int_0^{+\infty} dl_E \frac{l_E^3}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (3.28)$$

και παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα στο l_E αποκλίνει λογαριθμικά:

$$\int^\Lambda dl_E \frac{l_E^3}{(l_E^2 + \Delta)^2} \stackrel{l_E \gg \Delta}{\simeq} \int^\Lambda dl_E \frac{1}{l_E} \sim \log \Lambda \quad (3.29)$$

Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι το ολοκλήρωμα που έχει προκύψει αποκλίνει λογαριθμικά, ως προς το άνω άκρο ολοκλήρωσης. Γενικά, όλοι οι απειρισμοί που οφείλονται στον απειρισμό του άνω άκρου της ολοκλήρωσης στις ορμές ονομάζονται **Ultraviolet (UV) απειρισμοί**. Μόνον αυτοί θα μας απασχολήσουν, παρόλο που παρακάτω θα συναντήσουμε και άλλου τύπου προβλήματα απειρισμών.¹

Το επόμενο βήμα στην μελέτη του απειρισμού της (3.28) είναι να ελέγξουμε αν μπορούμε να την γράψουμε σαν άθροισμα μίας πεπερασμένης και μίας άπειρης ποσότητας. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **ομαλοποίηση** (regularisation)- και αν τώρα φαντάζει άσκοπη, θα δούμε αργότερα ότι έχει ζωτική σημασία για την ανακανονικοποίηση. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι για να γίνει η ομαλοποίηση και εμείς θα διαλέξουμε την πιο διαδεδομένη: την **διαστατική ομαλοποίηση** (dimensional regularisation).

Η διαστατική ομαλοποίηση ονομάζεται έτσι επειδή αυτό που κάνει κανείς είναι να γενικεύσει το αποκλίνον ολοκλήρωμα, ορίζοντάς το σε n διαστάσεις, και να πετύχει έπειτα την ομαλοποίησή του παίρνοντας το όριο $n \rightarrow 4$.

¹Στο εξής θα παραλείπουμε τα άκρα ολοκλήρωσης στην l_E ολοκλήρωση.

Το πρώτο βήμα είναι να κάνουμε την εξής αντικατάσταση:

$$e \longrightarrow e\mu^{(4-n)/2} \quad (3.30)$$

όπου το μ έχει διαστάσεις μάζας και η διάσταση του χώρου n είναι ένας αριθμός θετικός (και όχι απαραίτητα ακέραιος). Αυτό το κάνουμε ώστε η σταθερά σύζευξης e να παραμένει αδιάστατη παρά την γενίκευση της θεωρίας από 4 σε n διαστάσεις.¹ Έπειτα γράφουμε την (3.26) σε n διαστάσεις, με την χρήση της (3.30):

$$i\Sigma(p) = 2ie^2\mu^{4-n} \int_0^1 dx(\not{p}x - 2m) \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (3.31)$$

και χρησιμοποιώντας την τεχνική (3.27) βρίσκουμε:

$$i\Sigma(p) = \frac{2ie^2\mu^{4-n}}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx(\not{p}x - 2m) \int d\Omega_n \int dl_E \frac{l_E^{n-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (3.32)$$

Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν εξαρτάται από διευθύνσεις στον n -διάστατο χώρο, οπότε μπορούμε να εκτελέσουμε το γωνιακό ολοκλήρωμα:

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (3.33)$$

ενώ για το l_E -ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\int_0^\infty dy \frac{y^a}{(y^2 + A)^b} = A^{\frac{a+1}{2}-b} \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(b - \frac{a+1}{2})}{2\Gamma(b)} \quad (3.34)$$

για $a = n - 1$ και $b = 2$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $\Gamma(2) = 1$. Οπότε:

$$\int dl_E \frac{l_E^{n-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \Delta^{n/2-2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{2} \quad (3.35)$$

Να σημειωθεί εδώ ότι η (3.34) μπορεί να δώσει έναν γενικό τύπο που μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί κατευθείαν όταν έρχεται αντιμέτωπος με ολοκληρώματα σαν αυτό που μελετάμε εδώ:

$$\int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{l_E^{2a}}{(l_E^2 + \Delta)^b} = i(-1)^{a-b} (4\pi)^{-n/2} \Delta^{n/2+a-b} \frac{\Gamma(a + n/2)\Gamma(b - a - n/2)}{\Gamma(b)\Gamma(n/2)} \quad (3.36)$$

Συνεπώς, η (3.32) μέσω των (3.33) και (3.35) γίνεται:

$$i\Sigma(p) = 2ie^2 \int_0^1 dx(\not{p}x - 2m) \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) \Delta^{n/2-2} \quad (3.37)$$

Αλλάξαμε τη θέση της x -ολοκλήρωσης για να ομαδοποιήσουμε κάποιους όρους στη συνέχεια. Ορίζουμε τώρα τον αριθμό ϵ ως

$$\epsilon = 4 - n$$

Οπότε η (3.37) γράφεται ως

$$i\Sigma(p) = \frac{2ie^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx(\not{p}x - 2m) \mu^\epsilon (4\pi)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \Delta^{-\epsilon/2} \quad (3.38)$$

¹Η δράση πρέπει να είναι αδιάστατη, ανεξαρτήτως της διάστασης του χώρου. Οπότε η Λαγκρανζιανή πρέπει να έχει διάσταση (μάζα ^{n}) και έτσι καθορίζονται οι διαστάσεις των πεδίων και της σταθεράς σύζευξης. Για την σταθερά σύζευξης προκύπτει διάσταση (μάζα ^{$(4-n)/2$}).

Χρησιμοποιούμε τα εξής Taylor αναπτύγματα:

$$\mu^\epsilon = 1 + \epsilon \log \mu + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.39)$$

$$\Delta^{-\epsilon/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \log \Delta + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.40)$$

καθώς και το ανάπτυγμα της Γάμμα-συνάρτησης γύρω από το 0:¹

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.41)$$

όπου γ_E η σταθερά Euler-Mascheroni. Ξαναγράφουμε λοιπόν την (3.38):

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) &= \frac{2ie^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (\not{p}x - 2m) \left[\frac{2}{\epsilon} + \log \mu^2 + \log 4\pi - \log \Delta - \log e^{\gamma_E} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &= \frac{2ie^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (\not{p}x - 2m) \left[\frac{2}{\epsilon} + \log \frac{\mu^2 4\pi e^{-\gamma_E}}{\Delta} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &= \frac{2ie^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (\not{p}x - 2m) \left[\frac{2}{\epsilon} + \log \frac{\tilde{\mu}^2}{(m^2 - p^2 x)(1-x)} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Στην τελευταία σειρά αναπτύξαμε αφενός το Δ και αφετέρου θέσαμε:

$$\mu^2 4\pi e^{-\gamma_E} = \tilde{\mu}^2$$

απλώς και μόνο για να μην “κουβαλάμε” τις σταθερές. Στο όριο $n \rightarrow 4$, ή αλλιώς $\epsilon \rightarrow 0$ οι όροι $\mathcal{O}(\epsilon)$ μηδενίζονται. Εκτελούμε το ολοκλήρωμα που δεν περιέχει λογάριθμο, οπότε η (3.42) γίνεται:

$$i\Sigma(p) = \frac{ie^2}{8\pi^2} \left[\frac{\not{p} - 4m}{\epsilon} + \int_0^1 dx (\not{p}x - 2m) \log \frac{\tilde{\mu}^2}{(m^2 - p^2 x)(1-x)} \right] \quad (3.43)$$

Το x -ολοκλήρωμα που έμεινε στην (3.43) δεν είναι πάντοτε καλά ορισμένο. Πρόκειται για μία εκδοχή **Infrared** (IR) απειρισμού, η οποία θεραπεύεται αν θεωρηθεί πως το φωτόνιο έχει μια κατάλληλη μη μηδενική μάζα. Φυσικά, για να είναι νόμιμο κάτι τέτοιο θα πρέπει να μπορεί κανείς να “στείλει” χωρίς πρόβλημα την μάζα του φωτονίου και πάλι στο μηδέν, μετά τον υπολογισμό μετρούμενων μεγεθών. Η θεώρηση μη μηδενικής μάζας για το φωτόνιο είναι συνήθης τεχνική για την αντιμετώπιση των (IR) απειρισμών-μπορούμε μάλιστα με μία λογοτεχνική διάθεση να πούμε ότι οι IR αποκλίσεις κατά κάποιον τρόπο οφείλονται στο γεγονός ότι το φωτόνιο είναι άμαζο. Θα συναντήσουμε και έναν ακόμη IR απειρισμό παρακάτω.²

Εδώ τελειώνει η διαδικασία της διαστατικής ομαλοποίησης, αφού γράψαμε το $i\Sigma(p)$ ως άθροισμα μιας UV-αποκλίνουσας και μιας UV-πεπερασμένης ποσότητας (παρόλο που η δεύτερη περιέχει IR απειρισμό!). Συνεπώς, εδώ τελειώνει και η μελέτη του self-energy graph.

Προχωράμε στον υπολογισμό του διαγράμματος (β) του σχήματος 3, που λέγεται και **vacuum polarisation graph**.

Θεωρούμε πως το εισερχόμενο φωτόνιο έχει ορμή p , το φερμιόνιο του βρόχου ορμή k και το αντιφερμιόνιο του βρόχου ορμή $k - p$. Αγνοώντας τις εξωτερικές φωτονικές γραμμές, η συνεισφορά του διαγράμματος είναι:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p) &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_{ab}^\mu) (-ie\gamma_{cd}^\nu) \frac{i(\not{k} + m)_{bc}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{k} - \not{p} + m)_{da}}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= -(ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} - \not{p} + m)}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

¹Η Γ συνάρτηση απειρίζεται στο 0 και σε κάθε αρνητικό ακέραιο και αυτός είναι ο λόγος που παίρνουμε το ανάπτυγμά της.

²Για το IR πρόβλημα του self energy graph βλ. στο [13] την παράγραφο 7.1.2 και στο [17] την παράγραφο 7.1.

όμως το ίχνος

$$\text{tr}[\gamma^\mu (\not{k} - m)\gamma^\nu (\not{k} - \not{p} + m)]$$

υπολογίζεται. Αντικαθιστούμε λοιπόν το αποτέλεσμα αυτού του υπολογισμού στην (3.44):

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu k^\nu - p^\mu k^\nu - p^\nu k^\mu + g^{\mu\nu}(-k^2 + p^\sigma k_\sigma + m^2)}{[(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (3.45)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την ταυτότητα (3.20) με $A = (p-k)^2 - m^2$ και $B = k^2 - m^2$ ο νέος παρονομαστής θα είναι:

$$[[k - p(1-x)]^2 + p^2x(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2$$

Θέτουμε $l^\mu = k^\mu - p^\mu(1-x)$ και $\Delta = -p^2x(1-x) + m^2$ και ακόμη, διώχνουμε όποιον γραμμικό ως προς l όρο προκύψει στον αριθμητή, επειδή θα αντιστοιχεί σε ολοκλήρωση περιττής συνάρτησης. Οπότε η (3.45) γίνεται:

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu}(l^2 - \Delta) - 2x(1-x)(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (3.46)$$

Σπάμε το κλάσμα και έχουμε:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p) = & -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{2l^\mu l^\nu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} - \frac{g^{\mu\nu}(l^2 - \Delta)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \right] + \\ & + 8e^2(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{x(1-x)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Στην πρώτη σειρά της (3.47), στο δεύτερο κλάσμα μπορούμε να διώξουμε έναν παράγοντα $(l^2 - \Delta)$, αφού το $i\epsilon$ υπάρχει εκεί μόνο για να μας θυμίζει τον τρόπο ολοκλήρωσης. Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p) = & -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{2l^\mu l^\nu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{l^2 - \Delta + i\epsilon} \right] + \\ & + 8e^2(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{x(1-x)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Τώρα πρέπει να εφαρμόσουμε στην (3.48) στροφή Wick και διαστατική ομαλοποίηση. Δεν θα το κάνουμε πλήρως αναλυτικά, όμως θα σταθούμε στα σημαντικά σημεία. Πρώτα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2l^\mu l^\nu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι τανυστής και δεν μπορεί παρά να είναι ανάλογο του μετρικού τανυστή $g^{\mu\nu}$:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2l^\mu l^\nu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} = c \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2l^2 g^{\mu\nu}}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (3.49)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με $g_{\mu\nu}$ και βρίσκουμε ότι $c = 1/4$.¹ Οπότε

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2l^\mu l^\nu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (3.50)$$

¹Όταν γενικεύσουμε σε n διαστάσεις θα έχουμε $c = 1/n$.

Το δεξί μέλος υπολογίζεται με στροφή Wick και γενίκευση στις n διαστάσεις.¹ Οπότε:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{2l^\mu l^\nu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} &= g^{\mu\nu} \frac{2}{n} \left[-\frac{n}{2} \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Delta^{n/2-1} \Gamma(1 - n/2) \right] \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Delta^{n/2-1} \Gamma(1 - n/2) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Φυσικά το όριο της παράστασης αυτής για $n \rightarrow 1$ είναι άπειρο, καθώς η Γ συνάρτηση απειρίζεται στο -1 . Όμως ας μην βιαστούμε να αναπτύξουμε την Γ γύρω από το -1 και ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου της (3.48):

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}}{l^2 - \Delta + i\epsilon} = g^{\mu\nu} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 - \Delta + i\epsilon}$$

Με στροφή Wick και γενίκευση στις n διαστάσεις βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}}{l^2 - \Delta + i\epsilon} &= g^{\mu\nu} \left[-i \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \Delta^{n/2-1} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1 - n/2)}{\Gamma(1)\Gamma(n/2)} \right] \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Delta^{n/2-1} \Gamma(1 - n/2) \end{aligned} \quad (3.52)$$

που ισούται ακριβώς με την (3.51). Αυτό σημαίνει ότι οι δυο πρώτοι όροι της (3.48) αλληλοεξουδετερώνονται και συνεπώς μένει μόνο ο τρίτος:

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = 8e^2(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{x(1-x)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2} \quad (3.53)$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^2}$$

αποκλίνει λογαριθμικά,² ενώ μετά από στροφή Wick και γενίκευση στις n διαστάσεις γίνεται

$$\frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Delta^{n/2-2} \Gamma(2 - n/2)$$

Παρατηρούμε όμως ότι το ολοκλήρωμα της (3.53) είναι όμοιο με αυτό της (3.21), με μόνη διαφορά ότι αντί του $px - 2m$ τώρα έχουμε $x(1-x)$. Οπότε μπορούμε να γλιτώσουμε λίγο δρόμο “αντιγράφοντας” τα αποτελέσματα και να βρούμε:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p) &= \frac{8ie^2}{(4\pi)^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \int_0^1 dx (1-x)x \left[\frac{2}{\epsilon} + \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &= \frac{ie^2}{2\pi^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \left[\frac{1}{3\epsilon} + \int_0^1 dx (1-x)x \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

όπου $\epsilon = 4 - n$ και εννοείται όριο $\epsilon \rightarrow 0$. Εισήχθη ακόμη η αντικατάσταση (3.30) και χρησιμοποιήθηκαν τα αναπτύγματα (3.39)-(3.41). Πετύχαμε λοιπόν την ομαλοποίηση του vacuum polarisation graph. Αλλά πριν συνεχίσουμε στην μελέτη του επόμενου απειριζόμενου διαγράμματος πρέπει να κάνουμε ένα σχόλιο για το αποτέλεσμα (3.54).

Υπάρχει μία χρήσιμη “ταυτότητα” στην QED, που ονομάζεται **Ward-Takahashi identity** (για την απόδειξη της βλ. κεφάλαια 7 και 9 του [17]). Η ταυτότητα αυτή συνεπάγεται ότι αν ένα πλάτος σκέδασης \mathfrak{M} περιλαμβάνει κάποιο εξωτερικό φωτόνιο-αν δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$\mathfrak{M} = \varepsilon_\mu \mathfrak{M}^\mu \quad (3.55)$$

¹Ο υπολογισμός γίνεται και πάλι με βάση την (3.34). Το κλάσμα $n/2$ που υπάρχει μέσα στην αγκύλη στην πρώτη σειρά της (3.51) προέκυψε από έναν όρο $\Gamma(1 + n/2)$, με την χρήση της ταυτότητας $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$. Η ταυτότητα αυτή μας δίνει την πληροφορία του πως πλησιάζει η $\Gamma(1 + n/2)$ την τιμή 2 καθώς $n \rightarrow 4$.

²Βλ. σχέση (3.29).

τότε θα ισχύει

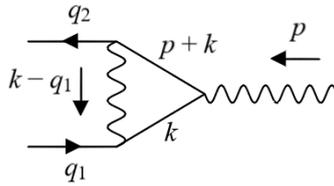
$$k_\mu \mathfrak{M}^\mu = 0 \quad (3.56)$$

όπου k η ορμή του εξωτερικού φωτονίου. Το εξωτερικό φωτόνιο δεν χρειάζεται να είναι on shell. Διαπιστώνουμε ότι το πλάτος (3.54) του vacuum polarisation graph ικανοποιεί την ταυτότητα αυτή:

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) \propto p_\mu (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) = p^2 p^\nu - p^\nu p^2 = 0 \quad (3.57)$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πόσο ευτυχές είναι το γεγονός ότι “έφυγαν” οι όροι της πρώτης σειράς της (3.48), αφού αν παρέμεναν τότε το πλάτος δεν θα ικανοποιούσε την Ward identity.

Σειρά έχει το διάγραμμα (γ) του σχήματος 3, δηλαδή το **vertex correction graph**. Το ξανασχεδιάζουμε εδώ για να δείξουμε τις ορμές των σωματιδίων:



Σχήμα 5

Γράφουμε το αντίστοιχο πλάτος, αγνοώντας τις εξωτερικές γραμμές επειδή αυτές δεν συνεισφέρουν στον απειρισμό. Επίσης, όταν παραλείπονται τα $i\epsilon$, εννοούνται. Για να αποφύγουμε τους σπινωριακούς δείκτες, γράφουμε τους φερμιονικούς διαδότες και τους γ πίνακες στη σωστή σειρά:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^\lambda(q_1, q_2) &= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{(k-q_1)^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2} \gamma^\lambda \frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2} \gamma^\mu \\ &= -e^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{k}+m) \gamma^\lambda (\not{p}+\not{k}+m) \gamma_\nu}{(k-q_1)^2 (k^2-m^2) ((p+k)^2-m^2)} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ο αριθμητής του κλάσματος απλοποιείται με τη χρήση μιας-δύο ιδιοτήτων των γ πινάκων:

$$\begin{aligned} &\gamma^\nu (\not{k}+m) \gamma^\lambda (\not{p}+\not{k}+m) \gamma_\nu = \\ &= -2[\not{k} \gamma^\lambda \not{k} + \not{k} \gamma^\lambda \not{p} + m^2 \gamma^\lambda - 2m(2k^\lambda + p^\lambda)] \end{aligned} \quad (3.59)$$

Για τον παρονομαστή θα εισάγουμε Feynman parameters, χρησιμοποιώντας μία γενίκευση της (3.20):

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \frac{\delta(x+y+z-1)}{[xA+yB+zC]^3} \quad (3.60)$$

Στην περίπτωσης μας: $A = k^2 - m^2 + i\epsilon$, $B = (p+k)^2 - m^2 + i\epsilon$ και $C = (k-q_1)^2 + i\epsilon$, συνεπώς:

$$\begin{aligned} &xA + yB + zC = \\ &= k^2 + 2k(y p - z q_1) + y p^2 + z q_1^2 - (x+y)m^2 + i\epsilon = \\ &= (k + y p - z q_1)^2 + x y p^2 - (1-z)^2 m^2 + i\epsilon \end{aligned} \quad (3.61)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $x + y + z = 1$ και θεωρήσαμε ότι τα εμπλεκόμενα φερμιόνια είναι on shell, δηλαδή ότι:

$$q_1^2 = q_2^2 = m^2 \quad (3.62)$$

Θα εξηγήσουμε παρακάτω γιατί επιτρέπεται κάτι τέτοιο. Θέτουμε τώρα:

$$\Delta = -xyp^2 + (1 - z)^2 m^2 \quad (3.63)$$

οπότε η (3.58) γίνεται:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^\lambda(q_1, q_2) &= 4e^3 \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\lambda \not{k} + \not{k} \gamma^\lambda \not{p} + m^2 \gamma^\lambda - 2m(2k^\lambda + p^\lambda)}{[(k + yp - zq_1)^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Αλλάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης:

$$l^\mu = k^\mu + yp^\mu - zq_1^\mu$$

και παραλείπουμε τους γραμμικούς ως προς l όρους που προκύπτουν στον αριθμητή, επειδή λόγω της ολοκλήρωσης δίνουν μηδενική συνεισφορά.

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^\lambda(q_1, q_2) &= 4e^3 \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \\ &\times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\lambda \not{l} + A}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (3.65)$$

όπου

$$A = (-yp + zq_1)\gamma^\lambda(-yp + zq_1) + (-yp + zq_1)\gamma^\lambda \not{p} + m^2 \gamma^\lambda - 2m(-2yp + 2zq_1 + p^\lambda)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ βρίσκουμε

$$l^\lambda \not{l} = 2l^\lambda l^\sigma \gamma_\sigma - l^2 \gamma^\lambda \quad (3.66)$$

και, επικαλούμενοι την (3.50) μπορούμε να αντικαταστήσουμε, μέσα στο ολοκλήρωμα, το $l^\lambda l^\sigma$ με $l^2 g^{\lambda\sigma}/4$.¹ Οπότε:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^\lambda(q_1, q_2) &= 4e^3 \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \\ &\times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-l^2 \gamma^\lambda / 2 + A}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Τώρα πρέπει να κάνουμε στροφή Wick και διαστατική ομαλοποίηση. Το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-l^2 \gamma^\lambda / 2}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3}$$

μετά την στροφή Wick θα δώσει, πέρα από ένα γωνιακό ολοκλήρωμα,² τον όρο

$$\int_0^{+\infty} dl_E \frac{l^5}{[l^2 + \Delta]^3}$$

ο οποίος αποκλίνει λογαριθμικά- ακριβώς όπως στην περίπτωση του (3.26) και του (3.53). Από την άλλη, το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{A}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3}$$

¹Όταν γενικεύσουμε σε n διαστάσεις θα αντικαταστήσουμε με $l^2 g^{\lambda\sigma}/n$.

²Βλ. σχέση (3.27).

είναι πεπερασμένο:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{A}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} = \frac{-iA}{2(4\pi)^4} \frac{1}{\Delta} \quad (3.68)$$

Βέβαια, αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε στην (3.68) την ολοκλήρωση που απαιτεί η (3.67):

$$\int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{A}{\Delta}$$

τότε θα διαπιστώσουμε ότι το αποτέλεσμα περιέχει και κάποιους όρους που απειρίζονται. Πρόκειται και πάλι για **IR απειρισμό** ο οποίος μπορεί να αντιμετωπιστεί με την θεωρία μη μηδενικής μάζας για το φωτόνιο.

Έχει αξία να σημειώσουμε ότι σε κάθε διαδικασία (π.χ. σε μία σκέδαση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$) εμφανίζονται με τέτοιο τρόπο οι infrared αποκλίσεις του vertex correction, ώστε τελικά να εξουδετερώνονται από τις IR αποκλίσεις ενός άλλου φαινομένου, που αποτελεί επίσης correction στο πλάτος σκέδασης: της λεγόμενης **soft Bremsstrahlung**. Η αλληλοεξουδετέρωση αυτή δεν συμβαίνει σε επίπεδο πλάτους σκέδασης, αλλά σε επίπεδο ενεργού διατομής.¹

Αδιαφορούμε λοιπόν για τον όρο με το A , που περιέχει πεπερασμένα και IR αποκλίνοντα κομμάτια, και εστιάζουμε στην UV απόκλιση. Γράφουμε:

$$i\mathcal{M}^\lambda(q_1, q_2) = e\gamma^\lambda M + \text{UV finite} \quad (3.69)$$

όπου

$$M = -2e^2 \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \quad (3.70)$$

Κοιτάζοντας το ολοκλήρωμα στα l , καθώς και τον εκθέτη του Δ στο δεξί μέλος της (3.36), καταλαβαίνουμε ότι ο όρος που θα εκφράζει τον UV απειρισμό του vertex correction δεν θα περιέχει καμιά μάζα ή εξωτερική ορμή. Αυτός είναι ο λόγος που δεν απαγορεύεται να θέσουμε $q_1^2 = 0$ και $q_2^2 = 0$.² Μάλιστα, σε ότι αφορά την μελέτη της UV απόκλισης, θα μπορούσαμε να είχαμε θέσει οτιδήποτε στη θέση της μάζας και των εξωτερικών ορμών.

Εν πάσει περιπτώσει, κάνουμε στροφή Wick, γενικεύουμε σε n διαστάσεις και εισάγουμε το μ σύμφωνα με τη σχέση (3.30):

$$M = -2e^2 \mu^{4-n} \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ \times \frac{n}{4} \left(2 - \frac{4}{n}\right) \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Delta^{n/2-2} \Gamma(2-n/2) \quad (3.71)$$

Θέτουμε $\epsilon = 4 - n$:

$$M = -2e^2 \mu^\epsilon \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ \times \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{i(4\pi)^{\epsilon/2}}{(4\pi)^2} \Delta^{-\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \quad (3.72)$$

Κάνουμε χρήση των αναπτυγμάτων (3.39)-(3.41), θεωρώντας όριο $\epsilon \rightarrow 0$ και βρίσκουμε:

$$M = \frac{-2ie^2}{(4\pi)^2} \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \\ \times \left[\frac{2}{\epsilon} + \log \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right] \Rightarrow \quad (3.73)$$

¹Βλ. στο [17] την σχέση (6.66) και την παράγραφο που προηγείται.

²Ο λόγος που κάναμε αυτή την επιλογή και όχι κάποια άλλη, που ενδεχομένως να μας βόλευε περισσότερο, είναι ότι αυτή η επιλογή χρησιμεύει και στην μελέτη της IR απόκλισης στην περίπτωση π.χ. της $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ σκέδασης.

$$M = \frac{-2ie^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) + \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \log \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right] \quad (3.74)$$

Το ολοκλήρωμα της πρώτης γραμμής της (3.74) υπολογίζεται ως εξής. Γράφουμε την δ συνάρτηση ως:

$$\delta[z - (1 - x - y)]$$

Το όρισμα της δ μπορεί να μηδενιστεί μόνο εάν

$$0 \leq 1 - x - y \leq 1 \Rightarrow$$

$$x + y \leq 1$$

Όταν ισχύει αυτή η συνθήκη το z -ολοκλήρωμα ισούται με 1, αλλά τα x - και y -ολοκληρώματα περιορίζονται ακριβώς ώστε να τηρείται η συνθήκη. Τελικά λοιπόν:

$$\begin{aligned} \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) &= \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.75)$$

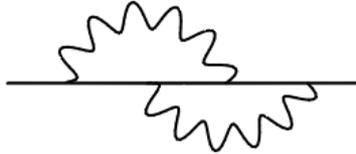
Οπότε τελικά:

$$M = \frac{-2ie^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \log \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right] \quad (3.76)$$

Δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα που παρέμεινε είναι UV-πεπερασμένο, πετύχαμε την ομαλοποίηση του M , και συνεπώς του πλάτους $i\mathcal{M}^\lambda(q_1, q_2)$.

Τώρα που τελειώσαμε με τα διαγράμματα του σχήματος 3, πρέπει να εισάγουμε την έννοια του ορι (one-particle-irreducible) διαγράμματος. Έτσι ονομάζονται τα διαγράμματα που δεν μπορούν να κοπούν στα δύο με κόψιμο μιας μοναδικής γραμμής τους. Τα διαγράμματα του σχήματος 3 είναι ορι. Ο λόγος που μελετάμε τα ορι διαγράμματα είναι ότι αν καταφέρουμε, μέσω της ανακανονικοποίησης, να τα καταστήσουμε πεπερασμένα, τότε θα έχουμε καταστήσει πεπερασμένο και κάθε περίπλοκο διάγραμμα που συντίθεται από αυτά τα ορι διαγράμματα.

Τα ορι διαγράμματα που μελετήσαμε εμείς είναι τα χαμηλότερα σε τάξη θεωρίας διαταραχών, μιας και περιέχουν έναν μόνο βρόχο- είναι δηλαδή 1-loop διαγράμματα. Μπορεί κανείς να μελετήσει και 2-loop ορι αποκλίνοντα διαγράμματα, όπως αυτό:



Σχήμα 6

Η συμπερίληψη τέτοιων διαγραμμάτων θα έδινε μεν μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς, αλλά δεν θα άλλαζε τίποτα σε εννοιολογικό επίπεδο. Για αυτό, σε αυτή την εργασία θα περιοριστούμε στα 1-loop ορι διαγράμματα.

3.4 Η ανακανονικοποίηση

Η **renormalisation**, στα αγγλικά. Στόχος της 1-loop ανακανονικοποίησης είναι να καταστούν πεπερασμένα τα πλάτη σκέδασης που περιέχουν τα διαγράμματα του σχήματος 3. Η ιδέα της ανακανονικοποίησης είναι να θεωρηθούν υπαίτιες για τους απειρισμούς των διαγραμμάτων ποσότητες που εμφανίζονται στην Λαγκρανζιανή, όπως η μάζα, η σταθερά σύζευξης (φορτίο) και τα πεδία: να θεωρηθεί δηλαδή πως ο απειρισμός αυτών των ποσοτήτων οδηγεί στον απειρισμό των διαγραμμάτων. Ξεκινάμε λοιπόν, σε μια QED που περιλαμβάνει ένα φερμιονικό πεδίο ψ μάζας m και φωτόνια A^μ , να θεωρήσουμε ότι τα

$$\psi, A^\mu, m, e \quad (3.77)$$

είναι άπειρα. Θα αναρωτηθεί βέβαια κανείς πώς είναι δυνατόν να απειρίζονται φυσικά μεγέθη όπως η μάζα ή το φορτίο. Η απάντηση που δίνει η ανακανονικοποίηση είναι πως οι άπειρες ποσότητες της (3.77), που εμφανίζονται στην Λαγκρανζιανή της QED, **δεν είναι φυσικές ποσότητες**- και συνεπώς ως μη φυσικές έχουν κάθε δικαίωμα να απειρίζονται. Τις ονομάζουμε **bare** (γυμνές) ποσότητες και εισάγουμε τον δείκτη 0 για να τις διακρίνουμε. Γράφουμε λοιπόν την Λαγκρανζιανή της QED (3.18) εισάγοντας τον νέο συμβολισμό:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} [\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu] [\partial_\mu A_0^\nu - \partial_\nu A_0^\mu] + \\ & + \bar{\psi}_0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \psi_0 - e_0 \bar{\psi}_0 \gamma_\mu A_0^\mu \psi_0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ορίζουμε τώρα τις **renormalised** (ανακανονικοποιημένες) ποσότητες- οι οποίες δεν φέρουν δείκτη- μέσω των εξής σχέσεων:

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2} \psi \quad (3.79)$$

$$A_0^\mu = \sqrt{Z_3} A^\mu \quad (3.80)$$

$$m_0 = Z_m m \quad (3.81)$$

$$e_0 = \mu^{(4-n)/2} Z_e e \quad (3.82)$$

Επιτρέποντας λοιπόν στους συντελεστές Z να απειρίζονται (με κατάλληλο τρόπο!), μπορούμε να διατηρήσουμε τις παραπάνω renormalised ποσότητες πεπερασμένες. Το μ εισήχθη στην (3.82) προκειμένου να είναι η e και το Z_e αδιάστατα ακόμα και στις n διαστάσεις- ενώ το e_0 διατηρεί μονάδες φορτίου. Η (n -διάστατη) λοιπόν Λαγκρανζιανή (3.78) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} Z_3 [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] + \\ & + Z_2 \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - Z_m m) \psi - Z_e Z_2 \sqrt{Z_3} \mu^{(4-n)/2} e \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi \end{aligned} \quad (3.83)$$

Για ευκολία, ορίζουμε

$$Z_1 = Z_e Z_2 \sqrt{Z_3} \quad (3.84)$$

οπότε η Λαγκρανζιανή γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \\ & + Z_2 \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - Z_m m) \psi - Z_1 \mu^{(4-n)/2} e \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi \end{aligned} \quad (3.85)$$

Το επόμενο βήμα είναι να γράψουμε τους συντελεστές Z ως εξής:

$$Z_i = 1 + \delta_i, \text{ για } i = 1, 2, 3, e, m \quad (3.86)$$

Θα εξηγήσουμε σε λίγο γιατί το κάναμε αυτό. Προς το παρόν, ξαναγράφουμε την Λαγκρανζιανή (3.85), αγνοώντας τους όρους που περιέχουν γινόμενο δ_i :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \mu^{(4-n)/2} e \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi - \\ & - \frac{1}{4} \delta_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\delta_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi - (\delta_2 + \delta_m) m \bar{\psi} \psi - \mu^{(4-n)/2} e \delta_1 \bar{\psi} A \psi \end{aligned} \quad (3.87)$$

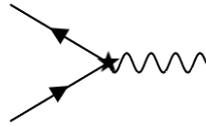
Παρατηρούμε πως η πρώτη σειρά της (3.87) είναι η συνήθης n -διάστατη Λαγκρανζιανή της QED, μόνο που περιέχει τις renormalised- και όχι τις bare- ποσότητες.¹ Οι όροι της δεύτερης σειράς, απ' την άλλη, περιέχουν δ_i και ονομάζονται **counterterms**. Ερμηνεύονται ως όροι αλληλεπίδρασης, δηλαδή ως κορυφές. Συγκεκριμένα:

ο όρος $-\frac{1}{4}\delta_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ περιγράφει κορυφή φωτονίου-φωτονίου,

οι όροι $i\delta_2 \bar{\psi} \not{\partial} \psi$ και $-(\delta_2 + \delta_m) m \bar{\psi} \psi$ περιγράφουν κορυφές φερμιονίου-φερμιονίου και

ο όρος $-\mu^{(4-n)/2} e \delta_1 \bar{\psi} \not{A} \psi$ περιγράφει κορυφή 2 φερμιονίων-φωτονίου.

Τώρα πρέπει να εξάγουμε τους κανόνες Feynman για αυτούς τους όρους αλληλεπίδρασης. Για τον τελευταίο όρο αυτό είναι απλό, καθώς διαφέρει μόνο κατά έναν παράγοντα δ_1 από την γνωστή κορυφή 2 φερμιονίων-φωτονίου. Οπότε:



$$= -i\delta_1 \mu^{(4-n)/2} e \gamma^\mu \quad (3.88)$$

Οι κανόνες Feynman των υπόλοιπων όρων εξάγονται εύκολα με την προσέγγιση των path integrals. Αν αντί για φερμιόνια είχαμε πραγματικά βαθμωτά πεδία (σε μια ϕ^4 θεωρία για παράδειγμα) τότε οι κανόνες Feynman θα έβγαιναν εύκολα και με την προσέγγιση της κανονικής κβάντωσης. Όμως στην περίπτωση των φερμιονίων απαιτείται ο υπολογισμών πλατών σκέδασης μη τετραμμένης τάξης, μέσω των (2.3) και (2.2), ώστε να προκύψουν οι σωστοί κανόνες Feynman των counterterms. Θα δώσουμε λοιπόν εδώ τους κανόνες Feynman χωρίς απόδειξη, αλλά με ορισμένα στοιχεία που έχουν γενική ισχύ.

Για τον όρο $-\frac{1}{4}\delta_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= 2 [\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu] \\ &= 2\partial_\mu [\partial^\mu A^\nu A_\nu - \partial^\nu A^\mu A_\nu] - \\ &\quad - 2A_\nu [\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu] \end{aligned} \quad (3.89)$$

Υπάρχει κανόνας σύμφωνα με τον οποίο όταν κάνουμε κάτι τέτοιο (δηλαδή μια εφαρμογή του κανόνα Leibniz, ακριβώς όπως στην κατά παράγοντες ολοκλήρωση) σε έναν όρο αλληλεπίδρασης μπορούμε πάντοτε να αγνοούμε τον όρο με την ολική παράγωγο και παρόλα αυτά να βρίσκουμε τον ίδιο κανόνα Feynman. Οπότε μένουμε με τον δεύτερο όρο:

$$\begin{aligned} -2A_\nu [\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu] &= -2A_\nu [g^{\nu\sigma} \square A_\sigma - \partial^\sigma \partial_\nu A_\sigma] \\ &= -2A_\nu [g^{\nu\sigma} \square - \partial^\nu \partial^\sigma] A_\sigma \end{aligned} \quad (3.90)$$

Επαναφέροντας και τις σταθερές, ο όρος αλληλεπίδρασης είναι:

$$\frac{\delta_3}{2} A_\nu [g^{\nu\sigma} \square - \partial^\nu \partial^\sigma] A_\sigma \quad (3.91)$$

Θα εξάγουμε τον κανόνα Feynman ως εξής: Αρχικά, ο τύπος (2.2) θα δώσει ένα $-(-i) = i$, αφού εδώ έχουμε τη Λαγκρανζιανή και όχι τη Χαμιλτονιανή.

Επιπλέον, το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με το 2, επειδή μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το κάθε A του όρου αλληλεπίδρασης τόσο με το εισερχόμενο, όσο και με το

¹Επίσης παρατηρούμε πως δεν χρειάζεται να εισάγουμε το μ "με το χέρι" αν θελήσουμε να υπολογίσουμε κάποιο πλάτος, όπως κάναμε στην bare θεωρία, επειδή το μ είναι ήδη εδώ!

εξερχόμενο φωτόνιο.

Τέλος, υπάρχει ο (γενικός και αποδείξιμος) κανόνας ότι κάθε παραγωγήση ∂^μ σε πεδίο αντιστοιχίζεται με πολλαπλασιασμό με ip^μ ή $-ip^\mu$ στο αποτέλεσμα, με το πρόσημο να εξαρτάται από το αν η ορμή p^μ (που έχει αντιστοιχιστεί στο πεδίο που παραγωγίζεται) είναι (αντίστοιχα) εξερχόμενη ή εισερχόμενη στην κορυφή.¹

Τελικά, καταλήγουμε στον κανόνα:

$$\text{---} \star \text{---} = i\delta_3 [k^\nu k^\sigma - g^{\nu\sigma} k^2] \quad (3.92)$$

όπου k^μ η ορμή του φωτονίου.

Πηγαίνουμε και στους όρους που περιγράφουν κορυφή φερμιονίου-φερμιονίου. Στον όρο $\bar{\psi}\not{\partial}\psi$ η παραγωγήση δρα στο πεδίο που καταστρέφει φερμιόνια, συνεπώς αντιστοιχεί στο εισερχόμενο φερμιόνιο και άρα θα δώσει $-ip$, αν p^μ η ορμή του φερμιονίου. Καταλήγουμε λοιπόν στον κανόνα:

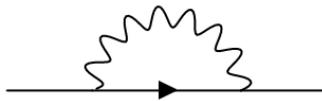
$$\text{---} \star \text{---} = i [\not{p}\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m] \quad (3.93)$$

Με βάση τους προϋπάρχοντες κανόνες Feynman της QED, αλλά και εκείνους των counterterms, μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος οποιασδήποτε διαδικασίας η οποία μπορεί να προκύψει από την Λαγκρανζιανή (3.87).

Υπάρχει όμως ένα πρόβλημα. Όταν υπολογίζουμε πλάτη σκέδασης, τα υπολογίζουμε σε μία συγκεκριμένη τάξη θεωρίας διαταραχών και σχεδιάζουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα Feynman. Τώρα δεν μπορούμε να το κάνουμε αυτό, καθώς δεν γνωρίζουμε τί τάξης ως προς e είναι τα δ_i .

Η λύση στο πρόβλημα είναι η εξής: Από την στιγμή που δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στην τάξη των δ_i , μπορούμε να υποθέσουμε ό,τι εμείς θέλουμε. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως είναι τάξης e^2 .

Αν λοιπόν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα πλάτος σκέδασης που απεικονίζεται με διαγράμματα που περιέχουν το πολύ 1-loop κομμάτια, τότε για κάθε διάγραμμα που περιέχει π.χ. κάποιον:

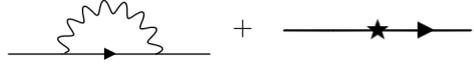


θα υπάρχει πάντοτε και ένα άλλο διάγραμμα που στην θέση αυτού του βρόχου θα περιέχει το:

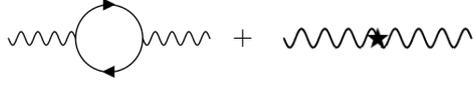


¹Με βάση αυτόν τον κανόνα αποδεικνύεται και ο κανόνας της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω: Σε έναν όρο με ολική παράγωγο, η παράγωγος θα δράσει σε όλα τα πεδία και θα δημιουργήσει ένα άθροισμα όλων των ορμών, όπου οι εισερχόμενες θα έχουν αρνητικό πρόσημο και οι εξερχόμενες θετικό. Όμως, λόγω διατήρησης της ορμής, αυτό το άθροισμα θα είναι μηδέν!

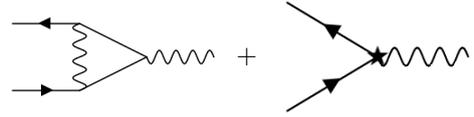
Οπότε τελικά στο πλάτος θα εμφανίζονται τα αθροίσματα:



$$(3.94)$$



$$(3.95)$$



$$(3.96)$$

Η (3.94), μέσω των (3.43) και (3.93) μεταφράζεται ως:

$$\begin{aligned} & i\Sigma(p) + i [\not{p}\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m] = \\ &= \frac{ie^2}{8\pi^2} \left[\frac{\not{p} - 4m}{\epsilon} + \int_0^1 dx (\not{p}x - 2m) \log \frac{\tilde{\mu}^2}{(m^2 - p^2x)(1-x)} \right] + \\ & \quad + i [\not{p}\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m] = \\ &= \frac{ie^2}{8\pi^2} \left[\frac{\not{p} - 4m}{\epsilon} + \text{UV finite} \right] + i [\not{p}\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m] = \\ &= \not{p} \left[\frac{ie^2}{8\pi^2\epsilon} + i\delta_2 \right] - m \left[\frac{ie^2}{2\pi^2\epsilon} + i(\delta_m + \delta_2) \right] + e^2 \times \text{UV finite} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Βλέπουμε πως εάν επιλέξουμε:

$$\delta_2 = -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad \text{και} \quad \delta_m = -\frac{3e^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (3.98)$$

τότε η συνεισφορά (3.97) καθίσταται πεπερασμένη.

Η (3.95) γράφεται:

$$\begin{aligned} & i\Pi^{\mu\nu}(p) + i\delta_3 [p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2] = \\ &= \frac{ie^2}{2\pi^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \left[\frac{1}{3\epsilon} + \int_0^1 dx (1-x)x \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2x(1-x)} \right] + \\ & \quad + i\delta_3 [p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2] \end{aligned} \quad (3.99)$$

Βλέπουμε πως εδώ η επιλογή πρέπει να είναι:

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (3.100)$$

Τέλος, έχουμε την (3.96). Από τις (3.69) και (3.76) καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να θεωρήσουμε:

$$\begin{aligned} & \mu^{(4-n)/2} e\gamma^\mu M - i\delta_1 \mu^{(4-n)/2} e\gamma^\mu = \text{UV finite} \Rightarrow \\ & M - i\delta_1 \mu^{(4-n)/2} = \text{UV finite} \Rightarrow \\ & \frac{-2ie^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \log \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right] - i\delta_1 = \text{UV finite} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Οπότε πρέπει:

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (3.102)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να πούμε ορισμένα πράγματα. Κατ' αρχήν οφείλουμε μία εξήγηση σχετικά με την σχέση (3.86). Όπως είδαμε, τα δ_i καθορίζονται σε τέτοια τάξη ως προς e , ώστε να μπορούμε να εξαφανίσουμε τις απειρίες των ορι διαγραμμάτων, τα οποία μας χρειάζονται για να μελετήσουμε κάποιο πλάτος σκέδασης σε συγκεκριμένη τάξη θεωρίας διαταραχών. Παραδείγματος χάριν, για 1-loop ορι διαγράμματα της QED απαιτείται να προσδιορίσουμε τα δ_i σε $\mathcal{O}(e^2)$. Αυτό σημαίνει ότι, μέσω της σχέσης (3.86), ορίζουμε τα Z_i σαν αναπτύγματα σε δυνάμεις του e . Σημαίνει όμως ακόμη ότι αν θέλουμε να μελετήσουμε διαγράμματα χωρίς αποκλίνοντες βρόχους, τότε μπορούμε να θέσουμε $\delta_i = 0$ και συνεπώς $Z_i = 1$, οπότε οι bare ποσότητες ταυτίζονται με τις φυσικές και η ανακανονικοποιημένη QED καταρρέει στην συνήθη QED.

Για τον ίδιο λόγο αφήσαμε έξω από την Λαγκρανζιανή (3.87) τους όρους με γινόμενο των δ_i , αφού αυτοί θα οδηγούσαν σε διαγράμματα με τάξη ως προς e μεγαλύτερη από εκείνη των διαγραμμάτων που μας ενδιαφέρουν.

Πέρα από τα παραπάνω, κανείς μπορεί να αναρωτηθεί γιατί επιλέξαμε τα δ_i έτσι ώστε να έχουν μόνο άπειρο και όχι πεπερασμένο τιμή. Η αλήθεια είναι ότι αυτό δεν είναι απαραίτητο: Τα δ_i μπορούν κάλλιστα να έχουν μη μηδενικό πεπερασμένο τιμή. Ο καθορισμός του πεπερασμένου τιμήματός τους δε γίνεται αυθαίρετα, αλλά εξαρτάται από το **subtraction scheme** το οποίο κανείς επιλέγει για να κάνει την ανακανονικοποίηση. Εμείς, για παράδειγμα, επιλέξαμε το **minimal subtraction** (MS) scheme, στο οποίο τα πεπερασμένα μέρη όλων των δ_i είναι ακριβώς μηδέν. Μία τροποποίησή του είναι το $\overline{\text{MS}}$ scheme, στο οποίο τα δ_i απορροφούν από το $\tilde{\mu}$ τις σταθερές 4π και γ_E .

Τα άλλα subtraction schemes προσδιορίζονται το καθένα από ένα σύνολο συνθηκών-τις **renormalisation conditions**. Και εξηγούμαστε με ένα απλό και σύντομο παράδειγμα:¹

Έστω μια ϕ^4 θεωρία ενός άμαζου πραγματικού πεδίου, όπου:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi_0)(\partial_\mu \phi_0) - \frac{g_0}{4!}\phi_0^4 \quad (3.103)$$

Θεωρούμε την σκέδαση δύο σωματιδίων, με συνολική αρχική ορμή p^μ . Σε τάξη g^2 , αν για απλότητα περιοριστούμε στο s-channel και αγνοήσουμε τα διαγράμματα που προκύπτουν από crossing², το πλάτος σκέδασης θα είναι:

$$i\mathfrak{M}(p) = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \text{ (circle) } + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (3.104)$$

Όπως είπαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, το διάγραμμα με τον βρόχο απειρίζεται. Το ομαλοποιούμε με έναν πρόχειρο τρόπο, δηλαδή θέτοντας Λ το άνω όριο της ολοκλήρωσης που απειρίζεται. Κάνουμε τις πράξεις και τελικά:

$$i\mathfrak{M}(p) = -ig_0 - \frac{ig_0^2}{32\pi^2} \log \frac{p^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (3.105)$$

Εννοείται όριο $\Lambda \rightarrow \infty$ με τον ίδιο τρόπο που στην dimensional regularisation εννοούταν όριο $\epsilon \rightarrow 0$.

Τώρα γράφουμε την ανακανονικοποιημένη Λαγκρανζιανή που θα περιέχει counterterms:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{g}{4!}\phi^4 + \delta_2 \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \delta_1 \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (3.106)$$

¹Το παράδειγμα προέρχεται από το [19].

²Για το crossing βλ. στο [10] τις παραγράφους 4.6 & 4.7.

Πλέον το πλάτος σκέδασης θα είναι:

$$i\mathcal{M}(p) = -ig - i\delta_1 - \frac{ig^2}{32\pi^2} \log \frac{p^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.107)$$

Ήρθε η στιγμή να προσδιορίσουμε το δ_1 , το οποίο θα είναι φυσικά τάξης g^2 ώστε να εξαφανιστεί ο όρος με το Λ . Ποιό θα είναι όμως το πεπερασμένο του τμήμα; Ή αλλιώς, ποιό subtraction scheme θα χρησιμοποιήσουμε; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα πρέπει θέσουμε μία renormalisation condition, όπως η παρακάτω:

$$i\mathcal{M}(p = p_0) = -ig \quad (3.108)$$

Η συνθήκη αυτή¹ προσδιορίζει απολύτως το δ_1 , σε τάξη g^2 :

$$\delta_1 = -\frac{ig^2}{32\pi^2} \log \frac{p_0^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.109)$$

Και έτσι το πλάτος γίνεται:

$$i\mathcal{M}(p) = -ig - \frac{ig^2}{32\pi^2} \log \frac{p^2}{p_0^2} + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.110)$$

Αν στην ανακανονικοποίηση της QED είχαμε επιλέξει κάποιο άλλο subtraction scheme, π.χ. το λεγόμενο **on-shell** subtraction scheme, τότε θα είχαμε συναντήσει renormalisation conditions σαν την (3.108). Παρεμπιπτόντως, το p_0 λέγεται **subtraction point**.

Επιστρέφοντας στην QED, είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι οι renormalised ποσότητες m και e δεν ταυτίζονται απαραίτητα με την μάζα του φερμιονίου και το φορτίο του, παρόλο που συνδέονται άμεσα με τα μεγέθη αυτά. Αν θέλουμε πράγματι η m να αντιστοιχεί στην μετρούμενη μάζα και το e στο μετρούμενο φορτίο, τότε θα πρέπει να επιλέξουμε το on-shell subtraction scheme.

Το επόμενο που αξίζει να σχολιάσουμε είναι η ισότητα των δ_1 και δ_2 , που φαίνεται από τις (3.98) και (3.102). Αυτή η ισότητα προκύπτει πάντοτε: ανεξαρτήτως του αν κάνουμε ανακανονικοποίηση σε 1-loop ή 2-loop ή και N-loop, και φυσικά ανεξαρτήτως του subtraction scheme που επιλέγουμε. Συνεπώς έχουμε πάντοτε την ισότητα.²

$$Z_1 = Z_2 \quad (3.111)$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ σημαντική: Έστω ότι στην θεωρία μας έχουμε ηλεκτρόνια και μόνια-σωματίδια με ίδιο φορτίο αλλά διαφορετική μάζα. Ανακανονικοποιούμε τη θεωρία, τονίζοντας τα μεγέθη που αφορούν τα μόνια:

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2}\psi, \quad \psi'_0 = \sqrt{Z'_2}\psi', \quad \text{κλπ.}$$

Έστω ότι έχουμε επιλέξει ένα subtraction scheme όπου οι σταθερές ανακανονικοποίησης των φερμιονικών πεδίων εξαρτώνται από τη μάζα των αντίστοιχων φερμιονίων (όπως συμβαίνει στο on-shell scheme, για παράδειγμα). Από τις (3.82) και (3.84) προκύπτουν τα εξής:

$$e = e_0 \frac{Z_2\sqrt{Z_3}}{Z_1} \quad \text{και} \quad e' = e_0 \frac{Z'_2\sqrt{Z_3}}{Z'_1} \quad (3.112)$$

Από εδώ βλέπουμε πως εάν δεν ίσχυε ότι $Z_1 = Z_2$ και $Z'_1 = Z'_2$, τότε η ανακανονικοποιημένη θεωρία θα προέβλεπε διαφορετικό φορτίο για ηλεκτρόνιο και μόνιο! Για να το πούμε και αλλιώς, το φορτίο στην ανακανονικοποιημένη θεωρία τελικά προσδιορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την σταθερά ανακανονικοποίησης του φωτονίου,

¹Οι renormalisation conditions πάντοτε ισχύουν ακριβώς, και όχι σε κάποια τάξη ως προς g . Δηλαδή, στην (3.108) δεν εννοούμε $i\mathcal{M}(p = p_0) = -ig + \mathcal{O}(g^2)$. Μπορεί κανείς να πει ότι η (3.108) είναι ο **ορισμός** του g .

²Η απόδειξη βασίζεται στην Ward-Takahashi identity. Βλ π.χ. το κεφάλαιο 19 του [19].

δηλαδή το $\sqrt{Z_3}$.

Το τελευταίο σχόλιο πάνω στην ανακανονικοποίηση της QED αφορά το μ , δηλαδή την ποσότητα που εισαγάγαμε με την σχέση (3.30) για να απορροφήσει τις διαστάσεις του e κατά την μετάβαση στις n διαστάσεις.

Ας υποθέσουμε ότι ομαλοποιούμε το vacuum polarisation graph, όχι με dimensional regularisation, αλλά με αλλά με ένα cutoff Λ , ακριβώς σαν κι αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο παραπάνω απλοϊκό ϕ^4 παράδειγμα. Για να απλοποιήσουμε τα ολοκληρώματα υποθέτουμε ότι $-p^2 \gg m^2$. Τότε, μετά απο ανακανονικοποίηση, η (3.95) γίνεται:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p) - i\delta_3 [g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu] &= \\ &= -i [g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu] X(p) \end{aligned} \quad (3.113)$$

όπου

$$X(p) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) + \text{const.} \right] + \delta_3 \quad (3.114)$$

Γράφουμε const. και όχι finite επειδή η προσέγγιση $-p^2 \gg m^2$ κάνει το x -ολοκλήρωμα που προκύπτει από την χρήση της (3.20) να αποκλίνει. Μας αρκεί πάντως που ο όρος αυτός δεν εξαρτάται από το p . Σε κάθε περίπτωση, όπως και στο ϕ^4 παράδειγμα, το δ_3 θα εξαρτάται από κάποιο subtraction point p_0 , με $p_0^2 > 0$. Οπότε τελικά θα έχουμε:

$$X(p) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \left(\frac{p_0^2}{-p^2} \right) + \text{const.} \right] \quad (3.115)$$

Στην dimensional regularisation, αν προχωρήσουμε λίγο το ολοκλήρωμα της (3.54) (με την προσέγγιση που υιοθετήσαμε) βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$X(p) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \log \left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right) + \text{const.} \right] + \delta_3 \quad (3.116)$$

Και χρησιμοποιώντας MS scheme θέτουμε $\delta_3 = -\frac{e^2}{12\pi^2} \frac{2}{\epsilon}$. Συνεπώς:

$$X(p) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right) + \text{const.} \right] \quad (3.117)$$

Παρατηρώντας τις (3.115) και (3.117) διαπιστώνουμε ότι η ποσότητα μ^2 της dimensional regularisation εμφανίζεται στο ίδιο ακριβώς σημείο που εμφανίζεται το subtraction point p_0^2 στην cutoff-εκδοχή.

Αυτή η αντιστοιχία είναι ένα γενικό φαινόμενο και για αυτό καλείται καμιά φορά η ποσότητα μ subtraction point, παρόλο που η εισαγωγή της έγινε για εντελώς διαφορετικούς λόγους.

Η διαδικασία της ανακανονικοποίησης με counterterms που χρησιμοποιήσαμε εδώ (και που θα χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω) λέγεται **renormalised perturbation theory**. Μια πιο “φυσική” (και πιο “παλιομοδίτικη”) αντιμετώπιση της ανακανονικοποίησης μπορεί να βρει κανείς στο κεφάλαιο 7 του [10] ή (πιο αναλυτικά) στο κεφάλαιο 8 του [2], όπου χρησιμοποιείται η ομαλοποίηση με cutoff και όχι με dimensional regularisation. Η dimensional regularisation εισήχθη (απ’ όσο γνωρίζω) πρώτη φορά στην ανακανονικοποίηση στα [12] και [11].

Πριν όμως ασχοληθούμε με τα πολύ ενδιαφέροντα θεωρητικά επακόλουθα της ανακανονικοποίησης, ας δούμε συνοπτικά πώς ανακανονικοποιούνται οι μή αβελιανές θεωρίες βαθμίδας.

4 Η ανακανονικοποίηση των $SU(N)$ συμμετρικών θεωριών

4.1 Εισαγωγικά

Γνωρίζουμε ότι δεν είναι όλες οι αλληλεπιδράσεις, που συμβαίνουν στην φύση, ηλεκτρομαγνητικές. Ακόμη και αν αφήσουμε έξω τη βαρύτητα και επικεντρωθούμε στις αλληλεπιδράσεις που παρατηρούνται στον μικρόκοσμο, θα έρθουμε αντιμέτωποι με φαινόμενα που δεν εξηγούνται από τον ηλεκτρομαγνητισμό και μόνο.

Ένα παράδειγμα τέτοιου φαινομένου είναι η ευστάθεια του ατομικού πυρήνα. Στον πυρήνα υπάρχει πλεόνασμα θετικού φορτίου το οποίο προκαλεί απωστικές δυνάμεις μεταξύ των πρωτονίων, αλλά ωστόσο ο πυρήνας δεν διαλύεται. Επομένως πρέπει να υπάρχει μία άλλη δύναμη, πολύ ισχυρότερη από τον ηλεκτρομαγνητισμό, η οποία συγκρατεί τον πυρήνα ενωμένο. Μάλιστα αυτή η δύναμη πρέπει να έχει εμβέλεια πολύ μικρότερη από αυτήν του ηλεκτρομαγνητισμού, επειδή οι σκεδάσεις πυρήνων (σε μικρές ενέργειες, όπου οι πυρήνες βλῆμα και στόχος δεν έρχονται σε “επαφή”) περιγράφονται τέλεια από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η β διάσπαση:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (4.1)$$

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (4.2)$$

όπου εμπλέκονται τα νετρίνα, τα οποία είναι στοιχειώδη σωματίδια ηλεκτρικά ουδέτερα και συνεπώς δεν μπορούν να αλληλεπιδράσουν ηλεκτρομαγνητικά.

Ξέρουμε πια ότι η ευστάθεια του πυρήνα οφείλεται στην **ισχυρή αλληλεπίδραση**, ενώ η β διάσπαση εξηγείται από την **ασθενή αλληλεπίδραση**. Αυτό που θα επιχειρήσουμε να κάνουμε παρακάτω είναι να φτιάξουμε θεωρίες πεδίου που να περιγράφουν αυτές τις αλληλεπιδράσεις, γενικεύοντας κατάλληλα την QED.

4.2 Γιατί $SU(N)$?

Τα φερμιονικά ρεύματα που εμφανίζονται στις διαδικασίες της QED έχουν τη μορφή:

$$J_{EM}^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4.3)$$

όπου q το ηλεκτρικό φορτίο του φερμιονίου. Αν πολλαπλασιάσουμε αυτό το ρεύμα με $-A_\mu$ θα βρούμε τον όρο αλληλεπίδρασης της Λαγκρανζιανής της QED. Επίσης, τα tree-level πλάτη σκέδασης της QED έχουν τη μορφή:

$$i\mathcal{M}_{EM} = J_1^\sigma \frac{-i}{k^2} J_2^\sigma \quad (4.4)$$

Θεωρούμε τώρα την εξής διαδικασία ασθενούς αλληλεπίδρασης:

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \mu^- + \nu_e \quad (4.5)$$

Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει “φορτισμένα ασθενή ρεύματα”, που σημαίνει ότι η σκέδαση προκαλεί μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου καθεμιάς από τις δύο φερμιονικές γραμμές.¹

Αν θέλουμε να διατηρήσουμε τη μορφή (4.4) για το tree-level πλάτος της παραπάνω διαδικασίας, τότε θα πρέπει να γράψουμε:²

$$i\mathcal{M}_W = \frac{4G}{\sqrt{2}} J_\sigma^+ J_\sigma^- \quad (4.6)$$

¹Αποφεύγουμε σκοπίμως προς το παρόν να μιλήσουμε για ουδέτερα ασθενή ρεύματα. Τον λόγο βρίσκει κανείς στην παράγραφο 13.1 του [10].

²Θεωρούμε για απλότητα πως η μάζα του διαδότη W είναι πολύ μεγαλύτερη από την μεταφερόμενη από αυτόν ορμή k^2 . Ο παράγοντας της μάζας του W και η σταθερά σύζευξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων έχουν απορροφηθεί από την σταθερά G .

Όπου:

$$J_\sigma^+ = \overline{(\nu_e \ e^-)}_L \gamma_\sigma \tau_+ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad (4.7)$$

$$J_\sigma^- = \overline{(\nu_\mu \ \mu^-)}_L \gamma_\sigma \tau_- \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad (4.8)$$

Να εξηγήσουμε τον συμβολισμό. Κατ' αρχήν συμβολίζουμε για οικονομία τα φερμιονικά πεδία με το σύμβολο του εκάστοτε σωματιδίου και όχι με το ψ (πχ γράφουμε e^- αντί για ψ_{e^-}). Επίσης, $\tau_\pm = 1/2(\tau_1 \pm i\tau_2)$, με τ_1 και τ_2 τους αντίστοιχους πίνακες του Pauli. Με τον δείκτη L δηλώνουμε πως συμμετέχουν μόνο οι left-handed συνιστώσες των πεδίων, δηλαδή.¹

$$e_L^- = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)e^- \quad (4.9)$$

Συγκρίνοντας τη μορφή των ασθενών ρευμάτων (4.7) και (4.8) με το ηλεκτρομαγνητικό (4.3) μπορούμε, χωρίς διάθεση αυστηρότητας, να πούμε το εξής: Η Λαγκρανζιανή της QED είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς των πεδίων ψ (βλ. σχέση 3.13). Αναμένουμε λοιπόν από μία Λαγκρανζιανή των ασθενών αλληλεπιδράσεων να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς των φερμιονικών doublets όπως η:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$$

ενώ αναμένουμε οι μετασχηματισμοί να εξαρτώνται από τους πίνακες του Pauli κατά τον ίδιο τρόπο που η ποσότητα q συμμετέχει στις (3.13). Μία ομάδα μετασχηματισμών που μπορεί να ανταποκριθεί σε αυτές τις απαιτήσεις είναι η $SU(2)$. Η $SU(2)$ είναι η ίδια ομάδα που κυβερνά τους μετασχηματισμούς στροφής των κυματοσυναρτήσεων στην κβαντική μηχανική.²

Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις, από την άλλη, δρουν μεταξύ σωματιδίων που φέρουν φορτίο "χρώματος" (colour). Το χρώμα είναι ένας επιπλέον κβαντικός βαθμός ελευθερίας που κατέχουν τα quarks, ο οποίος επεκτείνει τον χώρο μονοσωματιδιακών καταστάσεων που μπορούμε να κατασκευάσουμε. Κάτι τέτοιο είχε συμβεί και με την εισαγωγή του σπιν, αφού για κάθε σωματίδιο με σπιν s μπορέσαμε για κάθε μονοσωματιδιακή χωρική κατάσταση $|\psi(x)\rangle$ να κατασκευάσουμε $2s + 1$ ορθογώνιες καταστάσεις $|\psi(x), m_s\rangle$.

Ο χώρος του χρώματος έχει για κάθε quark διάσταση 3, ενώ τις τρεις καταστάσεις που αποτελούν βάση στον μονοσωματιδιακό χώρο του χρώματος τις συμβολίζουμε με R , G και B . Μία ένδειξη για την ύπαρξη των τριών χρωμάτων δίνει το σωματίδιο Δ^{++} , το οποίο αποτελείται από τρία up quarks με παράλληλα spin. Είναι όμως απαραίτητο η κατάσταση που περιγράφει αυτό το σωματίδιο να είναι πλήρως αντισυμμετρική στην εναλλαγή των quarks και κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό, παρά μόνο αν υπάρχει και ο $3 \times 3 \times 3$ -διάστατος χώρος του χρώματος.

Δεν φαίνεται συνεπώς και τόσο παράλογο να προσπαθήσει κανείς να φτιάξει μια Λαγκρανζιανή για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, η οποία να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς στις φερμιονικές triplets πεδίων:

$$\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_G \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

και η σωστή ομάδα τέτοιων μετασχηματισμών είναι τελικά η $SU(3)$.

¹Όπως προέκυψε από το πείραμα της Wu το 1956, οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις δεν είναι συμμετρικές κάτω από Parity μετασχηματισμούς. Στις διαδικασίες με φορτισμένα ασθενή ρεύματα μάλιστα, συμμετέχουν μονάχα οι L συνιστώσες των φερμιονικών πεδίων και οι R των αντι-φερμιονικών πεδίων.

²Βλ. υποπαράγραφο με τίτλο "Covering Group" της παραγράφου 27 στο [18].

4.3 Λίγα πράγματα για τις ομάδες Lie¹

Οι $SU(N)$ ομάδες μετασχηματισμών είναι συνεχείς ομάδες. Τα στοιχεία κάθε συνεχούς ομάδας G προσδιορίζονται από ένα σύνολο n το πλήθος συνεχώς μεταβαλλόμενων πραγματικών παραμέτρων. Δηλαδή, για κάθε $g \in G$ υπάρχει $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, με $a_i \in \mathbb{R}$ ώστε $g := g(\mathbf{a})$.

Αν τώρα η G είναι, όπως και οι $SU(N)$, ομάδα Lie τότε υπάρχει ένας περαιτέρω περιορισμός. Θα πρέπει για οποιαδήποτε δύο στοιχεία της, έστω $g(\mathbf{a})$ και $g(\mathbf{\beta})$ να υπάρχει **αναλυτική** συνάρτηση γ ώστε:

$$g(\mathbf{a})g(\mathbf{\beta}) = g(\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})) \quad (4.10)$$

Η συνθήκη αυτή μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε πάντοτε με Taylor ανάπτυξη να πηγαίνουμε από ένα στοιχείο της ομάδας σε κάθε γειτονικό του.² Ακόμη, ορίζουμε το μοναδιαίο στοιχείο e της ομάδας ως:

$$e := g(\mathbf{a} = \mathbf{0}) \quad (4.11)$$

Υστερα από λίγες πράξεις αποδεικνύεται ότι μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία της ομάδας G στην μορφή:

$$g(\mathbf{a}) = \exp\left(i \sum_{i=1}^n a_i T_i\right) \equiv e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}} \quad (4.12)$$

όπου T_i οι n το πλήθος γεννήτορες της ομάδας G . Οι γεννήτορες κάθε ομάδας Lie ικανοποιούν μία σχέση της μορφής:

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k \quad (4.13)$$

η οποία ονομάζεται άλγεβρα της ομάδας (υπονοείται άθροιση στον δείκτη k). Οι σταθερές f_{ijk} ονομάζονται σταθερές δομής.

Ας μην μιλάμε όμως γενικά για ομάδες Lie και ας πάμε ειδικά στις $SU(N)$. Αν στην σχέση (4.12) το \mathbf{a} εξαρτάται από την χωροχρονική θέση, αν δηλαδή:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$$

τότε λέμε πως έχουμε μία local $SU(N)$ ομάδα συμμετρίας. Αλλιώς έχουμε μια global $SU(N)$ ομάδα συμμετρίας.

Στις $SU(N)$ ομάδες οι γεννήτορες είναι $N^2 - 1$ το πλήθος, ενώ οι σταθερές δομής f_{ijk} είναι αντισυμμετρικές ως προς την εναλλαγή οποιωνδήποτε δύο δεικτών. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της $SU(2)$ έχουμε:

$$f_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad (4.14)$$

ενώ στην $SU(3)$ τα μόνα μη μηδενικά f_{ijk} είναι:

$$\begin{aligned} f_{123} = 1 \quad f_{147} = 1/2 \quad f_{156} = -1/2 \quad f_{246} = 1/2 \quad f_{257} = 1/2 \\ f_{345} = 1/2 \quad f_{367} = -1/2 \quad f_{458} = \sqrt{3}/2 \quad f_{678} = \sqrt{3}/2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

καθώς και αυτά που προκύπτουν από τα παραπάνω με εναλλαγή δεικτών.

Το γεγονός ότι δεν μηδενίζονται όλα τα c_{ijk} κάνει τους γεννήτορες (άρα και τα στοιχεία) των $SU(2)$ και $SU(3)$ να μην μετατίθενται: Πρόκειται δηλαδή για μη αβελιανές ομάδες. Μη αβελιανή είναι, για παράδειγμα, και η ομάδα μετασχηματισμών στροφής στα ευκλείδεια τριδιάστατα διανύσματα, η $SO(3)$: Αν εφαρμόσει κανείς τις ίδιες στροφές με διαφορετική σειρά στο ίδιο αρχικό διάνυσμα, τότε θα καταλήξει γενικά σε διαφορετικά τελικά διανύσματα.

¹Μια σύντομη και περιεκτική αναφορά στις ομάδες Lie υπάρχει στο παράρτημα Μ του δεύτερου τόμου του [1]. Λεπτομερής συζήτηση για την εφαρμογή συγκεκριμένα των $SU(N)$ ομάδων στην θεωρία πεδίου υπάρχει στα κεφάλαια 25 και 26 του [19].

²Η λέξη "γειτονικό" εννοείται στον χώρο \mathbb{R}^n των παραμέτρων.

4.3.1 Η $SU(N)$ αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή

Ας προσπαθήσουμε σε αυτό να κατασκευάσουμε την $SU(N)$ αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή. Η Λαγκρανζιανή αυτή θα περιέχει φερμιονικά πεδία σε στίπλες ϕ (π.χ. doublets ή triplets) στις οποίες θα δρουν οι $SU(N)$ μετασχηματισμοί. Ξεκινάμε λέγοντας ότι θα έχει την μορφή (3.9):

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \bar{\phi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\phi \quad (4.16)$$

όπου το $\bar{\phi}$ εννοείται ως άνωσμα-γραμμή. Επίσης, m είναι ένας διαγώνιος πίνακας που στη διαγώνιο έχει τις μάζες των φερμιονίων που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις της στίπλες ϕ . Με τον ίδιο τρόπο, το $i\gamma^\mu\partial_\mu$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας που έχει αυτόν τον τελεστή σε κάθε θέση της διαγωνίου.

Εισάγουμε έπειτα τις αλληλεπιδράσεις, απαιτώντας την αναλλοιώτητα αυτής της ποσότητας κάτω από τον εξής local $SU(N)$ μετασχηματισμό:¹

$$\phi' = \exp[ia_i(x)T^i]\phi \quad (4.17)$$

ή από την απειροστή (και βολικότερη) εκδοχή του:

$$\phi' = [1 + ia_i(x)T^i + \mathcal{O}(a^2)]\phi \quad (4.18)$$

Φυσικά, για να γίνει κάτι τέτοιο πρέπει η ∂_μ να αντικατασταθεί, όπως στην (3.11), από μία συναλλοίωτη παράγωγο:²

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^i T_i \quad (4.19)$$

όπου g η σταθερά σύζευξης της νέας αλληλεπίδρασης, T_i οι γεννήτορες της ομάδας μετασχηματισμών και A_μ^i τα απαραίτητα πεδία βαθμίδας. Αυτά έχουν πλήθος ίδιο με τους γεννήτορες T_i , δηλαδή $N^2 - 1$ και πρέπει να μετασχηματίζονται ως εξής:

$$A_\mu^{i'} = A_\mu^i + \frac{1}{g}\partial_\mu a^i(x) - f^{ijk}a^j A_\mu^k \quad (4.20)$$

Οπότε το κομμάτι της Λαγκρανζιανής που αφορά τα φερμιόνια θα είναι:

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\phi}(i\mathcal{D} - m)\phi \quad (4.21)$$

Ποιά θα είναι τώρα η Λαγκρανζιανή των πεδίων βαθμίδας? Στην περίπτωση της QED βρήκαμε την Λαγκρανζιανή του πεδίου των φωτονίων ξεκινώντας από τις εξισώσεις Maxwell- εδώ όμως κάτι τέτοιο δεν γίνεται.

Ένας τρόπος να βρει κανείς το $SU(N)$ ανάλογο του ηλεκτρομαγνητικού ταυυστή $F^{\mu\nu}$ είναι να αξιοποιήσει ένα επιχείρημα που προέρχεται από την διαφορική γεωμετρία και την θεωρία της βαρύτητας:³

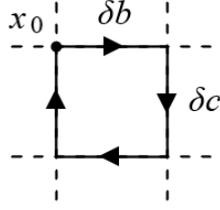
Ο ταυυστής του Riemann στην διαφορική γεωμετρία είναι το αντικείμενο που δείχνει αν υπάρχει καμπυλότητα στον χωροχρόνο. Και εξηγούμαστε:

Έστω διάνυσμα V με συνιστώσες V^a ορισμένο σε ένα σημείο x_0 του χωροχρόνου. Έστω ακόμη και η εξής κλειστή καμπύλη με απειροστό μήκος:

¹Οι όμοιοι δείκτες αθροίζονται και εδώ και στο εξής, ακόμη και αν δεν είναι συναλλοίωτοι δείκτες. Οι συναλλοίωτοι δείκτες θα είναι ελληνικά γράμματα και οι υπόλοιποι λατινικά.

²Κάνουμε κάποιες μικρές αλλαγές στις συμβάσεις σε σχέση με την QED ώστε να συμβαδίζουμε με τη βιβλιογραφία. Για παράδειγμα, αφαιρούμε την σταθερά σύζευξης g από τον μετασχηματισμό του ϕ και την τοποθετούμε στον μετασχηματισμό των A_μ^i . Επίσης, αλλάζουμε κάποια πρόσημα.

³Για περισσότερα επ' αυτού μπορεί κανείς να κοιτάξει τις παραγράφους 13.2 και 13.3 του [1] και τις παραγράφους 3.3 και 3.6 του [3].



Σχήμα 9

Έστω, τέλος, ότι σύρουμε το διάνυσμά μας πάνω σε αυτήν την καμπύλη, εκτελώντας “παράλληλη μετατόπιση¹” και καταλήγοντας εκ νέου στο αρχικό σημείο. Διαπιστώνουμε τότε ότι το τελικό διάνυσμα V' διαφέρει εν γένει από το αρχικό:

$$V'^a(x_0) - V^a(x_0) = R^a{}_{\beta\gamma\rho}(x_0)V^\beta(x_0)\delta b^\gamma\delta c^\rho \quad (4.22)$$

όπου $R^a{}_{\beta\gamma\rho}(x_0)$ είναι τα στοιχεία του τανυστή Riemann στο x_0 . Αν αυτά μηδενίζονται τότε το αρχικό με το τελικό διάνυσμα ταυτίζονται, όπως περιμένει κανείς σε έναν επίπεδο χώρο. Συνεπώς ο χωροχρόνος είναι καμπύλος, εκτός εάν ο τανυστής του Riemann μηδενίζεται παντού.

Υπάρχει στην διαφορική γεωμετρία η εξής ιδιότητα, που συνδέει την συναλλοίωτη παράγωγο με τον τανυστή Riemann:

$$[D_\mu, D_\nu]V^a = R^a{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma \quad (4.23)$$

η οποία ισχύει για κάθε άνυσμα V .² Παρατηρούμε πως στην QED ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{e}[\partial_\mu - ieA_\mu, \partial_\nu - ieA_\nu]\psi \\ &= \frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu]\psi \end{aligned} \quad (4.24)$$

το οποίο είναι λογικό, επειδή αν στην βαρύτητα η καμπυλότητα είναι αυτή που προκαλεί επιτάχυνση στα σώματα, στον ηλεκτρομαγνητισμό την επιτάχυνση των φορτίων προκαλεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Και αν το πεδίο μηδενίζεται παντού, τότε έχουμε ελεύθερα σωματίδια. Οπότε μπορούμε να ζητήσουμε να ισχύει στην $SU(N)$ θεωρία ότι:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\phi &= \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]\phi \\ &= (\partial_\mu A_\nu^i T_i - \partial_\nu A_\mu^i T_i) - ig[A_\mu^i T_i, A_\nu^j T_j]\phi \end{aligned} \quad (4.25)$$

Αν θεωρήσουμε ότι:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i T_i \quad (4.26)$$

τότε η (4.25) δίνει:

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k \quad (4.27)$$

και τα $F_{\mu\nu}^i$, όπως συνάγεται από την (4.20), μετασχηματίζονται κάτω από απειροστούς local $SU(N)$ ως εξής:

$$F_{\mu\nu}^i{}' = F_{\mu\nu}^i - f^{ijk}a^j F_{\mu\nu}^k \quad (4.28)$$

Συνεπώς, το αντικείμενο:

$$F_{\mu\nu}^i F_i{}^{\mu\nu}$$

¹Η παράλληλη μετατόπιση ορίζεται τυπικά στην παράγραφο 3.3 του [3].

²Η ταυτότητα ισχύει αν η μετρική του χώρου είναι αναλλοίωτη κάτω από την εναλλαγή των δεικτών της.

είναι αναλλοίωτο κάτω από local $SU(N)$ και άρα μπορεί να αποτελέσει την Λαγκρανζιανή των πεδίων βαθμίδας:

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \quad (4.29)$$

Οπότε η local $SU(N)$ αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή, που λέγεται και Λαγκρανζιανή Yang-Mills είναι:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} + \bar{\phi}(i\not{D} - m)\phi \quad (4.30)$$

Ένα πράγμα που μπορεί να παρατηρήσει κανείς σε αυτήν την Λαγκρανζιανή είναι ότι ο πρώτος όρος περιέχει όρους αλληλεπίδρασης μεταξύ των πεδίων βαθμίδας- κάτι που δεν συμβαίνει στην QED.

Κάτι που συμβαίνει όμως τόσο στην QED όσο και εδώ είναι η αδυναμία υπολογισμού του διαδότη των πεδίων βαθμίδας από την αναλλοίωτη Λαγκρανζιανή. Η τυπική επίλυση του προβλήματος αυτού γίνεται στον φορμαλισμό των path integrals με μία τεχνική που εισήχθη από τους Faddeev και Popov¹. Αυτή η τεχνική οδήγησε στην προσθήκη του “gauge-fixing” όρου στην Λαγκρανζιανή της QED. Εδώ δεν προστίθεται μόνο ένας “gauge-fixing” όρος, αλλά και ένας και ένας νέος όρος, ο $\mathcal{L}_{\text{ghost}}$:

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = (\partial_\mu \bar{c}^i)(\delta^{ik}\partial^\mu + g f^{ijk} A_j^\mu)c_k \quad (4.31)$$

όπου τα c^i και \bar{c}^i είναι αφύσικα πεδία, αφού αντιμετωπίζονται αλλά μετασχηματίζονται σαν βαθμωτά κάτω από Lorentz μετασχηματισμούς. Λέγονται “ghosts” και τα σωματίδια που αντιπροσωπεύουν δεν εμφανίζονται ποτέ ως πραγματικά (δηλ. on-shell) σωματίδια σε μια διαδικασία, παρά μόνο ως διαδότες.

Οπότε η “σωστή” Λαγκρανζιανή (η οποία πλέον δεν είναι local $SU(N)$ αναλλοίωτη) είναι:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_i^\mu)^2 + (\partial_\mu \bar{c}^i)(\delta^{ik}\partial^\mu + g f^{ijk} A_j^\mu)c_k + \bar{\phi}(i\not{D} - m)\phi \quad (4.32)$$

όπου, όπως και στην QED, το ξ θα παίζει ρόλο μόνο στον ορισμό του διαδότη των πεδίων βαθμίδας.

Ο διαδότης καθενός από τα πεδία βαθμίδας είναι ίδιος με τον διαδότη του φωτονίου της QED. Ας δούμε πώς υπολογίζεται.

Αρχικά γράφουμε την Euler-Lagrange για ένα εκ των πεδίων:

$$\left[g^{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu \right] A_\mu^i = J^\nu \quad (4.33)$$

όπου J το ρεύμα που προκύπτει από τα υπόλοιπα πεδία της Λαγκρανζιανής, το οποίο δε μας ενδιαφέρει και πολύ. Ψάχνουμε την συνάρτηση Green αυτής της εξίσωσης, ενώ γνωρίζουμε πως ο διαδότης $D_F^{\mu\nu}(x)$ θα είναι $(-i)$ επί την συνάρτηση Green. Οπότε

$$\left[g^{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu \right] D_{\nu\sigma}^i(x) = -i\delta^4(x)\delta^\mu_\sigma \quad (4.34)$$

Μετασχηματίζουμε κατά Fourier:

$$\left[g^{\mu\nu}k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu \right] \tilde{D}_{\nu\sigma}^i(k) = -i\delta^\mu_\sigma \quad (4.35)$$

και θεωρούμε:

$$\tilde{D}_{\nu\sigma}^i(k) = g^{\nu\sigma} \frac{A}{k^2} + k^\nu k^\sigma \frac{B}{k^4} \quad (4.36)$$

λόγω διαστατικής ανάλυσης και λόγω του ότι οι δύο τανυστές που χρησιμοποιήσαμε είναι και οι μόνοι (ανεξάρτητοι) που έχουμε. Τα A και B είναι αδιάστατα. Βρίσκουμε:

$$A = 1 \quad \text{και} \quad B = \xi - 1 \quad (4.37)$$

¹Βλ. κεφ. III.4 και VII.1 στο [20].

Τελικά λοιπόν:

$$D_i^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \tilde{D}_F^{\mu\nu}(k), \quad \text{με}$$

$$\tilde{D}_i^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (4.38)$$

Τόσο στην QED όσο και εδώ επιλέγουμε $\xi = 1$, επιλέγουμε δηλαδή την “βαθμίδα Feynman”.

Οι διαδότες για τα υπόλοιπα πεδία είναι επίσης γνωστοί, αφού πρόκειται για φερμιόνια και βαθμωτά. Συνεπώς, μπορούμε να προχωρήσουμε στους κανόνες Feynman των local $SU(N)$ συμμετρικών θεωριών.

4.3.2 Οι αναπαράστασεις των $SU(N)$ ομάδων

Προκειμένου να γράψουμε τους κανόνες Feynman που προκύπτουν από την Λαγκρανζιανή (4.32), πρέπει να αναφερθούμε σε ένα ζήτημα που μέχρι στιγμής έχουμε αποφύγει.

Γνωρίζουμε ότι το ϕ που εμφανίζεται στην Λαγκρανζιανή είναι στην πραγματικότητα ένα άνυσμα-στήλη, που περιέχει N το πλήθος φερμιονικά πεδία. Όπως είπαμε και στην εισαγωγή, αν πρόκειται για $SU(3)$ θεωρία τα πεδία της στήλης θα είναι τρία, ενώ αν πρόκειται για $SU(2)$ τα πεδία θα είναι δύο. Επομένως η συναλλοίωτη παράγωγος:

$$D\phi = d\phi - igA^i T_i$$

πρέπει να αναπαρίσταται από έναν $N \times N$ πίνακα. Άρα το ίδιο ισχύει και για τους γεννήτορες T_i .

Τα στοιχεία μιας $SU(N)$ ομάδας μπορούν να αναπαρασταθούν από πίνακες κάποιας διάστασης M . Τους πίνακες αυτούς μπορεί να τους κατασκευάσει κανείς μέσω της σχέσης (4.12), δεδομένου ότι γνωρίζει την M -διάστατη αναπαράσταση των γεννητόρων της ομάδας.

Βέβαια, οι M -διάστατοι πίνακες που αναπαριστούν τους γεννήτορες πρέπει να ικανοποιούν την άλγεβρα (4.13), και αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατόν μόνο αν η επιθυμητή διάσταση M είναι μεγαλύτερη ή ίση του N .¹ Η N -διάστατη, τώρα, αναπαράσταση των γεννητόρων της ομάδας λέγεται **θεμελιώδης αναπαράσταση**. Οπότε, όταν γράφουμε:

$$\bar{\phi} T^i \phi$$

αυτό που εννοούμε στην πραγματικότητα είναι:

$$\bar{\phi}_j [T^i]_{jk} \phi_k$$

με το $[T^i]_{jk}$ να είναι το jk στοιχείο του i -οστού γεννήτορα στην θεμελιώδη αναπαράσταση.

Αξίζει να αναφέρουμε μία ακόμη αναπαράσταση των ομάδων $SU(N)$, την λεγόμενη **συζυγή αναπαράσταση**, η οποία έχει διάσταση $N^2 - 1$. Σε αυτήν, ο πίνακας που αναπαριστά τον i -οστό γεννήτορα έχει στοιχεία:

$$[T_{adj}^i]_{jk} = -if_{ijk} \quad (4.39)$$

Όπως φαίνεται από την σχέση (4.28), τα $F_{\mu\nu}^i$ μετασχηματίζονται στην συζυγή αναπαράσταση:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{i'} &= F_{\mu\nu}^i - f^{ijk} a^j F_{\mu\nu}^k \\ &= F_{\mu\nu}^i + i [T_{adj}^i]_{jk} a^j F_{\mu\nu}^k \end{aligned} \quad (4.40)$$

¹Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν και σε μία μονοδιάστατη αναπαράσταση όπου όλοι οι γεννήτορες είναι ίσοι με μηδέν, αλλά αυτή είναι μία τετραμμένη αναπαράσταση.

που είναι ακριβώς η απειροστή εκδοχή του μετασχηματισμού στην συζυγή αναπαράσταση.

Αυτό δεν είναι σύμπτωση. Οι $SU(N)$ μετασχηματισμοί, όπως δηλώνει το U , είναι μοναδιακοί¹. Η μοναδιακότητα είναι απαραίτητη ώστε να διατηρείται το μέτρο ορισμένων ποσοτήτων, για παράδειγμα:

$$\bar{\phi}\phi \rightarrow \bar{\phi}'\phi' = \bar{\phi}U^\dagger U\phi \equiv \bar{\phi}\phi \quad (4.41)$$

όπου U ένας $SU(N)$ μετασχηματισμός.

Στην πραγματικότητα, κατασκευάζουμε την $SU(N)$ Λαγκρανζιανή βρίσκοντας ποσότητες που μετασχηματίζονται με τον “σωστό τρόπο” κάτω από $SU(N)$ (π.χ. ϕ , $D_\mu\phi$, $F_i^{\mu\nu}$ και έπειτα φτιάχνοντας διγραμμικά $SU(N)$ -αναλλοιώτα, βασιζόμενοι στην μοναδιακότητα του μετασχηματισμού.

Υπάρχουν, σε κάθε $SU(N)$ ομάδα, ένα ή περισσότερα μεγέθη-συναρτήσεις επί των γεννητόρων, τα οποία μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες. Τα μεγέθη αυτά λέγονται **τελεστές Casimir**. Σε μία $SU(N)$ ομάδα υπάρχουν τόσοι τελεστές Casimir όση και η τάξη της ομάδας- δηλαδή ένας στην $SU(2)$ και δύο στην $SU(3)$.

Αποδεικνύεται ότι οι τελεστές Casimir είναι ανάλογοι του μοναδιαίου πίνακα, σε οποιαδήποτε αναπαράσταση- ακριβώς επειδή μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες.² Δηλαδή, ο a -οστός τελεστής Casimir στη R αναπαράσταση ισούται με:

$$C_a(R) \cdot \mathbb{I} \quad (4.42)$$

όπου \mathbb{I} ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης ίσης με την διάσταση της R αναπαράστασης και $C_a(R)$ αριθμός. Ο τελεστής Casimir που θα μας απασχολήσει είναι ο λεγόμενος **τετραγωνικός**, που ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των γεννητόρων σε μια αναπαράσταση R :

$$C_2(R) = \sum_{l=1}^{N^2-1} T_R^l T_R^l \quad (4.43)$$

Μπορούμε να βρούμε τον τετραγωνικό Casimir μιας $SU(N)$ ομάδας σε μια R αναπαράσταση με τον εξής τρόπο:

Πρώτον, δεχόμαστε την εξής σχέση κανονικοποίησης των σταθερών δομής, και συνεπώς των γεννητόρων:

$$\sum_{c=1}^{N^2-1} \sum_{d=1}^{N^2-1} f^{acd} f^{bcd} = N\delta^{ab} \quad (4.44)$$

Έπειτα διαλέγουμε (αποδεικνύεται πως έχουμε αυτό το δικαίωμα) τους γεννήτορες στην αναπαράσταση R έτσι ώστε:

$$\delta^{ab} T(R) = \text{tr} [T_R^a T_R^b] \quad (4.45)$$

όπου το $T(R)$ είναι αριθμός. Αυτή η επιλογή, μέσω της κανονικοποίησης (4.44) δίνει:

$$T(\text{fund}) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad T(\text{adj}) = N \quad (4.46)$$

για την θεμελιώδη και την συζυγή αναπαράσταση αντίστοιχα. Αν στην (4.45) θέσουμε $a = b$, λάβουμε υπ' όψη την γραφή (4.42) για τον Casimir και αθροίσουμε στα a βρίσκουμε:

$$C_2(R) = \frac{T(R)(N^2 - 1)}{d(R)} \quad (4.47)$$

όπου $d(R)$ η διάσταση της αναπαράστασης. Συγκεκριμένα, για τις δύο πιο συνήθεις αναπαραστάσεις:

$$C_2(\text{fund}) = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad \text{και} \quad C_2(\text{adj}) = N \quad (4.48)$$

¹Το S δηλώνει ότι οι πίνακες που τους αναπαριστούν έχουν ορίζουσα ίση με 1.

²Πρόκειται για την εφαρμογή του λήμματος του Schur στις Lie άλγεβρες.

4.4 Οι κανόνες Feynman

Θα συνοδεύουμε τους κανόνες με σχήματα ώστε να είναι καθαρή η σημασία των συναλλοίωτων δεικτών καθώς και των δεικτών που σχετίζονται με την $SU(N)$.

1. Για κάθε εσωτερική γραμμή πεδίων βαθμίδας (σε βαθμίδα Feynman):

$$\begin{array}{c} \mu \quad k \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ i \quad \quad \quad j \end{array} \rightarrow \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \delta^{ij} \quad (4.49)$$

2. Για κάθε ghost εσωτερική γραμμή:

$$\begin{array}{c} k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ i \quad \quad \quad j \end{array} \rightarrow \frac{i\delta^{ij}}{k^2} \quad (4.50)$$

3. Για κάθε φερμιονική εσωτερική γραμμή:

$$\begin{array}{c} k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ i \quad \quad \quad j \end{array} \rightarrow \frac{i\delta^{ij}}{\not{k} - m} \quad (4.51)$$

4. Για κάθε κορυφή 2 φερμιονίων-πεδίου βαθμίδας:

$$\begin{array}{c} k \quad \mu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ j \quad \quad \quad i \end{array} \rightarrow ig\gamma^\mu [T^k]_{ij} \quad (4.52)$$

όπου $[T^k]_{ij}$ το στοιχείο του k -γεννήτορα στην θεμελιώδη αναπαράσταση.

5. Για κάθε κορυφή 2 ghost-πεδίου βαθμίδας:

$$\begin{array}{c} \mu \quad j \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ k \quad \quad \quad p \quad \quad \quad i \end{array} \rightarrow -gf^{ijk} p^\mu \quad (4.53)$$

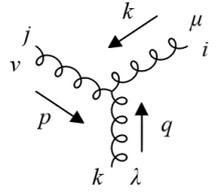
Αυτό προέκυψε ως εξής. Ο αντίστοιχος όρος αλληλεπίδρασης είναι:

$$gf^{ijk}(\partial_\nu \bar{c}^i) A_j^\mu c_k$$

(Για ευκολία χρησιμοποιήσαμε τους ίδιους δείκτες με το διάγραμμα- αλλιώς θα χρειάζονταν τέσσερα Kronecker δ .)

Κοιτάζουμε την συζήτηση πριν την (3.92). Η παράγωγος εδώ δρα στο αντι-ghost πεδίο, το οποίο δημιουργεί σωματίδια και καταστρέφει αντισωματίδια. Οπότε αν θεωρήσουμε ότι το i άκρο του διαγράμματος είναι σωματίδιο, τότε αυτό εξέρχεται του vertex (δημιουργείται) και συνεπώς θα υπάρξει ένας παράγοντας $+ip^\mu$. Έχουμε και ένα i από το διαταρακτικό ανάπτυγμα του πλάτους σκέδασης, οπότε τελικά ο κανόνας Feynman είναι ο (4.53).

6. Για κάθε κορυφή 3 πεδίων βαθμίδας:



$$\rightarrow g f^{ijk} [g^{\mu\nu} (k-p)^\lambda + g^{\nu\lambda} (p-q)^\mu + g^{\lambda\mu} (q-k)^\nu] \quad (4.54)$$

Αυτό προέκυψε ως εξής. Ο αντίστοιχος όρος αλληλεπίδρασης είναι:

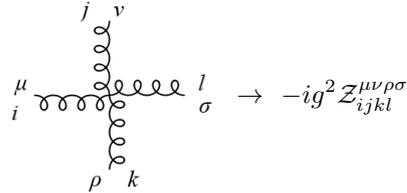
$$-g f^{lmn} (\partial^a A_l^\beta) A_a^m A_\beta^n$$

Υπάρχουν 6 τρόποι να αντιστοιχίσουμε την τριάδα δεικτών i, j, k στην τριάδα l, m, n , οπότε θα προκύψουν 6 όροι. Αν υποθέσουμε πως οι δείκτες μ, ν, λ είναι επάνω δείκτες (μπορούμε να υποθέσουμε και το αντίθετο χωρίς να αλλάξει κάτι) τότε, κοιτώντας τους δείκτες a, β στον όρο αλληλεπίδρασης, βλέπουμε πως θα εμφανιστεί σε κάθε όρο ένα γινόμενο της μορφής

$$g^{\beta\phi} g_a^\chi g_\beta^\psi$$

(Τα δύο τελευταία είναι Kronecker δ) Ακόμη, έχουμε εισερχόμενες ορμές οπότε θα υπάρχει και ένα $-i$ επί την αντίστοιχη ορμή. Τέλος, θα υπάρχει ένα i από το ανάπτυγμα του πλάτους σκέδασης, οπότε προκύπτει ο προαναφερθείς κανόνας Feynman.

7. Για κάθε κορυφή 4 πεδίων βαθμίδας:



$$\rightarrow -ig^2 Z_{ijkl}^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \text{με } Z_{ijkl}^{\mu\nu\rho\sigma} = & f^{ijm} f^{klm} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \\ & + f^{ikm} f^{jlm} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \\ & + f^{ilm} f^{jkm} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Αυτός ο κανόνας Feynman προκύπτει ευθέως από τον αντίστοιχο όρο της Λαγκρανζιανής:

$$-\frac{1}{4} g^2 f^{ijk} f^{ilm} A_\mu^j A_\nu^k A_l^\mu A_l^\nu$$

αντιστοιχίζοντας κάθε “πόδι” του διαγράμματος σε κάθε πεδίο A και προσθέτοντας τα αποτελέσματα.

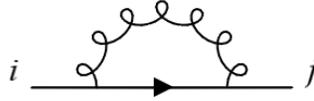
8. Επειδή τα ghost πεδία αντιμετωπίζονται, αν στο διάγραμμα εμφανίζεται περιττός αριθμός ghost βρόχων πολλαπλασιάζουμε με έναν παράγοντα -1 .
9. Ισχύουν οι κανόνες 6, 7 και 8 της QED. Ισχύουν ακόμη οι κανόνες 1 (για τα φερμιόνια) και 9. Ισχύει και ο κανόνας 3, με τα πεδία βαθμίδας στην θέση των φωτονίων.
10. Ισχύει ο κανόνας 6 της ϕ^4 θεωρίας για τους βρόχους που σχηματίζονται ενίοτε από το πεδίο βαθμίδας. Εκείνο το δ^{ij} στον διαδότη (4.49) αναγκάζει τα σωματίδια του πεδίου βαθμίδας που συμμετέχουν σε έναν βρόχο να είναι ταυτόσημα και ως προς τον $SU(N)$ δείκτη, οπότε είμαστε υποχρεωμένοι να διαιρούμε με τον παράγοντα συμμετρίας.

11. Τέλος, όταν σε ένα διάγραμμα υπάρχουν εσωτερικές γραμμές τότε πάντοτε απομένει κάποιος $SU(N)$ δείκτης. Αθροίζουμε πάνω στις τιμές που μπορεί να πάρει.

4.5 Μερικά αποκλίνοντα διαγράμματα

Όπως και στην QED, θα ομαλοποιήσουμε τα 1-loop ορι αποκλίνοντα διαγράμματα. Αλλά όχι όλα, παρ'όλο που αυτά που θα μας χρειαστούν παρακάτω. Φυσικά, αν δεν εξετάσουμε όλα τα 1-loop ορι αποκλίνοντα διαγράμματα είναι αδύνατο να γράψουμε την 1-loop ανακανονικοποιημένη Λαγκρανζιανή- ωστόσο δεν είναι αυτός ο στόχος μας, όπως θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Ξεκινάμε με το **self-energy graph** για τα φερμιόνια:



Σχήμα 10

Βλέπουμε από τους κανόνες Feynman ότι πρόκειται για ακριβώς το ίδιο ολοκλήρωμα με το self-energy της QED. Η μόνη διαφορά είναι ότι, λόγω του Kronecker δ των διαδοτών και του κανόνα Feynman για τις κορυφές, προκύπτει ο παράγοντας:

$$\begin{aligned} [T^n]_{jq} [T^l]_{mi} \delta^{ln} \delta^{mq} &= \sum_{n=1}^{N^2-1} [T^n T^n]_{ji} \\ &= [C_2(\text{fund}) \cdot \mathbb{1}]_{ij} \\ &= C_2(\text{fund}) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.57)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του τετραγωνικού Casimir. Οι δείκτες q, m, l, n είναι εσωτερικοί και αθροίζονται, όπως λέει ο κανόνας 11. Βέβαια, αν κανείς υιοθετεί την αθροιστική σύμβαση τότε αυτή η άθροιση γίνεται αυθόρμητα και το περιεχόμενο του κανόνα 11 γίνεται τετριμμένο. Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$i\Sigma^{ij}(p) = C_2(\text{fund}) \delta^{ij} \frac{ig^2}{8\pi^2} \left[\frac{\not{p} - 4m}{\epsilon} + \text{UV finite} \right] \quad (4.58)$$

με p την ορμή του φερμιονικού διαδότη και $\epsilon = 4 - d$.

Συνεχίζουμε με την **vacuum polarisation**. Υπάρχουν πολλά διαγράμματα που συμμετέχουν στην vacuum polarisation (σχήμα 11).

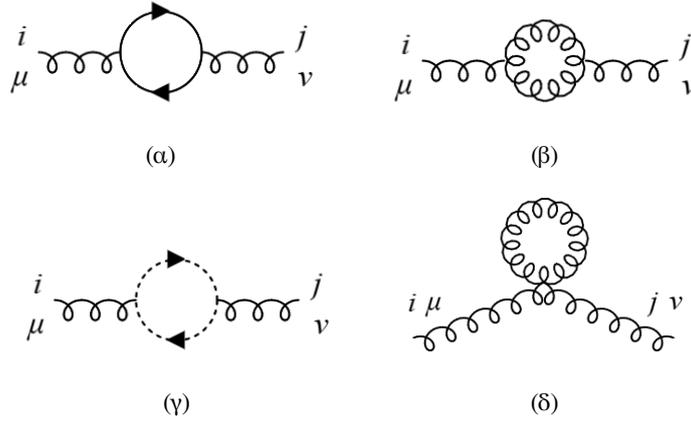
Ας ξεκινήσουμε από το (δ) του σχήματος 11, που είναι και το πιο ενδιαφέρον. Η συνεισφορά του θα είναι ανάλογη της ποσότητας:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2}$$

η οποία αποκλίνει λόγω της συμπεριφοράς της ολοκληρωτέας συνάρτησης τόσο στο άπειρο, όσο και στο μηδέν. Εμείς όμως δεν μπορούμε να χειριστούμε αυτό το ολοκλήρωμα όπως κάναμε μέχρι τώρα, δηλαδή με γενίκευση στις n διαστάσεις και έπειτα χρήση της σχέσης (3.34), επειδή η εξαγωγή της (3.34) απαιτεί ένα μη μηδενικό A . Οπότε μάλλον πρέπει να καταφύγουμε σε άλλη μέθοδο ομαλοποίησης...

Όμως δεν πρέπει! Αποδεικνύεται ¹ ότι στα πλαίσια της dimensional regularisation

¹Η διαδεδομένη απόδειξη βρίσκεται στην παράγραφο 4.2 του [4]. Υπάρχει και μία ευθεία απόδειξη στην παράγραφο IV(B) του [7].



Σχήμα 11

μπορούμε να αγνοούμε ολοκληρώματα αυτής της μορφής. Ο “σκελετός” της διαδεδομένης απόδειξης είναι ο εξής:

Αρχικά παρατηρούμε πως μπορούμε πάντοτε να γράφουμε:

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\tau \exp[-\tau(k^2 + m^2)] \quad (4.59)$$

Οπότε, αν θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα:

$$I_1 = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{m^2}{k^2(k^2 + m^2)}$$

τότε μπορούμε να το υπολογίσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} I_1 &= m^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \exp[-(\tau_1 + \tau_2)k^2 - \tau_2 m^2] \\ &= \frac{m^2}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 (\tau_1 + \tau_2)^{-n/2} \exp(-\tau_2 m^2) \\ &= \frac{m^2}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty d\tau_2 \int_{\tau_2}^\infty d\tau_{12} \tau_{12}^{-n/2} \exp(-\tau_2 m^2) \\ &= \frac{m^2}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty d\tau_2 \frac{-\tau_2^{1-n/2}}{1-n/2} \exp(-\tau_2 m^2) \\ &= -\frac{m^{n-2}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(1-n/2) \end{aligned} \quad (4.60)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε Γκαουσιανή ολοκλήρωση σε n διαστάσεις, αλλαγή μεταβλητής και τέλος τους τύπους:

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x) \quad \text{και} \quad a^s \Gamma(s) = \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \exp(-a\tau) \quad (4.61)$$

που προκύπτουν από τον ολοκληρωτικό ορισμό της Γ συνάρτησης. Παρατηρούμε όμως τώρα πως:

$$\frac{m^2}{k^2(k^2 + m^2)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (4.62)$$

Ενώ, το ολοκλήρωμα:

$$I_2 = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2 + m^2}$$

μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της σχέσης (3.34). Βρίσκουμε:

$$I_2 = \frac{m^{n-2}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(1 - n/2) \quad (4.63)$$

Οπότε, μέσω της (4.62) και αν απαιτούμε να είναι γραμμική η διαδικασία της dimensional regularisation¹, έχουμε:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} = 0 \quad (4.64)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι αυτό δεν σημαίνει ότι η συνεισφορά του διαγράμματος που μελετάμε είναι μηδενική. Σημαίνει ότι αν χρησιμοποιήσουμε διαστατική ομαλοποίηση μπορούμε να την θεωρήσουμε μηδενική και να είμαστε αυτοσυνεπείς. Στο [17] και στο [19], προκειμένου να μην επικαλεστούν τον μηδενισμό αυτού του ολοκληρώματος στην διαστατική ομαλοποίηση, γράφουν:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{(p-k)^2}{(p-k)^2 k^2} \quad (4.65)$$

και έπειτα ακολουθούν τη γνωστή διαδικασία με Feynman parameters, γενίκευση σε n διαστάσεις κλπ. Και εκεί βέβαια, τελικά, σε κάθε τάξη ως προς $\epsilon = 4 - d$ η συνεισφορά είναι μηδέν- το οποίο είναι λογικό, αφού πάλι dim. reg. χρησιμοποιείται!

Έχοντας λοιπόν αγνοήσει χωρίς ενοχές το διάγραμμα (δ) του σχήματος 11, προχωράμε στο (α). Η συνεισφορά του θα διαφέρει από την αντίστοιχη της QED μόνο κατά έναν παράγοντα:

$$\begin{aligned} [T^i]_{ab} [T^j]_{dc} \delta^{ac} \delta^{bd} &= \sum_{a=1}^{N^2-1} [T^i T^j]_{aa} \\ &= \text{tr} [T^i T^j] \\ &= T(\text{fund}) \delta^{ij} \\ &= \frac{1}{2} \delta^{ij} \end{aligned} \quad (4.66)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (4.45). Οπότε καταλήγουμε:

$$i\Pi(p)_{(\alpha)}^{ij,\mu\nu} = \delta^{ij} \frac{ig^2}{16\pi^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \left[\frac{4}{3\epsilon} + \int_0^1 dx (1-x)x \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} \right] \quad (4.67)$$

με p την ορμή του διαδότη και μ το subtraction point, το οποίο εισάγεται όπως στην (3.30).

Πηγαίνουμε στο (β) του σχήματος 11. Πρόκειται για ένα νέο διάγραμμα, καθώς δεν υπάρχει τέτοιο στην QED. Γράφουμε την συνεισφορά του τοποθετώντας c, e, d, f και a, β, ρ, σ εσωτερικούς- $SU(N)$ και Lorentz αντίστοιχα- δείκτες και θεωρώντας και πάλι p την ορμή του διαδότη.

$$\begin{aligned} i\Pi(p)_{(\beta)}^{ij,\mu\nu} &= \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{a\beta}}{k^2} \delta^{cf} \frac{-ig^{\rho\sigma}}{(k-p)^2} \delta^{ed} f^{ice} f^{jdf} Q_{a\rho}^\mu Z_{\beta\sigma}^\nu \\ &= -\frac{g^2}{2} f^{ice} f^{jec} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g^{a\beta}}{k^2} \frac{g^{\rho\sigma}}{(k-p)^2} Q_{a\rho}^\mu Z_{\beta\sigma}^\nu \\ &= \frac{g^2}{2} N \delta^{ij} g^{a\beta} g^{\rho\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k-p)^2} Q_{a\rho}^\mu Z_{\beta\sigma}^\nu \end{aligned} \quad (4.68)$$

όπου Q και Z οι όροι που αφορούν τις δύο κορυφές, οι οποίοι προκύπτουν από τον κανόνα Feynman αρ. 6. Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την σχέση (4.44). Εισάγουμε Feynman parameters και βρίσκουμε:

$$i\Pi(p)_{(\beta)}^{ij,\mu\nu} = \frac{g^2}{2} N \delta^{ij} g^{a\beta} g^{\rho\sigma} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} Q_{a\rho}^\mu Z_{\beta\sigma}^\nu \quad (4.69)$$

¹Βλ. παράγραφο 4.1 του [4].

όπου $\Delta = x(x-1)p^2$. Τώρα γενικεύουμε σε n διαστάσεις, εισάγουμε το μ και αναπτύσσουμε τα \mathcal{Q} και \mathcal{Z} . Τελικά:

$$i\Pi(p)_{(\beta)}^{ij,\mu\nu} = -\frac{ig^2}{2} \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{n/2}} \delta^{ij} N \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-n/2}} \Gamma(1-n/2) \times \\ \times \left\{ g^{\mu\nu} p^2 [3x(x-1)(n-1) + (-2x^2 + 2x - 5)(1-n/2)] + \right. \\ \left. + p^\mu p^\nu (1-n/2) [6(x^2 - x + 1) - n(1-2x)^2] \right\} \quad (4.70)$$

Το αφήνουμε ως έχει και πηγαίνουμε στο (γ). Εφαρμόζοντας τους κανόνες Feynman βρίσκουμε την συνεισφορά του:

$$i\Pi(p)_{(\gamma)}^{ij,\mu\nu} = (-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{ce}}{(k-p)^2} \frac{i\delta^{df}}{k^2} f^{ejf} (k-p)^\nu f^{dic} k^\mu \quad (4.71)$$

Ο παρονομαστής αυτού του ολοκληρώματος είναι ίδιος με εκείνον που συναντήσαμε στο (β). Οπότε θέτουμε και πάλι $\Delta = x(x-1)p^2$ και κατά τα γνωστά γράφουμε:

$$i\Pi(p)_{(\gamma)}^{ij,\mu\nu} = ig^2 \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{n/2}} \delta^{ij} N \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-n/2}} \times \\ \times \left\{ g^{\mu\nu} p^2 \frac{1}{2} \Gamma(1-n/2) x(x-1) + \right. \\ \left. + p^\mu p^\nu (1-n/2) \Gamma(1-n/2) x(1-x) \right\} \quad (4.72)$$

Προσθέτουμε τις συνεισφορές (β) και (γ):

$$i\Pi(p)_{(\beta)}^{ij,\mu\nu} + i\Pi(p)_{(\gamma)}^{ij,\mu\nu} = ig^2 \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{n/2}} \delta^{ij} N \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-n/2}} \Gamma(1-n/2) \left\{ g^{\mu\nu} p^2 \times \right. \\ \times \left[-\frac{3}{2} x(x-1)(n-1) + (x^2 - x + 5/2)(1-n/2) + \frac{1}{2} x(x-1) \right] + \\ \left. + p^\mu p^\nu (1-n/2) \left[-3(x^2 - x + 1) + \frac{n}{2} (1-2x)^2 + x(1-x) \right] \right\} \quad (4.73)$$

Και βρισκόμαστε προ εκπλήξεως, για τον εξής λόγο. Η συνεισφορά του (α) ήταν ανάλογη της ποσότητας $p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2$, δηλαδή είχε την κατάλληλη μορφή ώστε ικανοποιεί την Ward identity. Οπότε, δεδομένου πως το (δ) είναι εκτός παιχνιδιού, περιμένουμε το άθροισμα (4.73) να έχει και αυτό την κατάλληλη μορφή, ώστε τελικά το άθροισμα όλων των διαγραμμάτων της vacuum polarisation να ικανοποιεί την Ward identity.

Όμως το άθροισμα (4.73) δεν φαίνεται να έχει την κατάλληλη μορφή, καθώς ο συντελεστής του $p^\mu p^\nu$ μέσα στο ολοκλήρωμα δεν είναι ακριβώς αντίθετος του συντελεστή του $g^{\mu\nu} p^2$.

Ωστόσο αυτό δεν είναι αλήθεια. Αν κανείς υπολογίσει ακριβώς το ολοκλήρωμα της (4.73) θα δει ότι η μορφή είναι η σωστή. Λόγω όμως της ποσότητας $\Delta^{n/2-2}$ ο ακριβής υπολογισμός είναι δύσκολος. Πρέπει λοιπόν να αρκεστούμε στις προσεγγίσεις (3.39)-(3.41),¹ και βεβαίως στην σχέση:

$$\Gamma(1-n/2) = -\Gamma(2-n/2), \quad \text{για } n \rightarrow 4$$

Θέτουμε ως συνήθως $\epsilon = 4 - n$ και βρίσκουμε:

$$i\Pi(p)_{(\beta)}^{ij,\mu\nu} + i\Pi(p)_{(\gamma)}^{ij,\mu\nu} = -\delta^{ij} N \frac{ig^2}{16\pi^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \left[\frac{10}{3\epsilon} + \frac{5}{3} \log \frac{\tilde{\mu}^2}{-p^2} + \text{UV finite} \right] \quad (4.74)$$

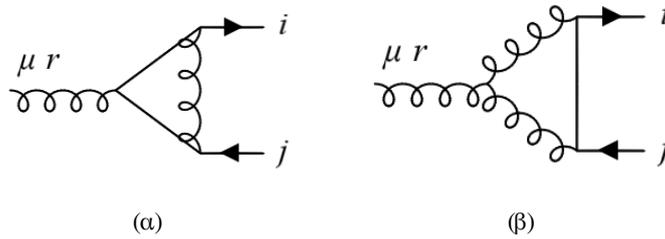
¹Εδώ βρίσκεται και το πλεονέκτημα της τακτικής των [17] και [19]. Με τη μέθοδο που εκεί εφαρμόζεται αποδεικνύεται **αναλυτικά** πως το πλάτος της vacuum polarisation ικανοποιεί την Ward identity.

Οπότε για την vacuum polarisation συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
i\Pi(p)_{(a)}^{ij,\mu\nu} + i\Pi(p)_{(\beta)}^{ij,\mu\nu} + i\Pi(p)_{(\gamma)}^{ij,\mu\nu} &= \delta^{ij} \frac{ig^2}{16\pi^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \times \\
&\times \left\{ \frac{4}{3\epsilon} + \int_0^1 dx (1-x)x \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} - \right. \\
&\quad \left. - N \frac{10}{3\epsilon} - N \frac{5}{3} \log \frac{\tilde{\mu}^2}{-p^2} + \text{UV finite} \right\} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Ο λόγος που κρατήσαμε και τους όρους με το $\tilde{\mu}$ είναι να γίνει εμφανές, στη συνέχεια, πώς μπορεί κανείς να ανακανονικοποιήσει στο $\overline{\text{MS}}$.

Έπειτα έχουμε το **vertex correction**. Σε 1-loop, τα διαγράμματα που συνεισφέρουν στο vertex correction είναι τα εξής δύο:



Σχήμα 12

Ας αρχίσουμε από το (α). Σύμφωνα με τους κανόνες Feynman, η συνεισφορά του θα διαφέρει από το (3.76) κατά έναν παράγοντα:

$$\begin{aligned}
&[T^r]_{m'n'} [T^q]_{im} [T^{q'}]_{nj} \delta_{m'm} \delta_{n'n} \delta_{q'q} \\
&= [T^q T^r T^q]_{ij} \\
&= [T^q T^q T^r + T^q [T^r, T^q]]_{ij} \\
&= [C_2(\text{fund}) T^r + iT^q f^{rqs} T^s]_{ij} \quad (4.76)
\end{aligned}$$

Τώρα θα εκμεταλλευτούμε την αντισυμμετρικότητα του f^{rqs} για να τροποποιήσουμε τον δεύτερο όρο. Η (4.76) γίνεται:

$$\begin{aligned}
&[C_2(\text{fund}) T^r + i \frac{1}{2} f^{rqs} [T^q, T^s]]_{ij} \\
&= [C_2(\text{fund}) T^r - \frac{1}{2} f^{rqs} f^{qst} T^t]_{ij} \\
&= [C_2(\text{fund}) T^r - \frac{1}{2} N \delta^{rt} T^t]_{ij} \\
&= \left(C_2(\text{fund}) - \frac{1}{2} N \right) [T^r]_{ij} \quad (4.77)
\end{aligned}$$

Οπότε η συνεισφορά του (α) του σχήματος 12 είναι:

$$i\mathcal{M}_{ij}^{\mu,r} = g\gamma^\mu M_{ij}^r \quad (4.78)$$

με

$$\begin{aligned}
M_{ij}^r &= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} \left(C_2(\text{fund}) - \frac{1}{2} N \right) [T^r]_{ij} \left[\frac{2}{\epsilon} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{x,y,z=0}^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \log \frac{\tilde{\mu}^2}{\Delta} \right] + \text{UV finite} \quad (4.79)
\end{aligned}$$

με $\Delta = -xyp^2 + (1-z)^2m^2$ και p την ορμή του εξωτερικού πεδίου βαθμίδας. Το “-” της QED που εδώ εξαφανίστηκε οφείλεται στο διαφορετικό πρόσημο του όρου αλληλεπίδρασης 2 φερμιονίων-πεδίου βαθμίδας στην Λαγκρανζιανή.

Προχωράμε στο (β) του σχήματος 12. Για να βρούμε την συνεισφορά του θα χρησιμοποιήσουμε εσωτερικούς δείκτες, καθώς και τις ορμές q_1, q_2, p των εξωτερικών γραμμών.

$$\begin{aligned} i\mathcal{N}_{ij}^{\mu,r} &= [T^m]_{iq'} [T^n]_{qj} \delta_{n'n} \delta_{m'm} \delta_{q'q} \times \\ &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (ig)\gamma^\sigma \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} (ig)\gamma^\chi \frac{-ig_{\rho\sigma}}{(k - q_2)^2} \frac{-ig_{\phi\chi}}{(q_1 - k)^2} \times \\ &\times g f^{rn'm'} \left[g^{\mu\phi} (p - q_1 + k)^\rho + g^{\phi\rho} (q_1 - k - k + q_2)^\mu + g^{\rho\mu} (k - q_2 - p)^\phi \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

Η απειρία θα προκύψει μονάχα από τον όρο που στον αριθμητή θα έχει k^2 , οπότε, σύμφωνα με αυτά που έχουμε πει, μπορούμε να θέσουμε όλες τις εξωτερικές ορμές μηδέν για την μελέτη της UV απόκλισης. Και, προφανώς, μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο που στον αριθμητή θα έχει την μάζα m - την οποία κρατάμε μη μηδενική προς αποφυγή παρεξηγήσεων:

$$\begin{aligned} i\mathcal{N}_{ij}^{\mu,r} &= ig^3 [T^m T^n]_{ij} f^{rnm} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \frac{\not{k}}{k^2 - m^2} \gamma_\phi \frac{1}{k^4} \left[g^{\mu\phi} k^\rho - 2g^{\phi\rho} k^\mu + g^{\rho\mu} k^\phi \right] + \\ &+ \text{UV finite} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Εφαρμόζουμε την τεχνική του προηγούμενου διαγράμματος για να βρούμε ότι:

$$[T^m T^n]_{ij} f^{rnm} = -\frac{i}{2} N [T^r]_{ij} \quad (4.82)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} i\mathcal{N}_{ij}^{\mu,r} &= \frac{g^3}{2} N [T^r]_{ij} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)k^4} \times \\ &\times \left[\gamma^\mu \not{k} \not{k} - 2\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma^\rho k^\nu k^\mu + \gamma^\mu \not{k} \not{k} \right] + \text{UV finite} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Γενικεύουμε στις n διαστάσεις, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες:

$$\not{k} \not{k} = k^2 \quad \text{και} \quad \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma^\rho = (2 - n) \gamma_\nu \quad (4.84)$$

καθώς και την γνωστή αντικατάσταση (βλ. σελίδα 16):

$$k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{n} k^2 g^{\mu\nu} \quad (4.85)$$

Συνοπώς:

$$i\mathcal{N}_{ij}^{\mu,r} = \frac{g^3}{2} N [T^r]_{ij} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(4 - 4/n) \gamma^\mu k^2}{(k^2 - m^2)k^4} + \text{UV finite} \quad (4.86)$$

Για να είμαστε συνεπείς, θεωρούμε:

$$i\mathcal{N}_{ij}^{\mu,r} = g \gamma^\mu N_{ij}^r \quad (4.87)$$

και στην έκφραση που δίνει το N_{ij}^r εισάγουμε το μ . Οπότε:

$$\begin{aligned} N_{ij}^r &= \frac{g^2 \mu^{4-n}}{2} N [T^r]_{ij} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(4 - 4/n) k^2}{(k^2 - m^2)k^4} + \text{UV finite} \\ &= \frac{g^2 \mu^{4-n}}{2(4\pi)^2} N [T^r]_{ij} (4 - 4/n) i(4\pi)^{2-n/2} \Gamma(2 - n/2) + \text{UV finite} \\ &= \frac{ig^2}{(4\pi)^2} N [T^r]_{ij} \left[\frac{3}{\epsilon} + \frac{3}{2} \log \frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2} \right] + \text{UV finite} \end{aligned} \quad (4.88)$$

όπου θεωρήσαμε $\epsilon = 4 - n$. Το Q^2 είναι μια ποσότητα με διαστάσεις m^2 και εξαρτάται από τις εξωτερικές ορμές. Την τοποθετήσαμε εκεί αφενός διότι το όρισμα ενός λογαρίθμου πρέπει πάντοτε να είναι αδιάστατο και αφετέρου διότι η αφαιρετική μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε δεν μας επιτρέπει να γνωρίζουμε την ακριβή έκφραση για UV finite όρους όπως αυτός. Όμως θέλουμε να πάντα να κρατάμε τον όρο με το μ ώστε να μπορεί κανείς μετά να ανακανονικοποιήσει σε $\overline{\text{MS}}$.

Μας ενδιαφέρει, για την ανακανονικοποίηση που θα ακολουθήσει, ο πλήρης UV απειρισμός του vertex correction, οπότε πρέπει να προσθέσουμε τις δύο συνεισφορές που βρήκαμε:

$$N_{ij}^r + M_{ij}^r = \frac{ig^2}{16\pi^2} [T^r]_{ij} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(2C_2(\text{fund}) + 2N \right) + \log \frac{\tilde{\mu}^2}{Q^2} \left(2C_2(\text{fund}) + \frac{N}{2} \right) \right] + \text{UV finite} \quad (4.89)$$

Έχοντας ομαλοποιήσει τις συνεισφορές των απειριζόμενων ορι διαγραμμάτων που μας ενδιαφέρουν, μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανακανονικοποίηση της local- $SU(2)$ συμμετρικής θεωρίας μας.

4.6 Η ανακανονικοποίηση

Σε αντίθεση με την QED, δεν θα κατασκευάσουμε μια πλήρη 1-loop ανακανονικοποιημένη θεωρία. Έχουμε άλλωστε παραλείψει να εξετάσουμε τους απειρισμούς πολλών 1-loop ορι διαγραμμάτων, όπως είναι το vertex correction της κορυφής 4 πεδίων βαθμίδας, η διόρθωση του ghost πεδίου και άλλα.

Προχωράμε λοιπόν στην “μερική” ανακανονικοποίηση της local $SU(2)$ συμμετρικής θεωρίας. Θεωρούμε:¹

$$\phi_0 = \sqrt{Z_2} \phi \quad (4.90)$$

$$A_0^{\mu,i} = \sqrt{Z_3} A^{\mu,i} \quad (4.91)$$

$$m_0 = Z_m m \quad (4.92)$$

$$g_0 = \mu^{(4-n)/2} Z_g g \quad (4.93)$$

Όπως βλέπουμε από τις (4.19) και (4.32), ο όρος αλληλεπίδρασης 2 φερμιονίων- πεδίου βαθμίδας θα είναι:

$$\mathcal{L}_{\phi\phi A} = \sqrt{Z_3} Z_2 Z_g \mu^{(4-n)/2} g A_\mu^i T_i \bar{\phi} \gamma^\mu \phi \quad (4.94)$$

Οπότε θέτουμε για ευκολία:

$$Z_1 = \sqrt{Z_3} Z_2 Z_g \quad (4.95)$$

Είναι απαραίτητο να μην ξεχάσουμε ότι, σε αντίθεση με την QED, ο όρος $\mathcal{L}_{\phi\phi A}$ είναι ένας μόνο από τους 4 όρους αλληλεπίδρασης και όχι ο μοναδικός.

Οπότε το κομμάτι της n -διάστατης Λαγκρανζιανής που μας ενδιαφέρει είναι:

$$\mathcal{L}_{\text{part}} = -\frac{1}{4} Z_3 (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 + Z_2 \bar{\phi} (i\cancel{\partial} - Z_m m) \phi + Z_1 \mu^{(4-n)/2} g A_\mu^i T_i \bar{\phi} \gamma^\mu \phi \quad (4.96)$$

Γράφουμε τώρα:

$$Z_j = 1 + \delta_j \quad \text{όπου} \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.97)$$

και συνεπώς, αγνοώντας τους τάξης δ^2 όρους:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{part}} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 + \bar{\phi} (i\cancel{\partial} - m) \phi + \mu^{(4-n)/2} g A_\mu^i T_i \bar{\phi} \gamma^\mu \phi - \\ & - \frac{1}{4} \delta_3 (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 + i\delta_2 \bar{\phi} \cancel{\partial} \phi - (\delta_2 + \delta_m) m \bar{\phi} \phi + \delta_1 \mu^{(4-n)/2} g A_\mu^i T_i \bar{\phi} \gamma^\mu \phi \end{aligned} \quad (4.98)$$

¹Βλ. υποσημείωση σελίδας 50.

Μπορούμε να βρούμε τους κανόνες Feynman για τους counterterms ακριβώς όπως στην QED:

$$= i\delta_1 \mu^{(4-n)/2} g \gamma^\mu [T^r]_{ij} \quad (4.99)$$

$$= i\delta^{ij} \delta_3 [p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2] \quad (4.100)$$

$$= i\delta^{ij} [\not{p}\delta_2 - (\delta_m + \delta_2)m] \quad (4.101)$$

Προσθέτουμε αυτά αντιστοίχως στις συνεισφορές (4.89), (4.75) και (4.58) και, απαιτώντας το άθροισμα να είναι UV finite, βρίσκουμε (σε MS):

$$\delta_1 = \frac{1}{\epsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[-2C_2(\text{fund}) - 2C_2(\text{adj}) \right] \quad (4.102)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[-2C_2(\text{fund}) \right] \quad (4.103)$$

$$\delta_3 = \frac{1}{\epsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{10}{3}C_2(\text{adj}) - \frac{8}{3}T(\text{fund}) \right] \quad (4.104)$$

$$\delta_m = \frac{1}{\epsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[-6C_2(\text{fund}) \right] \quad (4.105)$$

όπου αναιρέσαμε τις αντικαταστάσεις για $C_2(\text{adj})$ και $T(\text{fund})$ ώστε να διατηρήσουμε μια γενικότητα στον συμβολισμό.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε ένα σχόλιο. Είδαμε ότι στην QED η ισότητα $Z_1 = Z_2$ εξασφαλίζει ότι το φορτίο ενός φερμιονίου, δηλαδή η σταθερά σύζευξής του με το HM πεδίο, ανακανονικοποιείται με τρόπο ανεξάρτητο από το είδος του φερμιονίου. Αυτό σημαίνει η σχέση μεταξύ των φορτίων q_0 και q'_0 δύο φερμιονίων διατηρείται και στην ανακανονικοποιημένη θεωρία:

$$\frac{q_0}{q'_0} = \frac{q}{q'} \quad (4.106)$$

Περιμένουμε ότι και στην μη αβελιανή θεωρία η σταθερά σύζευξης θα ανακανονικοποιείται με τρόπο ανεξάρτητο του είδους των συμμετεχόντων φερμιονίων. Και άρα ότι η σχέση μεταξύ των “φορτίων” g των διαφόρων σωματιδίων θα διατηρείται στην ανακανονικοποιημένη θεωρία.

Περιμένουμε δηλαδή ότι το Z_g θα εξαρτάται μόνο από το Z_3 . Πράγματι, μπορούμε να ελέγξουμε ότι σε κάθε επιθυμητή τάξη ως προς g ο λόγος Z_1/Z_2 είναι ανεξάρτητος του είδους των φερμιονίων και συνεπώς, μέσω της σχέσης:

$$Z_1 = Z_g Z_2 \sqrt{Z_3} \Rightarrow Z_g = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \quad (4.107)$$

βλέπουμε ότι προκύπτει το ζητούμενο. Βέβαια η συνθήκη $Z_1/Z_2 = \text{const.}$ είναι πιο ασθενής από την συνθήκη $Z_1 = Z_2$ της QED, αλλά το συμπέρασμα είναι το ίδιο.

Το θέμα είναι ότι, σε αντίθεση με την QED, δεν υπάρχει ένας, αλλά τέσσερις όροι αλληλεπίδρασης που εμπλέκουν την σταθερά σύζευξης. Για τις κορυφές των 2 ghosts-πεδίου βαθμίδας, 3 πεδίων βαθμίδας και 4 πεδίων βαθμίδας γράφουμε:

$$Z_{1a} = Z_g Z_{\text{ghost}} \sqrt{Z_3} \quad (4.108)$$

$$Z_{1b} = Z_g (Z_3)^{3/2} \quad (4.109)$$

$$Z_{1c} = Z_g^2 Z_3^2 \quad (4.110)$$

Οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψη την (4.107), καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να ισχύει (σε κάθε επιθυμητή τάξη ως προς g):

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_{1a}}{Z_{\text{ghost}}} = \frac{Z_{1b}}{Z_3} = \frac{\sqrt{Z_{1c}}}{\sqrt{Z_3}} = \text{const.} \quad (4.111)$$

πράγμα που ευτυχώς συμβαίνει.

5 Οι τρέχουσες σταθερές σύζευξης και η RGE

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη ορισμένων από τα ενδιαφέροντα επακόλουθα που έχει η ανακανονικοποίηση. Εφαλτήριο για εμάς θα είναι η QED λόγω της απλότητας της, ενώ έπειτα θα μιλήσουμε για τις μη αβελιανές θεωρίες και τελικά για το καθιερωμένο πρότυπο.

5.1 Διορθώνοντας τον νόμο του Coulomb

Ας δούμε τί συνεπάγεται η ανακανονικοποίηση για την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση δύο φερμιονίων μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου e που ανταλλάσσουν τετραορμή q .

Σε tree level η αλληλεπίδραση αυτή γίνεται μέσω του διαδότη:

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \quad (5.1)$$

ο οποίος, για ένα στατικό πρόβλημα όπου $q^0 = 0$, περιέχει το μετασχηματισμό Fourier του ηλεκτροστατικού δυναμικού για δύο φορτία e :¹

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int d^3x V(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) = \frac{e^2}{|\mathbf{q}|^2} \quad (5.2)$$

Σε 1-loop πρέπει να προσθέσουμε στον διαδότη την συνεισφορά του vacuum polarisation και του counterterm, την οποία συμβολίζουμε με $\bar{\Pi}^{\mu\nu}(q)$:

$$\begin{aligned} & \frac{-ig^{\mu\sigma}}{q^2} i\bar{\Pi}_{\sigma\rho}(q) \frac{-ig^{\rho\nu}}{q^2} = \\ & = -\frac{1}{q^4} \left[\frac{ie^2}{2\pi^2} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \left(\frac{1}{3\epsilon} + \int_0^1 dx (1-x)x \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 - q^2 x(1-x)} \right) + \right. \\ & \left. + i\delta_3 (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \right] \quad (5.3) \end{aligned}$$

όπως γνωρίζουμε από τις (3.54) και (3.92). Εδώ λάβαμε υπ' όψη και τις φωτονικές γραμμές εκατέρωθεν του loop και του counterterm vertex, τις οποίες είχαμε αγνοήσει στα προηγούμενα κεφάλαια επειδή δεν παίζουν ρόλο στους απειρισμούς.

Για να είμαστε συμβατοί με τον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό πρέπει τώρα να επιλέξουμε on-shell subtraction scheme, το οποίο απαιτεί, στο όριο των μεγάλων αποστάσεων (δηλ. των μικρών ορμών), η HM αλληλεπίδραση να έχει την tree-level μορφή. Αυτό σημαίνει πως απαιτούμε:

$$i\bar{\Pi}^{\mu\nu}(q^2 \rightarrow 0) = 0 \quad (5.4)$$

δηλαδή:

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2} \quad (5.5)$$

¹Η εξαγωγή αυτής της έκφρασης για το δυναμικό γίνεται με μετασχηματισμό Fourier και κατά παράγοντες ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler-Lagrange του HM πεδίου.

Και συνεπώς:

$$i\bar{\Pi}^{\mu\nu}(q) = \frac{ie^2}{2\pi^2}(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2) \int_0^1 dx(1-x)x \log \frac{m^2}{m^2 - q^2x(1-x)} \quad (5.6)$$

Οπότε προσθέτοντας τις (5.1) και (5.3), με τη βοήθεια της (5.6), βρίσκουμε τον “διορθωμένο” διαδότη:

$$G_{(1)}^{\mu\nu}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx(1-x)x \log \frac{m^2}{m^2 - q^2x(1-x)} \right] + q^\mu q^\nu \text{ term} \quad (5.7)$$

Θα αγνοήσουμε τον όρο με το $q^\mu q^\nu$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι με τον διορθωμένο διαδότη (5.7) διορθώνεται και το δυναμικό (5.2):

$$\tilde{V}'(q) = \frac{e^2}{|q|^2} \left[1 - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx(1-x)x \log \frac{m^2}{m^2 + |q|^2x(1-x)} \right] \quad (5.8)$$

και πράγματι η έκφραση αυτή υποστηρίζεται από τις πειραματικές μετρήσεις. Για παράδειγμα, στο όριο $|q|^2 \ll m^2$ ο τύπος (5.8) επιβεβαιώνεται από ένα φαινόμενο που λέγεται **Lamb shift**¹.

Μας ενδιαφέρει όμως να δούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την περίπτωση όπου $-q^2 \gg m^2$. Στην εφαρμογή της αλληλεπίδρασης των δύο φερμιονίων που μελετάμε ισχύει $-q^2 > 0$, όπως μπορεί κανείς εύκολα να δείξει θεωρώντας διατήρηση του τετραγώνου της τετραορμής σε μία από τις κορυφές on-shell φερμιονίων-φωτονίου.

Στο όριο $-q^2 \gg m^2$ η (5.7) γίνεται:

$$\begin{aligned} iG_{(1)}^{\mu\nu}(q) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left[1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx(1-x)x \log \left(1 + \frac{-q^2}{m^2}x(1-x) \right) \right] \\ &\simeq \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left[1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \log \frac{-q^2}{m^2} \int_0^1 dx(1-x)x \right] \\ &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{-q^2}{m^2} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να ξανακοιτάξουμε την (5.8) και συγκρίνοντας με την (5.2) να δώσουμε την εξής ερμηνεία: Η ποσότητα

$$e^2 \left[1 - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx(1-x)x \log \frac{m^2}{m^2 + |q|^2x(1-x)} \right]$$

είναι ένα είδος **effective** φορτίου (στο τετράγωνο), το οποίο εξαρτάται από την ορμή q που ανταλλάσσεται κατά την αλληλεπίδραση. Αυτό το effective φορτίο δεν είναι απλώς μία συντομογραφία. Είναι η “ισχύς” με την οποία **στην πραγματικότητα** αλληλεπιδρούν τα φορτισμένα σωματίδια. Αν δεν υπήρχε το vacuum polarisation τότε αυτή η ισχύς θα ήταν πάντοτε η ίδια και ίση με την σταθερά σύζευξης e της QED.

Συνεπώς, το αποτέλεσμα (5.9) (που δεν ξεχνάμε ότι αφορά την περιοχή $-q^2 \gg m^2$) οδηγεί στον εξής ορισμό effective φορτίου:

$$e_{\text{eff}}^2(|q^2|) = e^2 \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{-q^2}{m^2} \right] \quad (5.10)$$

Αυτό το effective φορτίο είναι μια προσέγγιση της σταθεράς σύζευξης που “αισθάνεται” το ένα φορτισμένο σωματίδιο λόγω της ύπαρξης του άλλου. Προσέγγιση, γιατί εμείς θεωρήσαμε πως στην αλληλεπίδραση συνεισφέρουν μόνο τα διαγράμματα:

$$iG_{(1)}^{\mu\nu}(q) = \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \quad (5.11)$$

¹Βλ. παραγράφους 7.3 και 7.4 του [10].

όπου το δεύτερο διάγραμμα αντιστοιχεί στο $i\bar{\Pi}^{\mu\nu}$, που είναι η πλήρης (complete) ορι συνεισφορά σε 1-loop επίπεδο. Όμως, χωρίς να ξεφύγουμε από το 1-loop επίπεδο, θα μπορούσαμε κάλλιστα να συμπεριλάβουμε συνεισφορές διαγραμμάτων με n το πλήθος τέτοια C κυκλάκια :

$$iG_{(n)}^{\mu\nu}(q) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \quad (5.12)$$

Δηλαδή, με αριθμούς:

$$iG_{(n)}^{\mu\nu}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{-q^2}{m^2} \right)^k \quad (5.13)$$

Αν θεωρήσουμε όριο $n \rightarrow \infty$ και αν η ποσότητα εντός παρένθεσης είναι μικρότερη της μονάδας (είναι σίγουρα θετική αφού $-q^2 \gg m^2$) τότε η σειρά συγκλίνει:

$$iG_{(\infty)}^{\mu\nu}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{-q^2}{m^2} \right)^{-1} \quad (5.14)$$

και φυσικά πλέον η effective σταθερά σύζευξης γίνεται:

$$e_{\text{eff}}^2(|q^2|) = e^2 \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{-q^2}{m^2} \right)^{-1} \quad (5.15)$$

Θα λέγαμε ότι αυτή η σχέση είναι ό,τι πιο ακριβές μπορούμε να πούμε για το e_{eff} σε 1-loop επίπεδο. Όμως υπάρχει ένα πρόβλημα, αρκετά σημαντικό: Όπως είπαμε, η σειρά της (5.13) συγκλίνει μόνο εάν η ποσότητα εντός παρένθεσης είναι μικρότερη της μονάδας. Δεδομένου όμως πως είμαστε στην περιοχή $-q^2 \gg m^2$, είναι πιθανόν να γίνει ο λογάριθμος τόσο μεγάλος ώστε να ξεπεραστεί η μονάδα, παρόλο που το e^2 είναι μικρό.

Μία λύση που θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί για το πρόβλημα αυτό είναι να αλλάξει subtraction scheme. Ας το κάνουμε αυτό πηγαίνοντας πίσω στην (5.3) και επιβάλλοντας την εξής renormalisation condition:

$$i\bar{\Pi}^{\mu\nu}(-q^2 \rightarrow Q^2) = 0 \quad (5.16)$$

η οποία επιτυγχάνεται αν θέσουμε:

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx (1-x)x \log \frac{\tilde{\mu}^2}{m^2 + Q^2 x(1-x)} \quad (5.17)$$

όπου $Q^2 \gg m^2$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} i\bar{\Pi}^{\mu\nu}(q) &= \frac{ie^2}{2\pi^2} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \int_0^1 dx (1-x)x \log \frac{m^2 + Q^2 x(1-x)}{m^2 - q^2 x(1-x)} \\ &\simeq \frac{ie^2}{12\pi^2} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \log \frac{Q^2}{-q^2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Αν ακολουθήσουμε την διαδικασία της γεωμετρικής σειράς θα βρούμε:

$$e_{\text{eff}}^2(|q^2|) = e^2 \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{-q^2}{Q^2} \right)^{-1} \quad (5.19)$$

Βλέπουμε πως εδώ δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης, καθώς μπορούμε να επιλέγουμε το subtraction point Q^2 οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε, ώστε να κρατήσουμε τον λογάριθμο αρκούντως μικρό.

Δεν μπορούμε όμως ούτε τώρα να ισχυριστούμε πως τελειώσαμε με το ζήτημα του υπολογισμού της effective σταθεράς σύζευξης, και ο λόγος είναι ο εξής: Η θεωρία

διαταραχών αφορά την τάξη του κάθε διαγράμματος ως προς e , και όχι τον αριθμό ή το είδος των loops που κάθε διάγραμμα περιέχει. Έτσι λοιπόν, όταν κατασκευάζει κανείς το $iG_{(n)}^{\mu\nu}(q)$ περιμένει ότι για κάθε $k \leq n$ το αντίστοιχο διάγραμμα (το οποίο θα έχει k το πλήθος 1-loop ορι κυκλάκια) θα αντιπροσωπεύει την κύρια συνεισφορά σε τάξη e^{2k} . Αυτό όμως δεν είναι κάτι που εμφανώς ισχύει. Για παράδειγμα, για $k = 2$, δεν είμαστε εκ των προτέρων σίγουροι ότι το διάγραμμα με ένα 2-loop ορι κυκλάκι συνεισφέρει λιγότερο από το διάγραμμα με τα δύο 1-loop ορι κυκλάκια, το οποίο έχουμε προσμετρήσει.

Αν λοιπόν δεν αποδείξουμε ότι οι 1-loop ορι συνεισφορές είναι για κάθε τάξη ως προς e ισχυρότερες από τις 2-loop, 3-loop κλπ. ορι, τότε η κομψή μας κατασκευή είναι σαθρή. Αλλά υπάρχει μία εξίσου κομψή μέθοδος για να παρακάμψουμε το εμπόδιο αυτό.

5.2 Η εξίσωση RGE

Η προαναφερθείσα μέθοδος προκύπτει μέσω ενός φυσικού επιχειρήματος το οποίο φαντάζει άσχετο, τουλάχιστον εκ πρώτης όψεως. Το επιχείρημα είναι ότι τα παρατηρούμενα μεγέθη δεν μπορεί να εξαρτώνται από καμία ποσότητα που εμείς έχουμε αυθαίρετα εισαγάγει για να πραγματοποιήσουμε την ομαλοποίηση ή την ανακανονικοποίηση.

Τέτοιες αυθαίρετες ποσότητες είναι το μ της dimensional regularisation ή τα διάφορα subtraction points που χρησιμοποιούμε για να κάνουμε ανακανονικοποίηση.

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής: Η ανακανονικοποίηση με dimensional regularisation δεν έχει ανάγκη από subtraction points. Εντάξει, φυσικά μπορεί κάποιος να διαλέξει κάποιο subtraction point αν θέλει, όπως πχ. στις σχέσεις (5.4) και (5.16), αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο- και δεν είναι απαραίτητο ακριβώς χάρη στην ύπαρξη του μ , το οποίο υπό μία έννοια παίζει τον ρόλο του subtraction point, όπως είχαμε δει και κάτω από την (3.117).

Συνεπώς, η ανακανονικοποίηση με την χρήση της dimensional regularisation ως μεθόδου ομαλοποίησης μας διευκολύνει πολύ στην υλοποίηση του φυσικού επιχειρήματος της ανεξαρτησίας των παρατηρήσιμων μεγεθών από αυθαίρετες ποσότητες: Καλούμαστε απλώς να απαιτήσουμε ανεξαρτησία των παρατηρήσιμων μεγεθών από το μ .

Ένα κατάλληλο παρατηρήσιμο μέγεθος είναι η ενεργός διατομή μιας διαδικασίας, όπως η σκέδαση (δηλ. η αλληλεπίδραση) των δύο φορτισμένων σωματιδίων της παραγράφου 4.1. Μάλιστα, ίσως είναι βολικό να θεωρήσουμε τον λόγο της 1-loop πρόβλεψης για την ενεργό διατομή (σ) προς την tree-level ενεργό διατομή (σ_{tree}). Ο λόγος αυτός είναι αδιάστατος, ενώ η εξάρτηση από το μ αφορά μόνο τον αριθμητή. Ορίζουμε λοιπόν:

$$S = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{tree}}} \quad (5.20)$$

Από τι εξαρτάται όμως το S ; Κατ' αρχάς, για να απλοποιήσουμε τα πράγματα υποθέτουμε και πάλι πως η μάζα m είναι αμελητέα, δηλαδή πως $-q^2 \gg m$. Οπότε το (αδιάστατο) S μπορεί να εξαρτάται μόνον από τον αδιάστατο λόγο $-q^2/\mu^2$ και από την επίσης αδιάστατη σταθερά σύζευξης e . Ακόμη, αντί για e θα γράψουμε e_μ , ώστε να τονίσουμε την εξάρτησή του από το μ .¹ Συνεπώς:

$$S = S\left(\frac{-q^2}{\mu^2}, e_\mu\right) \quad (5.21)$$

¹Τονίζουμε ότι λόγω της σχέσης:

$$e = \frac{1}{Z_e} e_0 \mu^{n/2-2}$$

και αντίστοιχα για την (4.93), το e εξαρτάται πάντοτε από το μ , όποιο και αν είναι το subtraction scheme που χρησιμοποιείται. Περισσότερα για το μ και τον ρόλο του υπάρχουν στις παραγράφους II και VI του [5].

Είθισται να χρησιμοποιείται στην θέση της σταθεράς σύζευξης το $a_\mu = e_\mu^2/4\pi$, που στην περίπτωση της QED είναι η σταθερά λεπτής υφής.

Απαιτούμε τώρα ανεξαρτησία του S από το μ^2 :

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} S\left(\frac{-q^2}{\mu^2}, a_\mu\right) &= 0 \Rightarrow \\ \left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{da_\mu}{d\mu^2} \frac{\partial}{\partial a_\mu} \right] S\left(\frac{-q^2}{\mu^2}, a_\mu\right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Η (5.22), όπως και κάθε άλλη εξίσωση που υλοποιεί αυτό το φυσικό επιχείρημα, είναι γνωστή ως **Renormalisation Group Equation** (RGE).

Έπειτα ορίζουμε $t = \log(-q^2/\mu^2)$, οπότε:

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \quad (5.23)$$

και επίσης ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$B(a_\mu) = \mu^2 \frac{da_\mu}{d\mu^2} \quad \text{και} \quad \beta(e_\mu) = \mu \frac{de_\mu}{d\mu} \quad (5.24)$$

εκ των οποίων η δεύτερη είναι γνωστή ως **beta function**. Οι B και β συνδέονται ως εξής:

$$\begin{aligned} B(a_\mu) &= \mu^2 \frac{da_\mu}{d\mu^2} = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \frac{e_\mu^2}{4\pi} = \frac{\mu^2}{4\pi} \frac{de_\mu^2}{de_\mu} \frac{de_\mu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\mu^2} = \\ &= \frac{e_\mu}{4\pi} \beta(e_\mu) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Οπότε η (5.22) γίνεται:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + B(a_\mu) \frac{\partial}{\partial a_\mu} \right] S(e^t, a_\mu) = 0 \quad (5.26)$$

Προκειμένου να δικαιολογήσουμε λίγο τους χειρισμούς που πρόκειται να κάνουμε επάνω στην (5.26), ας δούμε πώς μπορούμε να χειριστούμε μια άλλη, συναφή εξίσωση που αφορά ένα πολύ πιο χειροπιαστό ζήτημα.

5.2.1 Ο σωλήνας, το νερό και το μελάνι

Έστω¹ ένας ευθύγραμμος σωλήνας στην διεύθυνση x , ο οποίος διαρρέεται από νερό. Το νερό ρέει με ταχύτητα $v(x)$, που εξαρτάται μόνο από την θέση x . Έστω ότι μέσα στον σωλήνα με το νερό έχουμε ρίξει μία ποσότητα από μελάνι. Το μελάνι θα παρασυρθεί από το νερό και, αν αρχικά η πυκνότητά του μέσα στον σωλήνα είναι $Q(x, t=0)$, τότε μετά από παρέλευση χρόνου t η πυκνότητά του θα είναι $Q(x, t)$.

Η κίνηση της ποσότητας μελανιού μέσα στον σωλήνα με το νερό δεν επηρεάζεται από κανέναν εξωτερικό παράγοντα, παρά μόνο από την ίδια τη ροή του νερού: δηλαδή από το πεδίο ταχύτητας $v(x)$. Συνεπώς, το μελάνι κινείται σαν ασυμπιεστο ρευστό και άρα η material derivative² της πυκνότητάς του μηδενίζεται:

$$\frac{D}{Dt} Q(x, t) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right] Q(x, t) = 0 \quad (5.27)$$

δηλαδή:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] Q(x, t) = 0 \quad (5.28)$$

¹Το παράδειγμα, σε ελαφρώς πιο περίπλοκη μορφή, υπάρχει στο [17].

²Είναι η παράγωγος που "ακολουθεί" τη ροή.

Ένα τέχνασμα για να λύσουμε αυτή την εξίσωση είναι να βρούμε έναν τρόπο να εκφράσουμε μαθηματικά αυτό που ήδη είπαμε: ότι δηλαδή η πυκνότητα $Q(x, t)$ εξαρτάται μόνον από τη ροή του νερού.

Αν η ταχύτητα $v(x)$ ήταν παντού η ίδια και ίση με v , τότε προφανώς:

$$Q(x, t) = Q(x - vt, 0) = Q(\bar{x}(x, t), 0) \quad (5.29)$$

Δηλαδή χρονική εξέλιξη του Q μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του $\bar{x}(x, t)$, το οποίο είναι η θέση την χρονική στιγμή 0 μιας στοιχειώδους μάζας νερού που την χρονική στιγμή t βρίσκεται στην θέση x .

Στη γενική περίπτωση που η $v(x)$ δεν είναι παντού η ίδια, η έκφραση για το \bar{x} θα είναι πιο περίπλοκη. Ωστόσο εκείνο πάντοτε ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(x, t) = -v(\bar{x}) \Rightarrow -\frac{d\bar{x}}{v(\bar{x})} = dt \quad (5.30)$$

την οποία μπορούμε να ολοκληρώσουμε, παρατηρώντας πως $\bar{x}(x, 0) = x$. Οπότε:

$$-\int_x^{\bar{x}} \frac{dx'}{v(x')} = \int_0^t dt' \quad (5.31)$$

και έτσι μπορούμε να βρούμε το αποτέλεσμα για το $\bar{x}(x, t)$ και συνεπώς για την πυκνότητα μελανιού $Q(x, t)$, η οποία θα δίνεται από τον τύπο:¹

$$Q(x, t) = Q(\bar{x}(x, t), 0) \quad (5.32)$$

5.2.2 Η τρέχουσα σταθερά σύζευξης

Η ομοιότητα της (5.28) με την (5.26) μας οδηγεί στο να ορίσουμε μία ποσότητα $\bar{a}(a_\mu, t)$, ώστε:

$$\frac{d}{dt}\bar{a} = B(\bar{a}) \Rightarrow \frac{d\bar{a}}{B(\bar{a})} = dt \quad (5.33)$$

Θυμόμαστε ότι $t = \log(-q^2/\mu^2)$ και θεωρούμε “αρχική” κατάσταση για $t = t_0 = 0$. Θα μπορούσαμε να διαλέξουμε μια άλλη αρχική κατάσταση, όμως αυτή είναι βολική καθώς για $t = 0$ ισχύει $-q^2 = \mu^2$. Έχουμε λοιπόν:

$$\bar{a}(a_\mu, 0) = a_\mu \quad (5.34)$$

Ολοκληρώνουμε λοιπόν την (5.33):

$$\begin{aligned} \int_{a_\mu}^{\bar{a}} \frac{da'}{B(a')} &= \int_0^t dt' \Rightarrow \\ \int_{a_\mu}^{\bar{a}} \frac{da'}{B(a')} &= t \end{aligned} \quad (5.35)$$

Παραγωγίζουμε την (5.35) κατά μέλη ως προς t και βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} \frac{1}{B(\bar{a})} = 1 \quad (5.36)$$

Τώρα παραγωγίζουμε την (5.35) κατά μέλη ως προς a_μ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{a}}{\partial a_\mu} \frac{1}{B(\bar{a})} - \frac{1}{B(a_\mu)} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \bar{a}}{\partial a_\mu} \frac{B(a_\mu)}{B(\bar{a})} &= 1 \end{aligned} \quad (5.37)$$

¹Η πλήρης απόδειξη βρίσκεται στην παράγραφο 5.2.2.

Εξισώνουμε τα αριστερά μέλη των (5.36) και (5.37) και βρίσκουμε:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + B(a_\mu) \frac{\partial}{\partial a_\mu} \right] \bar{a} = 0 \quad (5.38)$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι το $S(1, \bar{a})$ ικανοποιεί την (5.26):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \bar{a}} S(1, \bar{a}) \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + B(\bar{a}) \frac{\partial}{\partial \bar{a}} S(1, \bar{a}) \frac{\partial \bar{a}}{\partial a_\mu} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \bar{a}} S(1, \bar{a}) \left[-\frac{\partial}{\partial t} + B(a_\mu) \frac{\partial}{\partial a_\mu} \right] \bar{a} &= 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

πράγμα που ισχύει, λόγω της (5.38).

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να αντικαταστήσουμε τη γραφή $\bar{a}(a_\mu, t)$ από την γραφή $\bar{a}(t)$, αφού το a_μ αντιστοιχεί μονάχα στην αρχική κατάσταση, δηλαδή στην τιμή του \bar{a} για $t = 0$. Ή, για να γίνουμε ακόμη πιο αφαιρετικοί, μπορούμε να γράψουμε $\bar{a}(|q^2|)$, αφού μια αλλαγή στο μ^2 με σταθερό q^2 θα επηρεάσει τόσο την θέση t_0 της αρχικής κατάστασης, όσο όμως και το a_μ , ώστε τελικά να μην υπάρξει μεταβολή στο $\bar{a}(|q^2|)$.

Το συμπέρασμα που βγαίνει από την (5.39) είναι ότι:

$$S(e^t, a_\mu) = S(1, \bar{a}(|q^2|)) \quad (5.40)$$

ότι δηλαδή μπορούμε να εκφράσουμε την εξάρτηση που έχει το παρατηρήσιμο μέγεθος S από την ορμή q^2 μέσα από μία **τρέχουσα σταθερά σύζευξης** (running coupling constant) $\bar{a}(|q^2|)$.

Όμως δεν είναι μόνο αυτό. Η σχέση (5.40) μας λέει ακόμα το εξής: Όταν $-q^2 = \mu^2$, το παρατηρήσιμο μέγεθος S εξαρτάται από την ανακανονικοποιημένη σταθερά σύζευξης a_μ . Όταν όμως $-q^2 \neq \mu^2$ τότε το μέγεθος S δίνεται από ακριβώς τον ίδιο τύπο με πριν, μόνο που στη θέση του a_μ βρίσκεται πλέον το $\bar{a}(|q^2|)$. Μα, αυτός είναι ο ορισμός της **effective** σταθεράς σύζευξης, όπως αυτός δόθηκε στην παράγραφο 5.1 και την σχέση (5.19)!

Επομένως η εύρεση της τρέχουσας σταθεράς σύζευξης, εκτός από το ότι επιτρέπει την λύση της RGE, σημαίνει και την εύρεση της effective σταθεράς σύζευξης. Και μάλιστα, παρακάμπτοντας τελείως ιδιότροπα αθροίσματα όπως το (5.13).

Η τρέχουσα σταθερά σύζευξης μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση (5.35)- και μπορεί να υπολογιστεί για οποιαδήποτε θεωρία. Άλλωστε, δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της QED στις πράξεις μας. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της $B(a_\mu)$, ή της $\beta(g_\mu)$, για κάθε θεωρία- και αυτό είναι που θα κάνουμε στη συνέχεια.

Πριν όμως προχωρήσουμε σε αυτό, είναι ίσως χρήσιμο να αναφέρουμε ότι η RGE που παρουσιάσαμε δεν είναι ούτε η σύγχρονη, ούτε όμως και η πιο πλήρης εκδοχή. Ο πιο συνήθης τρόπος κατασκευής μιας RGE περιλαμβάνει τις correlation functions (ή Green's functions), οι οποίες (για την QED) ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} G^{m,n}(x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) = \\ \langle \Omega | T \left[\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \dots \bar{\psi}(x_m) A^{\mu_1}(x_{m+1}) \dots A^{\mu_n}(x_{m+n}) \right] | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (5.41)$$

όπου $|\Omega\rangle$ το κενό της θεωρίας. Λόγω του αριθμού των πεδίων που περιέχουν, οι Green's functions ανακανονικοποιούνται ως εξής:

$$G^{m,n} = Z_2^{-m/2} Z_3^{-n/2} G_0^{m,n} \quad (5.42)$$

Οπότε μπορεί κανείς να βρει μια RGE γράφοντας την προφανή σχέση:

$$\mu \frac{d}{d\mu} G_0^{m,n} = 0 \quad (5.43)$$

και έπειτα αντικαθιστώντας το $G_0^{m,n}$ από την (5.42). Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις ορι **Green's functions**¹, οι οποίες ανακανονικοποιούνται ως εξής:

$$\Gamma^{m,n} = Z_2^{m/2} Z_3^{n/2} \Gamma_0^{m,n} \quad (5.44)$$

και έπειτα μπορεί να κατασκευάσει κανείς μια RGE, με τον τρόπο της (5.43).

Οι RGE που προκύπτουν με αυτές τις μεθόδους έχουν πλουσιότερο φυσικό περιεχόμενο από την δική μας, όπως μπορεί κανείς να δει διαβάζοντας το [5]. Όμως δικός μας στόχος δεν είναι η μελέτη της RGE, αλλά των running couplings: χρησιμοποιήσαμε την RGE μόνο για να δικαιολογήσουμε την αντιστοίχιση μεταξύ running couplings και effective couplings.

5.3 Υπολογίζοντας beta functions

5.3.1 Η beta function της QED

Ένας σύντομος τρόπος να υπολογίσει κανείς την beta function της QED είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} e_0 &= 0 \Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \left(\mu^{(4-n)/2} Z_e e \right) \Rightarrow \\ \left(\mu \frac{d}{d\mu} e \right) \mu^{(4-n)/2} Z_e + \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_e \right) \mu^{(4-n)/2} e + \left(\mu \frac{d}{d\mu} \mu^{(4-n)/2} \right) Z_e e &= 0 \Rightarrow \\ \beta(e) \mu^{(4-n)/2} Z_e + \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_e \right) \mu^{(4-n)/2} e + \frac{4-n}{2} \mu^{(4-n)/2} Z_e e &= 0 \Rightarrow \\ \beta(e) Z_e + \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_e \right) e + \frac{4-n}{2} Z_e e &= 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Θέτουμε $\epsilon = 4 - n$ και θυμόμαστε ότι, λόγω της (3.11), ισχύει:

$$Z_e = \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \quad (5.46)$$

Συνεπώς:

$$\beta(e) \frac{1}{\sqrt{Z_3}} + \left(\mu \frac{d}{d\mu} \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \right) e + \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{Z_3}} e = 0 \quad (5.47)$$

Λόγω Taylor έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{Z_3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_3}} = 1 - \frac{1}{2} \delta_3 + \mathcal{O}(\delta_3^2) \quad (5.48)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \beta(e) \left(1 - \frac{1}{2} \delta_3 \right) - \frac{1}{2} e \mu \frac{d}{d\mu} \delta_3 + \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_3 \right) e &= 0 \Rightarrow \\ \beta(e) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \delta_3 \right) e \mu \frac{d}{d\mu} \delta_3 + \frac{\epsilon}{2} e &= 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Διώχνοντας και τον τελευταίο τάξης δ_3^2 όρο που επιβίωσε, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \beta(e) &= -\frac{\epsilon}{2} e + \frac{1}{2} e \mu \frac{d}{d\mu} \delta_3 \Rightarrow \\ \beta(e) &= -\frac{\epsilon}{2} e + \frac{1}{2} e \mu \frac{de}{d\mu} \frac{d}{de} \delta_3 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Όμως το δ_3 είναι επισήμως ένα διαταρακτικό ανάπτυγμα ως προς e - γι' αυτό άλλωστε διώξαμε τους τάξης δ_3^2 όρους. Οπότε η τάξη ως προς e της beta function εξαρτάται

¹Βλ. παράγραφο 6-2-2 του [13] για τον ορισμό τους.

από την τάξη μέχρι την οποία έχουμε ανακανονικοποιήσει. Γνωρίζουμε ότι η 1-loop τιμή για το δ_3 είναι ανάλογη με e^2 , συνεπώς:

$$\begin{aligned}\beta(e) &= -\frac{\epsilon}{2}e + \beta(e)\delta_3 \Rightarrow \\ \beta(e)(1 - \delta_3) &= -\frac{\epsilon}{2}e \Rightarrow \\ \beta(e) &= -\frac{\epsilon}{2}e(1 + \delta_3) + \mathcal{O}(\delta_3^2)\end{aligned}\quad (5.51)$$

Αντικαθιστούμε την 1-loop τιμή για το δ_3 :

$$\beta(e) = -\frac{\epsilon}{2}e + \frac{e^3}{12\pi^2}\quad (5.52)$$

Δηλαδή, στις 4 διαστάσεις όπου $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\beta_{\text{QED}}(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}\quad (5.53)$$

5.3.2 Η beta function της $SU(N)$ συμμετρικής θεωρίας

Θα εφαρμόσουμε την ίδια τεχνική με την QED. Η $SU(N)$ συμμετρική μας θεωρία περιέχει ένα φερμιόνιο και άμαξα gauge bosons, καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί σε ένα πεδίο βαθμίδας. Απαιτούμε λοιπόν:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_0 = 0\quad (5.54)$$

πράγμα που, λόγω των (4.93) και (4.95) σημαίνει:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \left[\mu^{2-n/2} g \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} \right] = 0\quad (5.55)$$

Τώρα είναι εμφανής ο λόγος που δεν κάναμε πλήρη 1-loop ανακανονικοποίηση της $SU(N)$ θεωρίας: Ανακανονικοποιήσαμε τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό ποσοτήτων για τον υπολογισμό της beta function. Θα μπορούσαμε να πετύχουμε το ίδιο ανακανονικοποιώντας τα ghost πεδία, αντί για τα φερμιόνια και υπολογίζοντας την 2 ghost-πεδίο βαθμίδας vertex correction, αντί αυτής που υπολογίσαμε.

Πίσω στην (5.55):

$$\begin{aligned}\left(\mu \frac{d}{d\mu} g \right) \mu^{2-n/2} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} + \frac{4-n}{2} \mu^{2-n/2} g \frac{z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} + g \mu^{2-n/2} \mu \frac{d}{d\mu} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} &= 0 \Rightarrow \\ \beta(g) \mu^{\epsilon/2} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} + \frac{\epsilon}{2} \mu^{\epsilon/2} g \frac{z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} + g \mu^{\epsilon/2} \mu \frac{d}{d\mu} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} &= 0 \Rightarrow \\ \beta(g) + \frac{\epsilon}{2} g + g \frac{Z_2 \sqrt{Z_3}}{Z_1} \mu \frac{d}{d\mu} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} &= 0\end{aligned}\quad (5.56)$$

Σε $\mathcal{O}(\delta)$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\frac{Z_2 \sqrt{Z_3}}{Z_1} \mu \frac{d}{d\mu} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} &= (1 + \delta_2)(1 - \delta_1) \left(1 + \frac{\delta_3}{2} \right) \mu \frac{d}{d\mu} \left[(1 + \delta_2)(1 - \delta_1) \left(1 + \frac{\delta_3}{2} \right) \right] \\ &= \left(1 + \delta_2 - \delta_1 - \frac{\delta_3}{2} \right) \mu \frac{d}{d\mu} \left(\delta_1 - \delta_2 - \frac{\delta_3}{2} \right) \\ &= \left(1 + \delta_2 - \delta_1 - \frac{\delta_3}{2} \right) \frac{2\beta(g)}{g} \left(\delta_1 - \delta_2 - \frac{\delta_3}{2} \right) \\ &= \frac{2\beta(g)}{g} \left(\delta_1 - \delta_2 - \frac{\delta_3}{2} \right)\end{aligned}\quad (5.57)$$

Οπότε η (5.56) γίνεται:

$$\begin{aligned}\beta(g) + \frac{\epsilon}{2}g + 2\beta(g)\left(\delta_1 - \delta_2 - \frac{\delta_3}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\ \beta(g)\left(1 + 2\delta_1 - 2\delta_2 - \delta_3\right) &= -\frac{\epsilon}{2}g \Rightarrow \\ \beta(g) &= -\frac{\epsilon}{2}g - \epsilon g\left(-\delta_1 + \delta_2 + \frac{\delta_3}{2}\right) + \mathcal{O}(\delta^2)\end{aligned}\quad (5.58)$$

Αντικαθιστούμε τις 1-loop τιμές για τα δ από τις (4.102)-(4.104) και βρίσκουμε:

$$\beta(g) = -\frac{\epsilon}{2}g - \frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(\text{adj}) - \frac{4}{3}T(\text{fund})\right)\quad (5.59)$$

Τέλος, παίρνουμε όριο $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\beta_{SU(N)}(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(\text{adj}) - \frac{4}{3}T(\text{fund})\right)\quad (5.60)$$

Παρατηρούμε ότι εάν στην (5.60) θέσουμε $C_2(\text{adj}) = 0$ και $T(\text{fund}) = 1$ τότε παίρνουμε την beta function της QED. Αυτό είναι λογικό: οι μετασχηματισμοί βαθμίδας κάτω από τους οποίους είναι αναλλοίωτη η QED αποτελούν την ομάδα $U(1)$. Η ομάδα $U(1)$ είναι αβελιανή και μπορεί να ιδωθεί ως τετρωμμένη περίπτωση $SU(N)$ ομάδας, όπου:

(α) Οι σταθερές δομής είναι μηδέν, συνεπώς η συζυγής αναπαράσταση είναι τετρωμμένη και λόγω της σχέσης (4.43) θα έχουμε:

$$C_2(\text{adj}) = 0$$

(β) Ο μοναδικός γεννήτορας είναι το κλάσμα του φορτίου q του εκάστοτε πεδίου προς το φορτίο e του ηλεκτρονίου. Αυτό φαίνεται από τις (4.17), (4.19) και (4.20), όπου αν $T_i = q/e$, $g = e$ και $f^{ijk} = 0$ τότε λαμβάνουμε τους μετασχηματισμούς βαθμίδας της QED.

Φυσικά, το γεγονός ότι $T_i = q/e$ συνεπάγεται, λόγω της (4.45), ότι:

$$T(\text{fund}, U(1)) = \left(\frac{q}{e}\right)^2 = \left(\frac{e}{e}\right)^2 = 1\quad (5.61)$$

6 Οι τρέχουσες σταθερές σύζευξης του Standard Model

6.1 Εισαγωγικά

Το καθιερωμένο πρότυπο (Standard Model- ή απλά SM) περιλαμβάνει την ισχυρή και τις ηλεκτροασθενείς αλληλεπιδράσεις. Η ισχυρή αλληλεπίδραση περιγράφεται από μια $SU(3)$ συμμετρική Λαγκρανζιανή, ενώ οι ηλεκτροασθενείς από μια $SU(2) \times U(1)$ συμμετρική Λαγκρανζιανή. Καθεμιά από αυτές τις ομάδες συμμετρίας αντιστοιχεί και σε μια σταθερά σύζευξης: Η $SU(3)_C$ (του χρώματος) αντιστοιχεί στην g_3 των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, η $SU(2)_L$ (του ασθενούς ισοσπίν) αντιστοιχεί στην g_2 και η $U(1)_Y$ (του ασθενούς υπερφορτίου) αντιστοιχεί στην g_1 . Οι δύο τελευταίες συνδέονται με την ηλεκτρομαγνητική σταθερά σύζευξης μέσω της **weak mixing angle** θ_w :

$$g_2 \sin \theta_w = g_1 \cos \theta_w = e\quad (6.1)$$

Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την εξάρτηση που έχουν οι τρέχουσες σταθερές σύζευξης του SM από την ενέργεια, για ενέργειες πολύ μεγαλύτερες των 100 GeV. Σε αυτές τις ενέργειες δεν μας αφορά το σπάσιμο της $SU(2) \times U(1)$ συμμετρίας μέσω του μηχανισμού Higgs και συνεπώς τα λεπτόνια, τα quarks, αλλά και τα gauge bosons W^\pm , Z^0 είναι άμαζα.

Με βάση την beta function που βρήκαμε για την γενική $SU(N)$ θεωρία μπορούμε να βρούμε τις beta functions για τις τρεις σταθερές σύζευξης που περιέχει το SM. Εμφανίζονται όμως εδώ δύο νέα στοιχεία:

Πρώτον, έχουμε περισσότερα του ενός φερμόνια: 6 quarks, 3 λεπτόνια και τα 3 αντίστοιχα νετρίνα. Και δεν συμπεριφέρονται όλα αυτά τα σωματίδια με τον ίδιο τρόπο ως προς τις τρεις αλληλεπιδράσεις που μελετάμε (g_1 , g_2 και g_3).

Δεύτερον, υπάρχει το μποζόνιο Higgs, το οποίο αλληλεπιδρά με τα W^\pm και Z^0 , αλλά και με τα φερμόνια. Επομένως, αν σε 1-loop υπάρχει κάποια απειρία που να περιλαμβάνει το Higgs, τότε αυτή η απειρία θα συνεισφέρει σε κάποια beta function και θα πρέπει να την συνυπολογίσουμε.

6.2 Η Λαγκρανζιανή του Standard Model

Ας γράψουμε την $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ συμμετρική Λαγκρανζιανή που περιγράφει το SM. Ξεκινάμε από τους κινητικούς όρους των πεδίων βαθμίδας, δηλαδή των gauge bosons:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (6.2)$$

όπου ο πρώτος όρος αφορά τα γλούνια $SU(3)_C$, ο δεύτερος την $SU(2)_L$ και ο τρίτος την $U(1)_Y$. Δεν μας ενδιαφέρει να εμφανίσουμε τους γραμμικούς συνδυασμούς των W_a^μ και B^μ που δίνουν τα γνωστά μποζόνια A^μ , W_\pm^μ και Z_0^μ , οπότε θα αφήσουμε τα πεδία βαθμίδας ως έχουν.

Έπειτα έχουμε το κομμάτι που περιέχει τους κινητικούς όρους των φερμιονίων και την αλληλεπίδρασή τους με τα gauge bosons. Για απλότητα θα αναφερθούμε μόνο στην ελαφρύτερη από τις τρεις οικογένειες. Ξεκινάμε από τα λεπτόνια:

$$\mathcal{L}_{2a} = (\bar{\nu} \quad \bar{e})_L [i\mathcal{D}_{L,Y}] \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L + \bar{e}_R [i\mathcal{D}_Y] e_R \quad (6.3)$$

όπου \mathcal{D} η συναλλοίωτη παράγωγος που αφορά την ομάδα συμμετρίας που αναφέρεται στον δείκτη. Δηλαδή:

$$\mathcal{D}_Y = \partial - ig_1 Y \mathcal{B} \quad (6.4)$$

$$\mathcal{D}_{L,Y} = \partial - ig_2 W_a \left(\frac{1}{2}\tau^a\right) - ig_1 Y \mathcal{B} \quad (6.5)$$

Το Y είναι το ασθενές υπερφορτίο της κάθε singlet ή doublet. Είναι ταυτόχρονα ο (μοναδικός) γεννήτορας της $U(1)_Y$, κατά τον ίδιο τρόπο που το ηλεκτρικό φορτίο είναι ο γεννήτορας της $U(1)$ της QED. Το Y σχετίζεται με το ηλεκτρικό φορτίο και την τρίτη προβολή του ασθενούς ισospin ως εξής:

$$Y = Q - T_3 \quad (6.6)$$

όπου Q είναι ο λόγος του φορτίου του σωματιδίου προς το φορτίο του ηλεκτρονίου. Ακόμη, τ^a είναι οι τρεις πίνακες του Pauli.

Τώρα πηγαίνουμε στα quarks:

$$\mathcal{L}_{2b} = (\bar{u} \quad \bar{d})_L [i\mathcal{D}_{C,L,Y}] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \bar{u}_R [i\mathcal{D}_{C,Y}] u_R + \bar{d}_R [i\mathcal{D}_{C,Y}] d_R \quad (6.7)$$

Εδώ τα πράγματα περιπλέκονται λίγο, γιατί κάθε φερμιονικό πεδίο quark είναι μια χρωματική triplet. Για παράδειγμα:

$$u_L = \begin{pmatrix} u_R \\ u_G \\ u_B \end{pmatrix}_L \quad (6.8)$$

Γράφουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{C,L,Y} &= \not{\partial}\mathbb{I}_6 - ig_3 \mathcal{G}_a \left(\frac{1}{2}\lambda^a\right) \mathbb{I}_2 - \\
&- ig_2 W_a \left[\left(\frac{1}{2}\tau^a\right)_{11} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\tau^a\right)_{12} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I}_3 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{2}\tau^a\right)_{21} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{I}_3 & \mathbb{O} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\tau^a\right)_{22} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \right] - \\
&- ig_1 Y \not{B}\mathbb{I}_6
\end{aligned} \tag{6.9}$$

όπου λ^a οι οκτώ 3×3 πίνακες του Gell-Mann. Επίσης:

$$\mathcal{D}_{C,Y} = \not{\partial} - ig_3 \mathcal{G}_a \left(\frac{1}{2}\lambda^a\right) - ig_1 Y \not{B} \tag{6.10}$$

Έπειτα έχουμε το κομμάτι που αφορά την doublet ϕ του Higgs, που αποτελείται από δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

Η Λαγκρανζιανή του Higgs λοιπόν είναι:

$$\mathcal{L}_3 = (D_{L,Y}^\mu \phi)^\dagger D_\mu^{L,Y} \phi - V(\phi) \tag{6.12}$$

Το “δυναμικό” του Higgs $V(\phi)$ δεν μας αφορά.

Τέλος, μπορούμε να προσθέσουμε όρους αναλλοίωτους κάτω από μετασχηματισμούς $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Τέτοιος όρος είναι ο παρακάτω:

$$\mathcal{L}_{4a} = -G_e (\bar{\nu} \quad \bar{e})_L \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} e_R + \text{herm. conj.} \tag{6.13}$$

ή ο αντίστοιχος για τα quarks:

$$\mathcal{L}_{4b} = -G_d (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} d_R - G_u (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} -\phi_0^* \\ \phi_- \end{pmatrix} u_R + \text{herm. conj.} \tag{6.14}$$

Από αυτούς τους όρους προκύπτει η μάζα των φερμιονίων κατόπιν αυθόρμητου σπάσμου συμμετρίας.¹

Η (bare) Λαγκρανζιανή του SM θα (χωρίς σπάσιμο συμμετρίας) είναι τελικά:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{2a} + \mathcal{L}_{2b} + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_{4a} + \mathcal{L}_{4b} \tag{6.15}$$

6.3 Αποκλίνοντα διαγράμματα με Higgs

Όπως μπορούμε να δούμε από τις (6.12)-(6.14), το Higgs αλληλεπιδρά με τα gauge bosons των $U(1)_Y$ και $SU(2)_L$ μέσω της \mathcal{L}_3 και με τα φερμιόνια μέσω των \mathcal{L}_{4a} και \mathcal{L}_{4b} .

Αποδεικνύεται πως τελικά τα μόνα διαγράμματα με Higgs που συνεισφέρουν στις beta functions είναι διορθώσεις στα πεδία βαθμίδας της $U(1)_Y$ και της $SU(2)_L$.²

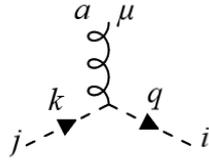
Οι όροι αλληλεπίδρασης που αφορούν τα gauge bosons της $SU(2)_L$ είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi\phi W} &= -ig_2 \left(\frac{1}{2}\tau_a\right) W_\mu^a \left[(\partial^\mu \phi)^\dagger \phi - \phi^\dagger (\partial^\mu \phi) \right] + \\
&+ i(g_2)^2 W_\mu^a W_\mu^b \left(\frac{1}{2}\tau_a\right) \left(\frac{1}{2}\tau_b\right) \phi^\dagger \phi
\end{aligned} \tag{6.16}$$

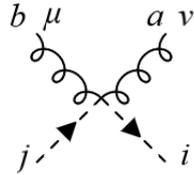
¹Για λεπτομέρειες επί αυτού βλ. [10] παρ. 15.4 .

²Αυτό έχει ενδιαφέρον, επειδή μπορεί κανείς να κατασκευάσει και vertex corrections ή self-energy graphs με Higgs. Αλλά τελικά, μόνο το vacuum polarisation με Higgs συνεισφέρει.

Και οι αντίστοιχοι κανόνες Feynman είναι:



$$= ig_2(k^\mu + q^\mu) \frac{1}{2} \tau_{ij}^a \quad (6.17)$$



$$= i(g_2)^2 \frac{1}{4} \{ \tau_{in}^a, \tau_{nj}^b \} g^{\mu\nu} \quad (6.18)$$

όπου η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στο Higgs.

Οπότε προκύπτουν τα εξής δύο απειριζόμενα διαγράμματα/διορθώσεις στο πεδίο W_a^μ :



Σχήμα 13

Αν p η ορμή του gauge boson και i, j οι $SU(2)_L$ δείκτες των άκρων του, τότε το άθροισμα των δύο παραπάνω διαγραμμάτων είναι:

$$i\Pi(p)_{\text{Higgs}}^{ij, \mu\nu} = \delta^{ij} \frac{i(g_2)^2}{16\pi^2} (p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2) \left[T(\text{fund}) \frac{2}{3\epsilon} + \text{UV finite} \right] \quad (6.19)$$

Όπου $T(\text{fund}) = 1/2$.

Μπορούμε τώρα να βρούμε το αποτέλεσμα για την διόρθωση λόγω Higgs στο $U(1)_Y$ gauge boson B^μ κάνοντας τις εξής αντικαταστάσεις στην (6.19):

$$\delta^{ij} \rightarrow 1 \quad g_2 \rightarrow g_1 \quad T(\text{fund}) \rightarrow Y_\phi^2 \quad (6.20)$$

όπου Y_ϕ το υπερφορτίο της doublet του Higgs¹. Στην $U(1)_Y$ περίπτωση θα πρέπει, επιπλέον, να πολλαπλασιάσουμε με το 2 τον πρώτο όρο της αγκύλης, διότι η $U(1)_Y$ δεν αναγνωρίζει μία Higgs doublet, αλλά δύο Higgs singlets: την ϕ_+ και την ϕ_0 , καθεμιά εκ των οποίων έχει υπερφορτίο Y_ϕ . Ας δούμε όμως την $U(1)$ σαν τετριμμένη περίπτωση $SU(N)$, ώστε να χειριστούμε και τις δύο ομάδες συμμετρίας ταυτόχρονα.

Το αποτέλεσμα (6.20) πρέπει να προστεθεί στην (4.75). Θα έχουμε λοιπόν τροποποίηση του δ_3 :

$$\delta'_3 = \frac{1}{\epsilon} \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{10}{3} C_2(\text{adj}) - \frac{8}{3} T(\text{fund}) - \frac{2}{3} T'(\text{fund}) n_i \right] \quad (6.21)$$

Ο τόνος στο T' μπήκε για να θυμόμαστε ότι ο όρος αυτός προέρχεται από την συνεισφορά του Higgs. Ακόμη $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ και φυσικά $n_3 = 0$ για την περίπτωση της

¹Βλ. και σχέση (5.61).

$SU(3)_C$.

Τελικά:

$$\beta(g_i) = -\frac{g_i^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} C_2(\text{adj}) - \frac{4}{3} T(\text{fund}) - \frac{1}{3} T'(\text{fund}) n_i \right) \quad (6.22)$$

6.4 Οι beta functions του Standard Model

Δεν θα ασχοληθούμε με την beta function της- τύπου Yukawa- σταθεράς σύζευξης μεταξύ φερμιονίων και Higgs. Θα ασχοληθούμε μόνο με τις g_1, g_2, g_3 .

Η ύπαρξη τριών αλληλεπιδράσεων είναι αιτία να ανησυχίσει κανείς. Και αν π.χ. στο vertex της $U(1)_Y$ αλληλεπιδράσης υπάρξει μία vertex correction $SU(2)_L$ αλληλεπιδράσης; Θα εμφανιστεί δηλαδή $g_1(g_2)^2$ όρος στην 1-loop beta function της $U(1)_Y$;

Ευτυχώς, σε 1-loop επίπεδο τέτοιες διασταυρώσεις μεταξύ των ομάδων συμμετρίας δεν υπάρχουν. Η απόδειξη είναι απλή:

Έστω ότι έχουμε μία κορυφή δύο φερμιονίων με ένα gauge boson μιας ομάδας G_1 , η οποία είναι $SU(N)$ και χαρακτηρίζεται από το coupling g_1 .

Κάνουμε vertex correction σε αυτήν την κορυφή χρησιμοποιώντας το gauge boson μιας άλλης $SU(N)$ ομάδας, της G_2 που έχει coupling g_2 . Το διάγραμμα που προκύπτει (εξαιρεθέντων των εξωτερικών γραμμών) έχει πλάτος:

$$\begin{aligned} & i\mu^{2-n/2} g_1 \gamma^\mu \left[T^n(G_2) \right]_{i_2 k_2} \left[T^m(G_1) \right]_{i_1 j_1} \left[T^m(G_2) \right]_{k_2 j_2} \frac{(g_2)^2}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + \text{UV finite} \\ & = i\mu^{2-n/2} g_1 \gamma^\mu C_2(\text{fund}, G_2) \delta_{i_2 j_2} \left[T^m(G_1) \right]_{i_1 j_1} \frac{(g_2)^2}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} + \text{UV finite} \end{aligned} \quad (6.23)$$

όπου $T(G_1)$ και $T(G_2)$ οι γεννιότερες των δύο ομάδων στην θεμελιώδη αναπαράσταση, i_1, j_1 οι εξωτερικοί φερμιονικοί δείκτες ως προς την G_1 , i_2, j_2 οι αντίστοιχοι ως προς την G_2 και m ο δείκτης του gauge boson ως προς την G_1 .¹

Η (4.99) μας διδάσκει ότι η (6.23) θα οδηγήσει στο να προστεθεί στο δ_1 ο όρος:

$$\xi_1 = -C_2(\text{fund}, G_2) \frac{(g_2)^2}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} \quad (6.24)$$

Αν τώρα υπολογίσουμε την συνεισφορά του gauge boson της G_2 στην self-energy του φερμιονίου, θα την βρούμε ίση με:

$$iC_2(\text{fund}, G_2) \delta_{i_2 j_2} \frac{(g_2)^2}{16\pi^2} \frac{2\not{p} - 8m}{\epsilon} + \text{UV finite} \quad (6.25)$$

Άρα, σύμφωνα με την (4.101), θα προστεθεί στο δ_2 ο όρος:

$$\xi_2 = -C_2(\text{fund}, G_2) \frac{(g_2)^2}{16\pi^2} \frac{2}{\epsilon} \quad (6.26)$$

Βλέπουμε πως $\xi_1 = \xi_2$. Και επειδή, όπως λέει η (5.58), στην beta function εμφανίζεται η διαφορά των δ_1 και δ_2 , τελικά δεν θα εμφανιστεί κανένας όρος με διασταύρωση των g_1 και g_2 .²

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των τριών beta function πρέπει να αλλάξουμε λίγο την γραφή της (6.22). Επειδή η $SU(2)_L$ και η $U(1)_Y$ μεταχειρίζονται διαφορετικά τις left handed από τις right handed συνιστώσες του φερμιονίου, πρέπει να γράψουμε:

$$\beta(g_i) = \frac{g_i^3}{16\pi^2} \left(\sum_{L,R} \frac{2}{3} T(\text{fund}) + \frac{1}{3} T'(\text{fund}) n_i - \frac{11}{3} C_2(\text{adj}) \right) \quad (6.27)$$

¹Οι δείκτες της μιας ομάδας δεν επηρεάζονται από μία κορυφή της άλλης ομάδας.

²Όπως διαβάζει κανείς στο [15], αν θέλαμε 2-loop beta functions τότε θα εμφανίζονταν και όροι με διασταυρώσεις των σταθερών σύζευξης.

Ο πρώτος όρος εντός παρενθέσεως προέρχεται από το φερμιόνιο που προκαλεί την διόρθωση φερμιονικού βρόχου¹ στο gauge boson που αφορά το εκάστοτε coupling g_i . Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει μοναδικό φερμιόνιο στην θεωρία μας (δηλαδή μοναδική doublet ή μοναδική triplet, αν πρόκειται αντίστοιχα για το g_2 ή το g_3).

Όμως η πραγματικότητα στο SM είναι ότι υπάρχουν πολλά φερμιόνια που μπορούν να συνεισφέρουν στο vacuum polarisation ενός gauge boson: αν μελετάμε π.χ. το g_3 τότε θα πρέπει να μετρήσουμε 6 φορές το (α) του σχήματος 11, καθώς υπάρχουν 6 γεύσεις quark.

Οπότε γενικά ο όρος των φερμιονίων θα πρέπει να αλλάξει:

$$\beta(g_i) = \frac{g_i^3}{16\pi^2} \left(3 \sum_{\text{1st gen}} \sum_{L,R} \frac{2}{3} T(\text{fund}) d(\text{rest}) + \frac{1}{3} T'(\text{fund}) n_i - \frac{11}{3} C_2(\text{adj}) \right) \quad (6.28)$$

Ο παράγοντας 3 αντιστοιχεί στις τρεις οικογένειες. Τον τοποθετούμε ώστε να ασχοληθούμε μόνο με την πρώτη οικογένεια.

Ο παράγοντας $d(\text{rest})$ δίνει την πολλαπλότητα της κάθε φερμιονικής συνεισφοράς ως προς τις δύο άλλες ομάδες συμμετρίας. Αν π.χ. υπολογίζουμε το $\beta(g_1)$ και βρισκόμαστε στην συνεισφορά του d_R , τότε αυτό έχει πολλαπλότητα 1 ως προς την $SU(2)_L$ και 3 ως προς την $SU(3)_C$, αφού κυκλοφορεί σε τρία χρώματα. Ενώ αν υπολογίζουμε το $\beta(g_2)$ και βρισκόμαστε στην συνεισφορά του $(u d)_L$, τότε αυτό έχει πολλαπλότητα 2 ως προς την $U(1)_Y$ και 3 ως προς την $SU(3)_C$, οπότε συνολικά 6.

Με τον παραπάνω τρόπο καταφέρνουμε να συμπεριλάβουμε όλα τα φερμιόνια που, μέσω του φερμιονικού βρόχου στα gauge bosons, επηρεάζουν τις beta functions.

Ξεκινάμε λοιπόν να υπολογίσουμε την $\beta(g_1)$, χρησιμοποιώντας την (6.28). Έχουμε:

$$C_2(\text{adj}) = 0, \quad T(\text{fund}) = Y^2 \quad \text{και} \quad n_1 = 2 \quad (6.29)$$

οπότε πρέπει να βρούμε τα υπερφορτία των φερμιονίων που συμμετέχουν, από την σχέση (6.6):

$$\begin{array}{lll} (u d)_L \rightarrow 1/6 & (\nu e)_L \rightarrow -1/2 & (\phi_+ \phi_0) \rightarrow 1/2 \\ u_R \rightarrow 2/3 & d_R \rightarrow -1/3 & e_R \rightarrow -1 \end{array}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \beta(g_1) &= \frac{g_1^3}{16\pi^2} \left[3 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6^2} 3 + \frac{1}{6^2} 3 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} 3 + \frac{1}{3^2} 3 + 1 \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{2^2} 2 \right] \Rightarrow \\ \beta(g_1) &= \frac{41}{6} \frac{g_1^3}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Προχωράμε στην $\beta(g_2)$. Εδώ τα πράγματα είναι πιο απλά, καθώς:

$$C_2(\text{adj}) = 2, \quad T(\text{fund}) = 1/2 \quad \text{και} \quad n_2 = 1 \quad (6.31)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \beta(g_2) &= \frac{g_2^3}{16\pi^2} \left[3 \frac{2}{3} \frac{1}{2} (3 + 1) + \frac{1}{3} \frac{1}{2} - \frac{11}{3} 2 \right] \Rightarrow \\ \beta(g_2) &= -\frac{19}{6} \frac{g_2^3}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Τέλος, έχουμε την $\beta(g_3)$. Εδώ ισχύουν τα εξής:

$$C_2(\text{adj}) = 3, \quad T(\text{fund}) = 1/2 \quad \text{και} \quad n_3 = 0 \quad (6.33)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \beta(g_3) &= \frac{g_3^3}{16\pi^2} \left[3 \frac{2}{3} \frac{1}{2} (2 + 1 + 1) - \frac{11}{3} 3 \right] \Rightarrow \\ \beta(g_3) &= -7 \frac{g_3^3}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (6.34)$$

¹Βλ. (α) του σχήματος 11

Συνεπώς, από την (5.25) θα έχουμε:

$$B(a_1) = \frac{41}{6} \frac{a_1^2}{4\pi}, \quad B(a_2) = -\frac{19}{6} \frac{a_2^2}{4\pi}, \quad B(a_3) = -7 \frac{a_3^2}{4\pi} \quad (6.35)$$

Και οι τρεις έχουν τη μορφή $B(a) = Aa^2$. Αν αντικαταστήσουμε αυτή τη μορφή στην (5.35) θα βρούμε:

$$\begin{aligned} \int_{a_\mu}^{\bar{a}} \frac{da}{Aa^2} = t &\Rightarrow \frac{1}{A} \left(\frac{1}{a_\mu} - \frac{1}{\bar{a}} \right) = t \Rightarrow \\ \frac{1}{A} (\bar{a} - a_\mu) = t \bar{a} a_\mu &\Rightarrow \bar{a} \left(\frac{1}{A} - t a_\mu \right) = \frac{1}{A} a_\mu \Rightarrow \\ \bar{a} &= \frac{a_\mu}{1 - a_\mu A t} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Αν αναπτύξουμε το t καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\bar{a}(|q^2|) = \frac{\bar{a}(\mu^2)}{1 - A\bar{a}(\mu^2) \log(|q^2|/\mu^2)} \quad (6.37)$$

Βλέπουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε την $B(a)$ της QED, όπου $A = 1/(3\pi)$, παίρνουμε ξανά την σχέση (5.19)!

Αντικαθιστούμε τώρα τα A για τις τρεις αλληλεπιδράσεις του SM, που βρήκαμε στην (6.35), και βρίσκουμε:

$$\bar{a}_1(|q|) = \frac{\bar{a}_1(\mu)}{1 - 41/(12\pi)\bar{a}_1(\mu) \log(|q|/\mu)} \quad (6.38)$$

$$\bar{a}_2(|q|) = \frac{\bar{a}_2(\mu)}{1 + 19/(12\pi)\bar{a}_2(\mu) \log(|q|/\mu)} \quad (6.39)$$

$$\bar{a}_3(|q|) = \frac{\bar{a}_3(\mu)}{1 + 7/(2\pi)\bar{a}_3(\mu) \log(|q|/\mu)} \quad (6.40)$$

Στις σχέσεις αυτές γράψαμε $|q| = \sqrt{|q^2|}$ επειδή θέλουμε να έχουμε την εξάρτηση της τρέχουσας σταθεράς σύζευξης από την ενέργεια αλληλεπίδρασης¹ και όχι από το τετράγωνό της.

Μας λείπει όμως μία πληροφορία: η τιμή των σταθερών σύζευξης σε μία ενέργεια μ . Παρακάτω λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε τέτοιες πειραματικές τιμές ώστε να χαράξουμε τις καμπύλες που τελικά συνδέουν τις τρέχουσες σταθερές σύζευξης με την ενέργεια.

6.5 Οι καμπύλες

Οι πειραματικές τιμές που έχουμε είναι για $\mu = m_Z$, όπου m_Z η μάζα του μποζονίου Z . Γνωρίζουμε από το [9] ότι:

$$\bar{a}_3(m_Z) = 0.1181 \pm 0.0011 \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} &\mu\epsilon \\ m_Z &= 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Θα αγνοήσουμε στους υπολογισμούς το σφάλμα του m_Z .

Επίσης από το [9] γνωρίζουμε πως:

$$\sin^2 \theta_w(m_Z) = 0.23122 \pm 0.00003 \quad (6.43)$$

Ενώ στο [16] βρίσκουμε την σταθερά σύζευξης του ηλεκτρομαγνητισμού:

$$\frac{1}{\bar{a}(m_Z)} = 128.940 \pm 0.048 \quad (6.44)$$

¹“Αλληλεπίδρασης” με την έννοια της παραγράφου 5.1, όπου ορίσαμε την effective σταθερά σύζευξης μέσω της αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων.

Δηλαδή:

$$\bar{a}(m_Z) = 0.007756 \pm 0.000003 \quad (6.45)$$

Οπότε, μέσω της (6.1) βρίσκουμε:

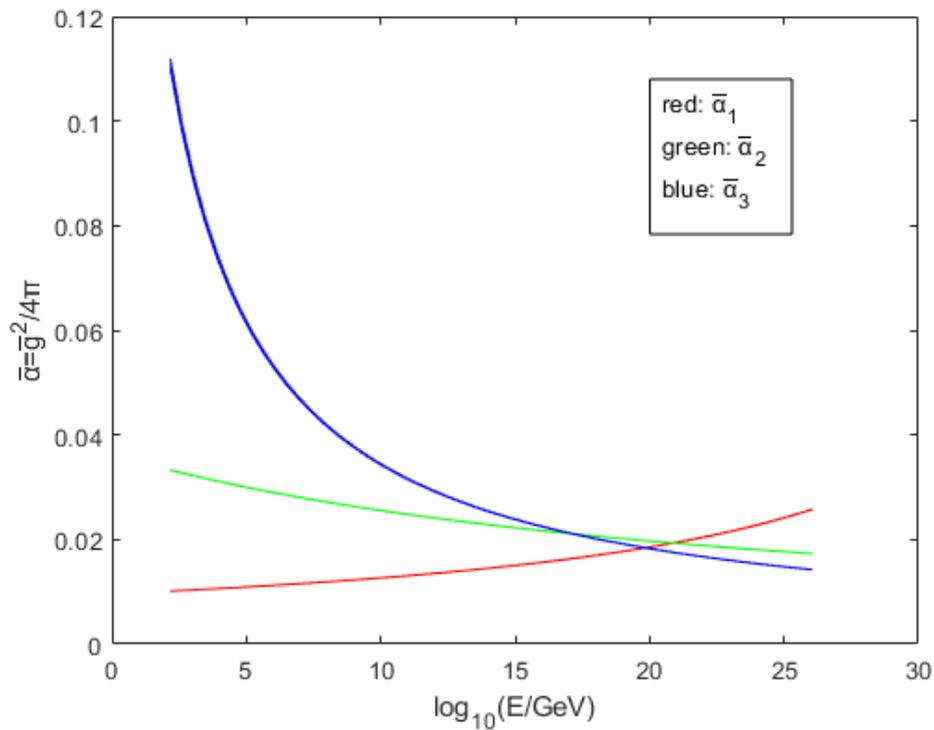
$$\bar{a}_1(m_Z) = 0.010089 \pm 0.000004 \quad (6.46)$$

$$\bar{a}_2(m_Z) = 0.033544 \pm 0.000014 \quad (6.47)$$

Αντικαθιστούμε στις (6.38)-(6.40) $\mu \rightarrow m_Z$ και γράφουμε E αντί για $|q|$. Ακόμη, γράφουμε:

$$\log(E/m_Z) = \log_{10}(E/\text{GeV}) \log 10 - \log(m_Z/\text{GeV}) \quad (6.48)$$

Αντικαθιστούμε τώρα και στις (6.38)-(6.40) τις ελάχιστες, μέσες και μέγιστες τιμές των (6.46), (6.47) και (6.41). Προκύπτει το εξής γράφημα:



Σχήμα 14

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό που έχουν οι παραπάνω καμπύλες είναι ότι οι \bar{a}_2 και \bar{a}_3 φθίνουν με την ενέργεια, τη στιγμή που η \bar{a}_1 αυξάνει. Η συμπεριφορά αυτή έχει να κάνει με το πρόσημο του A στην (6.37): αν είναι θετικό έχουμε αύξον \bar{a} και αν είναι αρνητικό, φθίνον.

Η περίπτωση του \bar{a}_3 , δηλαδή της QCD, είναι ιδιαίτερα σημαντική, μιας και δεν επηρεάζεται από το σπάσιμο της συμμετρίας: Αν έχουμε λιγότερα από 17 quarks τότε η \bar{a}_3 είναι φθίνουσα συνάρτηση της ενέργειας.

Αυτό συνεπάγεται δύο πράγματα για την QCD. Το πρώτο είναι η λεγόμενη **ασυμπτωτική ελευθερία** των quarks: Δηλαδή τα quarks αλληλεπιδρούν πιο ισχυρά όσο πιο μικρή είναι η ορμή $|q|$ που ανταλλάσσουν, δηλαδή όσο πιο μακριά βρίσκονται.

Το δεύτερο είναι ότι, δεδομένου ότι η θεωρία διαταραχών βασίζεται σε αναπτύγματα σε δυνάμεις του a , χρειάζεται αρκούντως μικρό a ώστε να έχουν νόημα τα διαταρακτικά αναπτύγματα. Έτσι λοιπόν, στην QCD η θεωρία διαταραχών αποτυγχάνει σε μικρές

ενέργειες όπου το a είναι μεγάλο.

Σε σχέση με τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε την (6.40) με τον εξής τρόπο:

$$\bar{a}_3(|q|) = \frac{1}{7/(2\pi) \log(|q|/\Lambda)} \quad (6.49)$$

όπου

$$\log \Lambda = \log \mu - \frac{2\pi}{7} \frac{1}{\bar{a}_3(\mu)} \quad (6.50)$$

Για $|q| = \Lambda$ το running coupling απειρίζεται: Πρόκειται για τον λεγόμενο **Landau pole** της QCD. Μας δίνει την ενεργειακή τάξη κάτω από την οποία δεν ισχύει η θεωρία διαταραχών- ή, αν το δει κανείς αλλιώς, μας δίνει το ενεργειακό όριο πάνω από το οποίο τα quarks μπορούν να κινούνται “ελεύθερα”, όντας βέβαια “εγκλωβισμένα” να κινούνται αποκλειστικά πάνω από αυτό: το φαινόμενο ονομάζεται **confinement**¹. Δεν είναι λοιπόν παράλογο που, όπως διαβάζει κανείς στην σελίδα 155 του [9], ισχύει ότι:

$$\Lambda \simeq 200 \text{ MeV} \quad (6.51)$$

δεδομένου πως στο σύστημα μονάδων μας $200 \text{ MeV} = (1 \text{ fm})^{-1}$, οπότε τελικά μέσω της απλοϊκής σχέσης του Heisenberg προκύπτει ότι τα quark εγκλωβίζονται μέσα σε μια περιοχή 1 fm, που είναι προσεγγιστικά το μέγεθος των αδρονίων.

7 Λίγα λόγια για τη δομή του πρωτονίου

Ο βασικός λόγος να μιλήσει κανείς για την δομή των αδρονίων είναι ότι πρόκειται για ένα ενδιαφέρον θέμα, καθώς το σύστημα των γλουονίων και quarks που τα αποτελούν δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και συνεπώς πρέπει να μοντελοποιηθεί. Σε αυτή την εργασία υπάρχει όμως και ένας ακόμη λόγος, καθώς η εξίσωση Altarelli-Parisi, η οποία είναι κεντρικό εργαλείο στη μελέτη των αδρονίων, μοιράζεται κοινά στοιχεία με την RGE.

7.1 Μη ελαστική σκέδαση ηλεκτρονίου-πρωτονίου

Μη ελαστική είναι μία σκέδαση που δεν διατηρείται η κινητική ενέργεια. Αυτό μπορεί να σημαίνει από απλή διέγερση των αντιδρώντων σωματιδίων μέχρι διάσπασή τους.

Ας ξεκινήσουμε όμως από την ελαστική σκέδαση:

$$e^-(k, s) + P(p, r) \rightarrow e^-(k', s') + P(p', r') \quad (7.1)$$

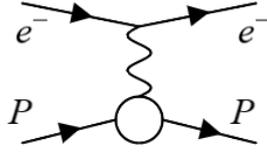
Θεωρούμε την σκέδαση σε tree level, όπου $q = k - k'$ η τετραορμή του φωτονικού διαδότη.

Η στοιχειώδης spin-averaged ενεργός διατομή για την σκέδαση αυτή θα είναι:

$$d\sigma = \frac{1}{F} L^{\mu\nu}(k, q) B_{\mu\nu}(p, q) d\text{Lips} \quad (7.2)$$

Αφήνουμε στην άκρη τη ροή F και το $d\text{Lips}$, που άλλωστε υπολογίζονται εύκολα στο επιθυμητό σύστημα αναφοράς και δεν εξαρτώνται από την ταυτότητα της εκάστοτε αντίδρασης. Πηγαίνουμε στο κομμάτι που αφορά το spin-averaged πλάτος σκέδασης και παρατηρούμε ότι ενώ ο $L^{\mu\nu}$, που αφορά το e^- , μπορεί να γραφτεί αναλυτικά, ο $B^{\mu\nu}$ του πρωτονίου δεν μπορεί. Ο λόγος είναι ότι δεν αντιμετωπίζουμε το πρωτόνιο ως σημειακό και ότι συνεπώς δεν γνωρίζουμε την αναλυτική έκφραση της κορυφής φωτονικού διαδότη-πρωτονίου (σχήμα 15):

¹Κάτω από αυτό το ενεργειακό όριο συμβαίνουν ενδιαφέροντα πράγματα που δεν μπορούν να μελετηθούν διαταρακτικά. Για παράδειγμα, αν η ενέργεια του γλουονίου-διαδότη είναι αρκετά μικρή, προκύπτει ένα ζεύγος quark-antiquark ώστε τελικά τα αλληλεπιδρώντα quarks να μην μπορούν ποτέ να απομονωθούν!



Σχήμα 15

Οπότε, βασιζόμαστε σε φυσικά επιχειρήματα¹ για να γράψουμε ότι:

$$B^{\mu\nu} = 4\left(\mathcal{F}_1^2 + \tau\kappa^2\mathcal{F}_2^2\right) \left[p^\mu - \frac{p^\sigma q_\sigma}{q^2} q^\mu\right] \left[p^\nu - \frac{p^\sigma q_\sigma}{q^2} q^\nu\right] + 4\tau m_P^2 \left(\mathcal{F}_1 + \kappa\mathcal{F}_2\right)^2 \left[\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu}\right] \quad (7.3)$$

όπου $\tau = -q^2/(4m_P^2)$ και $2(1 + \kappa) = g_P$.² Οι $\mathcal{F}_1(q^2)$ και $\mathcal{F}_2(q^2)$ είναι οι λεγόμενοι **form factors** του πρωτονίου.

Οι form factors εμφανίζονται τελικά στην ενεργό διατομή (7.2). Συγκεκριμένα, στο σύστημα του εργαστηρίου (όπου $p = (m_P, \mathbf{0})$) θα έχουμε:

$$d\sigma_{\text{LAB}} \propto \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \left[\left(\mathcal{F}_1^2 + \tau\kappa^2\mathcal{F}_2^2\right) \cos^2(\theta/2) + \tau \left(\mathcal{F}_1 + \kappa\mathcal{F}_2\right)^2 \sin^2 \theta/2 \right] \quad (7.4)$$

με θ την γωνία σκέδασης του e^- .

Μετρώντας αυτήν την ενεργό διατομή πειραματικά μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για τους form factors και συνεπώς για την μορφή του πρωτονίου.³ Όμως δεν μπορούμε να μάθουμε πράγματα για την δομή του, δηλαδή για τη σύνθεση του πρωτονίου από γλουόνια και quarks. Αυτός είναι και ο λόγος που η ελαστική σκέδαση που μελετήσαμε δεν αρκεί: Πρέπει να προκαλέσουμε μη ελαστική σκέδαση, ώστε να “σπάσουμε” το πρωτόνιο στα συστατικά του.

Προχωράμε λοιπόν στην μη ελαστική σκέδαση, όπου τα θραύσματα του πρωτονίου συμβολίζονται με X :

$$e^-(k, s) + P(p, r) \rightarrow e^-(k', s') + X \quad (7.5)$$

Η διαδικασία απεικονίζεται στο σχήμα 16.

Τα θραύσματα X έχουν συνολική τετραορμή p' , ενώ και πάλι θεωρούμε την σκέδαση σε tree level. Ορίζουμε:⁴

$$-q^2 = Q^2 > 0 \quad (7.6)$$

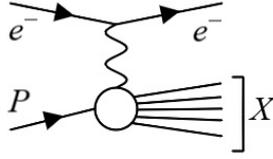
$$\nu = \frac{p^\sigma q_\sigma}{m_P} = q^0 \quad (7.7)$$

¹Δηλαδή στην απαίτηση για σωστή συμπεριφορά του $B^{\mu\nu}$ κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και στην απαίτηση για τήρηση της Ward identity.

²Η εισαγωγή του κ γίνεται ώστε να μπορούμε να γράψουμε $\mathcal{F}_2(q^2 = 0) = 1$.

³Βλ. για παράδειγμα το [14].

⁴Όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς (π.χ. το q^0) θα εννοούνται στο **σύστημα του εργαστηρίου** (LAB), εκτός αν ειπωθεί κάτι διαφορετικό.



Σχήμα 16

Στην ελαστική σκέδαση το Q^2 και το ν είναι ανάλογα:

$$\frac{Q^2}{2m_P\nu} = 1 \quad (7.8)$$

Στην μη ελαστική σκέδαση κάτι τέτοιο δεν ισχύει: Δηλαδή, μεγαλύτερο Q^2 δεν συνεπάγεται και μεγαλύτερη μεταφερόμενη ενέργεια από το φωτόνιο/διαδότη (ν). Μάλιστα, τα Q^2 και ν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως οι δύο ανεξάρτητες Lorentz-βαθμωτές ποσότητες, κατά τον ίδιο τρόπο που στην ελαστική σκέδαση χρησιμοποιήσαμε το q^2 .

Πρέπει τώρα να αναθεωρήσουμε μερικώς την σχέση (7.2). Το dLips πλέον αφορά εξ ορισμού μόνο το εξερχόμενο ηλεκτρόνιο, καθώς αδιαφορούμε για τα θραύσματα X και ολοκληρώνουμε σε όλον τον φασικό τους χώρο.¹ Οπότε θα έχουμε:

$$d\sigma = \frac{1}{F} L^{\mu\nu}(k, q) W_{\mu\nu}(p, q) d\text{Lips}(e^-) \quad (7.9)$$

Ο ταυιστής $W^{\mu\nu}$, εκτός του ότι εκπροσωπεί το spin-averaged πλάτος της κορυφής πρωτονίου-φωτονίου, περιέχει και την ολοκλήρωση στον φασικό χώρο των X . Είναι συνεπώς δύσκολο να τον γράψουμε αναλυτικά και γι αυτό, όπως και στην περίπτωση του $B^{\mu\nu}$ της ελαστικής σκέδασης, θα επικαλεστούμε φυσικά επιχειρήματα. Βρίσκουμε:

$$W^{\mu\nu} = \frac{W_2}{m_P^2} \left[p^\mu - \frac{p^\sigma q_\sigma}{q^2} q^\mu \right] \left[p^\nu - \frac{p^\sigma q_\sigma}{q^2} q^\nu \right] + W_1 \left[\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right] \quad (7.10)$$

Τα $W_1(Q^2, \nu)$ και $W_2(Q^2, \nu)$ λέγονται **structure functions**. Η ονομασία δεν είναι τυχαία: Οι form factors δίνουν πληροφορίες για την μορφή του πρωτονίου, ενώ οι structure functions για την δομή του.

Σε αντίθεση με την ελαστική σκέδαση, στην μη ελαστική σκέδαση η γωνία θ δεν εξαρτάται από την ορμή $|\mathbf{k}'|$ του εξερχόμενου ηλεκτρονίου. Για αυτόν τον λόγο στο dLips παραμένουν δύο στοιχειώδεις ποσότητες: το $d\Omega$ και το $d|\mathbf{k}'|$. Ή, μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών και αντί αυτών να έχουμε τα dQ^2 και $d\nu$. Θα είναι λοιπόν:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} \Big|_{eP \rightarrow eX} = \frac{\pi a^2}{4k^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|} \left[W_2 \cos^2(\theta/2) + 2W_1 \sin^2(\theta/2) \right] \quad (7.11)$$

Μέσα από την μέτρηση αυτής της ενεργού διατομής μπορούμε να βρούμε τις structure functions για τις διάφορες τιμές των Q^2 και ν .

Η (7.11) συσχετίζει τις structure functions του πρωτονίου με την ενεργό διατομή της σκέδασης $e^- P \rightarrow e^- X$. Στην πραγματικότητα όμως, το ηλεκτρόνιο το χρειαζόμαστε μόνο για να εκπέμψει ένα (αρκούντως "ισχυρό" και "virtual") φωτόνιο γ^* , το οποίο στη συνέχεια αλληλεπιδρά με το πρωτόνιο και το διασπά. Επομένως μπορούμε να γίνουμε λίγο πιο αφαιρετικοί και να συσχετίσουμε τις structure functions με την ενεργό διατομή της διαδικασίας:

$$\gamma^*(q, \lambda) + P(p, r) \rightarrow X \quad (7.12)$$

¹Πάντοτε στα dLips ολοκληρώνουμε στον φασικό χώρο των προϊόντων τα οποία δεν ανιχνεύουμε. Η διαφορά τώρα είναι ότι αυτή η ολοκλήρωση δεν συμβαίνει στο dLips, αλλά μέσα στον $W^{\mu\nu}$.

Το λ αφορά την πόλωση του φωτονίου. Για ένα virtual φωτόνιο υπάρχουν τρεις καταστάσεις πόλωσης: Οι δύο transverse ($\lambda = -1, +1$) και η longitudinal ($\lambda = 0$).

Αν επρόκειτο για πραγματικό φωτόνιο πόλωσης λ που απορροφάται από ένα μη πολωμένο φωτόνιο, τότε η ενεργός διατομή θα ήταν:¹

$$\sigma_{\lambda,R} = \frac{4\pi^2 a}{|q|} \varepsilon_\mu^*(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda) W^{\mu\nu} \quad (7.13)$$

Εμείς έχουμε βέβαια virtual φωτόνιο, αλλά διαλέγουμε την κανονικοποίηση της ενεργού διατομής έτσι ώστε αν $q^2 = 0$ τότε ο τύπος που θα βρούμε να ισοδυναμεί με την (7.13). Οπότε:

$$\sigma_\lambda = \frac{4\pi^2 a}{K} \varepsilon_\mu^*(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda) W^{\mu\nu} \quad (7.14)$$

όπου $K = \nu - Q^2/(2m_P)$.

Μας ενδιαφέρει (θα δούμε παρακάτω το γιατί) να ξέρουμε την ενεργό διατομή της $\gamma^* P \rightarrow X$ για virtual φωτόνιο αμιγώς transverse και για virtual φωτόνιο longitudinal.² Οπότε κάνουμε την υπόθεση εργασίας ότι:

$$q = (q^0, 0, 0, q^3) \quad (7.15)$$

Οπότε επιλέγουμε:

$$\varepsilon(\pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0) \quad (7.16)$$

και

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{\sqrt{Q^2}} (q^3, 0, 0, q^0) \quad (7.17)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη αυτά, καθώς και την (7.10), βρίσκουμε την transverse ενεργό διατομή, που φυσικά χρειάζεται averaging στις αρχικές πολώσεις του virtual φωτονίου:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{4\pi^2 a}{K} \frac{1}{2} \sum_{\lambda=-1,+1} \varepsilon_\mu^*(\lambda) \varepsilon_\nu(\lambda) W^{\mu\nu} \\ &= \frac{4\pi^2 a}{K} W_1 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Ενώ η longitudinal ενεργός διατομή, που δεν χρειάζεται averaging, θα είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \frac{4\pi^2 a}{K} \varepsilon_\mu^*(0) \varepsilon_\nu(0) W^{\mu\nu} \\ &= \frac{4\pi^2 a}{K} \left[\left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2}\right) W_2 - W_1 \right] \end{aligned} \quad (7.19)$$

Μέχρι στιγμής το μόνο που έχουμε κάνει είναι να εμφανίζουμε τις structure functions σε ενεργούς διατομές: Είτε της $e^- P \rightarrow e^- X$, είτε της $\gamma^* P \rightarrow X$. Αν όμως θέλουμε να πάρουμε πληροφορία για την δομή του πρωτονίου από τις structure functions θα πρέπει να τις δώσουμε φυσικό περιεχόμενο, να τις συνδέσουμε δηλαδή με τα συστατικά του πρωτονίου με έναν σαφή τρόπο. Η σύνδεση αυτή επιτυγχάνεται μέσω του μοντέλου των **παρτονίων** (partons).

¹Είμαστε πάντοτε στο LAB σύστημα. Το $4\pi^2 a$ υπάρχει εκεί λόγω της σύμβασης στην κανονικοποίηση του $W^{\mu\nu}$. Αν συνυπολογιστεί αυτή τότε έχουμε τον συνηθισμένο παράγοντα ροής F , με βλίμα μηδενικής μάζας: $F = 4m_P |q|$.

²Αποφεύγουμε να πούμε "αμιγώς longitudinal" διότι, όπως θα δούμε παρακάτω, το μη transverse διάγραμμα πόλωσης έχει και μηδενική συνιστώσα. Παρ' όλα αυτά το ονομάζουμε longitudinal.

7.2 Τα παρτόνια και η Deep Inelastic Scattering

Η Deep Inelastic Scattering (DIS) ηλεκτρονίου με πρωτόνιο είναι μια ακραία περίπτωση της μη ελαστικής σκέδασης που είδαμε παραπάνω. Σε αυτήν το ηλεκτρόνιο είναι πολύ ισχυρό ώστε να μας επιτρέψει να δούμε “βαθιά” μέσα στο πρωτόνιο. Λέγοντας “ισχυρό” εννοούμε στην πραγματικότητα δύο πράγματα:

Πρώτον, ότι το Q^2 του virtual φωτονίου που παράγεται είναι πολύ μεγάλο, ώστε να μπορεί το φωτόνιο να “δει” τα συστατικά του πρωτονίου και να αλληλεπιδράσει με αυτά- είναι σαν να απαιτούμε να έχει το virtual φωτόνιο μικρό μήκος κύματος.

Δεύτερον, ότι η ενέργεια του virtual φωτονίου, η οποία στο LAB σύστημα ισούται με ν , είναι μεγάλη. Αυτό το ζητάμε διότι θέλουμε το φωτόνιο όχι απλώς να “διακρίνει” τα συστατικά του πρωτονίου, αλλά να τους μεταφέρει αρκετή ενέργεια ώστε να τα διαχωρίσει.

Απαιτούμε δηλαδή για την DIS να ισχύουν τα παρακάτω:

$$Q^2 \rightarrow \infty \quad (7.20)$$

$$\nu \rightarrow \infty \quad (7.21)$$

Ποιά είναι όμως τα συστατικά του πρωτονίου με τα οποία αλληλεπιδρά τελικά το φωτόνιο;

Σύμφωνα με το μοντέλο των παρτονίων το πρωτόνιο αποτελείται από παρτόνια, κάποια από τα οποία είναι φορτισμένα σωματίδια με spin 1/2.¹ Το ηλεκτρόνιο, μέσω του virtual φωτονίου, αλληλεπιδρά μονάχα με ένα από αυτά με ελαστική σκέδαση και μάλιστα σαν να ήταν αυτό το παρτόνιο ελεύθερο. Βεβαίως, την ελαστική σκέδαση μπορούμε να την περιγράψουμε με ακρίβεια, οπότε μέσω αυτής θα καταφέρουμε τελικά να περιγράψουμε και την DIS, δίνοντας φυσικό περιεχόμενο στις structure functions. Ωστόσο πρέπει πρώτα να ποσοτικοποιήσουμε την ελαστική σκέδαση του ηλεκτρονίου με το παρτόνιο.

Έστω πως το e^- αλληλεπιδρά με το i -οστό παρτόνιο, το οποίο συμβολίζουμε με q_i (σχήμα 17). Θεωρούμε πως αυτό το παρτόνιο φέρει αρχικά ένα κλάσμα x της αρχικής τετραορμής του πρωτονίου:

$$p_i = xp \quad (7.22)$$

Αυτό συνεπάγεται πως το παρτόνιο εμφανίζει μάζα:

$$m_i = xm_P \quad (7.23)$$

γεγονός που μας προβληματίζει επειδή είναι αφύσικο τα συστατικά του πρωτονίου να έχουν μάζα που εξαρτάται από τον παράγοντα x , ο οποίος είναι μεταβλητός. Θα αδιαφορήσουμε όμως μπροστά σε αυτό το εννοιολογικό πρόβλημα, όπως επίσης θα αδιαφορήσουμε μπροστά στο ότι το σύστημα ηρεμίας του πρωτονίου δεν ταυτίζεται με το σύστημα ηρεμίας του q_i . Ο λόγος που αδιαφορούμε είναι ότι αν η ανάλυση γινόταν λίγο διαφορετικά και χρησιμοποιώντας αποκλειστικά Lorentz-αναλλοιώτα μεγέθη, τότε δεν θα ανέκυπταν τέτοια ζητήματα. Μία τέτοια ανάλυση γίνεται στο κεφ. 2 του [6].

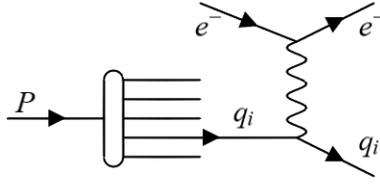
Ας ανεχτούμε λοιπόν την (7.23). Αν συνδυάσουμε τα παραπάνω με την διατήρηση της τετραορμής στην κορυφή virtual φωτονίου-παρτονίου καταλήγουμε στο εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα:

$$x = \frac{Q^2}{2m_P \nu} = \frac{Q^2}{2p^\sigma q_\sigma} \quad (7.24)$$

Επομένως το κλάσμα της τετραορμής του πρωτονίου που φέρει το i -οστό παρτόνιο ισούται με έναν λόγο τον οποίο έχουμε ξανασυναντήσει στην (7.24) της ελαστικής σκέδασης.

¹Λέμε “κάποια” διότι, όπως εκ των υστέρων γνωρίζουμε, το πρωτόνιο περιέχει τα quarks, αλλά και τα γλουόνια. Μπορούμε όμως να ασχοληθούμε μόνο με τα quarks και να χειριστούμε τα γλουόνια ως “όλα τα υπόλοιπα”.

Επίσης, όταν μιλάμε για quarks δεν εννοούμε τα γνωστά τρία quarks του πρωτονίου, ή τουλάχιστον όχι μόνον αυτά. Εννοούμε όλα τα quarks και antiquarks που μπορεί να προκύψουν, αν το virtual φωτόνιο έχει κατάλληλα Q^2 και ν .



Σχήμα 17: Απεικόνιση της DIS

Κάνουμε τώρα την εξής (απολύτως δικαιολογημένη) υπόθεση: Αν τα Q^2 και ν προσδιορίζουν το κλάσμα x της τετραορμής που αποκτά το i -οστό παρτόνιο, τότε δεσμεύονται μέσω του λόγου x και δεν είναι πλέον ανεξάρτητα μεταξύ τους. Για αυτό, στο πεδίο της DIS οι structure functions δεν μπορούν πλέον να εξαρτώνται από τα Q^2 και ν σαν αυτά να ήταν ανεξάρτητα, αλλά από τον λόγο x .

Οπότε τελικά η DIS είναι το πεδίο όπου:

$$Q^2 \rightarrow \infty, \quad \nu \rightarrow \infty \quad (7.25)$$

και επίσης

$$m_P W_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x) \quad (7.26)$$

$$\nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x) \quad (7.27)$$

Υπάρχει ένα ακόμη βήμα που πρέπει να κάνουμε πριν μπορέσουμε να δώσουμε φυσικό περιεχόμενο στα W_1 και W_2 . Είδαμε ότι στο μοντέλο των παρτονίων, το (ελεύθερο) i -οστό παρτόνιο q_i που σκεδάζεται (ελαστικά) από το ηλεκτρόνιο, φέρει αρχικά ένα κλάσμα x της τετραορμής του πρωτονίου¹. Η πιθανότητα να φέρει το q_i το κλάσμα x της τετραορμής του αρχικού πρωτονίου δίνεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_i(x)$. Η συνάρτηση $x f_i(x)$ λέγεται και **Parton Distribution Function** (PDF).

Η σχέση-ορισμός για τις $f_i(x)$ είναι η εξής:

$$\sum_i \int_0^1 dx x f_i(x) = 1 \quad (7.28)$$

με το άθροισμα να είναι επάνω σε όλα τα παρτόνια (quarks και γλουόνια). Η σχέση αυτή δεν συνυπολογίζει τον περιορισμό της (7.24), αφού σημαίνει απλώς ότι το άθροισμα των μέσων κλασμάτων ορμής την οποία μπορεί να λάβει το κάθε παρτόνιο ισούται με τη μονάδα.

Πλέον έχουμε όλα τα εργαλεία ώστε να γράψουμε μία σχέση που εκφράζει το ότι η ενεργός διατομή της DIS θα ισούται με το άθροισμα των ενεργών διατομών των διαδικασιών, σε καθεμιά από τις οποίες το ηλεκτρόνιο σκεδάζεται με ένα από τα παρτόνια του πρωτονίου, το οποίο αρχικά φέρει ορμή xp . Δηλαδή:

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} \right|_{eP \rightarrow eX} = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) \left. \frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} \right|_{eq_i \rightarrow eq_i} \quad (7.29)$$

¹Βλ. σχήμα 17. Παρατηρούμε δε ότι το σχήμα 17 είναι μια πιο λεπτομερειακή εκδοχή του σχήματος 16, πράγμα που είναι άλλωστε και ο στόχος μας.

Γνωρίζουμε από την QED ότι η σκέδαση ηλεκτρονίου από spin-1/2 σωματίδιο με φορτίο $|e| \cdot e_i$ και μάζα m_i είναι:¹

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} \Big|_{e q_i \rightarrow e q_i} = \frac{\pi a^2}{4k^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|} \left[e_i^2 \cos^2(\theta/2) + 2e_i^2 \frac{Q^2}{4m_i^2} \sin^2(\theta/2) \right] \times \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right) \quad (7.30)$$

όπου η δ συνάρτηση φροντίζει ώστε να παραμένει ελαστική η σκέδαση $e^- q_i$, ώστε δηλαδή να ισχύει η (7.24). Εισάγοντας τώρα τις (7.11) και (7.30) στην (7.29) βρίσκουμε πως:

$$\nu W_2(Q^2, \nu) = F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (7.31)$$

καθώς και:

$$m_p W_1(Q^2, \nu) = F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x) \quad (7.32)$$

Το αποτέλεσμα αυτό αξίζει να σχολιαστεί. Αρχικά πετύχαμε τον στόχο μας που είναι να δώσουμε φυσικό περιεχόμενο στις structure functions, αφού τις συσχετίσαμε με τις PDFs. Μάλιστα, οι (7.31) και (7.32) μας επιτρέπουν να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα, όπως το ότι το νετρόνιο και το πρωτόνιο αποτελούνται από τα περίφημα τρία “valence”, όπως ονομάζονται, quarks.²

Επιπλέον, οι (7.31) και (7.32) ικανοποιούν, δίχως δική μας παρέμβαση, την απαίτηση για εξάρτηση από το x . Η εξάρτηση των structure functions μονάχα από το x στην περιοχή της DIS ονομάζεται **Bjorken scaling**.

7.3 Παραβίαση του Bjorken scaling και QCD διορθώσεις

Στο σχήμα 18, που προέρχεται από το [8], υπάρχουν πειραματικές μετρήσεις της structure function $F_2(x)$ του πρωτονίου για διάφορες τιμές του Q^2 . Το γεγονός ότι τα σημεία δεν είναι παρατεταγμένα σε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα του Q^2 συνιστά παραβίαση του Bjorken scaling, όπως αυτό ορίστηκε για την DIS και το μοντέλο των παρτονίων στην παραπάνω παράγραφο.

Προκειμένου να περιγράψουμε αυτήν την συμπεριφορά πρέπει να συμπεριλάβουμε διορθώσεις υψηλότερης τάξης στο διάγραμμα του σχήματος 17. Οι διορθώσεις που θα συμπεριλάβουμε είναι εκπομπές (real) γλουονίων από το q_i πριν ή μετά την αλληλεπίδραση με το virtual φωτόνιο.³

Το πρώτο που μπορούμε να κάνουμε είναι να “βγάλουμε από το παιχνίδι” το ηλεκτρόνιο, και να ασχοληθούμε με την διαδικασία:

$$\gamma^* q_i \rightarrow g q_i \quad (7.33)$$

Έπειτα, θεωρούμε ότι η αρχική ορμή του παρτονίου q_i είναι:

$$p_i = y p \quad (7.34)$$

και αν θεωρήσουμε $z = x/y$, όπου το x δίνεται από την (7.24), μπορούμε να γράψουμε πως:⁴

$$\frac{1}{\sigma_0} \sigma(\gamma^* P \rightarrow X) = \sum_i \int_0^1 dz \int_0^1 dy f_i(y) \delta(x - yz) \frac{1}{\sigma_0} \hat{\sigma}(\gamma^* q_i \rightarrow g q_i) \quad (7.35)$$

¹Βλ. για παράδειγμα το κεφ. 8 του [1].

²Βλ. παράγραφο 9.3 του [1].

³Όπως είπαμε και στην παράγραφο πριν την (3.69) αυτές οι διορθώσεις συνυπολογίζονται σε επίπεδο ενεργού διατομής και όχι πλάτους σκέδασης.

⁴Η σχέση (7.35) βρίσκεται στο πνεύμα της (7.29). Η απόδειξη της (7.29) είναι εύκολη, ενώ της (7.35) πιο πολύπλοκη.

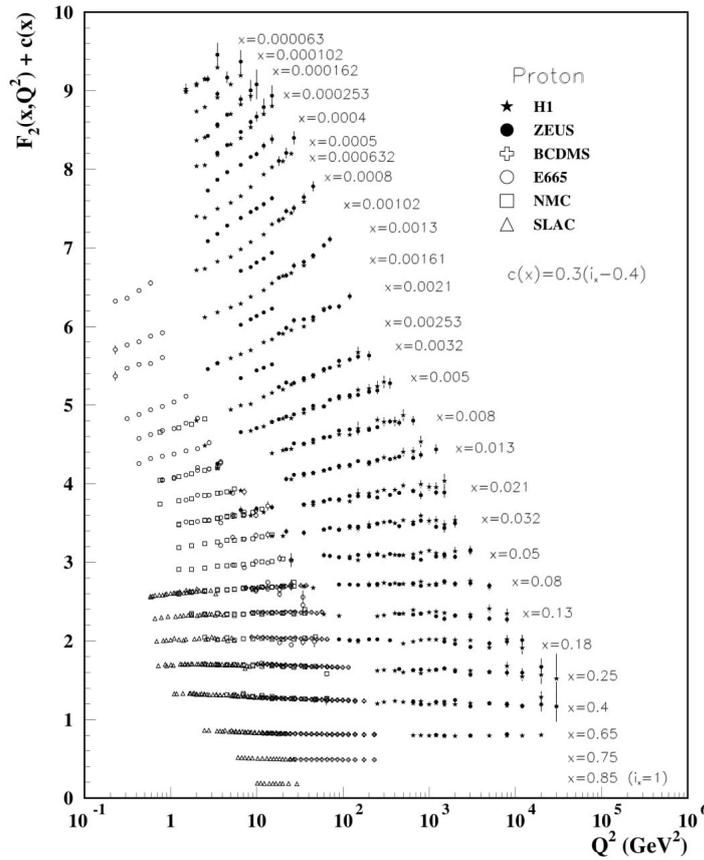
Αυτή τη φορά μέσα στο X συμπεριλαμβάνεται και το εκπεμπόμενο γλουόνιο, ενώ το \hat{c} δηλώνει διαδικασία με παρτόνιο. Για τα σ_0 , $\hat{\sigma}_0$ ισχύει:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi^2 a}{2m_P K} \simeq \frac{4\pi a}{(p+q)^2} = \frac{4\pi a}{s} \quad (7.36)$$

$$\text{και αντίστοιχα } \hat{\sigma}_0 \simeq \frac{4\pi a}{\hat{s}} \quad (7.37)$$

Το K είναι εκείνο της (7.14). Χρησιμοποιώντας το σ_0 μπορούμε, μέσω των (7.18) και (7.19) να γράψουμε:

$$\frac{F_2(x)}{x} = \frac{\sigma_T + \sigma_L}{\sigma_0} \quad (7.38)$$



Σχήμα 18

Μπορούμε, μέσω της (7.35), να οδηγήσουμε την (7.38) στην (7.31), δηλαδή στον τύπο που δίνει την F_2 στο μοντέλο των παρτονίων, χωρίς QCD διορθώσεις. Πράγματι, αν δεν υπάρχει εκπομπή γλουονίου, τότε:

$$\frac{\hat{\sigma}_T}{\hat{\sigma}_0} = e_i^2 \delta(1-z) \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}_L = 0 \quad (7.39)$$

Αν αντικαταστήσουμε λοιπόν αυτό το $\hat{\sigma}_T$ στην (7.35) και χρησιμοποιήσουμε με την

σειρά της την (7.35) στην (7.38), θα βρούμε:

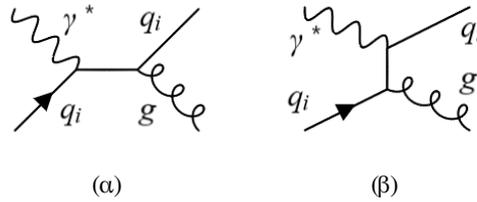
$$\begin{aligned}\frac{F_2(x)}{x} &= \sum_i \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \frac{\hat{\sigma}_T}{\hat{\sigma}_0} \left(\frac{x}{y} \right) \\ &= \sum_i e_i^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \delta \left(1 - \frac{x}{y} \right)\end{aligned}\quad (7.40)$$

Αν εκτελέσουμε την y -ολοκλήρωση θα πάρουμε την (7.31).

Αντιλαμβανόμαστε ότι αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε τις QCD διορθώσεις στις structure functions θα πρέπει να προσθέσουμε στο $\hat{\sigma}_T$ της (7.40) το $\hat{\sigma}$ της εκπομπής γλουονίου, δηλαδή της διαδικασίας:

$$\gamma^*(q) + q_i(p_i) \rightarrow g(q') + q_i(p'_i) \quad (7.41)$$

η οποία παριστάνεται, στη χαμηλότερη τάξη, από τα διαγράμματα:



Σχήμα 19

Επειδή θεωρούμε ότι αυτές οι QCD διορθώσεις συμβαίνουν σε υψηλές ενέργειες, μπορούμε να αγνοήσουμε την μάζα του παρτονίου ($m_i \simeq 0$).

Πριν παραθέσουμε το spin-averaged πλάτος των διαγραμμάτων του σχήματος 19, πρέπει να πούμε κάτι για τον υπολογισμό των QCD διαγραμμάτων. Για τα εξωτερικά φερμιόνια εμφανίζονται Dirac σπίνορες, που φέρουν όμως έναν colour δείκτη που παίρνει 3 τιμές. Παράλληλα, για τα εξωτερικά γλουόνια εμφανίζονται τετραδιανύσματα πόλωσης με έναν colour δείκτη που παίρνει 8 τιμές. Μπορούμε να γράφουμε:

$$u(s, k)_i = u(s, k)\chi_i \quad \text{και} \quad \varepsilon^\mu(\lambda)_j = \varepsilon^\mu(\lambda)a_j \quad (7.42)$$

περιορίζοντας έτσι το colour κομμάτι στα χ_i και a_j . Έτσι, μπορούμε να γράφουμε τα spin-averaged πλάτη για QCD διαγράμματα ως γινόμενο ενός spin-averaged πλάτους που υπολογίζεται με τις τεχνικές της QED και ενός **colour factor**, που είναι απλώς το κομμάτι που περιέχει τους όποιους Gell-Mann πίνακες και τα διάφορα χ_i και a_j , με άθροιση σε όλους τους colour δείκτες μιας και δεν παίζει ρόλο το χρώμα των εξωτερικών γραμμών!

Έτσι λοιπόν, το spin-averaged πλάτος των διαγραμμάτων του σχήματος 19 περιέχει έναν colour factor που ισούται με $3/4$, ενώ κατά τα άλλα προκύπτει εύκολα από το Compton της QED. Έχουμε δηλαδή:

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 32\pi^2 (e_i^2 a a_3) \frac{4}{3} \left(-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{t}\hat{s}} \right) \quad (7.43)$$

με:

$$\hat{s} = (p_i + q)^2 \quad \hat{t} = (q - p'_i)^2 \quad \hat{u} = (q - q')^2 \quad (7.44)$$

Στο **σύστημα κέντρου ορμής** (CM) η διαφορική ενεργός διατομή της $\gamma^* q_i \rightarrow g q_i$ θα είναι:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} &= \frac{1}{64\pi^2 \hat{s}} \frac{|\mathbf{p}'_i|^2}{|\mathbf{p}_i|^2} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 \hat{s}} |\overline{\mathfrak{M}}|^2\end{aligned}\quad (7.45)$$

Τα $|\mathbf{p}_i|^2$ και $|\mathbf{p}'_i|^2$ έφυγαν λόγω του ότι $m_i = 0$. Συνεχίζουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \int d\Omega \frac{1}{64\pi^2 \hat{s}} |\mathfrak{M}|^2 \\ &= \int d\Omega \frac{2}{3} \frac{e_i^2 a a_3}{\hat{s}} \left(-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{t}\hat{s}} \right) \\ &= \int d\Omega \frac{2}{3} \frac{e_i^2 a a_3}{\hat{s}} \left(\frac{1}{1-z} \frac{1-\cos\theta}{2} + (1-z) \frac{2}{1-\cos\theta} + \frac{2z}{1-z} \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right)\end{aligned}\quad (7.46)$$

όπου θ η γωνία σκέδασης στο CM.

Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται για $\theta \rightarrow 0$, οπότε μπορούμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα σε όλες τις γωνίες με ένα ολοκλήρωμα στις γωνίες κοντά στο 0. Σε αυτές τις γωνίες ο πρώτος όρος της παρένθεσης είναι ασήμαντος μπροστά στους άλλους δύο και συνεπώς μπορεί να παραλειφθεί.

Θα αλλάξουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης και θα χρησιμοποιήσουμε την λεγόμενη “transverse” ορμή p_T^2 :

$$p_T^2 = |\mathbf{p}'_i|^2 \sin^2 \theta \quad (7.47)$$

Οπότε στο όριο $\theta \rightarrow 0$ θα έχουμε:

$$p_T^2 \simeq \frac{\hat{s}}{4} \theta^2 \quad (7.48)$$

$$d\Omega \simeq 4\pi \frac{dp_T^2}{\hat{s}} \quad (7.49)$$

Συνεπώς:

$$\hat{\sigma} \simeq \hat{\sigma}_0 e_i^2 \frac{a_3}{2\pi} P_{qq}(z) \int_0^{p_T^2(\max)} \frac{dp_T^2}{p_T^2} \quad (7.50)$$

όπου η ποσότητα:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} \quad (7.51)$$

λέγεται “**splitting function**” και μπορεί να δείχτει ότι αντιπροσωπεύει την πιθανότητα να υπάρξει εκπομπή γλουονίου από το quark και με την συγκεκριμένη τιμή για το z .¹

Από κινηματική μπορούμε να βρούμε ότι:

$$p_T^2(\max) = \frac{Q^2(1-z)}{4z} \quad (7.52)$$

Η απειρία που οφείλεται στον μηδενισμό του κάτω άκρο του ολοκληρώματος δεν είναι άλλη από την απειρία του $\theta \rightarrow 0$, δηλαδή των “collinear” γλουονίων. Εισάγουμε λοιπόν ένα IR cutoff, το m^2 ,² και γράφουμε:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 e_i^2 \frac{a_3}{2\pi} P_{qq}(z) \left[\log \frac{Q^2}{m^2} + \log \frac{1-z}{4z} \right] \quad (7.53)$$

Βλέπουμε αμέσως πως αν προσθέσουμε αυτήν την $\hat{\sigma}$ στην $\hat{\sigma}_T$ της (7.40) θα έχουμε την (πολυπλόκητη) εξάρτηση της structure function F_2 από το Q^2 :

$$\begin{aligned}\frac{F_2(x, Q^2)}{x} &= \sum_i \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \frac{1}{\hat{\sigma}_0} \left[\hat{\sigma}_T\left(\frac{x}{y}\right) + \hat{\sigma}\left(\frac{x}{y}\right) \right] \\ &= \sum_i e_i^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \left[\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{a_3}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \left(\log \frac{Q^2}{m^2} + \log \frac{1-x/y}{4x/y} \right) \right]\end{aligned}\quad (7.54)$$

¹Θυμόμαστε από την (7.39) ότι π.χ. αν $z = 1$ τότε δεν υπάρχει εκπομπή γλουονίου.

²Το ονομάζουμε m^2 γιατί αν δεν είχαμε θεωρήσει μηδενική μάζα για τα quark-παρτόνια τότε η μάζα τους θα απέτρεπε τον απειρισμό. Μια ανάλογη κατάσταση συζητήσαμε κάτω από την (3.114).

Φυσικά, η έκφραση αυτή για $m \rightarrow 0$ απειρίζεται. Κάνουμε όμως τον εξής συλλογισμό: Εφόσον για μικρά Q^2 δεν μπορούμε να διαχειριστούμε διαταρακτικά την QCD,¹ εισάγουμε μία αυθαίρετη, πεπερασμένη ενεργειακή ποσότητα μ^2 έτσι ώστε:

Για $Q^2 > \mu^2$ να βρισκόμαστε στην διαταρακτική περιοχή, ενώ

Για $Q^2 < \mu^2$ να βρισκόμαστε στην μη διαταρακτική περιοχή της QCD.

Το μ^2 ονομάζεται “**factorisation scale**” και με αυτό μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_i e_i^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \left[\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{a_3}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \left(\log \frac{Q^2}{\mu^2} + \log \frac{\mu^2}{m^2} + C(x/y) \right) \right] \quad (7.55)$$

όπου με $C(x/y)$ συμβολίσαμε τον τελευταίο όρο της (7.54). Ξαναγράφουμε την (7.55):

$$\begin{aligned} \frac{F_2(x, Q^2)}{x} = & \sum_i e_i^2 \left\{ f_i(x) + \frac{a_3}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \left[P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{\mu^2}{m^2} + C(x/y) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{a_3}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right\} \end{aligned} \quad (7.56)$$

Η απειρία υπάρχει πλέον μόνον στο $\log(\mu^2/m^2)$.

Στο πνεύμα της ανακανονικοποίησης, μπορούμε να ισχυριστούμε πως αυτή η απειρία είναι “πλασματική” και πως μπορούμε να την απορροφήσουμε αντικαθιστώντας την “bare” $f_i(x)$ με την $f_i(x, \mu^2)$:

$$f_i(x, \mu^2) = f_i(x) + \frac{a_3}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \left[P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{\mu^2}{m^2} + C(x/y) \right] \quad (7.57)$$

οπότε η (7.56) γίνεται:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_i e_i^2 \left\{ f_i(x, \mu^2) + \frac{a_3}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_i(y, \mu^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right\} + \mathcal{O}(a_3^2) \quad (7.58)$$

Η αυθαίρετη factorisation scale θυμίζει το subtraction point της ανακανονικοποίησης. Αν επιλέξουμε το μ^2 έτσι ώστε $\mu^2 = Q^2$ τότε θα βρούμε:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_i e_i^2 f_i(x, Q^2) \quad (7.59)$$

που έχει την μορφή της (7.31) και θυμίζει renormalisation condition.

Ακόμη, το εάν και κατά πόσον θα ενσωματωθεί το $C(x/y)$ στην $f_i(x, \mu^2)$ καθορίζει τα διάφορα “**factorisation schemes**”.

7.4 Η εξίσωση Altarelli-Parisi ως άλλη RGE

Απαιτούμε ανεξαρτησία της structure function από την αυθαίρετη factorisation scale μ^2 :

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} F_2(x, Q^2) = 0 \quad (7.60)$$

το οποίο μέσω της (7.58) δίνει:

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} f_i(x, \mu^2) + \frac{a_3}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[f_i(x, \mu^2) \log \frac{Q^2}{\mu^2} \right] + \mathcal{O}(a_3^2) = 0 \Rightarrow \\ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} f_i(x, \mu^2) = -\frac{a_3}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) f_i(x, \mu^2) + \mathcal{O}(a_3^2) \end{aligned} \quad (7.61)$$

¹Βλ. σχήμα 14.

Στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε αναδρομικά την $\mu^2 \partial f_i / \partial \mu^2$ και κρατήσαμε όρους τάξης a_3 .

Η (7.61) είναι η εξίσωση Altarelli-Parisi. Καθορίζει την εξέλιξη της $f_i(x, \mu^2)$ καθώς αλλάζει το μ^2 , αλλά και την εξέλιξη της $F_2(x, Q^2)$ καθώς αλλάζει το Q^2 , αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση (7.59). Συγκεκριμένα, μπορούμε να υπολογίσουμε το $f_i(x, Q_0^2)$ για κάποιο συγκεκριμένο Q_0^2 μετρώντας πειραματικά την $F_2(x, Q_0^2)$ και χρησιμοποιώντας την (7.59), και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε την (7.61) για να αποκτήσουμε μία θεωρητική πρόβλεψη για την $F_2(x, Q^2)$, για όλα τα Q^2 . Μπορούμε να συγκρίνουμε αυτήν την πρόβλεψη με γραφήματα όπως εκείνο στο σχήμα 18.

Βέβαια, ακόμη και σε τάξη a_3 , η (7.61) είναι ατελής. Ο λόγος είναι ότι δεν έχουμε λάβει υπ' όψη όλα τα είδη παρτονίων του πρωτονίου¹ και φυσικά δεν έχουμε λάβει υπ' όψη όλες τις QCD διορθώσεις που συμμετέχουν σε τάξη a_3 . Παρ' όλα αυτά το φυσικό περιεχόμενο της (7.61) είναι πλήρες.

Η λύση της (7.61), με την οποία δεν θα ασχοληθούμε, δίνει μια ενδιαφέρουσα θεωρητική πρόβλεψη. Για να την διατυπώσουμε πρέπει αρχικά να δούμε ότι μία κορυφή της ενεργού διατομής της DIS σε κάποιο x σημαίνει ισχυρή παραγωγή σωματιδίων που προέρχονται από σκέδαση του virtual φωτονίου με παρτόνια κλάσματος ορμής ίσου με x . Με την ενεργό διατομή σχετίζονται οι F_1 και F_2 , ενώ, όπως λέει η (7.59) με την F_2 σχετίζονται οι PDFs $x f_i$.

Η θεωρητική πρόβλεψη είναι λοιπόν η εξής: Όσο μεγαλώνει το μ^2 , τόσο μετατοπίζεται το μέγιστο της PDF $x f_i(x, \mu^2)$ προς μικρότερα x . Με βάση τα της προηγούμενης παραγράφου και την (7.59) αυτό σημαίνει το εξής: Όσο αυξάνεται η Q^2 με την οποία χτυπάμε το πρωτόνιο, τόσο μικρότερο είναι το κλάσμα x της ορμής των παρτονίων τα οποία σκεδάζουμε- δηλαδή τόσο περισσότερα τα παρτόνια του πρωτονίου στα οποία έχουμε πρόσβαση. Αυτά τα παρτόνια αντιστοιχούν σε μια "θάλασσα" (sea) από quarks και antiquarks, τα οποία διεγείρουμε όταν χτυπήσουμε το πρωτόνιο με μεγάλη ενέργεια.

Τί γίνεται όμως με τα γνωστά τρία valence quarks του πρωτονίου; Δεν θα έπρεπε να γίνονται ορατά ως μία κορυφή για $x \simeq 1/3$;

Για να φανεί αυτή η κορυφή στην PDF πρέπει με κάποιον τρόπο να αφαιρεθεί ο "θόρυβος" των sea quarks. Και, αυτό μπορεί να γίνει αν παραστήσει κανείς την διαφορά των F_2 πρωτονίου και νετρονίου:

$$F_2^n(x) - F_2^p(x) \tag{7.62}$$

ως συνάρτηση του x . Ο λόγος είναι ότι η συνεισφορά των sea quarks είναι ίδια σε πρωτόνιο και νετρόνιο και απαλείφεται!

8 Μια ανασκόπηση

Ξεκινήσαμε αυτή την εργασία "υπολογίζοντας" τις UV απειρίες διαγραμμάτων με βρόχους. Με την ανακανονικοποίηση καταφέραμε να απαλλαγούμε από αυτές τις απειρίες. Αξιοποιώντας τις αυθαίρετες ποσότητες που εισήχθησαν κατά την ανακανονικοποίηση, βρήκαμε έναν "εύκολο" τρόπο να υπολογίσουμε τις effective σταθερές σύζευξης: την RGE. Τέλος, χρησιμοποιήσαμε το σκεπτικό της RGE για να εξάγουμε την εξίσωση Altarelli-Parisi, με την οποία μπορούμε να περιγράψουμε την πειραματικά επιβεβαιωμένη εξάρτηση των structure functions από την ενέργεια.

¹Δηλαδή ο δείκτης i μετρά μόνο quark-παρτόνια και όχι γλουόνια-παρτόνια. Βλ. παράγραφο 10.6 του [10].

Βιβλιογραφία

- [1] I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [2] J.D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [3] S. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Pearson, 2014.
- [4] J.C. Collins. *Renormalization*. Cambridge University Press, 1984.
- [5] J.C. Collins and A.J. MacFarlane. “New Methods for the Renormalization Group”. In: *Physical Review D* 10.4 (1974), pp. 1201–1212.
- [6] R. Devenish and A. Cooper-Sarkar. *Deep Inelastic Scattering*. Oxford University Press, 2004.
- [7] G. Leibbrandt. “Introduction to the Technique of Dimensional Regularization”. In: *Reviews of Modern Physics* 47 (1975), pp. 849–876.
- [8] Particle Data Group. “Review of Particle Physics”. In: *Physical Review D* 66 (2002).
- [9] Particle Data Group. “Review of Particle Physics”. In: *Physical Review D* 98 (2018).
- [10] F. Halzen and A.D. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1984.
- [11] G. 't Hooft. “Dimensional Regularization and the Renormalization Group”. In: *Nuclear Physics B* 61 (1973), pp. 455–468.
- [12] G. 't Hooft and M. Veltman. “Regularization and Renormalization of Gauge Fields”. In: *Nuclear Physics B* 44 (1972), pp. 189–213.
- [13] C. Itzykson and J-B Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill (Republication by Dover in 2018), 1980.
- [14] T. Janssens, R. Hofstadter, et al. “Proton Form Factors from Elastic Electron-Proton Scattering”. In: *Physical Review* 142.4 (1966), pp. 922–931.
- [15] D.R.T. Jones. “Two-loop β function for a $G_1 \times G_2$ gauge theory”. In: *Physical Review D* 25.2 (1982), pp. 581–582.
- [16] Salvatore Mele. “Measurements of the Running of the Electromagnetic Coupling at LEP”. In: *XXVI Physics in Collision, Buzios, Rio de Janeiro* (2006).
- [17] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [18] L.I. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [19] M.D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [20] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2003.