Αυθόρμητο Σπάσιμο Συμμετριών μέσω Κβαντικών Διαταραχών

Θοδωρής Αλιφέρης

5 Ιουλίου 2015

Περιεχόμενα

.

Πρόλογος.

Στην εργασία αυτή, εξετάζω το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετριών μέσω κβαντικών διαταραχών. Η μελέτη μου χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο αφορά το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετριών, διαστατικά, διαστατική μεταλλαγή (dimensional transmutation) και το δεύτερο το σπάσιμο της συμμετρίας βαθμίδος.

Στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών του ΕΜΠ και του ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος, εκπονήθηκε αυτή η εργασία υπό την επίβλεψη τριμερούς επιτροπής, με επιβλέποντα τον επίκουρο καθηγητή Νίκο Ήργε και μέλη τους αναπληρωτές καθηγητές Αλέξανδρο Αναγνωστόπουλο και Γεώργιο Κουτσούμπα τους οποίους ευχαριστώ. Θερμά ευχαριστώ τον κύριο Ήργε για την βοήθεια του.

Εισαγωγή.

Είναι γνωστό ότι για διάφορα μοντέλα της κβαντικής θεωρίας πεδίου, μια κλίμακα μάζας / ενέργειας εμφανίζεται αυθόρμητα διαμέσου της διαδικασίας renormalization, ακόμα και όταν η κατεξοχήν θεωρία δεν έχει διαστατικές παραμέτρους. Αυτό το φαινόμενο που καλείται dimensional transmutation, αναλύθηκε το 1973 σε μία εργασία των Coleman και Weinberg [1], όπου το βαθμωτό δυναμικό φάνηκε να αποκτά μία μη μηδενική αλλά τυχαία τιμή και σαν αποτέλεσμα τα εμπλεκόμενα σωμάτια να αποκτήσουν μη μηδενικές μάζες [2,3].

Ο κύριος ρόλος αυτής της διπλωματικής, είναι να παρουσιάσει μία έρευνα σχετικά με την dimensional transmutation σε μη σχετικιστική κβαντομηχανική και να αναλύσει θεωρητικά το άρθρο Scale.

Πιο συγκεκριμένα η δουλειά μας προσφέρει μία ενδελεχή μελέτη σε δύο προβλήματα που έχουν μελετηθεί εκτενώς: το σε δύο και τρείς διαστάσεις δυναμικό της συνάρτησης δέλτα του Dirac [2,4,5] και το δυναμικό του αντίστροφου τετραγώνου της θέσης [6-11]. Επίσης εκτενής λόγος γίνεται για την σχέση Lippmann – Schwinger, τις συναρτήσεις Green, το φαινόμενο της σκέδασης, μετασχηματισμούς Fourier, άλγεβρες και σύνολα Lie, regularization - renormalization.

1 Μέρος Ι: Ένα Μοντέλο Διαστατικής Μεταλλαγής.

1.1 Εισαγωγή.

Στην μη σχετικιστική κβαντομηχανική που περιγράφει ένα σωμάτιο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους h και m (όπου m είναι η μάζα του σωματίου) σαν θεμελιώδεις παραμέτρους που ορίζουν ένα σύστημα μονάδων. Σε αυτό το άρθρο θα επιλέξουμε $\hbar = 1$ και $m = 1$. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να απομείνει μόνο μία στοιχειώδης διάσταση, η οποία θα είναι $\Lambda = L^{-1}$ που εκφράζει την διάσταση της ορμής. Συμπερασματικά, σε αυτά που ακολουθούν, θα ορίσουμε την διαστατική ποσότητα $q = dim[Q]$ μιας φυσικής ποσότητας Q ως το εκθετικό Λ^q με όρους αντίστροφου μήκους,

$$q = dim[Q] = \frac{\Lambda}{[Q]}\frac{\partial[Q]}{\partial\Lambda}$$

Για μη σχετικιστική κβαντομηχανική ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τις διαστάσεις των πιο συχνών φυσικών ποσοτήτων.

Φυσική Ποσότητα	Συνήθεις Διαστάσεις	“Φυσικές” Διαστάσεις	Διαστατικότητα
Μήκος	L	L	-1
Χρόνος	T	L^2	-2
Ταχύτητα	LT^{-1}	L^{-1}	1
Ορμή	MLT^{-1}	L^{-1}	1
Στροφορμή	ML^2T^{-1}	1	0
Ενέργεια	ML^2T^{-2}	L^{-2}	2
Cross section	L^{D-1}	L^{D-1}	$-(D-1)$
Κυματοσυνάρτηση	$L^{-D/2}$	$L^{-D/2}$	$D/2$

Σημείωση: Οι “Φυσικές” διαστάσεις ορίζονται από την επιλογή $\hbar = 1$ και $m = 1/2$. Η γεωμετρική διάσταση του χώρου των θέσεων είναι D. Ας εξετάσουμε εδώ τις πιθανές περιπτώσεις ύπαρξης διαστάσεων. Για τα περισσότερα συστήματα, που χαρακτηρίζονται από κάποια Λαγκραζιανή ή Χαμιλτονιανή, συνήθως υπάρχει τουλάχιστον μία διαστατική παράμετρος, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κλίμακα. Για να δούμε πως γίνεται αυτό, ας θεωρήσουμε την μη σχετικιστική, μονοδιάστατη περίπτωση ενός σωματιδίου, όπου η εξωτερική αλληλεπίδραση – δυναμικό συνεισφέρει μόνο μία διαστατική παράμετρο υ.

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + sgn(\beta)\upsilon|r|^{\beta}\right]\Psi(r) = E\Psi(r)$$

Η διαστατική ανάλυση δείχνει ότι $dim[\upsilon] = \ell = 2 + \beta$, τότε η ποσότητα $\upsilon^{1/\ell}, \ell \neq 0$ θα ορίσει την βασική μονάδα αντίστροφου μήκους ή ορμής. Κάθε ποσότητα με διάστατικότητα q άρα θα είναι ανάλογη του $\upsilon^{q/\ell}$. Ομοίως, μια συνάρτηση θέσης $Q(x)$ (ή $Q(p)$ της ορμής), με διαστατικότητα q, θα είναι ανάλογη του $\upsilon^{q/\ell}$ (ή $\upsilon^{-q/\ell}$). Με άλλα λόγια η διαστατική ανάλυση δίνει μη τετριμμένη πληροφορία σχετικά με το σύστημα.

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, μπορούν να συνοψιστούν στο θεώρημα Π της διαστατικής ανάλυσης. Θα το αναφέρουμε εδώ χωρίς απόδειξη. Θεωρήστε ένα φυσικό φαινόμενο που περιγράφεται από M παραμέτρους $a_1, ..., a_M$, έτσι ώστε R από αυτές να είναι διαστατικά ανεξάρτητες. Τότε δοθείσης μιας συνάρτησης

$$F(a_1, ..., a_M) = 0$$

που συμπεριλαμβάνει αυτές τις M παραμέτρους, υπάρχουν N ανεξάρτητα, αδιάστατα, γινόμενα $\Pi_1, ..., \Pi_N$ των $a_1, ..., a_M$ τέτοια ώστε

$$\Phi(\Pi_1, ..., \Pi_N) = 0$$

$N = M - R$. Ας μελετήσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν το προς εξέταση σύστημα δεν εμφανίζει διαστατική παράμετρο στο επίπεδο της Lagrangian ή της Hamiltonian. Τέτοιο σύστημα είναι Scale invariant (αμεταβλήτου κλίμακας). Ένα παράδειγμα είναι το δυναμικό $-\upsilon|r|^{-2}(\beta = -2, \ell = 0)$ επειδή ο συντελεστής υ είναι αδιάστατος.

Σε αυτήν την περίπτωση η στοιχειώδης διαστατική ανάλυση δεν είναι σε θέση να κάνει προβλέψεις. Σε αυτή την περίπτωση, αν μια καινούρια κλίμακα εμφανιστεί (για παράδειγμα μια δέσμια κατάσταση υπό το πρίσμα ενός αμετάβλητου κλίμακας δυναμικού), η διαστατική ανάλυση σημαίνει ότι το σύστημα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Είναι αυθόρμητα παραγόμενο, με την έννοια ότι χαρακτηρίζει την λύση μιας θεωρίας αμεταβλήτου κλίμακας στο επίπεδο της Lagranzian, ή Hamiltonian. Αυτό σημαίνει ότι (όπως θα δούμε παρακάτω) έχουμε να κάνουμε με σπάσιμο της συμμετρίας $SO(2, 1)$, του κλασικού επιπέδου, στο επίπεδο της κβαντομηχανικής(scale anomaly).

- Είναι εντελώς τυχαίο επειδή δεν έχει οριστεί κάποια τιμή.Αν δεν ήταν, τότε θα παραβίαζε το θεώρημα Π (Δηλαδή το λ παίρνει τυχαία τιμή, αφού δεν εξαρτάται από κάποια διαστατική ποσότητα).

Αυτή η εμφάνιση κάποιας αυθόρμητης και τυχαίας κλίμακας σε μια αμεταβλήτου κλίμακας θεωρία καλείται διαστατική μεταλλαγή (dimensional transmutation). Εν συντομία, η λύση και η μετατροπή μιας αμεταβλήτου κλίμακας θεωρίας σε dimensionally transmuted κλίμακας C μπορεί να εμφανιστεί αυθόρμητα. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε να κάνουμε με σπάσιμο της κλασικής συμμετρίας (scale anomaly). Σκοπός μας είναι να αναλύσουμε τον μηχανισμό που οδηγεί σε transmutation. Αυτό θα επιτευχθεί με την χρήση μιας regularization-renormalization μεθόδου.

1.2 Τεχνικό κομμάτι.

Στις ακόλουθες παραγράφους θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις που βρίσκονται στην δημοσίευση Scale.

Ξεκινούμε από το δεύτερο μέρος του Scale. Οι εξισώσεις που θα συναντήσουμε, έχουν ως εξής:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \upsilon\delta(r) \qquad (2.1)$$

$$H\psi = E\psi \qquad (2.2)$$

$$D = tH - \frac{1}{4}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right) \qquad (2.3)$$

$$\delta_D\mathbf{r} = i[D, \mathbf{r}] = t\dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}\mathbf{r} \qquad (2.4)$$

$$i[D, H] = H \qquad (2.5)$$

$$\frac{dD}{dt} = i[H, D] + \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \qquad (2.6)$$

$$i[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, \delta(\mathbf{r})] = \mathbf{r}\cdot\nabla\delta(\mathbf{r}) = -2\delta(\mathbf{r}) \qquad (2.7)$$

$$K = -t^2H + 2tD + \frac{1}{2}r^2 \qquad (2.8)$$

$$\frac{dK}{dt} = 0 \qquad (2.9)$$

$$\delta_K \mathbf{r} = i[K,\mathbf{r}] = t^2\dot{\mathbf{r}} - t\mathbf{r} \qquad (2.10)$$

$$i[K,D] = K \qquad (2.11)$$

$$i[H,K] = -D \qquad (2.12)$$

Πρόκειται να επιλύσουμε την 2.5 χρησιμοποιώντας την σχέση 2.3. Έχουμε:

$$[D,H] = [tH - \frac{1}{4}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}),H] = [tH,H] - \frac{1}{4}[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{r},H] =$$

$$= 0 - \frac{1}{4}\left[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}, \frac{\mathbf{p^2}}{\mathbf{2}} + \upsilon\cdot\delta(r)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left([r\cdot p,\frac{p^2}{2}] + [p\cdot r,\frac{p^2}{2}]\right.$$

$$+[p\cdot r,\upsilon\cdot\delta(r)] + [r\cdot p,\upsilon\cdot\delta(r)] \qquad (2.13)$$

Ξέρουμε ότι ισχύει η 2.7. Άρα η 2.13 γίνεται:

$$[D,H] = -\frac{1}{4}\left(\frac{r\cdot p^3}{2} - \frac{p^2\cdot r\cdot p}{2} + 2i\cdot\upsilon\delta(r)\right.$$

$$-\frac{p^3\cdot r}{2} - \frac{p\cdot r\cdot p^2}{2} + pr\upsilon\delta(r) - \upsilon\delta(r)pr$$

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$[r,p^3] = i\hbar 3p^2 \;\; II.2$$

$$[D,H] = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p[rp-pr]p + \frac{1}{2}i\hbar 3p^2 + 2i\upsilon\delta(r) + pr\upsilon\delta(r) - \upsilon\delta(r)pr\right)$$

Είναι:

$$pr\upsilon\delta(r) = \upsilon pr\delta(r) = -i\upsilon\nabla(r\delta(r)) = -i\upsilon\delta(r) + 2i\upsilon\delta(r) - i\upsilon r\delta(r)\nabla = \upsilon\delta(r)p + i\upsilon\delta(r) \;\; II.3$$

Επίσης:

$$\upsilon\delta(r)pr = -i\upsilon\delta(r) + \upsilon r\delta(r)p \;\; II.4$$

Επομένως από II.13, II.14, έχουμε:

$$[D,H] = -\frac{1}{4}(\frac{1}{2}ip^2 + \frac{1}{2}3ip^2 + 2i\upsilon\delta(r) + \upsilon\delta(r)rp + i\upsilon\delta(r) + i\upsilon\delta(r) - \upsilon r\delta(r)p = i[\frac{p^2}{2} + \upsilon\delta(r)] = iH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [D,H] = iH$$

Θα αποδείξουμε την 2.9. Από την 2.8 έχουμε:

$$K = -t^2 H + 2tD + \frac{1}{2}r^2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -2tH - t^2\frac{dH}{dt} + 2D + 2t\frac{dD}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} =$$

$$= -2tH - t^2 \cdot 0 + 2(tH - \frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt}) + 0 + \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = 0$$

Για την 2.11:

$$i[K,D] = i[-t^2H+2tD+\frac{1}{2}r^2, D] = i[-t^2H, D]+2it[D,D]+\frac{1}{2}i[r^2,D] = t^2H+0-\frac{1}{2}[D,r^2] =$$

$$= t^2H - \frac{1}{2}2(t\dot{r} - \frac{1}{2}r)r = t^2H - tr\dot{r} + \frac{1}{2}r^2 \;\; II.5$$

Έχουμε

$$\frac{d}{dt}(r^2\psi) = 2r\dot{r}\psi + r^2\dot{\psi} \Rightarrow r\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2 - \frac{r^2}{2}\frac{d}{dt} \;\; II.6$$

Από II.5 και II.6 έχουμε:

$$i[K,D] = t^2H - \frac{t}{2}(\frac{d}{dt}r^2 - r^2\frac{d}{dt}) + \frac{1}{2}r^2 \;\; 2.7$$

Αλλά: $\frac{d}{dt}r^2 = rp + pr = 4(tH - D) \quad 2.8$

Από τις II.6, II.7, II.8 έχουμε:

$$i[K,D] = t^2H - \frac{t}{2}(4(tH-D) - r^2\frac{d}{dt}) + \frac{1}{2}r^2 = K$$

Θα αποδείξουμε την σχέση 2.12:

$$i[H,K] = i[H, -t^2H+2tD+\frac{1}{2}r^2] = -it^2[H,H]+2it[H,D]+\frac{i}{2}[H,r^2] = 0-2tH+\frac{i}{2}[\frac{1}{2}p^2+\upsilon\delta(r), r^2] =$$

$$= -2tH + \frac{i}{2}[\frac{1}{2}p^2, r^2] = -2tH + \frac{i}{4}([p^2,r]r + r[p^2,r]) \;\; II.9$$

Από την ταυτότητα:

$$[r, p^n] = inp^{n-1}(2.22).$$

Άρα η II.9 γίνεται:

$$i[H,K] = -2tH + 2\frac{1}{4}(rp+pr) = -2D$$

Στοιχεία Θεωρίας

Ένα σύνολο από στοιχεία $X_a(a = 1, ..., r)$ ορίζει μία άλγεβρα Lie αν και μόνο αν:

Αξίωμα 1.

Ο μεταθέτης οποιονδήποτε δύο στοιχείων είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του συνόλου. Δηλαδή:

$$[X_\rho, X_\sigma] = \sum_\tau c^\tau_{\rho\sigma} X_\tau$$

Αξίωμα 2.

Οι μεταθέτες τριών στοιχείων του συνόλου ικανοποιούν την σχέση:

$$[X_\rho, [X_\sigma, X_\tau]] + [X_\sigma, [X_\tau, X_\rho]] + [X_\tau, [X_\rho, X_\sigma]] = 0$$

Θέτοντας $X_\rho = D, X_\sigma = K, X_\tau = H$, θα αποδείξουμε ότι οι παραπάνω τελεστές, όπως ορίζονται στο paper Scale, ορίζουν μιά άλγεβρα Lie. Ξεκινούμε από το αξίωμα 1. Από τις 2.5, 2.11, 2.12 είναι:

$$i[D, H] = H \Leftrightarrow [D, H] = -iH$$

$$i[K, D] = K \Leftrightarrow [K, D] = -iK$$

$$i[H, K] = -2D \Leftrightarrow [D, H] = 2iD$$

Άρα το πρώτο αξίωμα ικανοποιείται.

Για το δεύτερο αξίωμα, έχουμε:

$$D, [K, H]] + [K, [H, D]] + [H, [D, K]] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [D, -2iD] + [K, iH] + [H, iK] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2i[D, D] + [K, iH] - [K, iH] = 0$$

και άρα οι τελεστές H, D, K, αποτελούν μια άλγεβρα Lie.
Σειρά έχει τώρα να αποδείξουμε ότι οι τελεστές D, H, K είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι μεταξύ τους, έτσι ώστε η άλγεβρα που παράγουν να μπορεί να μετασχηματιστεί με γραμμικούς συνδυασμούς τους. Έτσι όπως θα δείξουμε στην συνέχεια οι τελεστές D, H, K παράγουν την άλγεβρα Λορεντζ στις $2+1$ διαστάσεις που καλείται $SO(2, 1)$.

Ξεκινούμε από τις σχέσεις:

$D = d_1 H + d_2 K$

$K = k_1 H + k_2 D$

$D = d_1 H + d_2 K$

Είναι $i[D, H] = H \Leftrightarrow i[d_1 H + d_2 K, H] = H \Leftrightarrow i[d_1 H, H] + i[d_2 K, H] = H \Leftrightarrow 2d_2 D = H$

Άρα, αντικαθιστώντας στην 2.5 παίρνουμε: $H = 0$. Άτοπον.

Άρα οι τελεστές H, K, D, είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι.

Το δεύτερο βήμα τώρα είναι να ορίσουμε τρείς γραμμικούς συνδιασμούς των H, D, K τέτοιους ώστε να ικανοποιούν τις μεταθετικές σχέσεις των τελεστών της άλγεβρας $SO(2,1)$.

Οι τελεστές της άλγεβρας $SO(2,1)$, έχουν ώς εξής:

$$[X_1, X_2] = X_3$$

$$[X_2, X_3] = -X_1$$

$$[X_3, X_1] = X_2$$

Θα ορίσουμε τους τέλεστές αυτούς ως συνδυασμούς των H, D, K. Είναι:

$$X_1 = a_1 H + a_2 D + a_3 K$$

$$X_2 = b_1 H + b_2 D + b_3 K$$

$$X_3 = g_1 H + g_2 D + g_3 K$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω, και λύνοντας το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων, με τη βοήθεια της $Mathematica$, παίρνουμε ως μια τυχαία λύση:

$$X_1 = H - \frac{1}{4} K$$

$$X_2 = H + \frac{1}{4} K$$

$$X_3 = iD$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποδεικνύουν ότι όντως, η εν λόγω αμετάβλητη άλγεβρα, που παράγεται είναι η $SO(2,1)$. Πρόκειται να λύσουμε την εξίσωση Schrodinger σε μία διάσταση.

Από τις 2.1, 2.2:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi(r)}{dx^2} + \upsilon\delta(r)\psi(r) = E\psi(r) \qquad (III.1)$$

Αυτή η εξίσωση χωρίζεται σε δύο μέρη ως εξής: για $r < 0$ και $r > 0$:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = E\psi(r) \Rightarrow$$

$$r < 0 : \psi(r) = A_r e^{ikr} + A_l e^{-ikr} \qquad (III.2)$$

$$r > 0 : \psi(r) = B_r e^{ikr} + B_l e^{-ikr} \qquad (III.3)$$

Όπου $k = \sqrt{2E}$.

Η συνέχεια στο $r = 0$ δίνει $A_r + A_l = B_r + B_l \qquad (III.4)$.

Ολοκληρώνοντας την III.1:

$$-\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2}\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \upsilon\delta(r)\psi(r) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E\psi(r) \Rightarrow$$

$$\left[\dot{\psi}(r)\right]_{-\epsilon}^{+\epsilon} - 2\upsilon\psi(0) = -2E \cdot 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A_r + A_l + B_r - B_l = \tfrac{2\upsilon}{ik}(A_r + A_l) \qquad (III.5)$$

Θα επιλύσουμε την 2.1 στις δύο και τρείς διαστάσεις. Έχουμε:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \qquad (III.6)$$

όπου:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hat{p}^2 = -\frac{1}{2}\nabla^2 \qquad (III.7)$$

$$\hat{H}_1 = \upsilon\delta(\boldsymbol{\rho}) \qquad (III.8)$$

Λετ:

$$\hat{H}_0|\phi >= E|\phi > \qquad (III.9)$$

Μια προφανής λύση της III.9 είναι: $\phi(\boldsymbol{\rho}) = e^{\pm ikr} \qquad (III.10)$

Ψάχνουμε για την γενική λύση:

$$(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)|\psi >= E|\psi > \qquad (III.11)$$

Ψάχνουμε για συγκεκριμένη λύση της III.11 που περιλαμβάνει την συνοριακή συνθήκη: $|\psi > \rightarrow |\phi >$ καθώς $\hat{H}_1 \rightarrow 0$. Άρα:

$$(III.11) \Rightarrow |\psi >= |\phi > + (E - \hat{H}_0)^{-1}\hat{H}_1|\psi > \qquad (III.11)$$

Δυστυχώς η σχέση$(E - \hat{H}_0)^{-1}$, παράγει απειρισμούς όταν $\hat{H}_0|\psi > \rightarrow E|\psi >$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μετατρέψουμε την $E - \hat{H}_0$ σε μια μιγαδική ποσότητα $E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon$, από την $III.11$, παίρνουμε την γνωστή σχέση Lippmann-Schwinger:

$$|\psi^{\pm} >= |\phi > + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}\hat{H}_1|\psi^{\pm} > \qquad (III.12)$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης Green έχουμε ότι:

$$\hat{G} = \sum_n \frac{|n >< n|}{\lambda_n - \lambda} \Rightarrow (\hat{L} - \lambda)\hat{G} = \sum_n (\hat{L} - \lambda)\frac{|n >< n|}{\lambda_n - \lambda} =$$

$$= \sum (\lambda_n|n > -\lambda|n >)\frac{< n|}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n |n >< n| = \hat{I}$$

Θέτοντας $\hat{L} - \lambda = \hat{H}_0 - E$ η III.12 γίνεται $|\psi^{\pm} >= |\phi > -2\hat{G}\hat{H}_1|\psi^{\pm} >$

Η σχέση Lippmann-Schwinger μπορεί να μετατραπεί σε ολοκληρωτική μορφή, με πολλαπλασιασμό εκ αριστερών με $< r|$:

$$\psi^{\pm}(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}) + < \boldsymbol{\rho}|\frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}\hat{H}_1|\psi^{\pm} > \qquad (III.13)$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $\int_V |\boldsymbol{\rho} >< \boldsymbol{\rho}| = \hat{I}$, άρα η $III.13$ γίνεται:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}) + \int < \boldsymbol{\rho}|\frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}|\acute{\boldsymbol{\rho}} >< \acute{\boldsymbol{\rho}}|\hat{H}_1|\psi > d^n\acute{\boldsymbol{\rho}} \qquad (III.14)$$

Γνωρίζουμε ότι ο διαδότης Feynman είναι μια συνάρτηση Green για τον τελεστή Klein-Gordon. Αυτό σημαίνει ότι:

$$G(\boldsymbol{\rho}, \acute{\boldsymbol{\rho}}) = -\frac{1}{2} < \boldsymbol{\rho}|\frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}|\acute{\boldsymbol{\rho}} > \qquad (III.15)$$

Άρα η III.14 γίνεται:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}) - \int 2G(\boldsymbol{\rho}, \acute{\boldsymbol{\rho}})\hat{H}_1\psi(\acute{\boldsymbol{\rho}})d^n\acute{\boldsymbol{\rho}} \qquad (III.16)$$

Από τις III.8 και III.16 έχουμε:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}) - \int 2G(\boldsymbol{\rho}, \acute{\boldsymbol{\rho}})\upsilon\delta(\acute{\boldsymbol{\rho}})\psi(\acute{\boldsymbol{\rho}})d^n\acute{\boldsymbol{\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(\boldsymbol{\rho}) = e^{ikr} - 2\upsilon G_k(r)\psi(0) \qquad (3.16)$$

Άρα η 3.17 είναι προφανής από τα παραπάνω. Θα αποδείξουμε την 3.3. Από τις 3.1 και 3.16 έχουμε:

$$\phi(\boldsymbol{\pi}) = \int d^n\boldsymbol{\rho} e^{ipr}(e^{ikr} - 2\upsilon G_k(\boldsymbol{\rho})\psi(0)) =$$

$$= \int e^{ir(k-p)} - 2\upsilon\psi(0)\int e^{ipr}G_k(\boldsymbol{\rho})d^n\boldsymbol{\rho} =$$

$$= (2\pi)^n\delta(p-k) - (2\pi)^n 2\upsilon\psi(0)G(\boldsymbol{\pi}) =$$

$$= (2\pi)^n\delta(p-k) - \frac{2\upsilon\psi(0)}{p^2 - k^2 - i\epsilon} \qquad (III.17)$$

Άρα η 3.3 απεδείχθη.

Στα τελευταία βήματα χρησιμοποιήσαμε ότι: $\int e^{ipr}G_k(\boldsymbol{\rho})d^n\boldsymbol{\rho}$είναι μετασχηματισμός Fourier της $G(\boldsymbol{\pi})$.

Επιπροσθέτως θα αποδείξουμε ότι:

$$G(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{p^2 - k^2 - i\epsilon}$$

Ο διαδότης Feynman εκφράζεται ως:

$$iG(r, \acute{r}) \equiv \Theta(\acute{t} - t) < 0|\hat{\phi}(\acute{r})\hat{\phi}(r)|0 > +\Theta(t - \acute{t}) < 0|\hat{\phi}(r)\hat{\phi}(\acute{r})|0 >$$

Όπου Θ είναι η step function

$$\Theta(\tau) \equiv i lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho}{2\pi}\frac{exp[-i\rho\tau]}{\rho + i\epsilon}$$

Έτσι,

$$iG(r,\acute{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} exp[-ip(r-\acute{r})] \frac{1}{2E_p} lim_{\epsilon\to 0} \left[-\frac{i}{p_0+E_p-i\epsilon} + \frac{i}{p_0-E_p+i\epsilon} \right]$$

Και με μετασχηματισμό Fourier της ανωτέρω έκφρασης:

$$G(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{p^2-k^2-i\epsilon}$$

Θα αποδείξουμε τις εκφράσεις 3.4 και 3.5. Με μετασχηματισμό Fourier της 3.1 έχουμε:

$$\psi(r) = \int \frac{d^n\boldsymbol{\pi}}{(2\pi)^n} e^{-ipr}\phi(\boldsymbol{\pi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(0) = \int \frac{d^n\boldsymbol{\pi}}{(2\pi)^n} e^0\phi(\boldsymbol{\pi})$$

$$\Rightarrow \int d^n\boldsymbol{\pi}\delta(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\varkappa}) - 2\upsilon\psi(0)\int \frac{d^n\boldsymbol{\pi}}{(2\pi)^n}\frac{1}{\boldsymbol{\pi}^2-\boldsymbol{\varkappa}^2-i\epsilon} =$$

$$= 1 - 2\upsilon\psi(0)I_n(-k^2-i\epsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon\psi(0) = \frac{\upsilon}{1+2\upsilon I_n(-k^2-i\epsilon)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(0) = \frac{1}{\frac{1}{\upsilon}+2I_n(-k^2-i\epsilon)} \qquad (III.18)$$

Όπου $I_n(z) = \int \frac{d^np}{(2\pi)^n}\frac{1}{p^2+z}$ $\qquad (III.19)$. Άρα οι 3.4 και 3.5 απεδείχθησαν.
Για $n=2$ έχουμε:

$$I_2(z) = \int \frac{dpd\phi}{(2\pi)^2}\frac{p}{p^2+z} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[ln(p^2+z)\right] \qquad (III.20)$$

Για $n=3$ έχουμε:

$$I_3(z) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2+z} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{p^2 sin(\theta)dpd\theta d\phi}{p^2+z} =$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\Lambda \frac{p^2}{p^2+z}dp = \frac{1}{2\pi^2}\left[p-\sqrt{z}tan^{-1}\left(\frac{p}{\sqrt{z}}\right)\right]_0^\Lambda \qquad (III.21)$$

Όπου στο τελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε την Wolfram Mathematica για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Θέτοντας $\Lambda \to \infty$, παίρνουμε την 3.7.

Θα αποδείξουμε την 3.19. Από την 3.17 έχουμε:

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(r) = -\delta(r) \Rightarrow \int (\nabla^2 + k^2)G_k(r) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \nabla^2 G(r) d^n r + \int k^2 G(r) d^n r = -1 \qquad (III.22)$$

Για $\nu = 3$ και θέτοντας $G_k(r) = \frac{f(r)}{r}$, η III.22 γίνεται:

$$\int \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d(\frac{f(r)}{r})}{dr}\right) r^2 dr sin(\theta) d\theta d\varphi + \int k^2 \frac{f(r)}{r} d^3 r = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi(r\dot{f}(r) - f(r)) + 4\pi \int k^2 r f(r) dr = -1 \Rightarrow 4\pi r \ddot{f} + 4\pi k^2 r f = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{1}{4\pi} exp(ikr) \Rightarrow G_k(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{exp(ikr)}{r} \qquad (III.23)$$

Άρα η 3.19 απεδείχθη.

Θα αποδείξουμε την 3.2. Από την 3.2 με πολλαπλασιασμό και των δύο μερών με: $\frac{e^{-ipr}}{(2\pi)^n}$ και ολοκλήρωση, παίρνουμε:

$$(p^2 - k^2) \int d^n p \frac{e^{-ipr}}{(2\pi)^n} \phi(p) = -2\upsilon\psi(0) \int d^n p \frac{e^{-ipr}}{(2\pi)^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^2 - k^2)\psi(r) = -2\upsilon\psi(0)\delta(r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^2 - k^2)(e^{ikr} - 2\upsilon G_k(r)\psi(0)) = -2\upsilon\psi(0)\delta(r) \Leftrightarrow (p^2 - k^2)(e^{ikr}) - 2\upsilon\psi(0)(p^2 - k^2)G_k(r) = -2\upsilon\psi(0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 2\upsilon\psi(0)\delta(r) = -2\upsilon\psi(0)\delta(r)$$

Άρα η 3.2 απεδείχθει. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\psi(r)}{-2\upsilon\psi(0)}$ είναι συνάρτηση Green για την εξίσωση Helmholtz. Θα αποδείξουμε την 3.18. Θα το κάνουμε και για τις δύο περιπτώσεις $k^2 > 0$ και για $k^2 < 0$. Από την 3.17 και θέτοντας $G_k(r) = \phi(x, y)$, παίρνουμε:

$$-(\nabla^2 + k^2)\phi(r) = \delta(r) \Leftrightarrow -(\nabla^2 + k^2)\phi(x, y) = \delta(x)\delta(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \phi(x, y) = -\delta(x)\delta(y) \qquad (III.24)$$

Υποθέτουμε ότι:

$$\phi|_{\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow\infty} = \frac{\partial\phi}{\partial x}|_{\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow\infty} = \frac{\partial\phi}{\partial y}|_{\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow\infty} = 0 \qquad (III.25)$$

Με μετασχηματισμό Fourier της III.24 παίρνουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} + k^2\phi(x,y) = -\delta(x)\delta(y)\right)exp(i\xi x)dx\right]exp(i\eta y)dy \qquad (II$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\phi(x,y)exp(i\xi x)\right) = \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}exp(i\xi x) - \xi^2\phi(x,y)exp(i\xi x) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}exp(i\xi x) = \xi^2\phi(x,y)exp(i\xi x) \qquad (III.27)$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την III.25 έτσι ώστε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\phi(x,y)exp(i\xi x)\right)dx = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x,y)exp(i\xi x))\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Ορίζουμε:

$$\bar{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)exp(+i\xi x)dx \qquad (III.28)$$

Και με μετασχηματισμό Fourier:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\phi}(\xi)exp(-i\xi x)d\xi \qquad (III.29)$$

Επίσης ορίζουμε:

$$\tilde{\phi}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)exp(+i\eta y)dy \qquad (III.30)$$

Και με μετασχηματισμό Fourier:

$$\phi(y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\phi}(\eta)exp(-i\eta y)d\eta \qquad (III.31)$$

Τελικά:

$$\tilde{\bar{\phi}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,y)exp(+i\xi x)dx\right]exp(+i\eta y)dy \qquad (III.32)$$

Σαν αποτέλεσμα η III.26 γίνεται:

$$\xi^2\tilde{\bar{\phi}} + \eta^2\tilde{\bar{\phi}} + k^2\tilde{\bar{\phi}} = -1 \Rightarrow \tilde{\bar{\phi}} = \frac{-1}{\xi^2+\eta^2+k^2} \qquad (III.33)$$

Από τις III.31 και III.33 παίρνουμε:

$$\bar{\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-exp(-i\eta y)d\eta}{\xi^2+\eta^2+k^2} \qquad (III.34)$$

Χρησιμοποιώντας το Mathematica για την III.34 παίρνουμε:

$$\bar{\phi} = \frac{exp(-\sqrt{\xi^2+k^2}|y|)}{2\sqrt{\xi^2+k^2}} \qquad (III.35)$$

Από την III.29 παίρνουμε:

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{exp(-|y|\sqrt{\xi^2-k^2})exp(-i\xi x)d\xi}{\sqrt{\xi^2-k^2}} \qquad (III.34)$$

Το ανωτέρω ολοκλήρωμα μπορεί να μετασχηματιστεί σε τρία ολοκληρώματα ακολούθως:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{exp(-|y|\sqrt{\xi^2-k^2})exp(-i\xi x)d\xi}{\sqrt{\xi^2-k^2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\eta^2-k^2}} cos(y\sqrt{\eta^2+k^2})exp(-\eta x)d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{k} \frac{1}{\sqrt{k^2-\eta^2}} cos(y\sqrt{k^2-\eta^2})sin(\eta x)d\eta$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{k} \frac{1}{\sqrt{k^2-\eta^2}} cos(y\sqrt{k^2-\eta^2})cos(\eta x)d\eta \qquad (III.35)$$

Για τα δύο τελευταία ολοκληρώματα (Gradshteyn and Ryzhik 1980, ππ. 755, 6.677, No.4):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\eta^2-k^2}} cos(y\sqrt{\eta^2+k^2})exp(-\eta x)d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{k} \frac{1}{\sqrt{k^2-\eta^2}} cos(y\sqrt{k^2-\eta^2})sin(\eta x)d\eta =$$

$$= -\frac{\pi}{2} Y_0(k\sqrt{y^2+x^2}) \qquad (III.36)$$

Και για το τελευταίο ολοκλήρωμα της III.35 (Erdelyi 1954, ππ. 28, 42):

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^k \frac{1}{\sqrt{k^2-\eta^2}} cos(y\sqrt{k^2-\eta^2}) cos(\eta x) d\eta = \frac{\pi}{2} J_0(k\sqrt{y^2+x^2}) \qquad (III.37)$$

Απο τις εκφράσεις III.34, III.35, III.36, III.37, παίρνουμε ότι:

$$G_k(r) = \phi = -\frac{i}{2} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2+y^2}) = -\frac{i}{2} H_0^{(2)}(kr) \qquad (III.38)$$

Από standard formulas:

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[1 - \frac{8i}{kr} + \cdots\cdots \frac{[(2n-1)!!]^2}{(8i)^n!} \frac{1}{(kr)^n} + \cdots \right] \exp(i(kr+\frac{\pi}{4})) \qquad (III.39)$$

Κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο, καθώς $r \to \infty$ παίρνουμε:

$$G_k(r) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}} \exp(i(kr+\frac{\pi}{4})) \qquad (III.40)$$

Η ομογενής κυμματοσυνάρτηση προκύπτει ως εξής:

$$u_{tt} - \nabla^2 = 0 \qquad (III.41)$$

$u(x,0) = f(x)$ αρχικές χωρικές συνθήκες $\qquad (III.42)$

$u_t(x,0) = g(x)$ αρχικές συνθήκες ταχύτητας $\qquad (III.43)$.

Ο μετασχηματισμός Fourier δίνει:

$$\hat{u}(k) = \int exp(ikr) u(r) d^n r$$

ανδ

$$u(r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int exp(-ikr) \hat{u}(k) d^n k \qquad (III.44)$$

Μια προφανής λύση στην III.41 είναι: $u_{tt}(k,t) = -|k|^2 u(k,t)$ $\qquad (III.45)$.
Η γενική λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες III.42, III.43, είναι:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)cos(kt) + \hat{g}(k)\frac{sin(kt)}{k} \qquad (III.46)$$

Στην περίπτωση $k = 0$, θα πάρουμε το όριο $k \to 0$. Με την σύμβαση μας, σύμφωνα με το convolution theorem, έχουμε:

$$\hat{u}\hat{v} = u \mathbin{\hat{*}} v \qquad (III.47)$$

και:

$$\widehat{uv} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\hat{u} * \hat{v}) \qquad (III.48)$$

Επιστρέφοντας στον πραγματικό χώρο, παίρνουμε:

$$u(r,t) = \partial_t G_t(r) * f + G_t(r) * g \qquad (III.49)$$

Και με μετασχηματισμό Fourier:

$$G_t(r) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int exp(-ikr)\frac{sin|k|t}{|k|}d^n k \qquad (III.50)$$

Και για όλες τις διαστάσεις d:

$$G_t(r) = lim_{\epsilon \to 0^+}\frac{C_d}{d-1}[|r|^2 - (t-i\epsilon)^2]^{-(d-1)/2}] \qquad (III.51)$$

Όπου $C_d = \pi^{-(d+1)/2}\Gamma((d+1)/2)$ $\qquad (III.52)$.

Για $d = 2$:

$$G_t(r) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - r^2}} \qquad (III.53)$$

Με μετασχηματισμό Fourier της III.53 παίρνουμε:

$$G_k(r) = \int_r^\infty \frac{exp(ikt)}{2\pi\sqrt{t^2 - r^2}}dt$$

Θέτοντας $t = rcosh(\theta) \Leftrightarrow dt = rsinh(\theta)d\theta$. Παίρνουμε:

$$G_k(r) = \int_0^\infty \frac{exp(ikrcosh\theta)rsinh\theta}{2\pi r\sqrt{cosh^2\theta - 1}}d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} exp(ikrcosh\theta)d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} cos(krcosh\theta)d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{\infty} sin(krcosh\theta)d\theta = -\frac{1}{4}Y_0(kr) + \frac{i}{4}J_0(kr) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_k(r) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr)$$

Και έτσι η 3.18 έχει αποδειχθεί. Θα αποδείξουμε τις εξισώσεις 3.20 και 3.21. Ξεκινώντας από την 3.16 και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις του $G_k(r)$ που βρήκαμε στις 3.18 και 3.19 έχουμε:

Για $n = 2$:

$$\psi(r) \to exp(ikr) + \frac{1}{\sqrt{r}}f(\theta)exp(i(kr + \frac{\pi}{4}))$$

Για $n = 3$:

$$\psi(r) \to exp(ikr) + \frac{1}{r}f(\theta)exp(ikr)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, αντικαταστήσαμε τους όρους που δεν εξαρτώνται από το r με $f(\theta)$. Ο όρος $exp(ikr)$ αναφέρεται στο εισερχόμενο κύμα και τα υπόλοιπα στο σκεδασμένο. Συγκρίνοντας τις 3.20 και 3.21, με την 3.16 παίρνουμε:

$$n = 2 : f(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\upsilon\psi(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left(-\frac{1}{g} - \frac{1}{\pi}ln\frac{k}{\mu} + \frac{i}{2}\right)^{-1}$$

$$n = 3 : f(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\upsilon\psi(0) = -\left(\frac{2\pi}{g} + ik\right)^{-1}$$

Μπορούμε να συμπεράνουμε από τα παραπάνω ότι οι 3.20 και 3.23 απεδείχθησαν.

Θα αποδείξουμε την 3.28. Ξεκινάμε από την 3.3:

$$\phi(p) = (2\pi)^n\delta(p - k) - \frac{2\upsilon}{p^2 - k^2 - i\epsilon}\psi(0)$$

Αντικαθιστώντας: $E = -B, B > 0$ και $k = i\sqrt{2B}$ έχουμε ότι $p - k$ (στην 3.3) είναι μονίμως φανταστικό και σαν αποτέλεσμα $p - k \neq 0$ η 3.3 θα γίνει:

$$\phi(p) = (2\pi)^n * 0 - \frac{2\upsilon}{p^2 - k^2 - i\epsilon}\psi(0)$$

και άρα η 3.28 έχει αποδειχθεί. Θα αποδείξουμε τις εκφράσεις 3.29α και 3.29β. Από την 3.4:

$$\psi_B(0) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\phi(p)exp(-p*0)$$

Αντικαθιστώντας $\phi_B(p)$ από την 3.28:

$$\psi_B(0) = -2\upsilon \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{\psi_B(0)}{p^2+2B} \Leftrightarrow \frac{-1}{2\upsilon} = I_n(2B)$$

Όπου η $I_n(z)$ έχει οριστεί στην 3.5. Άρα οι 3.29α και 3.29β απεδείχθησαν. Θα αποδείξουμε την 3.30. Με μετασχηματισμό Fourier της 3.28 έχουμε:

$$\psi(r) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\phi_B(p)exp(-ipr) = -\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{2\upsilon\psi_B(0)}{p^2+2B}exp(-ipr) \qquad (III.54)$$

Για ν = 2, χρησιμοποιώντας την Mathematica:

$$\psi(r) = \frac{-i\pi exp(\sqrt{2B}r)2\upsilon\psi_B(0)}{(2\pi)^2}$$

Άρα:

$$\psi^*(r)\psi(r) = \frac{\pi^2(2\upsilon\psi_B(0))^2 exp(-2\sqrt{2B}r)}{(2\pi)^4} \Rightarrow \int_0^\infty \psi*\psi 2\pi r = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2\psi_B^2(0)}{2\pi}\int_0^\infty rexp(-2\sqrt{2B})dr = 1 \Rightarrow 2\upsilon^2\psi_B^2(0) = \pm\sqrt{8}$$

Και έτσι απεδείχθη η 3.30. Θα αποδείξουμε την 3.31. Από την III.54 για ν = 3, έχουμε:

$$\psi(r) = \int \frac{4\pi dp}{(2\pi)^3}\frac{c}{p^2+2B}exp(-ipr)$$

Όπου $c = 2\upsilon\psi_B(0)$. Η σειρά της 3.9. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{d^{2\omega}r}{(r^2+m^2)} = \pi^\omega\frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(1)}\frac{1}{(m^2)^{1-\omega}}$$

Θέτοντας $m^2 = z, \omega = \frac{3}{2}$ παίρνουμε:

$$I_3(z) = -\frac{1}{4\pi}\sqrt{z}$$

Και η 3.9 απεδείχθη. Για την 3.8.

$$I_n(z) = \int_0^\infty \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\frac{1}{p^2+z}$$

Θέτοντας $n = 2 - \epsilon$:

$$I_2^{\epsilon}(z) = \int_0^{\infty} \frac{d^{(2-\epsilon)}p}{(2\pi)^{(2-\epsilon)}} \frac{1}{p^2 + z} \qquad (III.55)$$

Ξέρουμε από την θεωρία ότι η επιφάνεια μιας $(d-1)$ διάστασης σφαίρας είναι: $\frac{2\pi^{(d/2)}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$. Αντικαθιστώντας στην III.55 παίρνουμε:

$$I_2^{\epsilon}(z) = \int_0^{\infty} \frac{2\pi^{(1-\frac{\epsilon}{2})}}{\Gamma(1-\frac{\epsilon}{2})} \frac{dp}{(2\pi)^{(2-\epsilon)}} \frac{p^{(1-\epsilon)}}{p^2 + z}$$

Θα αποδείξουμε την έκφραση 3.7. Περιορίζοντας την ορμή $|p|$ στο Λ έχουμε:

$$I_3^{\Lambda}(z) = \int_0^{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + z} = \int_0^{\Lambda} \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2}{p^2 + z} \qquad (III.56)$$

Χρησιμοποιώντας την Mathematica για το παραπάνω ολοκλήρωμα, η III.56 γίνεται:

$$I_3^{\Lambda}(z) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\Lambda - \sqrt{|z|} ArcTan(\frac{\Lambda}{\sqrt{|z|}}) \right) \qquad (III.57)$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι για μεγάλα Λ η $\mathrm{ArcTan}(\Lambda) \to \frac{\pi}{2}$. Άρα η III.57 γίνεται 3.7. Θα αποδείξουμε την 3.10. Από την 3.4 έχουμε:

$$\upsilon\psi(0) = \left(\frac{1}{\upsilon} + 2I_n(-k^2 - i\epsilon) \right)^{-1}$$

Για $n = 2$ και από την 3.6 έχουμε:

$$I_2^{\Lambda} = \frac{1}{4\pi} ln \frac{\Lambda^2}{(-k^2 - i\epsilon)} \qquad (III.58)$$

Θα υπολογίσουμε την ποσότητα $ln\left[-(k^2 + i\epsilon)\right]$. Υποθέτοντας ότι $ln\left[-(k^2 + i\epsilon)\right] = x$ έχουμε:

$$-k^2 - i\epsilon = exp[x] \Rightarrow -k^2 \left(1 + \frac{i\epsilon}{k^2}\right) = exp[r]exp[i\phi] \Rightarrow r = lnk^2$$

και $\phi = \pi$ και αντικαθιστώντας στην III.58 η 3.10 έχει αποδειχθεί. Σειρά της 3.11. Ξεκινωντας από την III.7, έχουμε: $\sqrt{z} = \sqrt{-k^2 - i\epsilon} = ik$, για $\epsilon \to 0$.

Και άρα η 3.11 απεδείχθη. Η σειρά της 3.28. Από την 3.2 ξέρουμε ότι $\frac{k^2}{2} = E = -B \Rightarrow k = i\sqrt{2B}$. Σαν αποτέλεσμα έχουμε: $p - k = p - i\sqrt{2B} \neq 0$ ανδ $p^2 - k^2 = p^2 + 2B \neq 0$. Άρα η 3.3, γίνεται 3.28. Με μετασχηματισμό Fourier της 3.1 παίρνουμε $\psi(r) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} exp[ipr]\phi(p) \Rightarrow \psi(0) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} exp[0]\phi(p)$ και αντικαθιστώντας στην 3.28 παίρνουμε:

$$\psi_B(0) = -2\upsilon \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{p^2 + 2B} \psi_B(0)$$

που είναι η 3.29α. Αφαιρώντας το $\psi_B(0)$ και από τα δύο μέλη και ενθημούμενοι την 3.5 παίρνουμε την 3.29β. Θα προσπαθήσουμε την 3.30. Με Φουριερ στην 3.1 παίρνουμε:

$$\psi(r) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} exp[-ipr]\phi_B(p) = -\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} exp[-ipr] \frac{2\upsilon\psi_B(0)}{p^2 + 2B} \qquad (III.59)$$

Θα υπολογίσουμε την ποσότητα $\psi^*(r)\psi(r)$. Από την III.59 και για $n = 2$ παίρνουμε:

$$\psi^*(r)\psi(r) = -\frac{i\pi exp[-\sqrt{2B}r]}{(2\pi)^2}(2\upsilon\psi_B(0))\frac{i\pi exp[-\sqrt{2B}r]}{(2\pi)^2}(2\upsilon\psi_B(0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi^*(r)\psi(r) = \frac{(\upsilon\psi_B(0))^2}{(2\pi)^2} exp[-2\sqrt{2B}r] \qquad (III.60)$$

Τώρα πρόκειται να υπολογίσουμε την ποσότητα $\int\int \psi^*(r)\psi(r) dr d\phi = \int \psi^*(r)\psi(r) dr 2\pi$ και χρησιμοποιώντας την III.60 έχουμε:

$$\int \psi^*(r)\psi(r) dr 2\pi = \frac{(\upsilon\psi_B(0))^2}{2\pi} \int r exp[-2\sqrt{2B}r] dr \Rightarrow \frac{(\upsilon\psi_B(0))^2}{8\pi(\sqrt{2B})^2} = 1 \Rightarrow -2\upsilon\psi_B(0) = 8\sqrt{\pi B}$$

που θυμίζει την 3.30. Σειρά της 3.32. Από την 3.4 ξέρουμε ότι:

$$\upsilon\psi(0) = \frac{1}{\upsilon} + 2I_n(-k^2 - i\epsilon)$$

Από την 3.29β: $-\frac{1}{2\upsilon} = I_n(2B)$. Και αντικαθιστώντας στην 3.4 παίρνουμε την 3.32. Θα αποδείξουμε την 3.33. Από την 3.22 ξέρουμε ότι:

$$f(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \upsilon\psi(0)$$

Αντικαθιστώντας $\upsilon\psi(0)$ από την 3.32 παίρνουμε:

$$I_2(-k^2 - i\epsilon) = \frac{1}{4\pi} ln(\frac{\Lambda^2}{-k^2 - i\epsilon})$$

Έχουμε: $ln(-k^2-i\epsilon) = x \Leftrightarrow -k^2-i\epsilon = exp[x]$. Ας υποθέσουμε ότι $x = r+i\psi$. Τότε έχουμε $x = ln[k^2] + i\pi$. Για $I_2(2B)$ έχουμε:

$$I_2(2B) = \frac{1}{4\pi}ln(\frac{\Lambda^2}{2B})$$

Αντικαθιστώντας $I_2(-k^2 - i\epsilon)$ και $I_2(2B)$ στην 3.32 αποδεικνύουμε την 3.33. Τώρα η 3.34. Αντικαθιστώντας z στην 3.7 παίρνουμε:

$$I_3^{\Lambda}(2B) = \frac{1}{2\pi^2}\Lambda - \frac{1}{4\pi}\sqrt{2B}$$

$$I_3^{\Lambda}(-k^2 - i\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\Lambda - \frac{1}{4\pi}\sqrt{-k^2 - i\epsilon} = \frac{1}{2\pi^2}\Lambda + \frac{1}{4\pi}ik$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην 3.23 θα πάρουμε την 3.34. Τώρα η 3.37. Ξεκινώντας από την 3.35:

$$\frac{1}{2\pi}ln\frac{\Lambda^2}{2B} = \frac{1}{\pi}ln\frac{\Lambda}{\sqrt{2B}} = -\frac{1}{\upsilon} \Rightarrow -\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\pi}ln\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{1}{\pi}ln\frac{\sqrt{2B}}{\mu} \Rightarrow \frac{1}{\pi}ln\frac{\Lambda}{\mu} = -\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{\pi}ln\frac{\sqrt{2B}}{\mu}$$

Αντικαθιστώντας στην 3.14 παίρνουμε: $\frac{1}{g} = \frac{1}{\pi}ln\frac{\sqrt{2B}}{\mu} \Rightarrow \sqrt{2B} = \mu exp[\frac{\pi}{g}]$. Που είναι η 3.37. Ομοίως για την 3.38, ξεκινώντας από την 3.36:

$$-\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\pi^2}\Lambda - \frac{1}{2\pi}\sqrt{2B}$$

Σολινγ φορ $\frac{1}{\pi^2}\Lambda$, ανδ συβστιτυτινγ ιν 3.15, ωε γετ: $\sqrt{2B} = \frac{2\pi}{g}$ Σειρά έχουν οι 3.40 και 3.41, ακολούθως: Ξεκινάμε από τη Lippmann - Schwinger, III.14 και 3.39. Έχουμε:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}) + \int <\boldsymbol{\rho}|\frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}|\boldsymbol{\acute{\rho}}><\boldsymbol{\acute{\rho}}|\hat{H}_1|\psi> d^n\boldsymbol{\acute{\rho}}$$

Γνωρίζουμε από την III.15 την έκφραση $G_k(r)$. Επίσης θα αντικαταστήσουμε την σχέση 3.39. Στις δύο διαστάσεις:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}) + \int <\boldsymbol{\rho}|\frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon}|\boldsymbol{\acute{\rho}}><\boldsymbol{\acute{\rho}}|\frac{\upsilon\delta(\boldsymbol{\acute{\rho}} - R)}{2\pi R}|\psi(\boldsymbol{\acute{\rho}})> d^2\boldsymbol{\acute{\rho}}$$

$$= \phi(r) + G_k(r - R)\frac{\upsilon}{2\pi R}\psi(R)$$

1.3 Συμπεράσματα.

Αναφερόμενοι στην μη σχετικιστική κβαντομηχανική, χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους $\hbar$ και m ως θεμελιώδεις παραμέτρους που ορίζουν ένα σύστημα μονάδων. Επιλέξαμε $\hbar = 1$ και $m = 1$ με αποτέλεσμα να υπάρχει μόνο μία στοιχειώδης διάσταση $\Lambda = L^{-1}$ που εκφράζει την ορμή. Στον Πίνακα 1, παρουσιάσαμε τις κυριότερες φυσικές ποσότητες και τις διαστάσεις που αποκτούν. Παρουσιάσαμε το θεώρημα Π, της διαστατικής ανάλυσης και τις συνέπειες του. Στο κεφάλαιο (2) του $Scale$, παρουσιάσαμε τη μη σχετικιστική εξίσωση $Schrodinger$ και σχολιάσαμε την παράμετρο υ της (2.1). Αποδείξαμε όλες τις σχέσεις μετάθεσης τελεστών (2.3) - (2.12). Παρουσιάσαμε τις σχέσεις μετάθεσης, γεννητόρων της $SO(2,1)$. Είδαμε πως οι τελεστές D, K, H ανάγονται σε τελεστές της $SO(2,1)$. Στο κεφάλαιο $3.A$, εφαρμόσαμε τις μεθόδους $renormalization$ και $regularization$ και αποδείξαμε τις (3.6) - (3.11). Έγινε εκτενής αναφορά σε $Green's\ functions$ και $propagators$. Τέλος χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης, δείξαμε ότι η εμφάνιση ενός παράγοντα $ln(k)$ στην $scattering\ phase\ shift$ στις δύο διαστάσεις, σπάει την συμμετρία $SO(2,1)$.

2 Μέρος II: Ένα Μοντέλο Αυθόρμητου Σπασίματος Συμμετρίας Βαθμίδος.

2.1 Εισαγωγή.

Ένα από τα χρόνια προβλήματα στην σύγχρονη φυσική στοιχειωδών σωματίων είναι το πρόβλημα ιεραρχιών. Αυτό το πρόβλημα, παρουσιάζεται όταν κάποια σταθερά (π.χ. μάζα) που εμφανίζεται σε κάποια Λαγρανζιανή έχει πολύ διαφορετική τιμή, από εκείνη του πειράματος ($effective\ value$).

Αυτή η διαφορά οφείλεται πολύ συχνά στην μη εφαρμογή της διαδικασίας επανακανονικοποίησης ($renormalization$).

Έχουν προταθεί πολλές λύσεις σε ότι αφορά το παραπάνω πρόβλημα. Συνοπτικά, είναι:

- $Supersymmetry$
- $Standard\ Model$

- *Extra Dimensions* :
  - *Braneworld Models*
  - *Finite Groups*

Στην συγκεκριμένη μελέτη, θσ ασχοληθούμε με μία επιπρόσθετη, πέμπτη, διάσταση. Πιο αναλυτικά θα αναλύσουμε την περίπτωση πέμπτης διάστασης με $orbifold\ S^1/Z_2$.

Το κλειδί στην περίπτωση μας είναι ότι στις μη αβελιανές θεωρίες ($[A, B] \neq 0$), μπορούμε να αντιστοιχίσουμε, μη τετριμμένη Z_2, ομοτιμία, έτσι ώστε τα πεδία να μετασχηματίζονται σε *irreducible representations* της ομάδας βαθμίδας. Θυμίζουμε εδώ ότι με τον όρο *irreducible representation*, (Π, V), μιας αλγεβρικής δομής A, ορίζουμε μια μη μηδενική αναπαράσταση που δεν έχει *subrepresentation* : (Π, W), $W \subset V$ κλειστή κάτω από τη δράση του $\Pi(a)$, $a \in A$. Εδώ ορίζουμε ως δράση ενός *group* G στο σύνολο X έναν ομομορφισμό $h : G \to X\ h(a \times b) = h(a) \times h(b)$. Έτσι για παράδειγμα, στις 5 διαστάσεις, η θεωρία βαθμίδας (ανεπηρρέαστη $Lagranzian$) είναι ανεξάρτητη κάτω από τους μετασχηματισμούς Z_2. Έτσι τα πεδία μας, φερμιονικό ψ, βαθμωτό A_μ, $\mu = 0 - 3$ και A_y (πέμπτη διάσταση) μετασχηματίζονται ως:

$$\psi \to P\gamma_5\psi$$
$$A_\mu \to PA_\mu P$$
$$A_y \to -PA_y P$$

Σε αυτή τη μελέτη, θα δούμε ότι οι μάζες που δημιουργούνται από την Z_2 ομοτιμία, ($Parity$) τροποποιούνται από την $Vacuum\ Expectation\ Value$, του πεδίου $\langle A_y \rangle$. Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τον μηχανισμό $Hosotani$, κατά τον οποίο η συμμετρία βαθμίδος σπάει αυθόρμητα από ένα $Wilson\ Loop$:

$$W = Pexp[ig \oint \langle A_y \rangle dy]$$

Επίσης θα δείξουμε ότι η μή τετριμένη ομοτιμία Z_2, προκαλεί όχι μόνο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας βαθμίδος, αλλά επίσης σπάσιμο χειρικής συμμετρίας, με αποτέλεσμα την δυναμική δημιουργία μάζας για τα $zero - mode$ - φερμιόνια (λύσεις της εξίσωσης ενός τελεστή, με μηδενική ιδιοτιμή, π.χ. εξίσωση $Dirac$, χωρίς μάζα).

Μπορούμε επίσης, να εκλέξουμε μια μη τετριμένη, τιμή για τον τελεστή της ομοτιμίας, P, έτσι ώστε τα ζευγάρια: ψ_{1R} και ψ_{2L} να έχουν την ίδια ομοτιμία, ενώ το πεδίο A_y να έχει άρτια ομοτιμία. Έτσι η VEV του πεδίου A_y είναι επιτρεπτή και δημιουργεί μάζα για τα φερμιόνια της τάξεως: $g\langle A_y \rangle$. Αυτό μπορούμε να το εξηγήσουμε, από το γεγονός ότι το σπάσιμο των συμμετριών βαθμίδος και χειρικής, ελέγχεται από το $Wilson\ loop\ W$. Όταν $W = I \Leftrightarrow g\langle A_y \rangle R = n, (n : integer)$ η θεωρία μας είναι ισοδύναμη με την περίπτωση όπου $\langle A_y \rangle = 0$. Έτσι το ενεργό δυναμικό γίνεται περιοδικό με περίοδο $1/(gR)$. Με βάση τα παραπάνω, το $\langle A_y \rangle$ είναι της τάξεως $O(1/(gR))$. Άν τώρα η ποσότητα $1/R$ είναι πολύ μεγαλύτερη της ηλεκτρασθενούς κλίμακας $M_W \cong 246GeV$, τότε αυξάνεται η μάζα ορισμένων σωματίων, σύμφωνα με την τάξη $O(1/(gR))$, παρά το ότι εμείς δεν επιθυμούμε κάτι τέτοιο. Εάν πάλι, η ποσότητα $1/R$ είναι της τάξης, της ηλεκτρασθενούς κλίμακας $M_W \cong 246GeV$, τότε αυτός ο μηχανισμός σπασίματος συμμετρίας και δημιουργίας μάζας, μέσω του μηχανισμού $Yukawa\ coupling$, μπορεί να προστεθεί στο 4-διάστατο $StandardModel$.

2.2 Τεχνικό κομμάτι.

2.2.1 Ανάλυση στο κλασικό επίπεδο.

Η Dirac Lagrangian για ελεύθερα φερμιόνια, προκύπτει από την Λαγρανζιανή:

$$L = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \qquad (1)$$

Οι global symmetries ορίζονται ως οι συμμετρίες που δεν εξαρτώνται από χωροχρονικές μεταβολές. Όπως π.χ. οι μετασχηματισμοί φάσεως: $\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$. Τότε η Λαγκρανζιανή γίνεται:

$$L = \bar{\psi}(x) exp[-i\alpha](i\gamma^\mu \partial_\mu - m) exp[i\alpha]\psi(x) = L \qquad (2)$$

Σε περίπτωση που έχουμε N_f φερμιόνια η Λαγκρανζιανή παίρνει τη μορφή:

$$L = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^{(f)}\psi[(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)1_{NxN}]\psi^{(f)}$$

Όπου $\psi^{(f)} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N)$. Είναι γνωστό ότι οι μετασχηματισμοί βαθμίδας ορίζονται ως μετασχηματισμοί που αφήνουν την Λαγκρανζιανή αμετάβλητη. Επίσης δίνεται από το Hosotani, ότι οι μετασχηματισμοί των κυμματοσυναρτήσεων $\psi^{(f)}$ θα προέρχονται από την συμμετρία $SU(N)$. Έχουμε:

$$\psi^{(f)} \longrightarrow V\psi^{(f)}, V \in SU(N) \qquad (2)$$

$$\bar{\psi}^{(f)} \longrightarrow \bar{\psi}^{(f)}V^\dagger, \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \qquad (3)$$

Τέλος: $V \longrightarrow V(x) \qquad (4).$

Εξετάζουμε τώρα τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες η Λαγρανζιανή θα παραμένει αμετάβλητη. Είναι:

$$L \to \bar{\psi}^{(f)}(x)V^{\dagger}(x)[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m]V(x)\psi^{f}(x) =$$

$$= \bar{\psi}^{(f)}(x)V^{\dagger}(x)[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}(V(x))\psi^{f}(x) + i\gamma^{\mu}\ V(x)\partial_{\mu}(\psi^{f}(x))] - mV(x)\psi^{f}(x) =$$

$$= L + \bar{\psi}^{(f)}(x)V^{\dagger}(X)i\gamma\partial_{\mu}(V(x))\psi^{(f)}(x) \qquad (5)$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η Λαγρανζιανή δεν παραμένει αμετάβλητη κάτω από τους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Αυτό οφείλεται στο ότι $\partial_{\mu}(V(x)) \neq 0$. Πρέπει λοιπόν να εκλέγξουμε μια παράγωγο

$$D_{\mu} : D_{\mu}(V(x)\psi^{(f)}(x)) \to V(x)D_{\mu}(\psi^{(f)}(x))$$

Αναπαράγοντας την θεωρία των Wilson Lines , αναζητούμε μετασχηματισμό:

$$U(y,x) \in SU(N) : U(y,x) \to V(y)U(y,x)V^{\dagger}(x) \qquad (6)$$

Σε αυτή την περίπτωση [12]:

$$U(y,x)\psi^{(f)}(x) \to V(y)U(x,y)V^{\dagger}(x)V(x)\psi^{(f)}(x) =$$

$$= V(y)U(y,x)\psi^{(f)}(x) \qquad (7).$$

Είναι:

$$\psi^{(f)}(y) \to V(y)\psi^{(f)}(y) \qquad (8).$$

Από τις $(6),(7)$ έχουμε:

$$\psi^{(f)}(y) - U(y,x)\psi^{(f)}(x) \to V(y)[\psi^{(f)}(y) - U(y,x)\psi(f)(x)] \qquad (9)$$

Ορίζοντας ως:

$$D_{\mu}\psi^{(f)}(x) \equiv lim_{\epsilon\to 0}\left([\frac{1}{\epsilon}(\psi^{(f)}(x+\epsilon) - U(x+\epsilon,x)\psi^{(f)}(x)]\right) \qquad (10)$$

Από την (10), λόγω της (9) παίρνουμε ότι: $D_{\mu}\psi^{(f)}(x) \to lim_{\epsilon\to 0}V(x+\epsilon)D_{\mu}\psi^{(f)}(x) = V(x)D_{\mu}\psi^{(f)}(x) \qquad (11)$

Αποδεικνυεται, ότι

$$U_\Gamma(y,x) = exp[ig\int_\Gamma A_\mu(x)dx^\mu] \cong 1 + g\epsilon A_\mu(x) \qquad (12)$$

Τέλος:

$$D_\mu\psi^{(f)}(x) = lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\psi^{(f)}(x+\epsilon) - U(x+\epsilon,x)\psi^{(f)}(x)\right) =$$

$$lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\psi^{(f)}(x+\epsilon) - (1+ig\epsilon A_\mu(x))\psi^{(f)}(x)\right] =$$

$$= lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\psi^{(f)}(x+\epsilon) - \psi^{(f)}(x)(1-ig\epsilon A_\mu(x))\psi^{(f)}(x)\right] =$$

$$= [\partial_\mu - igA_\mu(x)]\psi^{(f)}(x)$$

Άρα τελικά:

$$D_\mu = [\partial_\mu - igA_\mu(x)] \qquad (13)$$

Για το A_M έχουμε ότι αποτελεί στοιχείο της άλγεβρας $su(N)$ και άρα πρέπει να είναι γραμμικός μετασχηματισμός των βάσεων(Γεννητόρων),T^α της εν λόγω άλγεβρας. Είναι δηλαδή $A_M = \sum_\alpha A_M^\alpha T^\alpha, \qquad (14)$.

Η λαγρανζιανή για τα ghost fields ορίζεται ώς:

$$L_{gh} = \partial_\mu\bar{c}^\alpha\partial^\mu c^\alpha + gf^{abc}(\partial_\mu\bar{c}^\alpha)A_\mu^b c^c \;\; [13](15)$$

Τα $ghosts$ είναι δυνητικές καταστάσεις, χωρίς φυσικό περιεχόμενο αφού παραβιάζουν το θεώρημα $spin - statistics$. Η προσθήκη τους, εξασφαλίζει ότι οι εξισώσεις μας θα είναι ανεξάρτητες στους μετασχηματισμούς $Lorentz$. Εδώ με c^a και $\bar{c}^a$ αναφερόμαστε σε αντιμετατιθέμενα βαθμωτά πεδία $Lorentz$, που τα ονομάζουμε $Faddeev - Popov\ ghosts$ και $anti - ghosts$ αντίστοιχα. Υπάρχει ένα $ghost$ και ένα $anti - ghost$ για κάθε βαθμωτό πεδίο A_μ. Επίσης διευκρινήζουμε ότι $\sum_{c,d} f^{acd}f^{bcd} = N\delta^{ab}$, συνθήκη κανονικοποίησης, για κάθε αναπαράσταση. f^{abc} είναι οι $structure\ constants$ ($[T^a, T^b] = f^{abc}T^c$).

Η λαγρανζιανή για τα τις διορθώσεις βαθμίδας ορίζεται ώς:

$$L_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial A)^2$$

Η παραπάνω σχέση εξασφαλίζει την $BRST\ invariance$ ($global\ symmetry$) για την Λαγρανζιανή. (βλέπετε [17] για μια λεπτομερή ανάλυση του θέματος).

Θα ασχοληθούμε τώρα με τον κινητικό όρο F_{MN}. Ορίζουμε: $F_{MN} \equiv [D_M, D_N]$(15). Είναι

$$F_{MN}\psi = [D_M, D_N]\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [D_M, D_N](U(x)\psi) = U(x)[D_M, D_N]\psi = U(x)[D_M, D_N]U^{-1}(x)(U(x)\psi) \qquad (16).$$

Άρα λόγω της (16) προκύπτει

$$F_{MN} \to U(x)F_{MN}U^{-1}(x) \qquad (17).$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$F^{\alpha}_{MN}F^{MN,\alpha} = 2F^{\alpha}_{MN}F^{MN,\beta}\frac{\delta^{\alpha\beta}}{2} =$$

$$= 2F^{\alpha}_{MN}F^{MN,\beta}tr(T^{\alpha}T^{\beta}) =$$

$$= 2tr(F^{\alpha}_{MN}F^{MN,\beta}) =$$

$$= 2tr(U(x)F_{MN}U^{-1}(x)U(x)F^{MN}U^{-1}(x)) =$$

$$= 2tr(F_{MN}F^{MN}) \qquad (18)$$

Η παραπάνω σχέση, (18), είναι αμετάβλητη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Επίσης ισχύει η σχέση κανονικοποίησης: $tr(T^{\alpha}T^{\beta}) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}$. Θέτοντας τον κινητικό όρο ώς $-\frac{1}{4}F^{\alpha}_{MN}F^{MN,\alpha}$ και $m = 0$. Από τα παραπάνω έχουμε αποδείξει την σχέση (2) του Hosotani.

Θα αναφερθούμε στον πενταδιάστατο χωρόχρονο.

Ξεκινούμε υποθέτοντας ότι η πέμπτη διάσταση είναι μία απείρου μήκους ευθεία, R^1. Ψάχνουμε τους γενικότερους μετασχηματισμούς που θα δράσουν πάνω σε αυτή την ευθεία, έτσι ώστε να 'συμπιέσουν' την διάσταση της.

Ένας από αυτούς είναι η 'μετατόπηση' / *translation*, $T(2\pi R) : y \to y + 2\pi R$. Όταν αναγνωρίσουμε τα σημεία που απεικονίζονται το ένα στο άλλο, μέσω αυτής της "μετατόπισης", η ευθεία R^1 συμπυκνώνεται σε κύκλο $S^1 = R^1/T$. Η άλλη δυνατότητα, μετασχηματισμού είναι μέσω του παράγοντα ομοτιμία $Z(y_0)$ που "ανταντακλά" την ευθεία γύρω από το σημείο $y = y_0$, και έτσι η ευθεία δημιουργεί *orbifold* που είναι η "μισή" γραμμή R^1/Z_2. Η ομοτιμία, από μόνη της δεν συμπιέζει την ευθεία. Επίσης δεν μπορούμε να έχουμε άλλους ανεξάρτητους μετασχηματισμούς (πέραν του συνδιασμού *parity /translations*).

Σε αυτό το *paper*, ενδιαφερόμαστε και για τους δύο μετασχηματισμούς, *parity/translations*. Σε αυτήν την περίπτωση η πέμπτη διάσταση περιορίζεται σε $0 \leq (y - y_0) \leq 2\pi R$, δηλαδή σε *orbifold* S^1/Z_2. Βλέπουμε δηλαδή ότι η αρχική μας ευθεία μετασχηματίστικε σε ένα προσανατολισμένο (*parity*), και ταυτόχρονα περιοδικό (*translations*) σύστημα.

Ας ορίσουμε με ϕ ένα διάνυσμα στήλη, με συνιστώσες του όλα τα διαθέσιμα πεδία. Έτσι οι μετασχηματισμοί που ορίσαμε παραπάνω δρούν ώς εξής:

$$T(2\pi R)[\phi(y)] = \phi(y + 2\pi R) \qquad (19)$$

$$Z(0)[\phi(y)] = Z\phi(-y) \qquad (20)$$

Όπου θεωρήσαμε $y_0 = 0$. Δρώντας με Z δύο φορές, παράγουμε τον ταυτοτικό μετασχηματισμό ($Z^2 = I$)(21). Συνολικά λοιπόν μπορούμε να έχουμε τους μετασχηματισμούς:

$$\phi(y + 2\pi) = T\phi(y) \qquad (22)$$

και

$$\phi(-y) = Z\phi(y) \qquad (23)$$

Με απλή αντικατάσταση, αποδεικνύεται από τις παραπάνω σχέσεις ότι:

$$TZ = ZT^{-1} \qquad (24)$$

ή

$$ZTZ = T^{-1} \qquad (25)$$

Θέτουμε $Z' = TZ$ (26) και πέρνουμε ότι $Z'^2 = I$ (27). Γενικά οι τελεστές Z, Z' δεν μετατίθενται. Στην περίπτωση που μετατίθενται όμως, προκύπτει ότι $T^2 = I$ (28). Άρα σε αυτήν την περίπτωση και ο T είναι Z_2 μετασχηματισμός. Έχουμε τέσσερις συνδιασμούς:

$$T = +1 \begin{cases} (+,+) & cos[ny/R] \\ (-,-) & sin[ny/R] \end{cases} \quad (28)$$

$$T = -1 \begin{cases} (+,-) & cos[(n+1/2)y/R] \\ (-,+) & sin[(n+1/2)y/R] \end{cases} \quad (29)$$

Όπου $(\pm, \pm)$ αναφέρονται στις ομοτιμίες (Z, Z'). Οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις, αποτελούν τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή T, με ± 1, τις αντίστοιχες ιδιοτιμές.

Θα αποδείξουμε τις σχέσεις (5).

Έχουμε:

$$\psi^{(f)'}(x,y) = exp[-\frac{i\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R}y]\psi^{(f)}(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi^{(f)'}(x,y+2\pi R) = exp[-\frac{i\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R}(y+2\pi R)]\psi^{(f)}(x,y+2\pi R) =$$

$$= exp[-\frac{i\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R}y - i\theta^{\alpha}T^{\alpha}]U\psi(x,y) =$$

$$= exp[-\frac{i\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R}y]exp[-i\theta^{\alpha}T^{\alpha}]exp[i\phi]exp[i\theta^{\alpha}T^{\alpha}]\psi(x,y) =$$

$$= exp[i\phi]\psi^{(f)'}(x,y) \quad (30)$$

Επίσης:

$$UA_M(x,y)U^{+} = A_M(x,y+2\pi R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_M(x,y) = U^{-1}A_M(x,y+2\pi R)U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_M(x,y) = exp[-i\phi]exp[-i(\frac{\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R})]A_M(x,y+2\pi R)exp[i\phi]exp[(i\frac{\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R})] =$$

$$= exp[-i(\frac{\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R})](A_M^{\alpha} + \delta_M^{y}\frac{\theta^{\alpha}}{2\pi R})T^{\alpha}exp[(i\frac{\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R})] =$$

$$= exp[-i(\frac{\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R})]A_M exp[i(\frac{\theta^{\alpha}T^{\alpha}}{2\pi R})] + \delta_M^{y}\frac{\theta^{\alpha}}{2\pi gR}T^{\alpha} \quad (31)$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι οι εξισώσεις (5) έχουν αποδειχθεί.

2.2.2 $SU(N)$ με τετριμμένη ομοτιμία Z_2.

Θα αποδείξουμε την σχέση (8).

Επειδή η μεταβλητή της πέμπτής διάστασης y αντιστοιχεί σε περιοδική συνάρτηση, μπορούμε να εκφράσουμε τα πεδία $\psi_j(x,y)$ ως σειρές Fourier.

Με βαση τα παραπάνω έχουμε:

$$\psi_j^{+}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\,[\sum_{n=0}^{\infty} u_{j,R}^{(n)}(x)\sqrt{2}cos(\frac{ny}{R})\,] \qquad (32)$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η επιλογή του $(ny)/R$ για $y \rightarrow y+2\pi R$ μας δίνει $(ny)/R \rightarrow (ny)/R + 2\pi n$ και άρα: $cos(\frac{ny}{R} + 2\pi n) = cos(\frac{ny}{R})$.

$$\psi_j^-(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\,[\sum_{n=1}^{\infty} u_{j,L}^{(n)}(x)\sqrt{2}sin(\frac{ny}{R})\,] \quad (33)$$

Θα σχολιάσουμε τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα $\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$.

Επιδιώκοντας η δράση S να παραμένει στάσιμη, θα πρέπει το ολοκλήρωμα της Λαγρανζιανής να παραμένει σταθερό. Δηλαδή πρέπει να είναι σταθερή η ποσότητα:

$$S = \int d^4xdyL \qquad (34)$$

θέτοντας ο παράγοντας κανονικοποίησης της συνάρτησης $u_j^{(0)}(x)$ να βαπτίζεται c. Έχουμε:

$$S = \int d^4xdyL = \int d^4x \int_0^{2\pi R} dyc^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi Rc^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \quad (35)$$

και άρα η σχέση (8) απεδείχθει. Θα σχολιάσουμε την σχέση (4) του Hosotani και θα δούμε αν επαληθεύονται οι σχέσεις (3). Είναι:

$$\psi^f(x,-y) = \gamma_5 P\psi^f(x,y) =$$

$$= \gamma_5 UPU\psi^f(x,y) = \gamma_5 UP\psi^f(x,y+2\pi R) =$$

$$= \gamma_5 U\gamma_5^{-1}\psi^f(x,-y-2\pi R) =$$

$$= \psi^f(x,-y). \qquad (36)$$

Και άρα ο μετασχηματισμός (4), αφήνει την πρώτη από τις σχέσεις (3), αμετάβλητη.

2.2.3 $SU(N)$ με μη τετριμμένη ομοτιμία Z_2.

Θα μελετήσουμε το σπάσιμο της συμμετρίας:

$$SU(N) \to SU(N_+) \otimes SU(N_-) \otimes U(1) \qquad (37)$$

Όπως μας δίνεται, ο πίνακας της ομοτιμίας: $P = diag(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$ χωρίζεται σε δύο μέρη ως εξής:

$$P_+ = diag(1,\ldots,1) \qquad (38)$$

και

$$P_- = diag(-1, \ldots, -1) \qquad (39)$$

Άρα $P = P_+ + P_-$ (40) και:

$$P_+ - P_- = I \qquad (41)$$

$$P_{+/-}^2 = P_+ \qquad (42)$$

$$P_+ P_- = 0 \qquad (43)$$

Όπως μας δίνεται:

$$PT^a P = T^a \qquad (44)$$

Άρα ένα οποιοδήποτε στοιχείο g της άλγεβρας του $SU(N)$ γράφεται:

$$g = \sum_a A_M^a T^a = P \sum_a A_M^a T^a P = PgP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gP = Pg \Rightarrow$$

$$[g, P] = 0 \qquad (45)$$

Έιναι:

$$[g, P] = [g, P_+ + P_-] = [g, P_+] + [g, P_-] =$$

$$= gP_+ - P_+ g + gP_- - P_- g \qquad (46)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $P_+ - P_- = I$ παίρνουμε:

$$P_- g P_+ = P_+ g P_- = 0 \qquad (47)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι οι πίνακες g είναι της μορφής:

$$g = \begin{pmatrix} \overbrace{\quad\quad}^{N_+} & \overbrace{\quad\quad}^{N_-} \\ & 0 \quad 0 \\ \cdots & 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 & \\ 0 \quad 0 & \cdots \end{pmatrix} \qquad (48)$$

Η απόδειξη είναι απλή. Ας υποθέσουμε ότι ένα στοιχείο του πίνακα g, g_{ij}, $i = N_+ - k$, $j = N_+ + m$ είναι $g_{ij} \neq 0$ (49).

Τότε πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα g από αριστερά με P_+ παίρνουμε ότι το στοιχείο g_{ij} πολλαπλασιάζεται επί 1 και παραμένει στην θέση ij. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζεται επί P_- από τα δεξιά, αλλάζει πρόσιμο και παραμένει στην θέση ij. Ξέρουμε όμως ότι $P_+ g P_- = 0$. Άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και από την αρχική σχέση $PT^aP = T^a$, αντικαθιστώντας τις δοθείσες σχέσεις για την ομοτιμία P.

Έτσι θα βρούμε ότι $T^a = T_+^a + T_-^a$.

Θα αποδείξουμε ότι οι γεννήτορες T_+^a αποτελούν τους γεννήτορες της $su(N+), Q^a$.

Θεωρούμε έναν πίνακα $su(N_+)$ διαστάσεων N_+ x N_+ και $Special\ Unitary$. Δηλαδή, $su(N_+)^\dagger su(N_+) = I$ (50). και $det(su(N_+)) = 1$ (51). Σε αυτόν προσθέτουμε μία σειρά και μία στήλη, στα δεξιά και κάτω. Αυτή η στήλη / γραμμή έχει όλα τα στοιχεία της μηδενικά, εκτός από το στοιχείο με συντεταγμένες $(N_+ + 1,\ N_+ + 1)$ που το θέτουμε ίσο με την μονάδα. Δηλαδή:

$$su(N_+ + 1) = \begin{pmatrix} su(N_+) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (52)$$

Ο πίνακας που σχηματίστηκε είναι επίσης, $Special\ Unitary$. Αυτό προκύπτει αν σχηματίσουμε το γινόμενο $su(N_+ + 1,\ N_+ + 1)^\dagger \times$ $su(N_+ + 1,\ N_+ + 1)$ που, μετά από τετριμένες ξεις, προκύπτει ίσο με τον μοναδιαίο πίνακα.

Ακόμη η ορίζουσα του είναι μονάδα: Αυτό προκύπτει άμεσα αφού ο μόνος μη μηδενικός όρος στην γραμμή (και στήλη) $N_+ + 1$ είναι το 1 και η ορίζουσα του $su(N_+)$ είναι εξ΄ ορισμού 1.

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι να σχηματίσουμε πίνακα διαστάσεων $N \times N$. Έτσι τελικά έχουμε έναν πίνακα $su(N)$. Αυτό σημαίνει ότι $su(N) = \sum_a A_M^a T^a$ Κατά τα γνωστά, χωρίζουμε κάθε γεννήτορα T^a σε δύο πίνακες:

$$T^a = T_+^a + T_-^a \qquad (53)$$

με $T_+^a \rightarrow$ τον $N_+ \times N_+$ πίνακα $su(N_+)$. Και: $T_-^a \rightarrow$ τον $N_- \times N_-$ πίνακα $su(N_-)$. Για τον δεύτερο έχουμε ότι $su(N_-) = I_{N_-}$.

Επομένως:

$$su(N) = \sum_a A_M^a T^a = \sum_a A_M^a [T_+^a + T_-^a] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow su(N_+) + su(N_-) = \sum_a A_M^a T_+^a + A_M^a T_-^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow su(N_+) = \sum_a A_M^a T_+^a, \forall\, matrix \in su(N_+) \quad (54)$$

και

$$su(N_-) = I_{N_-} = \sum_a A_M^a T_-^a \quad (55)$$

και επειδή

$$su(N_+) = \sum_a B_M^a Q^a, \forall\, matrix \in su(N_+) \quad (56)$$

είναι:

$$T_+^a = Q^a \quad (57)$$

Άρα απεδείχθει ότι οι γεννήτορες T_+^a αποτελούν τους γεννήτορες της $su(N+), Q^a$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι T_-^a ταυτίζονται με τους γεννήτορες της $su(N_-), \forall\, matrix \in su(N_-)$.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η άλγεβρα $su(N)$ αποτελείται από το σύνολο των αντι-Ερμιτιανών $n \times n$ πινάκων, με μιγαδικά στοιχεία και μηδενικό ίχνος.

Ομοίως η άλγεβρα $u(N)$ αποτελείται από το σύνολο των αντι-Ερμιτιανών $n \times n$ πινάκων, με μιγαδικά στοιχεία.

Θα δείξουμε ότι οι αντι-Ερμητιανοί πίνακες / τελεστές H, με μηδενικό ίχνος, οι οποίοι αντιμετατίθενται με τους τελεστές της ομοτιμίας $P_{(+/-)}$, διατηρούν αυτή τους την ιδιότητα. Είναι δηλαδή:

$$P_{(+,-)} H P_{(+,-)} \equiv anti - Hermitian/traceless$$

Έχουμε:

$$[P_{(+,-)} H P_{(+,-)}]^\dagger = P_{(+,-)}^\dagger$$
$$= P_{(+,-)}[-H]P_{(+,-)} = -P_{(+,-)} H P_{(+,-)} \quad (58)$$

Ακόμη γνωρίζουμε ότι κάθε ερμιτιανός πίνακας H μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός πίνακα χωρίς ίχνος H_0 και το γινόμενο του μοναδιαίου πίνακα με αριθμό [14]:

$$H = H_0 + cI \quad (59)$$

Επίσης ο μοναδιαίος πίνακας I_n αποτελεί μια αναπαράσταση, διάστασης n της άλγεβρας $Lie, u(1)$. Τελικά έχουμε λοιπόν ότι:

$$u(n) = su(n) \oplus u(1) \quad (60)$$

Η παραπάνω αναπαράσταση ισχύει και για τους δύο "τομείς"$(+,-)$. Κάθε τομέας οδηγεί σε μία αναπαράσταση $U(N_{(+/-)})$ γμα που σημαίνει ότι έχουμε δύο άλγεβρες. Υπάρχει όμως ένας περιορισμός. Από τη στιγμή που αποδομούμε ένα ενιαίο *group* $SU(N)$, το τελικό ίχνος, που προέρχεται από το άθροισμα των ιχνών $(+,-)$, θα πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο άλγεβρες $u(1)$, δεν είναι ανεξάρτητες. Αντιθέτως, ζούν στον ίδιο υπο-χώρο και δημιουργούν ένα ενιαίο *Lie Group*.

Τα παραπάνω, έχουν σαν αποτέλεσμα, η άλγεβρα $SU(N)$ να "σπάει":

$$SU(N) \rightarrow SU(N_+) \otimes SU(N_-) \otimes U(1) \qquad (61)$$

Θα μελετήσουμε τις σχέσεις (15) έως (18). Ας ξεκινήσουμε με μερικούς γενικούς ορισμούς. Η $generating\ functional$ $Z(J)$, δίνεται από την σχέση:

$$Z(J) = exp[iW(J)] = \int D\phi exp[i(S(\phi) + J\phi)] \qquad (62)$$

Όπου $J\phi = \int d^D x J(x)\phi(x) \quad (63)$, J είναι η πηγή/ρεύμα. Η VEV του πεδίου/τελεστή $\hat{\phi}$ ορίζεται ως:

$$\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle \equiv \frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z}\int D\phi exp[i(S(\phi) + J\phi)]\phi(x) \qquad (64)$$

Για την ενέργεια του κενού Γ:

$$\Gamma(\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle) = W(J) - \int d^D x J(x)\phi(x) \qquad (65)$$

Αναπτύσουμε την ενέργεια του κενού μέσω ενός μετασχηματισμού *Legendre*:

$$\Gamma(\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle) = \int d^D x[-V_{eff}(\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle) + Z(\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle)(\partial\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle)^2 + \ldots] \qquad (66)$$

Από την παραπάνω σχέση ορίζεται το $effective\ potential$ V_{eff}. Στην συνέχεια, χάριν ευκολίας, θα αντικαταστήσουμε την $VEV \equiv \langle 0|\hat{\phi}|0\rangle$ με ϕ. Είναι:

$$\frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi(y)} = \int d^D x \frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)}\frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} - \int d^D x \frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)}\phi(x) - J(y) =$$

$$= -J(y) \qquad (67)$$

Τώρα για J, ϕ ανεξάρτητα από την μεταβλητή x, έχουμε:

$$V'_{eff}(\phi) = J \qquad (68)$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική πηγή, $J = 0$, βλέπουμε ότι το $effective\ potential$ εκφράζει την τιμή εκείνη της $VEV = \phi_0$ για την οποία, το ίδιο, ελαχιστοποιείται:

$$V'_{eff}(\phi_0) = 0 \qquad (69)$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τις παραπομπές [16], [18], για να αποδείξουμε τις σχέσεις (15) - (18), (22) - (24) της $SU(2)$ καθώς και τις σχέσεις (29) - (34) της $SU(3)$. Ας τονίσουμε εδώ ότι:

- Οι ιδιοτιμές του τελεστή $D_y D^y$ εκφράζουν την μάζα στην αντίστοιχη εξίσωση $Dirac$.
- Η ποσότητα $2\pi R$ ισούται και εκφράζει τον όγκο: $\int_0^{2\pi R} dy$.
- Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$, που πολλαπλασιάζει τους λογαρίθμους, εκφράζει την ρίζα $\sqrt{p_E^2 + M^2}$, $M \equiv mass$.
- Τέλος, για παράδειγμα, στην σχέση (15):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n-a}{R})^2) = \sum_{n=1}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n-a}{R})^2) + \sum_{n=0}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n+a}{R})^2) \qquad (70)$$

Θα εξετάσουμε την ποσότητα (10).

Από την θεωρία, Yukawa , γνωρίζουμε ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ ενός βαθμωτού πεδίου ϕ και ενός φερμιονικού πεδίου ψ περιγράφεται από την Λαγρανζιανή:

$$L_{Yukawa}(\phi, \psi) = ig\bar{\psi}\gamma^5\phi\psi \qquad (71)$$

Ξεκινώντας από την Λαγρανζιανή - πρώτος παράγοντας σχέσης (2) $Hosotani$ - η μη μηδενική Vacuum Expectation Value, $\phi_0 \equiv \langle A_y \rangle = \sum \langle A_y^a \rangle T^a$, $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ οδηγεί στο σχηματισμό ενός φερμιονίου με μάζα $ig\bar{\psi}\gamma_5 \langle A_y^a \rangle T^a \psi$.

Θα διερευνήσουμε την σχέση (13).

Η συναλλοίωτη παράγωγος (*covariant derivative*)D_μ όταν δρα σε ένα διάνυσμα F στην αναπαράσταση R_k, ενός συνόλου G, παίρνει τη μορφή:

$$(D_\mu F)_i = \partial_\mu F_i - iA^\alpha_\mu (T^\alpha_k)_{ij} F_j \qquad (72)$$

όπου T^α_k είναι ο γεννήτορας της άλγεβρας Lie, g στην αναπαράσταση R_k. Ένα πεδίο στην *adjoint* αναπαράσταση έχει δείκτη α π.χ F^α Μπορούμε, όμως να το περιγράψουμε με πίνακα ως $F_{ij} = F^\alpha (T^a_k)_{ij}$ σε μια αναπαράσταση R_k. Τώρα επειδή το F^α είναι διάνυσμα έχουμε ότι:

$$(D_\mu F)^\alpha = \partial_\mu F^\alpha - iA^b_\mu (T^b_{adj})^{\alpha c} F^c \qquad (73)$$

Αλλά για τους γεννήτορες της *adjoint* αναπαράστασης, ισχύει ότι:

$$(T^b_{adj})^{\alpha c} = -if^{b\alpha c} \qquad (74)$$

Άρα:

$$(D_\mu F)^\alpha = \partial_m F^\alpha - A^b_\mu f^{bac} F^c =$$
$$= \partial_\mu F^\alpha + A^b_\mu F^c f^{bca} \qquad (75)$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με T^α_k. Παίρνουμε:

$$(D_\mu F)_{ij} = \partial_\mu F_{ij} + A^b_\mu F^c f^{bca} (T^\alpha_k)_{ij} \qquad (76)$$

και επειδή γνωρίζουμε ότι:

$$f^{bca}(T^\alpha_k)_{ij} = -i[T^b_k, T^c_k]_{ij} \qquad (77)$$

έχουμε τελικά:

$$(D_\mu F)_{ij} = \partial_\mu F_{ij} - iA^b_\mu F^c [T^b_k, T^c_k]_{ij} = \partial_\mu F_{ij} - i[A_\mu, F]_{ij} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_\mu F = \partial_\mu F - i[A_\mu, F]_{ij} \qquad (78)$$

Κατά την εργασία μας θα αντικαταστήσουμε την ποσότητα $\langle A_y \rangle$ με B_y.

2.2.4 Μοντέλο $SU(2)$.

Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι οι γεννήτορες της $SU(2) : u_1, u_2, u_3$, προέρχονται από τους πίνακες *Pauli*: $\sigma^\alpha, \alpha = 1, 2, 3$.

Είναι:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{81}$$

Έτσι τα βαθμωτά πεδία, ματασχηματίζονται σε:

$$A_M = \sum_{\alpha} A_M^{\alpha} u^{\alpha}, M = \mu, 5 \;\; \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{82}$$

Είναι:

$$A_M = \begin{pmatrix} iA_M^3 & iA_M^1 - A_M^2 \\ iA_M^1 A_M^2 & -iA_M^3 \end{pmatrix} \tag{83}$$

Στην συνέχεια θεωρούμε τον πίνακα:

$$g = i\sigma^3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{84}$$

ο οποίος καθορίζει τις συνοριακές συνθήκες. Υπολογίζουμε τις ποσότητες:

$$g^{\dagger}(A_\mu^a \sigma^a) g = +\eta_\mu^a A_\mu^a \sigma^a \tag{85}$$

$$g^{\dagger}(A_5^a \sigma^a) g = -\eta_5^a A_5^a \sigma^a \tag{86}$$

Αυτό που αναζητούμε είναι το πρόσιμο της μεταβλητής η. Μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$A_\mu^1 \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & A^1 \\ A^1 & 0 \end{pmatrix} \to \eta_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 & -A^1 \\ -A^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{87}$$

$$A_\mu^2 \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -iA^2 \\ iA^2 & 0 \end{pmatrix} \to \eta_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & iA^2 \\ -iA^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$A_\mu^3 \sigma^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 0 \\ 0 & -A^3 \end{pmatrix} \to \eta_\mu^3 \begin{pmatrix} A^3 & 0 \\ 0 & -A^3 \end{pmatrix} \tag{89}$$

Άρα τελικά έχουμε ότι για τον δείκτη μ:

$$\eta_\mu^1 = \eta_\mu^2 = -1 \tag{90}$$

και

$$\eta^3_\mu = 1 \qquad (91)$$

Ενώ για την πέμπτη διάσταση y αντίστροφα:

$$\eta^1_y = \eta^2_y = 1 \qquad (92)$$

και

$$\eta^3_y = -1 \qquad (93)$$

Ακολούθως, θα υπολογίσουμε την ποσότητα $D_y D^y$. Είναι:

$$D_y F = \partial_y F + [B_y, F] \Rightarrow D_y D^y = D_y(\partial_y F + [B_y, F]) \Rightarrow$$

$$D_y D^y = \partial_y(\partial_y F + [B_y, F]) + [B_y, \partial_y F + [B_y, F]] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_y D^y = \partial_y \partial_y F + \partial_y [B_y, F] + [B_y, \partial F] + [B_y, [B_y, F]] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [D_y D^y] F = \partial_y \partial_y F + 2[B_y, \partial F] + [B_y, [B_y, F]] \qquad (94)$$

Όπως φαίνεται λοιπόν από τα παραπάνω, οι όροι του δεύτερου μέρους, με την σειρά που φαίνεται παραπάνω, δίνουν συνεισφορά:

$$\partial_y \partial_y F \to \partial_y \partial_y \qquad (95)$$

$$2[B_y, \partial F] \to 2gB^{y1}\partial \qquad (96)$$

$$[B_y, [B_y, F]] \to g^2 B^1_y B^{y1} \qquad (97)$$

Έτσι τελικά:

$$[D_y D^y]_{ab} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial^y & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y \partial^y - g^2 B^1_y B^{y1} & -2gB^{y1}\partial_y \\ 0 & 2gB^{y1}\partial_y & \partial_y \partial^y - g^2 B^1_y B^{y1} \end{pmatrix} \qquad (98)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε από την θεωρία $Yang\ Mills$ ($gauge\ theory\ of\ the\ SU(N)\ group$), ορίζοντας την $covariant\ derivative$ ως:

$$D_y = I\partial_y + igT^a A^a_y$$

Στην $adjoint$ αναπαράσταση της άλγεβρας $su(N)$ υπάρχουν N^2-1 γεννήτορες, άρα πρόκειται για μια αναπαράσταση N^2-1 διαστάσεων. Οι πίνακες που περιγράφουν την $adjoint$ αναπαράσταση δίνονται από την σχέση $(T^a_{adj})^{bc} = -if^{abc}$. Για την $su(2)$ είναι οι 3×3 πίνακες:

$$T^1_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, T^2_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^3_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τέλος για την σχέση (19) του $Hosotani$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση, για την $fundamental$ αναπαράσταση της άλγεβρας $su(2)$ με πίνακες τους 2×2 πίνακες των σχέσεων (79), (80), (81).

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τις παραπομπές [16], [18], για να αποδείξουμε τις σχέσεις (15) - (18), (22) - (24) της $SU(2)$. Ας τονίσουμε εδώ ότι:

- Οι ιδιοτιμές του τελεστή $D_y D^y$ εκφράζουν την μάζα στην αντίστοιχη εξίσωση $Dirac$.
- Η ποσότητα $2\pi R$ ισούται και εκφράζει τον όγκο: $\int_0^{2\pi R} dy$.
- Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$, που πολλαπλασιάζει τους λογαρίθμους, εκφράζει την ρίζα $\sqrt{p_E^2 + M^2}$, $M \equiv mass$.
- Τέλος, για παράδειγμα, στην σχέση (15):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n-a}{R})^2) = \sum_{n=1}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n-a}{R})^2) + \sum_{n=0}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n+a}{R})^2)$$

Θα ερευνήσουμε την ποσότητα (14).

Τα πεδία $A^a_\mu, a, b = 1, 2, 3$, θα είναι:

$$A^3_\mu \to \frac{1}{\sqrt{\pi R}} cos(\frac{n}{R} y), a, b = 3 \qquad (99)$$

ή

$$A^{1,2}_\mu \to \frac{1}{\sqrt{\pi R}} sin(\frac{n}{R} y), a, b = 1, 2 \qquad (100)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (13) προκύπτει ότι:

$$A^a_\mu \to \begin{pmatrix} \frac{n^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n^2}{R^2} + \frac{\alpha^2}{R^2} & 2\frac{\alpha n}{R^2} \\ 0 & 2\frac{\alpha n}{R^2} & \frac{n^2}{R^2} + \frac{\alpha^2}{R^2} \end{pmatrix} \qquad (101)$$

όπου $\alpha = gB^1_y R$

Θα αναζητίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα (14). Αυτές προκύπτουν αν αφαιρέσουμε μια αυθέρετη μεταβλητή l, από τα διαγώνια στοιχεία του, και στην συνέχεια ζητήσουμε τον μηδενισμό της ορίζουσας του. Έχουμε λοιπόν, για το πολυώνυμο που προκύπτει, με την χρήση του $Mathematica$:

$$Solve[-a^4 l + 2a^2 l^2 - l^3 + a^4 n^2 + 3l^2 n^2 - 2a^2 n^4 - 3ln^4 + n^6 == 0, l]$$

και οι ιδιοτιμές τελικά, είναι:

$$l = \frac{n^2}{R^2}, \frac{(n+a)^2}{R^2}, \frac{(n-a)^2}{R^2} \qquad (102)$$

Στην περίπτωση του πεδίου A_y^a, έχουμε ως δεδομένο ότι έχει αντίθετη ομοτιμία από ότι το A_μ^a. Έτσι:

$$A_y^3 \to \frac{1}{\sqrt{\pi R}} sin(\frac{n}{R} y), a, b = 3 \qquad (103)$$

ή

$$A_y^{1,2} \to \frac{1}{\sqrt{\pi R}} cos(\frac{n}{R} y), a, b = 1, 2 \qquad (104)$$

Άρα

$$A_y^{1,2,(0)} \to \frac{a^2}{R^2} \qquad (105)$$

και

$$A_y^{a(n \neq 0)} \to \frac{n^2}{R^2}, \frac{(n+a)^2}{R^2}, \frac{(n-a)^2}{R^2} \qquad (106)$$

Δηλαδή οι ιδιοτιμές του $[D_y D^y]_{ab}$ παραμένουν σταθερές.

2.2.5 Μοντέλο $SU(3)$.

Χρησιμοποιούμε τις παραπομπές [16], [18], για να αποδείξουμε τις σχέσεις (29) - (34) της $SU(3)$. Ας τονίσουμε εδώ ότι:

- Οι ιδιοτιμές του τελεστή $D_y D^y$ εκφράζουν την μάζα στην αντίστοιχη εξίσωση $Dirac$.
- Η ποσότητα $2\pi R$ ισούται και εκφράζει τον όγκο: $\int_0^{2\pi R} dy$.
- Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$, που πολλαπλασιάζει τους λογαρίθμους, εκφράζει την ρίζα $\sqrt{p_E^2 + M^2}$, $M \equiv mass$.
- Τέλος, για παράδειγμα, στην σχέση (29):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n-a}{R})^2) = \sum_{n=1}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n-a}{R})^2) + \sum_{n=0}^{\infty} log(p_E^2 + (\frac{n+a}{R})^2) \qquad (107)$$

Θα μελετήσουμε τις σχέσεις $(36) - (37)$.

Η δοθείσα σχέση (37), μας δηλώνει ότι το $Wilson\ loop$, $\langle W \rangle$, δημιουργεί VEV, και στην συνέχεια δυναμική μάζα, (σχέση (10) $Hosotani$) όπου ο δείκτης $a = 1 \rightarrow T^a = T^1$.

Σχηματίζουμε τους μεταθέτες:

$$[\langle W \rangle, T^a], a = 1, 2, 3, 8 \qquad (108)$$

Παρατηρούμε ότι όλοι τους, ισούνται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ο διαγώνιος πίνακας T^8 μπορεί να θεωρηθεί ότι παραμένει γεννήτορας της άλγεβρας $U(1)$. Επίσης γνωρίζουμε ότι οι γεννήτορες $T^a, a = 1, 2, 3$ μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν γεννήτορες της $SU(2)$, αφού αν δούμε τους πίνακες $Gell - Mann$ καταλαβαίνουμε ότι οι 2×2 "υποπίνακες" τους είναι οι πίνακες $Pauli$. Έτσι σπάει η άλγεβρα $SU(3)$ σε $SU(2) \otimes U(1)$ αφού π.χ.

$$[T^6, \langle W \rangle] \neq 0 \quad (109)]$$

Άρα

$$SU(3) \rightarrow SU(2) \otimes U(1)$$

Θα μελετήσουμε την σχέση (37).

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\langle A_y^\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi g R} \sum_\alpha \theta_\alpha T^\alpha, \{T^\alpha, P\} = 0 \qquad (110)$$

Και άρα, επειδή μόνο ο T^1, αντιμετατίθεται με την δοθείσα ομοτιμία P, είναι:

$$\langle A_y^\alpha \rangle = \frac{\theta_1}{2\pi g R} T^1$$

Επίσης, για το $Wilson\ Loop$:

$$W \equiv exp[ig \int_{-\pi R}^{\pi R} B_y^1 T^1 dy] \qquad (111)$$

Όπου:

$$B_y^1 = 1/(gR) \qquad (112)$$

$$T^1 = \lambda_1/2 \qquad (113)$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (114)$$

Από την (111) έχουμε ότι:

$$W = exp[ig(\pi R + \pi R)B_y^1 T^1] =$$

$$= exp[i2\pi g R \frac{1}{gR}\frac{\lambda_1}{2}] =$$

$$= exp[i\pi\lambda_1] \qquad (115)$$

Θα υπολογίσουμε την ποσότητα (121).

Είναι:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1^{2n}, n \geq 1 \qquad (116)$$

Επίσης:

$$\lambda_1^{2n+1} = \lambda_1^{2n} \times \lambda_1 = \lambda_1, n \geq 0 \qquad (117)$$

Έχουμε:

$$exp[i\pi\lambda_1] = exp[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}\lambda_1^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}\lambda_1^{2n}\lambda_1 =$$

$$= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}\lambda_1^2 + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}\lambda_1 =$$

$$= I + \lambda_1^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n} + i\lambda_1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1} =$$

$$= I + \lambda_1^2(cos[\pi] - 1) + i\lambda_1(sin[\pi]) =$$

$$= I - 2\lambda_1^2 + 0i\lambda_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (118)$$

2.3 Συμπεράσματα.

1. Ανάλυση στο κλασικό επίπεδο.

Στην παράγραφο (2.2.1) πραγματοποιήσαμε μια ανάλυση στο κλασικό επίπεδο. Ξεκινήσαμε από την Λαγρανζιανή για ελεύθερα φερμιόνια (1) και ορίσαμε την καθολική συμμετρία. Παρατηρήσαμε ότι η Λαγρανζιανή είναι αμετάβλητη σε μετασχηματισμούς $U(1)$, σχ. (2) Από την θεωρία των $Wilson\ lines$, αποδείξαμε τον τύπο της *covariant derivative* (13), που είναι απαραίτητη για να παραμείνει αμετάβλητη η Λαγρανζιανή στους *unitary*, μετασχηματισμούς (15). Στην συνέχεια προσθέσαμε την συνεισφορά των $ghost\ fields$ στην Λαγρανζιανή και είδαμε ότι της εξασφαλίζει συμμετρία *Lorentz*. Επίσης προσθέσαμε τις διορθώσεις βαθμίδας, που εξασφαλίζουν *BRST invariance*. Τέλος εξηγήσαμε τους λόγους για τους οποίους επιλέξαμε την πέμπτη διάσταση και τις ιδιότητες της S^1/Z_2.

2. $SU(N)$ με τετριμμένη Z_2 ομοτιμία.

Εδώ αναπτύξαμε τα φερμιονικά πεδία σε σειρές *Fourier* και πραγματοποιήσαμε κανονικοποίηση.

3. $SU(N)$ με μη τετριμμένη Z_2 ομοτιμία.

Στην ενότητα αυτή ξεκινήσαμε με την μελέτη, του σπασίματος της συμμετρίας $SU(N)$ (37) – (49). Ο τρόπος που μελετήσαμε ήταν διαιρώντας ένα οποιοδήποτε στοιχείο g της $SU(N)$, σε υποπίνακες. Αποδείξαμε ότι η συμμετρία $U(N)$ σπάει σε $SU(N) \otimes U(1)$ (58) – (60). Ορίσαμε την *generating functional*, $Z(J)$, (62). Επίσης ορίσαμε την VEV (64) καθώς και την ενέργεια του κενού Γ (65). Μελετήσαμε την σχέση των παραπάνω δύο ποσοτήτων. Δείξαμε ότι το ελάχιστο του V_{eff} εκφράζει την αντίστοιχη τιμή της VEV. Μέσω της θεωρίας *Yukawa*, μελετήσαμε την αλληλεπίδραση φερμιονικού και βαθμωτού πεδίου (71). Τέλος είδαμε πως η *covariant derivative*, D_M δρα πάνω σε ένα διάνυσμα (72) - (78).

4. Μοντέλο $SU(2)$.

Παρουσιάσαμε τους γεννήτορες της $SU(2)$, (79) - (81) και την γενική σχέση μετασχηματισμού των πεδίων A_M. Αποδείξαμε τον τύπο του τετραγώνου, της *covariant derivative*, (98) και υπολογίσαμε τις ιδιοτιμές του (101) - (102). Έτσι προέκυψε ότι οι ιδιοτιμές αυτές εκφράζουν την μάζα σε μια εξίσωση *Dirac* και συνεισφέρουν στο V_{eff}. Τέλος εδώ μελετήσαμε την *adjoint* αναπαράσταση της άλγεβρας $SU(N)$.

5. Μοντέλο $SU(3)$.

Μελετήσαμε τις σχέσεις (29) - (34) της $SU(3)$, ορίσαμε το *Wilson loop* και είδαμε με ποιό μηχανισμό δημιουργεί VEV. Μελετήσαμε τις σχέσεις μετάθεσης $[\langle W\rangle, T^a]$, (108) και στη συνέχεια το σπάσιμο συμμετρίας: $SU(3) \to SU(2) \otimes U(1)$. Τέλος αποδείξαμε την σχέση (37) του *Hosotani* στις σχέσεις (111) - (118).

Στο Παράρτημα Α, έγινε μια επισκόπηση του φαινομένου σπασίματος συμμετρίας από την Θεωρία ϕ^4.

3 Παράρτημα Α.

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε το φαινόμενο του αυθόρμητου "σπασίματος" συμμετρίας. Ονομάζεται αυθόρμητο επειδή τίποτα που ξέρουμε, δεν σπάει τη συμμετρία στις δεδομένες, εξ' αρχής, εξισώσεις μας. Εννοιολογικά, εξετάζουμε την περίπτωση ενός συστήματος του οποίου η Λαγρανζιανή, είναι αμμετάβλητη κάτω από έναν μετασχηματισμό, αλλά στην κατώτατη κατάσταση (Ground / Vacuum State) παύει να είναι συμμετρική (π.χ. Mexican Hat) . Εδώ ως (Vacuum State) ορίζουμε την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας, δηλαδή την κατάσταση όπου η Χαμιλτονιανη είναι ελάχιστη. Στην περίπτωση μας, η ελαχιστοποίηση της Χαμιλτονιανής ($H = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi)$), ταυτίζεται με την ελαχιστοποίηση του δυναμικού $V(\phi)$.

Πιο συγκεκριμένα, ο όρος σπάσιμο συμμετρίας, επίσης σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή ενός βαθμωτού πεδίου ϕ, $\langle\phi\rangle \equiv \langle 0|\phi|0\rangle$, στην κατώτατη κατάσταση, Vacuum Expectation Value (VEV) παύει να είναι μηδενική.

Μια γενική έκφραση για την Λαγρανζιανή βαθμωτού πεδίου, που να α-σπάζεται την συμμετρία ομοτιμίας $Z_2(\phi \to -\phi)$, είναι:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) =$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - [\frac{\mu^2\phi^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4}]$$

Όπου το δυναμικό $V(\phi)$ είναι self-interacting, renormalizable. Ψάχνουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του δυναμικού $V(\phi)$.

Πρέπει και αρκεί:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi}|_\phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}|_\phi > 0$$

Επειδή θέλουμε το δυναμικό $V(\phi)$ να έχει κατώτατο πρέπει $\lambda > 0$.

Για $\mu^2 > 0$ έχουμε ότι το δυναμικό έχει ένα ελάχιστο για $\phi = 0$, $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$. Άρα η συμμετρία διατηρείται.

Για $\mu^2 < 0$ έχουμε δύο ελάχιστα, για $\phi = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$. Σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό παίρνει την αντίστοιχη τιμή:

$$V(\phi) = -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{\mu^4}{4\lambda} =$$

$$= -\frac{\mu^4}{4\lambda}.$$

Στην κλασική κβαντική μηχανική, το σωματίδιο μπορεί να περάσει με τούνελ από το ένα ελάχιστο, του δυναμικού στο άλλο. Σε αυτή την περίπτωση το φράγμα δυναμικού είναι το $V(0) - V(\pm\phi)$.

Σε κάθε μιά από τις παραπάνω περιπτώσεις, η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο σε κάθε μιά από τις κατώτατες, θέσεις είναι η ίδια. Δηλαδή $\psi(\phi) = \psi(-\phi)$. Η συμμετρία της Χαμιλτονιανής ως προς την ομοτιμία, είναι προφανής και διατηρείται.

Θα επιχειρήσουμε τώρα να μελετήσουμε την περίπτωση της κβαντικής θεωρίας πεδίου.

Θεωρούμε την κατάλληλη Λαγρανζιανή, βαθμωτού πεδίου:$L = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 - V(\phi)$. Θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας:

$$\int d^D x\,[T-L] = \int d^D x \left[\frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + V(\phi)\right]$$

όπου D είναι η διάσταση του χώρου. Όπως είναι προφανές η παράμετρος $\partial_i\phi$ είναι θετική και άρα, μόνο,αυξάνει την δυναμική ενέργεια. Θα θεωρήσουμε λοιπόν μια ανεξάρτητη από τις διαστάσεις ($global$) συμμετρία και θα αναζητήσουμε το ελάχιστο του δυναμικού:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi)^4$$

Η διαφορά μεταξύ της κλασικής κβαντομηχανικής και της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι προφανής από τα όσα θα ακολουθήσουν.

Το δυναμικό έχει ελάχιστη τιμή για $\phi = \pm\upsilon = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$. Όμως το φράγμα δυναμικού είναι $[V(0) - V(\pm\upsilon)]\int d^D x$. Δηλαδή άπειρο, ή για την ακρίβεια εκτατό στα όρια του όγκου που καταλαμβάνει το σύστημα μας! Το "τούνελ" έχει κλείσει και άρα το σωμάτιο μας είναι αναγκασμένο να κινείται μέσα σε μία από τις δύο περιοχές $\pm\upsilon$. Δεν έχει σημασία ποιά από τις δύο περιοχές θα διαλέξουμε. Η φυσική είναι η ίδια. Αυτό που έχει σημασία είναι το ότι σπάει η συμμετρία κάτω από την ομοτιμία $\phi \to -\phi$ όπως επίσης και η γενικότερη $U(1) : \phi \to \phi exp[i\theta], \theta \in R$.

Ας θεωρήσουμε την κατώτατη στάθμη στο $+\upsilon$ και ας γράψουμε $\phi = \upsilon + \phi'$. Αναπτύσσοντας το ϕ' στην Λαγρανζιανή βρίσκουμε ότι:

$$L = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - \mu^2\phi'^2 - O(\phi')^3$$

Το σωμάτιο που δημιουργήθηκε από το πεδίο ϕ' έχει μάζα $\sqrt{2}\mu$, (προκύπτει από την σύγκριση των συντελεστών των ϕ^2, ϕ'^2). Αυτή η μάζα στο τετράγωνο πρέπει να βγαίνει θετική, αφού ισούται με $V''(\phi)|_{\phi=\upsilon}$ και το δυναμικό αυτό είναι θετικό αφού πρόκειται περι ελαχίστου.

Άλλο ένα σχόλιο έχει να κάνει με την αυθέρετη(?) επιλογή $V(\phi = 0) = 0$. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στην κλασσική κβαντομηχανική, δεν είναι μετρήσημη η κατώτατη κατάσταση της ενέργειας $\frac{1}{2}\hbar\omega$ (ενέργεια μηδενικού σημείου). Μόνο οι μεταπτώσεις από μια ενεργειακή κατάσταση στην άλλη είναι μετρήσιμες.

4 Παραπομπές.

[1] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D 7, 1888 (1973).

[2] K. Huang, Quarks, Leptons, and Gauge Fields (World Scientific, Singapore, 1982), Secs. 10.7 and 10.8.

[3] M. Kaku, Quantum Field Theory (Oxford Univ. Press, Oxford, 1993), Sec. 10.8.

[4] C. Thorn, Phys. Rev. D 19, 639 (1979); K. Huang, Quarks, Leptons, and Gauge Fields (World Scientific, Singapore, 1982), Sec. 10.8.

[5] R. Jackiw, in M. A. B. B´ eg Memorial Volume, A. Ali and P. Hoodbhoy, eds. (World Scientific, Singapore, 1991).

[6] N. F. Mott and H. S. W. Massey, The Theory of Atomic Collisions, 2nd ed. (Oxford Univ. Press, Oxford, 1949), p. 40.

[7] K. M. Case, Phys. Rev. 80, 797 (1950).

[8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics, 3rd ed. (Pergamon, Oxford, 1977), p. 114.

[9] P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. 2, p. 1665.

[10] R. Jackiw, Phys. Today 25, No. 1, 23 (1972).

[11] K. S. Gupta and S. G. Rajeev, Phys. Rev. D 48, 5940 (1993).

[12] Giles, R. (1981). "Reconstruction of Gauge Potentials from Wilson loops". Physical Review D 24 (8): 2160.

[13] L. D. Faddeev and V. N. Popov, (1967). "Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field", Phys. Lett. B25 29.

[14] R. N. Cahn, 1984. "Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations". Pg. (22).

[15] M.E. Peskin D.V. Schroeder, An introduction to Quantum Field Theory, paragraph (11.3).

[16] N. Irges, F. Knechtli / Nuclear Physics B 775[FS] (2007) 304.

[17] Quantum Field Theory and the Standard Model, M. D. Schwartz, (2014) paragraph (25.4.2).

[18] Quantum Field Theory in a Nutshell, A. Zee, (2003), pg.(210).