



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΕΩΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ
ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

«ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ AdS/CFT

ΤΟ ΟΡΙΟ Penrose ΚΑΙ Ο ΤΟΜΕΑΣ BMN

του ΚΩΣΤΑ ΦΙΛΙΠΠΑ

Ερευνητικός επιβλέπων
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΣΦΕΤΣΟΣ
καθηγητής ΕΚΠΑ

Ακαδημαϊκός επιβλέπων
ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΚΕΧΑΓΙΑΣ
καθηγητής ΕΜΠ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2018

Αφιερωμένο στην αυτόνομη αθηναϊκή αντιφασιστική κοινότητα την οποία και αποχωρίζομαι. Μέσα από αυτήν, ενθαρρύνουμε ο ένας την άλλη να ανατιμήσουμε την συναισθηματική και κοινωνική μας ζωή...

Περιεχόμενα

Περίληψη	I
I Τα θεμέλια	1
1 Ο χαρακτήρας του χώρου Anti-de Sitter	3
1.1 Τα διαγράμματα Penrose και το όριο του AdS χώρου	7
1.2 Κοσμολογική Σταθερά	9
2 Υπερσυμμετρία	13
2.1 Η υπερσυμμετρία και η υπεράλγεβρα της	13
2.2 Σημιογραφία δυο συνιστωσών	18
2.3 Μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της υπεράλγεβρας	20
2.4 Το υπερσυμμετρικό μοντέλο Wess-Zumino	26
2.5 Η $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) δράση	30
3 Υπερβαρύτητα	35
3.1 Ο φορμαλισμός vielbein και η spin συνοχή στη Γενική Σχετι- κότητα	35
3.2 Τοπική υπερσυμμετρία: υπερβαρύτητα	38
3.3 $\mathcal{N} = 1$ on-shell 4-διάστατη υπερβαρύτητα	39
3.4 Υπερβαρύτητα βαθμίδας	41
4 Σύμμορφη θεωρία πεδίου	43
4.1 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί και η ομάδα τους	43
4.2 Σύμμορφα πεδία σε δυο Ευκλείδειες διαστάσεις	48
4.3 Σύμμορφα πεδία και συναρτήσεις συσχέτισης για $d > 2$	53
4.4 Η $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills ως σύμμορφη θεωρία πεδίου	55

5	Μελανές οπές και p-βράνες	57
5.1	Η λύση Schwarzschild	57
5.2	Λύσεις με φορτίο και μέσα στον AdS χώρο	60
5.3	Μελανές οπές σε υψηλότερες διαστάσεις	63
5.4	Μελανές p -βράνες	66
6	Θεωρία Χορδών	73
6.1	Η σχετικιστική χορδή: η δράση Nambu Goto	73
6.2	Η δράση Polyakov	76
6.3	Εξισώσεις κίνησης και κβάντωση στη συναλλοίωτη βαθμίδα . . .	77
	6.3.0.1 Κβαντικές χορδές	82
6.4	Κβάντωση στη βαθμίδα κώνου φωτός	83
6.5	Χορδές σε πεδία υποβάθρου	86
6.6	Η υπερσυμμετρική χορδή	88
6.7	Υπερβαρύτητα στο $\alpha' \rightarrow 0$ όριο	91
7	D-βράνες	95
7.1	Δράση, πεδία και τάση της βράνης	95
7.2	Παράγοντες Chan-Paton και κβάντωση των ακοικτών χορδών πάνω στις D-βράνες	101
7.3	Πολλαπλές D3-βράνες και το όριο $\mathcal{N} = 4$ SYM	109
II	Η αντιστοιχία AdS/CFT	115
8	Η αντιστοιχία AdS/CFT: έννοια και ορισμός	117
8.1	Η ισοδυναμία μεταξύ D-βρανών και ακραίων μελανών p -βρανών .	119
8.2	Βαρύτητα και $\mathcal{N} = 4$ SYM	121
8.3	Ο χώρος $AdS_5 \times S^5$ και το όριο του	123
8.4	Όρια εγκυρότητας της υπερβαρύτητας	125
8.5	Σχέση πεδίων και τελεστών	128
8.6	Αντιστοιχία τελεστή-κατάστασης στη σύμμορφη θεωρία πεδίου .	130
9	Συναρτήσεις συσχέτισης	135
9.1	Η συνταγή Witten για τις συναρτήσεις συσχέτισης	135
9.2	Η συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων για το άμαζο βαθμωτό πεδίο	141

10 Quarks και ο βρόχος Wilson	147
10.1 Γραμμές και βρόχοι Wilson	148
10.2 Το δυναμικό μεταξύ των quarks	152
10.3 Ο υπερσυμμετρικός βρόχος Wilson της $\mathcal{N} = 4$ SYM μέσω της αντιστοιχίας AdS/CFT	155
10.4 Το δυναμικό μεταξύ των quarks	161
11 Πεπερασμένη θερμοκρασία	165
11.1 Πεπερασμένη θερμοκρασία σε μια θεωρία πεδίου	165
11.2 Μελανές οπές και ακτινοβολία Hawking	167
11.3 Η AdS μελανή οπή	169
11.4 Σπάσιμο της υπερσυμμετρίας	175
12 Πλάσμα στην $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία πεδίου	179
12.1 Απόσβεση πίδακα quark	179
12.2 Υπερσχετικιστική απόσβεση πίδακα quark	183
13 Η γεωμετρία pp-wave και το όριο Penrose	189
13.1 Το μοντέλο hard-wall της QCD	190
13.2 Σκέδαση βαρυτικών κυμάτων ως μοντέλο σκέδασης υψηλής ε- νέργειας της QCD	192
13.3 Το pp-wave ως ένα μέγιστα υπεσυμμετρικό υπόβαθρο της type- IIB υπερβαρύτητας	195
13.4 Το όριο Penrose του $AdS_5 \times S^5$ στην type-IIB υπερβαρύτητα	202
13.5 Το όριο Penrose της $\mathcal{N} = 4$ SYM	209
13.6 Κβάντωση της χορδής πάνω στο pp-wave	212
14 Ο τομέας BMN της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας πεδίου	219
14.1 Καταστάσεις της χορδής και οι τελεστές BMN	220
14.2 Η ερμηνεία της αλυσίδας spin	227

Περίληψη

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι ένα συγκεκριμένο όριο της περίφημης αντιστοιχίας AdS/CFT, η οποία είναι μια αντιστοιχία ανάμεσα στη θεωρία χορδών, που είναι μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας, και σε μια σύμμορφη θεωρία πεδίου. Όσον αφορά την ίδια την αντιστοιχία, η εργασία πραγματεύεται την πρωταρχική υπόθεση του Maldacena που αφορά την αντιστοιχία ανάμεσα στην type-IIA θεωρία χορδών που ζεί στον χώρο $AdS_5 \times S^5$ και την $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills θεωρία πεδίου, η οποία ζεί στο 4-διάστατο όριο του χώρου αυτού.

Το πρώτο μέρος της εργασίας είναι αφιερωμένο σε ένα σύνολο θεμελίων της θεωρητικής φυσικής. Συγκεκριμένα, αφού εξετάσει τον χαρακτήρα του χώρου Anti-de Sitter, εισάγεται στην Υπερσυμμετρία, την Υπερβαρύτητα, τις μελανές οπές και τις μελανές p -βράνες, τη σύμμορφη θεωρία πεδίου, τη θεωρία χορδών και τις D-βράνες.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας θεμελιώνει την ολογραφική αυτή θεωρία, τόσο εννοιολογικά όσο και μαθηματικά. Αρχικά, ενισχύει την υπόθεση της αντιστοιχίας υπολογίζοντας, στη θεωρία χορδών, μια συνάρτηση συσχέτισης δυο σημείων η οποία ταυτίζεται με το αναμενόμενο αποτέλεσμα μιας συμμορφης θεωρίας πεδίου. Έπειτα, χρησιμοποιεί μια ολογραφική συνταγή του βρόχου Wilson ώστε να βρεί το δυναμικό μεταξύ των quarks, λαμβάνοντας πάλι ένα αποτέλεσμα συμβατό με τη σύμμορφη θεωρία. Στη συνέχεια, αναλύει τον τρόπο με τον οποίο μεταχειριζόμαστε μια μελανή οπή ώστε να εισάγουμε πεπερασμένη θερμοκρασία και κάνει δυο υπολογισμούς γύρω από το φαινόμενο της απόσβεσης ενός πίδακα από quarks.

Κατά βάθος, εξερευνά το γεωμετρικό όριο Penrose του χώρου $AdS_5 \times S^5$, το οποίο οδηγεί στην ενδιαφέρουσα γεωμετρία των pp-waves, τα οποία είναι ειδικά βαρυτικά κύματα που εκπροσωπούν υψηλο-ενεργειακά σωματίδια σε μια βαρυτική θεωρία. Το ίδιο όριο, από την μεριά της $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills θεωρίας πεδίου, παράγει τον τομέα BMN ο οποίος αναδεικνύει ένα σύνολο από πολύ ιδιαίτερους τελεστές, τους τελεστές BMN.

Σκοπός της εργασίας είναι, πρώτα, να αναδείξει την διανοητική ομορφιά των θεμελίων της θεωρητικής φυσικής: της θεωρίας χορδών, της υπερσυμμετρίας,

της βαρύτητας και της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Έπειτα, θέλει να εμπεριστατώσει μια διαφαινόμενη ισοδυναμία ανάμεσα τους, η οποία προσφέρει ένα νέο ενοποιητικό πλαίσιο για τη Φυσική και στέφει τη θεωρία χορδών ως μια επιτυχημένη θεωρία κβαντικής βαρύτητας.

Μέρος Ι
Τα θεμέλια

Κεφάλαιο 1

Ο χαρακτήρας του χώρου Anti-de Sitter

Ο χώρος *Anti-de Sitter* (*AdS*) είναι ένας χώρος υπογραφής Lorentz $(-+++...+)$ και σταθερής αρνητικής καμπυλότητας. Σε d διαστάσεις, ο AdS χώρος ορίζεται από μια εμβάπτιση τύπου Lobachevski σε $d + 1$ διαστάσεις

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dX_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dX_i^2 - dX_{d+1}^2 \\ &- X_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 - X_{d+1}^2 = -R^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου R η ακτίνα καμπυλότητας, και είναι προφανώς αναλλοίωτος υπό την ομάδα $SO(2, d - 1)$, αφού τόσο η εμβαπτιζουσα μετρική όσο και η εξίσωση εμβάπτισης είναι αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς της ομάδας αυτής¹.

Η μετρική του χώρου αυτού μπορεί να γραφτεί σε διάφορες μορφές, εκφράζοντας διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Για να τις βρούμε, θεωρούμε τις λύσεις της εξίσωσης εμβάπτισης (1.1) να είναι οι

¹Εφ' όσον η d -σφαίρα, ένας χώρος σταθερής θετικής καμπυλότητας, έχει ομάδα συμμετρίας την $SO(d + 1)$ όταν βρίσκεται σε Ευκλείδιο και την $SO(1, d)$ όταν βρίσκεται σε Minkowski χώρο, τότε προφανώς για τους Lobachevski χώρους απλώς μεταφέρουμε έναν βαθμό ελευθερίας σε αντίθετη υπογραφή.

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{2u} \left(1 + u^2(R^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right) \\
X^{d+1} &= Rut \\
X^i &= Rux^i, \quad i = 1, \dots, d-2 \\
X^{d-1} &= \frac{1}{2u} \left(1 - u^2(R^2 - \vec{x}^2 + t^2) \right)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

οι οποίες όταν αντικατασταθούν στην (1.1) δίνουν

$$ds^2 = R^2 \left(u^2(-dt^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2) + \frac{du^2}{u^2} \right) \tag{1.3}$$

όπου βλέπουμε ότι $0 < u < +\infty$.

Αυτός είναι ο AdS χώρος σε *συντεταγμένες Poincarè* και, πλέον, είναι αναλλοίωτος υπό την ομάδα $ISO(1, d-2)$ - δηλαδή την ομάδα Poincarè αλλά και την $SO(1, 1)$, μια συμμετρία κλίμακας που δρα ως $(t, \vec{x}, u) \rightarrow (\lambda t, \lambda \vec{x}, \lambda^{-1}u)$.

Έπειτα, μπορούμε να αλλάξουμε τη μεταβλητή $u = 1/x_0$ και να πάρουμε την μορφή των συντεταγμένων Poincarè ως

$$ds^2 = \frac{R^2}{x_0^2} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2 + dx_0^2 \right) \tag{1.4}$$

όπου $-\infty < t, x_i < +\infty$, αλλά $0 < x_0 < +\infty$. Κατά ένα σύμμορφο παράγοντα, αυτός είναι απλά ο επίπεδος χώρος Minkowski και, συνεπώς, μοιράζεται και το ίδιο τρίγωνο διάγραμμα Penrose².

Ενώ δυο διαφορετικοί χώροι δεν μπορούν να έχουν το ίδιο διάγραμμα Penrose, παρατηρούμε ότι με την αλλαγή $x_0/R = e^{-y}$ στην (1.4) παίρνουμε

$$ds^2 = e^{2y} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2 \right) + R^2 dy^2 \tag{1.5}$$

²Η αιτιακή δομή ενός διαγράμματος Penrose κατασκευάζεται από τις φωτεινές καμπύλες, $ds^2 = 0$, άρα ένας σύμμορφος παράγοντας στη μετρική δεν έχει σημασία.

όπου μια φωτοειδής καμπύλη, $ds^2 = 0$, στο άπειρο της y κατεύθυνσης ($x_0 = 0$) που είναι όριο του AdS χώρου, και με σταθερό x_i , έχει

$$t = \int dt = R \int^\infty e^{-y} dy < \infty \quad (1.6)$$

που σημαίνει ότι το φως χρειάζεται πεπερασμένο χρόνο για να φτάσει στο όριο του χώρου και για την ακρίβεια, αφού το t παίρνει τιμές στο άπειρο, μια φωτοειδής καμπύλη μπορεί να «αντανακλάται» ανάμεσα στο όριο και σε μια άλλη περιοχή του AdS χώρου. Οπότε συμπεραίνουμε ότι οι συντεταγμένες Poincaré δεν καλύπτουν όλον τον AdS χώρο παρά μόνον ένα κομμάτι του, το *Poincaré patch*, το οποίο είναι αυτό που έχει κοινό διάγραμμα με τον επίπεδο χώρο.

Το σύστημα συντεταγμένων που καλύπτει όλον τον χώρο ονομάζεται σύστημα των *παγκόσμιων (global) συντεταγμένων* και βρίσκεται από την εξής λύση της (1.1)

$$\begin{aligned} X_0 &= R \cosh \rho \cos \tau \\ X_i &= R \sinh \rho \Omega_i, \quad i = 1, \dots, d-1 \\ X_{d+1} &= R \cosh \rho \sin \tau \end{aligned} \quad (1.7)$$

όπου Ω_i είναι Ευκλείδειες συντεταγμένες για την μοναδιαία σφαίρα ($\Omega_i \Omega_i = 1$). Αντικαθιστώντας στην (1.1) βρίσκουμε τη μετρική

$$ds^2 = R^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\vec{\Omega}_{d-2}^2) \quad (1.8)$$

όπου $d\vec{\Omega}_{d-2}^2$ είναι η μετρική της μοναδιαίας $(d-2)$ -σφαίρας.

Όπως βλέπουμε, από την παραπάνω σχέση, η συντεταγμένη τ εμφανίζεται φυσιολογικά να ανήκει στο $[0, 2\pi]$ και, μάλιστα, μαζί με το $\rho \geq 0$ καλύπτουν το εμβαπτιζόμενο υπερβολοειδές (1.1) μια φορά. Κοντά στο $\rho = 0$ (το «κέντρο» του AdS χώρου), η μετρική γίνεται

$$ds^2 \simeq R^2 (-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\vec{\Omega}_{d-2}^2) \quad (1.9)$$

που σημαίνει ότι ο χώρος εκεί έχει τοπολογία $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$, με S^1 τον περιοδικό

χρόνο να δίνει κλειστές μη-αιτιακές καμπύλες, γεγονός προβληματικό για έναν χωρόχρονο. Η λύση είναι απλή και συνίσταται στο να «ξεδιπλώσουμε» τον κύκλο S^1 , δηλαδή να θεωρήσουμε $-\infty < \tau < +\infty$ χωρίς ταυτοποιήσεις, ώστε να αποκτήσουμε έναν αιτιακό χωρόχρονο γνωστό ως η παγκόσμια επικάλυψη (*universal cover*) του AdS χώρου.

Χρήσιμη για την κατασκευή των διαγραμμάτων Penrose είναι και η αλλαγή μεταβλητής $\tan \theta = \sinh \rho$, η οποία δίνει τη μετρική

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\vec{\Omega}_{d-2}^2) \quad (1.10)$$

όπου $0 \leq \theta \leq \pi/2$ σε όλες τις διαστάσεις εκτός για δύο, όπου $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, ενώ το τ είναι αυθαίρετο.

1.1 Τα διαγράμματα Penrose και το όριο του AdS χώρου

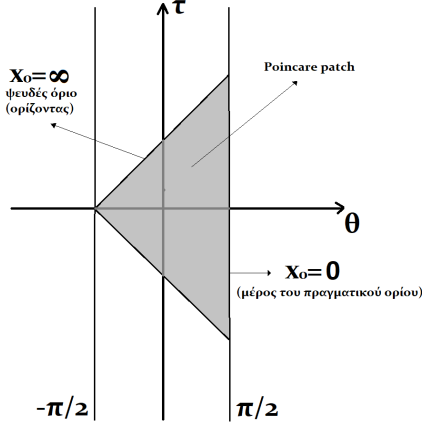
Από την τελευταία μετρική (1.10), αγνοώντας τον παράγοντα $R^2/\cos^2\theta$ παίρνουμε

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\vec{\Omega}_{d-2}^2$$

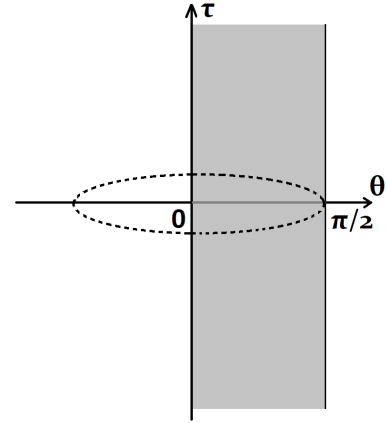
και άρα το διάγραμμα Penrose του AdS_2 χώρου είναι μια άπειρη λωρίδα ανάμεσα στο $\theta = -\pi/2$ και στο $\theta = +\pi/2$. Το Poincarè patch είναι μια τριγωνική περιοχή στη λωρίδα αυτή, όπου το κάθετο όριο του ($x_0 = 0$) είναι ένα κομμάτι του άπειρου ορίου του global Penrose διαγράμματος³.

Το διάγραμμα Penrose του AdS_d χώρου είναι παρόμοιο, μόνο που αποτελείται από έναν κύλινδρο κατασκευασμένο από μια λωρίδα ανάμεσα στα $\theta = 0$ και $\theta = \pi/2$, περιστραμμένη γύρω από τον $\theta = 0$ άξονα. Ουσιαστικά, η περιστροφή αντιπροσωπεύει μια S^{d-2} σφαίρα και άρα το όριο είναι μια τοπολογία $\mathbb{R}_\tau \times S^{d-2}$. Όλα αυτά διαφαίνονται στα ακόλουθα διαγράμματα Penrose.

³Τα υπόλοιπα δυο όρια/πλευρές του τριγώνου ($x_0 = \infty$) του Poincarè patch βρίσκονται στο εσωτερικό της λωρίδας του global Penrose διαγράμματος και, συνεπώς, αποτελούν ψευδή όρια.



global AdS₂



global AdS_d

Για να τα δούμε αυτά ξεκάθαρα, εξετάζουμε τη μετρική στο όριο για τα δυο συστήματα συντεταγμένων. Για το Poincarè patch παίρνουμε τη μετρική (1.4) στο (πραγματικό) όριο $x_0 = 0$ η οποία είναι η

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2 \quad (1.11)$$

δηλαδή ο επίπεδος χώρος M^4 . Για το όριο στις global συντεταγμένες παίρνουμε τη μετρική (1.10) χωρίς τον μπροστινό παράγοντα, για $\theta = \pi/2$, οπότε προκύπτει

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\vec{\Omega}_{d-2}^2 \quad (1.12)$$

δηλαδή η κυλινδρική τοπολογία $\mathbb{R}_\tau \times S^{d-2}$.

1.2 Κοσμολογική Σταθερά

Η τελευταία σημαντική ιδιότητα του AdS χώρου που θα αναφέρουμε είναι ότι αυτός αποτελεί τη λύση της εξίσωσης Einstein με σταθερό ταυστή ενέργειας-ορμής, γνωστό ως *κοσμολογική σταθερά*. Δηλαδή, είναι $T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$ και προέρχεται από έναν σταθερό όρο στη δράση, $-\int d^4x \sqrt{-g} \Lambda$, ενώ η εξίσωση Einstein είναι

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi G_N(-\Lambda)g_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

όπου $\Lambda < 0$ για τον AdS χώρο. Πολλαπλασιάζοντας με $g^{\mu\nu}$ παίρνουμε

$$\mathcal{R} = \frac{2d}{d-2}8\pi G_N\Lambda \quad (1.14)$$

το οποίο όντως δείχνει ότι αποκτάμε έναν χώρο σταθερής αρνητικής καμπυλότητας.

Εφόσον δούμε ότι οι μη-μηδενικές συνιστώσες του ταυστή Ricci για την Poincaré μετρική (1.4) είναι οι

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{00} &= -\frac{d-1}{x_0^2}; & \mathcal{R}_{ij} &= -\frac{d-1}{x_0^2}\eta_{ij}; & \mathcal{R}_{0i} &= 0; \\ \Rightarrow \mathcal{R}_{\mu\nu} &= -\frac{d-1}{R^2}g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

τότε το βαθμωτό Ricci θα είναι

$$\mathcal{R}_{AdS} = -\frac{d(d-1)}{R^2} \quad (1.15)$$

το οποίο εάν συνδυαστεί με την έκφραση (1.14) δίνει την κοσμολογική σταθερά ως

$$\Lambda_{AdS} = -\frac{(d-1)(d-2)}{16\pi G_N R^2} = -\frac{(d-1)(d-2)M_{Pl,d}^{d-2}}{2R^2} \quad (1.16)$$

όπου $M_{Pl,d}^{d-2}$ η μάζα Planck σε d διαστάσεις.

Αφού πραγματοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$\sinh \rho = \frac{r}{R}; \quad t = \frac{\bar{t}}{R} \quad (1.17)$$

ώστε η global μετρική (1.8) να έρθει στην επίσης χρήσιμη μορφή

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) d\bar{t}^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\vec{\Omega}_{d-2}^2 \quad (1.18)$$

τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ακτίνα καμπυλότητας R από την (1.16) ώστε να πάρουμε

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)M_{Pl,d}^{d-2}} r^2\right) d\bar{t}^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)M_{Pl,d}^{d-2}} r^2} + r^2 d\vec{\Omega}_{d-2}^2 \quad (1.19)$$

η οποία, αξίζει να σημειώσουμε, ισχύει τόσο για την περίπτωση $\Lambda < 0$ του AdS όσο και για την περίπτωση $\Lambda > 0$ του dS χώρου.

Κεφάλαιο 2

Υπερσυμμετρία

2.1 Η υπερσυμμετρία και η υπεράλγεβρα της

Γνωρίζουμε η ομάδα Poincarè $ISO(1, 3)$ ικανοποιεί την άλγεβρα Lie

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}) \\ [P_\mu, J_{\nu\rho}] &= \eta_{\mu\nu}P_\rho - \eta_{\mu\rho}P_\nu \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

όπου $J_{\mu\nu}$ οι γεννήτορες Lorentz της $SO(1, 3)$ και P_μ οι γεννήτορες των μεταγλωττίσεων (translations).

Επίσης, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν πιθανές εσωτερικές συμμετρίες T_r στη σωματιδιακή φυσική, όπως οι local $U(1)$ - QED, $SU(3)_c$ - QCD και η $SU(2)$ - Isospin, με άλγεβρα

$$[T_r, T_s] = f_{rs}{}^t T_t \tag{2.2}$$

Αναλογιζόμενοι εάν μπορούμε να συνδοιάσουμε τις παραπάνω συμμετρίες σε μια μεγαλύτερη ομάδα, το απαγορευτικό θεώρημα *Coleman-Mandula* αποδεικνύει¹ ότι εάν συνδοιάσουμε τις Poincarè με τις εσωτερικές συμμετρίες κατά έναν μη-τετριμμένο τρόπο (όχι ως ευθεία γινόμενα), δηλαδή εάν $[T_s, P_\mu] \neq 0$, $[T_s, J_{\mu\nu}] \neq 0$, τότε οι S-matrices για όλες τις διαδικασίες θα είναι μηδενικοί.

¹Για μια χβαντική θεωρία η οποία, ως κύρια προϋπόθεση, έχει mass gap.

Βέβαια, τα ευθεία γινόμενα των δυο αυτών ομάδων σχηματίζουν μια ομάδα συμμετρίας Lie, αποτελούμενη από μια αντίστοιχη άλγεβρα Lie. Συνεπώς, εάν υποθέσουμε ότι η θεωρία μας δομείται από μια *διαβαθμισμένη άλγεβρα Lie*, τότε πλέον δεν δεσμευόμαστε από το παραπάνω θεώρημα και μπορούμε να έχουμε μια νέα ομάδα συμμετρίας.

Μια *υπεράλγεβρα (superalgebra) Lie* είναι μια \mathbb{Z}_2 -graded άλγεβρα Lie, δηλαδή μια άλγεβρα διαβαθμισμένη (graded) πάνω στον αντιμεταθετικό δακτύλιο $\mathbb{Z}_2 \equiv \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}^2$. Τουτέστιν, κάθε στοιχείο της άλγεβρας (κάθε γεννήτορας) αντιστοιχεί σε έναν από τους δυο βαθμούς (even/odd) του δακτυλίου, με πράξη γινομένου τον *υπερμεταθέτη (supercommutator) Lie*.

Ο υπερμεταθέτης Lie είναι ο

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx \quad (2.3)$$

και θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x] \quad (2.4)$$

καθώς και την (super) ταυτότητα Jacobi

$$(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0 \quad (2.5)$$

και, συνεπώς, οι σχέσεις των στοιχείων της \mathbb{Z}_2 -graded άλγεβρας θα είναι

$$[even, even] = even; \quad \{odd, odd\} = even; \quad [even, odd] = odd \quad (2.6)$$

όπου παρατηρώντας την iso(1, 3) άλγεβρα Poincarè (2.1) συμπεραίνουμε ότι οι γεννήτορες $J_{\mu\nu}, P_\mu, T_r$ είναι τα *even* στοιχεία της υπεράλγεβρας.

²Σημειώνουμε ότι $[0]_2 = 0 \pmod{2}$ δηλαδή οι ζυγοί και $[1]_2 = 1 \pmod{2}$ δηλαδή οι περιττοί αριθμοί.

Αντίστοιχα, θα πρέπει να υπάρχουν και κάποιοι γεννήτορες Q_α^i οι οποίοι θα είναι τα odd στοιχεία της υπεράλγεβρας και θα ικανοποιούν την

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = \text{even} \quad (2.7)$$

και την

$$[Q_\alpha^i, J_{\mu\nu}] = (\dots)Q_\beta^i \quad (2.8)$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι το Q_α^i πρέπει να είναι αναγκαστικά αναπαράσταση της ομάδας Lorentz³. Χάρης στην αντιμεταθετική φύση (2.7) του Q_α^i επιλέγουμε την σπινორιακή αναπαράσταση που είναι ταυτόχρονα αναπαράσταση της ομάδας Lorentz αλλά αντικείμενο πάνω στο οποίο δρουν οι αναπαραστάσεις της αντιμεταθετικής άλγεβρας Clifford

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Συγκεκριμένα, αυτή η επιλογή σημαίνει

$$[Q_\alpha^i, J_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^i \quad (2.10)$$

με

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (2.11)$$

όπου γ_μ οι Dirac γ -πίνακες⁴. Οι σπίνορες που θα χρησιμοποιούμε είναι οι σπίνορες Majorana, οι οποίοι ικανοποιούν τη συνθήκη πραγματικότητας

$$\bar{Q}_\beta^i = Q^{i\alpha} C_{\alpha\beta} \quad (2.12)$$

³Εφ' όσον το $J_{\mu\nu}$ είναι αναπαράσταση της ομάδας Lorentz τότε και ό,τι είναι σε γινόμενο μαζί του θα πρέπει να είναι αναπαράσταση της ίδιας ομάδας.

⁴Στην αναπαράσταση Weyl είναι $\gamma^\mu = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$, όπου $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^i)$ και $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^i)$.

όπου $\bar{Q} = iQ^\dagger \gamma^0$ και C ο charge conjugation πίνακας

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -i(\sigma^2)_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & i(\sigma^2)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = -i(\gamma^0 \gamma^2)_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

ο οποίος είναι αντισυμμετρικός. Συνεπώς, οι γεννήτορες Q_α^i είναι σπίνορες με σπινωριακό δείκτη α κι άρα ο απειροστός μετασχηματισμός που προκαλούν θα είναι

$$U_\zeta = \exp\left(iQ^i \cdot \zeta_i + i\bar{Q}^i \cdot \bar{\zeta}_i\right) \quad (2.14)$$

όπου ζ^i οι απειροστές παράμετροι, που είναι προφανώς σπίνορες ώστε ο εκθέτης να είναι Lorentz αναλλοίωτος.

Τα σπινωριακά γινόμενα εννοούν⁵

$$Q \cdot \zeta = Q(-i\sigma^2)\zeta; \quad \bar{Q} \cdot \bar{\zeta} = Q^\dagger i\sigma^2 \zeta^* \quad (2.15)$$

όπου, προφανώς, το γινόμενο ενός σπίνωρα με ένα πεδίο που είναι απλά βαθμωτή συνάρτηση του χωρόχρονου, δηλαδή ένα μποζονικό πεδίο, δίνει πάλι έναν σπίνωρα, ενώ το γινόμενο δυο σπινώρων δίνει ένα μποζονικό πεδίο. Οπότε, οι Q_α^i δίνουν μια συμμετρία ανάμεσα σε μποζόνια και φερμιόνια

$$\begin{aligned} \hat{Q}^i |boson\rangle &= fermion; & \hat{Q}^i |fermion\rangle &= boson \\ \delta(boson) &= fermion; & \delta(fermion) &= boson \end{aligned} \quad (2.16)$$

την λεγόμενη **υπερσυμμετρία (supersymmetry)**. Εάν $i = 1, \dots, \mathcal{N}$, τότε λέμε ότι έχουμε \mathcal{N} υπερσυμμετρίες και η παραπάνω διαβαθμισμένη άλγεβρα ονομάζεται υπεράλγεβρα.

Για να βρούμε την υπεράλγεβρα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυο διαδοχικών απειροστών μετασχηματισμών $[\delta_{\zeta_1}, \delta_{\zeta_2}]$ πάνω σε έναν σπίνωρα ή και σε ένα βαθμωτό (μποζονικό) πεδίο. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε απλώς να

⁵Επιλέγουμε τα Q να είναι left-chiral Weyl σπίνορες.

δούμε ότι εφ' όσον το $\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\}$ είναι συμμετρικό ως προς την εναλλαγή του $(i\alpha)$ με το $(j\beta)$ και αφού ισχύουν οι

$$(C\gamma^\mu)_{\alpha\beta} = (C\gamma^\mu)_{\beta\alpha}; \quad (C\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = (C\gamma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}; \quad (C\gamma^5)_{\alpha\beta} = -(C\gamma^5)_{\beta\alpha} \quad (2.17)$$

τότε, παρατηρώντας την (2.7), μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους πιθανούς συμμετρικούς συνδυασμούς⁶

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = m(C\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \delta^{ij} + n(C\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} J_{\mu\nu} \delta^{ij} + C_{\alpha\beta} U^{ij} + (C\gamma^5)_{\alpha\beta} V^{ij} \quad (2.18)$$

όπου $U^{ij} = -U^{ji}$ και $V^{ij} = -V^{ji}$ είναι αντισυμμετρικοί πίνακες οι οποίοι ονομάζονται *κεντρικά φορτία (central charges)* μιας και μετατίθενται με την υπόλοιπη άλγεβρα. Παράλληλα, οι ταυτότητες Jacobi (2.5) συνεπάγονται $n = 0$, ενώ επίσης μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τους γεννήτορες ώστε $m = 2$.

Άρα η πιο γενική μορφή για την \mathcal{N} -εκτεταμένη υπεράλγεβρα σε τέσσερις διαστάσεις και με κεντρικά φορτία είναι

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = 2(C\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \delta^{ij} + C_{\alpha\beta} U^{ij} + (C\gamma^5)_{\alpha\beta} V^{ij} \quad (2.19)$$

ενώ χρησιμοποιώντας πάλι την ταυτότητα Jacobi προκύπτει

$$[Q_\alpha^i, P_\mu] = 0 \quad (2.20)$$

Τέλος, υπάρχει και μια εσωτερική (global) συμμετρία η οποία μπορεί να δρά πάνω στον δείκτη i του Q_α^i και να τον εναλλάξει σύμφωνα με την

$$[Q_\alpha^i, T_r] = (V_r)^i_j Q_\alpha^j \quad (2.21)$$

δηλαδή το $(V_r)^i_j$ είναι ο αντιπρόσωπος του T_r στην αναπαράσταση του Q_α^i .

⁶Στις τέσσερις διαστάσεις. Για περισσότερες διαστάσεις έχουμε περισσότερες περιπτώσεις.

Γενικά⁷, μπορούμε να έχουμε μιγαδικές αναπαράστασεις να δρουν πάνω σε \mathcal{N} αντικείμενα ($i = 1, \dots, \mathcal{N}$), που σημαίνει ότι για \mathcal{N} -εκτεταμένη υπερσυμμετρία μπορούμε να έχουμε εσωτερική συμμετρία $U(\mathcal{N})$.

2.2 Σημειογραφία δυο συνιστωσών

Στις 4 Minkowski διαστάσεις, η σημειογραφία δυο συνιστωσών (two-component notation) είναι η πιο χρήσιμη. Στην ενότητα αυτή, θα χρησιμοποιούμε τους δείκτες $A, B = 1, \dots, 4$ για τους σπινωριακούς δείκτες 4 συνιστωσών, ενώ θα κρατήσουμε τους $\alpha, \dot{\alpha}$ για τους σπινωριακούς δείκτες δυο συνιστωσών. Συνεπώς, ένας σπίνωρας Dirac θα γράφεται ως

$$\psi^A = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

όπου $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ και η σχέση ανάμεσα στα δυο είδη δεικτών δίνεται από την $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\alpha}(\chi_\alpha)^*$, όπου $\epsilon^{\dot{\alpha}\alpha}$ ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής σε δυο διαστάσεις. Έπειτα, για τον πίνακα C χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Ο σπίνωρας Majorana έχει $\psi_\alpha = \chi_\alpha$ (έναν μοναδικό ανεξάρτητο σπίνωρα δυο συνιστωσών) κι άρα είναι

$$\psi^A = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία

$$\psi \cdot \chi \equiv \psi^\alpha \chi_\alpha; \quad \bar{\psi} \cdot \bar{\chi} \equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad (2.25)$$

όπως και στην 4-διάστατη περίπτωση

$$\bar{\psi} \cdot \chi = \psi^A C_{AB} \chi^B = \psi^\beta \chi_\beta + \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} = \psi \cdot \chi + \bar{\psi} \cdot \bar{\chi} \quad (2.26)$$

⁷Στην απουσία κεντρικών φορτίων.

παράλληλα με τους προφανείς ορισμούς $\psi^\beta = \psi_\alpha \epsilon^{\alpha\beta}$ και $\bar{\psi}_{\dot{\beta}} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

Τότε η $\mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρική άλγεβρα

$$\{Q_A, Q_B\} = 2(C\gamma^\mu)_{AB}P_\mu \quad (2.27)$$

γίνεται, στη σημειογραφία δυο συνιστωσών,

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= -2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0; \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

και, πιο γενικά, για την \mathcal{N} -εκτεταμένη υπερσυμμετρική άλγεβρα χωρίς κεντρικά φορτία έχουμε

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{j\dot{\alpha}}\} &= -2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\delta_j^i P_\mu \\ \{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} &= 0; \quad \{\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

όπου $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}$.

2.3 Μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της υπερ-άλγεβρας

Άμαζες μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις

Για τις άμαζες καταστάσεις μπορούμε πάντα να μεταβούμε σε ένα σύστημα αναφοράς όπου $P^\mu = p(1, 0, 0, 1)$, άρα $P_\mu = p(-1, 0, 0, 1)$ και $\sigma^\mu P_\mu = p(-\mathbb{1} + \sigma^3)$. Οπότε η άλγεβρα ελλατώνεται στην

$$\{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{j\dot{\alpha}}\} = 2p(\mathbb{1} - \sigma_3)\delta_j^i = 4p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_j^i \quad (2.30)$$

Άρα $\{Q_1^i, Q_1^j\} = 0$ και, αφού είναι συζυγή μεταξύ τους, θα πρέπει να ισχύει $Q_1^i |\psi\rangle = Q_1^j |\psi\rangle = 0$ για μια φυσική κατάσταση $|\psi\rangle$. Παράλληλα, εφ' όσον $\{Q_2^i, Q_2^j\} = 4p\delta^{ij}$, μπορούμε να ορίσουμε φερμιονικούς τελεστές δημιουργίας και καταστροφής

$$a^i = \frac{1}{2\sqrt{p}} Q_2^i; \quad a^{\dagger i} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \bar{Q}_2^i \quad (2.31)$$

οι οποίοι ικανοποιούν τη γνωστή άλγεβρα

$$\{a^i, a^{\dagger j}\} = \delta^{ij}; \quad \{a^i, a^j\} = \{a^{\dagger i}, a^{\dagger j}\} = 0 \quad (2.32)$$

Οι τελεστές αυτοί προσδιορίζονται από τη δράση τους πάνω στις καταστάσεις $|\Omega_\lambda\rangle$ του helicity, που είναι η στροφορμή στην κατεύθυνση της διάδοσης και ορίζεται από τον γεννήτορα Lorentz $J_3 = J_{12}$, οπότε και ισχύει $J_3 |\Omega_\lambda\rangle = \lambda |\Omega_\lambda\rangle$. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε την άλγεβρα (2.10) ώστε να γράψουμε

$$[\bar{Q}_2^i, J_3] = +\frac{1}{2}\bar{Q}_2^i \quad (2.33)$$

η οποία εάν δράσει πάνω σε μια κατάσταση $|j\rangle$ δεδομένης στροφορμής j δίνει

$$\begin{aligned} a^{\dagger i} J_3 |j\rangle - J_3 a^{\dagger i} |j\rangle &= \frac{1}{2} a^{\dagger i} |j\rangle \\ \Rightarrow J_3 (a^{\dagger i} |j\rangle) &= \left(j - \frac{1}{2}\right) (a^{\dagger i} |j\rangle) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι οι τελεστές δημιουργίας $a^{\dagger i}$ μειώνουν το helicity κατά $1/2$, δηλαδή εναλλάσσουν τη σωματιδιακή φύση της κατάστασης ανάμεσα στα μποζόνια και τα φερμιόνια, αναδεικνύοντας το είδος της συμμετρίας των γεννητόρων Q_{α}^i .

Καταλήγοντας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Wigner ώστε να βρούμε τις $2^{\mathcal{N}}$ άμαζες μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της υπεράλγεβρας (2.30), δρώντας με τους \mathcal{N} τελεστές δημιουργίας $a^{\dagger i}$ πάνω μια βασική κατάσταση (vacuum) δεδομένου helicity λ . Τα σχετικά παραδείγματα είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} = 1: & \quad |\lambda\rangle, \quad |\lambda - 1/2\rangle = a^{\dagger} |\lambda\rangle \\
\mathcal{N} = 2: & \quad |\lambda\rangle, \quad 2|\lambda - 1/2\rangle = (a^{\dagger 1} |\lambda\rangle, a^{\dagger 2} |\lambda\rangle), \quad |\lambda - 1\rangle = a^{\dagger 1} a^{\dagger 2} |\lambda\rangle \\
\mathcal{N} = 4: & \quad |\lambda\rangle, \quad 4|\lambda - 1/2\rangle = a^{\dagger i} |\lambda\rangle, \quad 6|\lambda - 1\rangle = (a^{\dagger i} a^{\dagger j}) |\lambda\rangle, i \neq j; \\
& \quad 4|\lambda - 3/2\rangle = (a^{\dagger i} a^{\dagger j} a^{\dagger k}) |\lambda\rangle, i \neq j \neq k; \\
& \quad |\lambda - 2\rangle = a^{\dagger 1} a^{\dagger 2} a^{\dagger 3} a^{\dagger 4} |\lambda\rangle
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Για να έχει φυσικό νόημα μια Lorentz αναλλοίωτη, τοπική, κβαντική θεωρία πεδίου με Hermitian Hamiltonian, πρέπει να είναι CPT-αναλλοίωτη. Παράλληλα, οι μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις δεν έχουν απαραίτητα CPT συμμετρία, οπότε εάν μια αναπαράσταση δεν είναι CPT-αναλλοίωτη θα πρέπει να προσθέσουμε εμείς την CPT-συζυγή της αναπαράσταση. Συγκεκριμένα, οι παραπάνω περιπτώσεις γίνονται

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} = 1, \quad \lambda = 1/2: & \quad |1/2\rangle, |0\rangle; |-1/2\rangle, |0\rangle \\
& \quad \lambda = 1: |1\rangle, |1/2\rangle; |-1\rangle, |-1/2\rangle \\
\mathcal{N} = 2, \quad \lambda = 1/2: & \quad |1/2\rangle, 2|0\rangle, |-1/2\rangle; |-1/2\rangle, 2|0\rangle, |1/2\rangle \\
& \quad \lambda = 1: |1\rangle, 2|1/2\rangle, |0\rangle; |-1\rangle, 2|-1/2\rangle, |0\rangle \\
\mathcal{N} = 4, \quad \lambda = 1: & \quad |1\rangle, 4|1/2\rangle, 6|0\rangle, 4|-1/2\rangle, |-1\rangle
\end{aligned} \tag{2.36}$$

όπου μόνο η $\mathcal{N} = 4$ αναπαράσταση είναι αυτοσυζυγής υπό τον CPT μετασχηματισμό.

Multiplets

Οι παραπάνω αναπαραστάσεις ανταποκρίνονται στα εξής πεδία:

- $\mathcal{N} = 1$ multiplets

- Η $\mathcal{N} = 1, \lambda = 1/2$ αναπαράσταση αντιστοιχεί σε ένα σπίνορα Majorana και σε δυο πραγματικά βαθμωτά πεδία, σχηματίζοντας ένα *Wess-Zumino (WZ) multiplet*.

- Η $\mathcal{N} = 1, \lambda = 1$ αναπαράσταση αντιστοιχεί σε ένα σπίνορα Majorana και σε ένα διάνυσμα⁸ (vector), σχηματίζοντας ένα *vector multiplet*

- $\mathcal{N} = 2$ multiplets

- Η $\mathcal{N} = 2, \lambda = 1/2$ αναπαράσταση αντιστοιχεί σε δυο $\mathcal{N} = 1$ WZ multiplets, μαζί σχηματίζοντας ένα *hypermultiplet*.

- Η $\mathcal{N} = 2, \lambda = 1$ αναπαράσταση αντιστοιχεί σε ένα $\mathcal{N} = 1$ WZ multiplet και σε ένα $\mathcal{N} = 1$ vector multiplet, μαζί σχηματίζοντας ένα $\mathcal{N} = 2$ vector multiplet.

- $\mathcal{N} = 4$ multiplets

Τέλος, η $\mathcal{N} = 2, \lambda = 1$ αναπαράσταση αντιστοιχεί σε ένα $\mathcal{N} = 2$ vector multiplet και σε ένα $\mathcal{N} = 2$ hypermultiplet, ή αλλιώς σε τρία $\mathcal{N} = 1$ WZ multiplets και σε ένα $\mathcal{N} = 1$ vector multiplet, και στις δυο περιπτώσεις σχηματίζοντας ένα $\mathcal{N} = 4$ vector multiplet.

⁸Με τον όρο διάνυσμα, στο πλαίσιο της εργασίας αυτής, εννοούμε ένα τετρανυσματικό πεδίο (βαθμίδα).

Μαζικές μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις χωρίς κεντρικά φορτία

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε πάντα να μεταβούμε στο ιδιοσύστημα $P^\mu = M(1, 0, 0, 0)$, ενώ $\sigma^\mu P_\mu = -M$, με την άλγεβρα να ελλατώνεται ως

$$\{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{j\dot{\alpha}}^i\} = 2M\mathbb{1}\delta_j^i = 2M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_j^i \quad (2.37)$$

όπου τώρα έχουμε τους, διπλάσιους από πριν, τελεστές δημιουργίας και καταστροφής

$$a_\alpha^i = \frac{1}{\sqrt{2M}} Q_\alpha^i; \quad a_{\dot{\alpha}}^{\dagger i} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i \quad (2.38)$$

όπου $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$, οι οποίοι ικανοποιούν την γνωστή άλγεβρα

$$\{a_\alpha^i, a_{\dot{\beta}}^{\dagger j}\} = \delta^{ij}\delta_{\alpha\dot{\beta}}; \quad \{a_\alpha^i, a_\beta^j\} = \{a_{\dot{\alpha}}^{\dagger i}, a_{\dot{\beta}}^{\dagger j}\} = 0 \quad (2.39)$$

και άρα ο αριθμός των μη-αναγωγίσιμων καταστάσεων που ορίζουν είναι πλέον $2^{2\mathcal{N}}$.

Μαζικές μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις με κεντρικά φορτία

Η υπεράλγεβρα με κεντρικά φορτία (2.19), στη νέα σημειογραφία, γράφεται ως

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}^i\} &= -2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\delta_j^i P_\mu \\ \{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} &= 2\epsilon_{\alpha\beta} Z^{ij} \\ \{\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\} &= 2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z_{ij}^* \end{aligned} \quad (2.40)$$

Για ευκολία θα εστιάσουμε στην $\mathcal{N} = 2$ περίπτωση. Μπορούμε πάλι να μεταβούμε στο ιδιοσύστημα όπου $-2\sigma^\mu P_\mu = 2M$, καθώς επίσης και να διαγωνοποιήσουμε τον αντισυμμετρικό πίνακα Z^{ij} , δρώντας με έναν global SU(2) μετασχηματισμό (μέρος της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας) στα Q_α^i , αποκτώντας $Z^{ij} = Z\epsilon^{ij}$. Έπειτα, δρώντας με έναν U(1) μετασχηματισμό (επίσης μέρος

της ομάδας εσωτερικής συμμετρίας) μπορούμε να κάνουμε τον Z πραγματικό, δηλαδή $Z_{ij}^* = Z_{ij} = Z\epsilon_{ij}$. Συνεπώς, η άλγεβρα γίνεται

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}^i\} &= 2M\delta_{\alpha\dot{\beta}}\delta_j^i \\ \{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} &= 2Z\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ij} \\ \{\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\} &= 2Z\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{ij}\end{aligned}\tag{2.41}$$

όπου $\bar{Q}_i^{\dot{\alpha}} = (Q_\alpha^i)^\dagger$ και $\bar{Q}_{i\dot{\alpha}} = \bar{Q}^{\dot{\beta}}\epsilon_{\beta\dot{\alpha}}$. Συνεχίζουμε ορίζοντας

$$\begin{aligned}a_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_\alpha^1 + \epsilon_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Q}_{2\dot{\beta}}) & a_\alpha^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{Q}_{1\dot{\alpha}} + \epsilon_{\alpha\beta}Q_\beta^2) \\ b_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_\alpha^1 - \epsilon_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Q}_{2\dot{\beta}}) & b_\alpha^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{Q}_{1\dot{\alpha}} - \epsilon_{\alpha\beta}Q_\beta^2)\end{aligned}\tag{2.42}$$

ώστε να αποκτήσουμε την άλγεβρα

$$\{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = 2(M - Z)\delta_{\alpha\beta} \quad \{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = 2(M + Z)\delta_{\alpha\beta}\tag{2.43}$$

και τις υπόλοιπες σχέσεις μηδενικές. Η πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις συνεπάγεται την ανισότητα

$$M \geq |Z|\tag{2.44}$$

η οποία ονομάζεται *περιορισμός Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield (BPS bound)*. Παρατηρούμε αμέσως ότι στην περίπτωση κορεσμού του περιορισμού

$$M = |Z|$$

επιστρέφουμε στην περίπτωση των \mathcal{N} τελεστών δημιουργίας και των $2^{\mathcal{N}}$ αναπαριστάσεων, της άμαζης περίπτωσης. Λέμε, τότε, ότι έχουμε *short multiplets*.

R-συμμετρία

Είδαμε προηγουμένως ότι η ομάδα εσωτερικής συμμετρίας εναλλάσει τα υπερφορτία Q_α^i . Όταν αναπαριστούμε την άλγεβρα με πεδία, αυτή μετατρέπεται σε global συμμετρία που εναλλάσει τα πεδία και ονομάζεται *R-συμμετρία*. Όπως αναφέραμε στο τέλος της πρώτης ενότητας, για \mathcal{N} -εκτεταμένη υπερσυμμετρία μπορούμε να έχουμε το πολύ την $U(\mathcal{N})$ ως ομάδα εσωτερικής συμμετρίας, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις αυτή μπορεί να είναι μικρότερη.

Περισσότερο ενδιαφερόμαστε για τις τέσσερις διαστάσεις, όπου οι σπίνορες μπορούν να επιλεγθούν να είναι Weyl (μιγαδικοί). Για $\mathcal{N} = 2$ υπερσυμμετρία, είδαμε ότι έχουμε $SU(2)$ R-συμμετρία, η οποία εναλλάσει τα 2 $\mathcal{N} = 1$ WZ multiplets του hypermultiplet και τα δυο φερμιόνια της $\mathcal{N} = 2$ vector multiplet. Αντίστοιχα, για $\mathcal{N} = 4$ υπερσυμμετρία, έχουμε $SU(4)$ R-συμμετρία.

2.4 Το υπερσυμμετρικό μοντέλο Wess-Zumino

Οι βαθμοί ελευθερίας

Ένας γενικός σπίνορας Dirac, σε d διαστάσεις, έχει $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ μιγαδικές συνιστώσες, που σημαίνει ότι σε δυο διαστάσεις έχει δυο μιγαδικές συνιστώσες κι άρα ένα φερμιόνιο Majorana θα έχει δυο πραγματικές συνιστώσες. Συνεπώς, ένα on-shell φερμιόνιο Majorana (που ικανοποιεί την εξίσωση Dirac, δηλαδή την εξίσωση κίνησης του) θα έχει μια και μοναδική συνιστώσα.

Μιας και μελετάμε μια συμμετρία ανάμεσα σε φερμιόνια και μποζόνια, ο αριθμός των φερμιονικών και των μποζονικών βαθμών ελευθερίας θα πρέπει να συμπίπτει. Αυτή η ισότητα μπορεί να είναι

- on-shell, οπότε και έχουμε *on-shell* υπερσυμμετρία
- off-shell, οπότε και έχουμε *off-shell* υπερσυμμετρία

On-shell 2-διάστατο μοντέλο Wess-Zumino

Οπότε, στις δυο διαστάσεις, το απλούστερο μοντέλο έχει ένα φερμιόνιο Majorana ψ και ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο ϕ , τα οποία χωρίς να αλληλεπιδρούν σχηματίζουν το 2-διάστατο ελεύθερο μοντέλο Wess-Zumino με δράση⁹

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x \left[(\partial_\mu \phi)^2 + \bar{\psi} \not{\partial} \psi \right] \quad (2.45)$$

όπου παρατηρούμε ότι η διάσταση μάζας του βαθμωτού πεδίου είναι $[\phi] = 0$ και του φερμιονίου $[\psi] = 1/2$, αφού ισχύει ότι $[d^2x] = -2$ και $[\partial_\mu] = +1$ ενώ η δράση πρέπει να είναι αδιάστατη.

Για να βρούμε τον μετασχηματισμό της υπερσυμμετρίας ξεκινάμε με την μεταβολή του μποζονίου σε φερμιόνιο επί την παράμετρο ϵ , δηλαδή

$$\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi \equiv \bar{\epsilon}_\alpha \psi^\alpha \equiv \epsilon^\beta C_{\beta\alpha} \psi^\alpha \quad (2.46)$$

η οποία είναι ορισμός, αλλά και η απλούστερη κατασκευή δεδομένου ότι πρέπει

⁹Σημειώνουμε ότι η συνθήκη πραγματικότητας Majorana υπονοεί ότι το $\bar{\psi} = \psi^T C$ δεν είναι ανεξάρτητο του ψ , οπότε και ο φερμιονικός παράγοντας $1/2$.

να έχουμε τα ϵ, ψ στο δεξί μέλος. Παράλληλα, συμπεραίνουμε ότι η διάσταση μάζας του ϵ είναι $[\epsilon] = -1/2$. Συνεπώς, η μεταβολή του φερμιονίου σε μποζόνιο $\delta\psi = \phi\epsilon$ είναι ελλειπής κατά $+1$ διάσταση μάζας, η οποία μπορεί να προστεθεί μόνο μέσω του αντικειμένου $\not{\partial}$, δηλαδή

$$\delta\psi = \not{\partial}\phi\epsilon \quad (2.47)$$

και, πλέον, μένει να ελέγξουμε ότι η δράση (2.45) είναι αναλλοίωτη υπό τη συμμετρία αυτή.

Για να προχωρήσουμε στους υπολογισμούς, όμως, πρέπει πρώτα να αναδείξουμε τις επιπτώσεις της διάστασης μιας θεωρίας, μέσω του πίνακα C και της γ -άλγεβρας, στα διάφορα σπινωριακά γινόμενα. Ξεκινάμε με δυο ιδιότητες έγκυρες τόσο στις δυο όσο και στις τέσσερις διαστάσεις¹⁰

$$1) \bar{\epsilon}\chi = +\bar{\chi}\epsilon; \quad \bar{\epsilon}\gamma_\mu\chi = -\bar{\chi}\gamma_\mu\epsilon \quad (2.48)$$

ενώ, εάν ορίσουμε τον πίνακα $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ στις δυο διαστάσεις ως

$$\gamma_3 = i\gamma_0\gamma_1 \quad (2.49)$$

τότε προκύπτουν οι σχέσεις¹¹

$$\begin{aligned} 3) \quad \bar{\epsilon}\gamma_3\chi &= -\bar{\chi}\gamma_3\epsilon; & \bar{\epsilon}\gamma_5\chi &= +\bar{\chi}\gamma_5\epsilon \\ 4) \quad \bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_3\chi &= -\bar{\chi}\gamma_\mu\gamma_3\epsilon; & \bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_5\chi &= +\bar{\chi}\gamma_\mu\gamma_5\epsilon \end{aligned} \quad (2.50)$$

Συνεπώς, με όλα τα εργαλεία έτοιμα, υπολογίζουμε τη μεταβολή της δράσης (2.45) ως

$$\delta S = - \int d^2x \left[-\phi \square \delta\phi + \frac{1}{2} \delta\bar{\psi} \not{\partial}\psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \delta\psi \right] = - \int d^2x \left[-\phi \square \delta\phi + \bar{\psi} \not{\partial} \delta\psi \right] \quad (2.51)$$

¹⁰Χρησιμοποιούμε ότι και στις δυο διαστάσεις ισχύει ότι $C^T = -C$, άρα και $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$, καθώς κι ότι οι σπίνωρες αντιμετατίθενται.

¹¹Χρησιμοποιούμε ότι $C\gamma_3 = +(C\gamma_3)^T$ και $C\gamma_5 = -(C\gamma_5)^T$, καθώς κι ότι $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = \{\gamma_3, \gamma_\mu\} = 0$.

Αντικαθιστώντας τις μεταβολές (2.46), (2.47) του μποζονίου και του φερμιονίου προκύπτει

$$\delta S = - \int d^2x \left[-\phi \square \bar{\epsilon} \psi + \bar{\psi} \not{\partial} \not{\partial} \phi \epsilon \right] \quad (2.52)$$

όπου εάν παρατηρήσουμε ότι

$$\not{\partial} \not{\partial} = \partial_\mu \partial_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \partial_\mu \partial_\nu g^{\mu\nu} = \square \quad (2.53)$$

βλέπουμε αμέσως ότι $\delta S = 0$.

Off-shell 2-διάστατο μοντέλο Wess-Zumino

Στις δυο διαστάσεις, ένα off-shell φερμιόνιο Majorana έχει δυο βαθμούς ελευθερίας, ενώ το βαθμωτό μποζονικό πεδίο έχει μονάχα ένα. Οπότε για να κλείσουμε την άλγεβρα του μοντέλου WZ off-shell, χρειαζόμαστε ένα επιπλέον βαθμωτό πεδίο F . Παράλληλα, όμως, on-shell πρέπει να επιστρέφουμε στο προηγούμενο μοντέλο, που σημαίνει ότι το επιπλέον πεδίο F πρέπει να είναι βοηθητικό (*auxiliary*), δηλαδή μη-δυναμικό με κανένα βαθμό ελευθερίας διάδοσης, κι άρα η δράση του να είναι $\int F^2/2$. Συνεπώς, η δράση του off-shell μοντέλου Wess-Zumino θα είναι

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x \left[(\partial_\mu \phi)^2 + \bar{\psi} \not{\partial} \psi - F^2 \right] \quad (2.54)$$

όπου παρατηρούμε ότι η διάσταση μάζας του F είναι $[F] = +1$ και η εξίσωση κίνησης του $F = 0$, όπως πρέπει. Αναλογίζοντας ότι η μεταβολή του ψ πρέπει πλέον να είναι ανάλογη και του πεδίου F και παρατηρώντας τις διαστάσεις μάζας, μπορούμε να κατασκευάσουμε τις μεταβολές

$$\delta \phi = \bar{\epsilon} \psi; \quad \delta \psi = \not{\partial} \phi \epsilon + F \epsilon; \quad \delta F = \bar{\epsilon} \not{\partial} \psi \quad (2.55)$$

όπου, όμοια με πριν, εάν τις αντικαταστήσουμε στη μεταβολή της δράσης (2.54) θα προκύψει $\delta S = 0$.

On-shell 4-διάστατο μοντέλο Wess-Zumino

Στις τέσσερις διαστάσεις, ένα on-shell φερμιόνιο Majorana έχει δυο βαθμούς ελευθερίας, οπότε χρειαζόμαστε δυο πραγματικά βαθμωτά πεδία, A και B , συνολικά αποκτώντας τη δράση

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int d^4x \left[(\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu B)^2 + \bar{\psi} \not{\partial} \psi \right] \quad (2.56)$$

η οποία συνοδεύεται από τις υπερσυμμετρικές μεταβολές

$$\delta A = \bar{\epsilon} \psi; \quad \delta B = \bar{\epsilon} i \gamma_5 \psi; \quad \delta \psi = \not{\partial} (A + i \gamma_5 B) \epsilon \quad (2.57)$$

όπου η μοναδική διαφορά με τις προηγούμενες ενότητες είναι ο παράγοντας $i \gamma_5$ που διαχωρίζει το B από το A .

Off-shell 4-διάστατο μοντέλο Wess-Zumino

Έπειτα, ένα off-shell φερμιόνιο Majorana έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας και, άρα, χρειάζεται να εισάγουμε ένα βοηθητικό βαθμωτό πεδίο για κάθε ένα από τα διαδούμενα βαθμωτα πεδία A και B . Οπότε, η δράση είναι η

$$S = S_0 + \int d^4x \left[\frac{F^2}{2} + \frac{G^2}{2} \right] \quad (2.58)$$

και συνοδεύεται από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{\epsilon} \psi; & \delta B &= \bar{\epsilon} i \gamma_5 \psi; & \delta \psi &= \not{\partial} (A + i \gamma_5 B) \epsilon + (F + i \gamma_5 G) \epsilon; \\ \delta F &= \bar{\epsilon} \not{\partial} \psi; & \delta G &= \bar{\epsilon} i \gamma_5 \not{\partial} \psi \end{aligned} \quad (2.59)$$

οι οποίοι, εάν αντικατασταθούν κατά τα γνωστά, θα δώσουν $\delta S = 0$.

2.5 Η $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) δράση

Η δράση αυτή αντιπροσωπεύει την κυριότερη θεωρία πεδίου που θα μας απασχολήσει, στην αντιστοιχία AdS/CFT. Στο πλαίσιο της προσπάθειας για την ενοποίηση των θεμελιωδών πεδίων (δυνάμεων), κατασκευάζουμε δράσεις σε περισσότερες των συνηθισμένων τεσσάρων χωροχρονικών διαστάσεων, θεωρώντας ότι ορισμένα από αυτά, εκεί, ενοποιούνται σε ένα κοινό πεδίο. Τότε, η *διαστατική ελλάτωση Kaluza-Klein (KK)* μεταφέρει τη δράση και όλα τα αντικείμενα της από τις D στις τέσσερις διαστάσεις, με αποτέλεσμα τα D -διάστατα πεδία να υποδιαιρούνται στα γνωστά 4-διάστατα. Για λόγους που θα γίνουν αργότερα εμφανείς, επιλέγουμε τη θεωρία μας να είναι στις δέκα διαστάσεις, ενώ η απλούστερη εκδοχή της θέλει τα πεδία εκεί να εξαρτώνται μονάχα από τις 4 χωροχρονικές εξ' αυτών.

Στις δέκα διαστάσεις, ο απλούστερος¹² σπίνορας είναι ο Majorana-Weyl. Αυτός, από τις $2^{[10/2]} = 32$ μιγαδικές συνιστώσες του σπίνορα Dirac, απομένει με 16 πραγματικές συνιστώσες. On-shell χάνουμε τις μισές συνιστώσες και μένουμε με 8 πραγματικούς φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι συμπίπτουν με τους $10 - 2 = 8$ μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας ενός on-shell διάνυσματος. Συνεπώς, τα πεδία της $\mathcal{N} = 1$ Super Yang-Mills, στις δέκα διαστάσεις, είναι το διάνυσμα A_M , $M = 0, \dots, 9$ και ο σπίνορας Ψ_{Π} , $\Pi = 1, \dots, 16$, ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες¹³

$$\Gamma_{11}\Psi = \Psi \quad \bar{\Psi} = \Psi^T C_{10} \quad (2.60)$$

όπου η συνθήκη Weyl απλοποιεί τον σπίνορα Majorana να εξαρτάται μονάχα από έναν σπίνορα Weyl, λ , οπότε η δράση διαμορφώνεται ως

$$S_{10d, \mathcal{N}=1SYM} = (-2) \int d^{10}x \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \Gamma^M D_M \lambda \right] \quad (2.61)$$

Τώρα, όπως αναφέραμε, το πρώτο βήμα στη διαστατική ελλάτωση είναι να περιορίσουμε τη εξάρτηση των πεδίων στις τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις,

¹²Με τους λιγότερους βαθμούς ελευθερίας.

¹³Στις 2,10,18... διαστάσεις, οι σπίνορες Majorana-Weyl ικανοποιούν και τις δυο συνθήκες, αυτή της πραγματικότητας (Majorana) και αυτή της χειραλικότητας (Weyl).

αντικαθιστώντας το $d^{10}x$ με d^4x . Το δεύτερο βήμα είναι να αποσυνθέσουμε τα πεδία και τα υπόλοιπα αντικείμενα, σύμφωνα με τις 4-διάστατες σπινοριακές τους αναπαραστάσεις. Οπότε, ξεκινάμε με τους γ -πίνακες και τον πίνακα C όπου¹⁴

$$\begin{aligned} \Gamma_M &= (\gamma_\mu \otimes \mathbf{1}, \gamma_5 \otimes \gamma_m) : & \Gamma_\mu &= \gamma_\mu \otimes \mathbf{1}; & \Gamma_m &= \gamma_5 \otimes \gamma_m; & \Gamma_{11} &= \gamma_5 \otimes \gamma_7 \\ C_{10} &= C_4 \otimes C_6 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Παρατηρώντας ότι, τόσο στις τέσσερις όσο και στις δέκα διαστάσεις Minkowski, το $C\Gamma$ είναι συμμετρικό, τότε από το γινόμενο $C_{10}\Gamma^\mu = C_4\gamma^\mu \otimes C_6$ προκύπτει ότι ο C_6 είναι συμμετρικός και άρα ο $C_{10}^T = C_4^T \otimes C_6^T = -C_{10}$ είναι αντισυμμετρικός. Δηλαδή, ο 10-διάστατος συζυγής σπίνορας Majorana γίνεται

$$\bar{\psi} \equiv \psi^T C_4 \otimes C_6 \quad (2.63)$$

όπου η 10-διάστατη συνθήκη Weyl περιορίζει τους 10-διάστατους σπίνορες να αποσυντεθούν σε τέσσερις 4-διάστατους σπίνορες, $\Psi_{\text{II}} = \psi_{i\alpha}$, $i = 1, \dots, 4$. Παράλληλα, το 10-διάστατο διάνυσμα A_M αποσυντίθεται σε ένα διάνυσμα A_μ και σε έξι βαθμωτα πεδία ϕ_m , $m = 1, \dots, 6$, ως

$$A_M = (A_\mu, \phi_m) \quad \phi_{[ij]} \equiv \phi_m \tilde{\gamma}_{[ij]}^m \quad (2.64)$$

όπου οι συντελεστές Clebsh-Gordan για τη μεταφορά από τους $\text{SO}(6)$ δείκτες m στους $\text{SU}(4)$ δείκτες $i = 1, \dots, 4$, με αντισυμμετρική αναπαράσταση $[ij]$ κανονικοποιούνται ως

$$\tilde{\gamma}_{[ij]}^m \equiv \frac{1}{2}(C_6\gamma_m\gamma_7)_{[ij]}; \quad \tilde{\gamma}_{[ij]}^m \tilde{\gamma}_n^{[ij]} = \delta_n^m \quad (2.65)$$

όπου τα πεδία $\phi_{[ij]}$ έχουν μιγαδικές τιμές αλλά ικανοποιούν μια συνθήκη πραγματικότητας

$$\phi_{ij}^\dagger = \phi^{ij} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijkl}\phi_{kl} \quad (2.66)$$

¹⁴Προφανώς, αφού $2^{[d/2]}$ η διάσταση της σπινοριακής αναπαράστασης, τότε το ευθύ γινόμενο δυο συστατικών αναπαραστάσεων θα είναι διάστασης $2^{[d/2]} = 2^{[d_1/2]} \cdot 2^{[d_2/2]}$.

Τελικά, αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στη 10-διάστατη δράση, αποκτάμε τη

$$\begin{aligned}
S_{4d, \mathcal{N}=4SYM} &= (-2) \int d^4x \operatorname{Tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i \not{D} \psi^i - \frac{1}{2} D_\mu \phi_{ij} D^\mu \phi^{ij} \right. \\
&\quad \left. - g \bar{\psi}^i [\phi_{ij}, \psi^j] - \frac{g^2}{4} [\phi_{ij}, \phi_{kl}] [\phi^{ij}, \phi^{kl}] \right] \\
&= (-2) \int d^4x \operatorname{Tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i \not{D} \psi^i - \frac{1}{2} D_\mu \phi_m D^\mu \phi^m \right. \\
&\quad \left. - g \bar{\psi}^i [\phi_n, \psi^j] \tilde{\gamma}_{[ij]}^n - \frac{g^2}{4} [\phi_m, \phi_n] [\phi^m, \phi^n] \right]
\end{aligned} \tag{2.67}$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu + g[A_\mu, \]$.

Οι 10-διάστατοι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί, όπως και στην 4-διάστατη $\mathcal{N} = 1$ θεωρία, θα είναι

$$\begin{aligned}
\delta A_M^a &= \bar{\epsilon} \Gamma_M \lambda^a \\
\delta \lambda^a &= -\frac{1}{2} \Gamma^{MN} F_{MN}^a \epsilon
\end{aligned} \tag{2.68}$$

εάν στους οποίους αντικαταστήσουμε τα ελλατωμένα αντικείμενα, θα αποκτήσουμε τους 4-διάστατους μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^a &= \bar{\epsilon}_i \gamma_\mu \psi^{ai} \\
\delta \phi_a^{[ij]} &= 2 \bar{\epsilon}^{[i} \psi^{j]a} \\
\delta \lambda^{ai} &= -\frac{\gamma^{\mu\nu}}{2} F_{\mu\nu}^a \epsilon^i - 2 \gamma^\mu D_\mu \phi^{a,[ij]} \epsilon_j + 2 g f_{bc}^a (\phi^b \phi^c)^{[ij]} \epsilon_j; \\
(\phi^a \phi^b)_j^i &\equiv \phi^{a,i} \phi^{b,k}{}_j
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Η $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills δράση έχει, όπως παρατηρούμε, μια $SO(6)=SU(4)$ global συμμετρία, η οποία είναι μια R-συμμετρία και εμφανίζεται στην παραπάνω κατασκευή ως κατάλοιπο των έξι ελλατωμένων διαστάσεων. Το $\mathcal{N} = 4$ υπερσυμμετρικό multiplet $(A_\mu^a, \psi^{ai}, \phi_{[ij]})$ χωρίζεται είτε σε ένα $\mathcal{N} = 2$ vector multiplet και ένα $\mathcal{N} = 2$ hypermultiplet, είτε σε ένα $\mathcal{N} = 1$ vector multiplet (A_μ^a, ψ_4) και σε τρία $\mathcal{N} = 1$ WZ chiral multiplets (ψ_q, ϕ_q) , $q = 1, 2, 3$.

Κεφάλαιο 3

Υπερβαρύτητα

3.1 Ο φορμαλισμός vielbein και η spin συνοχή στη Γενική Σχετικότητα

Η βαρύτητα καθορίζεται από την μετρική $g_{\mu\nu}$, η οποία με τη σειρά της καθορίζει τη συνοχή Levi-Civita $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(g)$. Η τελευταία είναι σαν ένα πεδίο βαθμίδας για τη βαρύτητα, με τον τανυστή Riemann $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}(\Gamma)$ να παίζει το ρόλο της πεδιακής της έντασης. Παράλληλα, όμως, η διατύπωση της μετρικής σχέσης που αναδεικνύει εμφανέστερα την αναλογία με τη θεωρία βαθμίδας είναι αυτή με τους όρους της βάσης vielbein e_{μ}^a και της spin συνοχής ω_{μ}^{ab} , μια διατύπωση αναγκαία για έναν υπερσυμμετρικό φορμαλισμό που εμπεριέχει σπίνορες και αναπαραστάσεις τους.

Κάθε καμπύλος χώρος, δηλαδή μια Lorentz πολλαπλότητα, είναι τοπικά επίπεδος. Συνεπώς, τοπικά, κυριαρχεί η συμμετρία της ομάδας Lorentz, η οποία αναδεικνύεται από την αποσύνθεση της μετρικής στα διανύσματα βάσης της, δηλαδή τα vielbein

$$g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}^a(x)e_{\nu}^b(x)\eta_{ab} \quad (3.1)$$

Για την κάθε βάση $e_{\mu}^a(x)$, το μ είναι ένας «καμπύλος» δείκτης στον οποίον εφαρμόζονται οι γενικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων (υπό τους οποίους το $e_{\mu}^a(x)$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, σαν ένα πεδίο βαθμίδας), ενώ το a είναι ένας «επίπεδος» δείκτης στον οποίο εφαρμόζονται οι μετασχηματισμοί Lorentz. Τουτέστιν, στην επίπεδη γειτονιά κάθε σημείου ορίζεται ένας εφαπτόμενος Minkowski χώρος και το a είναι ένας τανυστικός δείκτης που ζεί στο χώρο αυτό.

Παράλληλα, υπάρχει ένα ακόμα «πεδίο βαθμίδας», η spin συνοχή ω_μ^{ab} , το οποίο ορίζεται ως η συνοχή¹ που εκφράζει τη δράση της ομάδας Lorentz πάνω στους σπινόρες. Δηλαδή, τα $[ab]$ είναι δείκτες στην adjoint (αντισυμμετρική) αναπαράσταση της ομάδας Lorentz $SO(1, d - 1)$ και, πλέον, η συναλλοίωτη παράγωγος των σπινόρων θα έχει την κατάλληλη μορφή μιας θεωρίας βαθμίδας. Κι ενώ η συναλλοίωτη παράγωγος των τανυστών (μποζονίων) είναι η γνωστή

$$D_\mu T_{\nu\rho}^\sigma = \partial_\mu T_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_{\lambda\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda T_{\nu\lambda}^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma T_{\nu\rho}^\lambda \quad (3.2)$$

η συναλλοίωτη παράγωγος των σπινόρων (φερμιονίων) θα είναι²

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \Gamma_{ab} \psi \quad (3.3)$$

αναδεικνύοντας το αντικείμενο $D_\mu \psi$ ως ένα συναλλοίωτο τανυστή, υπό τους γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, και το ω_μ^{ab} ως ένα πεδίο βαθμίδας που δρά πάνω σε οποιοδήποτε τοπικό Lorentz δείκτη a .

Το αξίωμα³ (*postulate*) *veilbein* εκφράζεται ως

$$D_\mu e_\nu^a \equiv \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^a{}_b e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^a = 0 \quad (3.4)$$

το οποίο, για συμμετρικο $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, οδηγεί σε μηδενική στρέψη

$$T_{[\mu\nu]}^a \equiv 2D_{[\mu} e_{\nu]}^a = 2\partial_{[\mu} e_{\nu]}^a + 2\omega_{[\mu}^a{}_b e_{\nu]}^b = 0 \quad (3.5)$$

κι από όπου μπορούμε να λύσουμε ως προς ω_μ^{ab} ώστε να βρούμε την έκφραση $\omega = \omega(e)$. Έπειτα, μπορούμε να κατασκευάσουμε την ένταση του πεδίου ω_μ^{ab} ως

$$R_{\mu\nu}^{ab}(\omega) = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_\nu^b{}_c - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^b{}_c \quad (3.6)$$

¹Η συνοχή ενός χώρου είναι το γεωμετρικό ανάλογο του πεδίου βαθμίδας, μιας θεωρίας βαθμίδας, που ζει στο χώρο αυτό. Ισοδύναμα, ένα πεδίο βαθμίδας αντιστοιχεί στη συνοχή ενός χώρου, η γεωμετρία του οποίου περιγράφει τη δυναμική της αντίστοιχης θεωρίας βαθμίδας.

² $1/4\Gamma_{ab} \equiv 1/2[\Gamma_a, \Gamma_b]$ είναι οι γεννήτορες Lorentz στην σπινორιακή αναπαράσταση.

³Στην πραγματικότητα δεν είναι αξίωμα, αλλά προκύπτει από τον ίδιο του τον ορισμό.

που είναι ο τανυστής Riemann στη βάση

$$R_{\rho\sigma}^{ab}(\omega(e)) = e_{\mu}^a e^{\nu b} R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma(e)) \quad (3.7)$$

καθώς και το βαθμωτό Ricci

$$R = R_{\mu\nu}^{ab} e_a^{\mu} e_b^{\nu} \quad (3.8)$$

Στη συνέχεια, παρατηρώντας ότι αφού $g = e\eta e$ τότε $-\det g = (\det e)^2$, συμπεραίνουμε ότι η d -διάστατη δράση Einstein-Hilbert θα είναι

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^d x (\det e) R_{\mu\nu}^{ab}(\omega(e)) e_a^{\mu} e_b^{\nu} \quad (3.9)$$

η οποία είναι η δευτέρας τάξης διατύπωση (*formulation*), μιας και το ω δεν είναι ανεξάρτητο.

Αντίθετα, εάν εκλάβουμε το ω ως μια ανεξάρτητη μεταβλητή στην παραπάνω δράση, τότε η εξίσωση κίνησης του δίνει $T_{\mu\nu}^a = 0$, ενώ εάν η θεωρία εμπεριέχει και δυναμικά φερμιόνια μέσω ενός κινητικού όρου $\bar{\psi} \not{D} \psi$, τότε θα ισχύει $\omega = \omega(e) + (\psi\psi \text{ όροι})$ και η στρέψη θα είναι μη-μηδενική. Αυτή είναι η πρώτη τάξης διατύπωση.

3.2 Τοπική υπερσυμμετρία: υπερβαρύτητα

Η υπερβαρύτητα μπορεί να οριστεί με δυο ανεξάρτητους τρόπους, οι οποίοι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Είναι μια υπερσυμμετρική θεωρία της βαρύτητας και είναι, ακόμα, μια θεωρία τοπικής υπερσυμμετρίας. Οπότε, μπορούμε είτε να υπερσυμμετριοποιήσουμε την βαρύτητα, είτε να θεωρήσουμε ένα υπερσυμμετρικό μοντέλο και να μετατρέψουμε την υπερσυμμετρία σε τοπική.

Επιθυμούμε μια θεωρία τοπικής υπερσυμμετρίας, που σημαίνει ότι πρέπει να κάνουμε την σταθερή σπινωριακή παράμετρο ζ^α τοπική. Παράλληλα, γνωρίζουμε από τη θεωρία βαθμίδας ότι εάν μετατρέψουμε μια global συμμετρία σε τοπική τότε πρέπει να εισάγουμε ένα πεδίο βαθμίδας για τη συμμετρία αυτή, όπως για παράδειγμα με το U(1)-αναλλοίωτο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο ϕ , με δράση

$$\int |\partial_\mu \phi|^2; \quad \phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$$

όπου εισάγουμε το πεδίο βαθμίδας A_μ , με μεταβολή $\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha$, ώστε να παραγωγίζουμε συναλλοίωτα με την $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ και η δράση

$$\int |D_\mu \phi|^2$$

να είναι πάλι αναλλοίωτη υπό τον U(1) μετασχηματισμό.

Στην περίπτωση της υπερβαρύτητας χρειαζόμαστε, επιπλέον, κι έναν σπινωριακό δείκτη α (στον οποίο δρά ο μετασχηματισμός υπερσυμμετρίας) για το νέο πεδίο βαθμίδας, το οποίο γράφουμε ως $\psi_{\mu\alpha}$ και ονομάζουμε *gravitino*.

Το γεγονός ότι έχουμε μια υπερσυμμετρική θεωρία για τη βαρύτητα σημαίνει ότι το gravitino θα πρέπει να μετασχηματίζεται υπερσυμμετρικά σε κάποια μεταβλητή της βαρύτητας, δηλαδή

$$\psi_{\mu\alpha} = Q_\alpha \cdot (\text{gravity})_\mu$$

όπου η δομή των δεικτών υποδεικνύει ότι η μεταβλητή αυτή δεν μπορεί να είναι η μετρική, παρά μονάχα ένα αντικείμενο με ένα μόνο «καμπύλο» δείκτη, τουτέστιν το vielbein, ενώ επιβεβαιώνεται η αναγκαιότητα της διατύπωσης αυτής της βαρύτητας για την υπερβαρύτητα. Οπότε το gravitino είναι το υπερσυμμετρικός εταίρος του vielbein και, παράλληλα, το πεδίο βαθμίδας στην τοπική υπερσυμμετρία.

3.3 $\mathcal{N} = 1$ on-shell 4-διάστατη υπερβαρύτητα

Ένας προσεκτικός υπολογισμός των βαθμών ελευθερίας δείχνει ότι η $\mathcal{N} = 1$ on-shell 4-διάστατη υπερβαρύτητα $\{e_\mu^a, \psi_\mu^\alpha\}$ είναι συνεπής. Συνεπώς, επιθυμώντας να κατασκευάσουμε τη δράση της, αρχίζουμε με τη βαρύτητα η οποία, εφ' όσον έχουμε σπίνορα, θα πρέπει να είναι εκπεφρασμένη στη vielbein διατύπωση. Σε αναλογία με Einstein-Hilbert δράση (3.9) γράφουμε

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \frac{1}{2k_N^2} \int d^d x (\det e) R_{\mu\nu}^{ab}(\omega) e_a^\mu e_b^\nu \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{2k_N^2} \int d^4 x \epsilon_{abcd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^a e_\nu^b R_{\rho\sigma}^{cd}(\omega) \\ &= \frac{1}{2k_N^2} \int \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge R^{cd}(\omega) \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου

$$\det e_\mu^a = \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c e_\sigma^d \quad (3.11)$$

και

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ac} \wedge \omega^{cb} \quad (3.12)$$

Έπειτα, θεωρούμε τη δράση για το gravitino, η οποία είναι η δράση Rarita-Schwinger για ένα ελεύθερο πεδίο με spin 3/2

$$\begin{aligned} S_{RS} &= -\frac{1}{2} \int d^d x \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \psi_\rho \\ &= +\frac{i}{2} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma \end{aligned} \quad (3.13)$$

όπου $\gamma^{\mu\rho\sigma} = -i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu$ και $\psi_\mu = \psi_c e_\mu^c$, η οποία σε καμπύλο χώρο γίνεται

$$\begin{aligned}
S_{RS} &= -\frac{1}{2} \int d^d x \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho \\
&= +\frac{i}{2} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Οπότε, η δράση για την $\mathcal{N} = 1$ on-shell 4-διάστατη υπερβαρύτητα θα είναι

$$S_{\mathcal{N}=1} = S_{EH}(\omega, e) + S_{RS}(\psi_\mu) \tag{3.15}$$

ενώ οι μετασχηματισμοί υπερσυμμετρίας, σε αναλογία με το προηγούμενο κεφάλαιο, θα είναι οι

$$\delta e_\mu^a = \frac{k_N}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu \quad \delta \psi_\mu = \frac{1}{k_N} D_\mu \epsilon \tag{3.16}$$

όπου η σταθερά του Newton k_N εισάχθηκε για διαστατικούς λόγους.

Για να ολοκληρωθεί η ανάλυση μας πρέπει να κατηγοριοποιήσουμε, ανάλογα με τον φορμαλισμό, τις εξείς περιπτώσεις:

- Δευτέρας τάξης φορμαλισμός: Τα ανεξάρτητα πεδία είναι τα e_μ^a, ψ_μ , ενώ το ω δεν είναι ανεξάρτητο αλλά είναι $\omega = \omega(e, \psi)$, οπότε ισχύουν οι παραπάνω υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί.
- Πρώτης τάξης φορμαλισμός: Όλα τα πεδία e, ψ, ω είναι ανεξάρτητα, οπότε και προστίθεται ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned}
\delta \omega_\mu^{ab} &= -\frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_\mu \tilde{\psi}^{ab} + \frac{1}{8} \bar{\epsilon} \gamma_5 (\gamma^\lambda \tilde{\psi}_\lambda^b e_\mu^a - \gamma^\lambda \tilde{\psi}_\lambda^a e_\mu^b) \\
\tilde{\psi}^{ab} &\equiv \epsilon^{abcd} \psi_{cd}; \quad \psi_{ab} e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu \psi_n - D_\nu \psi_\mu)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

- 1.5 τάξης φορμαλισμός: Χρησιμοποιούμε τον δευτέρας τάξης φορμαλισμό, αλλά, όταν μεταβάλλουμε τη δράση $S(e, \psi, \omega(e, \psi))$, δεν μεταβάλλουμε το $\omega(e, \psi)$ με τον κανόνα της αλυσίδας, μιας και προκύπτει ο παράγοντας $\delta S / \delta \omega$ που μηδενίζεται στον φορμαλισμό αυτό. Φυσικά, αυτό σημαίνει ότι δεν θα αντικαθίστούμε, στη δράση, την ακριβή εξάρτηση του $\omega(e, \psi)$.

3.4 Υπερβαρύτητα βαθμίδας

Είδαμε προηγουμένως ότι η $\mathcal{N} = 1$ υπερβαρύτητα αποτελείται από το multiplet $\{e_\mu^a, \psi_\mu^\alpha\}$. Αυτό μπορεί να συζευχθεί με άλλα υπερσυμμετρικά $\mathcal{N} = 1$ multiplets, όπως αυτά που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς και με το λεγόμενο *gravitino multiplet* $\{A_\mu, \psi_\mu^\alpha\}$, αποτελούμενο από ένα gravitino και ένα (αβελιανό) διάνυσμα, ώστε να συνθέσει ένα $\mathcal{N} = 2$ multiplet υπερβαρύτητας.

Εάν συζεύξουμε τα gravitini της 4-διάστατης $\mathcal{N} = 2$ υπερβαρύτητας με ένα αβελιανό πεδίο βαθμίδας αποκτάμε μια *υπερβαρύτητα βαθμίδας* (*gauged supergravity*). Για την ακρίβεια, η υπερβαρύτητα βαθμίδας είναι παραμορφωμένη μονάχα κατά μια σταθερά σύζευξης g από την απλή υπερβαρύτητα, καθώς το πεδίο βαθμίδας υπάρχει ήδη στην $\mathcal{N} = 2$, τουτέστιν το διάνυσμα A_μ . Ο νέος μετασχηματισμός του gravitino είναι

$$\delta\psi_\mu^\alpha = D_\mu(\omega(e, \psi))\epsilon^\alpha + g\gamma_\mu\epsilon^\alpha + gA_\mu\epsilon^i \quad (3.18)$$

όπου έχουμε κι έναν σταθερό όρο ($g\gamma_\mu\epsilon^i$), ο οποίος μας υποχρεώνει να προσθέσουμε στη δράση έναν αντίστοιχο σταθερό όρο, δηλαδή μια *κοσμολογική σταθερά* $\int e\Lambda$.

Αυτή η κοσμολογική σταθερά είναι αρνητική, με αποτέλεσμα το απλούστερο υπόβαθρο για την υπερβαρύτητα βαθμίδας να είναι ο χώρος Anti-de Sitter. Αντίθετα, λοιπόν, με την απλή υπερβαρύτητα δεν μπορεί να ζήσει στον χώρο Minkowski και, άρα, ουσιαστικά η υπερβαρύτητα βαθμίδας είναι AdS υπερβαρύτητα.

Κεφάλαιο 4

Σύμμορφη θεωρία πεδίου

4.1 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί και η ο- μάδα τους

Η σύμμορφη αναλλοιώτητα είναι η αναλλοιώτητα μιας θεωρίας στον επίπεδο χώρο υπό έναν γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων, ο οποίος μετασχηματίζει τη μετρική κατά ένα σύμμορφο παράγοντα ως

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = [\Omega(x)]^{-2} dx'_\mu dx'^\mu \quad (4.1)$$

και αποτελεί, επί της ουσίας, μια (τοπική) γενίκευση των μετασχηματισμών κλίμακας

$$x'^\mu = \alpha x^\mu \Rightarrow ds^2 = d\bar{x}^{\prime 2} = \alpha^2 d\bar{x}^2 \quad (4.2)$$

Στη κβαντική θεωρία πεδίου, μπορούμε να έχουμε θεωρίες που είτε είναι κλασσικά αναλλοιώτες ως προς την κλίμακα είτε όχι, αλλά γενικά στο κβαντικό επίπεδο η αναλλοιώτητα κλίμακας σπάει χάρις στη δυναμική εμφάνιση της κλίμακας επακανονικοποίησης (renormalization scale).

Η διαδικασία επακανονικοποίησης εμπεριέχει ένα κατώφλι (cut-off) ϵ , καθώς και μια γυμνή (bare) σύζευξη λ_0 και μάζα m_0 . Για παράδειγμα, η διαστατική κανονικοποίηση μιας θεωρίας βαθμωτού πεδίου για $V(\phi) = m^2\phi^2 + \lambda\phi^4$ δίνει

$$\lambda_0 = \mu^\epsilon \left(\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{\epsilon^k} \right); \quad m_0^2 = m^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(\lambda)}{\epsilon^k} \right) \quad (4.3)$$

όπου μ είναι η κλίμακα επακανονικοποίησης, και από την οποία σχέση εξάγουμε την επακανονικοποιημένη σύζευξη $\lambda = \lambda(\mu, \epsilon; \lambda_0, m_0)$, η οποία εν γένει εξαρτάται από την κλίμακα.

Το *τρέξιμο* (*running*) της σταθεράς σύζευξης ως προς την κλίμακα, χαρακτηρίζεται από την β -συνάρτηση

$$\beta(\lambda, \epsilon) = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \Big|_{m_0, \lambda_0, \epsilon} \quad (4.4)$$

Μια κβαντομηχανικά κατά κλίμακα αναλλοίωτη θεωρία (δηλαδή μια θεωρία ανεξάρτητη του α στην (4.2), στο κβαντικό επίπεδο) πρέπει να είναι ανεξάρτητη του μ και, οπότε, να έχει μηδενική β -συνάρτηση. Υπάρχουν δυο τρόποι, μέσω των οποίων αυτό είναι δυνατό:

- $\beta = 0$ παντού, που σημαίνει ακύρωση των διαγραμμάτων Feynman, υπολώντας ότι δεν υπάρχουν απειρισμοί.
- Μια μη-τετριμμένη αλληλεπιδρώσα θεωρία: η β -συνάρτηση είναι μη-τετριμμένη, αλλά μηδενίζεται σε ένα σημείο λ_F μακριά από το $\lambda = 0$, στο οποίο μια μη-τετριμμένη (μη-διαταρακτική) θεωρία αναδύεται: μια σύμμορφη θεωρία πεδίου. Αν το σημείο αυτό είναι ευσταθές, τότε η β -συνάρτηση θα είναι ευσταθώς μηδενική, $\beta = \beta(\lambda_F) = 0$, και, οπότε, η θεωρία σταθερά σύμμορφη.

Στην φυσική συμπυκνωμένης ύλης, μια θεωρία αναλλοίωτη κατά κβαντική κλίμακα θα προέκυπτε κοντά σε μια μετάβαση φάσης (κρίσιμο σημείο).

Δεν ξεχνάμε, επίσης, ότι η σύμμορφη συμμετρία, ως τοπική συμμετρία, επιδέχεται ρήξης στο κβαντικό επίπεδο, κάτι που θα ήταν απαγορευτικό για τη συνέπεια της θεωρίας. Συνεπώς, απαιτούμε να μην προκύπτουν κβαντικές ανωμαλίες, γεγονός που δίνει επιπρόσθετες συνθήκες, οι οποίες περιορίζουν την

θεωρία μας.

Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί είναι γενικεύσεις των μετασχηματισμών κλίμακας, του επίπεδου χώρου, οι οποίοι αλλάζουν την απόσταση μεταξύ των σημείων κατά ένα τοπικό παράγοντα. Συνεπώς, η απειροστή μορφή του σύμμορφου μετασχηματισμού μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \nu_\mu(x); & \Omega(x) &= 1 + \sigma(x) \\ \Rightarrow \partial_\mu \nu_\nu + \partial_\nu \nu_\mu &= 2\sigma \delta_{\mu\nu} \Rightarrow \sigma &= \frac{1}{d} \partial \cdot \nu \end{aligned} \quad (4.5)$$

Η λύση για $d = 2$ διαστάσεις είναι ειδική και θα την εξετάσουμε ξεχωριστά. Εκτός της περίπτωσης αυτής, λοιπόν, η παραπάνω εξίσωση επιδέχεται τη γενική λύση

$$\nu_\mu(x) = a_\mu + \omega_{\mu\nu} x_\nu + \lambda x_\mu + b_\mu x^2 - 2x_\mu b \cdot x \quad (4.6)$$

με $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ (αντισυμμετρικό) και $\sigma(x) = \lambda - 2b \cdot x$.

Συνεπώς, οι παράμετροι των σύμμορφων μετασχηματισμών είναι τα $\lambda, a_\mu, b_\mu, \omega_{\mu\nu}$, οι οποίες και αφορούν τους μετασχηματισμούς κλίμακας, μετάθεσης, έναν νέο τύπο μετασχηματισμού και τις στροφές, αντίστοιχα. Ο νέος τύπος μετασχηματισμού, με παράμετρο b_μ , ονομάζεται *ειδικός σύμμορφος μετασχηματισμός* (*special conformal transformation*). Συνολικά, παρατηρούμε ότι έχουμε $1 + d + d + d(d-1)/2 = (d+1)(d+2)/2$ συνιστώσες για τις παραμέτρους των σύμμορφων μετασχηματισμών.

Αυτοί οι μετασχηματισμοί, μαζί, σχηματίζουν μια ομάδα συμμετρίας. Οι γεννήτορες της είναι, κατ' αρχάς, ο P_μ για το a_μ και ο $J_{\mu\nu}$ για το $\omega_{\mu\nu}$, οι οποίοι σχηματίζουν την ομάδα Poincarè, όπως θα έπρεπε, και αντιστοιχούν στην ειδική περίπτωση $\Omega(x) = 1$, δηλαδή δεν εμπεριέχουν τοπικό μετασχηματισμό κλίμακας. Το τελευταίο επιχείρημα θα έπρεπε να είναι κι αυτό αναμενόμενο, καθώς για $\Omega(x) = 1$ η μετρική παραμένει ως έχει, όπως πρέπει με τους σχετικιστικούς μετασχηματισμούς της ομάδας Poincarè. Οι νέοι γεννήτορες είναι ο K_μ για τους ειδικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς, b_μ , και ο γεννήτορας

διαστολής D για το λ .

Συνεπώς, έχουμε $(d+1)(d+2)/2$ γεννήτορες οι οποίοι, εφ' όσον εκφράζονται ως

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} = \frac{d'(d'-1)}{2} \Rightarrow d' = d+2 \quad (4.7)$$

τότε, μπορούν να συνθέσουν μια νέα $SO(x, y)$ ομάδα, με $x + y = d' = d + 2$, η οποία θα καθορίζεται από τον $(d+2) \times (d+2)$ αντισυμμετρικό πίνακα

$$\bar{J}_{MN} = \begin{pmatrix} J_{\mu\nu} & \bar{J}_{\mu,d+1} & \bar{J}_{\mu,d+2} \\ -\bar{J}_{\nu,d+1} & 0 & D \\ -\bar{J}_{\nu,d+2} & -D & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

όπου

$$\bar{J}_{\mu,d+1} = \frac{K_\mu - P_\mu}{2}; \quad \bar{J}_{\mu,d+2} = \frac{K_\mu + P_\mu}{2}; \quad \bar{J}_{d+1,d+2} = D \quad (4.9)$$

Εάν παρατηρήσουμε την Lie άλγεβρα του \bar{J}_{MN} , βρίσκουμε την μετρική στην $d+2$ κατεύθυνση αρνητική, που σημαίνει ότι η ομάδα συμμετρίας είναι η $SO(2, d)$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η σύμμορφη αναλλοιώτητα στον επίπεδο $(1, d-1)$ χώρο αντιστοιχεί στην ομάδα συμμετρίας $SO(2, d)$, την ίδια ομάδα συμμετρίας του χώρου AdS_{d+1} . Αυτό, μάλιστα, αποτελεί το πρώτο στοιχείο που υποδεικνύει την αντιστοιχία ανάμεσα στον d -διάστατο χώρο Minkowski, όπου ζεί μια σύμμορφη θεωρία πεδίου, και στον $d+1$ -διάστατο χώρο AdS , όπου ζεί η θεωρία των χορδών.

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι, παρ' όλο που η $SO(2, d)$ εμπεριέχει, μονάχα, στοιχεία που είναι συνεχώς συνδεδεμένα με τη μονάδα, η σύμμορφη ομάδα αποτελεί μια επέκταση η οποία εμπεριέχει, επίσης, την *αντιστροφή* (*inversion*)

$$I : x'_\mu = \frac{x_\mu}{x^2} \Rightarrow \Omega(x) = x^2 \quad (4.10)$$

η οποία, σε συνδυασμό με τις στροφές και τις μεταθέσεις, μπορεί να παράξει

οποιοδήποτε σύμμορφο μετασχηματισμό.

Η πεπερασμένη εκδοχή του ειδικού σύμμορφου μετασχηματισμού είναι

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2x^\nu b_\nu + b^2 x^2} \quad (4.11)$$

ενώ, αντίστοιχα, του μετασχηματισμού κλίμακας $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$.

Επίσης, επειδή θα ορίσουμε την αντιστοιχία AdS/CFT στον Ευκλείδιο χώρο, παρατηρούμε ότι η σύμμορφη ομάδα του χώρου \mathbb{R}^d είναι η $SO(1, d + 1)$.

4.2 Σύμμορφα πεδία σε δυο Ευκλείδιες διαστάσεις

Όπως αναφέραμε πριν, οι $d = 2$ διαστάσεις είναι ειδική περίπτωση. Για $d = 2$ η σύμμορφη ομάδα είναι πολύ μεγαλύτερη και, συγκεκριμένα, έχει ένα άπειρο σύνολο γεννητόρων.

Όστε να περιγράψουμε τα Ευκλείδια πεδία σε δυο διαστάσεις, χρησιμοποιούμε μιγαδικές συντεταγμένες

$$ds^2 = dz d\bar{z} \quad (4.12)$$

όπου ο γενικότερος σύμμορφος μετασχηματισμός για αυτές είναι ο ολομορφικός μετασχηματισμός, $z' = f(z)$ (κι όχι συνάρτηση του \bar{z}). Τότε, η μετρική θα μετασχηματίζεται ως

$$ds'^2 = dz' d\bar{z}' = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z} = \Omega^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z} \quad (4.13)$$

Έπειτα, μπορούμε να ορίσουμε τα αντικείμενα που μετασχηματίζονται κατά τα παραπάνω, δηλαδή τους ταυστές της γενικής σχετικότητας. Ένας συναλλοίωτος ταυστής είναι ένα αντικείμενο $T_{i_1 \dots i_n}$, το οποίο μετασχηματίζεται (σε Ευκλείδιες Καρτεσιανές συντεταγμένες $z_1, z_2, i_1, \dots, i_n = 1, 2$) ως

$$T_{i_1 \dots i_n}(z_1, z_2) = T'_{j_1 \dots j_n}(z'_1, z'_2) \frac{\partial z'^{j_1}}{\partial z^{i_1}} \dots \frac{\partial z'^{j_n}}{\partial z^{i_n}} \quad (4.14)$$

Θεωρώντας μιγαδικές συντεταγμένες $z = z_1 + iz_2, \bar{z} = z_1 - iz_2$, γενικεύουμε την έννοια των ταυστών σε αντικείμενα που ονομάζονται στοιχειώδη πεδία (*primary fields*) ή ταυστικοί τελεστές (*tensor operators*), όπου ο αριθμός των συναλλοίωτων δεικτών δεν είναι απαραίτητα ακέραιος. Τουτέστιν, ένα στοιχειώδες πεδίο τάξης (h, \tilde{h}) είναι ένα αντικείμενο που μετασχηματίζεται ως

$$T_{z \dots z \bar{z} \dots \bar{z}} = T'_{z' \dots z' \bar{z}' \dots \bar{z}'} \left(\frac{dz'}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\tilde{h}} \quad (4.15)$$

χωρίς, απαραίτητα, ακέραιο (h, \tilde{h}) . Όντως, υπό έναν μιγαδικό μετασχηματισμό

$z' = \zeta z$ (δηλαδή ένα συνδυασμό μετασχηματισμού κλίμακας και στροφής), υπάρχει μια βάση τοπικών τελεστών που διαγωνοποιούν τον τελεστή διαστολής και οι οποίοι κλιμακώνονται ως

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) = \zeta^h \bar{\zeta}^{\tilde{h}} \mathcal{O}'(z', \bar{z}') \quad (4.16)$$

Για έναν γενικό τελεστή στο κβαντικό επίπεδο, έχουμε μη-ακέραιους h, \tilde{h} , με $h + \tilde{h} \equiv \Delta$ τη διάσταση του τελεστή (που δίνει τη συμπεριφορά υπό τους συνηθισμένους - κανονικούς - μετασχηματισμούς κλίμακας) και με $h - \tilde{h}$ το σπίν του \mathcal{O} (που δίνει τη συμπεριφορά υπό τις στροφές).

Σε μια γενική κβαντική θεωρία πεδίου, και συγκεκριμένα στις δυο διαστάσεις, μπορούμε να ορίσουμε το *ανάπτυγμα τελεστικού γινομένου* (*operator product expansion - OPE*). Το γινόμενο δυο τελεστών σε δυο διαφορετικά σημεία μπορεί να προσεγγιστεί, για οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια, από ένα άθροισμα συντελεστών επί όλους τους δυνατούς τελεστές, δηλαδή

$$\mathcal{O}_i(x_i) \mathcal{O}_j(x_j) = \sum_k c_{ij}^k(x_i - x_j) \mathcal{O}_k(x_j) \quad (4.17)$$

Επίσης, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τους τελεστές μιας σύμμορφης θεωρίας πεδίου έτσι ώστε η συνάρτηση συσχέτισης δυο σημείων να είναι

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i) \mathcal{O}_j(x_j) \rangle = \frac{1}{|x_i - x_j|^{2\Delta_i}} \quad (4.18)$$

όπου Δ_i είναι η *διάσταση κλίμακας* (*scaling dimension*), ενώ για υψηλότερες συσχετίσεις έχουμε

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i) \mathcal{O}_j(x_j) \dots \rangle = \sum_k \frac{c_{ij}^k}{|x_i - x_j|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} \left\langle \mathcal{O}_k\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \dots \right\rangle \quad (4.19)$$

όπου μόνο οι αριθμητικοί συντελεστές c_{ij}^k δεν είναι προσδιορισμένοι για το OPE.

Παράδειγμα: ελεύθερα άμαζα βαθμωτά πεδία

Το πιο σχετικό παράδειγμα σύμμορφης θεωρίας πεδίου είναι η περίπτωση διαφόρων βαθμωτών πεδίων, με (Ευκλείδια) δράση

$$S_E = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma [\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu] \quad (4.20)$$

η οποία δεν είναι άλλη από τη δράση Polyakov της χορδής, στη σύμμορφη βαθμίδα. Χρησιμοποιώντας μιγαδικές συντεταγμένες

$$z = \sigma^1 + i\sigma^2; \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2; \quad \partial \equiv \partial_z = \frac{\partial_1 - i\partial_2}{2}; \quad \bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial_1 + i\partial_2}{2}; \quad (4.21)$$

παίρνουμε τη δράση

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (4.22)$$

η οποία έχει την εξίσωση κίνησης

$$\partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \quad (4.23)$$

με γενική λύση

$$X^\mu(z, \bar{z}) = X^\mu(z) + X^\mu(\bar{z}) \quad (4.24)$$

η οποία αναπτύσσεται σε μια σειρά Laurent ως

$$X^\mu(z) = \frac{x^\mu}{2} - i\alpha' \frac{p^\mu}{2} \ln z + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m z^m} \quad (4.25)$$

Η συνέχιση στον χώρο Minkowski γίνεται με το $\sigma^2 = i\sigma^0 = i\tau$, υπό το οποίο μια ολομορφική συνάρτηση του z εξαρτάται από το $z = -(\tau - \sigma)$, δηλαδή δεξιά κίνηση, ενώ μια αντι-ολομορφική συνάρτηση του \bar{z} εξαρτάται από το $\bar{z} = \tau + \sigma$. Οπότε ανακύπτει η χορδή του επίπεδου χώρου, του προηγούμενου κεφαλαίου, μετά από τον μετασχηματισμό $f(z) = e^{-iz}$.

Σε δυο διαστάσεις έχουμε τον ταυστή ενέργειας ορμής όπου το $T(z) \equiv T_{zz}(z)$ αντιστοιχεί στο T_{--} και το $\tilde{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ στο T_{++} , του προηγούμενου κεφαλαίου. Τότε, είχαμε ορίσει τα Virasoro modes

$$L_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{-im\sigma} T_{--} \quad (4.26)$$

$$\tilde{L}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} T_{++} \quad (4.27)$$

τα οποία τώρα μπορούν να οριστούν ως οι συντελεστές Laurent του T_{zz} και του $\tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}$, δηλαδή

$$T_{zz}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{L_m}{z^{m+2}}; \quad \tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}} \quad (4.28)$$

από τους οποίους, εάν μετατεθούν, προκύπτει η άλγεβρα Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} \quad (4.29)$$

όπου παρόμοια ισχύουν για τους \tilde{L}_m , ενώ, ως συνήθως, $(L_n)^\dagger = L_{-n}$. Η άλγεβρα για $c = 0$ είναι το κλασσικό κομμάτι, ενώ ο όρος με το c είναι μια κβαντική διόρθωση. Το c ονομάζεται *κεντρικό φορτίο* και, εν γένει, είναι παράμετρος της θεωρίας.

Η άλγεβρα Virasoro είναι το ισοδύναμο της σύμμορφης ομάδας στις δυο διαστάσεις, το οποίο σημαίνει ότι τα L_m είναι διατηρούμενα φορτία που αντιστοιχούν σε τελεστές συμμετρίας. Παρ' όλα αυτά δεν είναι μια συνηθισμένη άλγεβρα Lie, καθώς αποτελείται από άπειρους γεννήτορες και, κυριότερα, περιέχει έναν σταθερό όρο (ανάλογο του c) με αποτέλεσμα η άλγεβρα να μην κλείνει, κατά τη συνηθισμένη έννοια.

Βέβαια, τα L_0, L_1, L_{-1} σχηματίζουν μια κλειστή άλγεβρα, δίχως κεντρικό φορτίο

$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0; \quad [L_0, L_1] = -L_1; \quad [L_0, L_{-1}] = L_{-1}; \quad (4.30)$$

η οποία είναι η άλγεβρα της ομάδας $Sl(2, \mathbb{C})$, της οποίας οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί δρούν στο z ως

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.31)$$

Αυτή είναι μια υποάλγεβρα της άλγεβρας Virasoro η οποία ορισμένες φορές ονομάζεται, κατά καχοποίηση του όρου, η σύμμορφη άλγεβρα σε δυο διαστάσεις.

Οι αναπαραστάσεις της άλγεβρας Virasoro δίνονται υπό τους όρους μιας «κατάστασης ελαχίστου βάρους», η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι ισούται με $|h\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \phi^h(z) |0\rangle$, δηλαδή δρώντας με το στοιχειώδες πεδίο, στο $z = 0$, πάνω στο κενό. Θα δείξουμε, σε επόμενο κεφάλαιο, ότι στη σύμμορφη θεωρία πεδίου υπάρχει μια σημαντική σχέση, η επονομαζόμενη αντιστοιχία τελεστή-κατάστασης, η οποία μπορεί να εκφραστεί κατά τα παραπάνω. Συνεπώς, ως συνήθως, κατά τη μέθοδο παραγωγής των αναπαραστάσεων, έχουμε

$$L_0 |h\rangle = h |h\rangle; \quad L_n |h\rangle = 0, n > 0 \quad (4.32)$$

με h την ιδιοτιμή του L_0 («ενέργεια») και, συνεπώς, τα υπόλοιπα πεδία της αναπαράστασης, οι επονομαζόμενοι «απόγονοι» (descendants), προκύπτουν με τη δράση του L_{-n} το οποίο αυξάνει την τιμή της ενέργειας κατά n , δηλαδή

$$L_0(L_{-n} |h\rangle) = (h + n)(L_{-n} |h\rangle) \quad (4.33)$$

ένα οφθαλμοφανές συμπέρασμα από την άλγεβρα Virasoro (4.29), για $m = 0$. Εν συνεχεία, η αναπαράσταση κατασκευάζεται με τη διαδοχική δράση του τελεστή ως $|h\rangle, L_{-1} |h\rangle, (L_{-1})^2 |h\rangle, L_{-2} |h\rangle, \dots$ και ονομάζεται *Verma module*.

4.3 Σύμμορφα πεδία και συναρτήσεις συσχέτισης για $d > 2$

Για $d > 2$, όπως δείξαμε, έχουμε την σύμμορφη ομάδα συμμετρίας $SO(d, 2)$. Οι αναπαράστασεις της ορίζονται στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή κλίμακας D με ιδιοτιμή $-i\Delta$, όπου Δ είναι η διάσταση κλίμακας, δηλαδή, υπό τον μετασχηματισμό $x \rightarrow \lambda x$, το πεδίο μετασχηματίζεται ως

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^\Delta \phi(\lambda x) = \lambda^\Delta \phi(\lambda x) \quad (4.34)$$

που σημαίνει ότι το D παίζει τώρα τον ρόλο της «ενέργειας» μιας κατάστασης. Συνεπώς, για $P_\mu = -i\partial_\mu$, $D = -ix^\mu \partial_\mu$ θα ισχύει

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu \Rightarrow D(P_\mu \phi) = P_\mu(D\phi) - iP_\mu \phi = -i(\Delta + 1)(P_\mu \phi) \quad (4.35)$$

δηλαδή ότι ο γεννήτορας P_μ αυξάνει το Δ , ενώ για $K_\mu = i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu)$ θα είναι

$$[D, K_\mu] = iK_\mu \quad (4.36)$$

δηλαδή ότι ο γεννήτορας K_μ το μειώνει.

Αφού οι P_μ, K_μ είναι τελεστές συμμετρίας τότε και η δράση τους θα καταλήγει σε καταστάσεις μέσα στη δεδομένη θεωρία. Οπότε, η αναπαράσταση κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τους ως τελεστές δημιουργίας/καταστροφής, όπως και την $d = 2$ περίπτωση. Συγκεκριμένα, θα υπάρχει ένας τελεστής ελάχιστης διάστασης, $\Phi_0 (\sim |0\rangle)$, στην αναπαράσταση της σύμμορφης ομάδας, όπου $K_\mu \Phi_0 = 0$ και που ονομάζεται στοιχειώδης τελεστής, πάνω στον οποίο θα δρα ο P_μ και θα κατασκευάζει την αναπαράσταση.

Είδαμε προηγουμένως ότι οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί για $d > 2$ είναι οι $SO(d, 2)$ μετασχηματισμοί και η αντιστροφή. Για έναν πεπερασμένο σύμμορφο μετασχηματισμό $x'^\mu(x^\nu)$, μπορούμε να ορίσουμε έναν ορθογώνιο πίνακα (στην $O(d)$)

$$R^\mu{}_\nu(x) = \Omega(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \Rightarrow (RR^T)_{\mu\nu} = R_{\mu\rho} R_\nu{}^\rho = \delta_{\mu\nu} \quad (4.37)$$

Έπειτα, για μια αντιστροφή έχουμε $x'^{\mu} = x^{\mu}/x^2$ και $\Omega(x) = x^2$, και η οποία αναπαρίσταται από τον πίνακα

$$R_{\mu\nu}(x) \equiv I_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} - 2\frac{x^{\mu}x^{\nu}}{x^2} \quad (4.38)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το $I_{\mu\nu}(x - y)$ μπορεί να εκληφθεί ως μια παράλληλη μεταφορά, μιας και μετασχηματίζεται υπό έναν σύμμορφο μετασχηματισμό ως

$$I_{\mu\nu}(x' - y') = R_{\mu}^{\rho} R_{\nu}^{\sigma} I_{\rho\sigma}(x - y); \quad (x' - y')^2 = \frac{(x - y)^2}{\Omega(x)\Omega(y)} \quad (4.39)$$

Συσχετίσεις δυο σημείων

Για βαθμωτούς τελεστές, έχουμε ήδη δει τη γενική μορφή της συσχέτισης που επιτρέπεται από τη σύμμορφη αναλλοιώτητα,

$$\langle \mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(y) \rangle = \frac{C \delta_{ij}}{|x - y|^{2\Delta_i}} \quad (4.40)$$

όπου μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τους τελεστές έτσι ώστε $C = 1$.

Έπειτα, ενδιαφερόμαστε επίσης για διατηρούμενα ρεύματα J_{μ}^a , τα οποία μετασχηματίζονται υπό την αντιστροφή σε αντιστοιχία διάστασης $\Delta = d - 1$, δηλαδή $J_{\mu}^a(x) \rightarrow (x'^2)^{d-1} I_{\mu\nu} J_{\nu}^a(x')$. Η συσχέτισή τους, δυο σημείων, πρέπει να είναι συναλλοιώτη υπό την αντιστροφή και τους μετασχηματισμούς Poincarè, ώστε η θεωρία να είναι σύμμορφη, γεγονός που περιορίζει τη συνάρτηση να είναι η

$$\langle J_{\mu}^a(x) J_{\nu}^b(y) \rangle = C \frac{\delta^{ab} I_{\mu\nu}(x - y)}{|x - y|^{2(d-1)}} \quad (4.41)$$

4.4 Η $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills ως σύμμορφη θεωρία πεδίου

Στις $d = 4$ διαστάσεις, η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία είναι μια αναπαράσταση της σύμμορφης ομάδας. Η $\mathcal{N} = 4$ SYM με την $SU(N)$ ομάδα βαθμίδας έχει τα πεδία $\{A_\mu^a, \psi_\alpha^{ai}, \phi_{[ij]}^a\}$, όπου χρησιμοποιήσαμε $SU(4)$ δείκτες, $i \in SU(4)$, και $a \in SU(N)$. Όντως, η β -συνάρτηση της θεωρίας αυτής είναι μηδενική, οπότε αυτή είναι μια θεωρία κβαντικά αναλλοίωτη υπό τους μετασχηματισμούς κλίμακας.

Από τη μία, η $\mathcal{N} = 4$ SYM είναι μια θεωρία βαθμίδας με καλά ορισμένη θεωρία διαταραχών, οπότε αντικείμενα όπως πλάτη πιθανότητας και S-πίνακες ορίζονται φυσιολογικά. Από την άλλη, μιας και είμαστε σε μια σύμμορφη θεωρία πεδίου η οποία δεν εμπεριέχει την έννοια της κλίμακας και, συνεπώς, ούτε την έννοια του ασυμπτωτικού διαχωρισμού των σωματιδιακών κυματοσυναρτήσεων, τα πλάτη πιθανότητας και οι S-πίνακες δεν ορίζονται καλά. Τα αντικείμενα που ορίζονται φυσιολογικά είναι οι συναρτήσεις συσχέτισης και οι σύμμορφες διαστάσεις των τελεστών, τα οποία κατανοούνται καλύτερα μέσα από την αντιστοιχία AdS/CFT.

Διόρθωση στη σύμμορφη διάσταση

Η σύμμορφη διάσταση Δ των πεδίων που υπολογίζουμε μέσω της διαστατικής ανάλυσης, απαιτώντας η δράση να είναι αδιάστατη (στο φυσικό σύστημα μονάδων όπου $\hbar = 1$), είναι στην πραγματικότητα η κλασική τους διάσταση Δ_0 . Στο κβαντικό επίπεδο, όταν η θεωρία μας έχει αλληλεπιδράσεις, η ίδια η σύμμορφη διάσταση δέχεται κβαντικές διορθώσεις ανάλογες της σταθεράς σύζευξης g της αλληλεπίδρασης, δηλαδή $\Delta = \Delta_0 + \mathcal{O}(g)$.

Στην $\mathcal{N} = 4$ SYM ισχύει το ίδιο, καθώς το $\beta = 0$ σημαίνει μονάχα ότι δεν έχουμε απειρισμούς κι ότι μπορούμε να έχουμε πεπερασμένες επακανονικοποιήσεις οι οποίες δίνουν μη τετριμμένες κβαντικές επιδράσεις.

Κλασικά, τα θεμελιώδη πεδία έχουν διαστάσεις $[A_\mu^a] = 1, [\psi_\alpha^{ai}] = 3/2, [\phi_{[ij]}^a] = 1$, όπου με τα οποία σχηματίζουμε τελεστές, όπως, εν παραδείγματι, ο $\text{Tr } F_{\mu\nu}^2$, ο οποίος έχει κλασική διάσταση 4. Κάποιοι από τους τελεστές αυτούς θα έχουν διάσταση ακριβώς ίση με την κλασική τους, ενώ άλλοι θα δέχονται κβαντικές διορθώσεις.

Κεφάλαιο 5

Μελανές οπές και p -βράνες

5.1 Η λύση Schwarzschild

Η λύση Schwarzschild είναι η στατική και σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης Einstein χωρίς ύλη ($T_{\mu\nu} = 0$), δηλαδή

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 0 \quad (5.1)$$

Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την πλήρη ισχύ της Γενικής Σχετικότητας, θα βρούμε μια λύση μέσα από το Νευτώνιο όριο. Για τη Νευτώνια βαρύτητα, η τοπική μορφή του νόμου του Gauss είναι

$$\vec{\nabla}^2 U_N = 4\pi G_N \rho_m \quad (5.2)$$

Παράλληλα, οι γεωδαισιακή εξίσωση

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \quad (5.3)$$

δίνει

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{00}^i (\dot{x}^0)^2 + \Gamma_{i0}^i \dot{x}^i \dot{x}^0 + \Gamma_{ii}^i (\dot{x}^i)^2 = 0 \quad (5.4)$$

όπου οι όροι απαλλοίφθηκαν με βάση τις συνθήκες $t \simeq \tau$, $\dot{x}^i \ll 1$ στο Νευτώνιο όριο (των χαμηλών ταχυτήτων), ενώ ο 3ος όρος θα μπορούσε να επιβιώσει εάν επιλέγαμε να εξετάσουμε μια πιο σύνθετη κίνηση. Οπότε, αφού $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu} \gg h_{\mu\nu}$ για μια ασθενή Νευτώνια βαρύτητα, τότε

$$\ddot{x}^i = -\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\nabla^i h_{00} \quad (5.5)$$

η οποία σε συνδυασμό με το νόμο του Νεύτωνα

$$\ddot{x}^i = -\nabla^i U_N \quad (5.6)$$

δίνει ότι

$$h_{00} = -2U_N \quad (5.7)$$

Έπειτα, η εξίσωση Einstein (5.1) συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{R}_{00} + \mathcal{R}_{ii} = 0 \quad (5.8)$$

όπου

$$\mathcal{R}_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = -\mathcal{R}_{ii} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{ii} \quad (5.9)$$

και άρα $h_{00} = h_{ii}$. Συνεπώς για ασθενή βαρύτητα και μη σχετικιστικές ταχύτητες, μπορούμε πάντα να εκφράζουμε τη μετρική ως

$$ds^2 \simeq -(1+2U_N) dt^2 + (1-2U_N) d\vec{x}^2 = -(1+2U_N) dt^2 + (1-2U_N)(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \quad (5.10)$$

όπου, εφ' όσον για μια σημειακή πηγή $T_{tt} = \rho = M\delta^3(x)$ έχουμε δυναμικό

$$\vec{\nabla}^2 U_N = 4\pi G_N \rho \Rightarrow U_N = -\frac{G_N M}{r} \quad (5.11)$$

τότε αυτή μπορεί να εκφραστεί ως

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2G_N M}{r}} + R^2 d\Omega_2^2 \quad (5.12)$$

5.2 Λύσεις με φορτίο και μέσα στον AdS χώρο

Έχουμε τη δυνατότητα να προσθέσουμε, στη λύση Schwarzschild, ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο στο ίδιο σημείο με τη μάζα και να αποκτήσουμε τη μελανή οπή *Reissner-Nordstrom*. Συγκεκριμένα, ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο, στο $r = 0$, έχει ηλεκτρικό πεδίο

$$F_{rt} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow A_t = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.13)$$

το οποίο δίνει, για τον τανυστή ενέργειας-ορμής

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^D x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (5.14)$$

τη συνιστώσα

$$T_{tt} = \frac{1}{2} (F_{rt})^2 g^{rr} \simeq \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} \quad (5.15)$$

και, συνεπώς, η Νευτώνια εξίσωση κίνησης (5.11) μεταμορφώνεται στη

$$\Delta U_N = 4\pi G_N \left(M\delta^3(x) + \frac{Q^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} \right) \quad (5.16)$$

Άρα, δεδομένου ότι

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r^2} &= \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \frac{1}{r^2} = \frac{2}{r^4} \\ \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} &= -4\pi\delta^3(x) \end{aligned} \quad (5.17)$$

έχουμε τη λύση

$$U_N = -\frac{MG_N}{r} + \frac{Q^2 G_N}{16\pi\epsilon_0^2 r^2} \quad (5.18)$$

και άρα η γεωμετρία γίνεται

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{Q^2 G_N}{8\pi\epsilon_0^2 r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{Q^2 G_N}{8\pi\epsilon_0^2 r^2}} + R^2 d\Omega_2^2 \quad (5.19)$$

η οποία, σε αντίθεση με την απλή λύση Schwarzschild, έχει δυο ορίζοντες γεγονότων όπου $g_{tt} = 0$ και $g_{rr} = \infty$. Θέτοντας $G_N = 1$ και $\tilde{Q}^2 = Q^2/8\pi\epsilon_0^2$, οι δυο αυτές λύσεις είναι οι

$$r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \tilde{Q}^2} \quad (5.20)$$

και άρα η μετρική μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 d\Omega_2^2; \quad \Delta = \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \left(1 - \frac{r_-}{r} \right) \quad (5.21)$$

$$\tilde{Q} = \sqrt{r_+ r_-}; \quad M = \frac{r_+ + r_-}{2}$$

Εάν $M < \tilde{Q}$, τότε δεν υπάρχει ορίζοντας παρά μονάχα μια γυμνή μοναδικότητα στο $r = 0$, περίπτωση η οποία μια σειρά απο θεωρήματα στηρίζουν ότι δεν μπορεί να υπάρξει. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει $M \geq \tilde{Q}$, ο λεγόμενος περιορισμός Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield, ή αλλιώς περιορισμός BPS. Σε υπερσυμμετρικές θεωρίες (με την παραπάνω μετρική ως υπόβαθρο), αυτός είναι ο ίδιος περιορισμός που προέκυψε από την υπερσυμμετρική άλγεβρα, δηλαδή η μάζα να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το κεντρικό φορτίο της άλγεβρας.

Η περίπτωση του κορεσμού του περιορισμού, $M = \tilde{Q}$, είναι ειδική, όπως ήταν και η περίπτωση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Τότε, αποκτάμε μια ακραία (*extremal*) μελανή οπή με μετρική

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{dr}{1 - \frac{M}{r}} \right)^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (5.22)$$

η οποία, με τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων $r = M + \bar{r}$, γίνεται

$$ds^2 = -\frac{1}{\left(1 + \frac{M}{\bar{r}}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{\bar{r}}\right)^2 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega_2^2) \quad (5.23)$$

όπου βλέπουμε ότι η συγκεκριμένη γεωμετρία χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση

$$H = 1 + \frac{M}{\bar{r}} \quad (5.24)$$

που είναι αρμονική καθώς

$$\Delta_{(3)}H = -4\pi M\delta^3(\bar{r}) \quad (5.25)$$

και η οποία αναδεικνύει τη μορφή της μετρικής όπου ο ορίζοντας γεγονότων και η μοναδικότητα συμπίπτουν, στο $\bar{r} = 0$.

Τέλος, μπορούμε να ενσωματώσουμε τη μελανή οπή Reissner-Nordstrom στη γεωμετρία AdS, απλώς συνδυάζοντας την μετρική (5.19) με την AdS μετρική (19) ως

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 d\Omega_2^2 \quad (5.26)$$

$$\Delta \equiv 1 - \frac{2MG_N}{r} + \frac{\tilde{Q}^2 G_N}{r^2} - \frac{8\pi G_N \Lambda r^2}{3}$$

ενώ η μόνη άλλη παράμετρος που μπορούμε να προσθέσουμε σε μια μελανή οπή είναι η στροφορμή J . Συγκεκριμένα, τα λεγόμενα «no-hair» θεωρήματα αποδεικνύουν ότι μια μελανή οπή χαρακτηρίζεται μονάχα από τις παραμέτρους Q, M, J .

5.3 Μελανές οπές σε υψηλότερες διαστάσεις

Η ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Gauss, για την βαρύτητα σε $D = d + 1$ διαστάσεις, είναι

$$\begin{aligned} \int_{B^d} dV \vec{\nabla}^2 U_N &= 4\pi G_N^{(D)} \int_{B^d} dV \rho_M = 4\pi G_N^{(D)} M \\ &= \int_{\partial B^d = S^{d-1}(R)} d\vec{S} \cdot \vec{\nabla} U_N = \Omega_{d-1} R^{d-1} \left| \vec{\nabla} U_N \right| \end{aligned} \quad (5.27)$$

από όπου προκύπτει το βαρυτικό δυναμικό

$$U_N(r) = -\frac{C^{(D)} G_N^{(D)} M}{r^{D-3}} \quad (5.28)$$

ενώ, αντίστοιχα, για την ηλεκτροστατική είναι

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{B^d} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial B^d = S^{d-1}(R)} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \Omega_{d-1} R^{d-1} \left| \vec{E}(R) \right| \quad (5.29)$$

από όπου προκύπτει το ηλεκτροστατικό πεδίο

$$E(r) = \frac{Q}{\Omega_{D-2} \epsilon_0 r^{D-2}} \quad (5.30)$$

Έπειτα, ο ταυιστής ενέργειας-ορμής θα είναι για την μάζα

$$T_{tt} = 4\pi G_N^{(D)} M \delta^{D-1}(x) \quad (5.31)$$

και για το ηλεκτρικό φορτίο

$$T_{tt} \simeq \frac{1}{2} (F_{rt})^2 = \frac{Q^2}{2(\Omega_{D-2} \epsilon_0)^2 r^{2(D-2)}} \quad (5.32)$$

οι οποίες συνιστώσες θα δίνουν την εξίσωση

$$\Delta U_N = 4\pi G_N^{(D)} \left[M\delta^{D-1}(x) + \frac{Q^2}{2(\Omega_{D-2}\epsilon_0)^2 r^{2(D-2)}} \right] \quad (5.33)$$

Από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r^{2(D-3)}} &= \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-2}{r} \frac{d}{dr} \right) \frac{1}{r^{2(D-3)}} = \frac{2(D-3)^2}{r^{2(D-2)}} \\ \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r^{D-3}} &= -(D-3)\Omega_{D-2}\delta^{D-1}(x) \end{aligned} \quad (5.34)$$

παίρνουμε το δυναμικό

$$U_N \equiv -\frac{C^{(D)} M G_N^{(D)}}{r^{D-3}} + \frac{C'^{(D)} Q^2 G_N^{(D)}}{r^{2(D-3)}} \quad (5.35)$$

το οποίο, ορίζοντας $g_{tt} = -(1 + 2U_N(r)) = -F(r)$, δίνει τη μετρική

$$ds^2 = -F(r) dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2 \quad (5.36)$$

η οποία έχει δυο ορίζοντες γεγονότων, για $F(r) = 0$, στις ακτίνες

$$(r_{\pm})^{D-3} = C^{(D)} M G_N^{(D)} \pm \sqrt{(C^{(D)} M G_N^{(D)})^2 - 2C'^{(D)} Q^2 G_N^{(D)}} \quad (5.37)$$

Ο περιορισμός BPS είναι τώρα

$$M^2 \geq \frac{2C'^{(D)}}{C^{(D)2} G_N^{(D)}} Q^2 \quad (5.38)$$

ενώ ο κορεσμός του δίνει την ακραία (extremal) λύση

$$r_+ = r_- = r_H = \left[C^{(D)} M G_N^{(D)} \right]^{\frac{1}{D-3}} = \left[Q \sqrt{2C'^{(D)} G_N^{(D)}} \right]^{\frac{1}{D-3}} \quad (5.39)$$

και το $F(r)$ γίνεται

$$F(r) = \left[1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{D-3} \right]^2 \quad (5.40)$$

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες ως

$$r^{D-3} = \bar{r}^{D-3} + r_H^{D-3} \quad (5.41)$$

έτσι ώστε

$$1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{D-3} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r_H}{\bar{r}} \right)^{D-3}} \equiv \frac{1}{f(\bar{r})} \quad (5.42)$$

όπου η $f(\bar{r})$ είναι μια αρμονική συνάρτηση, καθώς

$$\Delta f(\bar{r}) = -4\pi G_N^{(D)} M \delta^{D-1}(x) \quad (5.43)$$

η οποία και δίνει τη μορφή της ακραίας μελανής οπής ως

$$ds^2 = -f(\bar{r})^{-2} dt^2 + f(\bar{r})^{\frac{2}{D-3}} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega_{D-2}^2) \quad (5.44)$$

όπου και πάλι ο ορίζοντας γεγονότων συμπίπτει με τη μοναδικότητα, στο $\bar{r} = 0$.

5.4 Μελανές p -βράνες

Οι μελανές p -βράνες (black p -branes) είναι γενικεύσεις των μελανών οπών, κατά τις οποίες οι μελανές οπές επεκτείνονται σε p χωρικές διαστάσεις.

Στην απουσία φορτίων, η γενίκευση είναι τετριμμένη και αποκτάμε μαύρες Schwarzschild p -βράνες. Συγκεκριμένα, μέσω μιας KK ελλάτωσης πάνω σε έναν p -διάστατο τόρο, θα πρέπει να αποκτάμε την λύση Schwarzschild, άρα η μετρική που αναζητάμε είναι

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2C^{(D-p)} G_N^{(D-p)} M}{r^{D-3-p}} \right) dt^2 + d\vec{x}_p^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2C^{(D-p)} G_N^{(D-p)} M}{r^{D-3-p}}} + r^2 d\Omega_{D-2-p}^2 \quad (5.45)$$

Μια πιο ενδιαφέρουσα γενίκευση είναι οι *φορτισμένες ακραίες p -βράνες*. Φορτισμένες όχι υπό ηλεκτρομαγνητικά πεδία, αλλά υπό αντισυμμετρικά ταυστικά πεδία με φόρμες $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$.

Στις 4 διαστάσεις, οι μόνες εντοπισμένες (μη-εκτεταμένες) ακραίες p -βράνες είναι οι μελανές οπές ($p = 0$). Έπειτα, ένα εκτεταμένο αντικείμενο μπορεί να είναι μια κοσμική χορδή ($p = 1$) ή ένας επιφανειακός τομέας (domain wall, $p = 2$). Βέβαια, όπως θα δούμε σε λίγο, όπως και με τις μελανές οπές Reissner-Nordstrom, οι φορτισμένες ακραίες p -βράνες καθορίζονται από αρμονικές συναρτήσεις στις $D - p - 1$ διαστάσεις (η μελανή οπή, με $p = 0$ και $D = 4$, περιγράφεται από μια αρμονική συνάρτηση στις 3 διαστάσεις). Άρα για μια κοσμική χορδή, η αρμονική συνάρτηση θα είναι στις 2 διαστάσεις, δηλαδή $H = \ln|z|$, ($z = x_1 + ix_2$), ενώ για έναν επιφανειακό τομέα θα είναι στη 1 διάσταση, δηλαδή $H = 1 + a|x|$, όπου και στις δυο περιπτώσεις η αρμονική συνάρτηση αυξάνει μακριά από την πηγή, η οποία φαίνεται να επηρεάζει όλο τον χώρο. Συνεπώς, η κοσμική χορδή και ο τομέας, στις 4 διαστάσεις, δεν μοιάζουν με τις μελανές οπές και δεν είναι και τόσο φυσικά αντικείμενα.

Παράλληλα, σε διαστάσεις μεγαλύτερες των τεσσάρων, μπορούμε να έχουμε αντικείμενα παρόμοια των μελανών οπών, εκτεταμένα σε p χωρικές διαστάσεις και εντοπισμένα στο χώρο (που δεν αυξάνουν στο άπειρο). Αυτές είναι οι μαύρες p -βράνες, φορτισμένες υπό μια $(p + 1)$ -φόρμα, οι οποίες έχουν πολύπλοκες μετρικές αφού καθορίζονται από δυο αρμονικές συναρτήσεις, εκτός της ακραίας περίπτωσης την οποία και θα μελετήσουμε, που περιγράφεται από μια.

Στον ηλεκτρομαγνητισμό, ένα στατικό ηλεκτρικό φορτίο έχει μονάχα την πεδιακή συνιστώσα A_0 μη μηδενική, αφού οι πεδιακές εξισώσεις προκύπτουν από τη δράση

$$S = \int d^4x \left[-\frac{F_{\mu\nu}^2}{4} + j^\mu A_\mu \right] \quad (5.46)$$

με το j^μ μια δέλτα-συναρτησιακή πηγή, $j^0 = Q\delta^3(x)$ και τις υπόλοιπες συνιστώσες μηδέν. Δηλαδή, ο όρος της πηγής είναι $\int d^4x j^\mu A_\mu = \int d^4x j^0 A_0$ και οι εξισώσεις κίνησης του A_μ δίνουν το ηλεκτρικό πεδίο της πηγής αυτής.

Όμοια, βρίσκουμε ότι μια ηλεκτρική p -βράνη έχει ηλεκτρικό φορτίο Q_p που παράγει μια $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ πεδιακή φόρμα. Συγκεκριμένα, στις D διαστάσεις, η πηγή θα συζεύγεται ως

$$\int d^Dx j^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \rightarrow \int d^Dx j^{01 \dots p} A_{01 \dots p} \quad (5.47)$$

όπου και πάλι η μόνη μη μηδενική πεδιακή συνιστώσα $A_{01 \dots p}$ θα αντιστοιχεί σε μια πηγή της μορφής

$$j^{01 \dots p} = Q_p \delta^{(D-p-1)}(x) \quad (5.48)$$

τουτέστιν ένα φορτισμένο αντικείμενο εκτεταμένο σε p χωρικές διαστάσεις συν αυτή του χρόνου.

Η ηλεκτρική p -βράνη, απουσία της βαρύτητας, θα είναι λύση των εξισώσεων κίνησης της δράσης

$$S = \int d^Dx \left[-\frac{1}{2(p+2)!} F_{\mu_1 \dots \mu_{p+2}}^2 + j^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \right] \quad (5.49)$$

δηλαδή το πεδίο

$$A_{01 \dots p} = -\frac{C_p Q_p}{r^{D-p-3}} \quad (5.50)$$

όπου C_p είναι μια σταθερά.

Προφανώς, παρατηρώντας τη σχέση (5.34), η παραπάνω πεδιακή συνιστώσα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta_{(D-p-1)} A_{01\dots p} = [(D-p-3)\Omega_{D-p-2} C_p] Q_p \delta^{(D-p-1)}(x) \quad (5.51)$$

από όπου βλέπουμε ότι η σταθερά C_p ισούται με

$$C_p = \frac{1}{(D-p-3)\Omega_{D-p-2}} \quad (5.52)$$

Εάν η p -βράνη συζευχθεί με τη βαρύτητα, τότε θα είναι λύση της δράσης

$$S = S_D + D_{p+1} \quad (5.53)$$

όπου ο κινητικός όρος θα είναι

$$S_D = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2(p+2)!} e^{-a(p)\phi} F_{(p+2)}^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \right] \quad (5.54)$$

με

$$a(p) = \sqrt{4 - \frac{2(p+1)(D-p-3)}{D-2}} \quad (5.55)$$

όπου, για λόγους που θα γίνουν στα επόμενα κεφάλαια εμφανείς, έχουμε προσθέσει στη δράση ένα βαθμωτό πεδίο, το dilaton.

Ο όρος της πηγής πρέπει να εμπεριέχει την σύζευξη με τη βαρύτητα, στις D διαστάσεις, δηλαδή

$$S_{source} = \int d^D x \sqrt{-g} j^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \quad (5.56)$$

με $j^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ όπως και στην (5.47).

Παράλληλα, όμως, εμπεριέχει και πηγές για το dilaton και τη μετρική, με αποτέλεσμα ο όρος των πηγών να είναι

$$S_{p+1} = T_p \int d^{p+1}\xi \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}\partial_i X^M \partial_j X^N G_{MN} e^{a(p)\phi/(p+1)} + \frac{p-1}{2}\sqrt{-\gamma} \right. \\ \left. - \frac{1}{(p+1)!} \epsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} \partial_{i_1} X^{M_1} \dots \partial_{i_{p+1}} X^{M_{p+1}} A_{M_1 \dots M_{p+1}} \right] \quad (5.57)$$

ένας όρος ο οποίος θα γίνει ξεκάθαρος στο επόμενο κεφάλαιο, αφού εισάγουμε την δράση της χορδής.

Οι εξισώσεις κίνησης της δράσης $S = S_D + S_{p+1}$ για το $A_{(p+1)}$ δίνουν τη λύση του $A_{01\dots p}$, το οποίο με τη σειρά του δίνει την ανάλογη συνιστώσα T_{tt} . Κατά τα γνωστά, πλέον, προκύπτει ένας BPS περιορισμός για την τάση $T_p = M/V_p$ (μάζα άνα μοναδιαίο p -διάστατο όγκο), $T_p \geq c_p Q_p$, όπου c_p μια σταθερά. Στον κορεσμό του περιορισμού, έχουμε την *ακραία μελανή p -βράνη*.

Οι πιο ενδιαφέρουσες λύσεις που μπορούμε να περιγράψουμε είναι αυτές οι ακραίες λύσεις. Ενδιαφέρουσες διότι, όπως θα δούμε, είναι σχετικές με τη θεωρία χορδών και συγκεκριμένα στο χαμηλο-ενεργειακό της όριο, την 10-διάστατη υπερβαρύτητα, μέρος της οποίας αποτελεί η παραπάνω δράση. Συγκεκριμένα, στις $D = 10$ διαστάσεις, οι ακραίες αυτές λύσεις είναι οι

$$ds_{string}^2 = H_p^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}_p^2) + H_p^{1/2}(d\vec{r}^2 + \vec{r}^2 d\Omega_{8-p}^2) \\ = H_p^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}_p^2) + H_p^{1/2} d\vec{x}_{9-p}^2 \\ e^{-2\phi} = H_p^{\frac{p-3}{2}} \quad (5.58) \\ A_{01\dots p} = -\frac{1}{2}(H_p^{-1} - 1)$$

όπου H_p είναι μια αρμονική συνάρτηση του \vec{x}_{9-p} , δηλαδή

$$\Delta_{(9-p)} H_p = -[(7-p)\Omega_{8-p} 2C_p] Q_p \delta^{(9-p)}(x^i) \\ \Rightarrow H_p = 1 + \frac{2C_p Q_p}{\vec{r}^{7-p}} \quad (5.59)$$

ενώ η συντεταγμένη \bar{r} συνδέεται με την r ως

$$r^{7-p} = \bar{r}^{7-p} + 2C_p Q_p \quad (5.60)$$

όμοια με τον προηγούμενο μετασχηματισμό συντεταγμένης (5.41), στην περίπτωση της μελανής οπής Reissner-Nordstrom.

Εδώ το ds_{string}^2 είναι γνωστό ως η «μετρική της χορδής» και συνδέεται με την κανονική μετρική μέσω ενός σύμμορφου παράγοντα ως

$$ds_{string}^2 = e^{-\phi/2} ds^2 \quad (5.61)$$

όπου ϕ , όπως αναφέραμε πριν, είναι το βαθμωτό dilaton.

Τέλος, αναφέρουμε ότι η λύσεις των p -βρανών, μακριά από την ακραιότητα, παραμετροποιούνται από το $\mu_p = T_p - c_p Q_p > 0$ και εκφράζονται από τη μετρική

$$ds^2 = H_p^{-1/2} (-f(r) dt^2 + d\vec{x}_p^2) + H_p^{1/2} \left(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right) \quad (5.62)$$

όπου

$$f(r) = 1 - \frac{\tilde{c}_p \mu_p}{r^{7-p}} \quad (5.63)$$

Κεφάλαιο 6

Θεωρία Χορδών

6.1 Η σχετικιστική χορδή: η δράση Nambu Goto

Η θεωρία χορδών είναι η θεωρία των σχετικιστικών χορδών, δηλαδή των μονοδιάστατων χορδών που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός. Η ενεργειακή πυκνότητα κατά μήκος μιας χορδής δεν είναι Lorentz αναλλοίωτη, οπότε η χορδή δεν αποτελεί φυσικό αντικείμενο της σχετικιστικής θεωρίας. Μια χορδή έχει τρόπους ταλάντωσης και τάση και ενώ το ίχνος ενός σημειακού σωματιδίου στον χωρόχρονο είναι μια κοσμική γραμμή (world-line), το ίχνος μια χορδής είναι ένα κοσμικό φύλλο (world-sheet).

Σε αναλογία με τη δράση του σωματιδίου που είναι το μήκος του world-line επί τη μάζα

$$S = m \int ds = -m \int d\tau; \quad d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

η δράση της χορδής θα είναι η επιφάνεια του world-sheet επί την τάση $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int dA$$

όπου το στοιχείο επιφανείας είναι

$$dA = d^2\xi \sqrt{-\det(\gamma_{ab})}$$

όπου γ_{ab} είναι η εσωτερική (*intrinsic*) μετρική του world-sheet και ξ^a είναι οι εσωτερικές συντεταγμένες της χορδής.

Αυτό που θέλουμε, όμως, είναι να ορίσουμε τη χορδή μέσω του τρόπου που εμβαπτίζεται στον χωρόχρονο (target space). Οπότε, εάν $X^\mu(\tau, \sigma)$ είναι οι συντεταγμένες της χορδής, τότε το στοιχείο μήκους για τη χορδή, στον χώρο αυτό, είναι

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} d\xi^a d\xi^b$$

όπου η επαγόμενη (*induced*) μετρική ορίζεται ως

$$h_{ab}(\xi) = g_{\mu\nu}(X(\xi)) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}$$

και επομένως η Nambu-Goto δράση θα είναι

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det(h_{ab})} \quad (6.1)$$

όπου ορίσαμε τις εσωτερικές συντεταγμένες $\{\xi^a\} = (\tau, \sigma)$, με $\sigma =$ world-sheet μήκος και $\tau =$ world-sheet χρόνο.

Εφ' όσον η μετρική σχέση μπορεί να αναπαραμετροποιηθεί ως

$$h_{ab}(\xi) = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi'^c} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi'^d} \frac{\partial \xi'^c}{\partial \xi^a} \frac{\partial \xi'^d}{\partial \xi^b} = h_{cd}(\xi') \frac{\partial \xi'^c}{\partial \xi^a} \frac{\partial \xi'^d}{\partial \xi^b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\det(h_{ab})} = \sqrt{\det(h'_{ab})} \left| \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \right|$$

και αφού τα διαφορικά στοιχεία αλλάζουν ως

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left| \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2$$

τότε συμπεραίνουμε ότι το στοιχείο επιφανείας

$$dA = \sqrt{-\det(h_{ab})} d^2\xi = \sqrt{-\det(h'_{ab})} d^2\xi'$$

είναι αναλλοίωτο υπο την αναπαραμετροποίηση συντεταγμένων, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για τη δράση (6.1).

6.2 Η δράση Polyakov

Η πρώτης τάξης μορφή της Nambu-Goto δράσης ονομάζεται *δράση Polyakov* και, σε flat χώρο, είναι η

$$S_P[X, \gamma] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (6.2)$$

η οποία εξαρτάται από την εσωτερική μετρική και είναι τετραγωνική στις συντεταγμένες $X^\mu(\xi^a)$, αντίθετα με τη δράση Nambu-Goto.

Η δράση Polyakov είναι αναλλοίωτη υπό τους ακόλουθους τρόπους:

- Χωροχρονική αναλλοιότητα υπό την ομάδα Poincarè.
- Αναλλοιότητα συντεταγμένων, μέσω δυο μετασχηματισμών $\{\sigma'(\sigma, \tau), \tau'(\sigma, \tau)\}$ οι οποίοι δίνουν $X'^\mu(\sigma', \tau') = X^\mu(\sigma, \tau)$.
- World-sheet Weyl αναλλοιότητα: για ένα αυθαίρετο $\omega(\sigma, \tau)$, έχουμε τον μετασχηματισμό

$$X'^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma, \tau); \quad \gamma'_{ab}(\sigma, \tau) = e^{2\omega(\sigma, \tau)} \gamma_{ab}(\sigma, \tau)$$

Η τελευταία δεν ισχύει για τη δράση Nambu-Goto.

6.3 Εξισώσεις κίνησης και κβάντωση στη συναλλοιώτη βαθμίδα

Εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες

Οι χορδές έχουν χωρική έκταση και αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε συνοριακές συνθήκες. Μπορούν να είναι ανοικτές, όπου τα άκρα της χορδής βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χωροχρόνου, είτε κλειστές. Οι κατάλληλες συνθήκες θα βρεθούν μεταβάλλοντας τη δράση.

Πρώτα ορίζουμε τον ταυυστή ενέργειας-ορμής του world-sheet, όπως και στη γενική σχετικότητα, με μια σύμβαση 4π μπροστά

$$T^{ab}(\sigma, \tau) = -4\pi \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_P}{\delta \gamma_{ab}} = +\frac{1}{\alpha'} \left(\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma^{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu \right) \quad (6.3)$$

ο οποίος διατηρείται ως συνήθως, $\nabla_a T^{ab} = 0$.

Βλέπουμε ότι η εξίσωση κίνησης για το γ^{ab} είναι $T^{ab} = 0$ και ότι, από την αναλλοιώτητα Weyl, η δράση υπονοεί ότι $\gamma^{ab} \delta S_P / \delta \gamma_{ab} = 0$ *off-shell*, δηλαδή ότι ο ταυυστής ενέργειας-ορμής είναι άιχνος *off-shell*, $T^a_a = 0$.

Η επόμενη εξίσωση κίνησης για την S_P προκύπτει μεταβάλλοντας ως προς X^μ , δίνοντας

$$\delta_X S_P = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{-\gamma} \delta X^\mu \nabla^2 X_\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \sqrt{-\gamma} \delta X^\mu \partial_\sigma X_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} \quad (6.4)$$

Οι πιθανές συνοριακές συνθήκες προκύπτουν μηδενίζοντας τον συνοριακό όρο. Για κλειστές χορδές, η συνοριακή συνθήκη είναι

$$X^\mu(\tau, l) = X^\mu(\tau, 0); \quad \gamma_{ab}(\tau, l) = \gamma_{ab}(\tau, 0) \quad (6.5)$$

και γενικότερα $X^\mu(\tau, \sigma + l) = X^\mu(\tau, \sigma)$ και $\gamma_{ab}(\tau, \sigma + l) = \gamma_{ab}(\tau, \sigma)$, δηλαδή περιοδικότητα. Για ανοικτές χορδές, οι συνοριακές συνθήκες είναι είτε Neumann

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, l) = 0 \quad (6.6)$$

που υπονοεί ότι τα άκρα της χορδής είναι ελεύθερα, αφού δεν περιορίζει κάπως τα $\delta X^\mu(\tau, 0)$, $\delta X^\mu(\tau, l)$, και κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, είτε Dirichlet

$$\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, l) = 0 \quad (6.7)$$

που υπονοεί ότι τα άκρα της ανοικτής χορδής είναι ακίνητα ως προς τις οριζόμενες, από τη συνθήκη, χωροχρονικές κατευθύνσεις. Αργότερα θα δείξουμε ότι οι συνθήκες Dirichlet σχετίζονται με αντικείμενα που ονομάζονται D-branes.

Η εξίσωση κίνησης για το X^μ βρίσκεται θέτοντας τον πρώτο όρο μεταβολής της (6.4) ίσο με το μηδέν για κάθε δX^μ , όπου παίρνουμε την κυματική εξίσωση σε δυο διαστάσεις

$$\nabla^2 X^\mu = 0 \quad (6.8)$$

Σύμμορφη βαθμίδα

Έπειτα, είδαμε ότι η δράση Polyakov έχει τρεις τοπικές αναλλοιώτητες στο world-sheet της, δυο μετασχηματισμούς συντεταγμένων $\sigma'(\sigma, \tau)$, $\tau'(\sigma, \tau)$ και έναν Weyl μετασχηματισμό $\omega(\sigma, \tau)$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε τους τρεις ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας του συμμετρικού πίνακα $\gamma_{ab}(\sigma, \tau)$ να είναι οτιδήποτε επιθυμούμε. Επιλέγουμε τη βαθμίδα

$$\gamma_{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

η οποία συνήθως ονομάζεται *σύμμορφη βαθμίδα* (*conformal gauge*). Τότε η δράση Polyakov γίνεται

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (6.10)$$

Το ότι οι συνθήκες Neumann (6.6) υπονοούν κίνηση των άκρων στην ταχύτητα του φωτός, φαίνεται εύκολα από την εξίσωση κίνησης για το γ^{ab} , $T^{ab} = 0$.

Αυτή, στη σύμμορφη βαθμίδα και σε flat χώρο, δίνει

$$\begin{aligned}\alpha' T_{01} &= \alpha' T_{10} = \dot{X} \cdot X' = 0 \\ \alpha' T_{00} &= \alpha' T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0\end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ σε συνδυασμό με την συνθήκη (6.6), δηλαδή $X'^\mu(\sigma, \tau) = 0$ στα άκρα, δίνει $\dot{X}^2 = 0$, δηλαδή $dX^\mu dX_\mu = 0$ που εννοεί κίνηση των άκρων στην ταχύτητα του φωτός.

Τρόποι ταλάντωσης της χορδής

Τώρα, ώστε να βρούμε τους τρόπους (modes) ταλάντωσης της χορδής λύνουμε την κυματική εξίσωση κίνησης σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες. Για την κλειστή χορδή, παίρνουμε

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \right) \quad (6.11)$$

όπου τα μηδενικά modes ταυτοποιούνται με την τετραορμή

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \quad (6.12)$$

Για την ανοικτή χορδή, με συνοριακές συνθήκες Neumann, παίρνουμε

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right) \quad (6.13)$$

όπου αντίστοιχα ισχύει

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu \quad (6.14)$$

Hamiltonian και Virasoro modes

Για να βρούμε τη Hamiltonian του world-sheet της χορδής, στον flat χώρο, γράφουμε την δράση Polyakov σε conformal gauge (6.10) ως

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int d\sigma (\dot{X}^2 - X'^2) = \int d\tau L \quad (6.15)$$

και ορίζουμε τις world-sheet πυκνότητες ορμής

$$\mathcal{P}_\tau^\mu = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad (6.16)$$

$$\mathcal{P}_\sigma^\mu = \frac{\delta S}{\delta X'^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu \quad (6.17)$$

ώστε ο μετασχηματισμός Legendre

$$H = \int_0^l d\sigma (\dot{X}_\mu \mathcal{P}_\tau^\mu - L) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma (\dot{X}^2 + X'^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l d\sigma T_{00}$$

να μας δώσει, για μια ανοικτή χορδή μήκους $l = \pi$,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\mu \quad (6.18)$$

ενώ για μια κλειστή χορδή με $l = 2\pi$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\mu + \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_n^\mu) \quad (6.19)$$

Έπειτα, εκφράζοντας τις εξισώσεις κίνησης σε light-cone συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \alpha' T_{++} &= \frac{\alpha'}{2} (T_{00} + T_{01}) = \frac{1}{4} (\dot{X} + X')^2 = 0 \\ \alpha' T_{--} &= \frac{\alpha'}{2} (T_{00} - T_{01}) = \frac{1}{4} (\dot{X} - X')^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

τους λεγόμενους περιορισμούς (*constraints*) *Virasoro*, μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Fourier και να ορίσουμε τα λεγόμενα *Virasoro modes*, ποσότητες που εμφανίζονται πάντα και παντού στη θεωρία χορδών. Για την κλειστή χορδή, ορίζουμε

$$L_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{-im\sigma} T_{--} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_n^\mu \quad (6.21)$$

$$\tilde{L}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{-im\sigma} T_{++} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{m-n}^\mu \tilde{\alpha}_n^\mu \quad (6.22)$$

ενώ για την ανοικτή χορδή

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma (e^{im\sigma} T_{++} + e^{-im\sigma} T_{--}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_n^\mu \end{aligned} \quad (6.23)$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι για τους δυο τύπους χορδών ισχύει

$$\begin{aligned} H &= L_0 && \text{ανοικτή} \\ H &= L_0 + \tilde{L}_0 && \text{κλειστή} \end{aligned} \quad (6.24)$$

και ότι το constraint $H = L_0 = 0$, για την ανοικτή χορδή, μεταφράζεται σε

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = -\frac{\alpha_0^2}{2\alpha'} = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \geq 1} \alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\mu \quad (6.25)$$

ενώ το constraint $H = L_0 + \tilde{L}_0 = 0$, για την κλειστή χορδή, μεταφράζεται σε

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = -\frac{\alpha_0^2 + \tilde{\alpha}_0^2}{\alpha'} = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\mu + \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_n^\mu) \quad (6.26)$$

Τέλος, μέσω των περιορισμών, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$L_0 = \tilde{L}_0 \quad (6.27)$$

και να παρατηρήσουμε ότι η συνθήκη $0 = L_0 - \tilde{L}_0 \equiv \mathcal{P}_\sigma$ (όπου \mathcal{P}_σ προκύπτει να είναι η world-sheet ορμή που προκαλεί τη ∂/∂_σ μετατόπιση) σημαίνει ότι έχουμε αναλλοιώτητα μετατόπισης (translational invariance) κατά μήκος της κλειστής χορδής.

6.3.0.1 Κβαντικές χορδές

Η κβάντωση των χορδών προκύπτει φυσιολογικά εάν αντιστοιχίσουμε εννοιολογικά τη θέση $X^\mu(\tau, \sigma)$ και την ορμή $\mathcal{P}_\tau^\mu(\tau, \sigma)$ της χορδής με τους αντίστοιχους τελεστές της κβαντομηχανικής. Συνεπώς, προκύπτει η άλγεβρα

$$\begin{aligned} [X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] &= [\mathcal{P}^\mu(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')] = 0 \\ [X^\mu(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')] &= i\delta(\sigma - \sigma')g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις την έκφραση (6.11) για το X^μ mode της κλειστής χορδής, αποκτάμε την έκφραση της άλγεβρας μέσα από τους τελεστές, πλέον, των ταλαντώσεων

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = -im\delta_{m+n,0}g^{\mu\nu} \\ [\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] &= 0 \\ [x^\mu, p^\nu] &= ig^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.29)$$

οι οποίοι, εάν επαναοριστούν ως

$$\alpha_m^\mu = \sqrt{m}a_m^\mu; \quad \alpha_{-m}^\mu = \sqrt{m}a_m^{\dagger\mu}; \quad m > 0 \quad (6.30)$$

ικανοποιούν την κλασσική άλγεβρα των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Εδώ, πρέπει να τονίσουμε ότι ο τελευταίος ορισμός αφορά μόνχα τους ταλαντωτές α_m, α_{-m} με $m > 0$, ενώ ο α_0 θα δίνεται από την $\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu$.

6.4 Κβάντωση στη βαθμίδα κώνου φωτός

Ορίζοντας τις light-cone συντεταγμένες της χορδής στο χωρόχρονο

$$X^\pm = \frac{X^0 \pm X^{D-1}}{\sqrt{2}} \quad (6.31)$$

ρυθμίζουμε τη βαθμίδα κώνου φωτός (*light-cone gauge*) να είναι η

$$X^+(\sigma, \tau) = x^+ + p^+ \tau \quad (6.32)$$

Οπότε, εφ' όσον είναι

$$\dot{X}^+ \pm X'^+ = p^+ \quad (6.33)$$

τότε οι περιορισμοί Virasoro (6.20), δίνουν τους νέους περιορισμούς

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{(\dot{X}^i \pm X'^i)^2}{2(\dot{X}^+ \pm X'^+)} = \frac{(\dot{X}^i \pm X'^i)^2}{2p^+} \quad (6.34)$$

οι οποίοι με τη σειρά τους δίνουν, για την ανοικτή χορδή, τα Fourier modes

$$\begin{aligned} \alpha_n^+ &= 0 \\ \alpha_n^- &= \frac{1}{2p^+ \sqrt{2\alpha'}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i \end{aligned} \quad (6.35)$$

και για την κλειστή χορδή την ανάλογη σχέση με τους επιπλέον ταλαντωτές $\tilde{\alpha}$ και έναν διαφορετικό παράγοντα του α' μπροστά.

Παρατηρούμε οι μόνοι ανεξάρτητοι ταλαντωτές είναι οι α_n^i , συναρτήσει των οποίων εκφράζονται όλες οι υπόλοιπες ποσότητες. Για $n = 0$ παίρνουμε, για την ανοικτή χορδή,

$$M^2 \equiv 2p^+ p^- - p^i p^i = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \geq 1} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \quad (6.36)$$

Κβάντωση και ενεργειακό φάσμα στον κώνο φωτός

Στο κβαντικό επίπεδο, δηλαδή εκεί που κυβερνάει η άλγεβρα των μεταθετικών σχέσεων, η θέση (το normal ordering) των ταλαντωτών έχει πλέον σημασία. Συνεπώς, οι περιορισμοί (6.34), μέσω της άλγεβρας (6.29), δίνουν

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+ \sqrt{2\alpha'}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - a \delta_{n,0} \right] \quad (6.37)$$

όπου a μια σταθερά. Για $n = 0$ παίρνουμε την *light-cone Hamiltonian ανοικτής χορδής*

$$H = p^- = \frac{p^i p^i}{2p^+} + \frac{1}{2\alpha' p^+} (N - a) \quad (6.38)$$

οπότε και την τετραγωνισμένη μάζα

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i = \frac{1}{\alpha'} (N - a) \quad (6.39)$$

Εδώ ορίσαμε τον N , ένα είδος τελεστή αριθμησης,

$$N = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n \geq 1} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n \geq 1} n a_n^{\dagger i} a_n^i \quad (6.40)$$

όπου n είναι το επίπεδο (*level*) το οποίο, όπως μπορούμε να δούμε, υπολογίζει τη συνεισφορά μιας κατάστασης με $a_n^{\dagger i}$ στη μάζα M^2 . Τουτέστιν, η χορδή εμπεριέχει έναν άπειρο αριθμό διαφορετικών τύπων σωματιδίων φτιαγμένων από συνδυασμούς των βασικών σωματιδίων με τελεστές δημιουργίας $a_n^{\dagger i}$ και τα οποία έχουν τετραγωνισμένη μάζα ίση με n/α' .

Για την κλειστή χορδή, απλώς αναφέρουμε ότι το τετράγωνο της μάζας θα είναι

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2a) \quad (6.41)$$

Τώρα, ώστε να υπολογίσουμε την σταθερά a , χρησιμοποιούμε την άλγεβρα (6.29) ώστε να φέρουμε σε normal order το άθροισμα

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i &= \frac{1}{2} \sum_{n < 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{1}{2} \sum_{n > 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n < 0} \left[\alpha_n^i \alpha_{-n}^i - n(D-2) \right] + \frac{1}{2} \sum_{n > 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \\
&= \sum_{n > 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{D-2}{2} \sum_{n > 0} n \\
&= \sum_{n > 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \frac{D-2}{24}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη zeta function $\zeta(s) = \sum_{n>0} 1/n^s$ για να υπολογίσουμε $\zeta(-1) = -1/12$. Οπότε συγκρίνοντας με την έκφραση (6.37), βρίσκουμε ότι

$$a = \frac{D-2}{24} \quad (6.42)$$

και άρα για την πρώτη διεγερμένη κατάσταση, του ταλαντωτή $a_1^{\dagger i}$, η μάζα της ανοικτής χορδής είναι

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(1 - \frac{D-2}{24} \right)$$

Εφ' όσον ο δείκτης i των κάθετων (transverse) κατευθύνσεων τρέχει στον υπόχωρο $i = 1, \dots, D-2$, αυτό σημαίνει ότι η διεγερμένη αυτή κατάσταση θα έχει $D-2$ βαθμούς ελευθερίας. Παράλληλα, θέλουμε οποιαδήποτε κατάσταση που κατασκευάζουμε να είναι αναπαράσταση ολόκληρης της ομάδας Lorentz $SO(1, D-1)$. Για την παραπάνω κατάσταση αυτό είναι δυνατόν μόνον εάν αυτή αντιστοιχεί σε σωματίδιο μηδενικής μάζας, δηλαδή εάν και μόνον εάν

$$D = 26 \quad (6.43)$$

η οποία είναι και η κρίσιμη διάσταση ώστε η μποζονική θεωρία χορδών να έχει νόημα.

6.5 Χορδές σε πεδία υποβάθρου

Η θεωρία τόσο των ανοικτών όσο και των κλειστών μποζονικών χορδών έχει ένα ταχυονικό κενό (*tachyonic vacuum*): $M^2 = -1/\alpha'$ και $M^2 = -4/\alpha'$ αντίστοιχα. Το αντίστοιχο ταχυονικό πεδίο είναι βαθμωτό Φ και το $M^2 < 0$ σημαίνει ότι διαταράσσουμε το δυναμικό του γύρω από ένα μέγιστο ως $V(\Phi) \simeq V_0 + M^2(\delta\Phi)^2$ και όχι γύρω από ένα ελάχιστο. Μέσα σε άλλα, αυτό σημαίνει ότι το ταχυονικό κενό είναι ασταθές.

Από την άλλη, εάν θεωρήσουμε υπερσυμμετρικές χορδές, τα ταχυόνια εξαφανίζονται και η θεωρία ορίζεται πλέον στις $D = 10$ χωροχρονικές διαστάσεις. Τότε, το κενό θα αποτελείται από την άμαζη κατάσταση της κλειστής μποζονικής χορδής

$$a_1^{\dagger i} \bar{a}_1^{\dagger j} |0, 0; \vec{k}\rangle \equiv |ij\rangle \quad (6.44)$$

η οποία είναι μια $\{ij\}$ αναπαράσταση που αποσυντίθεται ως $\{ij\} = [ij] + (ij)_0 + ii$, δηλαδή σε ένα αντισυμμετρικό και ένα άιχνο συμμετρικό κομμάτι και στο ίχνος της. Το $(ij)_0$ κομμάτι είναι το graviton g_{ij} , το $[ij]$ είναι ένα αντισυμμετρικό B_{ij} πεδίο και το ίχνος είναι το dilaton ϕ . Πάνω από αυτά θα έχουμε modes αυξανόμενης μάζας, με κλίμακα $1/\sqrt{\alpha'}$, τα οποία όμως δεν συνεισφέρουν στο χαμηλο-ενεργειακό όριο $\alpha' \rightarrow 0$ όπου κυριαρχούν οι άμαζες καταστάσεις.

Τα $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$ όντας άμαζα και μποζονικά, συμπυκνώνονται και σχηματίζουν κλασσικά υπόβαθρα (backgrounds). Παράλληλα, έχοντας ορίσει τη δράση Polyakov στον flat χώρο, θέλουμε να περάσουμε σε καμπύλο χώρο, γεγονός που υπονοεί την αντικατάσταση $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$. Συνεπώς, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τη δράση Polyakov ώστε να εμπεριέχει αυτοσυνεπώς αλληλεπιδράσεις με τα άμαζα modes της κλειστής χορδής, σε flat χώρο. Προσέχοντας τους βαθμούς ελευθερίας της κάθε αναπαράστασης, η δράση αυτή θα είναι η

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left[\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X^\rho) + \alpha' \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X^\rho) - \alpha' \sqrt{-\gamma} \mathcal{R}^{(2)} \Phi(X^\rho) \right] \quad (6.45)$$

όπου $\mathcal{R}^{(2)}$ είναι το διδιάστατο βαθμωτό Ricci.

Η ποσότητα

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \mathcal{R}^{(2)} = \chi \quad (6.46)$$

είναι ένα τοπολογικό αναλλοίωτο, το οποίο μετράει τον αριθμό των οπών στην τοπολογία της διδιάστατης επιφάνειας. Συγκεκριμένα, είναι $\chi = 2(1 - g)$, όπου g είναι το γένος του χώρου. Οπότε, η προσθήκη μιας οπής στο world-sheet της χορδής, η οποία ερμηνεύεται ως ένα επιπλέον loop στην κβαντική αλληλεπίδραση της, δίνει έναν παράγοντα $e^{2\Phi}$, υποδεικνύοντας την ταυτοποίηση του e^Φ με τη σταθερά σύζευξης της χορδής (coupling constant), g_s .

6.6 Η υπερσυμμετρική χορδή

Superstring

Για να γράψουμε τη δράση της υπερχορδής (*superstring*), ορίζουμε το αντικείμενο

$$\Pi_a^\mu \equiv \partial_a X^\mu + \bar{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_a \theta^A \quad (6.47)$$

όπου θ^A , $A = 1, \dots, N$ είναι N χωροχρονικοί σπίνορες και world-sheet βαθμωτά, δηλαδή είναι $\theta^{A\alpha}$ με α χωροχρονικό σπινωριακό δείκτη σε 10 διαστάσεις. Τα αντικείμενα (6.47) είναι υπερσυμμετρικά υπό τους N global υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= \epsilon^A; & \delta\bar{\theta}^A &= \bar{\epsilon}^A \\ \delta X^\mu &= -\bar{\epsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A \end{aligned} \quad (6.48)$$

για $\delta\gamma_{ab} = 0$, οπότε μια αφελής κατασκευή θα ήταν η

$$S_{kin} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \Pi_a^\mu \Pi_{b\nu} \quad (6.49)$$

Παρ' όλα αυτά η δράση αυτή δεν έχει *kappa* συμμετρία, μια φερμιονική συμμετρία απαραίτητη ώστε να εξασφαλίζεται ο κατάλληλος αριθμός φερμιονικών συνιστωσών. Για το λόγο αυτό πρέπει να προσθέσουμε έναν super Wess-Zumino όρο

$$S_{WZ} = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \epsilon^{ab} \Pi_a^M \Pi_b^N B_{MN} \quad (6.50)$$

μέσω του οποίου έχουμε υπερσυμμετρία και *kappa* συμμετρία για $N \leq 2$.

Άρα η δράση $S_{kin} + S_{WZ}$, που ονομάζεται δράση *Green-Schwarz* για την υπερχορδή, είναι επίσης αναλλοίωτη υπό την *kappa* συμμετρία με παράμετρο $\kappa^{A\alpha\alpha}$, δηλαδή δυο ($A = 1, 2$) world-sheet vectors (a) και χωροχρονικοί σπίνορες (α), η οποία δίνεται απο τα

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa \theta^A &= -2\Gamma_\mu \Pi_a^\mu \bar{\kappa}^{Aa} \\
\delta_\kappa X^\mu &= -\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta \theta^A \\
\delta_\kappa (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab}) &= -16\sqrt{-\gamma} (P_-^{ac} \bar{\kappa}^{1b} \partial_c \theta^1 + P_+^{ac} \bar{\kappa}^{2b} \partial_c \theta^2)
\end{aligned} \tag{6.51}$$

όπου ορίσαμε τον αυτοδύϊκό και τον αντι-αυτοδύϊκό προβολικό ταυυστή

$$P_\pm^{ab} = \frac{1}{2} \left(\gamma^{ab} \pm \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{-h}} \right) \tag{6.52}$$

Spinning string

Μπορούμε να ορίσουμε έναν ακόμη φορμαλισμό όπου η υπερσυμμετρία είναι στο world-sheet και ονομάζεται Neveu-Schwarz-Ramond (NSR) δράση, ή αλλιώς spinning string καθώς έχει εσωτερική φερμιονική συμμετρία. Εκφράζεται με όρους φερμιονικών μεταβλητών, που είναι τώρα world-sheet σπίνορες και χωροχρονικά vectors, ψ^μ , και δίνεται από την

$$S_{NSR} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma [\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu + \bar{\psi}^\mu \gamma^a \partial_a \psi_\mu] \tag{6.53}$$

όπου οι πίνακες Dirac σε 1 + 1 διαστάσεις είναι

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \tag{6.54}$$

και η οποία δράση έχει world-sheet υπερσυμμετρία

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \psi^\mu \\
\delta \psi^\mu &= \gamma^a \partial_a X^\mu \epsilon
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Εάν μεταβάλλουμε τη δράση, εκτός του bulk όρου που δίνει τις εξισώσεις κίνησης και του μποζονικού συνοριακού όρου, παίρνουμε επίσης έναν φερμιονικό συνοριακό όρο (για την ανοικτή χορδή)

$$\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_- \Big|_0^\pi \tag{6.56}$$

Αυτό υποδεικνύει τη συνοριακή συνθήκη $\psi_+ = \pm\psi_-$. Μπορούμε να επιλέξουμε $\psi_+(0, \tau) = \pm\psi_-(0, \tau)$, όπου τότε για το άλλο άκρο θα ισχύει

$$\psi_+(\pi, \tau) = \pm\psi_-(\pi, \tau) \quad (6.57)$$

Η συνθήκη με + ονομάζεται Ramond (R) συνοριακή συνθήκη και οδηγεί σε φερμιονικές χωροχρονικές καταστάσεις, ενώ η συνθήκη με – ονομάζεται Neveu-Schwarz (NS) συνοριακή συνθήκη και οδηγεί σε μποζονικές καταστάσεις. Για την κλειστή χορδή, μπορούμε να θέσουμε ανεξάρτητα τις συνοριακές συνθήκες για τις left/right-moving καταστάσεις, παίρνοντας τις NS-NS, R-R, NS-R και R-NS καταστάσεις, όπου οι δυο πρώτες είναι μποζονικές και οι δυο τελευταίες φερμιονικές.

6.7 Υπερβαρύτητα στο $\alpha' \rightarrow 0$ όριο

Όπως αναφέραμε, στο $\alpha' \rightarrow 0$ όριο, αποκτάμε μια θεωρία για τα άμαζα πεδία της χορδής. Στην περίπτωση των υπερσυμμετρικών θεωριών χορδών, αυτά ζουν σε δέκα διαστάσεις, έχουν υπερσυμμετρία και εμπεριέχουν τη μετρική $g_{\mu\nu}$, συνεπώς περιγράφονται από 10-διάστατες υπερβαρύτητες (*supergravities*) και συγκεκριμένα τις type-IIA και type-IIB υπερβαρύτητες.

Το μποζονικό μέρος της δράσης της type-IIA υπερβαρύτητας στο σύστημα της χορδής, δηλαδή υπό την μετρική που εμφανίζεται στη δράση Polyakov, είναι

$$S_{IIA} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-G} \left[e^{-2\phi} \left(\mathcal{R} + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right) - \frac{1}{2} |F_2|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{F}_4|^2 \right] - \frac{1}{2} B_2 \wedge F_4 \wedge F_4 \right\} \quad (6.58)$$

όπου $|F_n|^2 \equiv 1/n! F_{\mu_1 \dots \mu_n} F^{\mu_1 \dots \mu_n}$ και

$$\tilde{F}_4 = dA_3 - A_1 \wedge F_3 \quad (6.59)$$

Το μποζονικό μέρος της type-IIB υπερβαρύτητας, αντίστοιχα, θα είναι

$$S_{IIB} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-G} \left[e^{-2\phi} \left(\mathcal{R} + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right) - \frac{1}{2} |F_1|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{F}_3|^2 - \frac{1}{4} |\tilde{F}_5|^2 \right] - \frac{1}{2} A_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \right\} \quad (6.60)$$

όπου ορίσαμε τα

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3 &= F_3 - A_0 \wedge H_3 \\ \tilde{F}_5 &= F_5 - \frac{1}{2} A_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3 \end{aligned} \quad (6.61)$$

M-theory και 11-διάστατη supergravity

Η type-IIA θεωρία χορδών, σε ισχυρή σύζευξη (strong coupling), μετατρέπεται σε μια 11-διάστατη θεωρία που ονομάζεται M-theory. Αυτή, στο χαμηλο-ενεργειακό όριο, δίνει τη μοναδική 11-διάστατη υπερβαρύτητα

$$S_{11} = \frac{1}{\kappa_{11}^2} \int d^{11}x \sqrt{-G} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} |F_4|^2 \right) - \frac{1}{6\kappa_{11}^2} \int d^{11}x A_3 \wedge F_4 \wedge F_4 \quad (6.62)$$

Κεφάλαιο 7

D-βράνες

7.1 Δράση, πεδία και τάση της βράνης

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι ανοικτές χορδές μπορούν να έχουν δυο είδη συνοριακών συνθηκών: τις Neumann, $\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, l) = 0$, και τις Dirichlet, $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, l) = 0$. Οι συνοριακές συνθήκες Neumann σημαίνουν ότι τα άκρα της χορδής είναι ελεύθερα και κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, ενώ οι συνθήκες Dirichlet σημαίνουν ότι τα άκρα αυτά είναι ακίνητα. Παράλληλα, μπορούμε να θεωρήσουμε τις συνθήκες αυτές ανεξάρτητα για κάθε διάσταση, δηλαδή, συγκεκριμένα, να επιλέξουμε $p + 1$ συνοριακές συνθήκες Neumann για p χωρικές διαστάσεις συν τον χρόνο, και $d - p - 1$ συνοριακές συνθήκες Dirichlet για τις υπόλοιπες διαστάσεις του d -διάστατου χώρου. Τουτέστιν, τα άκρα της χορδής είναι περιορισμένα να ζουν σε μια $p + 1$ -διάστατη επιφάνεια στον χωρόχρονο, μια D - p -βράνη¹. Προφανώς, τα δυο άκρα της χορδής μπορούν να καταλήγουν σε μια ή και δυο διαφορετικές D - p -βράνες. Τις διευθύνσεις για τις οποίες τα άκρα θα έχουν συνοριακές συνθήκες Neumann θα τις ονομάζουμε X^+ , X^- , X^a (τις περισσότερες φορές, όλες ως X^a), και τις διευθύνσεις με συνθήκες Dirichlet X^i .

Μια δυναμική p -βράνη πρέπει να έχει μια δράση που να ελαχιστοποιεί τον κοσμικό όγκο της (world-volume), ακριβώς όπως ένα σωματίο έχει μια δράση που ελαχιστοποιεί τον ιδιόχρονο της κοσμικής του γραμμής (world-line) και μια χορδή, αντίστοιχα, μια δράση που ελαχιστοποιεί την επιφάνεια του κοσμικού της φύλλου (world-sheet), μαζί με ένα συντελεστή μπροστά ο οποίος θα είναι η τάση

¹«D» από «Dirichlet» και «βράνη» από τη «μεμβράνη».

της p -βράνης, δηλαδή ενέργεια (μάζα) ανά μονάδα όγκου,

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(h_{ab})} \quad (7.1)$$

όπου h_{ab} είναι η εμβαπτισμένη μετρική του world-volume στον χωρόχρονο, δηλαδή

$$h_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} g_{\mu\nu}(X) \quad (7.2)$$

Προφανώς, τα παραπάνω είναι μια γενίκευση της περίπτωσης της δράσης Nambu-Goto της χορδής, η οποία δίνεται με όρους της εμβαπτισμένης μετρικής του world-sheet της χορδής.

Οπότε μας γίνεται εμφανής η σύζευξη της p -βράνης με τη μετρική του χωρόχρονου. Βέβαια, ο συνδυασμός που εμφανίζεται στη θεωρία χορδών είναι ο $g_{\mu\nu}(X) + \alpha' B_{\mu\nu}$, καθώς, όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τα πεδία υποβάθρου, η αποσύνθεση των φυσικών άμαζων καταστάσεων της κλειστής χορδής $\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0, k\rangle$ παράγει τις μη-αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις του άιχνου συμμετρικού $g_{\mu\nu}$ και του αντισυμμετρικού $B_{\mu\nu}$ (και του ίχνους, dilaton).

Οπότε, η δράση της p -βράνης θα πρέπει είναι

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} (g_{\mu\nu} + \alpha' B_{\mu\nu})\right)} \quad (7.3)$$

Η δράση, όπως είχαμε δείξει και στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι αναλλοίωτη υπό την αναπαραμετροποίηση της στο world-volume, οπότε και μπορούμε να επιλέξουμε τη στατική βαθμίδα (*static gauge*), όπου $X^a = \xi^a$ για $a = 0, 1, \dots, p$ και άρα

$$X^i(\xi^a) \equiv \frac{\phi^i(\xi^a)}{\sqrt{T_p}} \quad (7.4)$$

τα οποία είναι βαθμωτά πεδία, ως προς το world-volume της p -βράνης. Εκφράζοντας τη μετρική ως $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa_N h_{\mu\nu}(X)$, παίρνουμε τη δράση για τα ϕ^i , ενώ $h_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} = 0$ (στον επίπεδο χώρο) ως

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det \left(\eta_{ab} + \frac{\partial_a \phi^i \partial_b \phi_i}{T_p} \right)} \quad (7.5)$$

Αυτή ονομάζεται η δράση *Dirac-Born-Infeld (DBI)* βαθμωτού πεδίου.

Η ορίζουσα υπολογίζεται εύκολα ως

$$\begin{aligned} & \det \left(\eta_{ab} + \frac{\partial_a \phi^i \partial_b \phi_i}{T_p} \right) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \epsilon^{b_1 \dots b_{p+1}} \left(\eta_{a_1 b_1} + \frac{\partial_{a_1} \phi^i \partial_{b_1} \phi_i}{T_p} \right) \dots \left(\eta_{a_{p+1} b_{p+1}} + \frac{\partial_{a_{p+1}} \phi^i \partial_{b_{p+1}} \phi_i}{T_p} \right) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \left[\epsilon_{a_1 \dots a_{p+1}} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} + (p+1) \epsilon^{a_1 \dots a_p a_{p+1}} \epsilon_{a_1 \dots a_p}{}^{b_{p+1}} \frac{1}{T_p} \partial_{a_{p+1}} \phi^i \partial_{b_{p+1}} \phi_i + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.6)$$

κι ενώ $\epsilon_{a_1 \dots a_{p+1}} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} = (p+1)!$ και $\epsilon^{a_1 \dots a_p a_{p+1}} \epsilon_{a_1 \dots a_p}{}^{b_{p+1}} = p! \eta^{a_{p+1} b_{p+1}}$, αποκτάμε τη δράση

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{1 + \frac{\partial^a \phi^i \partial_a \phi_i}{T_p} + \dots} \simeq - \int d^{p+1}\xi \left[T_p + \frac{1}{2} \partial^a \phi^i \partial_a \phi_i + \dots \right] \quad (7.7)$$

όπου παρατηρούμε ότι σε πρώτη τάξη αποκτάμε έναν κανονικό κινητικό όρο βαθμωτού πεδίου.

Έπειτα, μπορούμε να βρούμε την πρώτης τάξης σύζευξη του βαθμωτού πεδίου με τη βαρύτητα, αναπτύσσοντας τη δράση ως προς $h_{\mu\nu}$ και ϕ^i ως

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_p &\simeq -T_p \sqrt{-\det \left(\eta_{ab} + 2\kappa_N h_{ab} + 4\kappa_N h_{ai} \partial_b \frac{\phi^i}{\sqrt{T_p}} \right)} \\
&= -T_p \sqrt{\frac{1}{(p+1)!} \left[\dots + 4(p+1)\kappa_N h_{ai} \frac{\partial_b \phi^i}{\sqrt{T_p}} p! \delta_a^b + \dots \right]} \\
&\simeq \sqrt{1 + \dots + 4\kappa_N h_{ai} \frac{\partial^a \phi^i}{\sqrt{T_p}} + \dots}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Η δράση βαθμωτού-graviton θα είναι τότε

$$S_p = - \int d^{p+1}\xi \left[T_p + \frac{1}{2} \partial^a \phi^i \partial_a \phi^i + 2\kappa_N \sqrt{T_p} h_{ai} \partial^a \phi^i + \dots \right] \tag{7.9}$$

όπου συμπεραίνουμε ότι η σταθερά σύζευξης του βαθμωτού πεδίου ϕ^j , με τετραορμή k^μ , με το graviton h_i^a , είναι $2\kappa_N \sqrt{T_p} i k^a \delta_i^j$.

Αυτή είναι μια σύζευξη ενός mode της κλειστής χορδής, του $g_{\mu\nu}(X)$, το οποίο υπάρχει παντού στον χωρόχρονο, με το $\phi^i(\xi)$, ή $X^i(\xi)$, το οποίο είναι ένα mode που ζεί μονάχα στο world-volume της D-βράνης.

Παράλληλα, μια ανοικτή χορδή με τα δυο της άκρα πάνω σε μια D-βράνη συνειδητοποιείται ως ένα ενιαίο αντικείμενο, δηλαδή μια D-βράνη με μια συνημμένη ανοικτή χορδή (της οποίας οι συντεταγμένες X^i θα φαίνονται ως βαθμωτά πεδία από την άποψη της D-βράνης) να ανοίξει στο world-volume της.

Συνεπώς, για να βγάλει νόημα η παραπάνω σύζευξη πρέπει να έχει την εξής ερμηνεία: μια κλειστή χορδή συγκρούεται με μια D-βράνη και σπάει σε ένα σημείο σχηματίζοντας μια ανοικτή χορδή με άκρα πάνω στην D-βράνη αυτή, η οποία είναι πλέον διεγερμένη, με τα modes X^i της ανοικτής χορδής να αποτελούν συντεταγμένες της D-βράνης.

Στη θεωρία χορδών, υπάρχει ένας αντίστοιχος υπολογισμός με τον παραπάνω, όπου το world-volume μιας κλειστής χορδής που έρχεται από το άπειρο

ενώνεται με την οριακή συνθήκη μιας ανοικτής χορδής με άκρα πάνω σε μια D-βράνη. Ο υπολογισμός αυτός συμφωνεί με τον παραπάνω και καθορίζει την τάση της D-βράνης με όρους παραμέτρων της θεωρίας χορδών ως

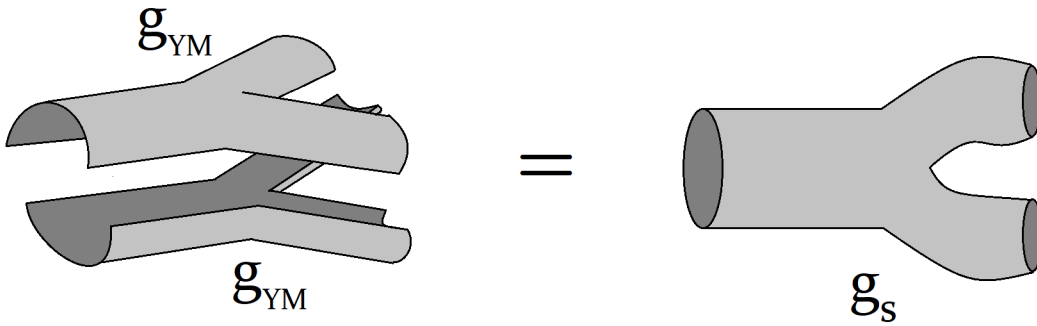
$$T_p = \frac{1}{(2\pi\alpha')^2 g_{p+1}^2} \quad (7.10)$$

όπου g_{p+1} είναι η σύζευξη της $p + 1$ -διάστατης θεωρίας,

$$g_{p+1}^2 = (2\pi)^{p-2} g_s \alpha'^{\frac{p-3}{2}} \quad (7.11)$$

Το τελευταίο mode της κλειστής χορδής, στον NS-NS τομέα, είναι το dilaton ϕ , δηλαδή το ίχνος $a_1^{\dagger i} \tilde{a}_1^{\dagger i} |0, k\rangle$. Όπως είχαμε εξηγήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, η σταθερά σύζευξης της κλειστής χορδής εκφράζεται μέσω του πεδίου dilaton ως $g_s = e^\phi$.

Παράλληλα, η αλληλεπίδραση μεταξύ κλειστών χορδών σχετίζεται με την αλληλεπίδραση μεταξύ ανοικτών χορδών ως $g_s = g_o^2$, καθώς μια (κλειστή χορδή) είναι μια (ανοικτή χορδή)² όπως μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε στο παρακάτω σχήμα.



Έπειτα, θυμόμαστε ότι η δράση της κλειστής χορδής έχει έναν παράγοντα $1/g_s^2$ μπροστά και, οπότε, η δράση της D-βράνης, η οποία είναι μια δράση ανοικτής χορδής, θα έχει μπροστά έναν παράγοντα $1/g_o^2 = 1/g_s = e^{-\phi}$. Συνεπώς, η δράση θα είναι

$$S_p = T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} (g_{\mu\nu} + \alpha' B_{\mu\nu}) \right)} \quad (7.12)$$

Δράση DBI για τον ηλεκτρομαγνητισμό

Βέβαια, υπάρχουν κι άλλα πεδία τα οποία ζουν στην D-βράνη. Συγκεκριμένα, στο προηγούμενο κεφάλαιο, είχαμε δείξει ότι οι ανοικτές χορδές με συνοριακές συνθήκες Neumann εμπεριέχουν ένα άμαζο διάνυσμα $a^{\dagger i} |0, k\rangle$. Αντίστοιχα, μια ανοικτή χορδή πάνω σε μια D- p -βράνη, με $p+1$ συνοριακές συνθήκες Neumann, θα εμπεριέχει ένα άμαζο διάνυσμα A^μ , $\mu = 0, 1, a$, που αντιστοιχεί στο mode $a^{\dagger a} |0, k\rangle$: για $a = 2, \dots, p$ (στη βαθμίδα κώνου φωτός, οι διαστάσεις 0,1 έχουν κατασκευάσει τις διαστάσεις $-$, $+$ και δεν συμπεριλαμβάνονται στους ταλαντωτές $a^{\dagger a}$ της χορδής), το mode έχει $p - 1$ βαθμούς ελευθερίας στο $p + 1$ -διάστατο world-volume της D-βράνης.

Όσον αφορά τη δράση που θα περιλαμβάνει το A^a , γνωρίζουμε ότι ο όρος που περιγράφει ένα άμαζο διάνυσμα είναι ο γνωστός όρος Maxwell $-1/4 F_{ab} F^{ab}$. Στη συνέχεια, εφ' όσον επιθυμούμε να συμπεριλάβουμε τον όρο αυτό στο υπόριζο της δράσης DBI, μπορούμε να το πράξουμε θεωρώντας ότι είμαστε στο χαμηλοενεργειακό όριο του πεδίου (ωστέ εν τέλει η ρίζα να απλοποιείται, όπως θα γίνει εμφανές στο τέλος του κεφαλαίου, στον γνωστό κινητικό ηλεκτρομαγνητικό όρο), δηλαδή με την απλούστερη επιλογή

$$S_{p,DBI} = T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(h_{ab} + \alpha' B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \quad (7.13)$$

Αυτή είναι η δράση DBI για τον ηλεκτρομαγνητισμό, ή, γενικά, δράση DBI.

Η δράση αυτή είναι αξιοσημείωτη, με χαρακτηριστικότερη ιδιότητα, την οποία και θα αποδείξουμε στο τέλος τούτου του κεφαλαίου, ότι επιβάλλει ένα μέγιστο όριο στο ηλεκτρικό πεδίο και την ενεργειακή πυκνότητα, αποφεύγοντας περίτεχνα τους συνήθεις απειρισμούς της θεωρίας του Maxwell.

7.2 Παράγοντες Chan-Paton και κβάντωση των ανοικτών χορδών πάνω στις D-βράνες

Στα άκρα μιας ανοικτής χορδής μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ετικέτες $|i\rangle$, με το $i = 1, \dots, N$, τους επονομαζόμενους παράγοντες Chan-Paton. Για να αναπαραστήσουμε τη χορδή αυτή, επιθυμούμε μια ομάδα μοναδιακών (ώστε να διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο και να είμαστε κβαντομηχανικά συνεπείς) μετασχηματισμών με N^2 στοιχεία: την ομάδα $U(N)$.

Τότε η ανοικτή χορδή, με το ένα άκρο στην N και το άλλο στην \bar{N} αναπαράσταση της $U(N)$, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι στην adjoint αναπαράσταση. Τουτέστιν, θεωρώντας τους πίνακες λ_{ij}^A στην adjoint αναπαράσταση $N \times \bar{N}$ της $U(N)$, η κυματοσυνάρτηση της ανοικτής χορδής είναι

$$|k; A\rangle = \sum_{i,j=1}^N |k, ij\rangle \lambda_{ij}^A \quad (7.14)$$

Η επιλογή της συγκεκριμένης αναπαράστασης και όχι κάποιας άλλης, μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα εάν παρατηρήσουμε ότι εφ' όσον τα άκρα είναι στις N, \bar{N} αναπαράστασεις, τότε αυτά μετασχηματίζονται ως

$$|i'\rangle = U_{i'i} |i\rangle \quad |j'\rangle = |j\rangle U_{jj'}^\dagger \quad (7.15)$$

με συνέπεια οι πίνακες λ_{ij}^A να μετασχηματίζονται ως

$$\lambda_{ij}^A \rightarrow U_{i'i} \lambda_{ij}^A U_{jj'}^\dagger = (U \lambda^A U^\dagger)_{ij} \quad (7.16)$$

όπως ακριβώς θα έπρεπε.

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε N D- p -βράνες, τότε οι παράγοντες Chan-Paton αντιπροσωπεύουν την αντιστοίχιση του κάθε ενός από τα δυο άκρα σε μια από αυτές τις D- p -βράνες. Εάν, επίσης, οι N D- p -βράνες είναι συμπίπτουσες στον χώρο (και, παράλληλα, διαχωρίσιμες), τότε μια ανοικτή χορδή μπορεί να έχει ως mode ένα $U(1)$ άμαζο πεδίο βαθμίδας A_μ έχοντας τα δυο άκρα τόσο σε μια μονάχα D- p -βράνη όσο και σε δυο διαφορετικές. Εμφανίζονται, δηλαδή, N^2 άμαζα πεδία βαθμίδας A_μ^A , με $A = 1, \dots, N^2$, δηλαδή μια $U(N)$ θεωρία βαθμίδας, αποτέλεσμα που επιβεβαιώνει τα παραπάνω.

Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε ακόμα καλύτερα με τον εξής τρόπο. Θα μπορούσαμε να αναρωτηθούμε τον λόγο που τα N^2 πεδία βαθμίδας δεν σχηματίζουν μια $U(1)^{N^2}$ θεωρία, αλλά μια $U(N)$ θεωρία. Ο λόγος γι' αυτό είναι και η αιτία που εισάγαμε την ομάδα $U(N)$ εξ' αρχής, ώστε να περιγράψουμε τις N^2 καταστάσεις της χορδής: όπως οι καταστάσεις της χορδής αλληλεπιδρούν κβαντομηχανικά, έτσι και τα πεδία βαθμίδας αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Έχουν, με λίγα λόγια, τον κοινό πόθο να μετασχηματίζονται με την ομάδα $U(N)$.

Μπορούμε να εμβαθύνουμε περισσότερο, περιγράφοντας με ακρίβεια το γιατί και το πως αλληλεπιδρούν τα N^2 πεδία βαθμίδας μεταξύ τους. Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε δυο ανοικτές χορδές, με το ένα άκρο της καθεμιάς σε διαφορετικές (συμπίπτουσες) $D-p$ -βράνες και το άλλο σε μια κοινή $D-p$ -βράνη, τότε τα δυο άκρα που βρίσκονται πάνω στην κοινή $D-p$ -βράνη μπορούν να ενωθούν και, συνεπώς, να αποκοπούν από τη βράνη αυτή, σχηματίζοντας μια ενιαία ανοικτή χορδή με άκρα σε δυο διαφορετικές $D-p$ -βράνες. Στην πραγματικότητα, άσχετα με το πόσες χορδές εξετάζουμε, αυτό μεταφράζεται στο ότι διαφορετικές καταστάσεις της χορδής, οι οποίες και αντιστοιχούν σε διαφορετικά πεδία βαθμίδας, εμπλέκονται μεταξύ τους παράγοντας νέες καταστάσεις και, παράλληλα, νέα πεδία βαθμίδας. Πολύ σωστά, λοιπόν, για N συμπίπτουσες $D-p$ -βράνες έχουμε N^2 πεδία βαθμίδας A_μ^A , τα οποία στελεχώνουν μια $U(N)$ θεωρία βαθμίδας.

Συνεπώς, τα πεδία βαθμίδας $\mathbf{A}_\mu = A_\mu^A \tau_A$, όπου τ_A οι γεννήτορες της ομάδας $U(N)$, αναπαρίστανται από $N \times N$ πίνακες

$$(\mathbf{A}_\mu)_{ij} = A_\mu^A (\tau_A)_{ij} \quad (7.17)$$

με $i, j = 1, \dots, N$, καθώς οι γεννήτορες μετασχηματίζονται στην adjoint αναπαράσταση και αναπαρίστανται από πίνακες στη θεμελιώδη αναπαράσταση². Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι παρουσιάζονται με φυσιολογικό τρόπο τα N^2 πεδία βαθμίδας της $U(N)$ θεωρίας βαθμίδας. Προφανώς, τα στοιχεία $(\mathbf{A}_\mu)_{ij}$ αντιπροσωπεύουν τα πεδία βαθμίδας για χορδές με άκρα σε στις i και j $D-p$ -βράνες.

Κατά τα ίδια, τα βαθμωτά πεδία X^i , ή ϕ^i , που αναπαριστούν τις θέσεις των $D-p$ -βρανών, αναπαρίστανται ως $(\phi^i)_{ij}$. Τα N διαγώνια στοιχεία αναπαριστούν όντως τις θέσεις των $D-p$ -βρανών, δηλαδή των ανοικτών χορδών με άκρα σε

²Παράδειγμα διάσθησης, οι 3 γεννήτορες της $SU(2)$ που αναπαρίστανται από τους 2×2 πίνακες Pauli.

μια D- p -βράνη. Από την άλλη, τα μη διαγώνια στοιχεία είναι καθαρά κβαντικές μεταβλητές, οι οποίες περιγράφουν τη κβαντική γεωμετρία που αντιλαμβάνονται οι D- p -βράνες.

Σε τετραγωνική μορφή, η μη-αβελιανή δράση για τα πεδία ϕ^i και A_μ^A είναι

$$S_p = \int d^{p+1}\xi (-2) \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} D_\mu \phi^i D^\mu \phi_i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \right] \quad (7.18)$$

θεωρώντας ότι η αβελιανή εκδοχή είναι σωστή.

Κβάντωση της μποζονικής ανοικτής χορδής πάνω σε D- p -βράνες

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι μια ανοικτή χορδή είναι τεντωμένη μεταξύ δυο D-βρανών, οι οποίες βρίσκονται στα x_1^i και x_2^i (αφού οι D- p -βράνες καταλαμβάνουν τις $-$, $+$, $a = 2, \dots, p$ διαστάσεις, τότε η θέση τους θα προσδιορίζεται στις υπόλοιπες χωρικές διαστάσεις $i = p+1, \dots, d$).

Από το προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε ότι η συντεταγμένη X^- ικανοποιεί τους περιορισμούς Virasoro

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{(\dot{X}^I \pm X'^I)^2}{2p^+} = \frac{1}{2p^+} \left[(\dot{X}^a \pm X'^a)^2 + (\dot{X}^i \pm X'^i)^2 \right] \quad (7.19)$$

όπου διαχωρίσαμε τις $I = 2, \dots, d$ στις $a = 2, \dots, p$ και $i = p+1, \dots, d$ διαστάσεις, αφού πλέον μόνο οι a διαστάσεις είναι Neumann (πάνω στις D- p -βράνες) ενώ οι υπόλοιπες, i , είναι Dirichlet, αναφερόμενοι πάντα στα άκρα της ανοικτής χορδής, με αποτέλεσμα να πρέπει να τις χειριστούμε διαφορετικά. Συγκεκριμένα, οι NN συντεταγμένες X^a θα δίνονται, κατά τα γνωστά, από τη σχέση

$$X^a(\sigma, \tau) = x^a + 2\alpha' p^a \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^a e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right) \quad (7.20)$$

και θα ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\dot{X}^a \pm X'^a = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^a e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (7.21)$$

Όσον αφορά τις υπόλοιπες συντεταγμένες, εργαζόμαστε ως εξής. Όπως έχουμε δείξει, όλες οι συντεταγμένες X^μ ικανοποιούν την εξίσωση κίνησης

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \quad (7.22)$$

η λύνεται από την $X^\mu(\tau, \sigma) = f^i(\tau + \sigma) + g^i(\tau - \sigma)$. Παράλληλα, τα άκρα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

$$X^i(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = x_1^i \quad X^i(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = x_2^i \quad (7.23)$$

η πρώτη εκ των οποίων συνεπάγεται (με μια αναπαραμετροποίηση των συναρτήσεων κατά $1/2$) ότι

$$X^i(\tau, \sigma) = x_1^i + \frac{1}{2} \left(f^i(\tau + \sigma) - f^i(\tau - \sigma) \right) \quad (7.24)$$

ενώ η δεύτερη ότι

$$f^i(\tau + \pi) - f^i(\tau - \pi) = 2(x_2^i - x_1^i) \Rightarrow f^i(x + 2\pi) = f^i(x) + 2(x_2^i - x_1^i) \quad (7.25)$$

Άρα μπορούμε να αναπτύξουμε τις συναρτήσεις f^i κατά Fourier ως

$$f^i(x) = \frac{x}{\pi}(x_2^i - x_1^i) + \sum_{n \geq 1} \left(f_n^i \sin(nx) - \tilde{f}_n^i \cos(nx) \right) \quad (7.26)$$

η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη των X^i ως

$$X^i(\tau, \sigma) = x_1^i + \frac{x_2^i - x_1^i}{\pi} \sigma + \sum_{n \geq 1} \left(f_n^i \sin(n\tau) - \tilde{f}_n^i \cos(n\tau) \right) \sin(n\sigma) \quad (7.27)$$

Την έκφραση αυτή, μπορούμε να την εκφράσουμε ως ένα άθροισμα θετικών και αρνητικών όρων, δηλαδή ως

$$X^i(\tau, \sigma) = x_1^i + \frac{x_2^i - x_1^i}{\pi} \sigma + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i e^{-in\tau} \sin(n\sigma) \quad (7.28)$$

όπου παρατηρούμε ότι έχουμε τη δυνατότητα να εισάγουμε στο άθροισμα και τον όρο του σ ως έναν $n = 0$ (ή καλύτερα $n \rightarrow 0$) όρο, ορίζοντας

$$\alpha_0^i = \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}} (x_2^i - x_1^i) \quad (7.29)$$

Συνεπώς, όπως και στην περίπτωση των NN συντεταγμένων, υπολογίζουμε ότι

$$\dot{X}^i \pm X'^i = -\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^i e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (7.30)$$

Η κβάντωση πραγματοποιείται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα μας στην άλγεβρα που ορίζουμε να είναι η

$$\left[X^i(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau j}(\tau, \sigma') \right] = i\delta^{ij} \delta(\sigma - \sigma') \quad (7.31)$$

αποκτώντας έτσι την άλγεβρα των ταλαντωτών

$$\left[\alpha_m^i, \alpha_n^j \right] = m\delta^{ij} \delta_{m+n,0} \quad (7.32)$$

για $m, n \neq 0$. Οι περιορισμοί Virasoro οδηγούν στη σχέση

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} \left[\alpha' p^a p^a + \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^a \alpha_n^a + \alpha_{-n}^i \alpha_n^i) - 1 \right] \quad (7.33)$$

η οποία, με τη σειρά της, δίνει το ενεργειακό φάσμα της χορδής, αφού

$$\begin{aligned} M^2 &\equiv 2p^+ p^- - p^a p^a = \frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^i \alpha_0^i + \frac{1}{\alpha'} \left[\sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^a \alpha_n^a + \alpha_{-n}^i \alpha_n^i) - 1 \right] \\ &= \left(\frac{x_2^i - x_1^i}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1) \end{aligned} \quad (7.34)$$

όπου ορίσαμε τον τελεστή αρίθμησης, για τις κάθετες (στις βράνες) κατευθύνσεις, ως

$$N^\perp \equiv \sum_{n \geq 1} \sum_a n a_n^\dagger a_n^a + \sum_{m \geq 1} \sum_i m a_m^\dagger a_m^i \quad (7.35)$$

Η βασική κατάσταση είναι η

$$|p^+, p^a; [ij]\rangle \quad (7.36)$$

όπου τα $i, j = 1, 2$ αντιστοιχούν στις δυο D-βράνες, μεταξύ των οποίων είναι τεντωμένη η χορδή, όπου μπορούμε βέβαια να γενικεύσουμε σε N τιμές, δηλαδή για $i, j = 1, \dots, N$, εάν αναφερόμαστε σε N D-βράνες. Η βασική κατάσταση έχει τετραγωνισμένη μάζα

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} + \left(\frac{x_2^i - x_1^i}{2\pi\alpha'} \right)^2 \quad (7.37)$$

που σημαίνει ότι έχει μια άμαζη βαθμωτή βασική κατάσταση, όταν $|x_2^i - x_1^i| = 2\pi\sqrt{\alpha'}$.

Μια γενική κατάσταση αποκτάται με την δράση των a_n^\dagger και των a_n^\dagger πάνω στη βασική κατάσταση, δηλαδή

$$|\psi\rangle = \left[\prod_i \prod_{n \geq 1} \frac{(a_n^\dagger)^{N_{in}}}{\sqrt{N_{in}!}} \right] \left[\prod_a \prod_{m \geq 1} \frac{(a_m^\dagger)^{N_{am}}}{\sqrt{N_{am}!}} \right] |p^+, p^a; [ij]\rangle \quad (7.38)$$

Συνεπώς, η πρώτη διεγερμένη κατάσταση έχει τετραγωνισμένη μάζα

$$M^2 = \left(\frac{x_2^i - x_1^i}{2\pi\alpha'} \right)^2 \quad (7.39)$$

και συντίθεται από τις επιμέρους καταστάσεις

$$a_1^\dagger |p^+, p^a; [ij]\rangle \quad a_1^\dagger |p^+, p^a; [ij]\rangle \quad (7.40)$$

όπου $i = p + 1, \dots, d$ και $a = 2, \dots, p$.

Οι πρώτες είναι βαθμωτά πεδία ϕ^i από την άποψη των D-βρανών, ενώ οι δεύτερες σχηματίζουν μια διανυσματική κατάσταση A^μ , με $\mu = 0, 1, a$.

Στην υπερσυμμετρική περίπτωση, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ταχυονική βασική κατάσταση εξαφανίζεται και πλέον βασική κατάσταση είναι η πρώτη διεγερμένη, η οποία αποτελείται από τις παραπάνω επιμέρους καταστάσεις. Παρατηρούμε ότι για συμπίπτουσες βράνες, οι καταστάσεις αυτές είναι άμαζες και περιγράφουν βαθμωτά πεδία ϕ^i και ένα πεδίο βαθμίδας A_μ , όπως ακριβώς είχαμε περιγράψει στην τελευταία ενότητα τούτου του κεφαλαίου.

Κι ενώ κατανοούμε καλά πλέον την κατασκευή ενός άμαζου πεδίου βαθμίδας στο world-volume μιας ή περισσοτέρων D- p -βρανών, αξίζει να προσέξουμε και την περίπτωση με μάζα. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε τις μαζικές καταστάσεις (7.40) της πρώτης διεγερμένης κατάστασης, με μάζα (7.39). Η διανυσματική κατάσταση A^μ εμπεριέχει $p - 1$ βαθμούς ελευθερίας ($p - 1$ ταλαντωτές $a_1^{\dagger a}$, $a = 2, \dots, p$) μέσα στις $p + 1$ διαστάσεις, $\mu = 0, \dots, p$, του world-volume της βράνης, δηλαδή ότι πρέπει για ένα άμαζο και όχι μαζικό διάνυσμα. Για να περιγράψει το σύνολο αυτό των καταστάσεων ένα μαζικό διάνυσμα χρειάζεται ένας επιπλέον βαθμός ελευθερίας, δηλαδή μια επιπλέον κατάσταση. Προφανώς, η κατάσταση αυτή μπορεί μονάχα να κλαπεί από τα βαθμωτά πεδία ϕ^i .

Τώρα, εάν $p = d - 1$, δηλαδή οι δυο D-βράνες να καταλαμβάνουν όλο τον d -διάστατο χώρο εκτός μιας χωρικής διάστασης, η οποία και διαχωρίζει τις βράνες αυτές, τότε $i = p + 1$ και υπάρχει μονάχα ένα βαθμωτό πεδίο να απορροφηθεί ως ο αναγκαίος βαθμός ελευθερίας για τον σχηματισμό του μαζικού διανύσματος A^μ . Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε και διαφορετικά: εφ' όσον οι δυο D-βράνες ενώνονται με την ανοικτή χορδή, τότε η χορδή (και άρα η χωρική διάσταση που ενώνει τις βράνες) είναι μέρος του world-volume των D-βρανών αυτών και άρα η κατάσταση που αντιστοιχεί στον ταλαντωτή $a_1^{\dagger i}$, $i = p + 1$, θεωρείται κι αυτή κατάσταση του world-volume των βρανών και όχι «κλεμμένη» με κάποιον μεταφυσικό τρόπο!

Εάν πάλι $p < d - 1$, τότε οι δυο βράνες διαχωρίζονται σε περισσότερες της μιας χωρικές διαστάσεις. Συγκεκριμένα, μπορούμε να πούμε ότι τις ενώνει ένα χωρικό διάνυσμα $x_2^i - x_1^i$ και τότε, κατά την παραπάνω συλλογιστική, η

κατάσταση που θα ανήκει πλέον στο world-volume των δυο βρανών και όχι στις κάθετες, σε αυτές, διαστάσεις (που σχηματίζουν τα βαθμωτά πεδία της πρώτης διεγερμένης κατάστασης) δεν είναι άλλη από τον γραμμικό συνδυασμό

$$\sum_i (x_2^i - x_1^i) a_1^{\dagger i} |p^+, p^a; [12]\rangle \quad (7.41)$$

ο οποίος και είναι, φυσικά, μοναδικός.

7.3 Πολλαπλές D3-βράνες και το όριο $\mathcal{N} = 4$ SYM

Συνοψίζοντας τις προηγούμενες ενότητες, τα άμαζα πεδία μιας ανοικτής χορδής που καταλήγει σε συμπίπτουσες D-βράνες είναι τα βαθμωτά πεδία ϕ^i και τα πεδία βαθμίδας A^μ , ενώ η τετραγωνική δράση τους δίνεται από την σχέση (7.18).

Τώρα αναλογιζόμαστε το εξής. Εάν θέλουμε να αποκτήσουμε τα γνωστά μας πεδία βαθμίδας A^μ με $\mu = 0, 1, 2, 3$, δηλαδή σε 4-διάστατο χωρόχρονο, τότε η D- p -βράνη που τα φιλοξενεί θα πρέπει να εκτείνεται σε $p = 3$ χωρικές διαστάσεις, ώστε να σχηματίζει ένα $p + 1 = 4$ -διάστατο world-volume, τουτέστιν μια D3-βράνη.

Θεωρούμε, λοιπόν, D3-βράνες στην type IIB θεωρία υπερχορδών³, η οποία ζεί στις $D = 10$ διαστάσεις. Έπεται ότι προκύπτουν $10 - (3+1) = 6$ βαθμωτά πεδία ϕ^i και ένα πεδίο βαθμίδας A^μ στο world-volume των βρανών, μαζί με τα φερμιόνια τα οποία και συμπληρώνουν το υπερσυμμετρικό multiplet.

Εν ολίγοις, έχουμε έξι βαθμωτά πεδία τα οποία έχουν έξι on-shell βαθμούς ελευθερίας και ένα 4-διάστατο πεδίο βαθμίδας με δυο on-shell βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή ένα σύνολο από οκτώ μποζονικούς on-shell βαθμούς ελευθερίας. Από την άλλη, ένα ελάχιστο 4-διάστατο φερμιόνιο (όπως το Majorana) έχει δυο on-shell βαθμούς ελευθερίας, το οποίο σημαίνει ότι για μια υπερσυμμετρική θεωρία χρειαζόμαστε τέσσερα φερμιόνια ψ^I , $I = 1, \dots, 4$. Για N συμπίπτουσες D3-βράνες, όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, τα πεδία μετασχηματίζονται στην adjoint αναπαράσταση της $U(N)$ ομάδας βαθμίδας, κατασκευάζοντας έτσι ένα πεδιακό περιεχόμενο $A_\mu^A, \phi^{iA}, \psi^{IA}$, το οποίο συμπίπτει ακριβώς με αυτό της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας.

Αυτό που δείξαμε, τελικά, είναι ότι το χαμηλοενεργειακό όριο ($\alpha' \rightarrow 0$) της type IIB θεωρίας υπερχορδών, δηλαδή της type IIB υπερβαρύτητας (αφού επιλέξαμε να έχουμε μονάχα τα άμαζα πεδία της πρώτης διεγερμένης κατάστασης της χορδής), έχει κοινό πεδιακό περιεχόμενο με την $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία. Το γεγονός αυτό, αργότερα, θα αιτιολογήσει την επιλογή της $\mathcal{N} = 4$ SYM ως την

³Όπως δείξαμε στη θεωρία χορδών, είναι η type-IIB υπερβαρύτητα που εμπεριέχει μια A_4 φόρμα, η οποία εκφράζει το δυναμικό μιας φορτισμένης 3-βράνης. Οπότε, η type-IIB θεωρία χορδών είναι η κατάλληλη για να φιλοξενηθούν οι D3-βράνες.

κατάλληλη σύμμορφη θεωρία πεδίου, δυϊκή της type IIB θεωρίας υπερχορδών εμπλουτισμένης με D3-βράνες, για την αντιστοιχία AdS/CFT.

Η δράση για πολλαπλές συμπίπτουσες D3-βράνες και το όριο του ηλεκτρικού πεδίου

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η τετραγωνική δράση για N D3-βράνες είναι, εν τέλει, η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία. Η πλήρης δράση για πολλαπλές, συμπίπτουσες D-βράνες είναι, εν γένει, άγνωστη. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να γράψουμε την πλήρη δράση για μια D3-βράνη, η οποία θα είναι η δράση DBI παρέα με μια σταθερή RR πεδιακή φόρμα $A_{\mu\nu\rho\sigma}^+$, η οποία εκφράζει το πεδίο για μια φορτισμένη D3-βράνη, ακριβώς όπως μια φόρμα A_μ εκφράζει το πεδίο ενός σημειακού φορτίου (δηλαδή μιας D0-βράνης). Η φόρμα αυτή, όπως είχαμε δείξει στο κεφάλαιο των μελανών οπών για τις φορτισμένες p -βράνες, εκφράζεται από έναν όρο σύζευξης με μια πηγή ως

$$\int d^D x j^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \mu_p \int d^{p+1} \xi A_{01 \dots p} \equiv \mu_p \int_{p+1} A_{(p+1)} \quad (7.42)$$

όπου μ_p είναι το φορτίο, για $p = 3$. Γενικά, για να ακυρώνεται ο σταθερός όρος της σχέσης (7.7)⁴, θέτουμε $\mu_p = T_p$ και, τελικά, αποκτάμε έναν όρο Wess-Zumino

$$\int d^{1+3} x T_3 A_{0123}^+ = T_3 \int d^{1+3} x \quad (7.43)$$

όπου εφ' όσον έχουμε υποθέσει ότι η φόρμα είναι σταθερή, την κανονικοποιήσαμε στη μονάδα, κατά τη γνωστή αρχή της τεμπελιάς. Τελικά, έχουμε την μποζονική δράση DBI

$$S_{bosonic} = -T_3 \int d^{1+3} x \left(\sqrt{-\det(\eta_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} - 1 \right) \quad (7.44)$$

⁴Εάν δεν ακυρώνεται και έχουμε έναν σταθερό όρο στη δράση, αυτός ο όρος είναι μια κοσμολογική σταθερά, δηλαδή μια συνθήκη βαρύτητας και όχι επίπεδου χώρου, τον οποίο χρειαζόμαστε για διατήρηση της υπερσυμμετρίας.

Αγνοώντας τον παράγοντα $2\pi\alpha'$ για λίγο, ο πίνακας που σχηματίζεται για την ορίζουσα, για $F_{0i} = -E_i$ και $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$, είναι

$$M_{ab} = \eta_{ab} + F_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & +1 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & +1 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & +1 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

Η ορίζουσα του είναι

$$-\det M_{ab} = 1 - (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \quad (7.46)$$

Παράλληλα, εφ' όσον

$$\frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \equiv -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \quad (7.47)$$

μπορούμε να εκφράσουμε τη μποζονική δράση, επανεμφανίζοντας τον παράγοντα $2\pi\alpha'$, ως

$$S_{bosonic} = -T_3 \int d^{1+3}x \left(\sqrt{1 + (2\pi\alpha')^2 \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2} - (2\pi\alpha')^4 \left(\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \right)^2} - 1 \right) \quad (7.48)$$

Από την άλλη, συναρτήσει των πεδίων \vec{E} και \vec{B} , εκφράζεται ως

$$S = -T_3 \int d^{1+3}x \left(\sqrt{1 + (2\pi\alpha')^2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - (2\pi\alpha')^4(\vec{E} \cdot \vec{B})^2} - 1 \right) \quad (7.49)$$

όπου εάν θέσουμε $\vec{B} = 0$ και απαιτήσουμε το υπόριζο να είναι θετικό, ώστε να η δράση να είναι πραγματική, τότε αποκτάμε το πολυπόθητο όριο για το ηλεκτρικό πεδίο

$$|\vec{E}| \leq \frac{1}{2\pi\alpha'} \equiv E_{crit}. \quad (7.50)$$

το οποίο επιβεβαιώνει ότι η DBI θεωρία έχει μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο, επίσης, οδηγεί σε μέγιστη ενεργειακή πυκνότητα και εξαφανίζει τους απειρισμούς.

Μέρος II

Η αντιστοιχία AdS/CFT

Κεφάλαιο 8

Η αντιστοιχία AdS/CFT: έννοια και ορισμός

Ήρθε, επιτέλους, η στιγμή να ορίσουμε την περίφημη αντιστοιχία AdS/CFT. Τουτέστιν, μια ισοδυναμία ανάμεσα σε μια θεωρία χορδών, η οποία είναι μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας, που ζεί στον χώρο AdS, και μια σύμμορφη θεωρία πεδίου, δηλαδή μια κβαντική θεωρία πεδίου αναλλοίωτη υπό τους σύμμορφους μετασχηματισμούς.

Κατά τα πρώτα κεφάλαια, είδαμε διάφορες ενδείξεις υπέρ της ύπαρξης μιας τέτοιας αντιστοιχίας, με κυριότερες την κοινή ομάδα συμμετρίας $SO(2, d)$ ανάμεσα στον d -διάστατη σύμμορφη θεωρία πεδίου και τον χώρο AdS_{d+1} , αλλά και το κοινό πεδιακό περιεχόμενο των D3-βρανών και της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας. Η αντιστοιχία που θα ορίσουμε σε αυτή την εργασία είναι μια αντιστοιχία ανάμεσα σε μια 10-διάστατη θεωρία χορδών, που ζεί στον χώρο $AdS_5 \times S^5$, και στην σύμμορφη θεωρία πεδίου $\mathcal{N} = 4$ SYM. Όσο προχωράμε στην κατασκευή της αντιστοιχίας αυτής, θα μας γίνονται φανερές τόσο οι συγκεκριμένες επιλογές θεωρίας χορδών και πεδίου, όσο και η εννοιολογική ομορφιά του ενοποιητικού αυτού πλαισίου.

Πρώτα απ' όλα, πριν αρχίσουμε να χτίζουμε μια ισοδυναμία ανάμεσα σε δυο θεωρίες Φυσικής, πρέπει να ελέγξουμε αν συμφωνούν τα θεμέλια στα οποία στηρίζονται: οι ομάδες συμμετρίας τους. Αυτό είναι εύκολο να το καταλάβουμε, καθώς μια ομάδα μετασχηματισμών που αφήνει αναλλοίωτα κάποια φυσικά αντικείμενα μιας θεωρίας, θα πρέπει να αφήνει επίσης αναλλοίωτα κάποια άλλα αντίστοιχα αντικείμενα μιας δεύτερης θεωρίας, εάν αυτές οι δυο διεκδικούν να

είναι όντως ισοδύναμες. Ο έλεγχος είναι, εμφανώς, επιτυχής. Ο χώρος AdS_5 είναι συμμετρικός υπό την ομάδα $\text{SO}(2, 4)$, όπως ακριβώς και μια 4-διάστατη σύμμορφη θεωρία πεδίου, ενώ η 5-διάστατη σφαίρα, S^5 , είναι συμμετρική υπό την ομάδα $\text{SO}(6) \simeq \text{SU}(4)$, η οποία είναι και η ομάδα R-συμμετρίας της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας.

Συγκεκριμένα, η $\text{SO}(2, 4)$ είναι ομάδα συμμετρίας τόσο του AdS_5 όσο και του ορίου του, $\partial(\text{AdS}_5)$, το οποίο είναι ένας $(5 - 1 = 4)$ -διάστατος χώρος. Όπως είχαμε δείξει, το όριο του Ευκλείδειου AdS_{d+1} (Lobachevsky) χώρου είναι, σε Poincaré συντεταγμένες, ο \mathbb{R}^d , και σε παγκόσμιες συντεταγμένες ο $\mathbb{R}^t \times S^{d-1}$. Είχαμε, επίσης, δείξει ότι οι δυο αυτοί οριακοί χώροι είναι σύμμορφοι μεταξύ τους και, οπότε, ισοδύναμοι στα μάτια μιας σύμμορφης θεωρίας πεδίου. Συνεπώς, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι μια θεωρία βαρύτητας στον AdS χώρο μπορεί να είναι ισοδύναμη με μια σύμμορφη θεωρία πεδίου στο όριο του χώρου αυτού.

Η αντιστοιχία AdS/CFT συχνά αναφέρεται ως *ολογραφία*. Όπως είχαμε δει στο πρώτο κεφάλαιο, μια ακτίνα φωτός που ξεκινά από ένα γενικό σημείο στο εσωτερικό του χώρου AdS, ταξιδεύει πεπερασμένο χρόνο για να φτάσει στο όριο του χώρου ($\int dt = \int^\infty e^{-y} dy < \infty$), όπου ανακλάται και επιστρέφει στον εσωτερικό χώρο πάλι σε πεπερασμένο χρόνο. Τουτέστιν, εάν εξαιρέσουμε τον εσωτερικό κύλινδρο του διαγράμματος Penrose του χώρου AdS σε παγκόσμιες συντεταγμένες (ή, ισοδύναμη, το ψευδο-όριο του σε συντεταγμένες Poincaré), μιας και χρειάζεται άπειρος χρόνος για να φτάσουμε στο κέντρο του χώρου, τότε αποκτάμε έναν χώρο όπου το φως ταξιδεύει σε πεπερασμένο χρόνο μεταξύ ορίων, κατάσταση παρόμοια με αυτή του κβαντομηχανικού κουτιού. Εν τέλει, αυτό είναι και μια ολογραφική θεωρία: το όριο του χώρου της είναι σε αιτιακή σχέση με το εσωτερικό του.

Βέβαια, το γεγονός ότι το όριο απέχει πεπερασμένη απόσταση από το εσωτερικό συνεπάγεται ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε, όπως έχουμε συνηθίσει, ασυμπτωτικές καταστάσεις και, συνεπώς, η έννοια του S-πίνακα δεν είναι καλά ορισμένη στον χώρο AdS. Θα δούμε ότι, εναλλακτικά, καλά ορισμένα αντικείμενα είναι οι συναρτήσεις συσχέτισης πεδίων, με πηγές στο όριο του χώρου, τις οποίες και θα εξερευνήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

8.1 Η ισοδυναμία μεταξύ D-βρανών και ακραίων μελανών p -βρανών

Το πρώτο βήμα προς την αντιστοιχία AdS/CFT είναι η παρατήρηση ότι η D-βράνη της θεωρίας χορδών είναι το ίδιο αντικείμενο με την ακραία μελανή p -βράνη της (υπερ)βαρύτητας. Υπενθυμίζουμε ότι οι D-βράνες είναι δυναμικά αντικείμενα στη θεωρία χορδών, πάνω στα οποία μπορούν να καταλήγουν ανοικτές χορδές. Στην ουσία, οι D-βράνες, είναι συνοριακές συνθήκες, που προκύπτουν φυσιολογικά στη θεωρία των ανοικτών χορδών, και όχι ξεχωριστά, επιπρόσθετα αντικείμενα μέσα στη θεωρία αυτή. Αυτόνομη υπόσταση αποκτούν μέσα από την ταύτιση τους αυτή με τις ακραίες μελανές p -βράνες. Οι ακραίες μελανές p -βράνες, όπως είχαμε εξηγήσει, είναι λύσεις της (υπερ)βαρύτητας¹ οι οποίες καμπυλώνουν τον χωρόχρονο και οι οποίες, εφ' όσον είναι ακραίες, κορηννύουν τη συνθήκη BPS: ο οριζοντάς τους συμπίπτει με την μοναδικότητα τους ($M = Q$).

Το 1995, ο Polchinski έδειξε ότι οι D-βράνες και οι μελανές ακραίες p -βράνες είναι όντως ένα και το αυτό, υπολογίζοντας και ταυτοποιώντας τις τάσεις και τα φορτία τους.

Συνεπώς, οι D-βράνες καμπυλώνουν τον χώρο, ενώ N συμπίπτουσες D3-βράνες αντιστοιχούν στη λύση της υπερβαρύτητας για τη ακραία μελανή 3-βράνη

$$ds^2 = H^{-1/2}(r) d\vec{x}_{\parallel}^2 + H^{1/2}(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}; \quad R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2; \quad Q = M = g_s N \quad (8.1)$$

φορτισμένη με μια πεδιακή φόρμα A_4 , πεδιακής δύναμης $F_5 = F_{\mu_1 \dots \mu_5} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_5}$.

Ο λόγος που μια ακραία μελανή p -βράνη ισοδυναμεί με N D-βράνες και όχι μονάχα με μια είναι απλός. Μια D-βράνη έχει μάζα (αφού έχει τάση - ενέργεια), η οποία όμως είναι τόσο ανεπαίσθητη ώστε η καμπύλωση που προκαλεί είναι ορατή μονάχα σε αποστάσεις μήκους Planck. Συνεπώς, ακόμα και με τη βαρύτητα να είναι αδύναμη, δηλαδή τη σταθερά σύζευξης g_s μικρή, απειροστά

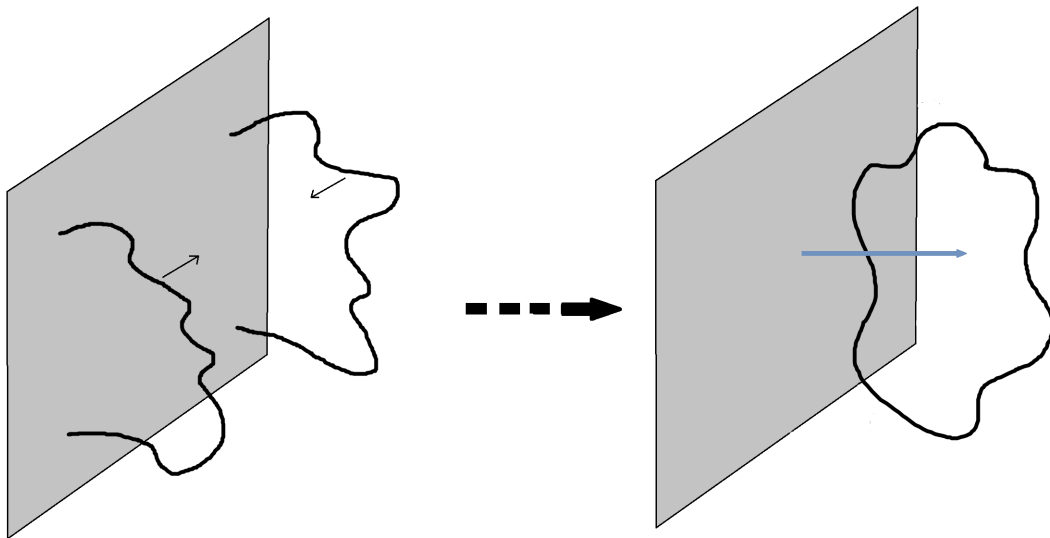
¹Όπως είχαμε δείξει, είναι, παράλληλα, λύσεις της βαρύτητας και της υπερβαρύτητας.

πολλές D-βράνες θα δημιουργούν ένα αισθητό βαρυτικό πεδίο ανάλογο του γινομένου $g_s N$ (προερχόμενο από το $G_N \cdot M$), τουτέστιν με $g_s \rightarrow 0$ και $N \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε το $g_s N$ πεπερασμένο και μεγάλο.

Εάν φύγουμε ελάχιστα μακριά από το όριο $Q = M$, προστίθοντας μια μικρή μάζα δM , η παραπάνω λύση αναπτύσσει έναν οριζοντα γεγονότων σε ένα μικρό $r_0 > 0$, όποτε, όπως και στη λύση Schwarzschild, εκπέμπει ακτινοβολία Hawking.

Ακτινοβολία Hawking

Εφ' όσον η ακραία μελανή p -βράνη είναι μια στοίβα από D-βράνες, τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την διαδικασία της ακτινοβολίας Hawking μιας σχεδόν-ακραίας μελανής p -βράνης (που έχει αναπτύξει έναν μικρό οριζοντα) με την εξής διαδικασία, στην εικόνα της D-βράνης: δυο ανοικτές χορδές που υπάρχουν πάνω στη D-βράνη συγκρούονται και σχηματίζουν μια κλειστή χορδή, η οποία δεν ανοίγει στη D-βράνη και φεύγει να βοσκήσει στο χωρόχρονο ως ακτινοβολία Hawking, όπως αναπαριστά το παρακάτω σχήμα.



8.2 Βαρύτητα και $\mathcal{N} = 4$ SYM

Από την αντιστοίχιση αυτή της ακτινοβολίας Hawking ανάμεσα στις δυο εικόνες, της σχεδόν-ακραίας μελανής p -βράνης και της D-βράνης, κατανοούμε ότι πρέπει να υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη θεωρία των ανοικτών χορδών που ζούν πάνω στις D-βράνες, τουτέστιν την $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία με ομάδα βαθμίδας την $SU(N)$, και την θεωρία βαρύτητας που αντιστοιχεί σε πεδία της ακτινοβολίας Hawking που ζουν στο υπόβαθρο (8.1), το οποίο είναι καμπυλωμένο από τις D3-βράνες.

Η πρώτη ισχυρή ένδειξη της αντιστοιχίας AdS/CFT προκύπτει από την αντίθεση αυτή της θεωρίας των D-βρανών στις δυο εικόνες: ως συνοριακές επιφάνειες των ανοικτών χορδών ή ως λύσεις της βαρύτητας, δυο ξέχωρες εικόνες μέσα από τα κοινά κυάλια της ακτινοβολίας Hawking.

1η άποψη

Η άποψη όπου οι D3-βράνες είναι συνοριακές επιφάνειες, έχει το εξής περιεχόμενο:

- Οι ανοικτές χορδές ζούν πάνω στις D3-βράνες. Στο χαμηλο-ενεργειακό όριο η θεωρία αυτή ελλατώνεται στη $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία.
- Οι κλειστές χορδές ζούν στον υπόλοιπο χωρόχρονο, δίνοντας υπερβαρύτητα (το χαμηλο-ενεργειακό όριο της θεωρίας των κλειστών χορδών) συζευγμένη με μαζικά modes της κλειστής χορδής. Στο χαμηλο-ενεργειακό όριο απομένει μονάχα η υπερβαρύτητα.
- Η αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο, η οποία είναι η ακτινοβολία Hawking.

Συγκεκριμένα, στο χαμηλο-ενεργειακό όριο, μπορούμε να ξεχάσουμε και την ακτινοβολία Hawking καθώς $S_{int} \propto g_s \alpha'^2 \rightarrow 0$, με αποτέλεσμα να αποκτήμα, απλώς, δυο ξεχωριστά συστήματα:

- Ελεύθερη (μη αλληλεπιδρώσα) βαρύτητα στο χωρόχρονο
- 4-διάστατη $\mathcal{N} = 4$ θεωρία βαθμίδας πάνω στις D3-βράνες

2η άποψη

Η άποψη όπου οι D3-βράνες είναι οι μελανές p -βράνες της υπερβαρύτητας, μπο-

ρεί να εξεταστεί με τον εξής τρόπο. Η ενέργεια που θα μετράει ένας παρατηρητής κοντά στην p -βράνη, E_p , για $r \rightarrow 0$, και η ενέργεια E που θα μετράει ένας παρατηρητής στο άπειρο, θα σχετίζονται ως

$$E_p \rightarrow i \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{i}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} E \quad (8.2)$$

$$\Rightarrow E = H^{-1/4} E_p \propto r E_p$$

όπου για δεδομένη τιμή του E_p , για $r \rightarrow 0$, η ενέργεια που μετράμε στο άπειρο τήνει στο μηδέν. Έπειτα, στο άπειρο, $r \rightarrow \infty$, η αδιάστατη βαρυτική σύζευξη $G_N E^2 \rightarrow 0$ όταν $E \rightarrow 0$, που σημαίνει ότι η βαρύτητα είναι ελεύθερη εκεί. Δηλαδή, έχουμε πάλι δυο ξεχωριστά² χαμηλο-ενεργειακά συστήματα:

- Ελεύθερη βαρύτητα στο χωρόχρονο ($r \rightarrow \infty$)
- Βαρύτητα για $r \rightarrow 0$

Συνοψίζοντας τις δυο απόψεις, έχουμε για την καθεμία δυο χαμηλο-ενεργειακά συστήματα. Μακριά από τις βράνες, έχουμε και στις δυο περιπτώσεις ελεύθερη βαρύτητα. Συνεπώς, τα δυο εναπομείναντα συστήματα πρέπει να είναι κι αυτά ισοδύναμα, τουτέστιν:

$H \mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία με ομάδα βαθμίδας την $SU(N)$, για μεγάλο N ,

είναι ισοδύναμη με

τη θεωρία βαρύτητας για $r \rightarrow 0$, στο υπόβαθρο της μελανής 3-βράνης

Αυτό ονομάζουμε αντιστοιχία AdS/CFT, αλλά σε αυτό το στάδιο είναι απλά μια δήλωση που περιμένει αγωνιωδώς να θεμελιωθεί αυστηρότερα.

²Το ότι τα συστήματα αυτά είναι μη αλληλεπιδρώντα είναι μη τετριμμένο. Πρέπει να δείξουμε ότι ένα κύμα στο $r \rightarrow 0$ δεν μπορεί να διαφύγει του βαρυτικού πεδίου.

8.3 Ο χώρος $\text{AdS}_5 \times S^5$ και το όριο του

Παίρνουμε την σκυτάλη από την προηγούμενη ενότητα και ορίζουμε την αντιστοιχία AdS/CFT με τρόπο γεωμετρικό. Συγκεκριμένα, βρήκαμε ότι η $\mathcal{N} = 4$ SYM είναι ισοδύναμη με τη θεωρία βαρύτητας, για $r \rightarrow 0$, στο υπόβαθρο των D3-βρανών. Το υπόβαθρο (8.1) των D3-βρανών, για $r \rightarrow 0$, έχει αρμονική συνάρτηση $H \simeq R^4/r^4$, οπότε και παίρνουμε τη οριακή λύση της υπερβαρύτητας

$$ds^2 \simeq \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}_3^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2 \quad (8.3)$$

όπου με την αλλαγή συντεταγμένων $r/R \equiv R/x_0$, αυτή γίνεται

$$ds^2 = R^2 \frac{-dt^2 + d\vec{x}_3^2 + dx_0^2}{x_0^2} + R^2 d\Omega_5^2 \quad (8.4)$$

η οποία είναι η μετρική του χώρου $\text{AdS}_5 \times S^5$ σε συντεταγμένες Poincarè.

Από την άποψη της λύσης αυτής του υποβάθρου της υπερβαρύτητας, η θεωρία βαθμίδας ζεί στην αρχική μετρική, πριν πάρουμε το όριο $r \rightarrow 0$. Εφόσον, λοιπόν, πήραμε το όριο αυτό και προέκυψε ο οριακός χώρος $\text{AdS}_5 \times S^5$, η θεωρία βαθμίδας θα ζει στο όριο $r \rightarrow \infty$ του οριακού αυτού χώρου. Θα ζεί, δηλαδή, στο όριο $x_0 \rightarrow 0$, το οποίο, όπως είχαμε δείξει στο πρώτο κεφάλαιο, είναι μέρος του πραγματικού ορίου του global AdS χώρου. Όπως παρατηρούμε στην παραπάνω Poincarè μετρική, το όριο $x_0 \rightarrow 0$ είναι ένας χώρος Minkowski.

Συμπερασματικά, η θεωρία βαρύτητας (δηλαδή η θεωρία χορδών, η οποία στις χαμηλές ενέργειες ελαττώνεται σε μια υπερβαρύτητα) ζεί στον χώρο $\text{AdS}_5 \times S^5$, ενώ η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία ζεί στο 4-διάστατο, οριακό του AdS_5 , χώρο Minkowski.

Έπειτα, μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα το χαμηλο-ενεργειακό όριο $\alpha' \rightarrow 0$. Όπως δείξαμε, για να ισχύει όντως ότι $E \propto r E_p \rightarrow 0$, μεταβήκαμε στο $r \rightarrow 0$. Παράλληλα, όμως, το $E_p \sqrt{\alpha'}$ (σε μονάδες της χορδής) πρέπει να μένει σταθερό. Η ενέργεια στο άπειρο είναι, ξανά,

$$E = E_p H^{-1/4} \propto E_p r / \sqrt{\alpha'} \quad (8.5)$$

όπου εκεί, βέβαια, ζεί η θεωρία βαθμίδας, με αποτέλεσμα η ενέργεια E να πρέπει να είναι κι αυτή σταθερή. Δηλαδή, αφού το $E_p\sqrt{\alpha'} \sim E\alpha'/r$ πρέπει να είναι σταθερό, τότε η ποσότητα

$$U \equiv \frac{r}{\alpha'} \quad (8.6)$$

είναι κι αυτή σταθερή, για $\alpha' \rightarrow 0$ και $r \rightarrow 0$, και μπορεί να νοηθεί ως μια κλίμακα ενέργειας στη θεωρία βαθμίδας, εφ' όσον δείξαμε ότι το E/U είναι σταθερό. Το γεγονός αυτό, η σχέση δηλαδή της πέμπτης διάστασης του AdS_5 χώρου και της κλίμακας ενέργειας της θεωρίας βαθμίδας, θα επιβεβαιωθεί αρκετές φορές, όσο προχωράμε στη θεμελίωση της αντιστοιχίας AdS/CFT .

Έτσι, η μετρική μπορεί να γραφτεί ($R^4 = \alpha'^2 4\pi g_s N$)

$$ds^2 = \alpha' \left[\frac{U^2}{\sqrt{4\pi g_s N}} (-dt^2 + d\vec{x}_3^2) + \sqrt{4\pi g_s N} \left(\frac{dU^2}{U^2} + d\Omega_5^2 \right) \right] \quad (8.7)$$

όπου $\alpha' \rightarrow 0$, αλλά η ποσότητα μέσα στις αγκύλες είναι πεπερασμένη.

Στη θεωρία βαρύτητας, το N είναι ο αριθμός των D3-βρανών και το g_s είναι η σταθερά σύζευξης της χορδής. Στη θεωρία βαθμίδας, το N είναι η τάξη της ομάδας $\text{SU}(N)$, ενώ το g_s σχετίζεται με τη σταθερά σύζευξης της Yang-Mills θεωρίας ως

$$4\pi g_s = g_{YM}^2 \quad (8.8)$$

καθώς το g_{YM} είναι η σύζευξη του πεδίου βαθμίδας A_μ^a , το οποίο είναι, παράλληλα, το άμαζο mode της ανοικτής χορδής που ζεί πάνω στις D3-βράνες, με αποτέλεσμα να ταυτοποιούμε ότι $g_{YM} = g_o$, ενώ η σχέση της σύζευξης κλειστής-ανοικτής χορδής, όπως έχουμε περιγράψει, είναι $g_s = g_o^2$.

Τέλος, ξανα-υπενθυμίζοντας ότι η θεωρία χορδών, για $\alpha' \rightarrow 0$, γίνεται το χαμηλο-ενεργειακό της όριο, η υπερβαρύτητα, μπορούμε να εξάγουμε ότι: η αντιστοιχία AdS/CFT συνδέει τη θεωρία χορδών, στο όριο της υπερβαρύτητας, στο υπόβαθρο (8.7), με την $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία, με ομάδα βαθμίδας $\text{SU}(N)$, η οποία ζεί στο 4-διάστατο όριο του υποβάθρου αυτού της υπερβαρύτητας.

8.4 Όρια εγκυρότητας της υπερβαρύτητας

Για να δικαιούμαστε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της υπερβαρύτητας, στη θεωρία χορδών, πρέπει να ισχύει ότι:

- Η καμπυλότητα του υποβάθρου (8.7) πρέπει να είναι μικρή, τουτέστιν η ακτίνα καμπυλότητας να είναι μεγάλη, συγκριτικά με το μήκος της χορδής, $R = \sqrt{\alpha'}(4\pi g_s N)^{1/4} \gg \sqrt{\alpha'} = l_s$, ώστε να αποφύγουμε τις κβαντικές διορθώσεις του world-sheet της χορδής (διορθώσεις του α'). Αυτό σημαίνει ότι είμαστε στο όριο $g_s N \gg 1$ (ή $g_{YM}^2 \gg 1$).
- Οι κβαντικές διορθώσεις της χορδής, που κυβερνώνται από τη σύζευξη g_s , πρέπει να είναι μικρές, τουτέστιν $g_s \rightarrow 0$.

Συνεπώς, για να είναι έγκυρη η υπερβαρύτητα, πρέπει να έχουμε $g_s \rightarrow 0$ και $N \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε το $g_s N = g_{YM}^2 N$ να είναι σταθερό και μεγάλο ($\gg 1$). Παρατηρούμε, ενθουσιασμένοι, ότι η απαίτηση για μεγάλο N συμβαδίζει με την κατασκευή της μελανής 3-βράνης, στην δεύτερη ενότητα.

Στο όριο του μεγάλου N , ο t' Hooft απέδειξε ότι οι θεωρίες βαθμίδας, με adjoint πεδία, έχουν ως παραμέτρους (διαταρακτικής) ανάπτυξης την ενεργό ή t' Hooft σύζευξη $\lambda = g_{YM}^2 N$ και το $1/N$. Η εξάρτηση των πλατών πιθανότητας από τις παραμέτρους αυτές είναι

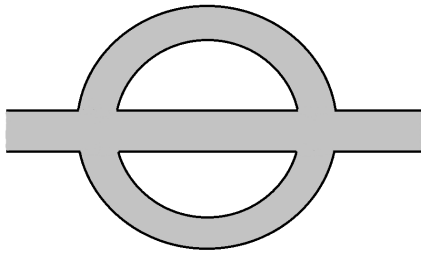
$$\sim (g_{YM}^2 N)^L N^\chi \quad (8.9)$$

όπου L είναι ο αριθμός των loops του διαγράμματος Feynman και $\chi = 2 - 2h - l$ είναι η χαρακτηριστική του Euler πάνω στην επιφάνεια του διαγράμματος, με h τον αριθμό των «λαβών» (εκτός επιπέδου) της επιφανείας και l τον αριθμό των εξωτερικών πεδιακών γραμμών. Η έκφραση αυτή προκύπτει από μια πιο εύκολη, την

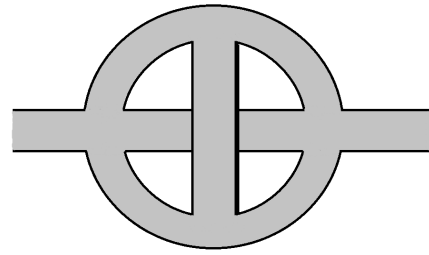
$$g_{YM}^{V_3+2V_4} N^I \quad (8.10)$$

όπου V_3 ο αριθμός των vertices τριών gluons, οι οποίοι συνοδεύονται από έναν παράγοντα g_{YM} , V_4 ο αριθμός των vertices τεσσάρων gluons, οι οποίοι συνοδεύονται από έναν παράγοντα g_{YM}^2 , και I ο αριθμός των index loops, τα οποία είναι

μια κλειστή γραμμή στη σημειογραφία διπλής γραμμής του t' Hooft. Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα, έχουμε δυο παραδείγματα διαγραμμάτων Feynman στη σημειογραφία διπλής γραμμής.



$$\sim (g^2)^2 N^2 = (g^2 N)^2$$



$$\sim (g^2)^2 g^2 N = (g^2 N)^2 \frac{1}{N^2}$$

Στη σημειογραφία αυτή, ένα adjoint πεδίο αναπαρίστανται από μια διπλή γραμμή, ώστε να αναδειχθεί το γεγονός ότι έχει δυο θεμελιώδεις δείκτες, A_μ^{ij} , οι οποίοι και συστέλλονται κατά μήκος ενός διαγράμματος (όπως με τις εξωτερικές γραμμές ή στα vertices). Τhoutέστιν, ένας διαδότης από μια κατάσταση (ij) σε μια κατάσταση (kl) θα είναι ανάλογος του $\delta^{ik}\delta_{jl}$. Οπότε και ένα *index loop* θα αντιστοιχεί σε ένα $\delta_i^i = N$ και θα παράγει έναν παράγοντα N .

Παρατηρούμε το πρώτο από τα παραπάνω διαγράμματα, το οποίο είναι ένα επίπεδο (planar) διάγραμμα με δυο loops, όπου έχουμε δυο vertices τεσσάρων σημείων και δυο index loops, τα οποία δίνουν έναν παράγοντα $(g_{YM}^2)^2 N^2 = (g_{YM}^2 N)^2$. Το δεύτερο διάγραμμα είναι μη-επίπεδο (non-planar) και έχει δυο vertices τριών σημείων, δυο των τεσσάρων και μονάχα ένα index loop (αν ακολουθήσουμε μια γραμμή από οποιοδήποτε σημείο μέσα στο loop θα δούμε ότι θα επανέλθουμε στο ίδιο αυτό σημείο), τα οποία δίνουν έναν παράγοντα $g_{YM}^2 (g_{YM}^2)^2 N = (g_{YM}^2 N)^3 N^{-2}$.

Συνεπώς, παρατηρώντας ότι τα μη-επίπεδα διαγράμματα συνοδεύονται από παράγοντες του $1/N^2$, συμπεραίνουμε ότι στο όριο $N \rightarrow \infty$ με το $g_{YM}^2 N$ σταθερό, γνωστό κι ως όριο του *t' Hooft*, κυριαρχούν τα επίπεδα διαγράμματα. Η ενεργός σύζευξη είναι, δηλαδή, η $\lambda = g_{YM}^2 N$ και, ενώ ο *t' Hooft* εφάρμοσε τη θεωρία διαταραχών για το λ , με $\lambda \ll 1$, στην αντιστοιχία AdS/CFT είδαμε, αντίθετα, ότι επιθυμούμε $\lambda \gg 1$ και σταθερό.

Συμαζεύουμε τα ευρήματα μας και καταλαβαίνουμε ότι για να είναι έγκυρη η υπερβαρύτητα χρειαζόμαστε το $g_s N = g_{YM}^2 N \gg 1$ και σταθερό, δηλαδή $g_s \rightarrow 0$ και $N \rightarrow \infty$. Αυτό σημαίνει ότι, από τη μια μεριά, η υπερβαρύτητα είναι ασθενώς συζευγμένη ($g_s \rightarrow 0$), ενώ, από την άλλη, η $SU(N)$ θεωρία βαθμίδας, με ενεργό σύζευξη $\lambda = g_{YM}^2 N \gg 1$ είναι ισχυρά συζευγμένη. Οπότε, καταλήγουμε ότι η αντιστοιχία AdS/CFT είναι μια *δυναμικότητα (duality)*: μια σχέση ανάμεσα σε μια ισχυρά και μια ασθενώς συζευγμένη θεωρία.

Υπάρχουν διάφορες εκδοχές της δυναμικότητας αυτής, ανάλογα με τη θεωρία του πεδίου τιμών της ποσότητας $g_s N$ που επιλέγουμε, αλλά η κυρίαρχη, σήμερα, είναι η εξής: η δυναμικότητα αυτή είναι έγκυρη για κάθε g_s και N , ασχέτως που είμαστε σε θέση να πραγματοποιήσουμε υπολογισμούς μόνο μέσα σε συγκεκριμένα όρια.

8.5 Σχέση πεδίων και τελεστών

Στην ενότητα αυτή, θα πραγματοποιήσουμε μια πρώτη χαρτογράφηση ανάμεσα σε αντικείμενα της θεωρίας βαρύτητας και της θεωρίας βαθμίδας. Συγκεκριμένα, θα εκφράσουμε τη σχέση ανάμεσα στους *αναλλοίωτους κατά βαθμίδα (gauge invariant)* τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας και τα πεδία της AdS₅ υπερβαρύτητας.

Ένας αναλλοίωτος κατά βαθμίδα τελεστής \mathcal{O} , στην $\mathcal{N} = 4$ SYM σύμμορφη θεωρία πεδίου, θα χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες σύμμορφες διαστάσεις Δ και ένα δείκτη αναπαράστασης, I_n (η συγκεκριμένη μορφή δείκτη θα κατανοηθεί αμέσως παρακάτω), για την $SO(6) \equiv SU(4)$ ομάδα R-συμμετρίας που τον διέπει. Προφανώς, ο τελεστής υποχρεούται να είναι αναλλοίωτος κατά βαθμίδα αφού η συμμετρία βαθμίδας χαρακτηρίζει μονάχα τη σύμμορφη θεωρία πεδίου και όχι την θεωρία βαρύτητας.

Στη θεωρία χορδών στον AdS₅ × S⁵, στο όριο της υπερβαρύτητας, ο τελεστής \mathcal{O} αντιστοιχεί σε ένα πεδίο. Το πεδίο αυτό θα εκτείνεται και στην 5-σφαίρα S⁵, η οποία είναι ένας συμπαγής χώρος. Εφ' όσον η S⁵ είναι συμπαγής, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη συμπύκνωση (compactification των Kaluza-Klein και να αναπτύξουμε τα υπερβαρυτικά πεδία σε σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις (όμοια με Fourier modes) πάνω στη σφαίρα αυτή ως

$$\phi(x, y) = \sum_n \sum_{I_n} \phi_{(n)}^{I_n}(x) Y_{(n)}^{I_n}(y) \quad (8.11)$$

όπου το n επιλέγει την αναπαράσταση της ομάδας συμμετρίας και το I_n είναι ο δείκτης στην αναπαράσταση αυτή³. Εδώ το x είναι μια συντεταγμένη στον AdS₅ και το y μια συντεταγμένη στην S⁵.

Τότε το πεδίο $\phi_{(n)}^{I_n}$ στον AdS₅, μάζας m , αντιστοιχεί σε έναν τελεστή $\mathcal{O}_{(n)}^{I_n}$ στην $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία, σύμμορφης διάστασης Δ .

³Για παράδειγμα, το Fourier mode στον κύκλο ακτίνας R είναι $e^{inx/R}$, ενώ, οι σφαιρικές αρμονικές στη 2-σφαίρα είναι $Y_{m_l}^l(\theta, \phi)$, με l και m_l να παίζουν το ρόλο του n και του I_n της γενικής περίπτωσης.

Η σχέση, μάλιστα, μεταξύ της μάζας m στον AdS_{d+1} και του Δ είναι

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2} \quad (8.12)$$

κάτι που θα αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Επίσης, η σχέση αυτή αποτελεί άλλη μια όψη της αντιστοιχίας μεταξύ σύμμορφης διάστασης ενός τελεστή και ενέργειας του αντίστοιχου πεδίου ή κατάστασης.

Καταλήγουμε ότι η διαστατική ελλάτωση στην S^5 , τουτέστιν ότι κρατήσαμε μονάχα το χαμηλότερο mode στο αρμονικό ανάπτυγμα, δίνει μια θεωρία υπερβαρύτητας στον AdS_5 . Έπειτα, όπως είχαμε αποδείξει, μια υπερβαρύτητα σε υπόβαθρο AdS χώρου, είναι αναγκαστικά μια υπερβαρύτητα βαθμίδας, που σημαίνει ότι η διαστατική ελλάτωση μας έδωσε μια 5-διάστατη υπερβαρύτητα βαθμίδας.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι υπάρχει ένα περιορισμός στη μάζα του βαθμωτού πεδίου. Ονομάζεται περιορισμός *Breitenlohner-Freedman* και οφείλεται στην πραγματικότητα του Δ , όποτε και

$$m^2 R^2 \geq -\frac{d^2}{4} \quad (8.13)$$

συνθήκη που όταν πληρείται καθιστά το βαθμωτό πεδίο ευσταθές.

Τέλος, όπως καταλαβαίνουμε, η αντιστοιχία ενός πεδίου της θεωρίας βαρύτητας με έναν τελεστή της σύμμορφης θεωρίας πεδίου υπονοεί ότι και τα δυο αντικείμενα πρέπει να είναι στην ίδια αναπαράσταση και, δηλαδή, να έχουν τους ίδιους δείκτες εξ' αυτών. Για το λόγο αυτό, παραπάνω, επιλεξαμε την αντιστοιχία ανάμεσα σε ένα βαθμωτό πεδίο και έναν βαθμωτό τελεστή (είναι και τα δυο βαθμωτά Lorentz), με κοινούς δείκτες αναπαράστασης, $I_{(n)}$. Σε συνέχεια της λογικής αυτής, ένα ρεύμα J^μ της θεωρίας πεδίου θα αντιστοιχεί σε ένα πεδίο βαθμίδας A^μ της θεωρίας βαρύτητας και το graviton $g_{\mu\nu}$ στον ταυστή ενέργειας ορμής $T_{\mu\nu}$. Μάλιστα, αφού το ρεύμα J^μ προέρχεται από μια παγκόσμια συμμετρία και το πεδίο βαθμίδας από μια συμμετρία βαθμίδας, μπορούμε να συμπεράνουμε, σε έναν πρώτο βαθμό, ότι μια παγκόσμια συμμετρία στη σύμμορφη θεωρία πεδίου αντιστοιχεί σε μια συμμετρία βαθμίδας στη θεωρία βαρύτητας.

8.6 Αντιστοιχία τελεστή-κατάστασης στη σύμμορφη θεωρία πεδίου

Όπως δείξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, το όριο του χώρου AdS_5 (στραμμένο κατά Wick, στην Ευκλείδεια εκδοχή του) θα είναι, σε συντεταγμένες Poincaré, ο επίπεδος χώρος \mathbb{R}^4

$$ds^2 = d\bar{x}_4^2 \quad (8.14)$$

ενώ σε παγκόσμιες συντεταγμένες θα είναι ο κύλινδρος $\mathbb{R}^t \times S^3$

$$ds^2 = d\tau^2 + d\Omega_3^2 \quad (8.15)$$

όπου οι δυο τους συνδέονται με έναν σύμμορφο μετασχηματισμό, καθώς οι μετρικές τους

$$ds^2 = d\bar{x}_4^2 = dx^2 + x^2 d\Omega_3^2 = x^2((d\ln x)^2 + d\Omega_3^2) = e^{2\tau}(d\tau^2 + d\Omega_3^2) \quad (8.16)$$

συνδέονται με έναν συνολικό, σύμμορφο παράγοντα. Καθώς, λοιπόν, μια σύμμορφη θεωρία πεδίου δεν νιώθει από σύμμορφους μετασχηματισμούς, τα παραπάνω υποδεικνύουν ότι η θεωρία χορδών στον παγκόσμιο $\text{AdS}_5 \times S^5$ χώρο είναι δυϊκή με την $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία πάνω στον οριζικό κύλινδρο $\mathbb{R}^t \times S^3$.

Παρά όλα αυτά, τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά στις παγκόσμιες συντεταγμένες. Ο λόγος είναι ότι όταν εφαρμόζουμε ένα σύμμορφο μετασχηματισμό για να πάμε από τον επίπεδο χώρο στον κύλινδρο, ουσιαστικά σχετίζουμε τελεστές \mathcal{O} με καταστάσεις $|\mathcal{O}\rangle$. Αυτό ονομάζουμε *αντιστοιχία τελεστή-κατάστασης* και θα την εξετάσουμε πρώτα στις δυο διαστάσεις.

Θεωρούμε, εν ολίγοις, το μιγαδικό επίπεδο, που παραμετροποιείται από τον μιγαδικό z , καθώς και τον μετασχηματισμό e^{-iw} . Στον κύλινδρο, ο οποίος παραμετροποιείται από το w , θεωρούμε τον ημι-άπειρο κύλινδρο $\text{Im}(w) \leq 0, 0 \leq \text{Re}(w) \leq 2\pi$, με την ταυτοποίηση $w \sim w + 2\pi$. Ο κύλινδρος αυτός, μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού, χαρτογραφείται στον μοναδιαίο δίσκο, $z \leq 1$, του επιπέδου z . Ο ημι-άπειρος κύλινδρος μπορεί να νοηθεί ως η αναπαράσταση του

world-sheet της κλειστής χορδής, όπου το όριο $w = -i\infty$, τουτέστιν η ασυμπτωτική περιοχή του παρελθόντος, αντιστοιχεί στο κέντρο του δίσκου, $z = 0$, στον οποίο χαρτογραφείται. Συνεπώς, οι τελεστές στο κέντρο του δίσκου αντιστοιχούν σε αντικείμενα που δρουν στο ασυμπτωτικό παρελθόν, τα οποία οποία μπορούν να συνειδητοποιηθούν ως αρχικές καταστάσεις.

Τώρα, όπως δείξαμε στο κεφάλαιο της σύμμορφης θεωρίας πεδίου, ο βαθμωτός τελεστής X^μ της χορδής μπορεί να εκφραστεί ως η σειρά Laurent

$$X^\mu(z) = \frac{x^\mu}{2} - i\alpha' \frac{p^\mu}{2} \ln z + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{mz^m} \quad (8.17)$$

Ο μοναδιαίος τελεστής μπορεί να κατανοηθεί ως μια χαρτογράφηση στην κατάσταση του κενού στο ασυμπτωτικό παρελθόν του κυλίνδρου, ενώ, παράλληλα, μια γενική ασυμπτωτική κατάσταση της (κλειστής) χορδής κατασκευάζεται δρώντας (πάνω στο κενό) με τους ταλαντωτές α_{-m}^μ και $\tilde{\alpha}_{-m}^\mu$. Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι

$$\alpha_{-m}^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) \quad (8.18)$$

όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια ασυμπτωτική κατάσταση $\alpha_{-m}^\mu |0, 0\rangle$, πάνω στον κύλινδρο του w , αντιστοιχεί στον τελεστή

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(0) \quad (8.19)$$

πάνω στο επίπεδο του z .

Μέσα από την αντιστοιχία αυτή, λοιπόν, βλέπουμε ότι προκύπτουν καταστάσεις της κλειστής χορδής $\alpha_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_{-n}^\nu |0, 0\rangle$, πάνω στις οποίες μπορούμε να δράσουμε με την Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\mu + \tilde{\alpha}_{-n}^\mu \tilde{\alpha}_n^\mu) \quad (8.20)$$

Με αυτόν τον τρόπο, απλοποιήσαμε το πρόβλημα της ελεύθερης κλειστής χορδής που διαδίδεται στον κύλινδρο σε ένα $0 + 1$ κβαντομηχανικό σύστημα κατα-

στάσεων, στις οποίες δρά η παραπάνω Hamiltonian.

Έπειτα, παρατηρούμε ότι εφ' όσον ο μετασχηματισμός κυλίνδρου-επιπέδου επάγει τη διαφορική σχέση

$$\tau = \ln r \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = r \frac{\partial}{\partial r} \quad (8.21)$$

τότε αναδεικνύεται για άλλη μια φορά η αντιστοιχία μεταξύ σύμμορφης διάστασης και ενέργειας, καθώς η Hamiltonian πάνω στην \mathbb{R}^r γραμμή του κυλίνδρου είναι ισοδύναμη με τον τελεστή διαστολής πάνω στο αρχικό επίπεδο, ως

$$H_{\mathbb{R}^r} = i\partial_\tau = ir\partial_r = D_{\mathbb{R}^2} \quad (8.22)$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι η γενίκευση της αντιστοιχίας τελεστή-κατάστασης σε υψηλότερες διαστάσεις είναι ανάλογη, με μοναδική διαφορά ότι, λόγω καμπυλότητας των χώρων υψηλότερων διαστάσεων, η δράση ενός βαθμωτού πεδίου πρέπει να διαφοροποιηθεί ώστε να παραμείνει σύμμορφη.

Κεφάλαιο 9

Συναρτήσεις συσχέτισης

Μέχρι τώρα είδαμε ότι πρέπει να υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα στη θεωρία χορδών, στο όριο της υπερβαρύτητας, στον $\text{AdS}_5 \times S^5$ χώρο, και στην 4-διάστατη $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία στο όριο του χώρου αυτού. Παρ' όλα αυτά, συσχετίσαμε μονάχα πεδία στον AdS_5 με τελεστές της σύμμορφης θεωρίας πεδίου, ενώ δεν ορίσαμε ουδεμία σχέση μεταξύ παρατηρήσιμων μεγεθών. Διαπιστώσαμε, ωστόσο, ότι τα κατ' εξοχήν παρατηρήσιμα μεγέθη, οι S-πίνακες, δυσκοιλιούν να οριστούν ορθά, απουσία ασυμπτωτικών καταστάσεων, με αποτέλεσμα η μόνη καλά ορισμένη ποσότητα που μπορεί να οδηγήσει σε παρατηρήσιμο μέγεθος να είναι οι συναρτήσεις συσχέτισης.

9.1 Η συνταγή Witten για τις συναρτήσεις συσχέτισης

Είδαμε ότι τελεστές \mathcal{O} σύμμορφης διάστασης Δ , στη σύμμορφη θεωρία πεδίου, σχετίζονται με πεδία ϕ μάζας m , στον AdS_5 χώρο, με τη σχέση μεταξύ μάζας και σύμμορφης διάστασης να δίνεται από την (8.12). Στο κεφάλαιο αυτό θα εξερευνήσουμε την περίπτωση της συνάρτησης συσχέτισης του άμαζου βαθμωτού πεδίου, όπου το $m = 0$ συνεπάγεται ότι $\Delta = d$, καθώς για το μαζικό βαθμωτό πεδίο χρειαζόμαστε τη μέθοδο της ολογραφικής επακανονικοποίησης, με την οποία και δεν θα ασχοληθούμε.

Πρώτα απ' όλα, θα λύσουμε την εξίσωση κίνησης του βαθμωτού πεδίου στο όριο του AdS χώρου. Ο λόγος αφορά τις συναρτήσεις συσχέτισης, για τις ο-

ποιές, όπως θα δούμε σύντομα, χρειαζόμαστε τη λύση των εξισώσεων κίνησης του πεδίου.

Για ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο ϕ , εκφράζουμε την εξίσωση Klein-Gordon στον AdS_{d+1} χώρο, σε συντεταγμένες Poincarè,

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = \frac{1}{R^2}\left[x_0^{d+1}\partial_0x_0^{1-d}\partial_0\phi + x_0^2\partial_i^2\phi\right] = 0 \quad (9.1)$$

η οποία, εάν εκφράσουμε το πεδίο ϕ στον χώρο των 4-ορμών, ως το ανάπτυγμα Fourier

$$\phi(x_0, x^\mu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} f_k(x_0) \quad (9.2)$$

τότε αυτή γράφεται ως

$$(1-d)x_0\partial_0 f_k(x_0) + x_0^2\partial_0^2 f_k(x_0) - x_0^2 k^2 f_k(x_0) = 0 \quad (9.3)$$

όπου εάν θεωρήσουμε ότι $f_k(x_0) \sim x_0^\beta$, τότε, κοντά στο όριο $x_0 \rightarrow 0$, κρατάμε μονάχα τους κυρίαρχους όρους ως προς x_0 και βρίσκουμε ότι

$$\beta(\beta-d) = 0 \quad (9.4)$$

με λύσεις $\beta = 0$ ή $\beta = d$. Οπότε, στο $x_0 \rightarrow 0$, η $f_k(x_0)$ συμπεριφέρεται ως

$$f_k(x_0) \approx A(k) + B(k)x_0^d \quad (9.5)$$

όπου η πρώτη λύση είναι ανεξάρτητη της x_0 συντεταγμένης. Στο όριο $x_0 \rightarrow 0$, η πρώτη αυτή λύση κυριαρχεί και, ταυτοποιώντας τις $A(k) \equiv \phi_0(x^\mu)$ στο χώρο των θέσεων, παίρνουμε τη λύση

$$\phi(x_0 \rightarrow 0, x^\mu) \sim \phi_0(x^\mu) \quad (9.6)$$

Στο σημείο αυτό, πριν προχωρήσουμε, θα κάνουμε το εξής. Θα λύσουμε την εξίσωση κίνησης για βαθμωτό πεδίο με μάζα. Δεν μας ενδιαφέρει η αναγκαία ολογραφική επακανονικοποίηση του, καθώς δεν θα ασχοληθούμε με τη συνάρτηση συσχέτισης του, παρά μόνο με τη λύση της εξίσωσης Klein-Gordon η οποία θα υποδείξει τη σχέση μεταξύ μάζας και σύμμορφης διάστασης, (8.12).

Η εξίσωση Klein-Gordon με μάζα, $(\square - m^2)\phi = 0$, διαφοροποιείται ως προς τη λύση της, με την προηγούμενη περίπτωση, κατά έναν επιπρόσθετο όρο, ως

$$\beta(\beta - d) - m^2 R^2 = 0 \quad (9.7)$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\beta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2} \quad (9.8)$$

και άρα παίρνουμε τη λύση, στο $x_0 \rightarrow 0$, για το πεδίο με μάζα ως

$$\phi(x_0, x^\mu) \approx A(x^\mu)x_0^{\beta_-} + B(x^\mu)x_0^{\beta_+} \quad (9.9)$$

Στο όριο $x_0 \rightarrow 0$, ο πρώτος όρος αποκλίνει και άρα είναι κυρίαρχος σε σχέση με τον δεύτερο. Για το λόγο αυτό κρατάμε μονάχα τον πρώτο όρο και η λύση, στο όριο $x_0 = \epsilon$ με $\epsilon \rightarrow 0$, γίνεται

$$\phi(x_0 = \epsilon, x^\mu) \approx \epsilon^{\beta_-} \phi_0(x^\mu) \quad (9.10)$$

όπου και πάλι ταυτοποιήσαμε τις $A(x^\mu) \equiv \phi_0(x^\mu)$, μιας και το $\phi_0(x^\mu)$ είναι το κομμάτι που είναι ανεξάρτητο της συντεταγμένης x_0 και που ανήκει εξ' ολοκλήρου στο όριο του χώρου. Τουτέστιν, το κομμάτι $\phi_0(x^\mu)$ είναι η «πηγή» του πεδίου $\phi(x_0, x^\mu)$, το οποίο διαδίδεται μέσα σε όλο τον AdS_{d+1} χώρο.

Στο όριο, όμως, όπου ζεί η θεωρία πεδίου, θεωρήσαμε ότι υπάρχει ένας δυϊκός, του πεδίου ϕ , τελεστής \mathcal{O} . Συνεπώς, η φυσική ερμηνεία της πηγής ϕ_0 του πεδίου ϕ είναι ότι λειτουργεί ως πηγή και για τον δυϊκό τελεστή \mathcal{O} ! Δηλαδή μια πηγή στο όριο του χώρου AdS , τόσο για το βαθμωτό πεδίο της θεωρίας βαρύτητας, που ζεί σε όλον το χώρο, όσο και για τον αντίστοιχο τελεστή της σύμμορφης θεωρίας πεδίου, που ζεί στο όριο αυτό: το ϕ_0 είναι μια πηγή και

στις δυο εικόνες της αντιστοιχίας AdS/CFT!

Παρατηρώντας τη μορφή του πεδίου στο όριο του χώρου, $\phi \sim \epsilon^{\beta_-} \phi_0$, και αναγνωρίζοντας ότι η x_0 συντεταγμένη του χώρου AdS λειτουργεί ως κλίμακα ενέργειας για τη σύμμορφη θεωρία πεδίου στο όριο του, συμπεραίνουμε ότι ένας μετασχηματισμός από το $x_0 = 0$ στο $x_0 = \epsilon$ είναι ένας μετασχηματισμός κλίμακας για την θεωρία πεδίου εκεί. Συνεπώς, αντιλαμβανόμαστε ότι ο παράγοντας β_- πρέπει να είναι η διάσταση κλίμακας της μάζας (mass scaling dimension), δηλαδή η σύμμορφη διάσταση, της πηγής ϕ_0 της θεωρίας πεδίου.

Εμείς, όμως, θέλουμε να τα συνδέσουμε όλα αυτά με τον τελεστή \mathcal{O} , ώστε να εξάγουμε ένα συμπέρασμα για τη σύμμορφη διάσταση του. Και ο τρόπος είναι προφανής: σε μια θεωρία πεδίου ένας τελεστής \mathcal{O} και μια πηγή J συζευγνύονται ως γινόμενο σε έναν όρο της δράσης, $\int J\mathcal{O}$. Στο όριο $x_0 = \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$ του χώρου, με πηγή το $\phi(\epsilon, x^\mu)$ και τελεστή τον $\mathcal{O}(\epsilon, x^\mu)$, ο όρος αυτός θα είναι

$$S_{source} = \int d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \phi(\epsilon, x^\mu) \mathcal{O}(\epsilon, x^\mu) \quad (9.11)$$

όπου η ορίζουσα της μετρικής στο όριο του χώρου είναι $\gamma_\epsilon = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{2d}$, οπότε

$$\begin{aligned} S_{source} &= R^d \int d^d x \epsilon^{\beta_- - d} \phi_0(x^\mu) \mathcal{O}(\epsilon, x^\mu) \\ &= R^d \int d^d x \phi_0(x^\mu) \epsilon^{-\beta_+} \mathcal{O}(\epsilon, x^\mu) \end{aligned} \quad (9.12)$$

Για να είναι το S_{source} πεπερασμένο και ανεξάρτητο του ϵ , καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$, απαιτούμε ο τελεστής $\mathcal{O}(\epsilon, x^\mu)$ να έχει τη μορφή (αλλάζει κλίμακα μάζας ως)

$$\mathcal{O}(\epsilon, x^\mu) = \epsilon^{\beta_+} \mathcal{O}(x^\mu) \quad (9.13)$$

όπου, όπως και πριν, αφού η αλλαγή κατά μήκος του ϵ είναι ένας μετασχηματισμός κλίμακας για τη θεωρία πεδίου, τότε ταυτοποιούμε το β_+ με τη σύμμορφη διάσταση (διάσταση κλίμακας μάζας) του τελεστή \mathcal{O} ως

$$\Delta = \beta_+ = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2} \quad (9.14)$$

όπως ακριβώς είχαμε υποσχεθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ένα τελευταίο χαρακτηριστικό του τελεστή \mathcal{O} που αξίζει να αναφέρουμε είναι ότι είναι σύνθετος (composite), μιας και, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, πρέπει να είναι αναλλοίωτος κατά βαθμίδα (να μην έχει δείκτες αναπαράστασης της ομάδας βαθμίδας) ενώ, παράλληλα, τα πεδία της σύμμορφης θεωρίας, από τα οποία μπορεί να αποτελείται ένας τελεστής, είναι στην adjoint αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας.

Έχοντας στο κάδρο μας έναν τελεστή \mathcal{O} και την πηγή του ϕ_0 , το ένστικτο μας οδηγεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση επιμερισμού $Z_{\mathcal{O}}[\phi_0]$, η οποία είναι το παράγον συναρτησοειδές (generating functional) των συναρτήσεων συσχέτισης του τελεστή αυτού. Στον Ευκλείδιο χώρο, αυτή θα είναι

$$Z_{\mathcal{O}}[\phi_0] = \int \mathcal{D}[\text{SYM fields}] \exp \left(-S_{\mathcal{N}=4\text{SYM}} + \int d^4x \mathcal{O}(x^\mu) \phi_0(x^\mu) \right) \quad (9.15)$$

και είναι το παράγον συναρτησοειδές των συναρτήσεων συσχέτισης για τους τελεστές \mathcal{O} , μιας και ισχύει ότι

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n}{\delta \phi_0(x_1) \dots \delta \phi_0(x_n)} Z_{\mathcal{O}}[\phi_0] \Big|_{\phi_0=0} \quad (9.16)$$

Εφ' όσον έχουμε αντιστοιχίσει ένα βαθμωτό πεδίο ϕ σε ένα τελεστή \mathcal{O} , είναι φυσιολογικό να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση επιμερισμού του τελευταίου θα είναι ίση με τη συνάρτηση επιμερισμού του πεδίου ϕ της θεωρίας χορδών, με συνοριακή τιμή ϕ_0 , τουτέστιν

$$Z_{\mathcal{O}}[\phi_0] = Z_{\phi}[\phi_0]_{string} \quad (9.17)$$

η οποία φυσική υπόθεση είναι και η λεγόμενη συνταγή του Witten.

Βέβαια, η κατάσταση είναι πολύ απλούστερη απ' ό,τι ακούγεται, καθώς είμαστε στο όριο $g_s \rightarrow 0, \alpha' \rightarrow 0, R^4/\alpha'^2 = 4\pi g_s N \gg 1$, της υπερβαρύτητας.

Οπότε και η συνάρτηση επιμερισμού του πεδίου ϕ με πηγή ϕ_0 στο όριο του χώρου γίνεται η κλασσική δράση της υπερβαρύτητας, δηλαδή

$$Z_\phi[\phi_0] = \exp(-S_{sugra}[\phi[\phi_0]]) \quad (9.18)$$

καθώς οι κβαντικές διορθώσεις έχουν καταπνιγεί στο όριο αυτό και το ολοκλήρωμα διαδρομής κυριαρχείται από την ελάχιστη δράση, την κλασσική on-shell δράση της υπερβαρύτητας. Για τον υπολογισμό της τελευταίας, απλώς λύνουμε την εξίσωση κίνησης και βρίσκουμε τη λύση του πεδίου ως συνάρτηση της οριακής πηγής, $\phi[\phi_0]$, την οποία και αντικαθιστούμε μέσα στη δράση, S_{sugra} .

Συνοψίζοντας, η αντιστοιχία AdS/CFT αναδεικνύει μια εύκολη συνταγή για τα παράγοντα συναρτησοειδή των συναρτήσεων συσχέτισης των τελεστών που αντιστοιχούν σε βαθμωτά πεδία του AdS₅ χώρου, ως

$$Z_{\mathcal{O}}[\phi_0] = e^{-S_{sugra}[\phi[\phi_0]]} \quad (9.19)$$

9.2 Η συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων για το άμαζο βαθμωτό πεδίο

Γενικά, για τον υπολογισμό συναρτήσεων συσχέτισης n σημείων στη σύμμορφη θεωρία πεδίου, πρέπει να υπολογίσουμε την $S_{sugra}[\phi[\phi_0]]$ χρησιμοποιώντας μια διαγραμματική τεχνική των διαγραμμάτων Feynman, τα διαγράμματα Witten. Ειδικά, όμως, για τον υπολογισμό της συνάρτησης συσχέτισης 2 σημείων, υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος, τον οποίο και θα παρουσιάσουμε αμέσως.

Το πρώτο βήμα είναι να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο θέλουμε πραγματικά να εκφράσουμε τη λύση $\phi[\phi_0]$. Όπως υποδεικνύει και η ίδια η έκφραση $\phi[\phi_0]$ και τα λεγόμενα της προηγούμενης ενότητας, επιθυμούμε μια έκφραση που να είναι συνάρτηση της συνοριακής πηγής (συνοριακής τιμής). Αυτή είναι και η εύστοχη απάντηση εάν αναλογιστούμε το εξής: για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση συσχέτισης του τελεστή της θεωρίας πεδίου παραγωγίζουμε τη συνάρτηση επιμερισμού $Z_{\mathcal{O}}$ ως προς την πηγή ϕ_0 , συνεπώς, το ολοκλήρωμα της δράσης $\exp(-S_{sugra})$, το οποίο και πάρει τη θέση της $Z_{\mathcal{O}}$ ως ισοδύναμο (συνταγή Witten), πρέπει να είναι εκπεφρασμένο συναρτήσει της πηγής ϕ_0 .

Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να ορίσουμε μια κλασσική συνάρτηση Green στον AdS_5 χώρο, στην Ευκλείδια Poincaré εκδοχή. Εφ' όσον, λοιπόν, θέλουμε να εκφράσουμε το άμαζο πεδίο ϕ με πηγή ϕ_0 στο όριο του χώρου, ορίζουμε τον *διαδότη εσωτερικού-ορίου* ως

$$\square_{x^\mu, x_0} K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu) = \delta^4(x^\mu - x'^\mu) \quad (9.20)$$

όπου \square_{x^μ, x_0} είναι ο κινητικός τελεστής και η συνάρτηση δέλτα είναι μια πηγή στο 4-διάστατο όριο του AdS_5 . Τότε το πεδίο ϕ εκφράζεται ως

$$\phi(x^\mu, x_0) = \int d^4x' K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu) \phi_0(x'^\mu) \quad (9.21)$$

η οποία ποσότητα και αντικαθίσταται στην $S_{sugra}[\phi]$, με αποτέλεσμα η συνάρτηση επιμερισμού να γίνει $Z = \exp(-S_{sugra}[\phi[\phi_0]])$.

Τώρα, πρέπει να βρούμε μια έκφραση για τον διαδότη $K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu)$, η οποία, προφανώς πρέπει να εξαρτάται από τα όλα της τα ορίσματα. Για το λόγο

αυτό, λύνουμε την εξίσωση Klein-Gordon (9.1) για την παραπάνω έκφραση του πεδίου ϕ , με τον διαδότη K_B να εξαρτάται μονάχα από το x_0 , και παίρνουμε

$$K_B = C_d x_0^d \quad (9.22)$$

όπου C_d μια σταθερά. Έπειτα, εφαρμόζοντας την αντιστροφή $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$ παίρνουμε

$$K_B = C_d \frac{x_0^d}{(x_0^2 + (x^\mu)^2)^d} \quad (9.23)$$

η οποία σχέση θέλουμε να ικανοποιεί τη εξίσωση (9.20), οπότε και η σωστή έκφραση είναι

$$K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu) \equiv C_d \left[\frac{x_0}{x_0^2 + (x^\mu - x'^\mu)^2} \right]^d \quad (9.24)$$

η οποία, στο όριο $x_0 \rightarrow 0$, γίνεται

$$K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu) \rightarrow C_d \frac{x_0^d}{(x^\mu - x'^\mu)^{2d}} \quad (9.25)$$

Για πληρότητα, κοιτάμε τον παρανομαστή και βλέπουμε ότι η συμπεριφορά του ανάλογα με το αν $x^\mu = x'^\mu$ ή $x^\mu \neq x'^\mu$, εκτός του ότι είναι απαράδεκτη, μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\sim x_0^d \delta(x^\mu - x'^\mu) \quad (9.26)$$

μορφή απαραίτητη ώστε να ικανοποιείται ο ορισμός (9.21) του πεδίου ϕ .

Επιτέλους, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το ευκολότερο παράδειγμα, δηλαδή μια συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων ενός τελεστή που αντιστοιχεί σε ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο. Κατά τα προηγούμενα, έχουμε ότι

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle = \frac{\delta^2}{\delta\phi_0[x_1] \delta\phi_0[x_2]} e^{-S_{\text{sugra}}[\phi[\phi_0]]} \Big|_{\phi_0=0} \quad (9.27)$$

όπου

$$\begin{aligned}
S_{sugra}[\phi[\phi_0]] &= \frac{1}{2} \int (d^5x \sqrt{g}) \int d^4x' \\
&\times \int d^4y' \partial_\mu K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu) \phi_0(x'^\mu) \partial^\mu K_B(x^\mu, x_0; y'^\mu) \phi_0(y'^\mu) + O(\phi_0^3)
\end{aligned} \tag{9.28}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$S_{sugra}[\phi[\phi_0]]|_{\phi_0=0} = 0 \quad \left. \frac{\delta S_{sugra}[\phi[\phi_0]]}{\delta \phi_0} \right|_{\phi_0=0} \tag{9.29}$$

με συνέπεια μόνο οι δεύτερες και άνω παράγωγοι να είναι μη μηδενικές. Οπότε, η συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων είναι

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle &= \frac{\delta}{\delta \phi_0[x_1]} \left(-\frac{\delta S_{sugra}}{\delta \phi_0[x_2]} e^{-S_{sugra}} \right) \Big|_{\phi_0=0} = -\frac{\delta^2 S_{sugra}[\phi[\phi_0]]}{\delta \phi_0[x_1] \delta \phi_0[x_2]} \Big|_{\phi_0=0} \\
&= -\frac{\delta^2}{\delta \phi_0[x_1] \delta \phi_0[x_2]} \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{g} \int d^4x' \\
&\times \int d^4y' \partial_\mu K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu) \phi_0(x'^\mu) \partial^\mu K_B(x^\mu, x_0; y'^\mu) \phi_0(y'^\mu) \\
&= -\int d^5x \sqrt{g} \partial_\mu K_B(x^\mu, x_0; x_1^\mu) \partial^\mu K_B(x^\mu, x_0; x_2^\mu)
\end{aligned} \tag{9.30}$$

Αυτή είναι και η γενική προσέγγιση για μια συνάρτηση συσχέτισης n σημείων. Βέβαια, όπως υποσχενθήκαμε, η περίπτωση της συσχέτισης 2 σημείων μπορεί να απλουστευθεί σημαντικά, καθώς το εναλλακτικό ολοκλήρωμα που θα κληθούμε να υπολογίσουμε θα είναι εξωφρενικά ευκολότερο. Για το σκοπό αυτό γράφουμε την on-shell δράση

$$\begin{aligned}
S_{sugra} &= \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{g} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{g} \phi \square \phi + \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{g} \nabla_\mu (\phi \partial^\mu \phi) \\
&= \frac{1}{2} \int_{boundary} d^4x \sqrt{h} (\phi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi)
\end{aligned} \tag{9.31}$$

Ο πρώτος όρος της δεύτερης εξίσωσης μηδενίστηκε on-shell ($\square\phi = 0$), ενώ ο δεύτερος όρος μειώθηκε κατά Gauss στις τέσσερις διαστάσεις, κατασκευάζοντας την τρίτη εξίσωση. Η μετρική h στο όριο του χώρου έχει ορίζουσα $\sqrt{h} = x_0^{-d}$, ενώ η παράγωγος μέσα στην παρένθεση είναι $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} = x_0 \partial_{x_0}$ και δρα ως

$$x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \phi(x^\mu, x_0) = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \int d^d x' K_B(x^\mu, x_0; x'^\mu) \phi_0(x'^\mu) \rightarrow C_d d x_0^d \int d^d x \frac{\phi_0(x'^\mu)}{|x^\mu - x'^\mu|^{2d}} \quad (9.32)$$

στο όριο $x_0 \rightarrow 0$. Συνεπώς, στο όριο αυτό, και γενικεύοντας στις $(d+1) \xrightarrow{\text{Gauss}} d$ διαστάσεις, έχουμε την on-shell κινητική δράση

$$\begin{aligned} S_{\text{sugra}}[\phi] &= \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int d^d x x_0^{-d} \phi_0(x^\mu, x_0) x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \phi_0(x^\mu, x_0) \\ &= \frac{C_d d}{2} \int d^d x \int d^d x' \frac{\phi_0(x^\mu) \phi_0(x'^\mu)}{|x^\mu - x'^\mu|^{2d}} \end{aligned} \quad (9.33)$$

η οποία δίνει την συνάρτηση συσχέτισης 2 σημείων ως

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle = - \frac{C_d d}{|x_1 - x_2|^{2d}} \quad (9.34)$$

που είναι και η σωστή συμπεριφορά για έναν τελεστή σύμμορφης διάστασης $\Delta = d$.

Συνεπώς, επιβεβαιώνουμε ότι όντως ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο, στις d διαστάσεις, αντιστοιχεί σε έναν βαθμωτό τελεστή προστατευμένης σύμμορφης διάστασης $\Delta = d$. Ολοκληρώσαμε, έτσι, τον πρώτο μας έλεγχο ποιότητας στο προϊόν που διαφημίζεται ως αντιστοιχία AdS/CFT.

Κεφάλαιο 10

Quarks και ο βρόχος Wilson

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάμε τον τρόπο με τον οποίο εισάγουμε εξωτερικά quarks στην $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία, καθώς και τον τρόπο που υπολογίζουμε τον βρόχο Wilson, μια σημαντική ποσότητα στις θεωρίες βαθμίδας, του οποίου η VEV^1 κρίνει, μεταξύ άλλων, εάν μια θεωρία είναι περιοριστική (confining) ή όχι.

Εξωτερικά quarks

Στην καθιερωμένη QCD έχουμε δυναμικά quarks, τα οποία είναι βαθμοί ελευθερίας στη δράση της θεωρίας. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να θεωρήσουμε εξωτερικά quarks, δηλαδή απείρως βαριά quarks τα οποία δεν εμφανίζονται στη δράση, αλλά εισάγονται ως εξωτερικά αντικείμενα.

Η QCD είναι περιοριστική θεωρία, το οποίο σημαίνει ότι τα δυναμικά quarks δεν είναι ελεύθερα στο κενό, αλλά εμφανίζονται σε ζεύγη, το κάθε ένα μαζί μαζί με ένα anti-quark. Το ίδιο ισχύει και για τα εξωτερικά quarks.

Καθώς τα εξωτερικά quarks είναι απείρως βαριά, θα μένουν σταθερά, δηλαδή η απόσταση R μεταξύ των q και \bar{q} θα μένει σταθερή στο χρόνο. Επιθυμώντας να μετρήσουμε το δυναμικό $V_{q\bar{q}}(R)$ μεταξύ δυο τέτοιων quarks, καταλαβαίνουμε ότι χρειάζεται να ορίσουμε φυσικά παρατηρήσιμα μεγέθη. Ένα τέτοιο φυσικό, αναλλοίωτο κατά βαθμίδα μέγεθος είναι ο βρόχος Wilson.

¹Vacuum Expectation Value = μέση τιμή στο κενό.

10.1 Γραμμές και βρόχοι Wilson

Πέρα από τη χρησιμότητα στο κεφάλαιο τούτο, για τη μέτρηση του δυναμικού μεταξύ των quarks, οι γραμμές και οι βρόχοι Wilson είναι και ένας γεωμετρικός τρόπος να κατανοήσουμε τις θεωρίες βαθμίδας.

Θεωρούμε ένα μεγαδικό βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ και θέλουμε να συγκρίνουμε τις τιμές του σε δυο διαφορετικά (μη γειτονικά) σημεία x^μ και y^μ . Σε μια τοπική θεωρία, η φάση του πεδίου αυτού αλλάζει για διαφορετικά σημεία στον χώρο, οπότε η σύγκριση που επιθυμούμε εκφράζεται ως

$$\phi(x) - \phi(y) \rightarrow e^{i\alpha(y)}\phi(y) - e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad (10.1)$$

όπου παρατηρούμε ότι η διαφορά $|\phi(y) - \phi(x)|$ εξαρτάται από την επιλογή των τοπικών φάσεων. Επίσης, ως προς τον σκοπό της σύγκρισης που επιδιώκουμε, η παράγωγος $\partial_\mu\phi(x)$ είναι αδύνατον να οριστεί, καθώς είναι κι αυτή μια διαφορά και θα εξαρτάται από τις τοπικές φάσεις. Όλα αυτά μας κινητοποιούν να ορίσουμε μόνοι μας ένα νέο πεδίο $\Phi(x, y)$, την επονομαζόμενη γραμμή Wilson, το οποίο είναι ένα δι-τοπικό πεδίο που απαιτούμε να μετασχηματίζεται ως

$$\Phi(x, y) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\Phi(x, y)e^{-i\alpha(y)} \quad (10.2)$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \Phi(x, y)\phi(y) - \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\Phi(x, y)e^{-i\alpha(y)}e^{i\alpha(y)}\phi(y) - e^{i\alpha(x)}\phi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)}[\Phi(x, y)\phi(y) - \phi(x)] \end{aligned} \quad (10.3)$$

όπου το $[\Phi(x, y)\phi(y) - \phi(x)]$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της φάσης. Επιλέγοντας $y^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ και διαιρώντας με δx^μ , ενώ $\delta x^\mu \rightarrow 0$, μετατρέπουμε την παραπάνω διαφορά σε μια παράγωγο

$$D_\mu\phi(x) \equiv \lim_{\delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{\Phi(x, x + \delta x)\phi(x + \delta x) - \phi(x)}{\delta x^\mu} \quad (10.4)$$

όπου παρατηρούμε ότι

$$D_\mu\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi(x) \quad (10.5)$$

ακόμα κι αν το δx^μ δεν είναι μικρό. Έπειτα, είναι φυσιολογικό να θέλουμε $\Phi(x, x) = 1$, οπότε με το δx^μ μικρό, μπορούμε να αναπτύξουμε τη γραμμή Wilson ως

$$\Phi(x, x + \delta x) = 1 - ie\delta x^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\delta x^2) \quad (10.6)$$

όπου ορίσαμε $\partial_\mu \Phi \equiv A_\mu$, ενώ το e είναι αυθαίρετο. Τότε, από τον μετασχηματισμό του $\Phi(x, y)$, παίρνουμε ότι

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \quad (10.7)$$

καθώς και, μέσω του ορισμού της παραγώγου $D_\mu \phi$, τη νέα μορφή της παραγώγου

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi \quad (10.8)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, το πεδίο βαθμίδας φανερώνεται ως μια συνοχή (connection) η οποία μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τιμές του πεδίου για διαφορετικά σημεία, παρ' όλη τη διαφορά φάσης τους.

Εν τω μεταξύ, το παραπάνω ανάπτυγμα (10.6), μας εμπνέει να γράψουμε τη γραμμή Wilson σε κλειστή μορφή ως

$$\Phi(x, y) = \exp \left(ie \int_x^y A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right) \quad (10.9)$$

το οποίο εύκολα ελέγχουμε ότι μετασχηματίζεται όπως έχουμε ορίσει εξ' αρχής, με τον μετασχηματισμό να εξαρτάται από το αρχικό και το τελικό σημείο αλλά όχι από τη διαδρομή. Ενδιαφέρον γενικά, για τις θεωρίες βαθμίδας αλλά και ειδικά για το κεφάλαιο αυτό, έχει η περίπτωση $x = y$ όπου παίρνουμε ένα κλειστό ολοκλήρωμα

$$\Phi_C(x, x) = \exp \left(ie \oint_C A_\mu(\xi) d\xi^\mu \right) \quad (10.10)$$

όπου P η διαδρομή από το x στο y , γνωστό ως βρόχος (loop) Wilson. Παρατηρούμε ότι ο βρόχος Wilson είναι αναλλοίωτος κατά βαθμίδα και κάπως έτσι ολοκληρώνεται η περίπτωση των Αβελιανών πεδίων βαθμίδας.

Η μη-Αβελιανή περίπτωση προκύπτει φυσιολογικά για θεωρίες όπου η Lagrangian εμπεριέχει περισσότερη συμμετρία από μια απλή αλλαγή φάσης. Για παράδειγμα η κινητική Lagrangian για N φερμιόνια Dirac

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j (i\partial - m)\psi_j \quad (10.11)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη υπο μια $SU(N)$ συμμετρία, κατά την οποία τα πεδία μετασχηματίζονται ως

$$\psi_i \rightarrow (e^{i\alpha_a T^a})_{ij} \psi_j \quad (10.12)$$

όπου T^a είναι οι γεννήτορες της ομάδας στη θεμελιώδη αναπαράσταση. Εάν οι παράμετροι α_a εξαρτώνται από το σημείο της πολλαπλότητας, τότε η συμμετρία αναβαθμίζεται από παγκόσμια σε τοπική, ενώ αποκτάμε το ίδιο πρόβλημα με την Αβελιανή περίπτωση: δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τιμές του πεδίου σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι πανομοιότυπη με αυτήν της Αβελιανής περίπτωσης και η γραμμή Wilson που παίρνουμε τώρα είναι

$$\Phi(x, y) = P \left\{ \exp \left(ig \int_x^y \mathbf{A}_\mu(\xi) d\xi^\mu \right) \right\} \quad (10.13)$$

όπου $\mathbf{A}_\mu \equiv A_\mu^a T^a$, η οποία μετασχηματίζεται ως

$$\Phi(x, y) \rightarrow e^{i\alpha_a(x)T^a} \Phi(x, y) e^{-i\alpha_a(y)T^a} \quad (10.14)$$

όπου $T^{a\dagger} = T^a$ (ερμιτιανοί) για την $SU(N)$, και αναπτύσσεται ως

$$\Phi(x, x + \delta x) = \mathbb{1} - ig \mathbf{A}_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x^2) \quad (10.15)$$

Από τον συνδυασμό των δυο τελευταίων παίρνουμε ότι τα πεδία βαθμίδας μετασχηματίζονται ως

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow U \mathbf{A}_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (10.16)$$

Ωστόσο, στη μη-Αβελιανή περίπτωση που μας ενδιαφέρει, ο βρόχος Wilson

$$\Phi_C(x, x) \rightarrow e^{i\alpha_a(x)T^a} \Phi_C(x, x) e^{-i\alpha_a(x)T^a} \neq \Phi_C(x, x) \quad (10.17)$$

δεν είναι, προφανώς, αναλλοίωτος κατά βαθμίδα. Εύκολα παρατηρούμε ότι αναλλοίωτο κατά βαθμίδα είναι το ίχνος του βρόχου, λόγω της κυκλικότητας του, και άρα ορίζουμε εκ νέου τον βρόχο Wilson ως

$$W(C) = \text{Tr} \Phi_C(x, x) \quad (10.18)$$

Τώρα, ενώ στην Αβελιανή περίπτωση βλέπουμε ότι η διαφορά

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \equiv -ieF_{\mu\nu} \quad (10.19)$$

ισούται με την πεδιακή δύναμη $F_{\mu\nu}$, βρίσκουμε ότι, αντίστοιχα, στην μη-Αβελιανή περίπτωση έχουμε ότι

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) - ig[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (10.20)$$

Εδώ εντοπίζουμε και τη γεωμετρική ουσία της ενότητας: η πεδιακή δύναμη $F_{\mu\nu}$ μετράει τη διαφορά μεταξύ μιας παράλληλης μετατόπισης $D_\mu D_\nu$ και μιας άλλης, με αντίθετη διαδοχή, $D_\nu D_\mu$, ακριβώς όπως ο τανυστής καμπυλότητας $R^\rho{}_{\mu\sigma\nu}$ μετράει τη διαφορά $[D_\mu, D_\nu]$ σε έναν καμπυλωμένο χώρο. Βέβαια, η διαφορά $[D_\mu, D_\nu]$ των δυο διαδρομών ισοδυναμεί με έναν απειροστά μικρό βρόχο στο επίπεδο $\mu - \nu$, γεγονός που εναρμονίζεται απόλυτα με την εναλλακτική έκφραση του (Αβελιανού) βρόχου Wilson, εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα Stokes ως

$$\Phi_C = e^{i \oint_C = \partial\Sigma A_\mu d\xi^\mu} = e^{i \int_\Sigma F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}} \quad (10.21)$$

Αυτή είναι μια μορφή που θα έπρεπε να αναμένουμε μετά την ανακάλυψη της ισοδυναμίας $F_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu]$, μιας και ο βρόχος Wilson κατασκευάστηκε για αυτόν ακριβώς το σκοπό: να μετράει πόσο αλλάζει ένα αντικείμενο, κατά μήκος του, λόγω της κατά τόπους διαφοράς φάσης!

10.2 Το δυναμικό μεταξύ των quarks

Στην μη-Αβελιανή περίπτωση ισχύει κάτι παρόμοιο με τα τελευταία, με τη διαφορά ότι έχουμε διορθώσεις. Εάν η επιφάνεια Σ είναι ένα μικρό τετράγωνο πλευράς a στο επίπεδο $\mu - \nu$, τότε παίρνουμε

$$\Phi_{\square_{\mu\nu}} = e^{ia^2 \mathbf{F}_{\mu\nu}} + \mathcal{O}(a^4) \quad (10.22)$$

και άρα ο βρόχος Wilson, με μια σύμβαση $1/N$ μπροστά αφού έχουμε N όρους για το ίχνος μιας ποσότητας στη θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(N)$, είναι

$$W_{\square_{\mu\nu}} = \frac{1}{N} \text{Tr}\{\Phi_{\square_{\mu\nu}}\} = 1 - \frac{a^4}{2N} \text{Tr}\{\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu}\} + \mathcal{O}(a^6) \quad (10.23)$$

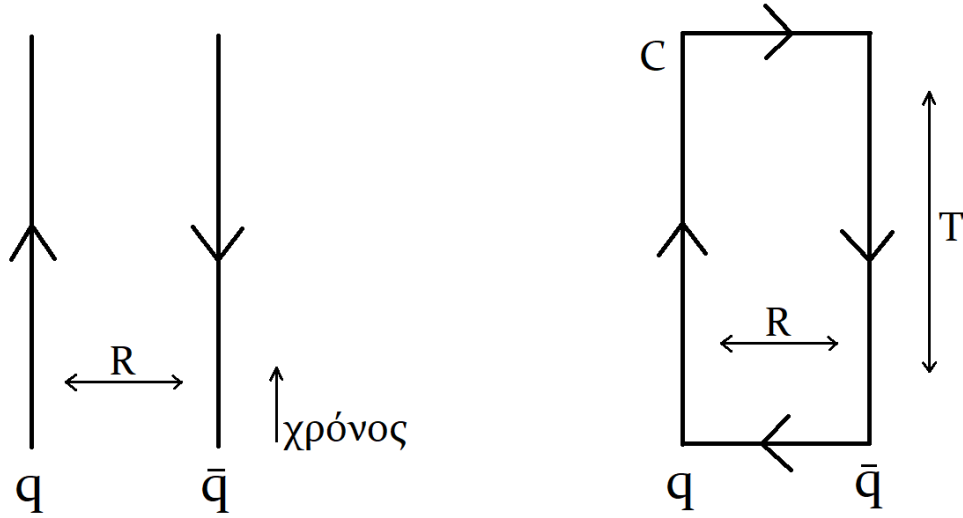
όπου το ίχνος αφορά τους δείκτες της $SU(N)$ αναπαράστασης, ενώ οι δείκτες μ, ν δεν ανθροίζονται. Παρατηρούμε ότι ο όρος πρώτης τάξης είναι ο κινητικός όρος της δράσης για το πεδίο βαθμίδας \mathbf{A}_μ , γεγονός που υπονοεί ότι οι βρόχοι Wilson περιγράφουν τη δυναμική των θεωριών βαθμίδας. Το επιχείρημα αυτό μπορεί να ενισχυθεί κοιτάζοντας καλύτερα τον βρόχο Wilson, στη μορφή

$$\Phi_C = \exp\left(ie \oint_C A_\mu d\xi^\mu\right) = \exp\left(ie \oint_C A_\mu u^\mu dt\right) = \exp\left(i \oint_C A_\mu j^\mu dt\right) \quad (10.24)$$

με $j^\mu \equiv eu^\mu$ το τετρά-ρεύμα του φορτίου e , όπου διακρίνουμε ότι αναδύεται ένας όρος πηγής. Αναπτύσσοντας το εκθετικό στοιχηματίζουμε ότι θα προκύψει όλη η δυναμική της θεωρίας βαθμίδας, ωθώντας μας να αναλογιστούμε τον βρόχο Wilson ως ένα ολοκλήρωμα διαδρομής της θεωρίας και να γράψουμε ότι

$$\langle W(C) \rangle_0 \sim e^{iS} \quad (10.25)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η VEV ενός βρόχου Wilson ο οποίος περνά από ένα quark και ένα anti-quark, όπως στο ακόλουθο σχήμα



καθώς το $T \rightarrow \infty$, δίνεται από τη σχέση

$$\langle W(C) \rangle_0 \propto e^{-V_{q\bar{q}}(R)T} \quad (10.26)$$

Ένας εύκολος τρόπος να το καταλάβουμε αυτό είναι ο εξής. Προστίθοντας απείρως μαζικά quarks ισοδυναμεί με το να προσθέσουμε στη δράση έναν όρο $\int j^\mu A_\mu = \int dt [eA_0(x(q)) - eA_0(x(\bar{q}))]$, όπου $A_0(x(q))$, $A_0(x(\bar{q}))$ είναι το δυναμικό στις θέσεις του quark και του anti-quark, αντίστοιχα. Αυτό δίνει έναν όρο στο e^{iS} ίσο με $e^{iT(V_q - V_{\bar{q}})}$, όπου T ο χρόνος. Στον Ευκλείδιο χώρο, παίρνουμε $e^{-TV_{q\bar{q}}}$, όπου T ο Ευκλείδιος χρόνος. Προφανώς, ο βρόχος που εξετάζουμε είναι ένα τετράγωνο με μήκος T στη κατεύθυνση του χρόνου και μήκος R στη χωρική κατεύθυνση που ενώνει τα quarks, με $T \gg R$.

Στην αρχή του κεφαλαίου αναφερθήκαμε στο βρόχο Wilson ως ένα κριτήριο ικανό να κρίνει εάν μια θεωρία είναι περιοριστική. Ο λόγος είναι πλέον προφανής. Περιοριστική είναι μια θεωρία όταν υπάρχει μια σταθερή δύναμη η οποία αντιστέκεται στον αποχωρισμό των quarks, δηλαδή ένα γραμμικό δυναμικό

$$V_{q\bar{q}}(R) \sim \sigma R \quad (10.27)$$

Από την άλλη, στην QED με απείρως μαζικά (εξωτερικά) quarks, έχουμε το στατικό δυναμικό Coulomb

$$V_{q\bar{q}}(R) \sim \frac{\alpha}{R} \quad (10.28)$$

η οποία είναι μια θεωρία αναλλοίωτη κατά κλίμακα και, επιπλέον, σύμμορφη. Βασικά, αυτή είναι και η μορφή του δυναμικού που αναμένουμε σε μια σύμμορφη θεωρία βαθμίδας, καθώς μόνο η ποσότητα T/R είναι αναλλοίωτη κατά κλίμακα ενώ, παράλληλα, η VEV για τον τετραγωνικό βρόχο Wilson είναι ανάλογη του όρου $e^{-TV_{q\bar{q}}}$, με αποτέλεσμα το δυναμικό να πρέπει να είναι $V_{q\bar{q}} \propto 1/R$. Αυτό είναι και το δυναμικό που περιμένουμε να έχει η $\mathcal{N} = 4$ SYM, η οποία είναι μια σύμμορφη θεωρία.

Επομένως, για μια περιοριστική θεωρία όπως η QCD, έχουμε ότι

$$\langle W(C) \rangle_0 \propto e^{-\sigma T \cdot R} = e^{-\sigma A} \quad (10.29)$$

όπου A είναι μια περιοχή. Παράλληλα, σε μια σύμμορφη θεωρία όπως η QED με εξωτερικά quarks ή η $\mathcal{N} = 4$ SYM με εξωτερικά quarks, έχουμε το αναλλοίωτο κατά κλίμακα δυναμικό

$$\langle W(C) \rangle_0 \propto e^{-\alpha \frac{T}{R}} \quad (10.30)$$

Από όλα τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να αντιληφθούμε την ποσότητα $\langle W(C) \rangle_{0, T \rightarrow \infty}$ ως μια παράμετρο που μετράει την μετάβαση από τον περιορισμό/αποπεριορισμό, μιας και ισχύει $\langle W(C) \rangle_{0, T \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ στην περιοριστική φάση και $\langle W(C) \rangle_{0, T \rightarrow \infty} \neq 0$ στην αποπεριοριστική φάση (Coulomb).

10.3 Ο υπερσυμμετρικός βρόχος Wilson της $\mathcal{N} = 4$ SYM μέσω της αντιστοιχίας AdS/CFT

Τώρα θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει ένα απείρως μαζικό quark στην θεωρία βαθμίδας από τη θεωρία χορδών, μέσω της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Όπως δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, εάν έχουμε έναν μεγάλο αριθμό, $N \rightarrow \infty$, από D-βράνες, τοποθετημένες στο ίδιο σημείο, τότε αποκτούμε μια $U(N)$ θεωρία βαθμίδας. Στην περίπτωση αυτή, οι χορδές με δυο άκρα σε διαφορετικές βράνες είναι άμαζες και αντιστοιχούν σε πεδία βαθμίδας, $A_\mu^a = (\lambda^a)_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |\mu\rangle$.

Εάν θεωρήσουμε $N + 1$ D-βράνες που δίνουν μια $U(N + 1)$ ομάδα βαθμίδας και πάρουμε μια από τις βράνες και την διαχωρήσουμε από τις υπόλοιπες, τότε αυτό σημαίνει ότι σπάμε την ομάδα βαθμίδας αυτή σε $U(N) \times U(1)$. Οι χορδές που έχουν το ένα άκρο στις N D-βράνες και το άλλο στη διαχωρισμένη D-βράνη θα είναι μαζικές, με $\text{μάζα} = \text{τάση χορδής} \times \text{απόσταση βρανών}$ και αναπαριστώνται από μια κατάσταση

$$|N + 1\rangle \otimes |i\rangle \quad (10.31)$$

όπου $i = 1, \dots, N$, και η οποία είναι, προφανώς, στη θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας $U(N)$, καθώς ο i είναι θεμελιώδης δείκτης. Η μάζα της κατάστασης αυτής θα είναι, συγκεκριμένα,

$$M = \frac{1}{2\pi\alpha'} r = \frac{U}{2\pi} \quad (10.32)$$

σύμφωνα με τη μετρική (8.7), όπου θεωρούμε ότι η χορδή είναι εκτεταμένη κατά μήκος της πέμπτης διάστασης του χώρου αυτού.

Η χορδή συμπεριφέρεται ως ένα W-μποζόνιο από την άποψη της αρχικής ομάδας βαθμίδας $U(N + 1)$, το οποίο στο Καθιερωμένο Πρότυπο αποκτά μάζα μέσω του μηχανισμού Higgs (σπάσιμο $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$). Το σπάσιμο $U(N + 1) \rightarrow U(N) \times U(1)$ είναι σαν ένας τέτοιος μηχανισμός Higgs, κατά τον

οποίο, όπως είχαμε εξηγήσει, το διανυσματικό mode της χορδής, A_μ^a , καταβροχθίζει έναν βαθμό ελευθερίας από τα βαθμωτά πεδία, και συγκεκριμένα αυτόν του βαθμωτού mode που αντιστοιχεί στην διάσταση που ενώνει τις διαχωρισμένες D-βράνες, με αποτέλεσμα το διανυσματικό αυτό πεδίο να γίνει μαζικό.

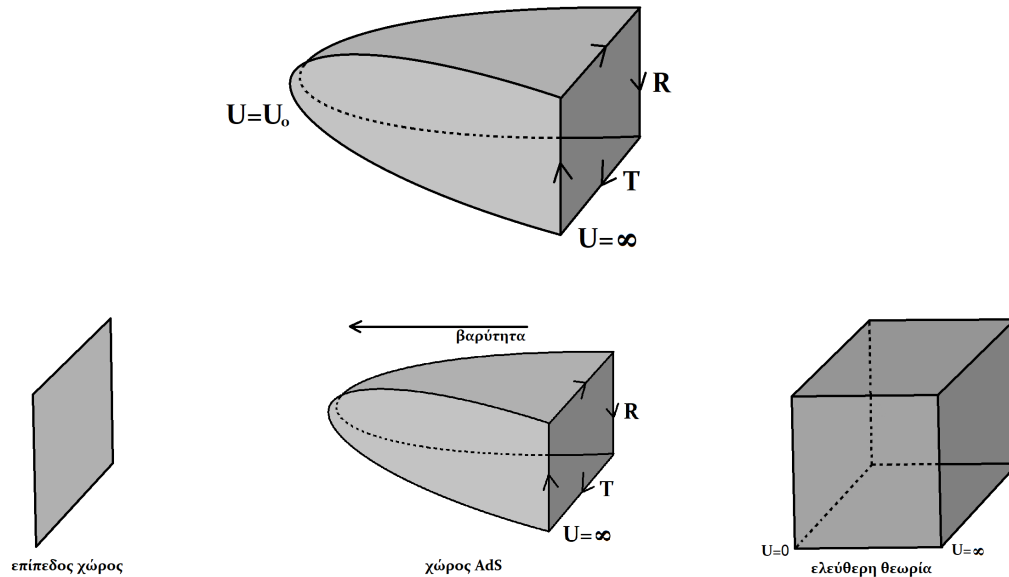
Συνεπώς, έχουμε στα χέρια μας μια κατάσταση χορδής με μάζα, όπου το ένα άκρο αναπαρίσταται από ένα παράγοντα Chan-Paton $|i\rangle$, με i να είναι δείκτης της θεμελιώδους αναπαράστασης της $U(N)$ και το οποίο λειτουργεί ως μια πηγή για τα (μαζικά) πεδία βαθμίδας της $U(N)$. Αν, λοιπόν, φανταστούμε το άκρο $|i\rangle$ που είναι τοποθετημένο πάνω στις N D3-βράνες, οι οποίες είναι στοιβαγμένες² (και συμπίπτουσες) στον χώρο $AdS_5 \times S^5$, και το άλλο άκρο $|N+1\rangle$ στο όριο του χώρου, όπου ζεί η σύμμορφη θεωρία πεδίου, η τελευταία θα βλέπει ένα αντικείμενο που έχει μάζα (10.32), είναι στη θεμελιώδη αναπαράσταση της $U(N)$ και είναι πηγή για τα πεδία βαθμίδας της ίδιας ομάδας. Τούτέστιν, η θεωρία πεδίου θα νιώθει το άκρο αυτό ως ένα quark!

Εδώ αξίζει να κάνουμε μια αναφορά στην καθαρή θεωρία χορδών και τη συσχέτιση της με την κβαντική θεωρία πεδίου. Συγκεκριμένα, μια ανοικτή χορδή με άκρα στις N και \bar{N} αναπαραστάσεις αντίστοιχα (δηλαδή πάνω σε N βράνες) μπορεί να νοηθεί ως ένα μεσόνιο, όπου τα δυο άκρα της χορδής είναι το quark και το anti-quark, ενώ η χορδή είναι το μαζικό W-μποζόνιο που τα ενώνει, δηλαδή η αλληλεπίδραση τους. Στην περίπτωση μας, θέλαμε να φτιάξουμε ένα και μοναδικό quark, οπότε το ένα άκρο της χορδής είναι στη θεμελιώδη αναπαράσταση και λειτουργεί ως πηγή της αναπαράστασης αυτής, η οποία γίνεται ολογραφικά αισθητή μέσω του άλλου άκρου της χορδής που ξεπροβάλλει στο όριο του χώρου.

Από την (10.32), για να πάρουμε την άπειρη μάζα την οποία επιθυμούμε πρέπει να πάρουμε το όριο $U \rightarrow \infty$. Συνεπώς, το όνειρο ενός απείρως μαζικού εξωτερικού quark πραγματοποιείται εάν θεωρήσουμε μια χορδή στον AdS χώρο με μετρική (8.7), εκτεταμένη μεταξύ του απείρου στο U και ενός πεπερασμένου σημείου. Παράλληλα, εφ' όσον στο άπειρο ζεί η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία βαθμίδας, η οποία και εγχολπώνει τον βρόχο Wilson (καθώς και το άκρο $|i\rangle$, δηλαδή το quark), αντιλαμβανόμαστε τον βρόχο αυτό, από την άποψη της θεωρίας χορ-

²Όπως είχαμε δείξει, οι συμπίπτουσες N D3-βράνες είναι ισοδύναμες με τη γεωμετρία της μελανής 3-βράνης, στις οποίες το όριο $r \rightarrow 0$, δηλαδή στον χώρο $AdS_5 \times S^5$, ζεί η θεωρία χορδών. Συνεπώς, οι N D3-βράνες γεμίζουν όλο το εσωτερικό του $AdS_5 \times S^5$.

δών, ως συνοριακή συνθήκη της χορδής. Συνεπώς, το world-sheet της χορδής εκτείνεται από το βρόχο Wilson στο άπειρο έως ένα πεπερασμένο σημείο στον AdS, σχηματίζοντας μια λεία επιφάνεια, όπως στο επόμενο σχήμα.



Βέβαια, η μοίρα του βρόχου Wilson στην αντιστοιχία AdS/CFT είναι λίγο διαφορετική. Αυτό μπορούμε να το αντιληφθούμε και από τις δυο μάντες της αντιστοιχίας.

Πρώτα, από την άποψη της θεωρίας χορδών, μια χορδή δεν βρίσκεται μονάχα μέσα στον AdS_5 , αλλά και μέσα στην 5-σφαίρα S^5 , με αποτέλεσμα ο βρόχος Wilson που περιγράφει το σύνορο της να πρέπει να παραμετροποιείται και από τις συντεταγμένες θ^I της S^5 , μαζί και με τα αντίστοιχα πέντε βαθμωτά modes της χορδής. Το έκτο βαθμωτό mode είναι αυτό που κατασπαράχθηκε από το πεδίο βαθμίδας, ώστε το τελευταίο να γίνει μαζικό, και το οποίο αντιστοιχεί στην διάσταση που χωρίζει τις βράνες που αποστασιοποιήθηκαν, δηλαδή την πέμπτη διάσταση του AdS_5 χώρου.

Ισοδύναμα, από την άποψη της σύμμορφης θεωρίας πεδίου, ο βρόχος Wilson δεν αναφέρεται πλέον σε μια συνηθισμένη $SU(N)$ θεωρία βαθμίδας, αλλά στην $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία. Τουτέστιν, δεν έχουμε μονάχα τα φορτία (γεννήτορες) της ομάδας $SU(N)$, αλλά και τα «βαθμωτά φορτία» της ομάδας $SO(6)$, η οποία εναλλάσσει τα έξι βαθμωτά πεδία μεταξύ τους. Συνεπώς, πλέον, δεν χρειάζεται μονάχα τον πεδίο βαθμίδας A_μ^a , το οποίο εγκολπώνει την αλλαγή φάσης κατά μήκος του βρόχου λόγω του φορτίου της $SU(N)$, αλλά και τα βαθμωτά πεδία X^I , τα οποία κωδικοποιούν την αντίστοιχη αλλαγή φάσης λόγω των φορτίων της $SO(6)$. Εδώ, τα βαθμωτά πεδία είναι πέντε, για τον ίδιο λόγο όπως και στη θεωρία χορδών. Επίσης, όπως και το πεδίο βαθμίδας συνοδεύεται από μια σταθερά σύζευξης στον βρόχο, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για τα βαθμωτά πεδία.

Όλα τα παραπάνω μας οδηγούν να κατασκευάσουμε τον υπερσυμμετρικό βρόχο Wilson ως

$$W(C) = \frac{1}{N} \text{Tr} P \exp \left[\oint \left(ieA_\mu \dot{x}^\mu + \theta_I X^I |\dot{x}^\mu| \right) d\tau \right] \quad (10.33)$$

όπου $X^I = X^I(x^\mu)$, ενώ θεωρούμε μόνο την περίπτωση όπου $\theta_I = \text{σταθερό}$, διότι τότε ο τετράγωνος βρόχος είναι υπερσυμμετρικός. Συγκεκριμένα, οι σταθερές συντεταγμένες θ_I κατανοούνται, στη θεωρία πεδίου, ως οι σταθερές σύζευξης των βαθμωτών πεδίων X^I που επιθυμούσαμε.

Από όλη την παραπάνω συζήτηση, ακολουθεί φυσιολογικά ότι η συνταγή υπολογισμού του $\langle W(C) \rangle$ είναι να αντιληφθούμε την ποσότητα αυτή ως τη συνάρτηση επιμερισμού (πλάτος μετάβασης στο κενό) της χορδής με όριο το C . Στο όριο της υπερβαρύτητας ($g_s \rightarrow 0$, $g_s N$ πεπερασμένο και μεγάλο) παίρνουμε ότι

$$\langle W(C) \rangle = Z_{string}[C] = e^{-S_{string}[C]} \quad (10.34)$$

όπου S_{string} είναι η δράση του world-sheet, δηλαδή $1/(2\pi\alpha') \times$ την επιφάνεια του world-sheet (επιφάνεια στον $AdS_5 \times S^5$, όχι στην 4-διάστατη προβολή). Βέβαια, η επιφάνεια αυτή είναι μεγαλύτερη από τη 4-διάστατη επιφάνεια που εμπερικλύει το C και, ως εκ τούτου, δεν δίνει τον νόμο επιφανείας $e^{-\sigma A}$ που αθώα θα περιμέναμε για το περιοριστικό δυναμικό μεταξύ δυο quarks. Όταν η αθωότητα αυτή όμως σπλωθεί από την αμαρτία του σύμμορφου χαρακτήρα της $\mathcal{N} = 4$ SYM, τότε αναθεωρούμε και περιμένουμε τον σύμμορφα αναλλοίωτο

νόμο $\sim T/R$.

Υποθετικά μιλώντας, το world-sheet της χορδής θα ισοδυναμούσε με την 4-διάστατη επιφάνεια που εμπερικλύει το C , εάν και μόνον εάν η χορδή βρισκόταν στον επίπεδο χώρο.

Παρά όλα αυτά, στον AdS χώρο, έχουμε ένα βαρυτικό πεδίο

$$ds^2 = \alpha' \frac{U^2}{R^2/\alpha'} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \dots \quad (10.35)$$

το οποίο και συγκρίνουμε, ώστε να καταλάβουμε την φυσική του, με την Νευτώνια προσέγγιση

$$ds^2 = (1 + 2V)(-dt^2 + \dots) \quad (10.36)$$

όπου V είναι το Νευτώνιο δυναμικό. Νευτώνια βαρύτητα σημαίνει ότι η χορδή θα πήγαινε στο ελάχιστο V , δηλαδή, στην περίπτωση μας, στο ελάχιστο U . Συνεπώς, το world-sheet της χορδής με όριο στο $U = \infty$ τραβιέται μέχρι ένα $U = U_0$, έως όπου σταματήσει λόγω της τάσης της χορδής.

Αλλά η συνταγή μας δεν είναι ακόμα πλήρης, μιας και η επιφάνεια του world-sheet εκτείνεται από το $U = U_0$ μέχρι το $U = \infty$ και άρα αποκλίνει (είναι άπειρη), με αποτέλεσμα να υπολογίζουμε $\langle W(C) \rangle = 0$. Αυτό είναι τελείως λογικό ποιοτικά, αφού εξ' αρχής κατασκευάσαμε ένα W-μποζόνιο άπειρης μάζας, δηλαδή μια χορδή άπειρης έκτασης κατά μήκος της πέμπτης διάστασης στον AdS₅. Οπότε, η δράση που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι αυτή ακριβώς η άπειρη μάζα. Τουτέστιν, αφαιρούμε την ποσότητα ϕl , όπου l είναι η περίμετρος του βρόχου C και ϕ είναι η μάζα του ελεύθερου W-μποζονίου (ελεύθερης χορδής), $U/(2\pi)$. Ενώ το world-sheet αφορά μονάχα τις επιφάνειες που σχηματίζονται από τις χρονικές ευθείες του τετραγωνου βρόχου, επιλέγουμε να πολλαπλασιάσουμε με όλη την περίμετρο l του C , μιας και ισχύει ότι $T \gg R$. Επιτέλους, αποχτάμε την τελική συνταγή για τον βρόχο Wilson, στην αντιστοιχία AdS/CFT,

$$\langle W(C) \rangle = e^{-(S_\phi - l\phi)} \quad (10.37)$$

Συνεπώς, υπολογίζοντας την παραπάνω ποσότητα στη θεωρία χορδών, σε συνδυασμό με την έκφραση (10.26), προσδιορίζουμε το δυναμικό $V_{q\bar{q}}$ μεταξύ του quark και του anti-quark.

10.4 Το δυναμικό μεταξύ των quarks

Επιτέλους, ήρθε η ώρα να υπολογίσουμε ακριβώς το δυναμικό μεταξύ των quarks. Συγκεκριμένα, θα υπολογίσουμε το VEV του βρόχου Wilson που δίνεται από ένα απείρως λεπτό τετράγωνο, για $T \rightarrow \infty$, όπου το quark q βρίσκεται στη θέση $x = -L/2$ και το anti-quark \bar{q} στο $x = +L/2$. Η μετρική του Ευκλείδιου $\text{AdS}_5 \times S^5$ χώρου είναι

$$ds^2 = \alpha' \left[\frac{U^2}{R^2/\alpha'} (dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2 dU^2}{\alpha' U^2} + \frac{R^2}{\alpha'} d\Omega_5^2 \right]; \quad R^2 = \alpha' \sqrt{4\pi g_s N} \quad (10.38)$$

Πριν από όλα, λοιπόν, πρέπει να υπολογίσουμε τη δράση της χορδής S_{string} για αυτό το υπόβαθρο. Η Ευκλείδια δράση Nambu-Goto είναι

$$S_{string} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{\det(G_{MN} \partial_a X^M \partial_b X^N)} \quad (10.39)$$

Επιλέγουμε τη στατική βαθμίδα³, όπου $\tau = t$ και $\sigma = x$, καθώς, εκτός του ότι απλοποιεί τον υπολογισμό, είναι συμβατή με το γεγονός ότι αναζητούμε μια στατική λύση (η χορδή είναι στατική - απείρως μαζικά quarks - ενώ το world-sheet της δημιουργείται με το πέρασ του χρόνου T). Επιπλέον, θεωρούμε ότι το world-sheet είναι αναλλοίωτο υπό μετατοπίσεις στη χρονική κατεύθυνση, μια θεώρηση που στέκει μονάχα στο όριο $T/L \rightarrow \infty$ (αλλιώς η καμπυλότητα του world-sheet στις γωνίες γίνεται σημαντική), ενώ έχουμε μονάχα μια μεταβλητή για το world-sheet, $U = U(\sigma) = U(x)$, μιας και η ρύθμιση είναι στατική.

Υπολογίζουμε την εμβάπτυση της χορδής $h_{ab} = G_{MN} \partial_a X^M \partial_b X^N$ ως ($\tilde{R}^2 \equiv R^2/\alpha'$, $1 \equiv \tau$, $2 \equiv \sigma$)

$$\begin{aligned} h_{11} &= \alpha' \frac{U^2}{\tilde{R}^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \alpha' \frac{U^2}{\tilde{R}^2}; & h_{12} &= 0 \\ h_{22} &= \alpha' \frac{U^2}{\tilde{R}^2} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 + \frac{\tilde{R}^2}{U^2} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right)^2 = \alpha' \left(\frac{U^2}{\tilde{R}^2} + \frac{\tilde{R}^2}{U^2} U'^2 \right) \end{aligned} \quad (10.40)$$

³Στατική, διότι για σταθερό χωροχρονικό t , έχουμε σταθερό τ , το οποίο αναπαριστά ένα (στατικό) στυγμίοτυπο της χορδής.

Επομένως

$$S_{string} = \frac{1}{2\pi} T \int dx \sqrt{(\partial_x U)^2 + \frac{U^4}{\tilde{R}^4}} \quad (10.41)$$

όπου ελαττώσαμε το σύστημα σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα μηχανικής.

Ορίζουμε το U_0 ως το ελάχιστο του $U(x)$ και $y = U/U_0$ και οι εξισώσεις κίνησης δίνουν τη λύση

$$x = \frac{\tilde{R}^2}{U_0} \int_1^{U/U_0} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}} \quad (10.42)$$

δηλαδή μια λύση $x(U, U_0)$ η οποία αντιστρέφεται ωστέ να δώσει το $U(x, U_0)$. Παρατηρούμε ότι για $U = \infty$ αναφερόμαστε στη θέση $x = L/2$ της χορδής, οπότε βρίσκουμε

$$\frac{L}{2} = \frac{\tilde{R}^2}{U_0} \int_1^\infty \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^4 - 1}} = \frac{\tilde{R}^2 \sqrt{2} \pi^{3/2}}{U_0 \Gamma(1/4)^2} \quad (10.43)$$

η οποία σχέση δίνει το U_0 .

Συνεπώς, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το δυναμικό μέσω της συνταγής

$$S_\phi - l\phi = TV_{q\bar{q}}(L) \quad (10.44)$$

απαλλοίφοντας, πρώτα, τους δυο απειρισμούς, ολοκληρώνοντας μονάχα εως ένα U_{max} . Έχουμε ότι $l \simeq 2T$ και ότι η μάζα της χορδής (που εκτείνεται από το $U = 0$ εως το U_{max}) είναι

$$\phi = \frac{U_{max} - U_0}{2\pi} + \frac{U_0}{2\pi} = \frac{U_0}{2\pi} \int_1^{y_{max}} dy + \frac{U_0}{2\pi} \quad (10.45)$$

τα οποία δίνουν ότι

$$TV_{q\bar{q}}(L) = T \frac{2U_0}{2\pi} \left[\int_1^\infty dy \left(\frac{y^2}{\sqrt{y^4 - 1}} - 1 \right) - 1 \right] \quad (10.46)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας τα U_0, R , παίρνουμε το δυναμικό

$$V_{q\bar{q}}(L) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(1/4)^4} \frac{\sqrt{2g_{YM}^2 N}}{L} \quad (10.47)$$

το οποίο είναι $V_{q\bar{q}}(L) \propto 1/L$, όπως αναμέναμε για μια σύμμορφη θεωρία. Παράλληλα, όμως, παρατηρούμε ότι $V_{q\bar{q}}(L) \propto \sqrt{2g_{YM}^2 N}$, το οποίο δεν είναι πολυώνυμο και άρα το αποτέλεσμα δεν είναι διαταρακτικό. Επί παραδείγματι, η διαταρακτική μέθοδος σε 1-loop θα έδινε ένα αποτέλεσμα ανάλογο του $g_{YM}^2 N$.

Κεφάλαιο 11

Πεπερασμένη θερμοκρασία

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να εισάγουμε πεπερασμένη θερμοκρασία στην AdS/CFT αντιστοιχία, έχοντας ως σκοπό να πλησιάσουμε τις εφαρμογές του παρατηρήσιμου κόσμου. Θα δούμε ότι, πράγματι, υπάρχει μια παγκοσμιότητα στα φαινόμενα πεπερασμένης θερμοκρασίας, η οποία μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε υπολογισμούς της $\mathcal{N} = 4$ SYM πεπερασμένης θερμοκρασίας ώστε να περιγράψουμε την QCD πεπερασμένης θερμοκρασίας.

11.1 Πεπερασμένη θερμοκρασία σε μια θεωρία πεδίου

Πρώτα, θα δούμε πως να εισάγουμε πεπερασμένη θερμοκρασία στη θεωρία πεδίου.

Στη κβαντομηχανική, εκφράζουμε το πλάτος πιθανότητας μετάβασης ανάμεσα σε δυο σημεία q, t και q', t' ως

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \sum_n = \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-iE_n(t'-t)} \quad (11.1)$$

ή ως ολοκλήρωμα διαδρομής

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{iS[q(t)]} \quad (11.2)$$

Εάν πραγματοποιήσουμε μια στροφή Wick κατά $t \rightarrow -it_E, t' - t \rightarrow -i\beta, iS \rightarrow -S_E$, τέτοια ώστε

$$iS[q] = i \int_0^{t_e=\beta} (-i dt_E) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d(-it_E)} \right)^2 - V(q) \right] \equiv -S_E[q] \quad (11.3)$$

τότε αποκτάμε την έκφραση

$$\langle q', \beta | q, 0 \rangle = \sum_n \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-\beta E_n} \quad (11.4)$$

Συνεπώς, εάν περιοριστούμε στην περίπτωση $q' = q$ και ολοκληρώσουμε για όλα τα q , τότε αποκτάμε τη στατιστική συνάρτηση επιμερισμού ενός συστήματος σε θερμοκρασία T , με $kT \equiv 1/\beta$,

$$\int dq \langle q', \beta | q, 0 \rangle = \int dq \sum_n |\psi_n(q)|^2 e^{-\beta E_n} = \text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\} = Z[\beta] \quad (11.5)$$

η οποία αντιστοιχεί σε ένα ολοκλήρωμα κλειστών διαδρομών Ευκλείδιου χρονικού μήκους $\beta = 1/(kT)$, εφ' όσον $q' \equiv q(t_E = \beta) = q(t_E = 0) \equiv q$, το οποίο δίδεται από την φόρμουλα Feynman-Kac

$$Z[\beta] = \text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\} = \int \mathcal{D}q e^{-S_E[q]} \Big|_{q(t_E+\beta)=q(t_E)} \quad (11.6)$$

η οποία, στη θεωρία πεδίου, αντιστοιχεί στην Ευκλείδια συνάρτηση επιμερισμού

$$Z_E[\beta] = \int_{\phi(\vec{x}, t_E+\beta)=\phi(\vec{x}, t_E)} \mathcal{D}e^{-S_E[\phi]} = \text{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\} \quad (11.7)$$

όπου και πάλι αυτή εκφράζεται ως ένα Ευκλείδιο ολοκλήρωμα διαδρομής για διαδρομές περιοδικού Ευκλείδιου χρόνου. Μπορούμε να επεκτείνουμε τη φόρμουλα αυτή προσθέτοντας πηγές και υπολογίζοντας διαδότες και συναρτήσεις συσχέτισης, όπως ακριβώς στη θεωρία πεδίου μηδενικής θερμοκρασίας.

Οπότε, συμπεραίνουμε ότι η θεωρία πεδίου πεπερασμένης θερμοκρασίας, για στατικές ποσότητες μόνο (χρονο-ανεξάρτητες), αποκτάται θεωρώντας περιοδικό φανταστικό χρόνο, με περίοδο $\beta = 1/kT$.

11.2 Μελανές οπές και ακτινοβολία Hawking

Θέλουμε να περιγράψουμε την κβαντική θεωρία πεδίου στο υπόβαθρο της μελανής οπής. Η τελευταία εξετάζεται ευκολότερα αφού πραγματοποιήσουμε μια στροφή Wick σε Ευκλείδιο χρόνο, οπότε και αποκτάμε την Ευκλείδια μελανή οπή Schwarzschild

$$ds^2 = + \left(1 - \frac{2MG_N}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2MG_N}{r}} + r^2 d\Omega_2^2 \quad (11.8)$$

Τώρα, έχοντας Ευκλείδια υπογραφή, δεν έχει νόημα να περάσουμε εντός του ορίζοντα $r < 2MG_N$, αφού εκεί η υπογραφή δεν θα είναι πλέον Ευκλείδια αλλά $(- - ++)$ αντ' αυτού¹.

Συνεπώς, για να αντιπροσωπεύει η μετρική (11.8) μια μελανή οπή, ο ορίζοντας γεγονότων θα πρέπει να μην παρουσιάζει μοναδικότητα (singularity) και, παράλληλα, να μην υπάρχει συνέχεια προς το εσωτερικό του.

Για να δούμε ότι αυτό είναι δυνατό εξετάζουμε τη γεωμετρία ενός κώνου, σε Ευκλείδια υπογραφή, δηλαδή τη μετρική

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (11.9)$$

με $\theta \in [0, 2\pi - \Delta]$. Εάν $\Delta \neq 0$, τότε το σημείο $\rho = 0$ παρουσιάζει μοναδικότητα (κωνική μοναδικότητα) και η παραπάνω μετρική εκφράζει έναν κώνο. Όμως, εάν $\Delta = 0$, τότε ο κώνος δίνει τη θέση του σε έναν λείο Ευκλείδιο χώρο.

Το ίδιο συμβαίνει και σε μια Ευκλείδια μελανή οπή, η οποία κοντά στον ορίζοντα, $r = 2GM_N$, γίνεται

$$ds^2 \simeq \frac{\tilde{r}}{2GM_N} d\tau^2 + 2GM_N \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}} + (2GM_N)^2 d\Omega_2^2 \quad (11.10)$$

όπου $r - 2MG_N \equiv \tilde{r}$.

¹Στην υπογραφή Lorentz, μέσα από τον ορίζοντα, τα r, t απλώς ανταλλάσσουν ρόλους και η υπογραφή παραμένει ως έχει.

Ορίζοντας $\rho = \sqrt{r}$ παίρνουμε

$$ds^2 \simeq 8MG_N \left(d\rho^2 + \frac{\rho^2 d\tau^2}{(4MG_N)^2} \right) + (2MG_N)^2 d\Omega_2^2 \quad (11.11)$$

όπου βλέπουμε ότι, κοντά στον ορίζοντα, η μετρική είναι κωνικής μορφής. Εάν το τ δεν έχει κάποιον περιορισμό, τότε η μετρική δεν βγάζει ιδιαίτερο νόημα. Για να έχει, η γεωμετρία αυτή φυσική σημασία (να μην συνεχίζει μέσα στον ορίζοντα), θα πρέπει ο χρόνος να είναι περιοδικός.

Βέβαια, για οποιαδήποτε περίοδο, αποκτάμε ένα κώνο με μοναδικότητα στο $\rho = 0 (r = 2MG_N)$. Για να αποφύγουμε τη μοναδικότητα, θα πρέπει το $\tau/(4MG_N)$ να έχει περίοδο 2π , όπου αποκτάμε, παράλληλα, έναν λείο Ευκλείδιο χώρο που δεν συνεχίζει μέσα από το $r = 2MG_N$, ακριβώς όπως επιθυμούσαμε.

Οπότε, έχουμε περιοδικό Ευκλείδιο χρόνο τ , με περίοδο $\beta_\tau = 8\pi MG_N$, ο οποίος, με βάση την προηγούμενη ενότητα, αντιστοιχεί σε κβαντική θεωρία πεδίου με θερμοκρασία

$$T_{BH} = \frac{1}{\beta_\tau} = \frac{1}{8\pi MG_N} \quad (11.12)$$

όπου συμπεραίνουμε ότι η κβαντική θεωρία πεδίου, στην παρουσία μιας μελανής οπής, έχει πεπερασμένη θερμοκρασία T_{BH} , ή, αλλιώς, ότι οι μελανές οπές ακτινοβολούν θερμικά σε θερμοκρασία T_{BH} .

Παρά όλα αυτά, δεν μπορούμε να πούμε ότι βάζουμε μια κβαντική θεωρία πεδίου σε πεπερασμένη θερμοκρασία, απλώς εισάγοντας μια μελανή οπή, καθώς η ειδική θερμότητα της τελευταίας είναι

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = -\frac{1}{8\pi T^2 G_N} < 0 \quad (11.13)$$

που σημαίνει ότι, αυτή, είναι θερμοδυναμικά ασταθής, και δεν αντιπροσωπεύει μια κατάσταση ισορροπίας.

11.3 Η AdS μελανή οπή

Όπως είδαμε, η μετρική του $(n + 1)$ -διάστατου global Anti-de Sitter χώρου μπορεί να γραφτεί ως

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{R^2} + 1\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{R^2} + 1} + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (11.14)$$

η οποία, για μια μελανή οπή μέσα στο χώρο αυτό, γίνεται

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{R^2} + 1 - \frac{w_n M}{r^{n-2}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{R^2} + 1 - \frac{w_n M}{r^{n-2}}} + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (11.15)$$

όπου είναι

$$w_n = \frac{8\pi G_N^{(n+1)}}{(n-2)\Omega_{n-1}} \quad (11.16)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας για την Ευκλείδια έκδοση της AdS_{n-1} μελανής οπής. Ορίζοντας τον εξωτερικό ορίζοντα r_+ ως την μεγαλύτερη λύση στην εξίσωση

$$\frac{r^2}{R^2} + 1 - \frac{w_n M}{r^{n-2}} = 0 \quad (11.17)$$

η Ευκλείδια μετρική, κοντά στον ορίζοντα αυτό ($\delta r = r - r_+$), γίνεται

$$ds^2 \simeq \left(\frac{2r_+}{R^2} + \frac{(n-2)w_n M}{r_+^{n-1}}\right) \delta r dt^2 + \frac{(d\delta r)^2}{\delta r \left(\frac{2r_+}{R^2} + \frac{(n-2)w_n M}{r_+^{n-1}}\right)} + r_+^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (11.18)$$

ενώ, για να μην έχουμε μοναδικότητα, θέλουμε το t περιοδικό, με περίοδο

$$\beta_t = \frac{4\pi}{\frac{2r_+}{R^2} + \frac{(n-2)w_n M}{r_+^{n-1}}} = \frac{4\pi}{\frac{nr_+}{R^2} + \frac{(n-2)}{r_+}} \quad (11.19)$$

όπου για την τελευταία ισότητα παραγωγίσαμε την (11.17). Οπότε, τελικά, η θερμοκρασία της AdS_{n-1} μελανής οπής θα είναι

$$T = \frac{nr_+^2 + (n-2)R^2}{4\pi R^2 r_+} \quad (11.20)$$

η οποία έχει ειδική θερμότητα

$$\frac{1}{C} = \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{\partial T(r_+)}{\partial r_+} \frac{\partial r_+(M)}{\partial M} = \frac{\partial r_+}{\partial M} \left[\frac{nr_+^{n-1}}{R^2} + (n-2)r_+^{n-3} \right] = w_n \quad (11.21)$$

όπου, προφανώς, $\partial r_+/\partial M > 0$. Οπότε, το ελάχιστο της θα βρεθεί από τη συνθήκη $\partial T/\partial r_+ = 0$, η οποία δίνει τον ορίζοντα

$$r_+ = R\sqrt{\frac{n-2}{n}} \quad (11.22)$$

ο οποίος, με τη σειρά του, συνεπάγει τη θερμοκρασία της ελάχιστης ειδικής θερμότητας

$$T_{min} = \frac{\sqrt{n(n-2)}}{2\pi R} \quad (11.23)$$

Για $\partial T/\partial M < 0$, δηλαδή τον κλάδο των μικρών M , η AdS_{n-1} μελανή οπή είναι ασταθής, όπως και η μελανή οπή Schwarzschild. Μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση η λύση αποτελεί μια μικρή διαταραχή της περίπτωσης Schwarzschild, καθώς η μελανή οπή είναι μικρή συγκριτικά με την ακτίνα καμπυλότητας του χώρου AdS.

Για $\partial T/\partial M > 0$, δηλαδή τον κλάδο των μεγαλύτερων M , η AdS_{n-1} μελανή οπή είναι θερμοδυναμικά σταθερή. Επιπρόσθετα, όμως, θα πρέπει να ελέγξουμε ότι η ελεύθερη ενέργεια της μελανής οπής, F_{BH} , είναι μικρότερη από αυτή του αγνού AdS χώρου, F_{AdS} .

Η ελεύθερη ενέργεια F ορίζεται ως

$$Z = e^{-\beta F} \quad (11.24)$$

όπου $\beta = 1/T$ (εάν $k = 1$). Παράλληλα, σε μια θεωρία βαρύτητας, η συνάρτηση επιμερισμού δίνεται από την βαρυτική Ευκλείδεια δράση ως

$$Z_{grav} = e^{-S_E} \quad (11.25)$$

Συνεπώς, μέσω της αντιστοιχίας $Z = Z_{grav}$, προκύπτει ότι

$$S_E = \frac{F}{T} \quad (11.26)$$

όπου η σύγκριση

$$F_{BH} - F_{AdS} = T(S_{BH} - S_{AdS}) \quad (11.27)$$

δίνει (μετά από εκτεταμένους υπολογισμούς) αρνητικές τιμές μόνον εάν

$$T > T_1 \equiv \frac{n-1}{2\pi R} > T_{min} \quad (11.28)$$

Τέλος, υπάρχει ένα ακόμη ζήτημα. Η μετρική (11.15), για μεγάλα r , είναι

$$ds^2 \simeq \left(\frac{r}{R} dt\right)^2 + \left(\frac{R}{r} dr\right)^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (11.29)$$

όπου ο Ευκλείδειος χρόνος είναι περιοδικός, δηλαδή είναι ένας κύκλος με περίμετρο $\beta_t = (r/R) \cdot (1/T)$, ενώ ο τελευταίος όρος αντιπροσωπεύει $(n-1)$ -διάστατη σφαίρα ακτίνας r . Στο όριο του χώρου, $r \rightarrow \infty$, αυτή η μετρική γίνεται

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R} dt\right)^2 + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \quad (11.30)$$

όπου εκτός του συνολικού παράγοντα r , εκεί, έχει την τοπολογία $S^1 \times S^{n-1}$.

Στο όριο του χώρου ζεί και η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία βαθμίδας, η οποία είναι συμμετρη αναλλοίωτη και, συνεπώς, ο παράγοντας r δεν παίζει κάποιο ρόλο. Όμως, όπως έχουμε δείξει, η θεωρία αυτή θέλουμε να ζεί στο χώρο $S^1 \times R^{n-1}$,

δηλαδή σε ένα n -διάστατο επίπεδο χώρο πεπερασμένης θερμοκρασίας (περιοδικού Ευκλείδειου χρόνου), κι όχι στον $S^1 \times S^{n-1}$.

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να πάρουμε τον λόγο των μεγεθών των S^1, S^{n-1} στο άπειρο

$$\frac{g_{\Omega\Omega}}{g_{tt}} = \frac{r}{\frac{r}{R} \frac{1}{T}} = R \cdot T \rightarrow \infty \quad (11.31)$$

όπου υπονοείται ότι $T \rightarrow \infty$, το οποίο συμβαίνει μόνο όταν $M \rightarrow \infty$. Παράλληλα, για το όριο αυτό, πρέπει να αναπροσαρμετροποιήσουμε τις συντεταγμένες έτσι ώστε να έχουμε πεπερασμένες ποσότητες, κάτι που επιτυγχάνεται με τους μετασχηματισμούς

$$r = \left(\frac{w_n M}{R^{n-2}} \right)^{1/n} \rho; \quad t = \left(\frac{w_n M}{R^{n-2}} \right)^{-1/n} \tau \quad (11.32)$$

υπό τους οποίους, η μετρική (11.15) γίνεται²

$$ds^2 = \left(\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{R^{n-2}}{\rho^{n-2}} \right) d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{R^{n-2}}{\rho^{n-2}}} + \rho^2 \sum_{i=1}^{n-1} dx_i^2 \quad (11.33)$$

με περίοδο, κατά τα γνωστά πλέον,

$$\beta_1 = \frac{4\pi R}{n} \quad (11.34)$$

Θεωρώντας τη θεωρία χορδών στην παραπάνω μετρική, η αντίστοιχη $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία ζεί στο όριο $\rho \rightarrow \infty$, όπου η μετρική γίνεται

$$ds_{\rho \rightarrow \infty}^2 \simeq \rho^2 \left(\frac{d\tau^2}{R^2} + d\vec{x}^2 \right) \quad (11.35)$$

και έχει περίοδο

$$\beta_\infty = \frac{\beta_\tau}{R} = \frac{\beta_1}{R} \quad (11.36)$$

²Εννοείται ότι $dx_i = (w_n M / R^{n-2})^2 d\Omega_i$.

η οποία δίνει τη θερμοκρασία της θεωρίας βαθμίδας ως

$$T = \frac{R}{\beta_1} = \frac{n}{4\pi} \quad (11.37)$$

Για μια 4-διάστατη θεωρία βαθμίδας παίρνουμε $T = 1/\pi$, ενώ η μετρική, τότε, γίνεται

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{R^2} \left[\left(1 - \frac{R^4}{\rho^4} \right) d\tau^2 + R^2 d\vec{x}^2 \right] + R^2 \frac{d\rho^2}{\rho^2 \left(1 - \frac{R^4}{\rho^4} \right)} \quad (11.38)$$

Επαναορίζοντας τις μεταβλητές ως

$$\frac{\rho}{R} = \frac{U}{U_0}; \quad \tau = t \frac{U_0}{R}; \quad \vec{x} = \vec{y} \frac{U_0}{R^2} \quad (11.39)$$

προσθέτοντας τον αφημένο παράγοντα $R^2 d\Omega_5^2$, της S^5 , και στρέφοντας κατά Wick ώστε να περάσουμε σε υπογραφή Lorentz, παίρνουμε

$$ds^2 = \frac{U^2}{R^2} \left[-f(U) dt^2 + d\vec{y}^2 \right] + R^2 \frac{dU^2}{U^2 f(U)} + R^2 d\Omega_5^2 \quad (11.40)$$

$$f(U) \equiv 1 - \frac{U_0^4}{U^4}$$

Σημειώνουμε ότι η μετρική αυτή είναι η non-extremal έκδοση³ της $\text{AdS}_5 \times S^5$ μετρικής (8.7), η οποία προήλθε από το κοντινό στον οριζοντα όριο της μετρικής της D3-βράνης. Τελικά, επαναπαραμετροποιώντας ως $U/R = R/z$ και $U_0/R = R/z_0$, παίρνουμε πεπερασμένη θερμοκρασία στην Poincarè έκδοση

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left[-f(z) dt^2 + d\vec{y}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right] + R^2 d\Omega_5^2 \quad (11.41)$$

$$f(U) \equiv 1 - \frac{z^4}{z_0^4}$$

³Αυτό είναι, εν γένει, δυνατό με την προσθήκη των ανάλογων $f(r), 1/f(r)$ παραγόντων μπροστά από τα dt^2, dr^2 , αντίστοιχα.

Ακολουθώντας τα γνωστά βήματα, πηγαίνουμε κοντά στον ορίζοντα με γεωμετρία

$$ds^2 \simeq \frac{4\delta z}{z_0} d\tau^2 + \frac{d\delta z^2}{z_0} \quad (11.42)$$

η οποία συνεπάγεται περιοδικό Ευκλείδειο χρόνο με περίοδο

$$\beta_\tau = \pi z_0 \quad (11.43)$$

και, άρα, θερμοκρασία

$$T = \frac{1}{\pi z_0} \quad (11.44)$$

11.4 Σπάσιμο της υπερσυμμετρίας

Στο όριο $r \rightarrow \infty$ μιας μελανής οπής, όπως παρατηρούμε τόσο για την Schwarzschild όσο και για την AdS περίπτωση, η γεωμετρία γίνεται

$$ds^2 \simeq d\tau^2 + d\vec{x}^2 \quad (11.45)$$

δηλαδή μια τοπολογία $\mathbb{R}^3 \times S^1$, αφού το τ είναι περιοδικό, που είναι ένα κενό *Kaluza-Klein*. Τουτέστιν, μια λύση υποβάθρου γύρω από την οποία μπορούμε να αναπτύξουμε τα πεδία σε Fourier modes και να τα ελλατώσουμε διαστατικά, κρατώντας μονάχα το κατώτερο mode.

Τα φερμιόνια, όταν ολοκληρώνουν έναν κύκλο S^1_τ στο άπειρο, μπορούν να αποκτήσουν μια φάση

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad (11.46)$$

Αυτά είναι γνωστά ως *spin structures*. Συγκεκριμένα, τα $\alpha = 0$ και $\alpha = \pi$ είναι πάντα έγκυρα, καθώς η Lagrangian έχει, πάντα, όρους με άρτιο αριθμό φερμιονίων και, άρα, είναι αναλλοίωτη υπο τις φάσεις αυτές⁴.

Στον ορίζοντα γεγονότων, οι μελανές οπές που περιγράψαμε, έχουν γεωμετρία

$$ds^2 \simeq d\rho^2 + \rho^2 d\tau^2 + d\Omega_2^2 \quad (11.47)$$

που είναι μια τοπολογία $\mathbb{R}^2 \times S^2$, δηλαδή ένας απλά συνεκτικός χώρος όπου δεν υπάρχουν μη-τετριμμένοι κύκλοι (loops), παρά μόνον κύκλοι (loops) που συρρικνώνονται σε σημεία. Αυτό σημαίνει ότι τα φερμιόνια, ολοκληρώνοντας οποιοδήποτε loop στον $\mathbb{R}^2 \times S^2$, δεν αποκτούν μη-τετριμμένες φάσεις ή, ισοδύναμα, ότι υπάρχει μοναδικό spin structure.

Ένα σχετικό loop σε αυτή τη δομή, στο άπειρο $r \rightarrow \infty$, είναι το $\tau \rightarrow \tau + \beta_\tau$, όπου κοντά στον ορίζοντα γίνεται $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$, δηλαδή μια στροφή κατά 2π στο επίπεδο \mathbb{R}^2 . Υπό μια τέτοια στροφή τα φερμιόνια αποκτούν αρνητικό πρόσημο και, συνεπώς, η μοναδική spin structure που μπορεί να έχουν οι παραπάνω μελανές οπές κάνει τα φερμιόνια αντιπεριοδικά στο άπειρο, κατά μήκος του Ευκλείδειου χρόνου.

⁴Άλλες επιπρόσθετες συμμετρίες θα επέτρεπαν κι άλλες επιλογές για το α .

Για να συμβαίνει αυτό, βέβαια, τα φερμιόνια πρέπει να έχουν εξάρτηση από τον Ευκλείδιο χρόνο, $\psi = \psi(\theta)$, γεγονός που τα κάνει να αποκτούν μάζα στο άπειρο, υπό τη διαστατική ελλάτωση από τις τέσσερις στις τρεις διαστάσεις. Συγκεκριμένα, στο $r \rightarrow \infty$, ισχύει η εξίσωση κίνησης Dirac

$$\not{\partial}\psi = 0 \Rightarrow \not{\partial}^2\psi = \square_{4d}\psi = 0 \quad (11.48)$$

όπου, υπό τη διαστατική ελλάτωση, $\square_{4d} = \square_{3d} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, το οποίο δίνει

$$\left(\square_{3d} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\psi = (\square_{3d} - m^2)\psi = 0 \quad (11.49)$$

όπου $m \neq 0$ η ιδιοτιμή της θ -Laplacean πάνω στον σπίνορα, η οποία, εφ' όσον η παραπάνω εξίσωση είναι μια εξίσωση κίνησης, δεν μπορεί να είναι κάτι διαφορετικό από τη μάζα. Οπότε, τα φερμιόνια αποκτούν μάζα, από την άποψη της τρισδιάστατης ελλατωμένης θεωρίας.

Τα μποζόνια, από την άλλη, δεν χρειάζεται να είναι αντιπεριοδικά και, μάλιστα, δεν προκρίπτει από κάπου ότι πρέπει να έχουν κάποια εξάρτηση από τον Ευκλείδιο χρόνο. Μπορούμε, δηλαδή, να τα επιλέξουμε ανεξάρτητα αυτού

$$\square_{4d}\phi = \left(\square_{3d} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\phi = \square_{3d}\phi \quad (11.50)$$

που σημαίνει ότι τα βαθμωτά πεδία μπορούν να είναι άμαζα στις τρεις διαστάσεις. Αξίζει, βέβαια, να σημειώσουμε ότι τα βαθμωτά πεδία, σε 1-loop, αποκτούν μάζα χάρις ενός φερμιονικού loop που οφείλεται στη σύζευξη Yukawa φερμιονίου-βαθμωτού πεδίου, ενώ, αντίθετα, τα πεδία βαθμίδας προστατεύονται από την συμμετρία βαθμίδας και παραμένουν πάντα άμαζα.

Αλλά η υπερσυμμετρία, στις τρεις διαστάσεις, προϋποθέτει ότι $m_{fermion} = m_{boson}$, συνθήκη που δεν καλύπτεται στην παρουσία της μελανής οπής, όπου μπορούμε να έχουμε $m_{fermion} \neq 0$ και $m_{boson} = 0$ ταυτόχρονα. Συνεπώς, η πεπερασμένη θερμοκρασία, μέσω της παρουσίας μιας μελανής οπής, σπάει την υπερσυμμετρία.

Καταλήγοντας, συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να σπάσουμε τη μη ευπρόσδεκτη υπερσυμμετρία της $\mathcal{N} = 4$ SYM, στην AdS/CFT αντιστοιχία, και να πάμε σε πιο ρεαλιστικές θεωρίες πεδίου, εισάγοντας πεπερασμένη θερμοκρασία, μια συνθήκη, επίσης, κοντύτερα στην αντιλαμβανόμενη πραγματικότητα.

Κεφάλαιο 12

Πλάσμα στην $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία πεδίου

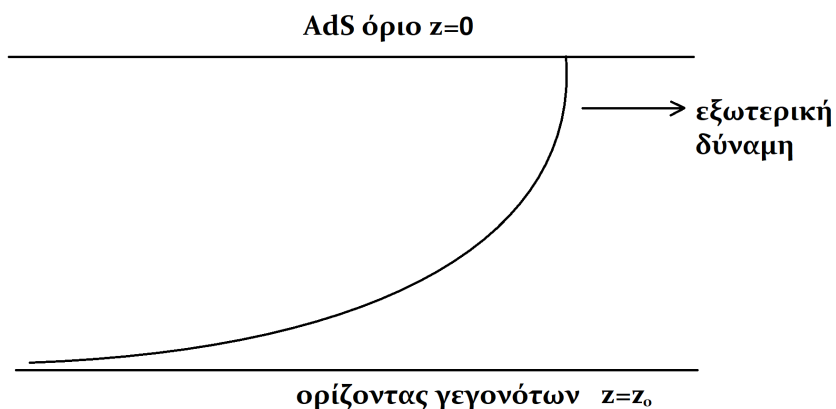
Στην αντιλαμβανόμενη πραγματικότητα, το ισχυρά συζευγμένο *quark-gluon* πλάσμα (*sQGP*) είναι ένα σύστημα από quarks και gluons σε υψηλή θερμοκρασία, πάνω από τη μεταβατική φάση της QCD. Σε αναλογία, η $\mathcal{N} = 4$ SYM υψηλής θερμοκρασίας ονομάζεται επίσης πλάσμα και, εφ' όσον το sQGP είναι ισχυρά συζευγμένο, η AdS/CFT αντιστοιχία είναι το ιδανικότερο πλαίσιο για υπολογισμούς.

12.1 Απόσβεση πίδακα quark

Όταν ένα βαρύ quark (ή ένα jet από αυτά) περάσει μέσα από ένα sQGP πλάσμα, χάνει ενέργεια σε υψηλό βαθμό, λόγω της αλληλεπίδρασης του στο ενδιάμεσο, ένα φαινόμενο γνωστό ως *απόσβεση πίδακα* (*jet quenching*).

Όπως είδαμε, ένα βαρύ quark αντιστοιχεί σε μια μακρυνά χορδή που επιμηκύνεται μεταξύ του ορίου στο άπειρο και ενός εσωτερικού σημείου, του AdS χώρου. Συνεπώς, ένα βαρύ quark κινούμενο σε ευθεία πορεία αντιστοιχεί σε μια τέτοια χορδή που κινείται, στο άπειρο, σε ευθεία γραμμή, δηλαδή η ολογραφική συνταγή μιας γραμμής Wilson. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, η χορδή (το

άλλο άκρο της) δεν επιστρέφει στο άπειρο, αλλά επιμηχύνεται (ασυμπτωτικά) μέχρι τον ορίζοντα γεγονότων, όπως φαίνεται το επόμενο σχήμα.



Η χορδή αυτή, όπως κινείται, χάνει ορμή και, άρα, χρειάζεται μια σταθερή δύναμη ώστε να διατηρεί μια σταθερή ταχύτητα.

Τη δύναμη αυτή, δηλαδή την απώλεια ορμής, θα την υπολογίσουμε από την ακρότατη δράση της χορδής. Υποθέτοντας ότι το άκρο της χορδής, που βρίσκεται στο όριο $z = 0$ της Poincaré μετρικής (11.41), κινείται στην y^1 κατεύθυνση με σταθερή ταχύτητα, τότε για τη συνοριακή συνθήκη

$$y^1(t, z \rightarrow 0) = vt \quad (12.1)$$

την απαίτηση, δηλαδή, μπορούμε ανενόχλητα να γράψουμε την έκφραση

$$y^1(t, z) = vt + h(z) \quad (12.2)$$

για το υπόλοιπο εύρος της χορδής, κατά μήκος της z κατεύθυνσης. Επιπλέον, διευκολύνουμε τη ζωή μας επιλέγοντας τη στατική βαθμίδα $\tau = t, \sigma = z$ για τις συντεταγμένες (τ, σ) της χορδής, η οποία μας δίνει τη μετρική του world-sheet της χορδής ως

$$h_{ab} = \frac{R^2}{z^2} \begin{pmatrix} v^2 - f(z) & vh'(z) \\ vh'(z) & h'^2(z) + 1/f(z) \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

η οποία εισέρχεται στη δράση Nambu-Goto για να δώσει

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'} \int dt^2 \int \frac{dz}{z^2} \sqrt{\frac{f(z) - v^2 + f(z)^2 h'^2(z)}{f(z)}} \quad (12.4)$$

Προκύπτει, δηλαδή, ένα μονοδιάστατο μηχανικό πρόβλημα ως προς $z, h(z), h'(z)$, όπου, εφ' όσον η δράση είναι ανεξάρτητη του $h(z)$ και εξαρτάται μονάχα από το $h'(z)$, τότε η κανονική ορμή

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z^1 &= \frac{\delta S}{\delta h'(z)} = \frac{\delta S}{\delta y^{1'}(z)} \\ &= -\frac{R^2}{2\pi\alpha'} \frac{1}{z^2} \frac{f^{3/2}(z)h'(z)}{\sqrt{f(z) - v^2 + f(z)^2 h'^2(z)}} \end{aligned} \quad (12.5)$$

διατηρείται. Λύνοντας ως προς $h'(z)$ παίρνουμε

$$h'^2(z) = \left(\frac{2\pi\alpha' \mathcal{P}_z^1}{R^2} \right)^2 \frac{z^4}{f(z)^2} \frac{f(z) - v^2}{f(z) - \left(\frac{2\pi\alpha' \mathcal{P}_z^1}{R^2} \right)^2 z^4} \quad (12.6)$$

όπου, για $z \rightarrow 0$, τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρανομαστής είναι θετικοί ενώ για $z = z_0$, αντίστοιχα, αρνητικοί.

Συνεπώς, εφ' όσον $h'^2 \geq 0$, τότε θα πρέπει να μηδενίζονται και οι δυο ταυτόχρονα

$$\left(\frac{2\pi\alpha' \mathcal{P}_z^1}{R^2} \right)^2 z_1^4 = 1 - \frac{z_1^4}{z_0^4} = v^2 \quad (12.7)$$

όπου εάν απαλλοίψουμε το z_1 παίρνουμε

$$\mathcal{P}_z^1 = \pm \frac{R^2}{2\pi\alpha' z_0^2} \gamma u \quad (12.8)$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ο παράγοντας Lorentz, ενώ επιλέγουμε το θετικό πρόσημο, καθώς αυτό αντιστοιχεί σε ροή ορμής από το όριο $z = 0$ προς τον ορίζοντα $z = z_0$ χάρις την προσφορά της εξωτερικής δύναμης. Αντικαθιστώντας το \mathcal{P}_z^1 στην (12.6), μπορούμε να ολοκληρώσουμε ώστε να βρούμε

$$h(z) = -\frac{vz_0}{2} \left[\operatorname{arctanh} \left(\frac{z}{z_0} \right) - \operatorname{arctan} \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] \quad (12.9)$$

το οποίο αντιστοιχεί σε μια χορδή που ιχνηλατεί πίσω από το quark, κρεμάμενη από το όριο ($h(0) = 0$) και σχεδόν παράλληλη με τον ορίζοντα κοντά στο $z = z_0$ ($h(z_0) = -\infty$).

Συνεπώς, η \mathcal{P}_z^1 είναι ροή ορμής μέσα στο πλάσμα και, άρα, η απώλεια ορμής μέσα σε αυτό είναι

$$\frac{dp}{dt} = -\mathcal{P}_z^1 = -\frac{R^2}{2\pi\alpha' z_0^2} \gamma u \quad (12.10)$$

Μεταφράζοντας σε μεταβλητές της θεωρίας βαθμίδας $R^2/\alpha' = g_{YM}\sqrt{N} = \sqrt{\lambda}$ και $T = 1/\pi z_0$, παίρνουμε

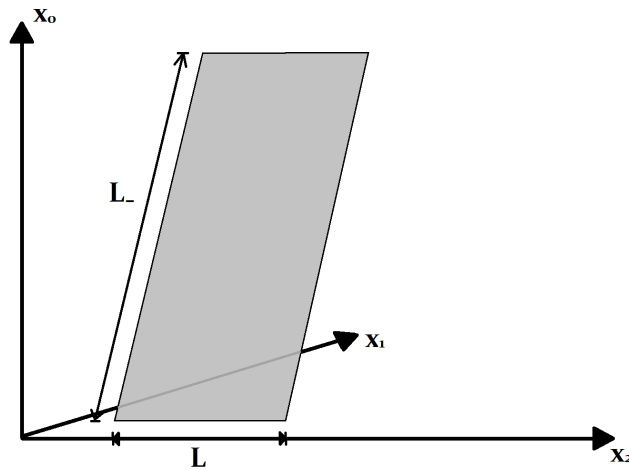
$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} T^2 \gamma v = -\frac{\pi}{2M} \sqrt{\lambda} T^2 p \\ &\equiv -\eta_D p \end{aligned} \quad (12.11)$$

όπου $p = M\gamma u$ είναι η τετραορμή του βαρέος quark και η_D ο συντελεστής αντίστασης.

12.2 Υπερσχετικιστική απόσβεση πίδακα quark

Για υπερ-σχετικιστικά βαρυσά quarks ή gluons, υπάρχει μια ποσότητα που αντιπροσωπεύει την ενέργεια που αυτά χάνουν όταν περάσουν από ένα sQGP πλάσμα, η επονομαζόμενη παράμετρος απόσβεσης του πίδακα (*jet quenching parameter*) \hat{q} . Γενικά, η παράμετρος αυτή ορίζεται ως η μέση τετραγωνισμένη κάθετη ορμή που κερδίζει το βαρύ σωματίο, ανά επιφάνεια που διανύεται, $\hat{q} \equiv \langle k_{\perp}^2 \rangle / L$, ενώ στην περίπτωση μας σχετίζεται με την απώλεια ενέργειας και υπολογίζεται από ένα συγκεκριμένο Wilson loop.

Για αρχή, το ότι θα κατασκευάσουμε ένα Wilson loop σημαίνει ότι χρειαζόμαστε δυο σωματίδια, ή, αλλιώς, μια χορδή που αρχίζει και επιστρέφει στο όριο του χώρου. Έπειτα, το γεγονός ότι θεωρούμε υπερσχετικιστικό σωματίδιο, $u \rightarrow c$, προϋποθέτει ότι οι δυο πλευρές του Wilson loop που χαράσσουν την χωροχρονική κίνηση (των δυο σωματιδίων/άκρων χορδής) πρέπει να είναι φωτοειδής, L_- , και να χωρίζονται από μια χωροειδή απόσταση L . Προφανώς, ισχύει ότι $L_- \gg L$, ενώ ο αντίστοιχος βρόχος Wilson δίνεται από το παρακάτω σχήμα.



Αποδεικνύεται ότι, για το συγκεκριμένο Wilson loop, η παράμετρος απόσβεσης \hat{q} υπολογίζεται από την ασυμπτωτική φόρμουλα

$$\langle W[C] \rangle \simeq \exp \left[-\frac{1}{4\sqrt{2}} \hat{q} L_- L^2 \right] \quad (12.12)$$

την οποία θα υπολογίσουμε στο υπόβαθρο της AdS Poincarè μελανής οπής (11.40), με το U ονομαζόμενο ως r . Επιλέγουμε, για ακόμη μια φορά τη στατική βαθμίδα

$$\tau = y^-; \quad \sigma = y^2 \quad (12.13)$$

όπου $y^\pm = (t \pm y^1)/\sqrt{2}$ και θεωρούμε ότι έχουμε αναλλοιώτητα μετατόπισης στην κατεύθυνση x^- , δηλαδή αγνοούμε την παραμόρφωση του world-sheet κοντά στις αμελητέες πλευρές L , ενώ οι υπόλοιπες συντεταγμένες είναι $y^3(\sigma) = \text{σταθ.}$ και $y^+(\sigma) = \text{σταθ.}$. Συνεπώς, η μετρική του world-sheet της χορδής είναι

$$h_{ab} = \frac{r^2}{R^2} \begin{pmatrix} \frac{r_0^4}{r^4} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{R^4 r'^2}{f(r)r^4} \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

η οποία εισέρχεται στη Ευκλείδεια δράση Nambu-Goto για να δώσει

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{L_-} d\tau \int_{-L/2}^{L/2} d\sigma \sqrt{-h} \\ &= \frac{\sqrt{2}r_0^2 L_-}{2\pi\alpha' R^2} \int_0^{L/2} d\sigma \sqrt{1 + \frac{r'^2 R^4}{f(r)r^4}} \end{aligned} \quad (12.15)$$

Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε σε ένα μονοδιάστατο μηχανικό πρόβλημα ως προς $\sigma = y^2, r(\sigma), r'(\sigma)$, όπου δεν έχουμε ρητή εξάρτηση από το σ και, οπότε, η Hamiltonian

$$H = r' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} - \mathcal{L} = \frac{1}{\mathcal{L}} = \text{σταθ.} \quad (12.16)$$

θα διατηρείται. Συνεπώς, η Lagrangian είναι σταθερή και, ορίζοντας τη σταθερά a , μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{2}r_0^2 L_-}{2\pi\alpha' R^2} \sqrt{1 + a^2} \quad (12.17)$$

η οποία δίνει τις εξισώσεις κίνησης

$$r'^2 = a^2 \frac{r^4 f(r)}{R^4} \quad (12.18)$$

Για θετικές λύσεις, η χορδή επιμηκώνεται μέχρι και τον ορίζοντα γεγονότων στο $r = r_0$ όπου $f(r_0) = 0$, δηλαδή ένα σημείο καμπής απ' όπου η χορδή επιστρέφει και γυρνάει πίσω στο όριο του χώρου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η λύση αγγίζει τον ορίζοντα άσχετα από το πόσο μικρά μπορεί να είναι τα L, T . Έπειτα, χρησιμοποιούμε τη συμμετρία του $\sigma = 0$ στο $r = r_0$ για να ολοκληρώσουμε την παραπάνω εξίσωση κίνησης και να αποκτήσουμε

$$\frac{L}{2} = \frac{R^2}{a} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^4 - r_0^4}} = \frac{cR^2}{ar_0} \quad (12.19)$$

όπου $c = \sqrt{\pi}\Gamma(5/4)/\Gamma(3/4)$. Τότε η σταθερά $a = 2cR^2/r_0L$ συναρτήσει της Poincaré θερμοκρασίας¹

$$T = \frac{1}{\pi z_0} = \frac{r_0}{\pi R^2} \Rightarrow r_0 = \pi R^2 T \quad (12.20)$$

γίνεται $a = 2c/(\pi LT)$ και μας δίνει, επιτέλους, τη δράση, ως συνάρτηση των L_-, L, T

$$S = \frac{\pi\sqrt{\lambda}L_-LT^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{4c^2}{\pi^2 T^2 L^2}} \quad (12.21)$$

Από τη δράση αυτή πρέπει να αφαιρέσουμε τη δράση των «W μποζονίων», δηλαδή την περίμετρο, $\simeq 2L_-$, επί την τάση $1/2\pi\alpha'$, επί το μήκος της χορδής από το όριο στον ορίζοντα, $\int_{r_0}^{\infty} dr \sqrt{g_{--}g_{rr}}$.

¹Από τον μετασχηματισμό $U/R = R/z$, με $U = r$, του προηγούμενου κεφαλαίου.

Δηλαδή την ποσότητα

$$S_0 = \frac{c\sqrt{\lambda}L-T}{\sqrt{2}} \quad (12.22)$$

και, συνεπώς, για μικρά $L \cdot T$ να πάρουμε ότι

$$S - S_0 \simeq \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}c} \sqrt{\lambda} T^3 L - L^2 + \mathcal{O}(T^5 L - L^4) \quad (12.23)$$

Τέλος, εάν αναλογιστούμε ότι η τελευταία σχέση για το Wilson loop είναι στην adjoint αναπαράσταση Tr_a , ενώ η φόρμουλα (12.12) κατασκευάστηκε στην θεμελιώδη αναπαράσταση Tr , τότε συγκρίνουμε και βρίσκουμε την παράμετρο απόσβεσης ως

$$\hat{q}_{SYM} = \frac{\pi^2}{c} \sqrt{\lambda} T^3 = \frac{\pi^{3/2} \Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} \sqrt{g_{YM}^2 N T^3} \quad (12.24)$$

τιμή συγκρίσιμη με αυτή της QCD, γεγονός που ενισχύει την υπόθεση της αντιστοιχίας AdS/CFT, αλλά και αναδεικνύει την παγκοσμιότητα της συμπεριφοράς των θεωριών βαθμίδας, σε πεπερασμένη θερμοκρασία.

Κεφάλαιο 13

Η γεωμετρία pp-wave και το όριο Penrose

Η QCD είναι μια περιοριστική θεωρία, υπό την έννοια ότι τα quarks είναι περιορισμένα να ζουν σε ζεύγη, και άρα η θεωρία δεν είναι σύμμορφη, καθώς υπάρχει η έννοια της κλίμακας. Σε υψηλές ενέργειες, τα quarks παύουν να είναι περιορισμένα και η QCD γίνεται προσεγγιστικά σύμμορφη, ανοίγοντας τον δρόμο για την κατασκευή της αντιστοιχίας AdS/QCD.

Παράλληλα, στις υψηλές ενέργειες μιας θεωρίας βαρύτητας, τα σωματίδια μπορούν να αναπαρασταθούν από βαρυτικά κύματα που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, τα λεγόμενα pp-waves, καθιστώντας την pp-wave γεωμετρία ενδιαφέρουσα για την βαρυτική θεωρία της αντιστοιχίας AdS/CFT. Βέβαια, η γεωμετρία αυτή δεν αξίζει ιδιαίτερη προσοχή, εάν δεν είναι ένα υποψήφιο υπόβαθρο για τη θεωρία χορδών.

Αποδεικνύεται ότι, τα pp-waves, όχι απλώς είναι ένα μέγιστα υπερσυμμετρικό υπόβαθρο της type-IIA υπερβαρύτητας (η οποία δείξαμε ότι μας ενδιαφέρει άμεσα στην αντιστοιχία AdS/CFT), αλλά και ότι η γεωμετρία αυτή προκύπτει ως ένα συγκεκριμένο όριο του βασικού υποβάθρου, $AdS_5 \times S^5$, το επονομαζόμενο όριο Penrose.

Από την άλλη, κατά την αντιστοιχία AdS/CFT, το ίδιο όριο κατασκευάζει τον τομέα BMN. Οι καταστάσεις της χορδής, μέσα σε pp-wave γεωμετρία, αντιστοιχούν σε τελεστές BMN, ενώ οι υπολογισμοί μεταξύ τους ταυτίζονται και θεμελιώνουν την ομώνυμη αντιστοιχία pp-wave.

13.1 Το μοντέλο hard-wall της QCD

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πως να υπολογίζουμε συναρτήσεις συσχέτισης, καταστάσεις και βρόχους Wilson. Στην QCD, παρ' όλα αυτά, ενδιαφερόμαστε για S-matrices, οι οποίοι περιγράφουν τη σκέδαση φυσικών ασυμπτωτικών καταστάσεων. Η φόρμουλα LSZ σχετίζει τους S-matrices με τις συναρτήσεις συσχέτισης, αλλά προϋποθέτει την ύπαρξη διαχωρισμένων ασυμπτωτικών καταστάσεων.

Βέβαια, σε μια σύμμορφη θεωρία πεδίου, δεν υπάρχει η έννοια της κλίμακας, οπότε δεν υπάρχει και η έννοια του απείρου, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν ασυμπτωτικές καταστάσεις. Συνεπώς, μένουμε με το μολύβι στο χέρι, ανίκανοι να κατασκευάσουμε S-matrices από συναρτήσεις συσχέτισης και καταλαβαίνουμε ότι η μοναδική ελπίδα μας είναι να σπάσουμε, με κάποιο τρόπο, τη σύμμορφη αναλλοιώτητα.

Στις υψηλές ενέργειες (στο UV), η QCD είναι προσεγγιστικά σύμμορφη και άρα το υπόβαθρο της αντίστοιχης θεωρίας βαρύτητας θα πρέπει να είναι το $\text{AdS}_5 \times X^5$, για μεγάλη πέμπτη διάσταση r (καθώς αυτή αντιστοιχεί στην κλίμακα ενέργειας της θεωρίας βαθμίδας), όπου ο X^5 είναι ένας συμπαγής χώρος. Αυτός ο $\text{AdS}_5 \times X^5$ χώρος διαμορφώνεται κατά κάποιο τρόπο σε μικρό r , ώστε να αντιστοιχεί στη χαμηλο-ενεργειακή (IR) συμπεριφορά της QCD.

Εφ' όσον η μετρική για το μοντέλο αυτό είναι

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{R^2} d\vec{x}^2 + R^2 \frac{dr^2}{r^2} + R^2 ds_X^2 \\ &= e^{-2y/R} d\vec{x}^2 + dy^2 + R^2 ds_X^2 \end{aligned} \quad (13.1)$$

τότε το απλούστερο μοντέλο που έχει κάποιες από τις ιδιότητες της QCD αποκτάται «κόβοντας» τον παραπάνω χώρο σε ένα r_{min} . Για να συσχετίσουμε τις δυο θεωρίες, παρατηρούμε ότι η ορμή $p_\mu = -i\partial_\mu$ της QCD αντιστοιχίζεται στη δεκαδιάσταση ορμή, μέσω της μετρικής, ως

$$\tilde{p}_\mu = -i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} = \sqrt{g^{\tilde{x}\tilde{x}}} p_\mu = \frac{R}{r} p_\mu \quad (13.2)$$

Όταν έχουμε μια χαρακτηριστική ορμή στις δέκα διαστάσεις, δηλαδή μια ορμή

συγκρίσιμη της κλίμακας της μετρικής, $\tilde{p} \sim 1/R$, τότε, στην QCD, αποκτάμε μια ορμή

$$p \sim \frac{r}{R^2} \quad (13.3)$$

Βέβαια, αφού η θεωρία βαρύτητας έχει την χαρακτηριστική ορμή της καμπυλότητας, τότε περιμένουμε και η ορμή της QCD να είναι της τάξης των χαμηλότερων θεμελιωδών διεγερμένων καταστάσεων, δηλαδή της κλίμακας Λ_{QCD} . Επομένως, έχουμε ότι

$$r_{min} = R^2 \Lambda_{QCD} \quad (13.4)$$

Αυτό είναι το μοντέλο hard-wall για την ολογραφική QCD.

Συμπεριφορά Regge

Στις θεωρίες βαθμίδας, όταν $s \gg -t > 0$ (όπου s, t είναι μεταβλητές Mandelstam για $2 \rightarrow 2$ σκέδαση), ή $s \rightarrow \infty$ με $|t|$ σταθερό, περιμένουμε τη λεγόμενη συμπεριφορά Regge. Αυτό το όριο Regge, είναι γνωστό ότι κυριαρχείται από τα χαμηλο-ενεργειακά modes της θεωρίας. Αυτή είναι και η περιοχή της «ελαστικής σκέδασης», η οποία χαρακτηρίζεται από την εκπομπή ενός μεγάλου αριθμού σωματιδίων ελάχιστης μάζας. Οπότε, στην περίπτωση αυτή, παρ' όλο που η συνολική ενέργεια είναι πολύ μεγάλη, η ενέργεια ανά σωματίο είναι πολύ μικρή και η φυσική κυριαρχείται από το χαμηλο-ενεργειακό μέρος (IR) της θεωρίας.

Για τη θεωρία χορδών, στις αντίστοιχες μονάδες, το όριο Regge μεταφράζεται ως $\alpha' s \gg 1$, δηλαδή υψηλή ενέργεια. Έπειτα, η σκέδαση λαμβάνει χώρα κοντά στο r_{min} , δηλαδή στο IR μέρος της δυϊκής θεωρίας βαθμίδας, για τον λόγο που περιγράψαμε από πάνω.

13.2 Σκέδαση βαρυτικών κυμάτων ως μοντέλο σκέδασης υψηλής ενέργειας της QCD

Καταλήξαμε, λοιπόν, ότι η υψηλο-ενεργειακή περιοχή ενδιαφέροντος για την σκέδαση στην QCD αντιστοιχεί στο όριο $\alpha's \gg 1$ και $s/M_{Pl}^2 \gg 1$ στη θεωρία χορδών. Συνεπώς, μπορούμε να μετακυλίσουμε το ενδιαφέρον μας στον τρόπο που περιγράφουμε την σκέδαση υψηλών ενεργειών σε μια θεωρία βαρύτητας.

Για αρκετά υψηλές ενέργειες, σε μια θεωρία βαρύτητας, μονάχα η ορμή του σωματιδίου έχει σημασία. Τότε, οι Aichelburg και Sexl (A-S) απέδειξαν ότι το σωματίδιο δημιουργεί ένα βαρυτικό κύμα, ενώ ο t' Hooft έδειξε ότι η σκέδαση δυο σχεδόν άμαζων σωματιδίων (με μάζα πολύ μικρότερη της κλίμακας Planck) με $G_s s \sim 1$, αλλά όπου $G_s s < 1$, περιγράφεται από ένα σωματίδιο που δημιουργεί ένα βαρυτικό κύμα και ένα άλλο το οποίο κινείται σε μια γεωδαισιακή του κύματος αυτού. Έπειτα, για ενέργειες μεγαλύτερες της κλίμακας Planck, $G_s s > 1$ ($\sqrt{s} > M_{Pl}$), και τα δυο σωματίδια δημιουργούν βαρυτικά κύματα, η σύγκρουση των οποίων δημιουργεί μια μελανή οπή. Αυτό το τελευταίο συμπέρασμα είναι λογικό, καθώς για ενέργειες μεγαλύτερες της κλίμακας Planck εμφανίζονται κβαντικά γεγονότα όπως η δημιουργία αυτή της μελανής οπής. Βέβαια, για $\sqrt{s} \sim M_{Pl}$, ο όρος «μελανή οπή» δεν είναι και ο πλέον κατάλληλος, παρά μόνο όταν περνάμε στο κλασσικό όριο, για $\sqrt{s} \gg M_{Pl}$.

Αυτό το A-S βαρυτικό κύμα είναι της γενικής μορφής ενός κύματος «παράλληλου επιπέδου» (parallel-plane), ή αλλιώς *pp-wave*, και με υπόβαθρο τον επίπεδο χώρο έχει τη γενική μετρική

$$ds^2 = 2 dx^+ dx^- + H(x^-, x^i)(dx^-)^2 + \sum_i (dx^i)^2 \quad (13.5)$$

η οποία είναι μια λύση των εξισώσεων Einstein που αντιστοιχεί σε διαταραχές που κινούνται με την ταχύτητα του φωτός στην x^- κατεύθυνση, έχοντας ένα επίπεδο κυματικό μέτωπο.

Όπως θα δείξουμε αργότερα, η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του τανυστή Ricci για την παραπάνω μετρική είναι η

$$\mathcal{R}_{--} = -\frac{1}{2} \partial_i^2 H(x^-, x^i) \quad (13.6)$$

γεγονός που σημαίνει ότι οι εξισώσεις Einstein είναι συνεπείς μόνο εάν η μοναδική συνιστώσα του ταυυστή ενέργειας-ορμής είναι η T_{--} , όπου

$$\mathcal{R}_{--} - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{--} = -\frac{1}{4}\partial_i^2 H(x^-, x^i) = 8\pi G_N T_{--} \quad (13.7)$$

Παράλληλα, ένα A-S βαρυτικό κύμα είναι ένα pp-wave που δημιουργήθηκε από ένα άμαζο σωματίδιο ορμής p (καθώς όπως είπαμε, σε υψηλές ενέργειες, αντιλαμβάνομαστε όλα τα σωματίδια ως σχεδόν άμαζα), με ταυυστή ενέργειας-ορμής

$$T_{--} = p\delta^{d-2}(x^i)\delta(x^-) \quad (13.8)$$

ο οποίος, μέσω της (13.7), καθορίζει την $H(x^-, x^i)$ ως την αρμονική συνάρτηση

$$H(x^-, x^i) = \delta(x^-)\Phi(x^i) \quad (13.9)$$

ενώ η εξίσωση Einstein απλοποιείται στην εξίσωση Poisson για το Φ ως

$$\partial_i^2 \Phi(x^i) = -32\pi G_{N,d} p \delta^{d-2}(x^i) \quad (13.10)$$

Στις $d = 4$ διαστάσεις του επίπεδου χώρου, παίρνουμε

$$\Phi = -8G_{N,4} \ln \rho^2 \quad (13.11)$$

όπου $\rho^2 = x_i x^i$ είναι η τετραγωνισμένη κάθετη ακτίνα, ενώ σε $d > 4$ διαστάσεις βρίσκουμε

$$\Phi = \frac{32\pi G_{N,d}}{\Omega_{d-3}(d-4)} \frac{p}{\rho^{d-4}} \quad (13.12)$$

Προφανώς, τα αποτελέσματα αυτά διαμορφώνονται διαφορετικά για έναν καμπυλωμένο χώρο όπως ο AdS. Συγκεκριμένα, η εξίσωση Poisson (13.10) θα πρέπει να γενικευθεί, αντικαθιστώντας τη μερική παράγωγο ∂_i^2 με τη συναλλοιώτη παράγωγο ∇_i^2 .

Συνεπώς, στον επίπεδο χώρο και στην περιοχή $G_{ss} > 1$ ενεργειών μεγαλύτερων της κλίμακας Planck, οι συγκρούσεις υψηλο-ενεργειακών σωματιδίων περιγράφονται από τη σύγκρουση δυο A-S βαρυτικών κυμάτων, όπου το ένα διαδίδεται στην x^+ και το άλλο στην x^- κατεύθυνση. Τουτέστιν, η μετρική του χώρου πριν από τη σύγκρουση θα είναι απλώς το άθροισμα των μετρικών των κυμάτων αυτών, ως

$$ds^2 = 2 dx^+ dx^- + \sum_i (dx^i)^2 + (dx^+)^2 \Phi_1(x^i) + (dx^-)^2 \Phi_2(x^i) \quad (13.13)$$

ενώ μετά τη σύγκρουση, αναμένουμε τον σχηματισμό μιας μελανής οπής.

Αφού, λοιπόν, μελετήσαμε τα βασικά των βαρυτικών κυμάτων, μένει να δούμε τον ρόλο της γεωμετρίας του pp-wave στην αντιστοιχία AdS/CFT. Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, για να έχει σημασία μια γεωμετρία στην αντιστοιχία αυτή, θα πρέπει να είναι λύση (υπόβαθρο) της θεωρίας χορδών. Βέβαια, εφ' όσον δείξαμε ότι μας ενδιαφέρει το χαμηλο-ενεργειακό όριο $\alpha' \rightarrow 0$ της θεωρίας χορδών και, συγκεκριμένα, η type-IIA υπερβαρύτητα η οποία φιλοξενεί D3-βράνες κι έχει κοινό πεδιακό περιεχόμενο με την $\mathcal{N} = 4$ SYM, τότε αυτό που πραγματικά ποθούμε είναι να δούμε εάν το pp-wave είναι υπόβαθρο για την type-IIA υπερβαρύτητα.

13.3 Το pp-wave ως ένα μέγιστα υπεσυμμετρικό υπόβαθρο της type-IIB υπερβαρύτητας

Ενώ οι AdS×S και Minkowski χώροι είναι γνωστά μέγιστα υπεσυμμετρικά υπόβαθρα της type-IIB υπερβαρύτητας, μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια ακόμη λύση που πληρεί τις προϋποθέσεις: το pp-wave.

Αρχίζουμε με την pp-wave μετρική

$$ds^2 = 2 dx^+ dx^- + H(x^-, x^i)(dx^-)^2 + \sum_i (dx^i)^2 \quad (13.14)$$

ως το υπόβαθρο μιας $D = 10$ type-IIB υπερβαρύτητας εφοδιασμένης μονάχα με σταθερό dilaton ϕ , μια αυτοδυϊκή φωτοειδή 5-φόρμα

$$F_5 = dx^- \wedge (\omega + \star\omega) : \quad F_{-L_1\dots L_4} = \omega_{L_1\dots L_4} \quad (13.15)$$

και τα υπόλοιπα πεδία μηδενικά. Τουτέστιν, μια υπερβαρύτητα με δράση

$$S_{IIB} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(e^{-2\phi} \mathcal{R} - \frac{1}{4} \frac{F_5^2}{5!} \right) \quad (13.16)$$

Η μεταβολή της δράσης είναι η

$$\delta S_{IIB} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(e^{-2\phi} \mathcal{R} - \frac{1}{4} \frac{F_5^2}{5!} \right) + \sqrt{-g} \left(e^{-2\phi} \delta(g^{MN} \mathcal{R}_{MN}) - \frac{1}{4} \frac{\delta(F_5^2)}{5!} \right) \right]$$

όπου

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{MN} \delta g^{MN} \\ \delta(\mathcal{R}_{MN}) &= \nabla_M U_N \\ \delta(F_5^2) &= 5(F_5^2)_{MN} \delta g^{MN} \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}\mathcal{R} = \frac{e^{2\phi}}{96}F_{L_1\dots L_4M}F^{L_1\dots L_4N}$$

όπου λάβαμε υπ' όψιν ότι $F_5^2 = 0$, από τις εξισώσεις κίνησης της αυτοδυϊκής φωτοειδούς φόρμας $F_5 = dx^- \wedge (\omega + \star\omega)$.

Έπειτα, επαναορίζουμε το F_5 έτσι ώστε να απορροφήσει τον παράγοντα του dilaton, οπότε τελικά οι πεδιακές εξισώσεις θα είναι

$$\mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}\mathcal{R} = \frac{1}{6}F_{L_1\dots L_4M}F^{L_1\dots L_4N} \quad (13.17)$$

Οι εξισώσεις αυτές μειώνονται δραματικά σε μια και μοναδική εφ' όσον παρατηρήσουμε ότι η μοναδική συνιστώσα του τανυστή Ricci για την μετρική (13.14) είναι η \mathcal{R}_{--} . Πράγματι, ορίζοντας τις ποσότητες

$$a_M = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^M} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^M} \right) \longrightarrow a^M = \ddot{x}^M + \Gamma_{NK}^M \dot{x}^N \dot{x}^K$$

όπου $\mathcal{L} = g_{MN}\dot{x}^M\dot{x}^N = 2\dot{x}^+\dot{x}^- + H(\dot{x}^-)^2 + (\dot{x}^i)^2$, τότε η μοναδική από αυτές που έχει γεωδαισιακό νόημα είναι

$$a^i = \ddot{x}^i - \frac{\partial_i H}{2}(\dot{x}^-)^2$$

που σημαίνει ότι η μοναδική μη-μηδενική συνιστώσα συνοχής είναι η

$$\Gamma_{--}^i = (\bar{\Gamma}_-)_-^i = -\frac{\partial_i H}{2}$$

συνεπώς και η μοναδική μη-μηδενική συνιστώσα του τανυστή Ricci θα είναι η

$$\mathcal{R}_{--} = \mathcal{R}_{-i-}^i = (\bar{\mathcal{R}}_{i-})_-^i = (\partial_i \bar{\Gamma}_-)_-^i = -\frac{\partial_i^2 H}{2} \quad (13.18)$$

Εισάγοντας το αποτέλεσμα αυτό στην πεδιακή εξίσωση (13.17) καταλήγουμε στη σχέση

$$\partial_i^2 H = -|\omega|^2 \quad (13.19)$$

μιας και έχουμε ότι $F_{-L_1\dots L_4} = \omega_{L_1\dots L_4}$.

Στην ειδική περίπτωση όπου $\omega = 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\partial_i^2 H = \delta^{(8)}(x^i)$$

και άρα παίρνουμε τη λύση

$$H = \frac{Q}{|x - x_0|^6} \quad (13.20)$$

η οποία αντιστοιχεί σε μια D1-βράνη εντοπισμένη στον χωρόχρονο. Σε κάθε άλλη περίπτωση θα ισχύει

$$H = \sum_{i,j=1}^8 A_{ij} x^i x^j \quad (13.21)$$

όπου ο A_{ij} είναι ένας συμμετρικός πίνακας.

Τώρα, στο σύστημα της χορδής, το pp-wave υπόβαθρο (13.14) θα είναι αναλλοίωτο υπό έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό σπινωριακής παραμέτρου ϵ , εάν και μόνον εάν το ϵ ικανοποιεί την Killing σπινωριακή εξίσωση

$$\mathcal{D}_M \epsilon = 0$$

όπου η υπερσυναλλοίωτη (supercovariant) παράγωγος είναι

$$\mathcal{D}_M \epsilon = \nabla_M \epsilon + \frac{i}{24} F_{ML_1\dots L_4} \Gamma^{L_1\dots L_4} \epsilon$$

με $\Gamma_{M\dots N}$ αντισυμμετρικά γινόμενα Γ πινάκων με άλγεβρα $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = +2\eta^{ab}\mathbf{1}$.

Η υπερσυναλλοιώτη παράγωγος ορίζεται επί της μετρικής (13.14) με τη λύση (13.21) της συνάρτησης H , δηλαδή από τη γεωμετρία

$$ds^2 = 2 dx^+ dx^- + \sum_{i,j=1}^8 A_{ij} x^i x^j (dx^-)^2 + \sum_i (dx^i)^2 \quad (13.22)$$

Αν η μορφή της υπερσυναλλοιώτης παραγώγου μας ξενίζει, τότε θυμούμαστε πως για έναν χώρο με καμπυλότητα και συνάμα εφοδιασμένο με ένα πεδίο βαθμίδας $\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a \tau_a$, η συναλλοιώτη παράγωγος θα πρέπει να λάβει υπόψιν τόσο τη συνοχή λόγω καμπυλότητας (είτε τη συνοχή $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, είτε την spin συνοχή ω_μ^{ab}) όσο και τη συνοχή \mathbf{A}_μ λόγω της συμμετρίας βαθμίδας, ως

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \Gamma_{ab} + ie A_\mu^a \tau_a \quad (13.23)$$

όπου επιλέξαμε την spin συνοχή, ώστε να εκφράζονται και τα δυο είδη συνοχής μέσω των γεννητόρων τους. Έτσι, μας φανερώνεται και η αλήθεια της υπερσυναλλοιώτης παραγώγου, η οποία εκφράζει τόσο την καμπυλότητα του χώρου όσο και την παρουσία της φόρμας F_5 (αντίστοιχη του πεδίου βαθμίδας).

Εφ' όσον, λοιπόν, θέλουμε να εκφράσουμε την υπερσυναλλοιώτη παράγωγο μέσω της spin συνοχής, εισάγουμε το εφαπτόμενο (vielbein) σύστημα αναφοράς $\theta^a = (\hat{\theta}^i, \hat{\theta}^+, \hat{\theta}^-) = \theta_M^a dx^M$, όπου

$$\hat{\theta}^i = dx^i \quad \hat{\theta}^- = dx^- \quad \hat{\theta}^+ = dx^+ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j dx^- \quad (13.24)$$

το οποίο φέρνει τη μετρική (13.22) στη μορφή¹

$$ds^2 = 2\hat{\theta}^+ \hat{\theta}^- + \sum_{\hat{i}=1}^8 \hat{\theta}^{\hat{i}} \hat{\theta}^{\hat{i}} \quad (13.25)$$

¹Το $\hat{}$ αναφέρεται στους δείκτες της εφαπτόμενης δέσμης.

Η πρώτη εξίσωση δομής του Cartan, για έναν χώρο δίχως στρέψη,

$$d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = 0 \quad (13.26)$$

δίνει τις μοναδικές μη-μηδενικές συνιστώσες της spin συνοχής ω^{ab} ως

$$\omega_-^{\widehat{F}i} = -\omega_-^{\widehat{i}\widehat{F}} = \sum_j A_{ij} x^j dx^- \quad (13.27)$$

Συνεπώς, αφού η συναλλοίωτη παράγωγος για τους σπίνορες είναι

$$\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{2} \omega_M^{ab} \Sigma_{ab} \quad (13.28)$$

όπου $\Sigma_{ab} = \frac{1}{2} \Gamma_{ab}$ είναι οι γεννήτορες της ομάδας Lorentz στη σπινωριακή αναπαράσταση, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση μας έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_+ &= \partial_+ \\ \nabla_i &= \partial_i \\ \nabla_- &= \partial_- + \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} x^j \Gamma_+ \Gamma_i \end{aligned} \quad (13.29)$$

Δεδομένου ότι στην υπερβαρύτητα που κατασκευάσαμε έχουμε

$$F_5 = \lambda dx^- \wedge (\omega + \star\omega)$$

όπου λ μια πραγματική σταθερά (που εξαρτάται από τις συμβάσεις που επιλέγουμε), και εφ' όσον μπορούμε να αποσυνθέσουμε την υπερσυναλλοίωτη παράγωγο ως

$$\mathcal{D}_M = \nabla_M + i\Omega_M \quad (13.30)$$

τότε βρίσκουμε και τις συνιστώσες του Ω_M , ξεχωριστά.

Αυτές υπολογίζονται να είναι

$$\Omega_M = \begin{cases} 0 & M = + \\ \lambda(I + J) & M = - \\ -\lambda\Gamma_+\Gamma_M I & M = 1,2,3,4 \\ -\lambda\Gamma_+\Gamma_M J & M = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (13.31)$$

όπου ορίσαμε $I := \Gamma_{1234}$ και $J := \Gamma_{5678}$, με $I^2 = J^2 = \mathbb{1}$ και $IJ = JI$. Επίσης, αφού παρατηρήσουμε ότι $\Gamma_+^2 = 0$, παίρνουμε

$$\Omega_i\Omega_j = 0 \quad \text{για όλα τα } i, j = 1, \dots, 8 \quad (13.32)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να εξετάσουμε την συνθήκη $\mathcal{D}\epsilon = 0$. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι αφού $\nabla_+ = \partial_+$ και $\Omega_+ = 0$, τότε το ϵ είναι ανεξάρτητο του x^+ . Παρόμοια, από την

$$\partial_j\epsilon = -i\Omega_j\epsilon \quad (13.33)$$

και την εξίσωση (13.32), βλέπουμε ότι $\partial_i\partial_j\epsilon = 0$ και συμπεραίνουμε ότι το ϵ είναι, το πολύ, γραμμικό στο x^i , δηλαδή

$$\epsilon = \chi + \sum_j x^j\epsilon_j$$

όπου οι σπίνορες χ και ϵ_i είναι μόνο συναρτήσεις του x^- .

Από την εξίσωση (13.33) βλέπουμε ότι $\epsilon_j = -i\Omega_j\chi$, οπότε κάθε Killing σπίνορας παίρνει τη μορφή

$$\epsilon = \left(\mathbb{1} - i \sum_j x^j\Omega_j \right) \chi \quad (13.34)$$

την οποία όταν εισάγουμε στην εναπομείνουσα συνθήκη

$$\partial_-\epsilon + \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij}x^j\Gamma_+\Gamma_i\epsilon + i\lambda(I + J)\epsilon = 0$$

και χρησιμοποιώντας ότι $\Gamma_+^2 = 0$, παίρνουμε

$$\partial_- \chi + i\lambda(I + J)\chi + \sum_i x^i \left(\frac{1}{2} \sum_j A_{ij} \Gamma_+ \Gamma_j + \lambda(I + J)\Omega_i - \lambda\Omega_i(I + J) \right) \chi = 0$$

Δεδομένης της άλγεβρας $\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = +2\eta_{ab}\mathbb{1}$ παρατηρούμε ότι

$$(I + J)\Omega_i - \Omega_i(I + J) = 2\lambda\Gamma_+\Gamma_i \quad \forall i$$

με συνέπεια την τελική σχέση

$$\partial_- \chi + i\lambda(I + J)\chi = \sum_i x^i \left(2\lambda^2\Gamma_i + \frac{1}{2} \sum_j A_{ij}\Gamma_j \right) \Gamma_+\chi \quad (13.35)$$

όπου το αριστερό μέλος είναι ανεξάρτητο του x^i ενώ το δεξί μέλος εξαρτάται ρητά από αυτό, οπότε και τα δυο μέλη θα πρέπει να μηδενίζονται ανεξάρτητα. Όσον αφορά το δεξί μέλος, εάν $\Gamma_+\chi = 0$ και A_{ij} τυχαίο, τότε προκύπτουν 16 πραγματικοί Killing σπίνορες. Όμως, εάν το A_{ij} επιλεγεί τέτοιο ώστε να μηδενίζεται η παρένθεση του δεξιού μέλους, τότε το δεξί μέλος μηδενίζεται για τυχαίους σπίνορες χ και η λύση παράγει μέγιστη υπερσυμμετρία. Δηλαδή, το δεξί μέλος θα μηδενίζεται για όλα τα χ εάν και μόνον εάν

$$A_{ij} = -4\lambda^2\delta_{ij} \quad (13.36)$$

και άρα η μετρική του υποβάθρου, για μέγιστη υπερσυμμετρία της type-IIB υπερβαρύτητας, θα είναι

$$ds_{IIB}^2 = 2 dx^+ dx^- - \sum_{i,j=1}^8 \delta_{ij} x^i x^j (dx^-)^2 + \sum_i (dx^i)^2 \quad (13.37)$$

όπου οποιαδήποτε αναπαραμετροποίηση του A_{ij} κατά μια θετική σταθερά μπορεί πάντα να απορροφάται από μια αναπαραμετροποίηση του x^- .

Αυτή, λοιπόν, είναι και η μετρική της κλάσης των pp-waves που διατηρεί μέγιστη υπερσυμμετρία, ως υπόβαθρο της type-IIB υπερβαρύτητας.

13.4 Το όριο Penrose του $\text{AdS}_5 \times S^5$ στην type-IIB υπερβαρύτητα

Προηγουμένως, λύσαμε τις πεδιακές εξισώσεις στην type-IIB υπερβαρύτητα και αποδείξαμε ότι το pp-wave είναι ένα υπόβαθρο που διατηρεί μέγιστη υπερσυμμετρία. Τώρα, πρόκειται να αποδείξουμε ότι το ίδιο μέγιστα υπερσυμμετρικό υπόβαθρο μπορεί να προκύψει ως το όριο Penrose του $\text{AdS} \times S$ μέγιστα υπερσυμμετρικού υποβάθρου της type-IIB υπερβαρύτητας. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι στο όριο αυτό του $\text{AdS} \times S$ αποκτάμε είτε ένα pp-wave, είτε έναν επίπεδο χώρο Minkowski.

Το όριο Penrose εκφράζει το γεγονός ότι στη γειτονιά μιας φωτοειδούς γεωδαισιακής γ , μπορούμε πάντα να εκφράσουμε τη μετρική στη μορφή

$$ds^2 = dV \left(dU - \alpha dV + \sum_i \beta_i dY^i \right) + \sum_{ij} C_{ij} dY^i dY^j \quad (13.38)$$

και έπειτα να πάρουμε το όριο

$$g_R = R^2 g; \quad U = u; \quad V = \frac{v}{R^2}; \quad Y^i = \frac{y^i}{R}; \quad R \rightarrow \infty \quad (13.39)$$

ώστε να αποκτήσουμε μια pp-wave μετρική σε u, v, y^i συντεταγμένες, ως

$$ds^2 = dv du + \sum_i C_{ij}(u) dy^i dy^j \quad (13.40)$$

οι οποίες ονομάζονται *συντεταγμένες Rosen*. Όπως θα δούμε παρακάτω, μια αλλαγή συντεταγμένων στις λεγόμενες *συντεταγμένες Brinkmann*, δίνει τη γνωστή, πλέον, μορφή (13.5) των pp-waves.

Για να κατανοήσουμε βαθύτερα τη γεωμετρία της μετρικής (13.38), αναφέρουμε ότι η συντεταγμένη U είναι η αφινική παράμετρος κατά μήκος των φωτοειδών γεωδαισιακών και, άρα, η γεωδαισιακή γ χαρακτηρίζεται από τα $V = Y^i = 0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $g_{UV} = g_{UY^i} = 0$, συνθήκες απαραίτητες ώστε το διανυσματικό πεδίο $\partial/\partial U$ να είναι αυτο-παράλληλο και, συνεπώς, γεωδαισιακό.

Τουτέστιν, το όριο Penrose εκφράζει το γεγονός ότι κάθε χωρόχρονος (λύση της εξίσωσης Einstein) έχει ένα pp-wave ως οριακό χώρο. Το όριο αυτό μπορεί να κατανοηθεί ως μια «διόρθωση 1ης τάξης» ενός χωρόχρονου, κατά μήκος μιας φωτοειδούς γεωδαισιακής. Επιπλέον, ο οριακός χωρόχρονος εξαρτάται από την επιλογή της φωτοειδούς γεωδαισιακής, με αποτέλεσμα ένας χωρόχρονος να έχει περισσότερα του ενός όρια Penrose.

Γειώνουμε την γενικότητα, θεωρώντας τον χώρο $\text{AdS}_5 \times S^5$, με τον AdS σε Poincaré συντεταγμένες και τη σφαίρα σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$ds^2 = r^{-2} dr^2 + r^2(-dt^2 + ds^2(\mathbb{E}^3)) + d\psi^2 + (\sin \psi)^2 ds^2(S^4) \quad (13.41)$$

και ασχολούμαστε με τις φωτοειδείς γεωδαισιακές μονάχα στο (r, t, ψ) κομμάτι της μετρικής. Δηλαδή, εργαζόμαστε με τη μετρική

$$ds_{(3)}^2 = r^{-2} dr^2 - r^2 dt^2 + d\psi^2$$

Η φωτοειδείς γεωδαισιακές, $ds^2 = 0$, παράγουν τη σχέση

$$r^{-2} \dot{r}^2 + \dot{\psi}^2 = r^2 \dot{t}^2$$

Η ανεξαρτησία της μετρικής από τα t, ψ (διατήρηση ενέργειας και στροφορμής) σημαίνει ότι τα Killing διανύσματα

$$K = K^\mu \partial_\mu = \delta_t^\mu \partial_\mu = \partial_t$$

$$L = L^\mu \partial_\mu = \delta_\psi^\mu \partial_\mu = \partial_\psi$$

με $K_\mu = g_{\mu t} = g_{tt} = r^2$ και $K_\mu = g_{\mu\psi} = g_{\psi\psi} = 1$, που ικανοποιούν την συνθήκη

$$\xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \text{σταθ.}$$

παράγουν τις διατηρήσιμες ποσότητες

$$r^2 \dot{t} = E \quad \dot{\psi} = l$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε ότι

$$\dot{r}^2 + l^2 r^2 = E^2$$

η οποία λύνεται από την

$$r(\tau) = l^{-1} E \sin l\tau$$

και άρα οι φωτοειδής γεωδαισιακές θα είναι οι

$$t(\tau) = -l \cot l\tau \quad \psi(\tau) = l\tau \quad (13.42)$$

όπου, χωρίς απώλεια από τη γενικότητα, θέσαμε όλες τις σταθερές ολοκλήρωσης ίσες με το μηδέν και αναπαραμετροποιήσαμε το τ έτσι ώστε $E = 1$.

Εφ' όσον αποκτήσαμε τις φωτοειδείς γεωδαισιακές, το επόμενο βήμα είναι να αλλάξουμε τις συντεταγμένες σε ένα νέο προσαρμοσμένο light-cone σύστημα

$$(r, t, \psi) \rightarrow (u, v, \phi)$$

όπου το u είναι η αντίστοιχη αφινική παράμετρος τ κατά μήκος των μηδενικών γεωδαισιακών. Δηλαδή το ∂_u είναι το (συναλλοίωτα σταθερό) μηδενικό γεωδαισιακό πεδίο με

$$\bar{g}_{uu} \equiv \bar{g}(\partial_u, \partial_u) = 0$$

αλλά και, εάν η v είναι φωτοειδής και η ϕ χωροειδής συντεταγμένη, θα ισχύει

$$\bar{g}_{uv} \equiv \bar{g}(\partial_u, \partial_v) = 1$$

$$\bar{g}_{u\phi} \equiv \bar{g}(\partial_u, \partial_\phi) = 0$$

Η νέα βάση

$$\bar{g}_{ab} = g_{\mu\nu}(x)e_a^\mu(x)e_b^\nu(x)$$

κατασκευάζεται, αρχίζοντας από τη διεύθυνση

$$\begin{aligned}\partial_u &= \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \psi} (= e_u^\mu \partial_\mu) \\ &= \dot{r} \partial_r + \dot{t} \partial_t + \dot{\psi} \partial_\psi \\ &= (1 - l^2 r^2)^{1/2} \partial_r + r^{-2} \partial_t + l \partial_\psi\end{aligned}\tag{13.43}$$

Έπειτα, αφού $\bar{g}_{uv} = 1$ κι αν έστω $\partial_v = \alpha \partial_r + \beta \partial_t + \gamma \partial_\psi$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\bar{g}(\partial_u, \partial_v) &= g_{rr} \alpha (1 - l^2 r^2)^{1/2} + g_{tt} \beta r^{-2} + g_{\psi\psi} \gamma l \\ &= \alpha (1 - l^2 r^2)^{1/2} r^{-2} - \beta + \gamma l \\ &= 1\end{aligned}$$

όπου δικαιούμαστε να επιλέξουμε την απλούστερη εκδοχή της αποκλειστικά χρονοειδούς διεύθυνσης με $\beta = -1$ και $\alpha = \gamma = 0$. Δηλαδή

$$\partial_v = -\partial_t\tag{13.44}$$

ενώ, αντίστοιχα, η τελευταία μετρική σχέση $\bar{g}_{u\phi} = 0$ δίνει

$$\bar{g}(\partial_u, \partial_\phi) = \alpha (1 - l^2 r^2)^{1/2} r^{-2} - \beta + \gamma l = 0$$

όπου πάλι μπορούμε να μηδενίσουμε μια από τις τρεις διευθύνσεις, καθώς χρειαζόμαστε μονάχα δυο ώστε να απαλλοίφονται μεταξύ τους. Με το ένστικτο της ευκολίας θέτουμε $\alpha = 0$ και από τις β, γ αναπαραμετροποιούμε την $\gamma = 1$ ώστε $\beta = l$ οπότε τελικά

$$\partial_\phi = l \partial_t + \partial_\psi\tag{13.45}$$

Τα αποτελέσματα αυτά για τα $\partial_u, \partial_v, \partial_\phi$ ολοκληρώνονται και δίνουν

$$\begin{aligned} r(u, v, \phi) &= l^{-1} \sin lu \\ t(u, v, \phi) &= -l \cot lu - v + l\phi \\ \psi(u, v, \phi) &= \phi + lu \end{aligned} \quad (13.46)$$

όπου τα (v, ϕ) παραμετροποιούν την οικογένεια των φωτοειδών γεωδαισιακών κατά μήκος της αφινικής παραμέτρου u . Τελικά, είμαστε σε θέση να εκφράσουμε τη νέα μετρική

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2 du dv + 2l^{-1}(\sin lu)^2 dv d\phi - l^{-2}(\sin lu)^2 (dv)^2 + (\cos lu)^2 (d\phi)^2 \\ &\quad + l^{-2}(\sin lu)^2 ds^2(\mathbb{E}^3) + (\sin(lu + \phi))^2 ds^2(S^4) \end{aligned} \quad (13.47)$$

η οποία είναι της μορφής (13.38), δηλαδή ακριβώς το είδος γεωμετρίας που προ-κυρήξαμε, στην αρχή της ενότητας, ότι περιγράφει τη γειτονιά των φωτοειδών γεωδαισιακών ενός χώρου.

Οι (μηδενικές) γεωδαισιακές του χώρου αυτού χωρίζονται σε δυο είδη: σε αυτές που υπάρχουν μόνο μέσα στον AdS_5 και σε αυτές που υπάρχουν μέσα σε όλον τον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Τουτέστιν, για $\dot{\psi} \equiv l = 0$ και για $l \neq 0$ αντίστοιχα.

Γεωδαισιακές μέσα σε όλον τον $\text{AdS}_5 \times S^5$.

Για $l \neq 0$ η μετρική (13.47) είναι της μορφής (13.38), όπου το όριο Penrose είναι ο ισομορφισμός (13.39) τόσο των συντεταγμένων όσο και του ίδιου του πεδίου της μετρικής

$$g_R = R^2 g; \quad u = U; \quad v = \frac{V}{R^2}; \quad x^i = \frac{X^i}{R}; \quad R \rightarrow \infty \quad (13.48)$$

ο οποίος μετασχηματίζει τη γεωμετρία σε

$$ds^2 = 2 dU dV + (\cos lU)^2 (d\Phi)^2 + l^{-2} (\sin lU)^2 ds^2(\mathbb{E}^3) + (\sin lU)^2 ds^2(S^4)$$

δηλαδή στη μορφή

$$ds^2 = 2 dU dV + A_{aa}^2(U) dX^a dX^a$$

που είναι η pp-wave μετρική σε Rosen συντεταγμένες, οι οποίες εν γένει μπορεί να είναι singular και συνεπώς δεν τις προτιμούμε. Για το λόγο αυτό εισάγουμε ένα νέο σύστημα (x^+, x^-, x^a) όπου

$$x^- = U; \quad x^+ = V - \frac{1}{2} \sum_a A_{aa} X^a X^a; \quad x^a = A_{aa} X^a \quad (13.49)$$

και αποκτάμε την μετρική

$$ds^2 = 2 dx^+ dx^- - \sum_a \mu^2 x^a x^a (dx^-)^2 + \sum_a dx^a dx^a \quad (13.50)$$

όπου το μ είναι πραγματική σταθερά, στις λεγόμενες Brinkmann συντεταγμένες. Πιο συγκεκριμένα, (αφού το μ είναι σταθερά) έχουμε έναν Cahen-Wallach χώρο που αντιπροσωπεύει, κατά την προηγούμενη ενότητα, ένα μέγιστα συμμετρικό pp-wave.

Γεωδαισιακές μόνο μέσα στον AdS_5

Για $l = 0$ στην μετρική (13.47), πρίν ακόμα πάρουμε το όριο Penrose, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται ενώ ο τέταρτος και ο έκτος χτίζουν το στοιχείο μήκους του \mathbb{E}^5 . Άρα η μετρική γίνεται

$$ds^2 = 2 du dv + u^2(-(dv)^2 + ds^2(\mathbb{E}^3)) + ds^2(\mathbb{E}^5) \quad (13.51)$$

που είναι ο 10-διάστατος Minkowski χώρος, στο όριο Penrose (χωρίς να το έχουμε εφαρμόσει εμείς). Συνεπώς, εφαρμόζοντας το όριο αυτό, ο ισομορφισμός του Penrose μας δίνει τον απλό M^{10} .

Εφ' όσον στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε ότι, εκτός των $\text{AdS} \times S$ και M^d , το pp-wave είναι κι αυτό μέγιστα υπερσυμμετρικό, τότε στη βάση της παρούσας ενότητας οδηγούμαστε υποχρεωτικά στο συμπέρασμα ότι το όριο Penrose είναι ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μέγεθος της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Στην ουσία, θα πρέπει να αφήνει αναλλοίωτο τον αριθμό των σπινόρων Killing, κάτι που μπορεί όντως να αποδειχθεί εάν δείξουμε ότι η σπινωριακή δέσμη (spinor bundle) S_R , της πολλαπλότητας στο όριο Penrose, έχει τουλάχιστον όσους παράλληλους τομείς (parallel sections) έχει και η αρχική σπινωριακή δέσμη S .

13.5 Το όριο Penrose της $\mathcal{N} = 4$ SYM

Είδαμε, λοιπόν, ότι στη θεωρία βαρύτητας το όριο Penrose πραγματοποιεί τη μετάβαση από τον χώρο $\text{AdS}_5 \times S^5$ στη γεωμετρία του pp-wave, το οποίο είναι ο αντιπρόσωπος του μεγαλο-ενεργειακού (κι άρα προσεγγιστικά άμαζου) σωματιδίου. Επομένως, η επαγόμενη επιθυμία μας είναι να δούμε σε τι αντιστοιχεί το όριο αυτό στην άλλη μεριά της αντιστοιχίας AdS/CFT, την $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Παρά όλα αυτά, πριν προχωρήσουμε, μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά την κατάσταση. Στην προηγούμενη ενότητα, εξετάσαμε με τρόπο γενικό τις φωτοειδείς γεωδαισιακές του $\text{AdS}_5 \times S^5$ στην (t, r, ψ) κατεύθυνση ώστε να αναδείξουμε όλα τα πιθανά σενάρια του ορίου Penrose. Συνεπώς, καθώς τώρα χρειαζόμαστε μονάχα το pp-wave ως οριακό χώρο, ενδιαφερόμαστε μόνο για τις γεωδαισιακές που είναι σε όλον τον $\text{AdS}_5 \times S^5$. Η απλοποίηση έρχεται από το γεγονός ότι η απλούστερη περίπτωση τέτοιων γεωδαισιακών δεν είναι εντοπίζεται στην (t, r, ψ) αλλά στην (t, ψ) κατεύθυνση, δηλαδή σε έναν ισημερινό της S^5 .

Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε τον χώρο $\text{AdS}_5 \times S^5$ στη μορφή

$$ds^2 = R^2 \left(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2 \right) + R^2 \left(\cos^2 \theta d\psi^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_3'^2 \right) \quad (13.52)$$

και εξετάζουμε την τροχιά ενός σωματιδίου κατά μήκος της κατεύθυνσης ψ και συγκεκριμένα στον ισημερινό $\theta = 0$, το οποίο κάζεται στο κέντρο του AdS_5 , $\rho = 0$ (για απλοποίηση της γεωμετρίας). Συνεπώς, αναπτύσσουμε γύρω από το $\theta = 0$ και το $\rho = 0$ ως

$$ds^2 \simeq R^2 \left[-(1 - \rho^2) d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2 \right] + R^2 \left[(1 - \theta^2) d\psi^2 + d\theta^2 + \theta^2 d\Omega_3'^2 \right] \quad (13.53)$$

και ορίζουμε τις φωτοειδείς γεωδαισιακές $\tilde{x}^\pm = (\tau \pm \psi)/\sqrt{2}$, μιας και το ψ παραμετροποιεί τον ισημερινό στο $\theta = 0$. Ο ισομορφισμός Penrose (13.39), στην περίπτωση αυτή, είναι

$$\tilde{x}^+ = x^+; \quad \tilde{x}^- = \frac{x^-}{R^2}; \quad \rho = \frac{r}{R}; \quad \theta = \frac{y}{R}; \quad R \rightarrow \infty \quad (13.54)$$

το οποίο δίνει την pp-wave γεωμετρία

$$ds^2 = -2 dx^+ dx^- - \mu^2(\vec{r}^2 + \vec{y}^2)(dx^+)^2 + d\vec{y}^2 + d\vec{r}^2 \quad (13.55)$$

όπου τα \vec{r}, \vec{y} παραμετροποιούν σημεία στον \mathbb{R}^4 , ενώ αναπαραμετροποιήσαμε τις συντεταγμένες ως $x^+ \rightarrow \sqrt{2}\mu x^+, x^- \rightarrow x^-/\mu\sqrt{2}$ ώστε η μετρική να πάρει τη γνώριμη μορφή του μέγιστα συμμετρικού pp-wave. Αξίζει, επίσης, να αναφέρουμε ότι το όριο Penrose που πήραμε δεν αφορούσε τη μετρική, μιας και αυτή εξαρτιώταν ρητά από την κλίμακα R .

Ξενινάμε, λοιπόν, να κάνουμε τη σύνδεση ανάμεσα στο όριο Penrose της βαρυτικής θεωρίας και τη σύμμορφη θεωρία πεδίου.

Ως γνωστόν, η ενέργεια είναι ο γεννήτορας Noether των χρονικών μετατοπίσεων, t για την global AdS₅ μετρική, και άρα η ενέργεια στον AdS χώρο θα δίνεται από το

$$E = i\partial_t \quad (13.56)$$

ενώ, αφού ο γεννήτορας Noether των στροφών είναι η στροφορμή, για το επίπεδο των συντεταγμένων X^5, X^6 αυτή θα είναι η

$$J = -i\partial_\psi \quad (13.57)$$

όπου ψ η γωνία μεταξύ των κατευθύνσεων X^5 και X^6 .

Παράλληλα, από το λεξικό της αντιστοιχίας AdS/CFT που έχουμε σχηματίσει έως τώρα, η ενέργεια της θεωρίας βαρύτητας αντιστοιχεί στην σύμμορφη διάσταση Δ της $\mathcal{N} = 4$ SYM, ενώ η στροφορμή J αντιστοιχεί σε ένα R-φορτίο. Το φορτίο αυτό παράγει μια ομάδα συμμετρίας U(1), υποομάδα της SU(4)=SO(6) που εναλλάσσει τα έξι βαθμωτά πεδία της κβαντικής θεωρίας πεδίου, η οποία εναλλάσσει τα βαθμωτά πεδία X^5, X^6 που αντιστοιχούν στις χωροχρονικές συντεταγμένες X^5 και X^6 .

Συνεπώς, συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω, οι χαρακτηριστικές ορμές που ορίζονται στη γεωμετρία του pp-wave είναι οι

$$\begin{aligned} p^- = -p_+ &= i\partial_{x^+} = i\partial_{\bar{x}^+} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_t + \partial_\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta - J) \\ p^+ = -p_- &= i\partial_{x^-} = i\frac{\partial_{\bar{x}^-}}{R^2} = \frac{i}{\sqrt{2}R^2}(\partial_t - \partial_\psi) = \frac{(\Delta + J)}{\sqrt{2}R^2} \end{aligned} \quad (13.58)$$

Για μελλοντική χρήση και ευκολία, αναπαραμετροποιούμε τα p^\pm ώστε

$$\frac{p^-}{\mu} = \Delta - J; \quad 2\mu p^+ = \frac{\Delta + J}{R^2} \quad (13.59)$$

Τώρα, εφ' όσον επιθυμούμε να περιγράψουμε την θεωρία χορδών στην pp-wave γεωμετρία, πρέπει να διατηρήσουμε τις ορμές p^\pm πεπερασμένες καθώς εφαρμόζουμε το όριο αυτό. Τουτέστιν, παίρνοντας το όριο $R \rightarrow \infty$, πρέπει να διατηρήσουμε τα $\Delta - J$ και $(\Delta + J)/R^2$ πεπερασμένα (σταθερά). Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε μονάχα τελεστές οι οποίοι έχουν

$$\Delta \simeq J \sim R^2 \rightarrow \infty \quad (13.60)$$

και συμπεραίνουμε ότι το όριο Penrose αντιστοιχεί, στην $\mathcal{N} = 4$ SYM, σε τελεστές με πελώριο R-φορτίο.

Συγκεκριμένα, εφ' όσον $R^2/\alpha' = \sqrt{4\pi g_s N} = \sqrt{g_{YM}^2 N} \rightarrow \infty$, τότε εάν κρατήσουμε το g_s σταθερό η συνθήκη $J \sim R^2 \sim \sqrt{N}$ εννοεί ότι η ποσότητα J/\sqrt{N} είναι σταθερή. Τουτέστιν, θεωρούμε μονάχα τελεστές με R-φορτίο $J \sim \sqrt{N}$.

Έχουμε ήδη αποδείξει, τόσο στο πλαίσιο της υπερσυμμετρίας όσο και στο πλαίσιο των μελανών οπών, ότι προκύπτει ο περιορισμός $\Delta \geq |J|$ (και αντίστοιχα $M \geq |Q|$), ο επονοαζόμενος περιορισμός BPS. Ένα αυτονόητο συμπέρασμα είναι ότι $p^\pm \geq 0$, αλλά και ότι οι τελεστές που επέρχονται του περιορισμού BPS θα ανοίχουν σε short multiplets.

13.6 Κβάντωση της χορδής πάνω στο pp-wave

Για να λέμε την αλήθεια, δεν έχουμε δει έως τώρα την πραγματική ισχύ της θεωρίας χορδών, παρά μόνον έχουμε εξετάσει το χαμηλοενεργειακό της όριο ως υπερβαρύτητα. Τώρα, η παρθενική εξερεύνηση μας στην θεωρία χορδών θα γίνει με ιδανικούς όρους, καθώς η γεωμετρία του pp-wave συμφιλώνεται απόλυτα με τη βαθμίδα κώνου φωτός και παράγει ακριβείς λύσεις για τη χορδή.

Θεωρώντας την μποζονική δράση Polyakov για τη χορδή στο υπόβαθρο του pp-wave, παίρνουμε

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^1 d\sigma \int d\tau \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \left[-2\partial_a x^+ \partial_b x^- - \mu^2 x_i^2 \partial_a x^+ \partial_b x^+ + \partial_a x^i \partial_b x^i \right] \quad (13.61)$$

όπου $x^i = (\vec{r}, \vec{y})$. Θεωρούμε τη σύμμορφη βαθμίδα $\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} = \eta^{ab}$ για την εσωτερική μετρική της χορδής και τη βαθμίδα κώνου φωτός $x^+(\sigma, \tau) = p^+ \tau$ (άρα και $x^- = f(\sigma)$) για τις συντεταγμένες τις χορδής.

Στην περίπτωση μας, επιλέγουμε μια λίγο διαφορετική σύμβαση για την τελευταία βαθμίδα, ως $x^+(\sigma, \tau) = \tau$. Τότε $\eta^{ab} \partial_a x^+ \partial_b x^- = 0$ και $\eta^{ab} \partial_a x^+ \partial_b x^+ = -1$, που σημαίνει ότι

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^1 d\sigma \left[\frac{1}{2} \eta^{ab} \partial_a x^i \partial_b x^i + \frac{\mu^2}{2} (x^i)^2 \right] \quad (13.62)$$

Παράλληλα, η ελεύθερη κυματική εξίσωση κίνησης στον επίπεδο χώρο, $\partial_\tau^2 x^i = \partial_\sigma^2 x^i$, υπό την αναπαραμετροποίηση $\tau \rightarrow \tau/p^+$ γίνεται

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} x^i = \frac{1}{(p^+)^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} x^i \quad (13.63)$$

το οποίο σημαίνει ότι πρέπει, επίσης, να αναπαραμετροποιήσουμε το μήκος της χορδής και, έναντι του $l = 2\pi$, να έχουμε ένα τυχαίο l , ώστε $\sigma \rightarrow 2\pi\sigma/l$. Εισάγοντας και έναν παράγοντα α' για να ταιριάζουν οι διαστάσεις, παίρνουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} x^i = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} x^i \quad (13.64)$$

όπου

$$c = \frac{l}{2\pi\alpha'p^+} \quad (13.65)$$

το οποίο σημαίνει ότι για να προκύψει η εύκολη σύμβαση $c = 1$ πρέπει να επιλέξουμε $l = 2\pi\alpha'p^+$. Οπότε, η δράση διαμορφώνεται ως

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^{2\pi\alpha'p^+} d\sigma \left[\frac{1}{2} \left(-(\dot{x}^i)^2 + (x'^i)^2 \right) + \frac{\mu^2}{2} (x^i)^2 \right] \quad (13.66)$$

ενώ οι εξισώσεις κίνησης δίνουν

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2)x^i - \mu^2 x^i = 0 \quad (13.67)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής αναπτύσσεται σε επίπεδα κύματα $x^i \propto e^{-i\omega_n\tau + ik_n\sigma}$, το οποίο εννοεί ότι

$$\omega_n^2 = k_n^2 + \mu^2 \quad (13.68)$$

Στον επίπεδο χώρο, για $\mu = 0$, όταν το μήκος του σ είναι 2π τότε ισχύει ότι $\omega_n = k_n = n$. Στην περίπτωση μας, όμως, η αναπαραμετροποίηση του σ δίνει ότι $k_n = 2\pi n/l = n/\alpha'p^+$, τόσο για τον επίπεδο χώρο όσο και για το pp-wave, μιας και το k_n ορίζεται από το ανάπτυγμα Fourier στον κύκλο μήκους $2\pi\alpha'p^+$. Συνεπώς, αποκτάμε τη σχέση

$$\omega_n = \sqrt{\mu^2 + \frac{n^2}{(\alpha'p^+)^2}} \quad (13.69)$$

Έπειτα, όπως είδαμε στη θεωρία χορδών, η light-cone Hamiltonian για την ανοικτή χορδή στον επίπεδο χώρο είναι

$$H_{open}^{lc} = p^- = -p_+ = \frac{p^i p^i - 1/\alpha'}{2p^+} + \frac{1}{2\alpha'p^+} \sum_{n \geq 1} n N_n \quad (13.70)$$

και για την κλειστή χορδή

$$H_{closed}^{lc} = p^- = \frac{p^i p^i - 4/\alpha'}{2p^+} + \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n N_n \quad (13.71)$$

όπου N_n ο τελεστής αρίθμησης

$$N_n = \sum_i a_n^{i\dagger} a_n^i \quad (13.72)$$

Εάν θέλουμε και τα φερμιόνια στο κόλπο, εισάγουμε την υπερσυμμετρία στη θεωρία, η οποία εννοεί τον τελεστή αρίθμησης

$$N_n = \sum_i a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_a b_n^{a\dagger} b_n^a \quad (13.73)$$

ενώ, όπως είχαμε εξηγήσει, το κενό αποτελείται πλέον από τις άμαζες καταστάσεις των πρώτων ταλαντωτών και όχι από τους τελεστές της ορμής $p^i \sim \alpha_0^i$.

Στην περίπτωση του pp-wave, δίχως να υπολογίσουμε τα πάντα που αφορούν τους ταλαντωτές από την αρχή, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ουσιαστική αλλαγή είναι ότι τα αναπτύγματα Fourier αλλάξαν χαρακτήρα ως $n \rightarrow \omega_n$. Έτσι, μπορούμε εύκολα να ψυχανεμιστούμε ότι η light-cone Hamiltonian της κλειστής χορδής στο pp-wave θα είναι

$$H = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega_n N_n \quad (13.74)$$

όπου θεωρήσαμε $n > 0$ για τους «δεξιό-στροφους» ταλαντωτές a_n^i και $n < 0$ για τους «αριστερό-στροφους» ταλαντωτές \tilde{a}_n^i , ενώ συμπεριλάβαμε προφανώς και τα μηδενικά modes $n = 0$, μιας και το ω_n ορίζεται κανονικά για την τιμή αυτή, $\omega_0 = \mu$, σε αντίθεση με τον επίπεδο χώρο όπου όπως εξηγήσαμε τα μηδενικά modes εξαφανίζονται με την εμφάνιση της υπερσυμμετρίας. Στην περίπτωση του pp-wave, η υπερσυμμετρία προκαλεί την ακύρωση της μποζονικής και της φερμιονικής ενέργειας κενού, δηλαδή της ενέργειας των σταθερών όρων που προέρχονται από το normal ordering τελεστών.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, όταν τα μηδενικά modes $n = 0$ είναι τα μοναδικά που είναι διεγερμένα, τότε αναπαράγεται το φάσμα των γνωστών άμαζων modes της υπερβαρύτητας που διαδίδονται στη γεωμετρία pp-wave. Πράγματι, για $n = 0$ έχουμε $H = \frac{1}{2}\mu\alpha'(p^i)^2$, όπου p^i είναι η ορμή του υπερβαρυτικού σωματιδίου.

Αυτό που, βέβαια, είναι κοινή συνθήκη τόσο για τον επίπεδο χώρο όσο και για το pp-wave, είναι η μηδενική συνολική ορμή κατά μήκος της κλειστής χορδής, από την αναλλοιώτητα μετατόπισης, δηλαδή

$$P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n N_n = 0 \quad (13.75)$$

Το ότι η παραπάνω Hamiltonian (13.74) είναι μια εύστοχη κατασκευή μπορεί να επιβεβαιωθεί πανεύκολα, παίρνοντας το όριο του επίπεδου χώρου $\mu \rightarrow 0$ (όπου η μετρική (13.55) γίνεται ο επίπεδος χώρος), το οποίο δίνει

$$H = p^- = \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n N_n \quad (13.76)$$

που είναι όντως το ενεργειακό φάσμα της κλειστής υπερσυμμετρικής χορδής στον επίπεδο χώρο.

Έπειτα, μπορούμε να θεωρήσουμε και το όριο του πολύ καμπυλομένου χωρόχρονου, $\mu\alpha'p^+ \gg 1$, στη οποία περίπτωση αναπτύσσουμε τη ρίζα του ω_n ως

$$\omega_n \simeq \mu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{(\alpha' \mu p^+)} \right) \quad (13.77)$$

το οποίο, από την οπτική γωνία της $\mathcal{N} = 4$ SYM, είναι ένα διαταραχτικό ανάπτυγμα. Αυτό θα φανεί καθαρότερα στην αμέσως επόμενη ενότητα.

Βέβαια, για να προετοιμάσουμε το έδαφος για την επίμαχη σύγκριση της θεωρίας χορδών με τη θεωρία πεδίου, στη γεωμετρία του pp-wave, μπορούμε να μεταφράσουμε το ενεργειακό φάσμα της χορδής στις μεταβλητές της $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Χρησιμοποιούμε ότι

$$\frac{\omega_n}{\mu} = \frac{E_n}{\mu} = \frac{p^-}{\mu} = (\Delta - J)_n \quad (13.78)$$

καθώς και ότι

$$2\mu p^+ = \frac{(\Delta + J)}{R^2} \simeq \frac{2J}{R^2} = \frac{2J}{\alpha' \sqrt{g_{YM}^2 N}} \quad (13.79)$$

οι οποίες συνδυάζονται και δίνουν

$$(\Delta - J)_n = \frac{\omega_n}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{g_{YM}^2 N n^2}{J^2}} \quad (13.80)$$

όπου, όπως συμπεράναμε στην προηγούμενη ενότητα, βρισκόμαστε στο όριο

$$\frac{g_{YM}^2 N}{J^2} = \text{σταθερό} \quad (13.81)$$

Κεφάλαιο 14

Ο τομέας BMN της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας πεδίου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε ότι η γεωμετρία του pp-wave είναι ένα μέγιστο συμμετρικό υπόβαθρο της type-IIB υπερβαρύτητας και ότι, μάλιστα, η γεωμετρία αυτή προκύπτει ως το όριο Penrose του χώρου $\text{AdS}_5 \times S^5$. Το pp-wave προέκυψε ως μια γεωμετρία ενδιαφέροντος καθώς αναπαριστά φωτεινές γεωδαισιακές της βαρυτικής θεωρίας, οι οποίες εκφράζουν τροχιές υψηλο-ενεργειακών σωματιδίων, τα οποία με τη σειρά τους είναι ιδανικά για να παραλληλίσουν τη θεωρία χορδών με την QCD.

Εφ' όσον, λοιπόν, η γεωμετρία του pp-wave είναι τόσο ενδιαφέρουσα, δεν υπάρχει τίποτα που να μας εμποδίζει από το να εξερευνήσουμε το αποτέλεσμα του ίδιου ορίου, δηλαδή του ορίου Penrose, στην πλευρά της αντιστοιχίας AdS/CFT που αφορά τη σύμμορφη θεωρία πεδίου.

Για τον σκοπό αυτό, θα εξετάσουμε τα μυστικά που επιφυλλάσει το όριο Penrose για την $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία πεδίου, δηλαδή το είδος των τελεστών που παράγει, και θα βρούμε τρόπους να θεμελιώσουμε την αντιστοιχία ανάμεσα στη θεωρία χορδών και τη σύμμορφη θεωρία πεδίου στο όριο αυτό.

14.1 Καταστάσεις της χορδής και οι τελεστές BMN

Στις δυο τελευταίες ενότητες, είδαμε ότι καταστάσεις της χορδής δεδομένης ενέργειας πάνω στο pp-wave αντιστοιχούν σε τελεστές δεδομένου $\Delta - J$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Έτσι, για μηδενική σύζευξη, $g_s = 0$, έχουμε τελεστές με $\Delta - J = 1$, ενώ το κενό που έχει προφανώς μηδενική ενέργεια αντιστοιχεί σε $\Delta - J = 0$. Αυτομάτως, μας γεννάται η επιθυμία να οργανώσουμε τα πεδία με βάση την ποσότητα $\Delta - J$ και να τα χρησιμοποιήσουμε ώστε να κατασκευάσουμε τελεστές. Ο ειδικός αυτός τομέας της $\mathcal{N} = 4$ SYM που αντιστοιχεί στο όριο Penrose της θεωρίας χορδών ονομάζεται *τομέας BMN*, από τους εμπνευστές του Berenstein-Maldacena-Nastase, και οι αντίστοιχοι τελεστές, *τελεστές BMN*.

Το φορτίο J ορίστηκε ως ο γεννήτορας των στροφών ανάμεσα στις χωροχρονικές διαστάσεις X^5, X^6 και της εναλλαγής των βαθμωτών πεδίων Φ^5, Φ^6 της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$Z = \Phi^5 + i\Phi^6 \quad (14.1)$$

το οποίο ορίζεται να έχει φορτίο $+1$ υπό τη στροφή και, άρα, το \bar{Z} έχει -1 . Τα υπόλοιπα βαθμωτά πεδία $\phi^m, m = 1, \dots, 4$ είναι ουδέτερα, καθώς επίσης ουδέτερες είναι και οι συνιστώσες του πεδίου βαθμίδας $A_i, i = 1, \dots, 4$, το οποίο σημαίνει ότι το

$$D_i Z - \partial_i Z + [A_i, Z] \quad (14.2)$$

έχει επίσης φορτίο $+1$.

Σημειωτέον, οι δείκτες m, i αναφέρονται προφανώς σε διαφορετικές χωρικές συντεταγμένες της pp-wave γεωμετρίας: κάθε δείκτης από τους οκτώ, αντιστοιχεί και σε μια από τις επίσης οκτώ χωρικές διαστάσεις. Τουτέστιν, παρατηρώντας τον δείκτη i στα $D_i Z, A_i$, καταλαβαίνουμε ότι έχουμε μια Ευκλείδεια θεωρία βαθμίδας στον χώρο \mathbb{R}^4 . Συνεπώς, θα είναι $Z = Z(x^i)$ με $x^i \in \mathbb{R}^4$. Ακόμη, όπως είχαμε δείξει, μπορούμε να μεταβούμε στον $\mathbb{R} \times S^3$ με ένα σύμμορφο μετασχηματισμό, ο οποίος αφήνει ανέπαφη τη σύμμορφη θεωρία μας.

Παράλληλα, τα (τέσσερα Majorana) φερμιόνια χ^I είναι κι αυτά φορτισμένα υπό την $SU(4) = SO(6)$ R-συμμετρία και, εφ' όσον βρίσκονται στην σπινωριακή αναπαράσταση της $SO(6)$ (ή στη θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(4)$), τότε υπό την υποομάδα $U(1) = SO(2)$ έχουν φορτίο $\pm 1/2$. Εκφράζουμε τις οκτώ συνιστώσες θετικού φορτίου ως $\chi_{J=+1/2}^a$ και τις οκτώ αρνητικού φορτίου ως $\chi_{J=-1/2}^a$.

Όσον αφορά τις διαστάσεις, ως συνήθως, τα πεδία Z, Φ^m, A_i έχουν $\Delta = 1$ και τα χ έχουν $\Delta = 3/2$.

Συνεπώς, ο μοναδικός συνδोιασμός με $\Delta - J = 0$ είναι το πεδίο Z , οι συνδοιασμοί με $\Delta - J = 1$ είναι οι $(D_i Z, \Phi^m)$ για τα μποζόνια και τα $\chi_{J=+1/2}^a$ για τα φερμιόνια, ενώ οι συνδοιασμοί με $\Delta - J = 2$ είναι το \bar{Z} και τα $\chi_{J=-1/2}^a$.

Τελεστές BMN με $\Delta - J = 0$

Η κατάσταση του κενού μιας κλειστής χορδής πρέπει, λοιπόν, να αντιστοιχεί μονάχα σε πεδία Z , ώστε να έχει $\Delta - J = 0$ και να έχει ορμή p^+ η οποία αντιστοιχεί σε φορτίο J . Τούτέστιν, μπορούμε να ταυτοποιήσουμε το κενό με τον τελεστή μονού-ίχνους (single-trace operator)

$$|0, p^+\rangle_{lc} \longleftrightarrow \mathcal{O}^J = \frac{1}{\sqrt{J} N^{J/2}} \text{Tr}[Z^J] \quad (14.3)$$

όπου το ίχνος αναφέρεται στους N δείκτες χρώματος, της ομάδας $SU(N)$. Αν σε πρώτη θωριά αμφισβητούμε την κατασκευή αυτή και σκεφτούμε ότι και ένα μόνον πεδίο Z χαρακτηρίζεται από το $\Delta - J = 0$, τότε ας αναλογιστούμε ότι η σχέση $\Delta_{\mathcal{O}} - J_{\mathcal{O}} = 0$ αναφέρεται σε ένα γενικό φορτίο $J_{\mathcal{O}}$ και όχι συγκεκριμένα στο $J_{\mathcal{O}} = 1$. Οπότε, για ένα γενικό φορτίο $J_{\mathcal{O}} = J$, η συνθήκη $\Delta_{\mathcal{O}} = J_{\mathcal{O}} = J$ απαιτεί να συμπεριλάβουμε Z^J πεδία με διάσταση $+1$ το καθένα. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την περίπτωση $J = 1$, δηλαδή μόνο ένα πεδίο Z , αλλά έχουμε ήδη συμπεράνει ότι θέλουμε μεγάλο φορτίο $J_{\mathcal{O}}$ για τους τελεστές BMN.

Έπειτα, η κανονικοποίηση του τελεστή προέκυψε ως εξής. Κανονικοποιούμε στη μονάδα τη συσχέτιση

$$\langle \bar{\mathcal{O}}^J(x) \mathcal{O}^J(0) \rangle = \langle \text{Tr}[\bar{Z}^J(x)] \text{Tr}[Z^J(0)] \rangle = \frac{1}{|x|^{2J}} \quad (14.4)$$

όπου αναλογιζόμαστε ότι έχουμε J πιθανότητες συστολής του πρώτου \bar{Z} με κάποιο Z , ενώ η επιπεδότητα (planarity) του διαγράμματος διασφαλίζει ότι τα επόμενα ζεύγη θα συσταλούν με τη σειρά (εάν το διάγραμμα δεν ήταν επίπεδο, αυτό θα σήμαινε ότι οποιοδήποτε \bar{Z} θα μπορούσε να συσταλεί με οποιοδήποτε Z). Κάθε μια από αυτές τις συστολές δίνει έναν παράγοντα N , αφού έχουμε N πεδία Z για μια $SU(N)$ θεωρία βαθμίδας. Ως αποτέλεσμα, παίρνουμε τον παραπάνω παράγοντα.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι, στη θεωρία πεδίου, οι διάφορες καταστάσεις κατασκευάζονται με τη δράση των τελεστών πάνω στην κατάσταση του κενού της θεωρίας, $|0\rangle$. Οπότε, εάν θέλουμε να δείξουμε την αντιστοιχία μεταξύ καταστάσεων της θεωρίας χορδών και της θεωρίας πεδίου, τότε εκφράζουμε ότι

$$|0, p^+\rangle_{lc} \longleftrightarrow \mathcal{O}^J |0\rangle \quad (14.5)$$

Από δω κι έπειτα, θα αναφερόμαστε απλώς στους τελεστές, αφήνοντας ως εννοούμενες τις καταστάσεις που κατασκευάζουν με τη δράση τους πάνω στην κατάσταση του κενού.

Ο επόμενος τελεστής που ανήκει στην κατηγορία τούτη, είναι ο τελεστής διπλού ίχνους (double-trace operator)

$$\mathcal{T}^{J,r} = \mathcal{O}^{r \cdot J} \mathcal{O}^{(1-r) \cdot J} = \frac{1}{J \sqrt{r(1-r)} N^{J/2}} : \text{Tr}[Z^{J_1}] \text{Tr}[Z^{J-J_1}] : \quad (14.6)$$

όπου $J_1/J = r$, με το J_1 να έχει εύρος ανάμεσα στο 1 και στο $J - 1$. Φυσικά, ο παραπάνω τελεστής είναι ένας τελεστής BMN μονάχα εάν το J_1 είναι της τάξης του J . Είναι φυσιολογικό να θεωρήσουμε ότι ο τελεστής αυτός διπλού ίχνους αντιστοιχεί σε μια κατάσταση δυο χορδών, με συνολική ορμή p^+ , κάτι που θα γίνει περισσότερο εμφανές παρακάτω, όπου θα κατανοήσουμε τη φυσική ερμηνεία του ίχνους από την οπτική γωνία των χορδών. Παρόμοια, μπορούμε να γενικεύσουμε σε τελεστές πολλαπλού ίχνους.

Τελεστές BMN με $\Delta - J = 1$

Τα πεδία με $\Delta - J = 1$ είναι, όπως είπαμε, τα $(\Phi^m, D_i Z)$ για τα μποζόνια και τα $\chi_{J=+1/2}^a$ για τα φερμιόνια και αντιστοιχούν στους $n = 0$ ταλαντωτές $(a_0^{m\dagger}, a_0^{i\dagger})$ και $b_0^{a\dagger}$ της χορδής. Συνεπώς, οι καταστάσεις της χορδής που κατασκευάζονται από τη δράση των ταλαντωτών πάνω στο κενό $|0, p^+\rangle$ αντιστοιχούν στην εισαγωγή των αντίστοιχων πεδίων μέσα στο ίχνος του τελεστή $\text{Tr}(Z^J)$ που αντιπροσωπεύει το κενό αυτό.

Η δράση του θεμελιώδους μποζονικού ταλαντωτή $a_0^{m\dagger}$ της χορδής αντιστοιχεί στον τελεστή BMN

$$\begin{aligned} a_0^{m\dagger} |0, p^+\rangle &\longleftrightarrow \mathcal{O}_m^J = \frac{1}{J} \sum_{l=1}^J \frac{1}{N^{J/2+1/2}} \text{Tr}[Z^l \Phi^m Z^{J-l}] \\ &= \frac{1}{N^{J/2+1/2}} \text{Tr}[\Phi^m Z^J] \end{aligned} \quad (14.7)$$

όπου όντως $\Delta_{\mathcal{O}_m} - J_{\mathcal{O}_m} = (J+1) - J = 1$, ενώ η δράση του ταλαντωτή $a_0^{i\dagger}$ αντιστοιχεί στον τελεστή

$$\begin{aligned} a_0^{i\dagger} |0, p^+\rangle &\longleftrightarrow \mathcal{O}_i^{J+1} = \frac{1}{J} \sum_{l=1}^J \frac{1}{N^{J/2+1/2}} \text{Tr}[Z^l D_i Z Z^{J-l}] \\ &= \frac{1}{N^{J/2+1/2}} \text{Tr}[D_i Z Z^J] \end{aligned} \quad (14.8)$$

όπου όντως $\Delta_{\mathcal{O}_i} - J_{\mathcal{O}_i} = (J+2) - (J+1) = 1$, και μένει να εξηγήσουμε αυτά που εκ πρώτης όψεως μπορεί να φαίνονται ως ακροβατικά.

Πρώτον, το άθροισμα εκφράζει όλες τις δυνατές θέσεις του νεο-εισαχθέντος πεδίου μέσα στο ίχνος. Στις παραπάνω περιπτώσεις αυτό εν τέλει δεν έχει σημασία λόγω της κυκλικότητας του ίχνους. Αργότερα, όμως, που θα κατασκευάσουμε τελεστές εισάγοντας περισσότερα πεδία μέσα στο ίχνος, η σχετική θέση των πεδίων αυτών ανάμεσα στα πεδία Z θα κάνει την παρουσία του αθροίσματος (των περιπτώσεων) αναγκαία.

Δεύτερον, ο παράγοντας μπροστά από τα αθροίσματα προέκυψε με κανονικοποίηση όπως και στην προηγούμενη ενότητα. Η κυκλικότητα του ίχνους και το άθροισμα στις J περιπτώσεις εν τέλει απαλλοίφουν το J ως παράγοντα, εκφράζοντας το γεγονός ότι δεν έχουμε J περιπτώσεις συστολής της συσχέτισης $\langle \mathcal{O}\mathcal{O} \rangle$ των τελικών τελεστών. Πράγματι, εάν παρατηρήσουμε τους τελικούς τελεστές, μπορούν να συσταλούν με τον συζυγή τους με έναν και μοναδικό τρόπο: το νεο-εισαχθέν πεδίο Φ^m ή $D_i Z$ συστέλλεται με το συζυγές του και τα υπόλοιπα πεδία Z, \bar{Z} συστέλλονται με τη σειρά (για επίπεδα διαγράμματα).

Κατά τα ίδια, η δράση του φερμιονικού ταλαντωτή $b_0^{a\dagger}$ θα αντιστοιχεί στον τελεστή BMN

$$b_0^{a\dagger} |0, p^+\rangle \longleftrightarrow \mathcal{O}_a^{J+1/2} = \frac{1}{N^{J/2+1/2}} \text{Tr}[\chi_{J=+1/2}^a Z^J] \quad (14.9)$$

όπου κι αυτός θα έχει $\Delta_{\mathcal{O}_a} - J_{\mathcal{O}_a} = (J + 3/2) - (J + 1/2) = 1$, όπως πρέπει.

Επιμένοντας στους θεμελιώδεις ταλαντωτές με $n = 0$ που αντιστοιχούν σε πεδία με $\Delta - J = 1$, μπορούμε να κατασκευάσουμε και μια κατάσταση της χορδής με περισσότερους του ενός ταλαντωτή και συγκεκριμένα με δυο, η οποία θα αντιστοιχεί στον τελεστή

$$a_0^{m\dagger} b_0^{a\dagger} |0, p^+\rangle \longleftrightarrow \mathcal{O}_{ma}^{J+1/2} = \frac{1}{N^{J/2+1} \sqrt{J}} \sum_{l=1}^J \text{Tr}[\Phi^m Z^l \chi_{J=+1/2}^a Z^{J-l}] \quad (14.10)$$

ο οποίος έχει $\Delta_{\mathcal{O}_{ma}} - J_{\mathcal{O}_{ma}} = (J+1+3/2) - (J+1/2) = 2$, μιας και αποτελείται από δυο πεδία με $\Delta - J = 1$. Για τελεστές με $\Delta_{\mathcal{O}} - J_{\mathcal{O}} = 2$ αποτελούμενους από μονάχα ένα νεο-εισαγόμενο πεδίο με $\Delta - J = 2$, θα χρησιμοποιήσουμε προφανώς τα πεδία $\bar{Z}, \chi_{J=-1/2}^a$

Παρατηρούμε, όπως είχαμε πει για τους τελεστές με περισσότερα του ενός νεο-εισαχθέντος πεδίου, ότι πλέον η σχετική θέση των πεδίων έχει σημασία: καταστάσεις του ίχνους με διαφορετικό l θα είναι ορθογώνιες (εκτός για $l = J/2$). Βλέπουμε, λοιπόν, για πρώτη φορά την αναγκαιότητα του αθροίσματος όλων των δυνατών περιπτώσεων.

Επίσης, αρχίζουμε και αισθανόμαστε ολοένα και περισσότερο την ομοιότητα ενός τελεστή BMN με την κλειστή χορδή. Από τη μια όψη του νομίσματος,

μια κλειστή χορδή είναι μια κλειστή τοπολογία από σημεία στην οποία δρουν ταλαντωτές και τη διεγείρουν. Από την άλλη όψη, ένας τελεστής BMN είναι μια «χορδή από πεδία Z », η οποία είναι και αυτή κλειστή χάρις στο ίχνος και μπορεί να περιέχει «διεγέρσεις», δηλαδή πεδία διαφορετικά του Z .

Τελεστές BMN με ορμή

Οι καταστάσεις της χορδής σε διεγερμένα επίπεδα $n \geq 1$, αποκτούνται με παρόμοιο τρόπο. Η διαφορά είναι ότι οι καταστάσεις αυτές έχουν ορμή και συνεπώς αντιστοιχούν σε τελεστές με κυματοσυνάρτηση ορμής $e^{2\pi i n x/L}$, όπου L το μήκος της κλειστής χορδής. Εφ' όσον η κλειστή χορδή εκφράζεται μέσα από τον τελεστή του κενού $\text{Tr } Z^J$, τότε μπορούμε να κάνουμε την αντιστοίχιση

$$e^{2\pi i n x/L} \longleftrightarrow e^{2\pi i n l/J} \quad (14.11)$$

όπου προφανώς η (θέση)/(μήκος χορδής) αντιστοίχισε σε (θέση στο ίχνος)/(αριθμός πεδίων ίχνους). Η αντιστοίχιση αυτή προκύπτει φυσιολογικά από την οπτική της «χορδής των πεδίων Z ».

Συμπεραίνουμε ότι η δράση ενός ταλαντωτή $a_n^{m\dagger}$ θα είναι

$$a_n^{m\dagger} |0, p^+\rangle \longleftrightarrow \mathcal{O}_m^J = \frac{1}{J} \frac{1}{N^{J/2+1/2}} \sum_{l=1}^J \text{Tr}[Z^l \Phi^m Z^{J-l}] e^{2\pi i n l/J} \quad (14.12)$$

Πριν προλάβουμε να χαρούμε το νέο μας δημιουργήμα, παρατηρούμε ότι ο τελεστής αυτός μηδενίζεται χάρις στην κυκλικότητα του ίχνους. Παρ' όλα αυτά, η πίκρα δίνει τη θέση της στη χαρά καθώς αυτό ακριβώς πρέπει να συμβαίνει από τη δράση ενός και μοναδικού ταλαντωτή της χορδής, $a_n^{m\dagger}$: για την κλειστή χορδή ισχύει ότι $N_n = \tilde{N}_n$ για τους δεξιό-στροφους και τους αριστερό-στροφους ταλαντωτές, ή αλλιώς ότι ο ταλαντωτής $a_n^{m\dagger}$ ζει μόνον παρέα με τον $\tilde{a}_n^m = a_{-n}^{m\dagger}$. Ισοδύναμα, όλα αυτά εκφράζουν την μηδενική συνολική ορμή κατά μήκος της κλειστής χορδής, συνθήκη που δεν τηρείται από την (14.12).

Αυτή η τελευταία δήλωση αξίζει κατανοηθεί βαθύτερα. Από τη μια, η συνθήκη της μηδενικής ορμής προέρχεται από το γεγονός ότι η χορδή είναι κλειστή. Από την άλλη, το ίχνος είναι η ιδιότητα αυτή του τελεστή BMN που απαγορεύει τη μη-μηδενική ορμή. Τουτέστιν, η κλειστότητα της χορδής εμφανίζεται πάλι ως δυϊκή της κυκλικότητας του ίχνους του τελεστή BMN, φωτίζοντας περαιτέρω την αντιστοιχία ανάμεσα στην κλειστή χορδή και την «χορδή των πεδίων Z ».

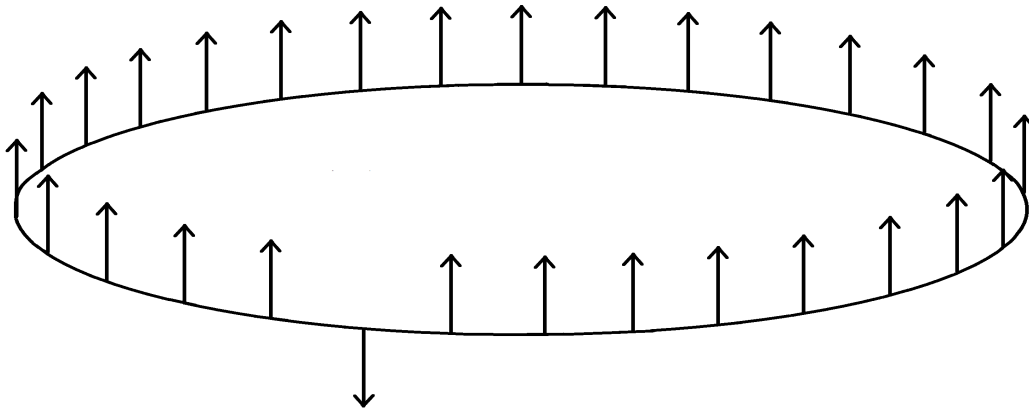
Έπειτα, ένα παράδειγμα μιας φυσικής κατάστασης που αντιστοιχεί σε μη-μηδενικό τελεστή BMN, προκύπτει όπως εξηγήσαμε από τη δράση δυο μποζονικών ταλαντωτών αντίθετης ορμής, ως

$$a_n^{m\dagger} a_{-n}^{r\dagger} |0, p^+\rangle \longleftrightarrow \mathcal{O}_{mr}^J = \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{1}{N^{J/2+1}} \sum_{l=1}^J \text{Tr}[\Phi^m Z^l \Phi^r Z^{J-l}] e^{2\pi i n l / J} \quad (14.13)$$

Τέλος, ας παρατηρήσουμε το προφανές γεγονός ότι σε όλα τα παραπάνω και σε ότι ακολουθεί, θεωρούμε την «προσέγγιση αραιού αερίου». Δηλαδή, ότι θεωρούμε ελάχιστες «ανομοιογένειες» διασκορπισμένες ανάμεσα στον πολύ μεγάλο αριθμό J από πεδία Z .

14.2 Η ερμηνεία της αλυσίδας spin

Η εικόνα των εισαγόμενων πεδίων Φ^m κατά μήκος μιας συστοιχίας από πεδία Z , θυμίζει την έννοια της αλυσίδας spin (*spin chain*). Η αλυσίδα spin είναι ένα 1-διάστατο σύστημα μήκους L από spin, με μονάχα πάνω $|\uparrow\rangle$ ή κάτω $|\downarrow\rangle$ βαθμούς ελευθερίας. Στον παραλληλισμό που πραγματοποιούμε, όλοι οι βαθμοί ελευθερίας είναι κοινοί, εκτός από έναν που αντιστοιχεί στο νεο-εισαχθέν πεδίο Φ^m , όπως στο παρακάτω σχήμα.



Συνεπώς, η χορδή πάνω στο pp-wave αντιστοιχεί στην «προσέγγιση αραιού αερίου» της αλυσίδας spin. Βέβαια, ακόμη κι αν δεν γνωρίζαμε την έννοια της αλυσίδας spin, έχουμε ήδη σχηματίσει μια ανάλογη εικόνα: μια «χορδή» από διακριτές θέσεις, κάθεμια από τις οποίες έχει ένα πεδίο Z .

Γενικά, όμως, έχουμε φτάσει σε ένα σημείο όπου τα πολλά λόγια είναι φτωχά και επιθυμούμε να κάνουμε ένα σοβαρό υπολογισμό στον τομέα BMN, ο οποίος θα αναδείξει το μεγαλείο της αντιστοίχισης του με την κλειστή χορδή. Για τον σκοπό αυτό, θα δείξουμε ότι ο τομέας BMN αναπαράγει το ενεργειακό φάσμα (13.80) της κλειστής χορδής πάνω στο pp-wave.

Η συνεισφορά πρώτης τάξης στην ενέργεια της χορδής μπορεί να αποκτηθεί από την διόρθωση πρώτης τάξης, δηλαδή σε 1-loop, της ανώμαλης διάστασης του τελεστή BMN. Υπενθυμίζουμε ότι στο πλαίσιο της αντιστοιχίας AdS/CFT είμαστε στο επίπεδο όριο του t' Hooft, οπότε και η διόρθωση σε 1-loop, η οποία εμπεριέχει μονάχα μια αλληλεπίδραση SYM 4-σημείων, θα αφορά μόνο γειτονικά πεδία του τελεστή.

Η διάσταση Δ ενός τελεστή χαρακτηρίζει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει ο τελεστής αυτός, $\mathcal{O} \rightarrow \lambda^\Delta \mathcal{O}$, υπό χωροχρονικούς μετασχηματισμούς $x \rightarrow \lambda x$. Αυτό υπονοεί ότι η συσχέτιση δυο σημείων για τον τελεστή αυτό θα είναι ο διαδότης

$$\langle \bar{\mathcal{O}}(x)\mathcal{O}(0) \rangle \sim \frac{1}{|x|^{2\Delta}} \quad (14.14)$$

Εάν ο τελεστής \mathcal{O} είναι κβαντικός, τότε μια αλληλεπιδρώσα κβαντική θεωρία πεδίου προβλέπει ότι η πραγματική συσχέτιση, στον Hamiltonian φορμαλισμό, είναι

$$\langle \Omega | T \{ \bar{\mathcal{O}}(x)\mathcal{O}(0) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \bar{\mathcal{O}}(x)\mathcal{O}(0) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}} \} | 0 \rangle} \quad (14.15)$$

όπου ο παρανομαστής εγγυάται ότι θα ακυρωθούν όλα τα μη-συνδεδεμένα διαγράμματα του αριθμητή. Αποτέλεσμα των κβαντικών αυτών διορθώσεων είναι ότι, αφού διορθώνεται το αριστερό μέλος της (14.14), το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τη διάσταση Δ του τελεστή στο δεξί μέλος. Λέμε, λοιπόν, ότι η κλασική συσχέτιση (14.14) αφορά την κλασική διάσταση Δ_0 του τελεστή, ενώ η κβαντική συσχέτιση αφορά τη διορθωμένη κβαντική διάσταση $\Delta = \Delta_0 + \gamma(g)$ ως

$$\langle \bar{\mathcal{O}}(x)\mathcal{O}(0) \rangle \sim \frac{1}{|x|^{2(\Delta_0 + \gamma(g))}} \quad (14.16)$$

όπου η διόρθωση $\gamma(g)$ είναι η ανώμαλη διάσταση που οφείλεται στα κβαντικά γεγονότα (των loops) και η οποία προφανώς θα εξαρτάται από τη σταθερά σύζευξης g της θεωρίας.

Το γεγονός ότι η διάσταση διορθώνεται λόγω κβαντικών φαινομένων μπορούμε να το κατανοήσουμε και μέσα από την ερμηνεία της διάστασης ως η «ενέργεια» των καταστάσεων μιας θεωρίας πεδίου¹. Τουτέστιν, εφ' όσον στην κλασική διάδοση ενός πεδίου προστίθενται ενδιάμεσες κβαντικές διεργασίες (loops), έτσι και στην κλασική ενέργεια/διάσταση του πεδίου προστίθενται οι ανάλογες ενεργειακές/διαστατικές συμβολές.

Επανερχόμαστε στον αρχικό μας σκοπό. Για να πάρουμε την διόρθωση σε 1-loop της διάστασης Δ ενός τελεστή BMN, επιλέγουμε τον απλούστερο τέτοιο τελεστή

$$\mathcal{O}_m^J = \sqrt{\mathcal{A}} \text{Tr}[\Phi^m Z^J] \quad (14.17)$$

ο οποίος εμπλέκει τα πεδία Z, Φ^m και, άρα, μπορεί να ανταποκριθεί στη μοναδική αλληλεπίδραση της $\mathcal{N} = 4$ SYM

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= 2g_{YM}^2 \text{Tr}[Z, \Phi^m][\bar{Z}, \Phi^m] \\ &= 2g_{YM}^2 (2 \text{Tr}[\Phi^m Z \Phi^m \bar{Z}] - \text{Tr}[(Z\bar{Z} + \bar{Z}Z)\Phi^m \Phi^m]) \end{aligned} \quad (14.18)$$

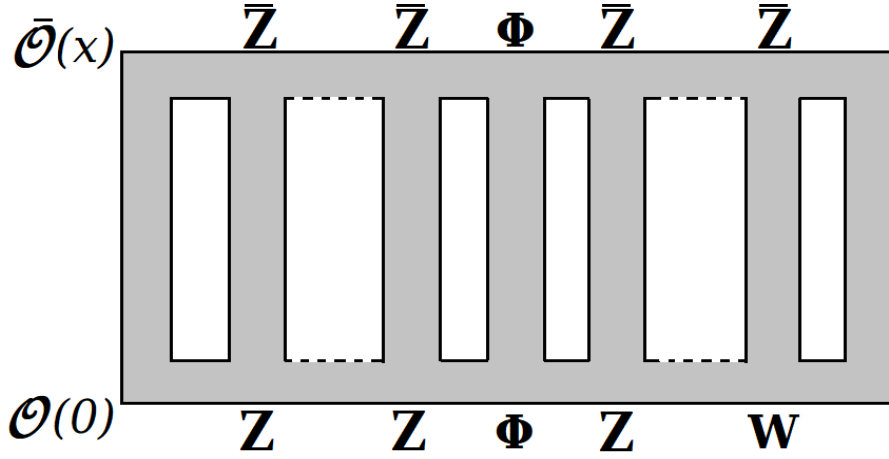
και να δώσει, από την (14.15) (εξαιρώντας τον παρανομαστή και τα μη-συνδεδεμένα διαγράμματα του αριθμητή) τη συσχέτιση δυο σημείων

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \rangle &= \langle 0 | \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) e^{i \int d^4y \mathcal{L}_{int}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \left(1 + i \int d^4y \mathcal{L}_{int} + \dots \right) | 0 \rangle \\ &= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2J+2}} + \langle 0 | \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \left(i \int d^4y \mathcal{L}_{int} \right) | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (14.19)$$

Εδώ \mathcal{A} είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης που επιλέχθηκε ώστε να μην κουβαλάμε στην πλάτη μας τους παράγοντες της προηγούμενης ενότητας. Προφανώς, αφού εξετάζουμε τη διόρθωση πρώτης τάξης, θα κρατήσουμε μέχρι και τον δεύτερο όρο μόνο στην παραπάνω εξίσωση.

¹Όπως είχαμε δείξει, οι διάφορες καταστάσεις μιας θεωρίας πεδίου είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή διαστολής D με ιδιοτιμή Δ .

Αρχικά, αναπαριστούμε τον πρώτο όρο της τελευταίας σειράς της εξίσωσης (14.19) που είναι η απλή, χωρίς αλληλεπιδράσεις, διάδοση του τελεστή \mathcal{O}_m^J από το 0 στο χωροχρονικό σημείο x , με ένα διάγραμμα στη σημειογραφία διπλής γραμμής του t' Hooft ως



Έπειτα, εξετάζουμε τον δεύτερο όρο της τελευταίας σειράς της εξίσωσης (14.19), με βάση τον πρώτο όρο αλληλεπίδρασης στην (14.18), και βρίσκουμε

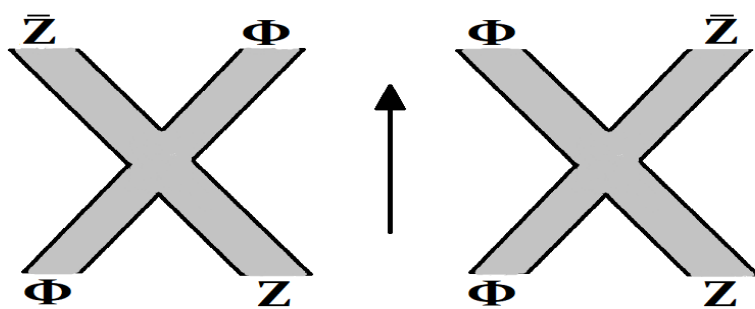
$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \left(i \int d^4y (4g_{YM}^2) \text{Tr}[\Phi_y^m Z_y \Phi_y^m \bar{Z}_y] \right) \rangle \\
 &= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2(J-1)}} (4ig_{YM}^2) \int d^4y \langle \text{Tr}[\Phi_0^m Z_0] \cdot \text{Tr}[\Phi_x^m \bar{Z}_x] \cdot \text{Tr}[\Phi_y^m Z_y \Phi_y^m \bar{Z}_y] \rangle \\
 &= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2J-2}} (4ig_{YM}^2) \int d^4y \langle \text{Tr}[Z_0 \Phi_0^m] \cdot \text{Tr}[\bar{Z}_x \overbrace{\Phi_x^m}^{\text{---}}] \cdot \text{Tr}[\underbrace{\Phi_y^m Z_y \Phi_y^m \bar{Z}_y}_{\text{---}}] \rangle \\
 &= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2J+2}} |x|^4 (4ig_{YM}^2) \int d^4y P_{xy}^\Phi \cdot P_{xy}^Z \cdot P_{0y}^\Phi \cdot P_{0y}^Z
 \end{aligned} \tag{14.20}$$

όπου y είναι ένα χωροχρονικό σημείο ενδιάμεσο των 0 και x .

Επίσης, ο διαδότης στον χώρο των θέσεων των πεδίων Z, Φ^m ορίζεται, ως συνήθως για μια $SU(N)$ θεωρία, ως

$$P_{(ij),(kl)}(x-y) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta_{(i}^{(k} \delta_{j)}^{l)})}{(x-y)^2} \quad (14.21)$$

Οι συστολές στην εξίσωση (14.20) είναι δυο ειδών, δηλαδή



οι οποίες χωρίζονται σε

- αλληλεπιδράσεις με ανταλλαγή θέσης
- αλληλεπιδράσεις χωρίς ανταλλαγή θέσης

Για την ακρίβεια, έχουμε τεσσέρις αλληλεπιδράσεις, μιας και κάθε είδος χωρίζεται σε δυο υπο-περιπτώσεις, μια για αλληλεπίδραση με τον δεξιί γείτονα Z και μια για τον αριστερό. Οπότε κάθε διάγραμμα που αναφέρεται στην παραπάνω αλληλεπίδραση θα συνοδεύεται και από έναν παράγοντα $1/4$.

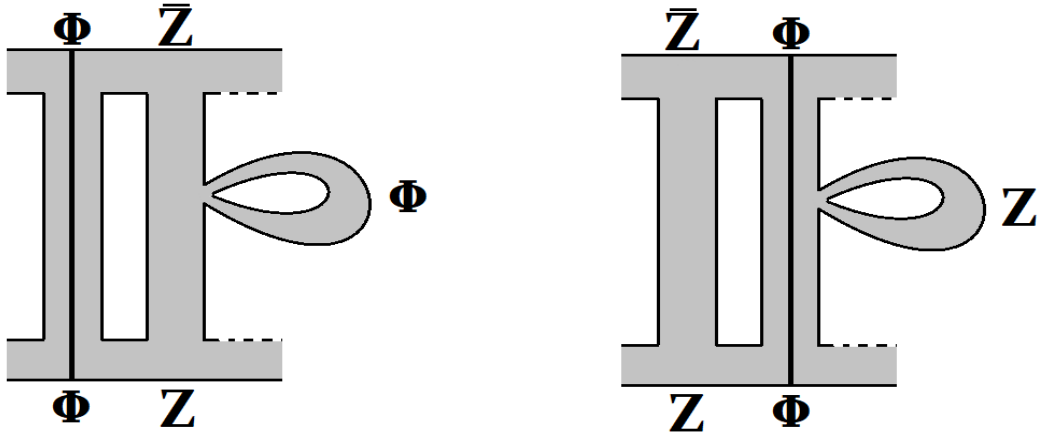
Οι αλληλεπιδράσεις που αλλάζουν τη θέση l του πεδίου Φ^m στην αλυσίδα των πεδίων Z δίνουν μια συνεισφορά που εξαρτάται από την ορμή, δηλαδή από το n . Έτσι, για μια τέτοια αλληλεπίδραση, εάν ο αρχικός τελεστής έχει κυματοσυνάρτηση $e^{\frac{2\pi i n l}{J}}$ και μετά τη διάδοση του $e^{\frac{2\pi i n (l \pm 1)}{J}}$, τότε η συσχέτιση αυτή θα συνοδεύεται από έναν παράγοντα $e^{\pm \frac{2\pi i n}{J}}$, + ή - ανάλογα με τον ποιό γείτονα

Z αλληλεπιδράσε το Φ^m . Προφανώς, για αλληλεπιδράσεις που δεν αλλάζουν τη θέση l , η συσχέτιση εξαλλοίφει την κυματοσυνάρτηση της ορμής, εζ' ού και το αρχικό μας επιχείρημα ότι η εξάρτηση από την ορμή έχει να κάνει με την αλλαγή θέσης του πεδίου Φ^m .

Προχωράμε στο τελευταίο βήμα της ανάλυσης της εξίσωσης (14.19), με βάση τον δεύτερο όρο αλληλεπίδρασης στην (14.18), όπου εκτελούμε τις συστολές

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \left(i \int d^4y (-2g_{YM}^2) \text{Tr}[(Z\bar{Z} + \bar{Z}Z)\Phi^m\Phi^m] \right) \rangle \\
&= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2(J-1)}} (-2ig_{YM}^2) \int d^4y \langle \text{Tr}[\Phi_0^m Z_0] \cdot \text{Tr}[\Phi_x^m \bar{Z}_x] \cdot \text{Tr}[\bar{Z}_y Z_y \Phi_y^m \Phi_y^m] \rangle \\
&= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2(J-1)}} (-2ig_{YM}^2) \int d^4y \langle \text{Tr}[Z_0 \Phi_0^m] \cdot \text{Tr}[\Phi_x^m \bar{Z}_x] \cdot \text{Tr}[Z_y \bar{Z}_y \Phi_y^m \Phi_y^m] \rangle \\
&\quad + \langle \text{Tr}[\Phi_0^m Z_0] \cdot \text{Tr}[\bar{Z}_x \Phi_x^m] \cdot \text{Tr}[\Phi_y^m \Phi_y^m Z_y \bar{Z}_y] \rangle \\
&= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2(J-1)}} (-2ig_{YM}^2) \int d^4y P_{0x}^\Phi \cdot P_{xy}^Z \cdot P_{yy}^\Phi \cdot P_{0y}^Z + P_{0x}^Z \cdot P_{xy}^\Phi \cdot P_{yy}^Z \cdot P_{0y}^\Phi
\end{aligned} \tag{14.22}$$

οι οποίες βλέπουμε ότι αντιστοιχούν στα δυο είδη διαγραμμάτων



Τα τελευταία διαγράμματα δεν αλλάζουν τη θέση l του πεδίου Φ^m και, άρα, είναι ανεξάρτητα της ορμής.

Μιας και έχουμε στα χέρια μας μια $SU(N)$ θεωρία βαθμίδας, θα μπορούσαμε επίσης να συμπεριλάβουμε και αλληλεπιδράσεις σε 1-loop με τα αντίστοιχα πεδία βαθμίδας. Τα αντίστοιχα διαγράμματα δεν αλλάζουν τη θέση του πεδίου Φ^m και ως εκ τούτου είναι κι αυτά ανεξάρτητα της ορμής.

Η σημασία που δώσαμε στην εξάρτηση από την ορμή δεν είναι κάποιο φετίχ. Οι τελεστές που δεν εξαρτώνται από την ορμή, n , μπορούν να υπολογιστούν για $n = 0$. Αλλά για $n = 0$, έχουμε προστατευόμενους τελεστές, τουτέστιν τελεστές των οποίων η διάσταση δεν επιδέχεται διορθώσεις ($\Delta = \Delta_0$, με $\gamma(g) = 0$). Αυτό φαίνεται καθαρά από την σχέση

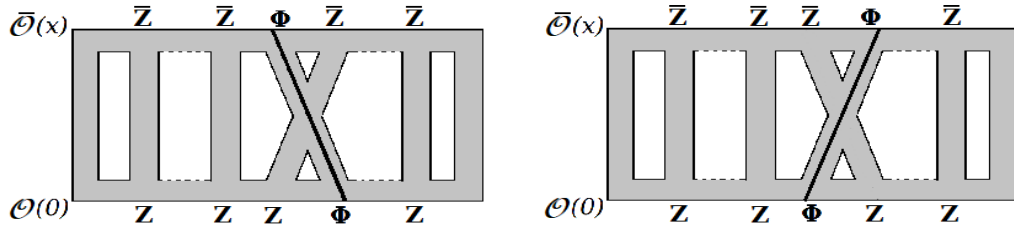
$$(\Delta - J)_n = \sqrt{1 + \frac{g_{YM}^2 N n^2}{J^2}} \xrightarrow{n=0} \Delta - J = 1 \quad (14.23)$$

η οποία λέει ότι η διάσταση του τελεστή είναι συγκεκριμένη και ίση με το R-φορτίο. Για $n \neq 0$ έχουμε ένα διαταρακτικό ανάπτυγμα, σε αντίθεση με την περίπτωση $n = 0$, το οποίο και δίνει την διόρθωση της διάστασης.

Τα παραπάνω μπορούμε να τα δούμε και ως εξής. Για $n = 0$ έχουμε $\Delta - J = 1$, δηλαδή $J = \Delta - 1$, που σημαίνει ότι εάν κάποιος ισχυριζόταν ότι η διάσταση Δ επιδέχεται διορθώσεις θα τον ανακηρύσσαμε τρελό, μιας και αυτό σημαίνει ότι και το φορτίο J θα επιδέχεται διορθώσεις, πράγμα αδύνατο. Εάν το φορτίο J διορθώνεται, τότε πρέπει να διορθώνεται και ο αριθμός των αναπαραστάσεων που αυτό ορίζει, πράγμα εξ' ίσου αδύνατο.

Στην πραγματικότητα, έχουμε ξανασυναντήσει την έννοια του προστατευόμενου τελεστή δίχως να το γνωρίζουμε. Είναι οι τελεστές που προκύπτουν από τη συνθήκη BPS, η οποία εξισώνει τη μάζα και το κεντρικό φορτίο της άλγεβρας, $M = Z$, μην αφήνοντας περιθώριο διόρθωσης στη διάσταση (μάζα) τους. Για την ακρίβεια, αντιλαμβανόμαστε ότι το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε συνθήκη ορίζει ως συγκεκριμένο το φορτίο της θεωρίας μας.

Επανερχόμαστε σοφότεροι για τον υπολογισμό της συσχέτισης $\langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \rangle$, έχοντας συμπαιράνει ότι μονάχα οι αλληλεπιδράσεις που εξαρτώνται από την ορμή θα συνεισφέρουν στη διόρθωση της διάστασης (και άρα της συνάρτησης συσχέτισης). Αυτά θα είναι τα δυο διαγράμματα που προέρχονται από την (14.20) και εκφράζουν την αλλαγή θέσης του πεδίου Φ^m στην αλυσίδα των πεδίων Z , δηλαδή



Συνεπώς, η συσχέτιση (14.19), μέσω της διόρθωσης (14.20) για τα δυο παραπάνω διαγράμματα (εξαιρώντας τις αλληλεπιδράσεις που δεν αλλάζουν θέση στο Φ^m), γίνεται σε 1-loop

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \rangle = \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2J+2}} \left[1 + ig_{YM}^2 N I(x) \left(e^{\frac{2\pi i n}{J}} + e^{-\frac{2\pi i n}{J}} \right) \right] \quad (14.24)$$

όπου ο παράγοντας N προκύπτει κάνοντας τις συστολές των $SU(N)$ δεικτών στους διαδότες της σημειογραφίας διπλής γραμμής του λατ τ Ηοοφτ (υπάρχει ένα επιπλέον index loop σε σχέση με την αδιατάρακτη διάδοση, λόγω της 1-loop διόρθωσης).

Το ολοκλήρωμα $I(x)$ είναι²

$$\begin{aligned}
 I(x) &= |x|^4 \int d^4y P_{xy}^\phi \cdot P_{xy}^Z \cdot P_{0y}^\phi \cdot P_{0y}^Z \\
 &= |x|^4 \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \frac{1}{(x-y)^2} \frac{1}{(x-y)^2} \frac{1}{y^2} \frac{1}{y^2} \\
 &= |x|^4 \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \frac{1}{y^4(x-y)^4}
 \end{aligned} \tag{14.25}$$

το οποίο αποκλίνει. Για να εφαρμόσουμε οποιοδήποτε σχήμα κανονικοποίησης πάνω στο ολοκλήρωμα αυτό, πρέπει πρώτα να φέρουμε τον παρανομαστή στην κατάλληλη μορφή, κάτι που επιτυγχάνουμε μέσω των παραμέτρων Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dz}{[A + (B-A)z]^2} \tag{14.26}$$

οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν εις διπλούν για τον παρανομαστή

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{y^2(x-y)^2} &= \int \frac{dz}{[y^2 + (y^2 - 2yx + x^2 - y^2)z]^2} \\
 &= \int \frac{dz}{[(y-zx)^2 - \Delta]^2} \\
 (\xrightarrow{y \rightarrow y+zx}) &= \int \frac{dz}{[y^2 - \Delta]^2}
 \end{aligned} \tag{14.27}$$

όπου $\Delta = z(z-1)x^2$, ώστε να αποκτήσουμε το γινόμενο

$$\frac{1}{y^4(x-y)^4} = \int_0^1 dz \int_0^1 d\omega \frac{1}{[y^2 - \Delta_1]^2} \frac{1}{[y^2 - \Delta_2]^2} \tag{14.28}$$

όπου $\Delta_1 = z(z-1)x^2$ και $\Delta_2 = \omega(\omega-1)x^2$.

²Εξαιρέσαμε τους όρους $\delta^{ij}\delta_{kl}$ από τους διαδότες, μιας και θα έπρεπε να κάνουμε τις συστολές ολής της αλυσίδας των Z .

Χρησιμοποιούμε τις παραμέτρους Feynman ακόμη μια φορά και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz \int_0^1 d\omega \frac{1}{[y^2 - \Delta_1]^2} \frac{1}{[y^2 - \Delta_2]^2} = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz d\omega d\psi}{\left[y^2 - 2y\Delta_1 + \Delta_1^2 + (y^2 - 2y\Delta_2 + \Delta_2^2 - y^2 + 2y\Delta_1 - \Delta_1^2 - \Delta_1^2)\psi \right]^2} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz d\omega d\psi}{\left[(y - \Delta_1 - \Delta_2\psi + \Delta_1\psi)^2 - \Delta \right]^2} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz d\omega d\psi}{[y^2 - \Delta]^2}
\end{aligned} \tag{14.29}$$

όπου στην τελευταία γραμμή μετασηματίσαμε ως $y \rightarrow y + \Delta_1 + \Delta_2\psi - \Delta_1\psi$, ενώ $\Delta = \psi(\psi - 1)(\Delta_1 - \Delta_2)^2$. Οπότε και φτάσαμε σε μια μορφή κατάλληλη για κανονικοποίηση.

Εάν επιλέξουμε το μονοπάτι της διαστατικής κανονικοποίησης, τότε θέτουμε το ολοκλήρωμα στις d διαστάσεις

$$\int \frac{d^d y}{(2\pi)^4} \frac{1}{(y^2 - \Delta + i\epsilon)^2} \longrightarrow \int \frac{d^d y}{(2\pi)^d} \frac{1}{(y^2 - \Delta + i\epsilon)^2} \tag{14.30}$$

όπου αμελήσαμε προς το παρόν τις ολοκληρώσεις για τα z, ω, ψ και προσθέσαμε έναν παράγοντα $i\epsilon$ (ο οποίος και θα εξαφανιστεί όταν πάρουμε το όριο $\epsilon \rightarrow 0$) ώστε να πραγματοποιήσουμε μια στροφή Wick ως

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d y}{(2\pi)^4} \frac{1}{(y^2 - \Delta + i\epsilon)^2} &= \int d\Omega_d \int dy \frac{y^{d-1}}{(y_E^2 - \Delta)^2} \\
&\xrightarrow{y_0 \rightarrow iy_0} \int d\Omega_d \int dy_E \frac{y_E^{d-1}}{(y_E^2 + \Delta)^2} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)
\end{aligned} \tag{14.31}$$

Έπειτα, αναπτύσσουμε γύρω από τις $d = 4 - \varepsilon$ διαστάσεις, για $\varepsilon \rightarrow 0$, ώστε να αποκτήσουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d y}{(2\pi)^4} \frac{1}{(y^2 - \Delta)^2} &= \frac{i(4\pi)^{\varepsilon/2}}{(4\pi)^2} \Delta^{-\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \frac{i e^{\frac{\varepsilon}{2} \ln(4\pi)}}{(4\pi)^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2} \ln \Delta} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \frac{i}{16\pi^2} e^{\frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{4\pi}{\Delta}} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \\
&= \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i}{16\pi^2} \ln \Delta + (\text{πεπερασμένοι όροι}) \\
&= \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i}{8\pi^2} \ln |x|^2 + (\text{πεπερασμένοι όροι})
\end{aligned} \tag{14.32}$$

όπου επιθυμούμε το αποκλίνον κομμάτι σε λογαριθμική μορφή, για λόγους που θα γίνουν αμέσως εμφανείς, οπότε και αντικαθιστούμε την παράμετρο απόκλισης ε με μια άλλη, ρ , η οποία θα πηγαίνει στο άπειρο με τον ίδιο τρόπο, ως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \longleftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} (-\ln \rho^2) \tag{14.33}$$

Οπότε, το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{d^d y}{(2\pi)^4} \frac{1}{(y^2 - \Delta)^2} = -\frac{i}{4\pi^2} \ln(|x|\rho) + (\text{πεπερασμένοι όροι}) \tag{14.34}$$

και, άρα, εξάγουμε το αποκλίνον κομμάτι του ολοκληρώματος $I(x)$ ως

$$\begin{aligned}
I(x) &= |x|^4 \left(-\frac{i}{4\pi^2} \ln(|x|\rho) + (\text{πεπερασμένοι όροι}) \right) \\
&\simeq (1 + 4 \ln |x| + \dots) \left(-\frac{i}{4\pi^2} \ln(|x|\rho) + (\text{πεπερασμένοι όροι}) \right) \\
&= -\frac{i}{4\pi^2} \ln(|x|\rho) + (\text{πεπερασμένοι όροι})
\end{aligned} \tag{14.35}$$

Στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα φτάναμε με οποιοδήποτε σχήμα κανονικοποίησης.

Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα μας στην πολυσυζητημένη συσχέτιση (14.24) και παίρνουμε ότι

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \rangle = \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2J+2}} \left[1 + 2g_{YM}^2 N \cos\left(\frac{2\pi n}{J}\right) \frac{1}{4\pi^2} \ln(|x|\varrho) + \dots \right] \quad (14.36)$$

όπου συνειδητοποιούμε ότι το συνημίτονο περιέχει μια συνεισφορά για $n = 0$, η οποία, όπως εξηγήσαμε, δεν συνεισφέρει στη διόρθωση της διάστασης και άρα δεν πρέπει να συμπεριληφθεί. Συνεπώς, η συσχέτιση γίνεται

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \rangle &= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2J+2}} \left[1 + 2g_{YM}^2 N \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{J}\right) - 1 \right) \frac{1}{4\pi^2} \ln(|x|\varrho) + \dots \right] \\ &= \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2J+2}} \left[1 - 2g_{YM}^2 N \sin^2\left(\frac{\pi n}{J}\right) \frac{1}{2\pi^2} \ln(|x|\varrho) + \dots \right] \end{aligned} \quad (14.37)$$

και είναι πλέον έτοιμη να συγκριθεί με το γενικό ανάπτυγμα της συσχέτισης δυο σημείων

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \rangle = \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2\Delta}} = \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2(\Delta_0 + \gamma[\lambda])}} \quad (14.38)$$

ως προς την παράμετρο $\lambda = g_{YM}^2 N$, δηλαδή την ενεργό παράμετρο t' Hooft των διαγραμμάτων, για μια $SU(N)$ θεωρία με μεγάλο N , δηλαδή το ανάπτυγμα

$$\langle \bar{\mathcal{O}}_m^J(x) \mathcal{O}_m^J(0) \rangle = \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2(J+1+\gamma[g_{YM}^2 N]+\dots)}} \simeq \frac{\mathcal{A}}{|x|^{2(J+1)}} \left[1 - 2\gamma[g_{YM}^2 N] \ln(|x|) + \dots \right] \quad (14.39)$$

όπου μόλις έγινε εμφανής ο λόγος που επιδιώξαμε να αποκτήσουμε τη λογαριθμική μορφή της απόκλισης του ολοκληρώματος $I(x)$.

Συνεπώς, η σύγκριση μεταξύ των (14.37) και (14.39) είναι πασιφανής και δίνει

$$\Delta = \Delta_0 + \gamma[g_{YM}^2 N] = J + 1 + \frac{g_{YM}^2 N}{2\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi n}{J}\right) \quad (14.40)$$

η οποία, στο όριο $n \ll J$ στο οποίο θεωρούμε ότι βρισκόμαστε, συνεπάγεται ότι

$$(\Delta - J)_n = \sqrt{1 + \frac{g_{YM}^2 N n^2}{J^2}} \quad (14.41)$$

που είναι το ακριβές αποτέλεσμα για το φάσμα (13.80) της κλειστής χορδής στη γεωμετρία του pp-wave, όπως ακριβώς επιθυμούσαμε.

Με τον υπολογισμό αυτό επιβεβαιώνουμε βαθύτερα την αντιστοιχία ανάμεσα στη θεωρία χορδών στη γεωμετρία του pp-wave και τον τομέα BMN της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας.

Καθώς, επίσης, τοποθετήσαμε και το τελευταίο ληθάρι στη θεμελίωση της αντιστοιχίας AdS/CFT, για την εργασία αυτή. Μια αντιστοιχία ανάμεσα στη θεωρία χορδών που ζεί στον χώρο $\text{AdS}_5 \times S^5$ και στην $\mathcal{N} = 4$ SYM σύμμορφη θεωρία πεδίου. Τουτέστιν, είδαμε ότι η κβαντική χρωμοδυναμική, που ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται ως πραγματική, παραπέμπει σε φωτοειδείς γεωδαισιακές στη θεωρία βαρύτητας, οι οποίες περιγράφονται από μια γεωμετρία επίπεδου κύματος. Η γεωμετρία αυτή του pp-wave, η οποία είναι ένα μέγιστα συμμετρικό υπόβαθρο για την type-IIIB υπερβαρύτητα, προκύπτει ως το όριο Penrose του χώρου $\text{AdS}_5 \times S^5$, ενώ το ίδιο όριο κατασκευάζει, από την πλευρά της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας, τον τομέα BMN. Έτσι, κατανοούμε την πραγματολογική σημασία του τομέα αυτού και συγκινούμαστε με τους επιτυχείς υπολογισμούς μας.

Βιβλιογραφία

- [1] H. Nastase, *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*, Cambridge University Press, 2015.
- [2] M.D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, 2014.
- [3] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1976.
- [4] B. Zwiebach, *A first course in String Theory*, Cambridge University Press, 2009.
- [5] D.H. Sattinger, O.L. Weaver, *Lie groups and algebras*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 1991.
- [6] Σ. Τραχανάς, *Κβαντομηχανική II*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009.
- [7] Μ. Τσαμπαρλής, *Θεωρία της Γενικής Σχετικότητας*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής, 2012.
- [8] Μ. Τσαμπαρλής, *Θεωρία της Γενικής Σχετικότητας*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής, 2006.
- [9] J. Krishnamurti, A. Huxley, *The first and last freedom*, HarperOne, 1975.
- [10] A.V. Ramallo, *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*, (2013) [arXiv: 13104319v3 [hep-th]].
- [11] J. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, [hep-th/971120].

- [12] J. Maldacena, *TWilson loops in large N field theories*, [hep-th/9803002].
- [13] M. Blau, J. Figueroa-O’Farrill, C. Hull, G. Papadopoulos, *Penrose limits and maximal supersymmetry*, [arXiv:hep-th/0201081].
- [14] M. Blau, J. Figueroa-O’Farrill, C. Hull, G. Papadopoulos, *A new maximally supersymmetric background of IIB superstring theory*, JHEP 0201, 047 (2001), [arXiv: hep-th/0110242].
- [15] R. Penrose, *Any spacetime has a plane wave as a limit*, Differential geometry and relativity, Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 271-275.
- [16] D. Berenstein, J. Maldacena, H. Nastase, *Strings in flat space and pp waves from N=4 Super Yang Mills*, (2002), [arXiv: hep-th/0202021v3].
- [17] G. Itsios, Y. Lozano, E. O. Calgajn, K. Sfetsos, *Non-Abelian T-duality and consistent truncations in type-II supergravity*, (2012), [arXiv: 1205.2274v2 [hep-th]].
- [18] M. Blau, J. Figueroa-O’Farrill, G. Papadopoulos, *Penrose limits, supergravity and brane dynamics*, (2002), [arXiv: hep-th/0202111v2].
- [19] G. Itsios, H. Nastase, C. Nunez, K. Sfetsos, S. Zacarias, *Penrose limits of Abelian and non-Abelian T-duals of AdS5xS5 and their field theory duals*, (2017), [arXiv: 1711.09911v1 [hep-th]].
- [20] M. Blau, *Plane waves and Penrose limits*, (2011), <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>.
- [21] A. Kehagias, E. Floratos, *Penrose limits of orbifolds and orientifolds*, (2002), [hep-th/0203134].

