ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Γεωμετρία της Εφαπτόμενης Δέσμης και Εφαρμογές στη Βαρύτητα

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του Βίκτωρα-Γ. Γάκη

Ερευνητικός Επιβλέπων:	Ακαδημαϊκός Επιβλέπων:
Παναγιώτης Σταυρινός Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.	Κώστας Αναγνωστόπουλος Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος, 2017

Γεωμετρία της Εφαπτόμενης Δέσμης και εφαρμογές στη Βαρύτητα

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών,

Τμήμα Φυσικής

Βίκτωρας-Γ.Γάκης[1]
AM:09215004

[1]victor.g.gakis@gmail.com

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να απευθύνω θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Παναγιώτη Σταυρινό, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α για την καθοδήγηση και βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετηθούν θέματα της Γεωμετρίας της Εφαπτόμενης Δέσμης και ιδιαιτέρως τη γεωμετρία της $Finsler$ βαρύτητας. Αρχικά θα δοθούν θεμελιώδεις έννοιες από τη θεωρία των πολλαπλοτήτων και τη μοντέρνα διαφορική γεωμετρία. Θα εξεταστούν αναλυτικά οι συνοχές, οι μη γραμμικές συνοχές, η έννοια της παράλληλης μετατόπισης και οι εξισώσεις των γεωδαισιακών. Τέλος θα γίνει εφαρμογή των παραπάνω στη θεμελίωση ενός μοντέλου Βαρύτητας σε χωροχρόνο$Finsler$.

Abstract

In this dissertation we will study and apply the Geometry of the Tangent Bundle and especially the Finsler Geometry in Gravity. Fist we will present some basic elements of manifold theory and modern differential geometry. In the second part we will deal with the concept of nonlinear connections, N-linear connections, the notion of parallel transportation the autoparallel and geodecics of the preceding connections. In the last part we will apply the previous theory in Gravity and specifically we will construct a Finsler spacetime. Our approach will be from the ground up, generalizing basics concepts from General Relativity(GR).

Μέρος I

Εισαγωγή

Συμβολίζουμε με M, N τις πολλαπλότητες διάστασης $dimM = m$, $dimN = n$ και με $(U, \varphi = (x^i))$, $(V, \psi = (y^i))$ χάρτες των αντίστοιχα.

1 Πολλαπλότητες

Γενικά

Μια πολλαπλότητα είναι διαισθητικά η γενίκευση των καμπυλών και επιφανειών. Είναι τοπικά ομοιομορφική με τον ευκλείδειο χώρο και οι απεικονίσεις που παρέχουν αυτόν τον ομοιομορφισμό λέγονται χάρτες. Τους χάρτες στην ουσία μπορούμε να τους δούμε ως μια γέφυρα που μας επιτρέπει να μεταφέρουμε τα προβλήματα λογισμού από τις πολλαπλότητες στον ευκλείδειο χώρο. Στο μέρος αυτό θα ακολουθήσουμε κατά κύριο λόγο το [9, 6], .

1.1 Τοπολογικές Πολλαπλότητες

Ορισμός 1.1. Ένας τοπολογικός χώρος M είναι τοπικά ευκλείδειος διάστασης n εάν $\forall$ $p \in$M $\exists$ μια γειτονιά U του $p \ni$ η απεικόνιση $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι ομοιομορφισμός. Η δυάδα (U, φ) ονομάζεται χάρτης.

Μια τοπολογική πολλαπλότητα M είναι ένας Hausdorff, second countable και τοπικά ευκλείδειος χώρος, ο οποίος έχει διάσταση n αν είναι τοπικά $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1.1. Το γεγονός ότι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικό με ένα άλλο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ οφείλεται στην Τοπολογική Αναλλοιώτητα της Διάστασης που λέει ότι: Μια μη κενή n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα δεν μπορεί να είναι ομοιομορφική με μια m-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα. Υπάρχει ένα ανάλογο αποτέλεσμα για Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες όπως θα δούμε παρακάτω.

Ορισμός 1.2. Έστω οι χάρτες (U, φ), (V, ψ) μιας τοπολογικής πολλαπλότητας M. Λέμε ότι οι δύο αυτοί χάρτες είναι C$^\infty$ συμβατοί αν οι απεικονίσεις $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$

και $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ είναι C^∞. Οι παραπάνω απεικονίσεις ονομάζονται συναρτήσεις μετάβασης.

Παρατήρηση 1.2. Προφανώς ως C^∞ εννοούμε με την έννοια της διαφορισιμότητας στον $\mathbb{R}^m$ καθώς ακόμα δεν έχουμε ορίσει την έννοια της διαφορισιμότητας σε τοπολογικές πολλαπλότητες.

Ορισμός 1.3. Ένας C^∞-άτλας A σε ένα τοπικά ευκλείδειο χώρο M είναι μια συλλογή από χάρτες $\{(U_a, \varphi_\alpha)\}$ οι οποίοι είναι ανά ζευγάρι C^∞-συμβατοί και ισχύει ότι $M = \bigcup_a U_a$.

Παρατήρηση 1.3. Στον ορισμό αυτόν λέμε ότι οι χάρτες είναι συμβατοί ανά ζευγάρι διότι αν έχουμε τρεις χάρτες (U_1, φ_1),(U_2, φ_2), (U_3, φ_3) με συμβατότητα χαρτών ως 1 με 2 και 2 με 3 τότε για τη συνάρτηση μετάβασης μεταξύ 1 και 3 έχουμε $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} = \left(\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}\right) \circ \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\right)$. Προφανώς ως σύνθεση λείων συναρτήσεων μετάβασης η συνάρτηση μετάβασης $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ είναι λεία αλλά μόνο στην περιοχή $\varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$. Ωστόσο στις περιοχές $\varphi_1(U_1 \cap U_3)$, $\varphi_1(U_1 \cap U_3 - U_1 \cap U_2 \cap U_3)$ δεν έχουμε κάποια παραπάνω πληροφορία για το τι συμβαίνει. Επομένως δεν μπορούμε να πούμε ότι οι χάρτες $(U_1, \varphi_1), (U_3, \varphi_3)$ είναι C^∞-συμβατοί.

Λέμε ότι ένας χάρτης (U, φ) είναι συμβατός με ένα άτλαντα A=$\{(U_a, \varphi_\alpha)\}$ αν είναι συμβατός με κάθε χάρτη (U_a, φ_α) του άτλαντα.

Λήμμα 1.1. *Έστω άτλας A=$\{(U_a, \varphi_a)\}$ σε ένα τοπικά ευκλείδειο χώρο M. Αν δύο χάρτες (U, φ), (V, ψ) είναι συμβατοί με τον άτλα A τότε είναι και συμβατοί μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση μετάβασης $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ είναι C^∞ σε κάθε σημείο $\psi(p)$ όπου $p \in U \cap V$. Έστω λοιπόν (U_a, φ_α) τυχαίος χάρτης του A, έχουμε ότι $\varphi \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1})$ δηλαδή ότι η συνάρτηση μετάβασης είναι C^∞σε κάθε σημείο της περιοχής $\psi(U \cap U_\alpha \cap V)$. Εφόσον το αποτέλεσμα ισχύει για τυχαίο χάρτη (U_a, φ_α), ισχύει για κάθε χάρτη και επειδή αυτή η οικογένεια χαρτών ανήκει στο A βλέπουμε ότι η περιοχή που είναι C^∞ η συνάρτηση μετάβασης $\varphi \circ \psi^{-1}$ μπορεί κάλλιστα να είναι όλο το $\psi(U \cap V)$. Επομένως οι χάρτες (U, φ), (V, ψ) είναι συμβατοί μεταξύ τους. Αντίστοιχα ακριβώς αποδεικνύεται και για την αντίστροφη συνάρτηση $\psi \circ \varphi^{-1}$. $\square$

1.2 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Ένας άτλας A σε μια τοπολογική πολλαπλότητα M λέγεται μέγιστος αν δεν μπορεί να εμπεριέχεται σε κάποιο μεγαλύτερο άτλα. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει άτλας A′ ο οποίος εμπεριέχει τον A τότε αναγκαστικά έχουμε ότι A′=A.

Ορισμός 1.4. Μια λεία/διαφορίσιμη/C^∞ πολλαπλότητα ονομάζεται μια τοπολογική πολλαπλότητα στην οποία υπάρχει ένας μέγιστος C^∞-άτλας. Η δομή του C^∞-άτλα λέγεται αλλιώς και διαφορική δομή.

Λήμμα 1.2. *Κάθε πιθανός άτλας* $A=\{(U_a, \varphi_\alpha)\}$ *σε έναν τοπικά ευκλείδειο χώρο εμπεριέχεται σε ένα μέγιστο άτλα.*

Απόδειξη. Εφόσον έχουμε δομή μέγιστου άτλα τότε σε αυτόν εμπεριέχονται χάρτες που είναι συμβατοί με κάθε πιθανή επιλογή άτλα. Έστω λοιπόν ότι για τον άτλα A=$\{(U_a, \varphi_\alpha)\}$ αυτοί οι συμβατοί χάρτες είναι η οικογένεια $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$. Η συλλογή A′=$\{(U_a, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)\}$ είναι πάλι ένας άτλας, οπότε οποιοσδήποτε χάρτης είναι συμβατός με τον άτλα A′ είναι συμβατός και με τον άτλα A αλλά και ανήκει στον A′. Επομένως ο A′ είναι μέγιστος άτλας κατασκευασμένος από τον A. Έστω τώρα ότι A* είναι μέγιστος άτλας που εμπεριέχει τον A. Τότε όλοι οι χάρτες του A*είναι συμβατοί με αυτούς του A και εκ κατασκευής πρέπει να ανήκουν στον A′. Τελικά A*⊆A′ και επειδή είναι και οι δύο μέγιστοι έχουμε ότι A*=A′. □

Παρατήρηση 1.4. Γενικά για να δείξουμε ότι έχουμε δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος είναι $Hausdorff$ και ότι ο χώρος δέχεται δομή C^∞-άτλαντα ο οποίος δεν είναι απαραίτητα μέγιστος.

Με $r^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θα συμβολίζουμε τις συνήθεις καρτεσιανές συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n$ και τις επαγόμενες συντεταγμένες από τον εκάστοτε χάρτη ως $x^i = r^i \circ \varphi$.

Πρόταση 1.1. *Αν* $A=\{(U_a, \varphi_\alpha)\}$ *και* $B=\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ *είναι άτλαντες των λείων πολ/των M, N αντίστοιχα τότε η συλλογή* $AB=\{(U_\alpha \times V_\beta,\ \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ *με* $\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *αποτελεί άτλα του καρτεσιανού γινομένου* $M \times N$.

Απόδειξη. Αρχικά το γινόμενο $M \times N$ είναι $Hausdorff$ και *second countable* με την τοπολογία γινομένου ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^{m\times n}$. Για να δείξουμε ότι η συλλογή

AB=$\{(U_\alpha \times V_\beta,\, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ είναι άτλας πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι οι δυάδες της μορφής $(U_\alpha \times V_\beta,\, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ είναι χάρτες. Έστω ένα σημείο $p = (p_M, p_N) \in M \times N$, ένας χάρτης σε μια γειτονιά του p με έχει τη μορφή $(U \times V,\, \varphi \times \psi)$. Παρατηρούμε ότι $\varphi \times \psi : U \times V \to \varphi(U) \times \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμός στην εικόνα του και ως την τοπολογία γινομένου. Μέχρι στιγμής αποδείξαμε ότι ο χώρος $M \times N$ είναι τοπολογική πολλαπλότητα ως προς την τοπολογία γινομένου με άτλα της μορφής AB=$\{(U_\alpha \times V_\beta,\, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$. Μας μένει να δείξουμε ότι ο άτλας AB έχει C$^\infty$-δομή, έστω λοιπόν δύο χάρτες $(U_\alpha \times V_\beta,\, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ και $\left(U'_\alpha \times V'_\beta,\, \varphi'_\alpha \times \psi'_\beta\right)$ τότε $\varphi_\alpha \times \psi_\beta \circ \left(\varphi'_\alpha \times \psi'_\beta\right)^{-1} = \varphi_\alpha \times \psi_\beta \circ (\varphi'_\alpha)^{-1} \times \left(\psi'_\beta\right)^{-1} = \varphi_\alpha \circ (\varphi'_\alpha)^{-1} \times \psi_\beta \circ \left(\psi'_\beta\right)^{-1}$ όπου βλέπουμε ότι είναι όντως C$^\infty$η συνάρτηση μετάβασης. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι είναι C$^\infty$ και η αντίστροφη συνάρτηση μετάβασης. □

Πόρισμα 1.1. *Έστω A=$\{(U_a, \varphi_\alpha)\}$ μεγιστικός άτλας στην πολλαπλότητα M. Τότε για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq M$ και ένα σημείο $p \in U$ υπάρχει συντεταγμένη γειτονιά U_a τέτοια ώστε $p \in U_a \subseteq U$.*

Απόδειξη. Εφόσον ο A είναι μέγιστος άτλας ισχύει ότι $\mathrm{M} = \bigcup\limits_a U_a$ και εφόσον $p \in M \iff \exists a : p \in U_a$. Το σύνολο $U'_a = U_a \cap U$ είναι ανοικτό και $U'_a \subseteq U_a$, άρα η δυάδα $\left(U'_a,\, \varphi_a|_{U'_a}\right) \in A$. Επομένως ο χάρτης $\left(U'_a = U_a \cap U,\, \varphi_a|_{U'_a}\right)$ είναι μια συντεταγμένη γειτονιά γύρω από το p. □

Παρατήρηση 1.5. Το σημείο p ήταν αυθαίρετο στην παραπάνω απόδειξη οπότε πάντα όταν έχουμε ένα μέγιστο άτλα έχουμε και μια συντεταγμένη γειτονιά $\forall p \in M$.

1.3 Λείες Απεικονίσεις σε Πολλαπλότητες

Μια βασική χρήση των χαρτών είναι η μεταφορά εννοιών όπως της συνέχειας και της διαφόρισης των απεικονίσεων από τον ευκλείδειο χώρο σε πολλαπλότητα. Θα δούμε τώρα πώς να κάνουμε τη μεταφορά της έννοιας της διαφόρισης και έπειτα την έννοια της μερικής παραγώγου. Η έννοια της διαφόρισης όπως θα αποδείξουμε είναι μια καλώς ορισμένη έννοια διότι δεν εξαρτάται από την επιλογή χάρτη.

Ορισμός 1.5. Έστω $f : M \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση και M πολλαπλότητα. Η f είναι λεία απεικόνιση σε κάποιο σημείο $p \in M$ αν υπάρχει συντεταγμένη γειτονιά (U, φ) έτσι ώστε $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ να είναι λεία στο σημείο $\varphi(p)$ με την έννοια του ευκλείδειου χώρου. Η απεικόνιση f λέμε ότι είναι λεία στο M αν είναι λεία $\forall p \in M$.

Παρατήρηση 1.6. Η έννοια της διαφορισιμότητας είναι ανεξάρτητη χάρτη διότι για δύο διαφορετικούς χάρτες (U, φ), (V, ψ) και f λεία έχουμε ότι $f \circ \psi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ η οποία είναι πάλι λεία στο σύνολο $U \cap V$ όμως.

Στον ορισμό δεν αναφέρθηκε τίποτα για την συνέχεια της απεικόνισης f διότι είναι πλεονασμός, δηλαδή αν f λεία τότε $f = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ που είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Ορισμός 1.6. Έστω οι απεικονίσεις $F : N \to M$ και $h : M \to \mathbb{R}$. Η ανάκληση($pull-back$) της απεικόνισης h από την F συμβολίζεται ως $F^*h := h \circ F$.

Παρατήρηση 1.7. Μπορούμε να πούμε ότι μια απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}$ είναι λεία αν και μόνο αν η ανάκλησή της $(\varphi^{-1})^* f$ από ένα χάρτη (U, φ) είναι λεία.

Ορισμός 1.7. Έστω η συνεχής απεικόνιση $F : N \to M$. Λέμε ότι η F είναι λεία στο $p \in N$ αν $\exists$ χάρτες (V_p, ψ) , $(U_{F(p)}, \varphi) \ni \varphi \circ F \circ \psi^{-1} : \psi\left(F^{-1}(U) \cap V\right) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι λεία στο $\psi(p)$. Η F λέμε ότι είναι λεία σε όλο το N αν είναι λεία $\forall p \in N$.

Παρατήρηση 1.8. Βάλαμε τον περιορισμό της συνέχειας στην απεικόνιση F έτσι ώστε να διασφαλίσουμε ότι $F^{-1}(U)$ είναι ανοικτό, κάτι το οποίο δε χρειάστηκε να γίνει στον ορισμό 1.5

Πρόταση 1.2. *Έστω $F : N \to M$, $G : M \to K$ λείες απεικονίσεις και N, M, K λείες πολλαπλότητες, τότε η σύνθεση $G \circ F : N \to K$ είναι λεία απεικόνιση.*

Απόδειξη. Έστω χάρτες (V_p, ψ), $(U_{F(p)}, \varphi)$ και $(W_{G(F(P))}, \zeta)$ τότε η σύνθεση $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ είναι λεία στο $\psi(p)$ και η σύνθεση $\zeta \circ G \circ \varphi^{-1}$ είναι λεία στο $\varphi(\psi(p))$. Επομένως η σύνθεση $\zeta \circ G \circ F \circ \psi^{-1} = \zeta \circ G \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ είναι λεία ως σύνθεση λείων στο $\psi(p)$. $\square$

Πρόταση 1.3. *Έστω (U, φ) χάρτης της πολλαπλότητας M, τότε η απεικόνιση φ είναι αμφιδιαφόριση.*

Για την απεικόνιση φ ξέρουμε ότι είναι ομοιομορφισμός στην εικόνα της επομένως μας μένει μόνο ο έλεγχος του αν είναι λεία μαζί με την αντίστροφή της. Έστω χάρτες (U, φ), $\left(\varphi(U), id_{\varphi(U)}\right)$ τότε σύμφωνα με τον ορισμό 1.4 για να είναι η φ λεία θα πρέπει η σύνθεση $id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ να είναι λεία, που είναι διότι $id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)}$. Αντίστοιχα για την φ^{-1}θα πρέπει $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ id_{\varphi(U)} = id_{\varphi(U)}$ οπότε η φ είναι αμφιδιαφόριση.

Πρόταση 1.4. *Έστω $F : M \supseteq U \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ όπου U ανοικτό και F αμφιδιαφόριση. Η δυάδα (U, F) ϵίναι χάρτης.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η δυάδα (U, F) είναι συμβατή με κάποιο τυχαίο χάρτη που ανήκει σε μια μεγιστική διαφορική δομή A του M. Έστω $(U_a, \varphi_\alpha) \in A$ πρέπει να δούμε εάν οι συναρτήσεις μετάβασης $F \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ F^{-1}$ μεταξύ των χαρτών (U, F) και (U_a, φ_α) είναι λείες. Από την πρόταση 1.3 και από υπόθεση έχουμε ότι φ_α, F είναι αμφιδιαφορίσεις επομένως οι συναρτήσεις μετάβασης $F \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ F^{-1}$ είναι λείες και άρα η δυάδα (U, F) είναι συμβατή με τη μεγιστική διαφορική δομή A. Λόγω όμως του ότι ο A είναι μεγιστική διαφορική δομή, η δυάδα (U, F) αναγκαστικά εμπεριέχεται εντός του A. Επομένως η δυάδα (U, F) είναι χάρτης. $\square$

Παράδειγμα 1.1. Η απεικόνιση προβολής $\pi : M \times N \to M$ είναι λεία.

Έστω $(U \times V, \varphi \times \psi)$ χάρτης της πολλαπλότητας $M \times N$ γύρω από κάποιο σημείο $(p, q) \in M \times N$. Για να είναι λεία πρέπει $\varphi \circ \pi \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$να είναι λεία στο σημείο $(\varphi(p), \psi(p))$. Έχουμε λοιπόν $\varphi \circ \pi \circ (\varphi \times \psi)^{-1} (\varphi(p), \psi(p)) = \varphi(\pi(p, q)) = \varphi(p)$ που είναι λεία και επειδή το σημείο p ήταν τυχαίο είναι λεία σε όλο το $U \times V$.

Παράδειγμα 1.2. Η απεικόνιση εγκλεισμού $i_{q_0} : M \to M \times N$ με $q_0 \in N$ είναι λεία.

Έστω οι χάρτες $(V_{q_0}, \psi = (y^i))$, $(U_p, \varphi = (x^i))$ γύρω από τα $p \in M$ και $q_0 \in N$ αντίστοιχα. Πρέπει η απεικόνιση $\varphi \times \psi \circ i_{q_0} \circ \varphi^{-1}$ να είναι λεία στο $\varphi(p)$. Έχουμε λοιπόν $\varphi \times \psi \circ i_{q_0} \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = (\varphi(p), \psi(q_0))$ που είναι λεία στο $p \in M$.

1.4 Μερικές Παράγωγοι

Ορισμός 1.8. Ορίζουμε τη μερική παράγωγο μιας λείας απεικόνισης $f : M \to \mathbb{R}$ στο χάρτη $(U, \varphi = (x^i))$ γύρω από το σημείο $p \in M$ ως:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial r^i}(\varphi(p)) := \left.\frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial r^i}\right|_{\varphi(p)} \tag{1.1}$$

Παρατήρηση 1.9. Από τον παραπάνω ορισμό παίρνουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(\varphi(p)) = \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial r^i}(\varphi(p))$ και χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα έχουμε ότι η απεικόνιση $\frac{\partial f}{\partial x^i} : M \to \mathbb{R}$ είναι λεία διότι $(\varphi^{-1})^* \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial \left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial r^i}$ είναι λεία.

Ορισμός 1.9. Έστω $F : N \to M$ λεία απεικόνιση και οι χάρτες $(V_p, \psi = (y^i))$, $\left(U_{F(p)}, \varphi = (x^i)\right)$. Οι απεικονίσεις $F^i = y^i \circ F : N \supseteq V \to \mathbb{R}$ καλούνται συνιστώσες της F ως προς το χάρτη $(V_p, \psi = (y^i))$ και ο πίνακας $\left[\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right]$ ονομάζεται Ιακωμβιανός πίνακας της F ως προς τους χάρτες $(V_p, \psi = (y^i))$, $\left(U_{F(p)}, \varphi = (x^i)\right)$. Αν $dimN = dimM$ τότε ορίζεται η Ιακωμβιανή ορίζουσα $\det\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \left(F^1, .., F^m\right)}{\partial \left(x^1, ..x^n\right)}$.

Πρόταση 1.5. *Ο Ιακωμβιανός πίνακας της συνάρτησης μετάβασης μεταξύ δύο χαρτών $(V, \psi = (y^i))$, $(U, \varphi = (x^i))$ γύρω από ένα σημείο $p \in M$ δίνεται από τον τύπο $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)$.*

Θεώρημα 1.1. *(Αντίστροφης Συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$) Έστω $F : W \to \mathbb{R}^n$ λεία απεικόνιση και $W \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό. Για κάθε $p \in W$ η απεικόνιση F είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο p αν και μόνο αν* $\det\left(\left.\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right|_p\right) \neq 0$.

(Αντίστροφης Συνάρτησης σε Πολλαπλότητα)Έστω $F : N \to M$ λεία απεικόνιση, $dimM = dimN$ και $p \in N$. Υποθέτουμε πως για τους χάρτες $(V, \psi = (y^i))$, $(U, \varphi = (x^i))$ γύρω από το p και το $F(p)$ ισχύει ότι $F(V) \subseteq U$. Τότε η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από το σημείο p αν και μόνο αν η Ιακωμβιανή ορίζουσα $\det\left(\left.\frac{\partial F^j}{\partial y^i}\right|_p\right) \neq 0$.

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1.1. Έχουμε ότι

$\left.\frac{\partial F^j}{\partial y^i}\right|_p = \left.\frac{\partial\left(x^j \circ F\right)}{\partial y^i}\right|_p = \left.\frac{\partial\left(x^j \circ F \circ \psi^{-1}\right)}{\partial r^i}\right|_{\psi(p)}$ που είναι ο Ιακωμβιανός πίνακας της απεικόνισης $x^j \circ F \circ \psi^{-1}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 1.1 στην παραπάνω απεικόνιση και έχουμε ότι $\det\left(\left.\frac{\partial\left(x^j \circ F \circ \psi^{-1}\right)}{\partial r^i}\right|_{\psi(p)}\right) \neq 0$ αν και μόνο αν η $x^j \circ F \circ \psi^{-1}$είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο $\psi(p)$. Εφόσον οι φ, ψ είναι αμφιδιαφορίσεις από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε ότι η F είναι τοπικά αντιστρέψιμη. $\square$

2 Εφαπτόμενος χώρος

Ο εφαπτόμενος χώρος είναι μια καλή προσέγγιση της πολλαπλότητας τοπικά. Θα ακολουθήσουμε την ενδογενή περιγραφή του εφαπτόμενου χώρου ως το διανυσματικό χώρο των παραγωγίσεων κατά σημείο. Ως παραγώγιση κατά σημείο λέμε την γραμμική απεικόνιση $D_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $D_p(fg) = D_p(f)g + f(p)(D_p g)$.

Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο $p \in M$ είναι μια παραγώγιση στο σημείο αυτό. Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων κατά σημείο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού αποκτά δομή διανυσματικού χώρου που τον συμβολίζουμε ως T_pM. Η μερική παράγωγος όπως την ορίσαμε για τις πολλαπλότητες $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ είναι παραγώγιση κατά σημείο και άρα τη θεωρούμε ως εφαπτόμενο διάνυσμα.

2.1 Το διαφορικό λείας απεικόνισης

Ορισμός 2.1. Έστω $F : N \to M$ λεία απεικόνιση. Καλούμε ως το διαφορικό της F στο σημείο $p \in M$ την απεικόνιση

$$\begin{aligned} F_{*,p} : T_pN &\to T_{F(p)}M \\ X_p &\to F_{*,p}\left(X_p\right) : C^\infty_{F(p)}(M) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

με

$$F_{*,p}\left(X_p\right)(f) := X_p\left(f \circ F\right) \tag{2.1}$$

όπου $f \in C^\infty_{F(p)}(M)$.

Παρατήρηση 2.1. Το διαφορικό είναι μια παραγώγιση στο $F(p)$ και επίσης είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Αν $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ και $N = V \subseteq \mathbb{R}^n$ το διαφορικό δίνεται από τον τύπο $[F_{*,p}] = \left.\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}\right|_p$ ως προς του χάρτες $(V_p, \psi = (y^i))$, $\left(U_{F(p)}, \varphi = (x^i)\right)$ που ορίζουν τις βάσεις $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right|_p \right\}$ και $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{F(p)} \right\}$.

(Το Διαφορικό Αμφιδιαφόρισης είναι ισομορφισμός)Αν $F : N \to M$ είναι αμφιδιαφόριση τότε για $p \in M$ το διαφορικό $F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

Πόρισμα 2.1. *(Διαφορομορφική Αναλλοιώτητα διάστασης)Αν $U \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι διαφορομορφικό με κάποιο $V \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε $n = m$.*

Απόδειξη. Εφόσον είναι διαφορομορφικά υπάρχει αμφιδιαφόριση $F : U \to V$ τέτοια ώστε το διαφορικό της σε ένα τυχαίο σημείο $p \in U$ να είναι ισομορφισμός. Γνωρίζουμε επίσης ότι $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ έχουμε λοιπόν ότι $\mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ άρα $m = n$. □

Πρόταση 2.1. *Έστω χάρτης $(U, \varphi = (x^i))$ γύρω από ένα σημείο $p \in M$. Τότε $\varphi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\varphi(p)}$ όπου $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = span_{\mathbb{R}}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\varphi(p)}\right\}$.*

Απόδειξη. Για $g \in C_p^\infty(M)$ έχουμε ότι

$$\varphi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(g) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(g \circ \varphi) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\varphi(p)}(g \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\varphi(p)}(g)$$

□

Παρατήρηση 2.2. Εφόσον το διαφορικό της φ είναι ισομορφισμός, οι βάσεις πάνε σε βάσεις και επομένως $T_pM = span_{\mathbb{R}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)$

Πρόταση 2.2. *(Πίνακας αλλαγής βάσης)Έστω οι χάρτες $(V, \psi = (y^i))$, $(U, \varphi = (x^i))$ γύρω από ένα σημείο $p \in M$. Τότε $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $p \in U \cap V$ και $T_p(U \cap V) = T_pM = span_{\mathbb{R}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = span_{\mathbb{R}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p\right)$ επομένως υπάρχει πίνακας $\left[A_j^i(p)\right]$ με $A_j^i(p) \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = A_j^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$ εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση σε y^k παίρνουμε ότι $A_j^i(p) = \left.\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right|_p$. □

Πρόταση 2.3. *(Διαφορικό απεικόνισης $F : N \to M$) Έστω $F : N \to M$ λεία απεικόνιση και οι χάρτες $(V_p, \psi = (y^i))$, $\left(U_{F(p)}, \varphi = (x^i)\right)$. Το διαφορικό F_* ως προς τις βάσεις $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^{n}$ και $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^{m}$ έχει αναπαράσταση πίνακα $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$ όπου $F^i = y^i \circ F$.*

Εφόσον το διαφορικό είναι γραμμική απεικόνιση για να το προσδιορίσουμε αρκεί να ξέρουμε τη δράση του σε μια βάση. $F_{*,p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = (F_{*,p})_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$ εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση στο y^k και παίρνουμε ότι $(F_{*,p})_i^k = \frac{\partial y^k \circ F}{\partial x^i}\Big|_p$.

2.2 Καμπύλες σε πολλαπλότητα

Ορισμός 2.2. Μια καμπύλη σε μια πολλαπλότητα είναι μια λεία απεικόνιση $\gamma :]a, b[\to M$. Καλούμε τα ταχύτητα της καμπύλης γ στο σημείο $t' \in]a, b[$ το εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\gamma'(t') = \gamma_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t'} \right) \in T_{\gamma(t')}M \tag{2.2}$$

Πρόταση 2.4. *(Ταχύτητα καμπύλης σε χάρτη)Έστω $\gamma :]a, b[\to M$ λεία καμπύλη και ένας χάρτης γύρω από το $\gamma(t')$. Τότε $\gamma'(t') = \dot{\gamma}(t') \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t')}$ όπου $\gamma^i(t') = x^i \circ \gamma$ και $\dot{\gamma}^i(t') := \frac{d\gamma^i}{dt}(t')$.*

Κάθε καμπύλη ορίζει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\gamma(0) = p \in M$ ως $\gamma'(0)$. Αντίστοιχα έχουμε ότι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $X \in T_pM$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας μιας καμπύλης που περνάει από το p.

Πρόταση 2.5. *(Ύπαρξη καμπύλης δεδομένης αρχικής ταχύτητας)Για κάθε σημείο $p \in M$ και $X \in T_pM$ υπάρχει $a > 0$ και μια λεία καμπύλη $\gamma :]-a, a[\to M$ τέτοια ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = X$.*

Χρησιμοποιώντας τις καμπύλες μπορούμε να τώρα να ερμηνεύσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα, που είναι παραγωγίσεις κατά σημείο, ως κατευθύνουσες παραγώγους.

Πρόταση 2.6. *Έστω $X \in T_pM$ και $f \in C_p^\infty(M)$. Αν $\gamma :]-a, \alpha[\to M$ είναι μια λεία καμπύλη με $\gamma'(0) = X$ και $\gamma(0) = p$ τότε*

$$X(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (f \circ \gamma) \tag{2.3}$$

(Το διαφορικό χρησιμοποιώντας καμπύλες)Έστω $F : N \to M$ λεία απεικόνιση $p \in N$ και $X \in T_pN$. Αν $\gamma : N \to M$ λεία καμπύλη με $\gamma'(0) = X$ και $\gamma(0) = p$ τότε $F_{*,p}(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (F \circ \gamma)$.

2.3 Συνεφαπτόμενος χώρος

Σε αντιστοιχία με τον εφαπτόμενο χώρο έχουμε και τον αλγεβρικά δυικό του $T_p^*M := (T_pM)^* = Hom(T_pM, \mathbb{R})$ τα στοιχεία του οποίου λέγονται μορφές και είναι γραμμικές α-πεικονίσεις της μορφής $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$. Όπως έχουμε τα διανυσματικά πεδία, έχουμε και τα πεδία των μορφών τα οποία είναι απεικονίσεις που αναθέτουν σε κάθε σημείο $p \in M$ μια μορφή $\omega_p \in T_p^*M$. Η πιο σημαντική διαφορά μεταξύ των πεδίων των μορφών και των διανυσματικών πεδίων είναι ότι τα πρώτα μπορούν πάντα να ανακληθούν πίσω ενώ τα δεύτερα δεν μπορούν εν γένει να ωθηθούν προς τα εμπρός.

2.4 Το διαφορικό μιας απεικόνισης

Ορισμός 2.3. Αν $f \in C^\infty(M)$ το διαφορικό της f ορίζεται ως η ένα-μορφή df

$$\begin{aligned} df : T_pM &\to \mathbb{R} \\ X_p &\mapsto df_p(X_p) = X_pf \end{aligned}$$

Πρόταση 2.7. *Αν $f \in C^\infty(M)$ τότε $F_*(X_p) = df_p(X_p) \left.\frac{d}{dt}\right|_p$* [2]

[2] Η παραπάνω πρόταση είναι σημαντική γιατί μας υποδεικνύει ότι μπορούμε να κάνουμε την κανονική ταυτοποίηση $k \left.\frac{d}{dt}\right|_{f(p)} \longleftrightarrow k$ και έτσι το f_*είναι το ίδιο με το df και έτσι πλέον τα αποκαλούμε και τα δύο διαφορικά της f.

Απόδειξη. Εφόσον $f_*(X_p) \in T_{f(p)}M$ υπάρχει αριθμός k τέτοιος ώστε $f_*(X_p) = k \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{f(p)}$ το οποίο εφαρμόζουμε πάνω στο t και έχουμε ότι $k = f_*(X_p)(t) = X_p(t \circ f) = X_p(f) = (df)_p(X_p)$ οπότε $f_*(X_p) = (df)_p(X_p) \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{f(p)}$. □

Είμαστε σε θέση πλέον να ορίσουμε βάση στο T_p^*M με τη βοήθεια αυτής του T_pM. Έστω χάρτης $(U, \varphi = (x^i))$ γύρω από το $p \in M$, τα διαφορικά $dx_p^1, .., dx_p^m$ είναι ένα-μορφές στο U.

Πρόταση 2.8. *Σε κάθε σημείο $p \in U$ ισχύει ότι $T_p^*U = span_{\mathbb{R}} \left\{dx_p^i\right\}$ και $dx_p^i \left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \delta_{ij}$ κοινώς η βάση $\left\{dx_p^i\right\}$ είναι δϋική της βάσης $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right\}$.*

Βασική συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι ότι κάθε ένα-μορφή μπορεί να γραφεί ως $\omega = \omega_i dx_p^i$ με $\omega_i : U \to \mathbb{R}$, έτσι και το διαφορικό μπορεί να γραφεί ως $df_p = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p dx_p^i$.

3 Διανυσματικές δέσμες

Μια Διανυσματική Δέσμη είναι μια συλλογή από διανυσματικούς χώρους, ένας σε κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας M, κολλημένοι μεταξύ τους έτσι ώστε τοπικά να φαίνονται σαν καρτεσιανό γινόμενο $M \times \mathbb{R}^n$ ενώ ολικά εν γένει δε συμβαίνει αυτό. Βασική εφαρμογή αυτής της δομής είναι η Εφαπτόμενη και Συνεφαπτόμενη Δέσμη.

3.1 Βασικοί ορισμοί και κατασκευές

Ορισμός 3.1. Καλούμε ίνα ενός σημείου $p \in M$ την αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(p) := \pi^{-1}(\{p\}) := E_p$ της απεικόνισης $\pi : E \to M$.

Καλούμε ως απεικόνιση που διατηρεί τις ίνες κάθε απεικόνιση $f : E \to E'$ τέτοια ώστε, για $\pi : E \to M$ και $\pi' : E' \to M$, $f(E_p) \subseteq E'_p$ $\forall p \in M$.

Πρόταση 3.1. *(Απεικονίσεις που διατηρούν τις ίνες)Έστω $\pi : E \to M$ και $\pi' : E' \to M$ απεικονίσεις προβολής. Η απεικόνιση $f : E \to E'$ διατηρεί τις ίνες αν και μόνο αν το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. '$\Longrightarrow$'Υποθέτουμε ότι η f διατηρεί τις ίνες. Έστω $x \in E_p$ τότε από υπόθεση $f(x) \in E'_p$ και άρα $\pi'(f(x)) = p$ εξ ορισμού της π'. Επίσης $\pi(x) = p$ εξ ορισμού της π. Επομένως $\pi'(f(x)) = \pi(x) \Longrightarrow (\pi' \circ f)(x) = \pi(x)$ $\forall x \in E_p$ άρα $\pi' \circ f = \pi$.

'$\Longleftarrow$'Υποθέτουμε ότι το διάγραμμα μετατίθεται. Έστω $x \in E_p$ από υπόθεση $\pi'(f(x)) = \pi(x) = p \Longrightarrow \pi'(f(x)) = p \Longrightarrow f(x) \in E'_p$ εξ ορισμού ίνας. Εφόσον ισχύει $\forall x \in E_p$ έχουμε ότι $f(E_p) \subseteq E'_p$. $\square$

Ορισμός 3.2. Μια επί και λεία απεικόνιση $\pi : E \to M$ λέγεται λέγεται τοπικά τετριμμένη και τάξης m αν

1. $\forall E_p = \pi^{-1}(p)$ έχει τη δομή διανυσματικού χώρου διάστασης m.

2. $\forall p \in M$ $\exists$ ανοικτή γειτονιά U και μια αμφιδιαφόριση $\Phi : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε $\forall q \in U$, $\Phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbb{R}^m$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών

χώρων. Η δυάδα (U, Φ) ονομάζεται τετριμμενοποίηση του E από το U. Το σύνολο $\{(U, \Phi)\}_{p \in M}$, με $\{U\}_{p \in M}$ ανοικτό κάλυμμα της M, ονομάζεται τοπική τετριμμενοποίηση για το E.

Ορισμός 3.3. Μια λεία διανυσματική δέσμη τάξης m είναι η τριάδα (E, M, π) όπου E, M είναι λείες πολλαπλότητες, $\pi : E \to M$ είναι λεία και επί απεικόνιση η οποία είναι και τοπική τετριμμενοποίηση τάξης m. Η πολλαπλότητα E ονομάζεται ολικός χώρος ενώ η M ονομάζεται βάση.

3.1.1 Δημιουργία χάρτη στην E

Έστω (E, M, π) λεία διανυσματική δέσμη, (U, φ) χάρτης του M και μια τετριμμενοποίηση

$$\begin{aligned} \Phi : E|_U &\to U \times \mathbb{R}^m \\ a &\mapsto \Phi(a) = \big(\pi(a), y^1(a), ..., y^m(a)\big) \end{aligned}$$

τότε η απεικόνιση

$$(\varphi \times id) \circ \Phi : E|_U \;\to\; \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

είναι αμφιδιαφόριση οπότε $\left(E|_U, (\varphi \times id) \circ \Phi = \{x^i, y^j\}\right)$ είναι χάρτης με $\{x^i\}$ συντεταγμένες βάσης και $\{y^j\}$ συντεταγμένες ίνας, οι τελευταίες εξαρτώνται μόνο από την τετριμμενοποίηση Φ στο $E|_U$ και όχι από την τετριμμενοποίηση φ στο U.

3.1.2 Απεικονίσεις Δέσμης

Έστω (E, M, π) και (E', M', π') Διανυσματικές Δέσμες τάξεων n, n'. Μια απεικόνιση δέσμης από την E στην E' είναι η δυάδα (f, F) όπου $f : M \to M'$ και $F : E \to E'$ τέτοιες ώστε

1. Το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

2. Η F είναι γραμμική σε κάθε ίνα δηλαδή $\forall p \in M$ $F_p : E_p \to E_{f(p)}$ είναι γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Παράδειγμα 3.1. Μια λεία απεικόνιση $f : N \to M$ επάγει μια απεικόνιση δέσμης

$$\begin{aligned} F : TN &\to TM \\ (p, X) &\mapsto F(p, X) = (f(p), f_*(X)) \in \{f(p)\} \times T_{f(p)}M \end{aligned} \tag{3.1}$$

Παρατήρηση 3.1. Αν $M = M'$ τότε μια απεικόνιση δέσμης μπορεί να έχει ως $f = id_M$

Ορισμός 3.4. Κάθε Διανυσματική Δέσμη του M που είναι ισομορφική με τη δέσμη γινομένου $M \times \mathbb{R}^m$ λέγεται τετριμμένη δέσμη.

3.1.3 Λείες Τομές

Ορισμός 3.5. Μια τομή σε μια Διανυσματική Δέσμη (E, M, π) είναι μια απεικόνιση $s : M \to E \ni \pi \circ s = id_M$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\ M \arrow[u, shift right, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο X στην M είναι μια απεικόνιση η οποία αναθέτει σε κάθε σημείο $p \in M$ αναθέτει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in T_pM$. Σε όρους δέσμης (TM, M, π) ένα διανυσματικό πεδίο είναι μια τομή

$$\begin{aligned} X : M &\to TM \\ p &\mapsto X(p) = X_p \in T_pM \end{aligned} \tag{3.2}$$

τέτοια ώστε $\pi \circ X = id_M$

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\ M \arrow[u, shift right, bend right, "X"'] \end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 3.2. Το σύνολο $\Gamma(E) := \{s : M \to E | s \text{ λείες}\}$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και πρότυπο επί του δακτυλίου $C^\infty(M)$.

3.1.4 Λεία Πλαίσια

Ορισμός 3.6. Μια συλλογή από τομές $s_1, .., s_m$ επί μιας διανυσματικής δέσμης (E, M, π) επί του συνόλου U τέτοια ώστε σε κάθε $p \in U$ έχουμε ότι $E_p = span_{\mathbb{R}} \{s_i\}_{i=1}^m = \pi^{-1}(p)$ λέγεται πλαίσιο. Η τομή s_i είναι λεία, αν είναι λεία ως απεικόνιση $s_i : U \to E$.

Παράδειγμα 3.2. (Συνήθη πλαίσια στον $\mathbb{R}^m$) Έστω M και $e_1, .., e_m$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^m$, ορίζοντας την απεικόνιση

$$\begin{aligned} E_i : M &\to M \times \mathbb{R}^m \\ p &\mapsto E_i(p) = (p, e_i(p)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

έχουμε ότι η συλλογή $E_1, .., E_m$ αποτελεί ένα λείο πλαίσιο για τη διανυσματική δέσμη $M \times \mathbb{R}^m$.

(Πλαίσιο τετριμμενοποίησης)Έστω (E, M, π) διανυσματική δέσμη τάξης m. Αν $\Phi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ είναι μια τετριμμενοποίηση του E επί του ανοικτού συνόλου U τότε η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : U \times \mathbb{R}^m &\to E|_U \\ E_i &\mapsto \Phi^{-1}(E_i) = \Phi^{-1}(p, e_i(p)) := t_i(p), \quad p \in U \subseteq M \end{aligned} \tag{3.4}$$

μεταφέρει το λείο πλαίσιο $E_1, .., E_m$ της διανυσματικής δέσμης $M \times \mathbb{R}^m$ στο νέο λείο πλαίσιο $t_1, .., t_m$ της διανυσματικής δέσμης E επί του U. Το πλαίσιο $t_1, .., t_m$ καλείται πλαίσιο της τετριμμενοποίησης Φ.

Λήμμα 3.1. *(Κριτήριο διαφορισιμότητας των τομών)Έστω (E, M, π) διανυσματική δέσμη τάξης n, μια τετριμμενοποίηση $\Phi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ και το λείο πλαίσιο αυτής $t_1, .., t_m$. Μια τομή $s = s^i t_i$ του $E|_U$ είναι λεία αν και μόνο αν οι απεικονίσεις $s^i : M \to \mathbb{R}$ είναι λείες ως προς το πλαίσιο $t_1, .., t_m$.*

Απόδειξη. '$\Rightarrow$'Εφόσον $t_1, .., t_m$ είναι λείο πλαίσιο και θέλουμε τελικά $s \in \Gamma(\mathrm{E})$ θα πρέπει $s = s^i t_i$ και απαραίτητα s^i να είναι λείες διότι το $\Gamma(E)$ αποτελεί πρότυπο επί του $C^\infty(M)$.

'$\Leftarrow$''Εστω $s = s^i t_i$ λεία. Ξέρουμε ότι το πλαίσιο $t_1, .., t_m$ είναι λείο άρα και το $\Phi \circ s$ είναι λείο.

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[r, "\Phi"] & U \times \mathbb{R}^m \\ U \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "\Phi\circ s"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} (\Phi \circ s)(p) &= \Phi \circ s^i(p)t_i(p) = \Phi \circ s^i(p)t_i(p) = \Phi \circ s^i(p)t_i(p) = s^i(p)\Phi \circ t_i(p) \\ &= s^i(p)\Phi(t_i(p)) = s^i(p)\Phi\left(\Phi^{-1}(p, e_i(p))\right) = \left(p, s^i(p)e_i(p)\right) \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.3. Οι απεικονίσεις $s^i(p)$ λέγονται και συντεταγμένες ίνας της τομής $s(p)$ ως προς την τετριμμενοποίηση Φ.

3.2 Εφαπτόμενη Δέσμη

Η Εφαπτόμενη Δέσμη είναι μια δομή η οποία μας επιτρέπει να παραμετρήσουμε όλους τους εφαπτόμενους χώρους T_pM από την ίδια την πολλαπλότητα M. Επίσης είναι μια διανυσματική δέσμη (TM, π, M), η οποία είναι τοπικά τετριμμένη τάξης n, γεγονός που θα δούμε σταδιακά.

3.2.1 Τοπολογία της Εφαπτόμενης Δέσμης

Ορισμός 3.7. (TM ως σύνολο)Η Εφαπτόμενη Δέσμη TM της M είναι η διακριτή ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων της M.

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM = \bigcup_{p\in M}\{p\} \times T_pM \tag{3.5}$$

Έστω $(U, \varphi = (x^i))$ χάρτης γύρω από το $p \in M$ τότε $TU = \bigsqcup_{p\in U} T_pU$. Θα φτιάξουμε μια τετριμμενοποίηση Φ από τον προαναφερθέντα χάρτη. Ορίζουμε λοιπόν ως

$$\begin{aligned} \Phi : TU &\to U \times \mathbb{R}^m \\ X &\mapsto \Phi(X) := \left(x^i(p), X^i(p)\right) = \left(x^i \circ \pi, \varphi_*\right)(X) \end{aligned}$$

και έχει αντίστροφη την

$$\begin{array}{rcl}\Phi^{-1}: U \times \mathbb{R}^m & \to & TU \\ (p, X_p) & \mapsto & \Phi^{-1}(p, X_p) = X^i(p) \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\end{array}$$

επομένως η Φ είναι αντιστρέψιμη και έτσι μπορεί να μεταφέρει την τοπολογία από το $U \times \mathbb{R}^m$ στο TU. Ένα σύνολο $B \subseteq TU$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το Φ(B) είναι ανοικτό στο $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ το οποίο έχει τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^{2m}$, οπότε με την τοπολογία από την Φ έχουμε ότι $TU \overset{\sim}{\to} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ ομοιομορφικά.

Λήμμα 3.2. *(Βάση για την τοπολογία του TU)Ορίζουμε ως $\mathcal{B} := \{B | B$ ανοικτό στο TU_a, όπου (U_a, φ_α), χάρτης στην $M\}$*

$i)\forall\ M$, $TM = \bigcup\{B|B$ ανοικτό στο TU_a, όπου (U_a, φ_α), χάρτης στην $M\}$

$ii)$Έστω U, U' συντεταγμένες περιοχές στην M. Αν C ανοικτό στο TU και C' ανοικτό στο TU' τότε $C \cap C'$ ανοικτό στο $T(U \cap U')$.

Απόδειξη. $i)$Έστω $A = (U_a, \varphi_\alpha)$ μεγιστικός άτλας στην M.

$$TM = \bigsqcup_a TU_a \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq M \Longrightarrow TM = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

$ii)$Επάγουμε στο $T(U \cap U')$ τοπολογία και έχουμε ότι $C \cap T(U \cap U')$, $C' \cap T(U \cap U')$ είναι ανοικτά. Ωστόσο $C \cap C' \subseteq TU \cap TU' = T\left(U \cap U'\right)$. Άρα

$$C \cap C' = C \cap C'T\left(U \cap U'\right) = \left(C \cap T(U \cap U')\right) \cap \left(C' \cap T(U \cap U')\right)$$

δηλαδή το $C \cap C'$ είναι ανοικτό. □

Επομένως το σύνολο $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις συνθήκες για να είναι βάση μιας τοπολογίας. Δίνουμε λοιπόν στο TM την τοπολογία που παρέχει η βάση $\mathcal{B}$. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν αυτή η βάση είναι μετρήσιμη και αν μας παρέχει την ιδιότητα $Hausdorff$ για την τοπολογία που επάγει στο TM.

Λήμμα 3.3. *Μια πολλαπλότητα M έχει μετρήσιμη βάση η οποία αποτελείται από συντεταγμένα ανοικτά σύνολα.*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τη βάση τοπολογίας $\mathcal{B}$ και ένα μεγιστικό άτλα A. Έστω λοιπόν $A = (U_a, \varphi_\alpha)$ μεγιστικός άτλας και $B = \{B_i\}$ μια μετρήσιμη βάση για την M. Για $p \in U_a$ υπάρχει $B_{p,a} \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $p \in B_{p,a} \subseteq U_a$ οπότε η συλλογή $B_p = \{B_{p,a}\}$ είναι υποσυλλογή της βάσης $\mathcal{B}$ και μετρήσιμη. Συνδυάζοντας τα παραπάνω για ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο $U \subseteq M$ και για $p \in U$ έχουμε ότι υπάρχει U_a τέτοιο ώστε $p \in U_a$ και επομένως $p \in B_{p,a} \subseteq U$ γεγονός το οποίο δείχνει ότι B_p είναι μια βάση για την M και εξ υποθέσεως μετρήσιμη. $\square$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα θα δείξουμε τώρα ότι η TM έχει μετρήσιμη βάση.

Πρόταση 3.2. *Η TM έχει μετρήσιμη βάση.*

Απόδειξη. Έστω $\{U_a\}_{a=1}^{\infty}$ μια μετρήσιμη βάση της M όπου U_a είναι συντεταγμένη περιοχή. Είδαμε ότι $TU_a \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ και ξέρουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ έχει μετρήσιμη βάση άρα και το TU_a έχει μετρήσιμη βάση. Οπότε $\forall a$ επιλέγουμε μια μετρήσιμη βάση $\{B_{a.b}\}_{b=1}^{\infty}$ για το TU_a. Επομένως το σύνολο $\{B_{a.b}\}_{a,b=1}^{\infty}$ είναι μια μετρήσιμη βάση της TM. $\square$

Πρόταση 3.3. *Η TM είναι $Hausdorff$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε την διαχωρισιμότητα της TM θα χρειαστεί να δούμε δύο περιπτώσεις διότι τα στοιχεία της $X \in TM$ είναι τοπικά της μορφής (p, X_p). Έστω λοιπόν $X, X' \in TM$.

$i)p = p'$. Εφόσον ξέρουμε ότι η M είναι $Hausdorff$ τα p, p' μπορούν να διαχωριστούν από ξένες μεταξύ τους γειτονιές U, U' οπότε και $TU \cap TU' = \emptyset$.

$ii)p \neq p'$. Τα X, X' είναι διακριτά σημεία κάποιου TU όπου $p, p' \in U$ με (U, φ) κάποιο χάρτη. Εφόσον $TU_a \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ και ο $\mathbb{R}^{2m}$ είναι $Hausdorff$ τότε και το TU είναι $Hausdorff$. $\square$

3.2.2 Η δομή λείας πολλαπλότητας στην TM

Θα δείξουμε πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε δομή λείας πολλαπλότητας στην TM από την M. Έστω (TU_a, Φ_α) χάρτης επαγόμενος από τον χάρτη $(U_a, \Phi_a = (x^i))$, προφανώς

$TM = \bigcup_a TU_a$. Στην ουσία πρέπει να δούμε αν η συνάρτηση μετάβασης είναι λεία στο επίπεδο της δέσμης. Αν λοιπόν ένας άλλος χάρτης $(U_b, \Phi_b = (y^i))$ και (TU_b, Φ_b) τότε

$$\begin{aligned} \Phi_b \circ \Phi_a^{-1} : \varphi_a(U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^m &\to \varphi_b(U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^m \\ \left(\varphi_a(p), X_a^i(p), .., X_a^m(p)\right) &\mapsto \Phi_b \circ \Phi_a^{-1} \left(\varphi_a(p), X_a^i(p), .., X_a^m(p)\right) = \left(\varphi_b(p), X_b^i(p), .., X_b^m(p)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

όπου $X = X_a^i(p) \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = X_b^i(p) \left.\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$. Λόγω αλλαγής βάσης έχουμε ότι

$$X_b^i(p) = X_a^j(p) \left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_p = \left.\frac{\partial \left(\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}\right)^i}{\partial r^j}\right|_{\varphi_a(p)} \tag{3.7}$$

ενώ έχουμε ότι $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$ είναι λεία εξ ορισμού. Προκύπτει λοιπόν ότι και η συνάρτηση μετάβασης $\Phi_b \circ \Phi_a^{-1}$ είναι λεία, έτσι το σύνολο $A := \{(TU_a, \Phi_\alpha)\}$ αποτελεί άτλα της TM.

3.3 Συνεφαπτόμενη Δέσμη

Σε αντιστοιχία με την εφαπτόμενη δέσμη ορίζουμε την συνεφαπτομένη δέσμη ως

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M$$

με απεικόνιση προβολής

$$\begin{aligned} \pi : T^*M &\to M \\ a &\mapsto \pi(a) = p \;, a \in T_p^*M \end{aligned}$$

Δίνουμε τοπολογία όπως στην περίπτωση της εφαπτόμενης δέσμης. Έστω χάρτης $(U, \varphi = (x^i))$ του M γύρω από το $p \in M$ τότε κάθε $a \in T_p^*M$ μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός $a = a_i(a) dx_p^i$. Επομένως έχουμε την 1-1 και επί απεικόνιση

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi} : T^*U &\to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \\ a &\mapsto \widetilde{\Phi}(a) = (\varphi(p), a_1(a), .., a_m(a)) = (\varphi \circ \pi, a_1, .., a_m)(a) \end{aligned}$$

με την οποία μπορούμε να μεταφέρουμε την τοπολογία του $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ στο T^*U. Για κάθε U κάποιου χάρτη $(U, \varphi = (x^i))$ ορίζουμε το B_U ως τη συλλογή των ανοικτών συνόλων του T^*U και ως $B = \cup B_U$. Το B ορίζει μια βάση τοπολογίας την οποία χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε τοπολογία στην T^*M και μαζί με τις απεικονίσεις $\widetilde{\Phi}$ ως απεικονίσεις συντεταγμένων η τριάδα (T^*M, M, π) αποκτά δομή διανυσματικού δέσμης τάξης m επί του M. Αν x^i είναι συντεταγμένες στο $U \subseteq M$ τότε οι $\pi^* x^\iota = x^\iota \circ \pi$ είναι συντεταγμένες στο $\pi^{-1}(U) \subseteq T^*M$.

Όπως τα διανυσματικά πεδία είναι τομές της εφαπτόμενης δέσμης, έτσι και τα πεδία ένα-μορφών είναι τομές της συνεφαπτόμενης δέσμης δηλαδή για ένα πεδίο ένα-μορφών ισχύει ότι $\omega : M \to T^*M$ και $\pi \circ \omega = id_M$

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[d, "\pi"', shift right] \\ M \arrow[u, "\omega"', bend right] \end{tikzcd}$$

Σε ένα χάρτη $(U, \varphi = (x^i))$ η τιμή του ω στο p δίνεται ως $\omega_p = a_i(p) dx_p^i$, ωστόσο αν το p αρχίσει να μεταβάλλεται οι συντελεστές $a_i(p)$ γίνονται συναρτήσεις $a_i U \to \mathbb{R}$. Ο χάρτης $(U, \varphi = (x^i))$ επάγει τώρα το χάρτη $\left(T^*U, \widetilde{\Phi} = (x^i \circ \pi, c_i)\right)$ όπου c_i είναι τέτοια ώστε $\omega = c_i(\omega) dx_p^i$ με $\omega \in T_p^*M$. Συγκρίνοντας τους συντελεστές έχουμε ότι $\omega_p = a_i(p) dx_p^i = c_i(\omega) dx_p^i$ άρα $a_i(p) = c_i(\omega) = c_i \circ \omega$. Τα c_i ως απεικονίσεις συντεταγμένων είναι λεία στο T^*U. Επομένως αν το ω είναι λείο τότε οι συντελεστές a_i ως προς το πλαίσιο $\{dx^i\}$ είναι λείοι.

3.3.1 Ανάκληση μορφών

Έστω $F : N \to M$ λεία απεικόνιση με $F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}M$, διαφορικό $F_p^* = (F_{*,p})^* : T_{F(p)}^*M T_p^*N \to T_p^*N$ και πεδίο ένα-μορφών $\omega : N \to T^*N$. Η ανάκληση του ω μέσο της F είναι

$$\left(F_p^* \left(\omega_{F(p)}\right)\right)(X_p) = \left((F_{*,p})^* \left(\omega_{F(p)}\right)\right)(X_p) = \omega_{F(p)}\left(F_{*,p}(X_p)\right) \tag{3.8}$$

με $\omega_{F(p)} = T_{F(p)}^*M$ και $X_p \in T_pN$. Το $F_p^*\left(\omega_{F(p)}\right)$ ονομάζεται ανάκληση του ω μέσω της F.

Παρατήρηση 3.4. Σε αντίθεση με τα διανυσματικά πεδία, τα οποία δεν μπορούμε να τα ωθήσουμε από οποιαδήποτε λεία απεικόνιση, κάθε πεδίο ένα-μορφών μπορεί να τραβηχτεί πίσω από μια λεία απεικόνιση. Το πρόβλημα βρίσκεται στο ότι το F_*X είναι καλώς ορισμένο πάντα αν η $F \in Diff(M)$ και πιο συγκεκριμένα στην ασυμμετρία του ορισμού της συνάρτησης, για την οποία ένα σημείο του πεδίου ορισμού έχει μοναδική εικόνα ενώ ένα σημείο του πεδίου τιμών δεν έχει εν γένει μοναδική προεικόνα.

Ιδιότητες Ανάκλησης:

1. $F^*(dh) = d(F^*h)$
2. $F^*(\omega + \sigma) = F^*\omega + F^*\sigma$ με ω,σ$\in \Omega^1(M)$
3. $F^*(g\omega) = F^*gF^*\omega$ με $g \in C^\infty(M)$

Πρόταση 3.4. *Η ανάκληση, υπό μια λεία απεικόνιση, ενός πεδίου ένα-μορφών είναι ένα λείο πεδίο μορφών. Έστω $F : N \to M$ λεία και $\omega \in \Omega^1$.*

Απόδειξη. Για $p \in N$ διαλέγουμε χάρτη $(U, \varphi = (x^i))$ γύρω από το $F(p)$. Λόγω συνέχειας της F υπάρχει χάρτης $(V, \psi = (y^i))$ γύρω από το p τέτοιος ώστε $F(V) \subseteq U$. Στο U τώρα έχουμε ότι $\omega = \omega_i dx^i$ για κάποια $\omega_i \in C^\infty(U)$ και

$$\begin{aligned} F^*\omega &= F^*(\omega_i dx^i) \\ &= (F^*\omega_i)(F^*dx^i) \\ &= (\omega_i \circ F)d(F^*x^i) \\ &= (\omega_i \circ F)\, d(x^i \circ F) \\ &= (\omega_i \circ F)\, \frac{\partial\,(x^i \circ F)}{\partial y^j} dy^j \end{aligned}$$

ωστόσο τα $\omega_i \circ F$ και $\dfrac{\partial\,(x^i \circ F)}{\partial y^j}$ είναι λεία στο p, επομένως το $F^*\omega$ είναι λείο στο p και εφόσον το p είναι αυθαίρετο είναι λείο παντού. □

3.4 Η κ-οστή εξωτερική δύναμη

Με την εισαγωγή της συνεφαπτόμενης δέσμης μπορούμε να μελετήσουμε μέχρι και ένα-μορφές, κάτι το οποίο δε μας δίνει την γενική εικόνα. Κατασκευάζοντας την k-οστή εξωτερική δύναμη της συνεφαπτόμενης δέσμης μπορούμε να μελετήσουμε τις κ-μορφές οι οποίες είναι αντισυμμετρικές πολυγραμμικές απεικονίσεις.

Έστω M πολλαπλότητα διάστασης m, ορίζουμε ως την k-οστή εξωτερική δύναμη της συνεφαπτόμενης δέσμης ως

$$\Lambda^k(T^*M) := \cup_{p\in M}\Lambda^k(T_p^*M) = \cup_{p\in M}A_k(T_pM) \tag{3.9}$$

με απεικόνιση προβολής

$$\begin{aligned} \pi : \Lambda^k(T^*M) &\rightarrow M \\ a &\mapsto \pi(a) = p, \quad a \in \Lambda^k(T_p^*M) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Σε πλήρη αναλογία με τις κατασκευές χάρτη στις ήδη γνωστές δέσμες, κατασκευάζουμε και εδώ χάρτη στο ανοικτό υποσύνολο $U \subseteq M$. Έστω χάρτης (U, φ) τότε υπάρχει αντιστρέψιμη απεικόνιση

$$\begin{aligned} \Phi : \Lambda^k(T^*U) &\rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\binom{m}{k}} \\ &\rightarrow (\varphi(p), \{c_I(a)\}_I) \end{aligned}$$

όπου $a = c_I(a)dx_p^I \in \Lambda^k(T_p^*U)$ και $I = \{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq m\}$. Με την απεικόνιση Φ μπορούμε να δώσουμε τοπολογία στο $\Lambda^k(T^*M)$ και τελικά έχουμε ότι $\left(\Lambda^k(T^*M), \pi, M\right)$ είναι μια C^∞ διανυσματική δέσμη τάξεως $\binom{m}{k}$. Οι διαφορικές κ-μορφές ορίζονται ως τομές αυτής της διανυσματικής δέσμης και για να είναι λείες πρέπει να είναι λείες ως τομές. Ορίζουμε το $\Omega^\kappa(M) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$ ως το διανυσματικό χώρο των λείων τομών της διανυσματικής δέσμης $\Lambda^k(T^*M)$.

3.4.1 Ανάκληση κ-μορφών

Μια γραμμική απεικόνιση $L : V \rightarrow W$ όπου V, W διανυσματικοί χώροι, επάγει την απεικόνιση ανάκλησης $L^* : A_k(W) \rightarrow A_k(V)$ ως $(L^*a)(v_1, .., v_k) = a(L(v_1), .., L(v_k))$ με $A_k(V), A_k(W)$ χώρος των κ-γραμμικών εναλλασσόμενων συναρτησιακών των διανυσματικών χώρων V, W αντίστοιχα, $a \in A_k(W)$ και $v_i \in V$. Για $L = (F_{*,p})^* = F^*$ με $F : N \rightarrow M$ λεία και $\left(F^*\omega_{F(p)}\right)(v_1, .., v_k) = \omega_{F(p)}\left(F_{*,p}(v_1), .., F_{*,p}(v_k)\right)$ με $v_i \in T_pN$ το οποίο είναι η κ-μορφή στο

N. Την ανάκληση μπορούμε να τη δούμε και ως

$$T_pN \times .. \times T_pN \overset{F_* \times .. \times F_*}{\longrightarrow} T_{F(p)}N \times .. \times T_{F(p)}N \overset{\omega_{F(p)}}{\longrightarrow} \mathbb{R} \tag{3.11}$$

Παρατήρηση 3.5. Η απεικόνιση ανάκλησης για τις κ-μορφές, όπως και για τις 1-μορφές, είναι γραμμική $F^*(\omega + \alpha\tau) = F^*\omega + \alpha F^*\tau$ με ω,τ$\in \Omega^\kappa(M)$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.4.2 Το σφηνοειδές γινόμενο

Το γινόμενο σφήνα είναι μια απεικόνιση $\wedge : \Lambda^k(T^*M) \times \Lambda^{k'}(T^*M) \to \Lambda^{k+k'}(T^*M)$ που ορίζεται ως

$$(\omega \wedge \tau)(v_1, ..v_{k+k'}) = \sum (sgn\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, ..v_{\sigma(k)})\tau(v_{\sigma(k+1)}, ..v_{\sigma(k+k')}) \tag{3.12}$$

με ω$\in \Lambda^k(T^*M)$ και τ$\in \Lambda^{k'}(T^*M)$. Η απεικόνιση ανάκλησης είναι συμβατή με το γινόμενο σφήνας και ισχύει $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$.

Ορίζουμε ως το διανυσματικό χώρο όλων των λείων διαφορικών μορφών σε μια πολλαπλότητα M διάστασης m ως $\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(M)$, το οποίο σημαίνει ότι κάθε $\omega \in \Omega^*(M)$ μπορεί να γραφεί μοναδικά ως $\omega = \sum_{k=0}^m \omega_k$ με $\omega_k \in \Omega^k(M)$. Ο χώρος $(\Omega^*(M), \wedge)$ γίνεται μια βαθμωτή άλγεβρα με βαθμό αυτόν των διαφορικών μορφών.

3.5 Τανυστική Δέσμη

Η τανυστική δέσμη είναι η πιο γενική κατασκευή που μπορεί να προκύψει από ένα διανυσματικό χώρο, τον αλγεβρικά δυικό του και τα γινόμενα του. Με τη δέσμη αυτή είμαστε σε θέση να γενικεύσουμε την έννοια του κ-διανυσματικού πεδίου και των πεδίων των κ-μορφών.

Ορίζουμε ως τανυστική δέσμη το σύνολο $T^r_s(M) := T^r_s(TM) = (TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}$.

Ορισμός 3.8. Ένα τανυστικό πεδίο τύπου (r, s) στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq M$ είναι μια τομή του $T^r_s(U)$.

Παρατήρηση 3.6. Συσχετίζοντας τα ήδη γνωστά μας αντικείμενα με την έννοια του τανυστικού πεδίου έχουμε ότι

1)Ένα πεδίο μιας s-μορφής είναι τανυστικό πεδίο τύπου (0,s)

2)Ένα r-διανυσματικό πεδίο είναι τανυστικό πεδίο τύπου $(r,0)$

3)Ένας μετρικός τανυστής είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(0,2)$

Η έκφραση ενός τανυστικού πεδίου (r,s) σε χάρτη $(U, \varphi = (x^i))$ είναι με τη βοήθεια της επαγώμενης από το χάρτη βάσης $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes .. \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes .. \otimes dx^{j_s}\right\}$ με $1 \leq i_1..i_r \leq m$ και $1 \leq j_1..j_s \leq m$ όπου $m = dimM$. Επομένως κάθε τανυστικό πεδίο T τύπου (r,s) μπορεί να γραφεί ως

$$T = T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes .. \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes .. \otimes dx^{j_s} \tag{3.13}$$

με $T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, .., \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}, dx^{i_1}, .., dx^{i_r}\right)$.

Ένα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο $(0,s)$ ορίζει φυσικά μια λεία πολυγραμμική απεικόνιση $T : \oplus_1^s TM \to C^\infty(M)$ και ισχύει και το αντίστροφο. Ένα πεδίο r-μορφής μπορεί να ταυτιστεί με μια λεία αντισυμμετρική πολυγραμμική απεικόνιση $\omega : \oplus_1^r TM \to C^\infty(M)$.

Κάθε διαφορομορφισμός $f : M \to N$ επάγει ένα ισομορφισμό δέσμης $f_* : TN \to TM$ οπότε ένας διαφορομορφισμός επάγει μια γραμμική απεικόνιση $f_* : T^r_s(M) \to T^r_s(N)$ την οποία ονομάζουμε κατά τα γνωστά απεικόνιση ώθησης. Γενικότερα η ομάδα $Diff(M)$ δρα φυσικά και γραμμικά στο $T^r_s(M)$. Αντίστοιχα έχουμε και την απεικόνιση ανάκλησης $f^* : T^r_s(N) \to T^r_s(M)$. Ειδικότερα αν $f \in Diff(M)$ τότε $f^* = (f_*^{-1})$.

Τέλος υπάρχει και ο τελεστής ίχνους $tr : T^{r+1}_{s+1}(M) \to T^r_s(M)$ που ορίζεται ως

$$tr\left[(X_0 \otimes .. \otimes X_r) \otimes (\omega_0 \otimes .. \otimes \omega_s)\right] = \omega_0(X_0)(X_1 \otimes .. \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes .. \otimes \omega_s) \tag{3.14}$$

με $X_i \in TM$, $\omega_i \in \Omega^1(M)$ και σε χάρτη έχει τη μορφή $tr\left(T^{i_0,..,i_r}_{j_0,..,j_s}\right) = T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_s}$.

Μέρος II

Γεωμετρία της Εφαπτόμενης Δέσμης

Για τη μελέτη της γεωμετρίας της δέσμης (TM, π, M) χρειαζόμαστε τη λεγόμενη κάθετη υποδέσμη VTM και την υπό-ανάκληση δέσμη $\pi^*(TM)$. Για την ακρίβεια χρειαζόμαστε μια από τις παραπάνω υποδέσμες διότι, όπως αποδεικνύεται είναι ισόμορφες και έτσι επιλέγουμε την VTM.

Σε αυτό το μέρος θα παρουσιάσουμε όλα τα εργαλεία που χρειαζόμαστε για να μελετήσουμε τις πτυχές της γεωμετρίας στην εφαπτόμενη δέσμη όπως παρουσιάζεται από το [2].

4 Κάθετη υποδέσμη

Σε ό,τι κάνουμε σχετικό με τις συνοχές αργότερα θα χρειαστούμε την έννοια του εφαπτόμενου χώρου σε σημείο της εφαπτόμενης δέσμης. Αν $u \in TM$ τότε ως T_uTM ορίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο της εφαπτόμενης δέσμης στο σημείο u και $dimT_uTM = 2dimM = 2m$.
Ένας χάρτης $(TU, \Phi = (x^i, y^i))$ επάγει τη βάση $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_u, \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u \right\}_{i=1,..,m}$ στην T_uTM η οποία κατόπιν αλλαγής χάρτη σε $(TU', \Phi' = (x'^i, y'^i))$ γίνεται

$$\left\{ \left.\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right|_u \left.\frac{\partial}{\partial x'^j}\right|_u + \left.\frac{\partial y'^j}{\partial x^i}\right|_u \left.\frac{\partial}{\partial y'^j}\right|_u, \left.\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right| \left.\frac{\partial}{\partial y'^i}\right|_u \right\}_{i=1,..,m} \tag{4.1}$$

και $rank\left(\left.\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right|_u \right) = m.$

Αν $X_u \in T_uTM$ τότε το X_u έχει την εξής αναπαράσταση σε χάρτη

$$X_u = X^i(u)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_u + Y^i(u)\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u \tag{4.2}$$

Το οποίο υπό αλλαγή χάρτη παίρνει τη μορφή

$$X'_u = \left(\left.\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right|_u X^i\right)\left.\frac{\partial}{\partial x'^j}\right|_u + \left(\left.\frac{\partial y'^j}{\partial x^i}\right|_u X^i + \left.\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right| Y^i\right)\left.\frac{\partial}{\partial y'^i}\right|_u \tag{4.3}$$

Το TTM είναι εφοδιασμένο με δύο απεικονίσεις προβολών, η μια είναι η φυσική προβολή

$$\begin{aligned} t : TTM &\rightarrow TM \\ (x, y, X, Y) &\mapsto t(x, y, X, Y) = (x, y) \end{aligned}$$

και η άλλη είναι η γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} \pi_* : TTM &\rightarrow TM \\ (x, y, X, Y) &\mapsto \pi_*(x, y, X, Y) = (x, X) \end{aligned}$$

Η βασική χρήση αυτών τον προβολών θα φανεί αργότερα, όταν έχουμε μια τομή της δέσμης (TM, π, M) η οποία είναι ταυτόχρονα τομή των (TTM, π_*, M) και (TTM, t, M) τότε η τομή αυτή είναι ένα διανυσματικό πεδίο δευτέρας τάξεως που ονομάζεται $semispray$, το οποίο θα παίξει σημαντικό ρόλο στη γεωμετρική μοντελοποίηση των διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως.
Η δυο-μορφή $N_K := \frac{1}{2}[K, K]$ ονομάζεται τανυστικό πεδίο $Nijenhuis$ και έχει τιμή για το τανυστικό πεδίο K τύπου (1,1)

$$\frac{1}{2}[K, K](X, Y) = [K(X), K(Y)] + K^2[X, Y] - K[X, K(Y)] - K[K(X), Y] \tag{4.4}$$

Το τανυστικό πεδίο N_K είναι τύπου (1,2) και αντισυμμετρικό. Αν $N_k = 0$ τότε το τανυστικό πεδίο K είναι ολοκληρώσιμο.

Η προβολή $\pi : TM \to M$ επάγει μια φύλλωση στην TM με φύλλα τις ίνες $T_pM = \pi^{-1}(p)$ με $dim\pi^{-1}(p) = m$. Αν (x^i, y^i) συντεταγμένες της δέσμης TM τότε τα y^i είναι οι συντεταγμένες πάνω στο εκάστοτε φύλλο ενώ οι x^i είναι οι κάθετες συντεταγμένες. Με τη βοήθεια αυτής της φύλλωσης επάγεται μια ολοκληρώσιμη κατανομή $V : TM \to V_uTM$ με $u \in TM$ όπου V_uTM είναι εφαπτόμενοι χώροι στα φύλλα $\pi^{-1}(p)$. Ο χώρος V_uTM ονομάζεται κάθετη κατανομή της εφαπτόμενης δέσμης. Αποδεικνύεται ότι $V_uTM = ker(\pi_{*,u})$ διότι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης είναι ένας κάθετος υπόχωρος $\pi_{*,u} : T_uTM \to T_{\pi(u)}M$. Επομένως ο χώρος $V_uTM = \cup_{u\in TM} V_uTM$ είναι υποδέσμη της (TTM, τ, TM) την οποία αποκαλούμε κάθετη υποδέσμη. Η δέσμη VTM έχει ίνες τις $V_uTM = span_{\mathbb{R}}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u \right)$ με $dimV_uTM = m$. Τα γεωμετρικά αντικείμενα που ορίζονται στην κάθετη υποδέσμη θα τα ονομάζουμε διακεκριμένα γεωμετρικά αντικείμενα ($d - geometric\ objects$). Το σύνολο όλων των κάθετων διανυσματικών πεδίων $X = X^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ θα το συμβολίζουμε ως $\chi^u(TM)$. Ισχύει ότι το $\chi^u(TM)$ είναι μια πραγματική Lie Άλγεβρα, διότι αν $X, X' \in \chi^u(TM)$ τότε $[X, X'] \in \chi^u(TM)$ και είναι υποάλγεβρα της άλγεβρας $(\chi(TM), [\cdot,\cdot])$. Το πιο σημαντικό κάθετο διανυσματικό πεδίο είναι το $C = y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ το οποίο ονομάζεται διανυσματικό πεδίο $Liouville$ και ορίζεται καθολικά.

Αντίστοιχα ορίζουμε και τη δϋική της T_uTM ως T^*_uTM με βάση $\{\, dx^i|_u\, , \, dy^i|_u\}_{i=1,..,m}$ η οποία είναι και δϋική της $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_u , \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u \right\}_{i=1,..,m}$. Σε αλλαγή χάρτη έχουμε ότι

$$\left\{ d\widetilde{x}^i = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}dx^j, d\widetilde{y}^i = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}dy^j + \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^j}dx^j \right\}_{i=1,..,m} \tag{4.5}$$

Σε κάθε σημείο $u \in TM$, $span(\, dx^i|_u) = V^*_uTM \subseteq T^*TM$ και έτσι μπορούμε να καθορίσουμε μια ομαλή m-διάστατη ολοκληρώσιμη κατανομή $V^* : TM \to V^*_uTM$.

Ορισμός 4.1. Το διανυσματικό πεδίο $Y \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία της κάθετης κατανομής VTM αν $[X, Y] \in \chi^u(TM)\ \forall X \in \chi^u(TM)$

Πρόταση 4.1. *Ένα διανυσματικό πεδίο* $Y = Y^i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} + \widetilde{Y}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ *είναι συμμετρία της κάθετης κατανομής αν και μόνο αν* $Y^i = Y^i(x)$ *δηλαδή το* Y *προβάλλεται στο* M, $\pi_*Y = Y^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Ορίζουμε ως J την εφαπτόμενη δομή της εφαπτόμενης δέσμης ή οποία κάνει την ακολουθία

$$0 \to VTM \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{J} VTM \to 0 \tag{4.6}$$

ακριβή και $kerJ = Imi = VTM$. Σε χάρτη η δομή J έχει τη μορφή

$$J = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i \begin{cases} J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Ιδιότητες :

1. $J^2 = 0$

2. $kerJ = Imi = VTM$

3. Δρα γραμμικά στα διανυσματικά πεδία $X \in TM$

Ο τανυστής $Nijehuis$ για το J είναι $N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y]\ \forall X, Y \in \chi(TM)$ το οποίο προφανώς είναι $N_J(X,Y) = 0$ που σημαίνει ότι το J είναι ολοκληρώσιμο.

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε την συνεφαπτόμενη δομή J^*η οποία δρα στις ένα-μορφές ως εξής

$$J^* = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \begin{cases} J^*(dy^i) = dx^i \\ J^*(dx^i) = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Για την J^*ισχύει επίσης ότι $N_{J^*} = 0$ συνεπώς είναι και αυτή ολοκληρώσιμη. Οι δομές J, J^* ορίζονται καθολικά και συνδέονται μέσω της σχέσης $J^*df(X) = J(X)(f)$ με $f \in C^\infty(TM)$. Για τυχαίο $X \in \chi(TM)$ ο μεταθέτης *Frolicker-Nijehuis* των X, J^*συνδέονται ως $[X, J^*] = [X, J]^*$. Τέλος το J^*μπορεί να επεκταθεί σε μια $\mathcal{F}(TM)-$γραμμική απεικόνιση στο $\Lambda^k(M)$ ως

$$\left(J^*(\omega)\right)(X_1, X_2, .., X_k) = \omega\left(J(X_1), .., J(X_k)\right) \tag{4.9}$$

με $\omega \in \Lambda^k(\mathrm{M})$.

4.1 Κάθετη και πλήρης ανύψωση

Για τη μελέτη της γεωμετρίας της TM χρειάζεται να μεταφέρουμε κάπως πολλά γεωμετρικά αντικείμενα από την M στην TM. Η μεταφορά αυτή επιτυγχάνεται με τη τις φυσικές απεικονίσεις κάθετης($vertical$) και πλήρους($complete$) ανύψωσης($lift$).
Ως κάθετη ανύψωση ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned} l_{v,u} : T_{\pi(u)}M &\rightarrow V_uTM \\ X^i(\pi(u)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_u &\mapsto X^i(\pi(u)) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u \end{aligned}$$

η οποία είναι και ισομορφισμός.
Αν $X \in \chi(TM)$ τότε θα συμβολίζουμε την κάθετη άρση του ως $X^v \in \chi^v(TM)$ και σε χάρτη τα παραπάνω παίρνουν τη μορφή

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad X^v = (X^i)^v \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{4.10}$$

Για μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(M)$ ορίζουμε την κάθετη ανύψωση της ως $f^v := f \circ \pi$. Υπάρχει μια συγκεκριμένη κατηγορία συναρτήσεων οι οποίες παίρνουν σταθερή τιμή πάνω στα φύλλα της κάθετης κατανομής και λέγονται βασικές συναρτήσεις. Αυτές ορίζονται ως $\overline{f} := f^v$ όπου $f \in \mathcal{F}(M)$, δηλαδή μια βασική συνάρτηση είναι η κάθετη ανύψωση μιας τυχαίας συνάρτησης της M.

Η πλήρης ανύψωση μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{F}(M)$ ορίζεται σε χάρτη ως $f^c := y^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. Αντίστοιχα η πλήρης ανύψωση ενός διανυσματικού πεδίου $X \in \chi(M)$ ορίζεται σε χάρτη ως $X^c = (X^i)^c \dfrac{\partial}{\partial x^i} + (X^i)^v \dfrac{\partial}{\partial y^i}$.Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε την κάθετη και πλήρη ανύψωση μιας ένα-μορφής $\omega = \omega_i dx^i \in \Lambda^1(M)$ ως $\omega^v := (\omega_i)^v dy^i$ και $\omega^c := (\omega_i)^c dx^i + (\omega_i)^v dy^i$.

Η εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη δομή συνδέονται με τις ανυψώσεις μέσω της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.2. *Έστω μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(M)$ και ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ τότε*

1)Η f είναι η κάθετη ανύψωση κάποιας συνάρτησης αν και μόνο αν $J^*(df) = 0$

2)Η f είναι το άθροισμα μιας ολόκληρης και μιας κάθετης ανύψωσης αν και μόνο αν $dJ^*(df) = 0$

3)Το διανυσματικό πεδίο X είναι η κάθετη ανύψωση ενός διανυσματικού πεδίου από την M αν και μόνο αν $J(X) = 0$.

4)Το διανυσματικό πεδίο X είναι το άθροισμα μιας πλήρους και μιας κάθετης άρσης αν και μόνο αν $\mathcal{L}_X J = 0$

Παραθέτουμε συνολικά τις ιδιότητες της κάθετης και πλήρους ανύψωσης

1. $(f \cdot g)^c = f^v \cdot g^c + f^c \cdot g^v$, $(fX)^v = f^v X^v$, $(fX)^c = f^v X^c + f^c X^v$

2. $J(X^c) = X^v$, $[X^v, Y^v] = 0$, $[X^v, Y^c] = [X, Y]^v$, $[X^c, Y^c] = [X, Y]^c$

3. $(f\omega)^v = f^v \omega^v$, $(f\omega)^c = f^v \omega^c + f^c \omega^v$, $J^*(\omega^c) = \omega^v$

4. $(df)^v = d(f^v)$, $(df)^c = d(f^c)$

Ένα διανυσματικό πεδίο $X' \in \chi(TM)$ ονομάζεται βασικό εάν είναι π-συσχετισμένο με κάποιο διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(M)$ δηλαδή $X' = \pi_*(X)$. Σε χάρτη έχουμε ότι $X' = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ είναι βασικό εάν X^i, Y^i είναι βασικές συναρτήσεις. Αν X^c είναι πλήρης ανύψωση ενός διανυσματικού πεδίου $X \in \chi(M)$ τότε το X είναι βασικό.

Τέλος έχουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(M)$ είναι συμμετρία της κάθετης κατανομής αν και μόνο αν το X είναι βασικό και βάσει των παραπάνω έχουμε ότι η πλήρης ανύψωση X^c οποιουδήποτε διανυσματικού πεδίου $X \in \chi(M)$ είναι συμμετρία της κάθετης κατανομής.

4.2 Ομογένεια

Μια βασική έννοια που έχει να κάνει με γεωμετρικά αντικείμενα που ορίζονται κατά μήκος καμπυλών είναι η παραμετροποίηση των ίδιων των καμπυλών. Η πιο σημαντική ερώτηση σχετικά με αυτά τα αντικείμενα είναι αν εξαρτώνται ή όχι από την παράμετρο. Η συνθήκη ανεξαρτησίας από την παραμέτρηση ισοδυναμεί με την απαίτηση, αυτά τα γεωμετρικά αντικείμενα να έχουν κάποιο βαθμό ομογένειας αναλόγως με την εκάστοτε γεωμετρία.

Για μια καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ αν αλλάξουμε την παράμετρο από t σε s το πεδίο ταχυτήτων της γίνεται

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{4.11}$$

δηλαδή $\dfrac{d\gamma}{dt} \propto \dfrac{d\gamma}{ds}$.
Αν έχουμε αφινική αλλαγή παραμέτρου ισχύει ότι $t(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ και το πεδίο ταχυτήτων μετασχηματίζεται ως $\overline{x^i} = x^i$ και $\overline{y^i} = ay^i$. Αν συγκρίνουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό με την αλλαγή χάρτη στην TM βλέπουμε ότι η συνάρτηση μετάβασης διατηρεί τον αφινικό μετασχηματισμό για τις συνιστώσες ενός διανυσματικού πεδίου. Συμβολίζουμε ως $\widetilde{TM} := TM - \{0\}$ την οποία δέσμη και θα χρησιμοποιούμε από δω και πέρα αποφεύγοντας έτσι τις παθογένειες που σχετίζονται με την ομογένεια. Αν $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} h_\lambda : TM &\to TM \\ (x, y) &\mapsto h_\lambda(x, y) = (x, \lambda y) \end{aligned} \tag{4.12}$$

το σύνολο $\{h_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα και το διανυσματικό πεδίο που την έχει ως ροή είναι το $C = y^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ (*Liouville*).

Ορισμός 4.2. Μια συνάρτηση $f : TM \to \mathbb{R}$ που είναι διαφορίσιμη στην $\widetilde{TM}$ και μόνο συνεχής στη μηδενική τομή, είναι ομογενής τάξης $r \in \mathbb{Z}$ στις ίνες της TM αν $f \circ h_\lambda = \lambda^r f$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Θεώρημα 4.1. *(Euler για συναρτήσεις)*

Μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(M)$ διαφορίσιμη στην $\widetilde{TM}$ και συνεχής μόνο στην μηδενική τομή είναι ομογενής τάξης r αν και μόνο αν $\mathcal{L}_C f = y^i \dfrac{\partial f}{\partial y^i} = rf$

Επιπλέον ιδιότητες:

1. Αν f_1, f_2 είναι $r-$ομογενείς συναρτήσεις τότε η $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}$ είναι $r-$ομογενής.

2. Αν f_1είναι $r-$ομογενής και f_2 είναι $s-$ομογενής τότε η συνάρτηση $f_1 \cdot f_2$ είναι $r+s$ ομογενής.

Ορισμός 4.3. Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι r – ομογενές αν $X \circ h_\lambda = \lambda^{r-1} h_{*,\lambda} X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$

Θεώρημα 4.2. *Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι r-ομογενές αν και μόνο αν $\mathcal{L}_C X = [C, X] = (r-1)\,X$*

Παρατηρήσεις και ιδιότητες:

1. Τα διανυσματικά πεδία $\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ είναι 1 και 0 τάξης ομογενή.
2. Αν μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(M)$ και ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι ομογενή τάξης r και s αντίστοιχα τότε το διανυσματικό πεδίο fX είναι ομογενές τάξης $r+s$.
3. Αν μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(M)$ και ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι ομογενή τάξης r και s αντίστοιχα τότε η συνάρτηση Xf είναι ομογενής τάξης $r+s-1$.
4. Ένα διανυσματικό πεδίο στη δέσμη, $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ είναι $r-$ομογενές αν και μόνο αν οι συναρτήσεις X^i είναι ομογενείς τάξης $r-1$ και οι Y^i είναι ομογενείς τάξης r.
5. Το διανυσματικό πεδίο *Liouville* C είναι ομογενές τάξης 1.
6. Αν μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(M)$ είναι ομογενής τάξης r τότε οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial f}{\partial y^i}$ είναι ομογενείς τάξης $r-1$.
7. Αν τα διανυσματικά πεδία $X, Y \in \chi(TM)$ είναι ομογενή τάξης r και s τότε $[X,Y]$ είναι ομογενές διανυσματικό πεδίο τάξης $r+s-1$ και επομένως το σύνολο όλων τον διανυσματικών πεδίων που είναι ομογενή τάξης 1 είναι μια υποάλγεβρα *Lie* της $\chi(TM)$.

Για τις $q-$μορφές έχουμε ότι

Ορισμός 4.4. Μια $q-$μορφή $\omega \in \Lambda^q(TM)$ είναι $s-$ομογενής αν $\omega \circ h_a^* = a^s \omega$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 4.3. *Μια $q-$μορφή $\omega \in \Lambda^q(TM)$ είναι $s-$ομογενής αν και μόνο αν*

$$\mathcal{L}_C\omega = s\omega$$

Ιδιότητες και Παρατηρήσεις:

1. Αν $\omega \in \Lambda^q(TM)$ είναι $s-$ομογενής και $\omega' \in \Lambda^q(TM)$ είναι s'-ομογενής τότε $\omega \wedge \omega'$ είναι $s + s'$-ομογενής.

2. Αν $\omega \in \Lambda^q(TM)$ είναι $s-$ομογενής και $X_1, .., X_q$ είναι $r-$ομογενή διανυσματικά πεδία τότε $\omega(X_1, .., X_q)$ είναι μια $s + r - 1$ ομογενής συνάρτηση.

3. Οι ένα-μορφές dx^i είναι 0-ομογενείς ενώ οι dy^i είναι 1-ομογενείς.

4. Αν $\omega \in \Lambda^q(TM)$ και σε χάρτη $\omega = \omega_i dx^i + \theta_i dy^i$ τότε η ω είναι $r-$ομογενής αν και μόνο αν οι ω_i,θ_i είναι $r, r-1-$ομογενείς συναρτήσεις αντίστοιχα.

Ένα τανυστικό πεδίο τύπου (1,s) είναι ομογενές τάξης r να και μόνο αν $\mathcal{L}_C T = (r-1)\, T$. Βασικό παράδειγμα είναι η εφαπτόμενη δομή J που είναι τανυστικό πεδίο τύπου (1,1) και 0-ομογενές.

5 Μη γραμμικές συνοχές

Με την ύπαρξη της κάθετης κατανομής μπορούμε να αποσυνθέσουμε την TTM σε άθροισμα $Whitney$ της μορφής $TTM = HTM \oplus VTM$. Ο χώρος HTM ονομάζεται οριζόντια κατανομή και είναι συμπληρωματική της κάθετης. Ο ρόλος της οριζόντιας κατανομής είναι ουσιώδης διότι επάγεται από μη γραμμικές συνοχές, όπως θα δούμε.

Οι μη γραμμικές συνοχές μπορούν να προκύψουν είτε από ανύψωση γραμμικών ή ομογενών συνοχών από την πολλαπλότητα στη δέσμη είτε από μια έννοια παράλληλης μετατόπισης. Εμείς θα τις εισαγάγουμε μέσω μιας δομής παράλληλης μετατόπισης και να σημειωθεί ότι με τη βοήθεια των δομών αυτών μπορούμε πάντα να ορίσουμε μη γραμμικές συνοχές.

Τέλος θα δούμε μελετώντας τις γεωδαισιακές γραμμικών ή ομογενών συνοχών ότι η γεωμετρία τους είναι ίδια με αυτή των συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως.

5.1 Μη γραμμικές συνοχές στην M

Έστω M, $dimM = m$ μια C^{∞} πολλαπλότητα. Είναι γνωστό πως δεν υπάρχει κανονικός τρόπος ταύτισης δύο εφαπτόμενων χώρων σε διαφορετικά σημεία $p, q \in M$ διότι δεν υπάρχει κανονικός τρόπος ορισμού ισομορφισμών μεταξύ των $T_pM \ncong \mathbb{R}^m$, $T_qM \ncong \mathbb{R}^m$ και επακολούθως μεταξύ των $T_pM \ncong T_qM$. Επί της ουσίας με την έλλειψη ενός τέτοιου ισομορφισμού δεν μπορούμε να συγκρίνουμε δύο διανύσματα σε διαφορετικά σημεία ως προς την παραλληλία. Επομένως για να μιλήσουμε για παραλληλία σε μια πολλαπλότητα θα πρέπει να έχουμε κάποια δομή η οποία θα μπορεί να ταυτίζει εφαπτόμενους χώρους σε διαφορετικά σημεία δεδομένης καμπύλης που ενώνει τα εκάστοτε σημεία. Προφανώς ο τρόπος ταύτισης θα πρέπει να διατηρεί τη γραμμική δομή των εφαπτόμενων χώρων.

Ορίζουμε ως παράλληλη μετατόπιση μια συλλογή από γραμμικούς ισομορφισμούς $c^{\gamma}_{q,p} : T_pM \to T_qM$ με $p, q \in M$ και γ μια λεία καμπύλη που ενώνει τα σημεία p, q έτσι ώστε $c^{\gamma_1}_{r,q} \circ c^{\gamma_2}_{q,p} = c^{\gamma_1 \cup \gamma_2}_{r,q}$. Από τη σχέση αυτή έχουμε ότι αν η γ είναι κλειστή $c^{\gamma}_{r,r} = Id_{T_pM}$ και $\left(c^{\gamma}_{r,r}\right)^{-1} = c^{\gamma^{-1}}_{r,r}$ με γ^{-1} να είναι η καμπύλη γ με αντεστραμμένη φορά.Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό λέμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο X είναι παράλληλο κατά μήκος μιας καμπύλης $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ αν $X(\gamma(t)) = c^{\gamma}_{\gamma(t),\gamma(t_0)} X(\gamma(t_0))$ $\forall t \in I$, η παραπάνω σχέση δεν εξαρτάται από το $X(\gamma(t_0))$.

Η παράλληλη μετατόπιση όπως είδαμε ορίζεται με τη βοήθεια μιας συλλογής από απεικονίσεις που διατηρούν τη γραμμική δομή των εφαπτόμενων χώρων . Αυτό σημαίνει ότι αν X, Y είναι παράλληλα κατά μήκος της καμπύλης γ, που προέκυψαν από την παράλληλη μεταφορά των $X(p), Y(p)$ τότε και τα διανυσματικό πεδίο $aX+bY$ με $a, b \in \mathbb{R}$ είναι παράλληλο εφόσον προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση των $aX(p)+bY(p)$.

Έχοντας τώρα μια δομή παράλληλης μετατόπισης, μπορούμε να ορίσουμε την απόλυτη παράγωγο κατά μήκος μιας λείας καμπύλης γ έτσι ώστε αν ένα διανυσματικό πεδίο είναι παράλληλο κατά την μήκος της γ, η απόλυτη παράγωγός του μηδενίζεται. Αν λοιπόν $X(t) = X(\gamma(t))$ έχουμε για $\varepsilon > 0$ ότι $X_{\parallel}(t+\varepsilon) = c^{\gamma}_{\gamma(t+\varepsilon),\gamma(t)} X(\gamma(t))$ που συμβολίζει την παράλληλη μετατόπιση του $X(t+\varepsilon)$ από το $\gamma(t+\varepsilon)$ στο $\gamma(t)$. Ορίζουμε λοιπόν την απόλυτη παράγωγο ως

$$\begin{aligned}
\frac{DX}{dt} &:= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X_{\parallel}(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon} \\
&= lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X_{\parallel}(t)+\varepsilon\left.\frac{d}{d\varepsilon}X_{\parallel}(t+\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0}-X(t)}{\varepsilon} \\
&= \left.\frac{d}{d\varepsilon}X_{\parallel}(t+\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}c^{\gamma}_{\gamma(t+\varepsilon),\gamma(t)}X(\gamma(t))\right|_{\varepsilon=0} \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό της απόλυτης παραγώγου βλέπουμε ότι για να είναι ένα διανυσματικό πεδίο παράλληλο θα πρέπει $X_{\parallel}(t+\varepsilon) = X(t)$ δηλαδή $\frac{DX}{dt} = 0$. Αξίζει να σημειωθεί πως προς το παρόν, δεν έχει αναφερθεί τίποτα για γραμμικότητα ή ομογένεια οπότε η έννοια του παραλληλισμού και κατ επέκταση η έννοια της απόλυτης παραγώγισης εξαρτώνται από την παραμέτρηση της εκάστοτε καμπύλης.
Για να είναι η παράλληλη μετατόπιση ανεξάρτητη παραμέτρησης θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{DX}{dt} = \frac{DX}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad (5.2)$$

δηλαδή αν είναι ομογενής. Συνδυάζοντας αυτή την υπόθεση με τον ορισμό 5.1 παίρνουμε τις εξής ιδιότητες

$$\begin{aligned} \frac{D(X_1+X_2)}{dt} &= \frac{DX_1}{dt}+\frac{DX_2}{dt} \\ \frac{D(fX)}{dt} &= f\frac{DX}{dt}+\frac{df}{dt}X \end{aligned} \tag{5.3}$$

Για να έχει νόημα ο ορισμός της απόλυτης παραγώγου θα πρέπει η απόλυτη παράγωγος να μην εξαρτάται από την ίδια την καμπύλη αλλά μόνο από τη διεύθυνση της εκάστοτε καμπύλης. Αυτό επιτυγχάνεται αν υποθέσουμε ότι η παράγωγος εξαρτάται μόνο από κάποιο σημείο $P=\gamma(t_0)$ και την ταχύτητα στο σημείο αυτό $\gamma'(t_0)$. Με την παραπάνω υπόθεση μπορούμε να συσχετίσουμε σε κάθε διάνυσμα $Y_p \in T_pM$ και κάθε διανυσματικό πεδίο X κοντά στο p ένα στοιχείο $\nabla_{Y_p}X \in T_pM \ni \nabla_{Y_p}X := \left.\frac{DX}{dt}\right|_{t=0}$ με $\gamma(0)=p$ και $Y_p=\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=0}$. Ονομάζουμε την $\nabla_{Y_p}X$ συναλλοίωτη παράγωγο του διανυσματικού πεδίου X ως προς την κατεύθυνση του Y_p. Θέλουμε επίσης η απεικόνιση $(Y_p,X)\mapsto \nabla_{Y_p}X$ να είναι λεία.

Η απεικόνιση $\nabla:(X,Y)\mapsto \nabla_X Y$ ονομάζεται μη γραμμική συνοχή και σύμφωνα με την 5.3 έχει τις εξής ιδιότητες για $X,Y,Z\in\chi(M)$ και $f\in\mathcal{F}(M)$

1. $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$

2. $\nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+YX(f)$

Αν σε αυτό το σημείο δεν επιβάλλουμε η ∇ αν είναι γραμμική ή ομογενής ως προς το πρώτο όρισμα τότε λέγεται μη γραμμική συνοχή. Ωστόσο θέλουμε να να είναι ομογενής, κοινώς να ικανοποιείται η σχέση 5.3, τότε η ∇ λέγεται ομογενής συνοχή και έχει την επιπλέον ιδιότητα

$$\nabla_{fX}Y=f\nabla_X Y \tag{5.4}$$

Αν τώρα θέλουμε να έχουμε μια γραμμική συνοχή πρέπει εκτός από τα της ομογένειας να κάνουμε και την υπόθεση ότι για συγκεκριμένο διανυσματικό πεδίο X η απεικόνιση $T_pM \ni$

$Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X \in T_pM$ είναι γραμμική. Επομένως μια γραμμική συνοχή ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \nabla_{X+Y}(Z) &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X Y + YX(f) \\ \nabla_{fX} Y &= f\nabla_X Y \end{aligned} \tag{5.5}$$

Η επέκταση δράσης της ∇ σε ένα-μορφές γίνεται μέσω του τύπου

$$(\nabla_X \theta)(Y) + \theta \nabla_X Y = X(\theta(Y)) \tag{5.6}$$

με ακριβώς ανάλογες ιδιότητες όπως οι 5.5.

5.2 Αναπαράσταση συνοχής σε χάρτη

Έστω $(U, \varphi = (x^i))$ χάρτης στην M και $X, Y \in \chi(M)$ με $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ και $Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\nabla_X Y^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \left(\nabla_X Y^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i N_i^j(x, X) \frac{\partial}{\partial x^j} \Rightarrow \\ \nabla_X Y &= \left(X(Y^j) + Y^i N_i^j(x, X) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} := Y^i_{|X} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{5.7}$$

όπου

$$\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} := N_i^j(x, X) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{5.8}$$

$$Y^i_{|X} := X(Y^i) + Y^j N_j^i(x, X) \tag{5.9}$$

Η ποσότητα $Y^i_{|X}$ συμβολίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο της συνάρτησης Y^i ως προς τη διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου X. Οι συναρτήσεις $N_j^i(x, X)$ εξαρτώνται από το σημείο αλλά και από τη διεύθυνση και ονομάζονται τοπικοί συντελεστές της συνοχής ∇. Σε αλλαγή χάρτη $(V, \psi = (\widetilde{x}^i))$ τα $N^i_j(x, X)$ μετασχηματίζονται ως

$$N^i_j \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^k} = \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^i} \widetilde{N}^j_k + X \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i} \tag{5.10}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \nabla_{X^k \frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = X^k \nabla_{\frac{\partial \widetilde{x}^a}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^a}} \left(\frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^b} \right) \\
&= X^k \frac{\partial \widetilde{x}^a}{\partial x^k} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^a}} \left(\frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^b} + \frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^a}} \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^b} \right) \right) \\
&= \nabla_X \left(\frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^b} + \frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \nabla_{\widetilde{X}} \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^b} \right) \\
&= \left(X \left(\frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial \widetilde{x}^e}{\partial x^i} \widetilde{N}^b_e \right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^b} \Rightarrow \\
N^b_i \frac{\partial}{\partial x^b} &= \left(X \left(\frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial \widetilde{x}^e}{\partial x^i} \widetilde{N}^b_e \right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^b} \Rightarrow \\
N^a_i \frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^a} &= X \left(\frac{\partial \widetilde{x}^b}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial \widetilde{x}^e}{\partial x^i} \widetilde{N}^b_e
\end{aligned}$$

□

Μια συνοχή ∇ λέμε ότι είναι

Ομογενής αν και μόνο αν οι τοπικοί συντελεστές της $N^i_j(x, X)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις τάξης 1 ως προς το δεύτερο όρισμα X δηλαδή $N^i_j(x, fX) = fN^i_j(x, X)$ με $f \in \mathcal{F}(M)$.

Γραμμική αν και μόνο αν οι τοπικοί συντελεστές της $N^i_j(x, X)$ είναι γραμμικοί ως προς το δεύτερο όρισμα X δηλαδή $N^i_j(x, X) = \gamma^i_{jk}(x) X^k$ με $\gamma^i_{jk} \in \mathcal{F}(M)$.

Ειδικεύοντας τα παραπάνω στην περίπτωση μιας γραμμικής συνοχής έχουμε ότι

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{5.11}$$

τα οποία γ^i_{jk} σε αλλαγή χάρτη μετασχηματίζονται ως τα συνήθη σύμβολα $Christoffel$

$$\widetilde{\gamma}^i_{jk}\frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^k}\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^a} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \widetilde{x}^i \partial x^\alpha} + \frac{\partial x^k}{\partial \widetilde{x}^i}\gamma^\beta_{\alpha k} \tag{5.12}$$

Για τις ένα-μορφές $\omega = \omega_i dx^i$ χρησιμοποιώντας την 5.6 έχουμε ότι

$$\nabla_X \omega = X(\omega_i) + \omega_i \nabla_X dx^i \tag{5.13}$$

ξαναχρησιμοποιώντας την 5.6 έχουμε ότι

$$\left(\nabla_X dx^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -dx^i\left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -N^i_j(x,X) \tag{5.14}$$

και αυτή με τη σειρά της μας δίνει ότι

$$\nabla_X \omega = \left(X(\omega_j) - N^i_j(x,X)\omega_i\right)dx^j := \omega_{j|X}dx^j \tag{5.15}$$

Να σημειωθεί ότι σε αυτό το σημείο ότι η έννοια της γεωδαισιακής καμπύλης είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια της συνοχής. Πιο συγκεκριμένα λέμε ότι μια καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ είναι γεωδαισιακή για μια συνοχή ∇ αν το $V = \frac{d\gamma}{dt}$ είναι παράλληλο κατά μήκος της καμπύλης γ που σημαίνει ότι $\nabla_V V = 0$ όμως

$$\begin{aligned}
\nabla_V V &= \nabla_V\left(V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&= \nabla_V(V^i)\frac{\partial}{\partial x^i} + V^i \nabla_V\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&= \frac{DV^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + V^i N^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \left(\frac{dV^i}{dt} + V^i N^j_i\right)\frac{\partial}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} \frac{dV^i}{dt} + V^i N_i^j &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2\left(x^i \circ \gamma\right)}{dt^2} + \frac{d\left(x^j \circ \gamma\right)}{dt} N_i^j \left(x, \frac{d\left(x^j \circ \gamma\right)}{dt}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.3 Μη γραμμικές συνοχές στη δέσμη

Όπως είδαμε η κάθετη κατανομή VTM μαζί με την εφαπτόμενη δομή J καθορίζουν την παρακάτω ακριβή ακολουθία

$$0 \to VTM \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{J} VTM \to 0 \tag{5.17}$$

την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την οριζόντια κατανομή.
Μια γραμμική συνοχή στην TM είναι ένας αριστερός διαχωρισμός της ακριβούς ακολουθίας 5.17
Κοινώς μια μη γραμμική συνοχή είναι ένας μορφισμός μεταξύ διανυσματικών δεσμών $v : TTM \to VTM$ τέτοιος ώστε $v \circ i = Id_{VTM}$. Επίσης $kerv = HTM$ που είναι υποδέσμη της (TTM, π_*, TM) και ονομάζεται οριζόντια υποδέσμη. Όπως και στην κάθετη κατανομή έχουμε ότι οι ίνες της VTM, H_uTM για $u \in TM$ καθορίζουν μια ομαλή $m-$διάστατη κατανομή $u \in TM \to H_uTM \subset T_uTM$ η οποία είναι συμπληρωματική της VTM. Επομένως έχοντας και τη μη γραμμική συνοχή μπορούμε να γράψουμε την T_uTM ως

$$T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM \tag{5.18}$$

Θεώρημα 5.1. *Μια μη γραμμική συνοχή στην TM χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μιας υποδέσμης $HTM \subset TTM \ni T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM$.*

Κάνοντας τώρα ένα δεξί διαχωρισμό της ακολουθίας 5.17 και χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μορφισμό Θ της $J : TTM \to VTM$, $J \circ \Theta = Id_{VTM}$ μπορούμε να διαχωρίσουμε την TTM σαν άθροισμα $Whitney$ της κάθετης και οριζόντιας υποδέσμης. Οπότε μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον μορφισμό $v : TTM \to VTM$ στις ίνες, να είναι η ταυτοτική απεικόνιση για κάθετα διανυσματικά πεδία και 0 για οριζόντια.

Θεώρημα 5.2. *Μια μη γραμμική συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη (TTM, π_*, TM) χαρακτηρίζεται από ένα δεξί διαχωρισμό της ακριβούς ακολουθίας $0 \to VTM \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{J} VTM \to 0$, $\Theta : VTM \to TTM$ τέτοιο ώστε $\Theta \circ J = Id_{VTM}$.*

Τελικά έχοντας μια μη γραμμική συνοχή η ακολουθία 5.17 γίνεται

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & VTM \arrow[r, shift right, "i"'] & TTM \arrow[l, shift right, "v"'] \arrow[r, shift right, "J"'] & VTM \arrow[l, shift right, "\Theta"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5.19}$$

με $i \circ v + \Theta \circ J = Id_{TTM}$. Θα συμβολίζουμε μια μη γραμμική συνοχή με N. Ορίζουμε τώρα τους προβολικούς τελεστές που αντιστοιχούν στην ;; καθορίζοντας ότι για $X \in \chi(TM)$ αν $v(X) = X$ τότε το X λέγεται κάθετο διανυσματικό πεδίο ενώ αν $h(X) = X$ οριζόντιο διανυσματικό πεδίο. Συμβολίζουμε ως $\chi^v(TM)$ και $\chi^h(TM)$ τα $\mathcal{F}(M)-$πρότυπα των κάθετων και οριζόντιων διανυσματικών πεδίων αντίστοιχα. Με τη βοήθεια της κάθετης ανύψωσης θα ορίσουμε τώρα την οριζόντια ανύψωση $l_{h,u} : T_{\pi(u)}M \to H_uTM$ ως την αντίστροφη απεικόνιση της $\pi_{*,u} : H_uTM \to T_{\pi(u)}M$ η οποία είναι ισομορφική. Την l_h μπορούμε να τη δούμε ως μια $\mathcal{F}(M)-$γραμμική απεικόνιση $\chi(M) \to \chi(M)$ με τιμή $l_h(X)(u) = l_{h,u}(X_{\pi(u)}) l_{h,u}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\pi(u)}\right)$ με $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \chi(M)$. Θα συμβολίζουμε την οριζόντια ανύψωση ενός διανυσματικού πεδίου X ως $X^h \in \chi^h(TM)$.

Προφανώς η οριζόντια και κάθετη ανύψωση έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους η οποία φαίνεται από το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T_uTM \arrow[r, "J_u"] \arrow[dr, "\pi_{*,u}"'] & T_uTM \\ & T_{\pi(u)}M \arrow[u, "l_{v,u}"'] \end{tikzcd} \tag{5.20}$$

από το οποίο παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} l_{v,u} &= J_u \circ (\pi_{*,u})^{-1} = J_u \circ l_{h,u} \Rightarrow \\ l_v &= J \circ l_h \end{aligned} \tag{5.21}$$

Τώρα πλέον μπορούμε να ορίσουμε βάση για την H_uTM ως εξής $span_{\mathbb{R}}\left\{\left.\frac{\delta}{\delta x^i}\right|_u\right\}_{i=1,..,m}$ όπου $\left.\frac{\delta}{\delta x^i}\right|_u := l_{h,u}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\pi(u)}\right)$. Σε αλλαγή χάρτη έχουμε ότι $\frac{\delta}{\delta x} = l_h\left(\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\right) = \frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x} l_h\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}}\right) \Rightarrow \frac{\delta}{\delta x} = \frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x}\frac{\delta}{\delta \widetilde{x}}$. Εκφράζοντας τώρα το $\frac{\delta}{\delta x^i}$ στη βάση $span_{\mathbb{R}}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_u, \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u\right\}_{i=1,..,m}$ έχουμε ότι είναι της μορφής

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + B_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.22}$$

Εφόσον $span_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}\right\} = HTM$ και δεν έχουμε επιπλέον δεσμούς για τον καθορισμό των συντελεστών B_i^j, ονομάζουμε τα $B_i^j = -N_i^j$ τοπικούς συντελεστές της μη γραμμικής συνοχής διότι το HTM εξαρτάται από αυτούς μέσω του $\frac{\delta}{\delta x^i}$.

Πρόταση 5.1. *Η δομή μιας μη γραμμικής συνοχής στην TM είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός συνόλου απεικονίσεων, σε κάθε χάρτη, της μορφής $N_i^j(x,y)$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούν την παρακάτω σχέση μετασχηματισμού.*

$$\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^k} N_i^k = \widetilde{N}_k^j \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \widetilde{y}^j}{\partial x^j} \tag{5.23}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta x^i} &= \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\frac{\delta}{\delta \widetilde{x}^j} \\
\frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} &= \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j} - \widetilde{N}_j^k \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^k}\right) \overset{\widetilde{y}^n}{\Rightarrow} \\
\frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial y^j} &= \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial \widetilde{x}^j} - \widetilde{N}_j^k \frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial \widetilde{y}^k}\right) \\
\frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial \widetilde{x}^n}{\partial x^j} &= \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial \widetilde{x}^j}} - \widetilde{N}_j^k \frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial \widetilde{y}^k}\right) \Rightarrow \\
N_i^j \frac{\partial \widetilde{x}^n}{\partial x^j} &= \widetilde{N}_j^k \frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial \widetilde{y}^k} + \frac{\partial \widetilde{y}^n}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός 5.23 είναι η ανύψωση του μετασχηματισμού 5.10 στη δέσμη. Συνεπώς μια μη γραμμική συνοχή είναι η ανύψωση μιας συνοχής επαγόμενης από παράλληλη μετατόπιση.

$\square$

5.4 Χαρακτηρισμοί των μη γραμμικών συνοχών

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε με έμμεσο τρόπο τις απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη μη γραμμικών συνοχών. Αυτό θα επιτευχθεί με τη βοήθεια των δομών σχεδόν γινομένου, σχεδόν μιγαδικής και άλλες.

Χρησιμοποιώντας τη βάση $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}\right\}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τη βάση $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ για την TTM η οποία είναι προσαρμοσμένη στον διαχωρισμό $TTM = HTM \oplus VTM$. Αυτή η βάση ονομάζεται βάση $Berwald$ της γραμμικής συνοχής N. Η δϋική της βάσης $Berwald$ είναι $\left\{dx^i, \delta y^i = dy^i + N^i_j dx^j\right\}$ από την οποία έχουμε ότι

$$HTM = \left\{X_u \in T_uTM, \delta y^i(X_u) = 0, \forall i \in \{1, .., n\}\right\} \tag{5.24}$$

Ό,τι κάναμε μέχρι στιγμής έχει και δϋική εκδοχή, δηλαδή έχουμε αντίστοιχα μια δϋική ομαλή $m-$διάστατη οριζόντια συν-κατανομή $H^* : u \in TM \to H^*_uTM \subset T^*_uTM \ni T^*_uTM = H^*_uTM \oplus V^*_uTM$ όπου $H^*_uTM : \left\{\omega_u : T_uTM \to \mathbb{R}, \omega_u\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = 0\right\}$.

Μια οριζόντια ένα-μορφή εκφράζεται σε χάρτη ως $\omega = \omega_i \delta y^i$ ενώ μια κάθετη ως $\omega = \omega_i dx^i$. Έχουμε λοιπόν ότι οι προβολικοί τελεστές και οι δυϊκοί τους h, v εκφράζονται στη βάση $Berwald$ ως

$$h = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^i \qquad v = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \delta y^i \tag{5.25}$$

$$h^* = \delta y^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad v^* = dx^i \otimes \frac{\delta}{\delta x^i} \tag{5.26}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την εφαπτόμενη δομή J στη βάση $Berwald$ προκειμένου να βρούμε τον αντίστροφο μορφισμό $\Theta = J^{-1}$. Με απλή εφαρμογή έχουμε ότι

$$J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0 \qquad J = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i \tag{5.27}$$

Ο περιορισμός $J_u : H_uTM \to V_uTM$ είναι ισομορφισμός και έτσι μπορούμε να μιλήσουμε για τον αντίστροφο μορφισμό $\Theta_u : V_uTM \to H_uTM$, τον οποίο μπορούμε να επεκτείνουμε σε όλη την T_uTM ως $\theta_u := \Theta_u \circ v_u$ δηλαδή

$$\theta = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes \delta y^i \quad \begin{cases} \theta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{\delta}{\delta x^i} \\ \theta\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = 0 \end{cases}$$

Καλούμε τον μορφισμό θ προσαρτημένη δομή και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\theta^2 = 0$, $Im\theta = ker\theta = HTM$

2. $\theta \circ J = h$, $J \circ \theta = v$ και $Id = \theta \circ J + J \circ \theta$

Το σημαντικό είναι ότι αυτές οι δύο ιδιότητες είναι ολικές και καθορίζουν μια μη γραμμική συνοχή.

Πρόταση 5.2 (Δομή $\boldsymbol{\theta}$). *Ένας $\mathcal{F}(M)-$γραμμικός μορφισμός $\theta : \chi(TM) \to \chi(TM)$ τέτοιος ώστε $\theta^2 = 0$ και $Id = \theta \circ J + J \circ \theta$ καθορίζει μια μη γραμμική συνοχή $HTM = ker\theta$*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να εκφράσουμε το θ στη βάση $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ και να δούμε πώς δρα στη βάση $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$. Έχουμε λοιπόν

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.28}$$

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = C_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + D_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.29}$$

$$Id\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \theta \circ J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + J \circ \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{5.30}$$

$$\theta^2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \theta\left(A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \tag{5.31}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στις

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = A_i^j\frac{\partial}{\partial x^j} - A_i^k A_k^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.32}$$

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} - A_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.33}$$

Παρατηρούμε ότι τα A_j^i μετασχηματίζονται όπως οι τοπικοί συντελεστές μιας μη γραμμικής συνοχής. $\square$

Πρόταση 5.3. *Έχοντας μια μη γραμμική συνοχή N στην TM είναι ισοδύναμο με το να έχουμε $\forall u \in TM$ μια γραμμική απεικόνιση $K_u : T_uTM \to T_{\pi(u)}M$ τέτοιο ώστε $K_u \circ J_u = \pi_{*,u}$. Η απεικόνιση K ονομάζεται απεικόνιση συνοχής.*

$\Rightarrow$Από την προηγούμενη πρόταση έχοντας μια μη γραμμική συνοχή σημαίνει ότι έχουμε το μορφισμό θ για τον οποίο ισχύουν

$$\begin{aligned}
\theta^2 &= 0 \\
Id &= \theta \circ J + J \circ \theta \\
\theta_u : V_uTM &\to H_uTM \\
\pi_{*,u} : T_{\pi(u)}M &\to H_uTM
\end{aligned}$$

Και σύμφωνα με τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
T_uTM \arrow[r, "J_u"] \arrow[dr, "\pi_{*,u}"'] & T_uTM \\
& T_{\pi(u)}M \arrow[u, "l_{v,u}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H_uTM \arrow[dr, "\pi_{*,u}"'] & V_uTM \arrow[l, "\theta_u"'] \\
& T_{\pi(u)}M \arrow[u, "l_{h,u}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_uTM \arrow[r, "J_u"'] \arrow[dr, "\pi_{*,u}"] & V_uTM \arrow[l, bend right, "\theta_u"'] \arrow[d, bend left, "K_u"] \\
& T_{\pi(u)}M \arrow[u, "l_{v,u}"] \arrow[ul, bend left, "l_{h,u}"]
\end{tikzcd}$$

είναι ξεκάθαρο ότι πρέπει να ορίσουμε το μορφισμό K ως $K_{*,u} := \pi_{*,u} \circ \theta$ για τον οποίο θα ισχύει ότι $K_u \circ J_u = \pi_{*,u} \circ \theta_u \circ J_u = \pi_{*,u}$.
$\Leftarrow$Έστω ότι $K_u : T_uTM \to T_{\pi(u)}M \ni K_u \circ J_u = \pi_{*,u}$ δηλαδή ισχύει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H_uTM \arrow[r, "J_u"] \arrow[dr, "\pi_{*,u}"'] & V_uTM \arrow[d, "K_u"] \\ & T_{\pi(u)}M \end{tikzcd}$$

Εφόσον η απεικόνιση $\pi_{*,u}$ είναι επιμορφισμός και ο μορφισμός K_u θα είναι τελικά επιμορφισμός $\forall u \in TM$. Συνέπεια αυτού είναι ότι $H_uTM = kerK_u$είναι μια $m-$διάστατη κατανομή. Αντίστοιχα και η $V_uTM = kerJ_u$ είναι μια $m-$διάστατη κατανομή. Λόγω της σχέσης $K_u \circ J_u = \pi_{*,u}$ έχουμε ότι $kerK_u \cap kerJ_u = \emptyset \Rightarrow H_uTM \cap V_uTM = \emptyset$ και επομένως ικανοποιείται η συνθήκη 5.18.

Πρόταση 5.4. *Δεδομένης μιας μη γραμμικής συνοχής N στην TM είναι ισοδύναμο με το να έχουμε έναν $\mathcal{F}(M)$-γραμμικό μορφισμό $P : \chi(TM) \to \chi(TM)$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$J \circ P = J, \qquad P \circ J = -J \tag{5.34}$$

Απόδειξη. $\Rightarrow$Έχοντας λοιπόν μια μη γραμμική συνοχή ορίζουμε το P ως τον $\mathcal{F}(M)$-γραμμικό μορφισμό

$$\begin{aligned} P : \chi(TM) &\to \chi(TM) \\ X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} &\mapsto X^i \frac{\delta}{\delta x^i} - Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned}$$

και με απλή αντικατάσταση βλέπουμε ότι ικανοποιεί τις 5.34

$$\begin{aligned} J \circ P \left(X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) &= J \left(X^i \frac{\delta}{\delta x^i} - Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= J \left(X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} P \circ J \left(X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) &= P \left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \\ &= -X^i \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= -J \left(X^i \frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Έστω ότι $P : \chi(TM) \to \chi(TM)$ είναι $\mathcal{F}(M)$-γραμμικός μορφισμός με ιδιότητες $J \circ P = J$, $P \circ J = -J$. Στη βάση $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ έχει αναπαράσταση

$$P \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.35}$$

$$P \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = C_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + D_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.36}$$

απαιτούμε να ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες

$$
\begin{aligned}
P \circ J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= -J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \Rightarrow \\
P\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y^i} \Rightarrow \begin{cases} C_i^j = 0 \\ D_i^j = -\delta_i^j \end{cases} \\
J \circ P\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) &= J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) \Rightarrow \\
J\left(A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} + N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{\delta}{\delta x^i}\right) &= 0 \overset{J(0)=0(\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\tau\alpha)}{\Rightarrow} \\
\left(A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} + N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{\delta}{\delta x^i}\right) & 0 \Rightarrow \begin{cases} A_i^j = \delta_i^j \\ B_i^j = -2N_i^j \end{cases}
\end{aligned}
$$

επομένως,

$$
P\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} - 2N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.37}
$$

$$
P\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.38}
$$

φαίνεται άμεσα ότι οι συντελεστές $-2N_i^j$ είναι τοπικοί συντελεστές μιας μη γραμμικής συνοχής ακολουθούν το νόμο μετασχηματισμού της σχέσης 5.23. □

Αν ορίσουμε το μορφισμό P όπως στο βήμα $\Rightarrow$ τότε ικανοποιεί και την ταυτότητα $P^2 = 0$ κι έτσι ονομάζεται δομή σχεδόν γινομένου. Έχει λοιπόν την ιδιότητα για την οποία η κατανομή των ιδιόχωρών του που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 να είναι η οριζόντια κατανομή και αντίστοιχα για ιδιοτιμή -1 να είναι η κάθετη κατανομή. Η αναπαράστασή του στη βάση *Berwald* είναι

$$
P = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^i - \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dy^i = h - v \tag{5.39}
$$

Πρόταση 5.5. *Έχοντας μια μη γραμμική συνοχή N στην TM είναι ισοδύναμο με το να δοθεί ένας $\mathcal{F}(M)-$γραμμικός μορφισμός $F : \chi(TM) \to \chi(TM)$ τέτοιος ώστε να ικανοποιεί* *τις σχέσεις*

$$F^2 = -Id \tag{5.40}$$
$$Id = F \circ J + J \circ F \tag{5.41}$$

Απόδειξη. $\Rightarrow$Δεδομένης μη γραμμικής συνοχής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 6.2 και να ορίσουμε το μορφισμό $F = \theta + \alpha J$ με $a \in \mathbb{R}$. Για να ισχύουν οι σχέσεις 5.40 πρέπει

$$\begin{aligned} F^2 &= Id \Rightarrow \\ (\theta + \alpha J) \circ (\theta + \alpha J) &= Id \Rightarrow \\ \theta \circ \theta + \alpha\theta \circ J + aJ \circ \theta + J \circ J &= Id \Rightarrow \\ a\,(\theta \circ J + J \circ \theta) &= Id \Rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

επομένως η επιλογή $a = -1$ μας καθορίζει την F.

$\Leftarrow$Έστω ότι έχουμε ένα μορφισμό $F : \chi(TM) \to \chi(TM)$ με τις ιδιότητες $F^2 = -Id, F \circ J + J \circ F = Id$. Προσπαθούμε να ανακτήσουμε το μορφισμό θ από τον F. Δοκιμάζουμε $F = \theta + aJ$ και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες.

$$\begin{aligned} F^2 &= Id \Rightarrow \\ \theta \circ \theta + \alpha\theta \circ J + aJ \circ \theta + J \circ J &= Id \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \circ J + J \circ F &= Id \\ \theta \circ J + \alpha J^2 + J \circ \theta + aJ^2 &= Id \Rightarrow \\ \theta \circ J + J \circ \theta &= Id \qquad (2) \end{aligned}$$

από τις σχέσεις (1) και (2) βλέπουμε ότι για $a = -1$ ανακτούμε όλες τις ιδιότητες του μορφισμού θ με $\theta = F + J$. □

Η δομή F ονομάζεται σχεδόν μιγαδική δομή της μη γραμμικής συνοχής N και σε αναπαράσταση χάρτη έχει τη μορφή

$$F = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes \delta y^i - \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i \tag{5.42}$$

Παρατηρούμε ότι όπως και η σχεδόν γινόμενο δομή έχει σταθερούς συντελεστές στη βάση *Berwald* έτσι και η F.

5.5 Διακεκριμένα τανυστικά πεδία

Στη μελέτη της γεωμετρίας της TM θα χρειαστεί να μελετήσουμε τανυστικά πεδία στην TM. Αυτά τα τανυστικά πεδία είναι αρκετά περίπλοκα, ωστόσο αν περιοριστούμε στην VTM η κατάσταση αλλάζει και έχουμε τα διακεκριμένα(*distinguished*) τανυστικά πεδία. Συγκεκριμένα αυτά τα πεδία συμπεριφέρονται σαν τα τανυστικά πεδία στην M.

Γενικά ένα γεωμετρικό αντικείμενο είναι $d-$γεωμετρικό αν μπορεί να οριστεί από συνιστώσες οι οποίες είναι προσαρμοσμένες στη διάσπαση 5.18.

Ένα τανυστικό πεδίο T τύπου (r,s) στην TM ονομάζεται $d-$τανυστικό πεδίο αν υπό αλλαγή χάρτη στην TM οι συνιστώσες του αλλάζουν όπως ενός τανυστικού πεδίου στην M. Πιο συγκεκριμένα ένα τανυστικό πεδίο T τύπου (r,s) στην TM είναι ένας $\mathcal{F}(M)-$γραμμικός μορφισμός

$$T : \underbrace{\Lambda^1(TM) \times .. \times \Lambda^1(TM)}_{r} \times \underbrace{\chi(TM) \times .. \times \chi(TM)}_{s}$$

Χρησιμοποιώντας τους προβολικούς τελεστές h, v κάθε $\omega \in \Lambda^1(TM)$, $X \in \chi(TM)$ γράφονται ως $\omega = v^*(\omega) + h^*(\omega)$ και $X = v(X) + h(X)$ οπότε η τιμή του T είναι

$$T(\omega_1, , \omega_r, X_1, , X_s) = T(h^*(\omega_1)+v^*(\omega_1), .., h^*(\omega_r)+v^*(\omega_r), h(X_1)+v(X_1), .., h(X_s)+v(X_s)) \tag{5.43}$$

το οποίο είναι το άθροισμα 2^{r+s} όρων. Κάθε ένας από αυτούς τους όρους είναι ένα d-τανυστικό πεδίο στην TM. Έχουμε επομένως ότι ένα τανυστικό πεδίο T είναι ένα d-τανυστικό πεδίο τύπου (r,s) αν και μόνο αν απλοποιείται σε ένα μόνο όρο από τους 2^{r+s} πιθανούς όρους. Αυτό σημαίνει ότι το T είναι d-τανυστικό πεδίο τύπου (r,s) αν

$$T(\omega_1,,\omega_r,X_1,,X_s)=T(\varepsilon_1\omega^1,..,\varepsilon_r\omega^r,\varepsilon^1X_1,..,\varepsilon^sX_s)$$

για κάποια επιλογή των $\varepsilon_1,..,\varepsilon_r,\varepsilon^1,..,\varepsilon^s\in\{h,v\}$.Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός d-τανυστικού πεδίου είναι ο μετρικός τανυστής στην TM, $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ διότι $g(X,Y)=g(hX+vX,hY+vY)=g(hX,hY)$. Αντίστοιχα έχουμε και άλλες δύο παραλλαγές του g στην TM τους $g^v=g_{ij}\delta y^i\otimes\delta y^j$ και $g^d=g_{ij}dx^i\otimes\delta y^j$ οι οποίες κατασκευάζονται από το g και είναι d-τανυστικά πεδία διότι

$$g^v(hX+vX,hY+vY) = g^v(vX,vY) \tag{5.44}$$
$$g^d(hX+vX,hY+vY) = g^d(hX,vY) \tag{5.45}$$

Αν έχουμε ένα $d-$τανυστικό πεδίο σαν το g το οποίο είναι συμμετρικό και $rank\,(g_{ij})=dimM=m$ τότε θα λέγεται μετρικό $d-$τανυστικό πεδίο ή γενικευμένη μετρική $Lagrange$. Μερικά άλλα βασικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} J= &\ \frac{\partial}{\partial y^i}\otimes dx^i && (1,1)\ d\text{-τανυστικό πεδίο}\\ X= &\ X^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} && (1,0)\ d\text{-τανυστικό πεδίο}\\ \omega= &\ \omega_i(x,y)dx^i && (0,1)\ d\text{-τανυστικό πεδίο}\end{aligned}$$

5.6 Καμπυλότητα και στρέψη της N

Οι δομές Θ,K,P και F χαρακτηρίζουν έμμεσα μια μη γραμμική συνοχή. Ωστόσο μια συνοχή σχετίζεται και με την έννοια της ολοκληρωσιμότητας η οποία εμπλέκει όπως θα δούμε και άλλα γεωμετρικά αντικείμενα.

Έστω κατά τα γνωστά N μια μη γραμμική συνοχή, σύμφωνα με το θεώρημα του $Frobenius$ η N είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η αντίστοιχη οριζόντια κατανομή είναι ενελικτική δηλαδή η $\chi^h(TM)$ είναι υποάλγεβρα Lie της $\chi(TM)$. Εφόσον για τυχαίο χάρτη $span\left\{\dfrac{\delta}{\delta x^i}\right\}=\chi^h(TM)$ τα $\left\{\dfrac{\delta}{\delta x^i}\right\}$ είναι οι γεννήτορες της άλγεβρας Lie, $\chi(TM)$ κι επομένως η N είναι ολοκληρώσιμη αν $\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] \in \chi^h(TM)$. Αυτός ο μεταθέτης στην ουσία μας ορίζει και τον τανυστή καμπυλότητας

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] := R^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k} \tag{5.46}$$

Απόδειξη. Για $f \in \mathcal{F}(TM)$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] f = \frac{\delta}{\delta x^i}\frac{\delta}{\delta x^j} f - \frac{\delta}{\delta x^j}\frac{\delta}{\delta x^i} f = \frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} - N^l_j\frac{\partial f}{\partial y^l}\right) - \frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - N^l_i\frac{\partial f}{\partial y^l}\right) \tag{5.47}$$

$$\frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} - N^l_j\frac{\partial f}{\partial y^l}\right) = \frac{\delta}{\delta x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\delta N^l_j}{\delta x^i}\frac{\partial f}{\partial y^j} - N^l_j\frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial y^l}\right) \tag{5.48}$$

$$\frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - N^l_i\frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial x^j} \tag{5.49}$$

$$N^l_j\frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial y^l}\right) = N^l_j\frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial x^i} - N^l_j N^{l'}_i\frac{\partial^2 f}{\partial y^{l'} \partial y^l} \tag{5.50}$$

έχουμε λοιπόν ότι η 5.48 λόγω των 5.49 και 5.50 γίνεται

$$\frac{\delta}{\delta x^i}\frac{\delta f}{\delta x^j} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - N^j_i\frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial x^j}\right) - \frac{\delta N^l_j}{\delta x^i}\frac{\partial f}{\partial y^l} - N^l_j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^l} - N^l_j N^{l'}_i\frac{\partial^2 f}{\partial y^{l'} \partial y^l} \tag{5.51}$$

ό,τι είναι συμμετρικό ως προς $i \leftrightarrow j$ μηδενίζεται λόγω αντισυμμετρίας του μεταθέτη και η

5.47 γίνεται

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] f = N_i^l \frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial x^j} - \frac{\delta N_j^l}{\delta x^i}\frac{\partial f}{\partial y^l} - N_j^l \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^l} + N_i^l \frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial x^j}$$
$$+ \frac{\delta N_i^l}{\delta x^j}\frac{\partial f}{\partial y^l} + N_i^l \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l} \Rightarrow$$
$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] f = \left(\frac{\delta N_i^l}{\delta x^j} - \frac{\delta N_j^l}{\delta x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial y^l} \Rightarrow$$
$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] = \left(\frac{\delta N_i^l}{\delta x^j} - \frac{\delta N_j^l}{\delta x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^l} = R_{ij}^l \frac{\partial}{\partial y^l}$$

□

Επομένως μόνο αν ισχύει $R_{ij}^l = 0$ έχουμε ότι $\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] \in \chi^h(TM)$ και επακολούθως η N είναι ολοκληρώσιμη.
Ορίζουμε τον τανυστή καμπυλότητας μιας μη γραμμικής συνοχής N ως

$$R = -N_h = -\frac{1}{2}[h, h] \tag{5.52}$$

όπου h κατά τα γνωστά ο οριζόντιος προβολικός τελεστής και N_h ο τανυστής $Nijehuis$ του h. Σε χάρτη έχουμε ότι

$$R = \frac{1}{2} R_{ij}^k dx^j \wedge dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{5.53}$$

Απόδειξη. Έστω $X, Y \in \chi(TM)$ τότε έχουμε

$$N_h(X, Y) = [h(X), h(Y)] + h^2[X, Y] - h[X, h(Y)] - h[h(X), Y] \tag{5.54}$$

υπολογισμός $[h(X), h(Y)]$

$$\begin{aligned}
[h(X), h(Y)] &= \left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] \Rightarrow \\
[h(X), h(Y)] &= \left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] + \left(X^h\right)^i \frac{\delta \left(Y^h\right)^j}{\delta x^i} \frac{\delta}{\delta x^j} \\
&\quad - \left(Y^h\right)^j \frac{\delta \left(X^h\right)^i}{\delta x^j} \frac{\delta}{\delta x^i}
\end{aligned} \tag{5.55}$$

υπολογισμός $h^2[X, Y]$

$$\begin{aligned}
h^2[X, Y] &= \left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i} + \left(X^\nu\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j} + \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] \Rightarrow \\
h^2[X, Y] &= \left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] + \left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] \\
&\quad + \left[\left(X^\nu\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] + \left[\left(X^\nu\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right]
\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] &= \left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] + \left(X^h\right)^i \frac{\delta \left(Y^h\right)^j}{\delta x^i} \frac{\delta}{\delta x^j} \\
&\quad - \left(Y^h\right)^j \frac{\delta \left(X^h\right)^i}{\delta x^j} \frac{\delta}{\delta x^i}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

και δρώντας με τον h στην 5.57 έχουμε ότι

$$h\left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] = \left(X^h\right)^i \frac{\delta \left(Y^h\right)^j}{\delta x^i} \frac{\delta}{\delta x^j} - \left(Y^h\right)^j \frac{\delta \left(X^h\right)^i}{\delta x^j} \frac{\delta}{\delta x^i} \tag{5.58}$$

συνεχίζουμε υπολογίζοντας τους επόμενους όρους

$$
\begin{aligned}
\left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] &= \left(X^h\right)^i \left(Y^\nu\right)^j \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] - \left(X^h\right)^i \frac{\delta\left(Y^\nu\right)^j}{\delta x^i}\frac{\partial}{\partial y^j} \\
&\quad - \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial\left(X^h\right)^i}{\partial y^j}\frac{\delta}{\delta x^i} \\
\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^a\frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = \frac{\partial N_i^a}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^a} && (5.59) \\
h\left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] &= - \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial\left(X^h\right)^i}{\partial y^j}\frac{\delta}{\delta x^i} && (5.60) \\
\left[\left(X^\nu\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] &= \left(X^\nu\right)^i \left(Y^h\right)^j \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] + \left(X^\nu\right)^i \frac{\partial\left(Y^h\right)^j}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^j} \\
&\quad - \left(Y^h\right)^j \frac{\delta\left(X^\nu\right)^i}{\delta x^j}\frac{\partial}{\partial y^i} \\
h\left[\left(X^\nu\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] &= \left(X^\nu\right)^i \frac{\partial\left(Y^h\right)^j}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^j} && (5.61) \\
h\left[\left(X^\nu\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] &= 0 && (5.62)
\end{aligned}
$$

οπότε η 5.56 λόγω των 5.58, 5.60, 5.61 και 5.62 γίνεται

$$
\begin{aligned}
h^2[X,Y] \;=\; & \left(X^h\right)^i \frac{\delta\left(Y^h\right)^j}{\delta x^i}\frac{\delta}{\delta x^j} - \left(Y^h\right)^j \frac{\delta\left(X^h\right)^i}{\delta x^j}\frac{\delta}{\delta x^i} \\
& + \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial\left(X^h\right)^i}{\partial y^j}\frac{\delta}{\delta x^i} + \left(X^\nu\right)^i \frac{\partial\left(Y^h\right)^j}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^j} \qquad (5.63)
\end{aligned}
$$

υπολογισμός $h[X,h(Y)]$

$$
\begin{aligned}
h[X,h(Y)] &= h\left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] + h\left[\left(X^\nu\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] \\
&= 5.58 + 5.61 \Rightarrow \\
h[X,h(Y)] &= \left(X^h\right)^i \frac{\delta\left(Y^h\right)^j}{\delta x^i}\frac{\delta}{\delta x^j} - \left(Y^h\right)^j \frac{\delta\left(X^h\right)^i}{\delta x^j}\frac{\delta}{\delta x^i} - \left(X^\nu\right)^i \frac{\partial\left(Y^h\right)^j}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^j} \qquad (5.64)
\end{aligned}
$$

υπολογισμός $h[h(X),Y]$

$$\begin{aligned} h[h(X),Y] &= \left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^h\right)^j \frac{\delta}{\delta x^j}\right] + \left[\left(X^h\right)^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial}{\partial y^j}\right] \\ &= 5.58 + 5.60 \Rightarrow \\ h[h(X),Y] &= \left(X^h\right)^i \frac{\delta\left(Y^h\right)^j}{\delta x^i} \frac{\delta}{\delta x^j} - \left(Y^h\right)^j \frac{\delta\left(X^h\right)^i}{\delta x^j} \frac{\delta}{\delta x^i} - \left(Y^\nu\right)^j \frac{\partial\left(X^h\right)^i}{\partial y^j} \frac{\delta}{\delta x^i} \end{aligned} \tag{5.65}$$

οπότε η 5.54 λόγω 5.55, 5.56, 5.64 και 5.65 τελικά γίνεται

$$\begin{aligned} N_h(X,Y) &= -\frac{1}{2}\left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] - \frac{1}{2}\left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j R^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= -\frac{1}{2}\left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j R^k_{[ij]} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= -\frac{1}{2}\left(X^h\right)^{[i} \left(Y^h\right)^{j]} R^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^j(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(dx^i(X)dx^j(Y) - dx^i(Y)dx^j(X)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j - \left(X^h\right)^j \left(Y^h\right)^i\right) \\ &= \left(X^h\right)^{[i} \left(Y^h\right)^{j]} \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} N_h(X,Y) &= -\frac{1}{2} dx^i \wedge dx^j(X,Y) R^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= \left(-\frac{1}{2} R^k_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}\right)(X,Y) \Rightarrow \\ R &= -\frac{1}{2} N_h = -\frac{1}{2} R^k_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} \end{aligned}$$

$\square$

Ορίζουμε επίσης την ασθενή στρέψη ως το (1,2) αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο ως

$$t(X,Y) = J[h(X),Y] - v[h(X),J(Y)] - v[J(X),h(Y)] \tag{5.66}$$

με αναπαράσταση σε χάρτη

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N^i_j}{\partial y^k} - \frac{\partial N^i_k}{\partial y^j}\right) dx^k \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} := t^i_{jk} dx^k \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε κάθε όρο της 5.66

$$\begin{aligned}
J[h(X),Y] &= \cancel{\left(X^h\right)^i \frac{\delta \left(Y^\nu\right)^j}{\delta x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}} - \cancel{\left(Y^h\right)^j \frac{\delta \left(X^h\right)^i}{\delta x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}} \\
v[h(X),J(Y)] &= \left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \frac{\partial N^a_i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^a} + \cancel{\left(X^h\right)^i \frac{\delta \left(Y^\nu\right)^j}{\delta x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}} \\
v[J(X),h(Y)] &= \left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \frac{\partial N^a_j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^a} + \cancel{\left(Y^h\right)^j \frac{\delta \left(X^h\right)^i}{\delta x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}}
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}
t(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \left(\frac{\partial N^a_j}{\partial y^i} - \frac{\partial N^a_i}{\partial y^j}\right) \frac{\partial}{\partial y^a} \\
&= \frac{1}{2} t^a_{ji} \left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{1}{2} t^a_{[ji]} \left(X^h\right)^i \left(Y^h\right)^j \frac{\partial}{\partial y^a} \\
&= \frac{1}{2} t^a_{ji} \left(X^h\right)^{[i} \left(Y^h\right)^{j]} \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{1}{2} t^a_{ji} dx^i \wedge dx^j (X,Y) \frac{\partial}{\partial y^a} \Rightarrow \\
t &= \frac{1}{2} t^a_{ji} dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}
\end{aligned}$$

□

Είναι προφανές ότι $J \circ t = 0$ και έχουμε κάποιου είδους ταυτότητα *Bianchi*

$$t(JX,Y) = t(JX,Y) = 0 \qquad \forall X,Y \in \chi(TM) \tag{5.67}$$

λέμε λοιπόν ότι μια μη γραμμική συνοχή N είναι συμμετρική αν

$$t = 0 \Rightarrow t^a_{ji} = 0 \Rightarrow \frac{\partial N^a_j}{\partial y^i} = \frac{\partial N^a_i}{\partial y^j} \tag{5.68}$$

Τα τανυστικά πεδία $Nijehuis$ για τις δομές Θ, F και P είναι

$$\begin{aligned} N_\Theta = N_F &= \frac{1}{2} t^a_{ji} \delta y^k \wedge \delta y^i \otimes \frac{\delta}{\delta x^i} + \frac{1}{2} R^i_{jk} \delta y^k \wedge \delta y^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \\ N_P &= 4 R^k_{ji} dx^j \wedge dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} \end{aligned}$$

Θεώρημα 5.3. *(Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας μη γραμμικών συνοχών N)*

Μια μη γραμμική συνοχή N

1)Είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $N_P = 0$

2)Η οποία είναι επιπλέον συμμετρική είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $N_F = 0$

5.7 Δυναμική Συναλλοίωτη παράγωγος

Μια μη γραμμική συνοχή N μπορεί να καθορίσει ένα είδος συναλλοίωτης παραγώγου που λέγεται δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος. Η εισαγωγή αυτής της δομής έχει να κάνει με τη μελέτη των διανυσματικών πεδίων $Jacobi$ που αντιστοιχούν στις γεωδαισιακές καμπύλες της εκάστοτε μη γραμμικής συνοχής N.

Ορισμός 5.1. Η δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος που επάγεται από μια μη γραμμική συνοχή N είναι η απεικόνιση

$$\nabla : \chi^v(TM) \to \chi^v(TM) \tag{5.69}$$

η οποία σε χάρτη έχει αναπαράσταση

$$\nabla \left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} y^j - \frac{\partial X^i}{\partial y^j} N^j_k y^k + N^i_j X^j \right) \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{5.70}$$

Συμβολίζουμε τώρα ως

$$S := y^i \frac{\delta}{\delta x^i} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{5.71}$$

το οποίο είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται ολικά στη δέσμη και με τη βοήθεια του μπορούμε να γράψουμε τη δράση της ∇ ως

$$\nabla \left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \left(S(X^i) + N^i_j X^j \right) \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{5.72}$$

Αν $f \in \mathcal{F}(M)$ και X^i συνιστώσες ενός $d-$διανυσματικού πεδίου τότε

$$\begin{array}{lr} \nabla f = S(f) = f_{|} & \nabla X^i = S(X^i) + N^i_j X^j := X^i_{|} \\ S(X^i) + N^i_j X^j := X^i_{|} \nabla f^v = f^c & \nabla X^v = v X^c \\ X = \dfrac{\partial}{\partial y^i} & \nabla \dfrac{\partial}{\partial y^i} = N^j_i \dfrac{\partial}{\partial y^j} \end{array} \tag{5.73}$$

Ιδιότητες του τελεστή ∇:

1. $\nabla(X+Y) = \nabla X + \nabla Y \ \forall X, Y \in \chi^v(TM)$

2. $\nabla(fX) = S(f)X + f\nabla X \ \forall f \in \mathcal{F}(M), \forall X \in \chi^v(TM)$

3. $\nabla g(X,Y) = S(g(X,Y)) - g(\nabla X, Y) - g(X, \nabla Y)$, όπου $g = g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j$ είναι ένα (0,2) $d-$τανυστικό πεδίο για το οποίο σε χάρτη έχουμε την αναπαράσταση

$$\begin{aligned} \nabla g \left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) &= S \left(g \left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \right) - g \left(\nabla \left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right), Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \\ &\quad - g \left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \nabla \left(Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \right) \\ &= S(X^i) Y^j g_{ij} + X^i S(Y^j) g_{ij} + X^i Y^j S(g_{ij}) - S(X^i) Y^j g_{ij} \\ &\quad - N^i_k X^k Y^j g_{ij} - X^i S(Y^j) g_{ij} - X^i N^j_a Y^a g_{ij} \Rightarrow \\ \nabla g \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) &:= g_{ij|} = S(g_{ij}) - N^a_i g_{aj} - N^a_j g_{ia} \end{aligned} \tag{5.74}$$

Ορισμός 5.2. (Συνθήκη μετρικής συμβατότητας)

Μια μη γραμμική συνοχή N καλείται μετρική ως προς ένα $d-$μετρικό τανυστικό πεδίο g αν $\nabla g = 0$.

Σε χάρτη το παραπάνω έχει αναπαράσταση $S(g_{ij}) - N_i^a g_{aj} - N_j^a g_{ia} = 0 \Rightarrow S(g_{ij}) = N_i^a g_{aj} - N_j^a g_{ia} \Rightarrow N_{(ij)} = \frac{1}{2}S(g_{ij})$ δηλαδή έχουμε μετρική συμβατότητα αν και μόνο αν το συμμετρικό μέρος τον συντελεστών της μη γραμμικής συνοχής N είναι $\frac{1}{2}S(g_{ij})$.

Μπορούμε να κάνουμε επέκταση της δυναμικής συναλλοίωτης παραγώγου σε όλο τη δέσμη συνθέτοντάς τη με την κάθετη ανύψωση ως εξής

$$\begin{aligned} \nabla^v := \nabla \circ l_v : \chi(TM) &\rightarrow \chi^v(TM) \\ X &\mapsto \nabla^v(X) = v(X^c) \end{aligned} \tag{5.75}$$

σε χάρτη

$$\begin{aligned} \nabla^v(X) &= \nabla^v\left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right) = v\left(\left(X^i\right)^c \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(X^i\right)^v \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \\ &= \left(X^i\right)^v \frac{\partial}{\partial y^i} = \nabla X^i \frac{\partial}{\partial y^i} := \left(\nabla^v X\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Rightarrow \\ \nabla^v(X) &= \left(\nabla^v X\right)^i \frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned} \tag{5.76}$$

με

$$\begin{aligned} \left(\nabla^v X^i\right) &= \nabla X^i = S(X^i) + N^i_j X^j \\ &= y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} - N^j_k \underset{X^i:M\rightarrow\mathbb{R}}{\cancelto{0}{\frac{\partial X^i}{\partial y^j}}} y^k + N^i_j X^j \Rightarrow \\ \left(\nabla^v X^i\right) &= y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + N^i_j X^j \end{aligned} \tag{5.77}$$

Ιδιότητες ∇^v:

1. $\nabla^v(X+Y) = \nabla^v X + \nabla^v Y, \forall X, Y \in \chi(TM)$

2. $\nabla^v(fX) = f^c X^v + f^v \nabla^v X, \forall f \in \mathcal{F}(M), X \in \chi(TM)$

3. Αν $X \in \chi(TM)$ τότε $X^c = l_h(X) + \nabla^v(X)$

Επεκτείνουμε πλήρως την ∇ στη δέσμη $\nabla : \chi(TM) \to \chi(TM)$ με τη βοήθεια της σχέσης

$$\nabla(X) := \nabla(hX + vX) := \Theta\nabla J(hX) + \nabla(vX) \tag{5.78}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\nabla v = \nabla h = \nabla J = \nabla P = \nabla F = \nabla\Theta = 0$ όλες οι δομές που σχετίζονται με την ύπαρξη μιας μη γραμμικής συνοχής N, είναι παράλληλες ως προς την ∇ και ως συνέπεια των παραπάνω η ∇ διατηρεί την κάθετη και οριζόντια κατανομή.

Απόδειξη. Κάνοντας απλές πράξεις έχουμε ότι

$$1)(\nabla v)(X) = \nabla(vX) - v\nabla X = \nabla(vX) - v\nabla(hX + vX) = -v\nabla(hX) = \underbrace{\cancelto{0}{-v\Theta\nabla JX}}_{v\circ\Theta=0}$$

$$2)(\nabla h)(X) = \nabla(hX) - h\nabla X = \nabla((Id - v)X) = \nabla X - \nabla(vX) = 0$$

$$3)(\nabla J)(X) = \nabla(JX) - J\nabla X = \underbrace{\nabla(JhX)}_{J\circ h=J} + \underbrace{\cancelto{0}{\nabla(JvX)}}_{J\circ v=0} - J\nabla(hX) - \underbrace{\cancelto{0}{J\nabla(vX)}}_{\nabla(vX)\in\chi^v(TM)} \Rightarrow$$
$$(\nabla J)(X) = \nabla(JX) - J\Theta\nabla(JhX) = \nabla(JX) - v\nabla(JX) = 0$$

$$4)(\nabla P)(X) = (\nabla(h - v))(X) = (\nabla h)(X) - (\nabla v)(X) = 0$$

$$5)(\nabla F)(X) = \nabla(FX) - F\nabla X = \nabla(FhX) + \nabla(FvX) - F\nabla hX - F\nabla vX \Rightarrow$$
$$(\nabla F)(X) = \underbrace{\cancelto{0}{\nabla(\Theta hX)}}_{\Theta\circ h=0} - \cancel{\nabla(JhX)} + \nabla(\Theta vX) - \underbrace{\cancelto{0}{\nabla(JvX)}}_{J\circ v=0} - \underbrace{\cancelto{0}{\Theta\nabla(hX)}}_{\Theta^2=0} + \cancel{J\nabla(hX)}$$
$$-\Theta\nabla(vX) + \underbrace{\cancelto{0}{J\nabla(vX)}}_{\nabla(vX)\in\chi^v(TM)} \Rightarrow$$
$$(\nabla F)(X) = -\cancelto{0}{\nabla J(hX)} + \nabla(\Theta vX) - \Theta\nabla(vX) = \Theta\nabla J(\Theta vX) - \Theta\nabla(vX) \Rightarrow$$
$$(\nabla F)(X) = \Theta\left(\nabla\left(J\Theta vX\right) - J\nabla(\Theta vX) - \nabla(vX)\right) = \Theta(\nabla vX - \nabla vX) \Rightarrow$$
$$(\nabla\Theta)(X) = 0 \text{ και άρα } \nabla F(X) = 0$$

□

5.8 Αυτοπαράλληλες καμπύλες

Έχοντας κάνει την εισαγωγή της δυναμικής συναλλοίωτης παραγώγου μπορούμε πλέον να καθορίσουμε τις εξισώσεις των αυτοπαράλληλων καμπυλών μιας μη γραμμικής συνοχής N.

Ορισμός 5.3. Μια ομαλή καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ θα λέγεται αυτοπαράλληλη καμπύλη της μη γραμμικής συνοχής N αν η φυσική ανύψωση της στη δέσμη $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \supseteq I \to \widetilde{\gamma}(I) \subseteq TM$ είναι μια οριζόντια καμπύλη δηλαδή $\dfrac{d\widetilde{\gamma}}{dt} \in \chi^h(TM)$.

Η αναπαράσταση της $\widetilde{\gamma}$ σε χάρτη έχει τη μορφή

$$\widetilde{\gamma}(t) = \left((x \circ \gamma)(t), \frac{d(x \circ \gamma)}{dt}\right) = \left(x(t), \frac{dx}{dt}\right) \tag{5.79}$$

Όπως δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο η εξίσωση των αυτοπαράλληλων καμπυλών μιας μη γραμμικής συνοχής δίνεται από τις εξισώσεις 5.16 οι οποίες γράφονται πιο κομψά ως

$$\nabla\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0 \tag{5.80}$$

Κάνουμε μεταβολή της καμπύλης γ κατά ε δηλαδή $c(t) = x(t) + \varepsilon\xi(t)$ με ξ κατά μήκος της καμπύλης γ, αυτή η μεταβολή τροποποιεί τις 5.16 ως εξής

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x^i}{dt^2} + \widetilde{N^i_j}\frac{d}{dt}\left(x^i(t) + \varepsilon\xi^i(t)\right) = 0\\
&\widetilde{N^i_j} = N^i_j + \frac{\partial N^i_j}{\partial x^k}\varepsilon\xi^k + \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}\varepsilon\frac{d\xi^k}{dt}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη μια στην άλλη

$$\left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + N^i_j\frac{dx^i}{dt}\right) + \varepsilon\left(\frac{d^2\xi^i}{dt^2} + \xi^k\frac{\partial N^i_j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + \frac{d\xi^k}{dt}\frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}\frac{dx^j}{dt} + N^i_j\frac{d\xi^j}{dt}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} + \xi^k\frac{\partial N^i_j}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + \frac{d\xi^k}{dt}\frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}\frac{dx^j}{dt} + N^i_j\frac{d\xi^j}{dt} = 0 \tag{5.81}$$

οι τελευταίες ονομάζονται εξισώσεις μεταβολής.

Θεώρημα 5.4. ***(Εξισώσεις Jacobi)***

Μια ισοδύναμη μορφή των εξισώσεων μεταβολής 5.81 είναι οι εξισώσεις Jacobi

$$\nabla^2 \xi^i + \left(\frac{\partial N_j^i}{\partial y^k} \frac{dx^j}{dt} - N_k^i \right) \nabla \xi^k + R_{jk}^i \frac{dx^k}{dt} \xi^j = 0 \tag{5.82}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο ξ κατά μήκος της καμπύλης γ λέγεται διανυσματικό πεδίο *Jacobi* αν ικανοποιεί τις εξισώσεις μεταβολών. Μια πιο κομψή και ισοδύναμη εκδοχή των εξισώσεων 5.82 δίνεται από

$$a_j^i \frac{dx^j}{dt} = \mathcal{L}_{\xi^c} N_j^i \frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{5.83}$$

με a_j^i να είναι συνιστώσες ενός (1,1) $d-$τανυστικού πεδίου που σε χάρτη έχει αναπαράσταση

$$a_j^i \left(x, \frac{dx}{dt}, \xi(t) \right) = \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} y^k - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} N_j^k + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} N_k^i + \frac{\partial N_j^i}{\partial y^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^r} y^r \tag{5.84}$$

και

$$\mathcal{L}_{\xi^c} \left(N_j^i \right) = X^c(N_j^i) + N_k^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} - N_j^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} y^k \tag{5.85}$$

5.9 Συμμετρίες μιας μη γραμμικής συνοχής N

Ως συμμετρία μιας μη γραμμικής συνοχής N καλούμε τα ολικά διανυσματικά πεδία των οποίων οι περιορισμοί σε μια αυτοπαράλληλη καμπύλη της N είναι διανυσματικά πεδία *Jacobi*.

Ορισμός 5.4. (Συμμετρίες)

1)Ένας διαφορομορφισμός φ της TM είναι ένας μετασχηματισμός της N που διατηρεί την HTM δηλαδή $\forall u \in TM$, $\varphi_{*,u}(H_u TM) = H_{\varphi(u)} TM$.

2)Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι μια συμμετρία *Lie* της N αν $\mathcal{L}_{X^c} Y = [X^c, Y] \in \chi^h(TM)$, $\forall Y \in \chi^h(TM)$.

3)Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι μια δυναμική συμμετρία της N αν $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \in \chi^h(TM)$, $\forall Y \in \chi^h(TM)$.

4)Μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(TM)$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα της N αν $Y(f) = 0$, $\forall Y \in \chi^h(TM)$ και για να συμβαίνει αυτό πρέπει $df(Y) = 0 \Rightarrow df \in H^*TM$ δηλαδή $df = (df)_i \delta y^i$.

Παρατήρηση 5.1.

1)Συνδυάζοντας τα 2),3) έχουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι μια συμμετρία *Lie* μιας μη γραμμικής συνοχής N αν και μόνο αν το X^c είναι μια δυναμική συμμετρία της N.

2)Συνδυάζοντας τα 1),3) έχουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία μιας μη γραμμικής συνοχής N αν και μόνο αν η ροή του φ_t ικανοποιεί την 1)

3)Αν $f \in \mathcal{F}(M)$ είναι πρώτο ολοκλήρωμα της μη γραμμικής συνοχής N τότε η f είναι σταθερή κατά μήκος των αυτοπαράλληλων καμπυλών.

Θεώρημα 5.5. *Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία μιας μη γραμμικής συνοχής N αν και μόνο αν ικανοποιείται μια από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες*

1)$\mathcal{L}_X P(Y) = 0$, $\forall Y \in \chi^h(TM)$ που σημαίνει ότι $ker\mathcal{L}_X P \subseteq \chi^h(TM)$

2)$\mathcal{L}_X \Theta(Y) = 0$, $\forall Y \in \chi^h(TM)$ που σημαίνει ότι $ker\mathcal{L}_X \Theta \subseteq \chi^h(TM)$

Απόδειξη.

1)$\mathcal{L}_X P(Y) = [X, P(Y)] - P[X,Y] = [X,Y] - P[X,Y] = (Id - P)[X,Y] = 2v[X,Y]$ και εφόσον το X είναι δυναμική συμμετρία $\mathcal{L}_X Y \in HTM \Rightarrow [X,Y] \in HTM$ άρα $v[X,Y] = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_X P(Y) = 0$

2)$\mathcal{L}_X \Theta(Y) = [X, \Theta Y] - \Theta[X,Y] = -\Theta[X,Y]$ εφόσον το X είναι δυναμική συμμετρία $\mathcal{L}_X Y \in HTM$, $\Theta[X,Y]$ οπότε $\mathcal{L}_X \Theta(Y) = 0$ □

Όσον αφορά τις *Lie* συμμετρίες στη βάση $\left\{\dfrac{\delta}{\delta x^i}\right\}$ έχουμε ότι το $X \in \chi(M)$ είναι μια *Lie* συμμετρία της N αν και μόνο αν

$$\left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] \in \chi^h(TM) \Rightarrow v\left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] = 0$$

$$v\left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] = -a^i_j \frac{\partial}{\partial y^i} = 0 \quad \text{άρα} \quad \mathcal{L}_{X^c} N^i_j = 0$$

Πρόταση 5.6. *Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία Lie μιας μη γραμμικής συνοχής N αν και μόνο αν $\mathcal{L}_{X^c} P = 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι
$(\mathcal{L}_{X^c}P)(Y) = [X^c, PY] - [PX^c, Y]$ για να είναι το X^c συμμετρία *Lie* της N πρέπει
$[X^c, PY] - [PX^c, Y] = 0.$
Αν $Y \in HTM$ τότε $[X^c, PY] - P[X^c, Y] = 0$ λόγω του προηγούμενου θεωρήματος.
Αν $Y \in VTM$ τότε $[X^c, PY] - P[X^c, Y] = -[X^c, Y] - P[X^c, Y] = (-Id - P)[X^c, Y]$
$= -2h[X^c, Y]$ όμως $[X^c, Y^v] = -[X^c, Y]^v \Rightarrow h[X^c, Y] = 0.$ □

Πρόταση 5.7. *Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία Lie μιας μη γραμμικής συνοχής N αν και μόνο αν $\mathcal{L}_{X^c}\Theta = 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}_{X^c}\Theta\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = \left[X^c, \Theta\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\right] - \Theta\left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] = -\Theta v\left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] \tag{5.86}$$

$$v\left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] = -a^i_j\frac{\partial}{\partial y^i} \overset{v}{\Rightarrow} \left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] = -a^i_j\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{5.87}$$

$$\mathcal{L}_{X^c}\Theta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \left[X^c, \Theta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\right] - \Theta\left[X^c, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] \tag{5.88}$$

$$\left[X^c, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] = \left[X^c, \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^v\right] = -\left[X, \frac{\partial}{\partial y^i}\right]^v = 0 \tag{5.89}$$

επομένως η σχέση 5.86 λόγω της 5.87 και η 5.88 λόγω της 5.89 γίνονται

$$\mathcal{L}_{X^c}\Theta\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = a^i_j\frac{\delta}{\delta x^i} = a^j_k\left(\frac{\delta}{\delta x^j} \otimes dx^k\right)\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)$$

$$\mathcal{L}_{X^c}\Theta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -a^i_j\frac{\partial}{\partial y^i} = -a^j_k\left(\frac{\partial}{\partial y^j} \otimes \delta y^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathcal{L}_{X^c}\Theta = a^j_k\left(\frac{\delta}{\delta x^j} \otimes dx^k\right) - a^j_k\left(\frac{\partial}{\partial y^j} \otimes \delta y^k\right) = \mathcal{L}_{X^c}N^j_k\left(\frac{\delta}{\delta x^j} \otimes dx^k - \frac{\partial}{\partial y^j} \otimes \delta y^k\right)$$

Επομένως για $\mathcal{L}_{X^c}\Theta = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{X^c}N^j_k = 0$ □

Πρόταση 5.8. *Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία μιας μη γραμμικής συνοχής N αν και μόνο αν $\mathcal{L}_{X^c}F = 0$.*

$$\mathcal{L}_{X^c}F = \mathcal{L}_{X^c}\Theta - \underset{\kappa\varepsilon\varphi\, 5.1}{\cancelto{0}{\mathcal{L}_{X^c}J}} = \mathcal{L}_{X^c}\Theta \text{ το οποίο λόγω της παραπάνω πρότασης είναι μηδέν.}$$

Θεώρημα 5.6. *Κάθε συμμετρία Lie μιας μη γραμμικής συνοχής N είναι ένα διανυσματικό πεδίο Jacobi κατά μήκος μιας αυτοπαράλληλης της ιδίας συνοχής N.*

Απόδειξη. Από τις προτάσεις 5.7 και 5.8 είδαμε πώς ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία *Lie* μιας μη γραμμικής συνοχής N αν $a_i^j = \mathcal{L}_{X^c}N_k^j = 0 \Rightarrow a_i^j y^i = 0$ και $a_i^j y^i\big|_\gamma = 0$ όπου η καμπύλη γ είναι μια αυτοπαράλληλης της συνοχής N. Η $a_i^j y^i\big|_\gamma = 0$ είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις *Jacobi*. □

Παρατήρηση 5.2.

1)Για ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ με ροή φ_t το αντίστοιχο X^c έχει ροή $\Phi_t = (\varphi_t)_*$. Το X είναι συμμετρία *Lie* της N αν και μόνο αν $(\Phi_t)_{*,u}(H_uTM) = H_{\varphi_t(u)}TM$, $\forall u \in TM$.

2)Αν η καμπύλη γ είναι αυτοπαράλληλη της μη γραμμικής συνοχής N, η ανύψωση της $\widetilde{\gamma}$ στη δέσμη είναι οριζόντια καμπύλη οπότε $\dfrac{d\widetilde{\gamma}}{dt} \in HTM$ με $(\Phi_t)_{*,\widetilde{\gamma}(t)}\left(\dfrac{d\widetilde{\gamma}}{dt}\right) \in HTM$. Από την άλλη $(\Phi_t)_{*,\widetilde{\gamma}(t)}\left(\dfrac{d\widetilde{\gamma}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}(\Phi_t \circ \widetilde{\gamma})$ έτσι η καμπύλη $\Phi_t \circ \widetilde{\gamma}$ είναι αυτοπαράλληλη αλλά και ανύψωση της $\varphi_t \circ \gamma$ άρα η φ_t απεικονίζει αυτοπαράλληλες σε αυτοπαράλληλες καμπύλες.

5.10 Ομογενείς και γραμμικές συνοχές

Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε τη όλη τη θεωρία σχετικά με τις αυτοπαράλληλες καμπύλες, τα διανυσματικά πεδία *Jacobi* και τις συμμετρίες τους γραμμικές/ομογενείς συνοχές. Στο κεφάλαιο 5 είδαμε πως το διανυσματικό πεδίο *Liouville*, C έχει ροή

$$\begin{aligned} h_\lambda : TM &\rightarrow TM \\ (x,y) &\mapsto h_\lambda(x,y) = (x, \lambda y) \end{aligned} \tag{5.90}$$

και το σύνολο $\{h_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα με $(h_\lambda)_{*,u} : T_uTM \rightarrow T_{h_\lambda(u)}TM$ ισομορφισμοί. Αν $(h_\lambda)_{*,u}(H_uTM) = H_{h_\lambda(u)}TM$ $\forall u \in TM$ δηλαδή οι h_λ διατηρούν την HTM, λέμε πως η συνοχή N είναι ομογενής. Αντίστροφα μια N είναι ομογενής αν και μόνο αν η δράση της ροής h_λ αφήνει την HTM αναλλοίωτη. Ισοδύναμα μια μη γραμμική συνοχή N είναι ομογενής αν και μόνο αν το C είναι συμμετρία της N δηλαδή

$$\mathcal{L}_C X = [C, X] = \left[y^i \frac{\partial}{\partial y^i}, X^j \frac{\delta}{\delta x^j} \right] = y^i X^j \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right] - y^i \frac{\partial X^j}{\partial y^i} \frac{\delta}{\delta x^j} - X^j \frac{\delta y^i}{\delta x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_C X = y^i X^j \left(-\frac{\partial N_j^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) - X^j \frac{\partial}{\partial y^j} - y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\delta}{\delta x^j} = \left(y^i \frac{\partial N_j^k}{\partial y^i} - N_j^k \right) X^j \frac{\partial}{\partial y^k} - y^i \frac{\partial X^j}{\partial y^i} \frac{\delta}{\delta x^j}$$

$$\mathcal{L}_C X \in \chi^h(TM) \iff \left(y^i \frac{\partial N_j^k}{\partial y^i} - N_j^k \right) = 0 \Rightarrow C(N_j^k) = N_j^k$$

που σημαίνει ότι οι συντελεστές της N, N_j^k πρέπει να είναι ομογενείς συναρτήσεις τάξης 1 ή $N_j^k(x, \lambda y) = \lambda N_j^k(x, y)$.

Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές N_j^k για μια ομογενή μη γραμμική συνοχή N είναι C^∞ στη $\widetilde{TM}$ και μόνο συνεχείς στο $\{0\} \in TM$. Αν τώρα οι N_j^k είναι C^∞ σε όλη την TM μπορούν να γραφούν ως $N_j^k(x, y) = \gamma_{jk}^i(x) y^k$ και αυτομάτως η N είναι και γραμμική. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα διότι η ομογένεια συνεπάγεται τη γραμμικότητα και μια γραμμική συνοχή είναι σίγουρα ομογενής.

Πρόταση 5.9. *Μια μη γραμμική συνοχή N είναι ομογενής αν και μόνο αν $\mathcal{L}_C P = 0$. Το (1,1) $d-$τανυστικό πεδίο $\mathcal{L}_C P$ ονομάζεται τάση της συνοχής N.*

Απόδειξη. $(\mathcal{L}_C P) \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = \left[C, P \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) \right] - P \left[C, \frac{\delta}{\delta x^i} \right] = (Id - P) \left[C, \frac{\delta}{\delta x^i} \right] \Rightarrow$

$$(\mathcal{L}_C P) \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = 2v \left(-N_i^j + y^k \frac{\partial N_i^j}{\partial y^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$(\mathcal{L}_C P) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \left[C, P \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) \right] - P \left[C, \frac{\partial}{\partial y^i} \right] = -2h \left[C, \frac{\partial}{\partial y^i} \right] = 0$$

άρα $\mathcal{L}_C P = 2v \left(-N_i^j + y^k \frac{\partial N_i^j}{\partial y^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \otimes dx^i$ και $\mathcal{L}_C P = 0 \Rightarrow -N_i^j + y^k \frac{\partial N_i^j}{\partial y^i} = 0$ που είναι το θεώρημα του *Euler* για μια ομογενή συνάρτηση τάξης 1. □

Έστω μια αυτοπαράλληλη καμπύλη της ομογενούς μη γραμμικής συνοχής N στην οποία κάνουμε αλλαγή παραμέτρου $t \to t(s)$, με s το μήκος τόξου.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + N^i_j\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2x^i}{ds^2} + N^i_j\left(x, \frac{dx}{ds}\right)\frac{dx^i}{ds}\right) + \frac{dx^i}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = 0 \qquad (5.91)$$

από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων βλέπουμε ότι

1)Γενικά μια τυχαία αλλαγή παραμέτρου δεν εγγυάται ότι η νέα καμπύλη θα είναι αυτοπαράλληλη λόγου του όρου $N^i_j\left(x, \frac{dx^i}{ds}\frac{dx}{ds}\right)$

2)Για να πάρουμε πάλι αυτοπαράλληλη καμπύλη θα πρέπει $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ και $\frac{ds}{dt} \neq 0$ δηλαδή θα πρέπει $s(t) = \alpha t + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, κοινώς να έχουμε αφινικό μετασχηματισμό.
Για ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(M)$ και μια μη γραμμική και ομογενή συνοχή N ορίζουμε το $d-$τανυστικό πεδίο

$$a^i_{jk}(x,y,X) := \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial X^i}{\partial x^p}\frac{\partial N^p_j}{\partial y^i} + \frac{\partial N^i_p}{\partial y^k}\frac{\partial X^p}{\partial x^j} + \frac{\partial N^i_p}{\partial y^j}\frac{\partial X^p}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 N^i_p}{\partial y^k \partial y^p}X^p + \frac{\partial^2 N^i_j}{\partial y^p \partial y^k}\frac{\partial X^p}{\partial x^s}y^s \qquad (5.92)$$

Η $\mathcal{L}_{X^c}F^i_{jk}$ όπου $F^i_{jk} := \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$ δίνεται ως

$$\mathcal{L}_{X^c}F^i_{jk} = X^c(F^i_{jk}) + F^i_{pk}\frac{\partial X^p}{\partial x^j} + F^i_{jp}\frac{\partial X^p}{\partial x^k} - F^p_{jk}\frac{\partial X^i}{\partial x^p} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} \qquad (5.93)$$

Παρατηρούμε ότι $a^i_{jk}y^k = a^i_j$ και επομένως το διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(M)$ είναι τύπου *Jacobi* αν και μόνο αν $a^i_{jk}y^k y^j = 0$ και συμμετρία *Lie* αν και μόνο αν $a^i_{jk}y^k = 0$. Αν περιοριστούμε σε μια συμμετρική και ομογενή συνοχή τότε οι εξισώσεις *Jacobi* παίρνουν τη μορφή

$$\nabla^2\xi^i + R^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\xi^k = 0 \qquad (5.94)$$

Με R^i_{jk} το $d-$τανυστικό πεδίο καμπυλότητας της συνοχής. Αν επιπλέον απαιτήσουμε η συνοχή να είναι και γραμμική $N^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x)y^k$ τότε οι αυτοπαράλληλες καμπύλες της συνοχής λέγονται γεωδαισιακές και έχουν εξισώσεις

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

και αντίστοιχες εξισώσεις *Jacobi*

$$\nabla^2\xi^i + R^i_{ljk}(x)\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^j}{dt}\xi^k = 0$$

Όπου ως R^i_{jk} το $d-$τανυστικό πεδίο καμπυλότητας της γραμμικής, συμμετρικής και ομογενούς πλέον συνοχής.

6 N-Γραμμικές συνοχές

Μέχρι στιγμής είδαμε πως για να δουλέψουμε με μια μη γραμμική συνοχή N θα πρέπει να την ανυψώσουμε στη δέσμη και έπειτα να τη συσχετίσουμε με μια δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο. Παρακάτω θα δούμε πώς μπορούμε να συσχετίσουμε μια μη γραμμική συνοχή N με μια γραμμική συνοχή την οποία θα αποκαλούμε και συνοχή $Berwald$. Αυτή η συνοχή είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί διατηρεί την κάθετη και οριζόντια κατανομή. Στην ουσία η συνοχή $Berwald$ μπορεί να συσχετιστεί με μια παράλληλη μετατόπιση στη δέσμη και γενικότερα οι γραμμικές συνοχές που ορίζονται μέσω μιας παράλληλης μετατόπισης στην TTM λέγονται $N-$γραμμικές.

6.1 d-Συνοχές

Έστω ότι έχουμε μια μη γραμμική συνοχή N και όλες τις συσχετιζόμενες δομές h, v, P, F, J, Θ.

Ορισμός 6.1. Μια μη γραμμική συνοχή D στη δέσμη ονομάζεται $d-$συνοχή αν διατηρεί την οριζόντια κατανομή

$$Dh = 0$$

Πρόταση 6.1. *Μια μη γραμμική συνοχή D στη δέσμη είναι $d-$συνοχή στη δέσμη αν και μόνο αν*

1)$Dv = 0$

2)$DP = 0$

Οπότε μια συνοχή D είναι $d-$συνοχή αν και μόνο αν διατηρεί μέσω παραλληλίας την οριζόντια και κάθετη κατανομή, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να ταυτίσουμε την D με την αντίστοιχή της συνοχή $Schouten$ η οποία ορίζεται ως

$$D_X Y := hD_X hY + vD_X vY, \quad \forall X, Y \in \chi(TM)$$

Πρόταση 6.2. *Για μια $d-$συνοχή τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

1)$DJ = 0$

2)$D\Theta = 0$

3)$DF = 0$

Απόδειξη.

(⇒)Αρκεί να δείξουμε ότι $D\Theta = 0 \Leftrightarrow DJ = 0$

$$D_X JY = D_X J(Y) + J(D_X Y) \Rightarrow D_X J(Y) = D_X(JY) - JD_X Y \tag{6.1}$$

προφανώς $(D_X Y)(Y) \in \chi^v(TM)$ διότι η D διατηρεί τις κατανομές άρα

$$D_X J(Y) = vD_X J(Y) = vD_X(JY) - vJD_X Y \tag{6.2}$$

όμως

$$vD_X J(Y) = J\Theta D_X Y = JD_X(\Theta JY) - \underset{\upsilon\pi o\vartheta}{\cancelto{0}{JD_X\Theta(JY)}} = JD_X(hY) \tag{6.3}$$

η σχέση 6.2 λόγω 6.3

$$D_X J(Y) = JD_X(hY) - JD_X Y = JD_X(hY) - JhD_X(hY) - JvD_X(vY) = 0$$

(⇐)$D_X\Theta = D_X(\Theta Y) - \Theta D_X Y$ αντίστοιχα $D_X\Theta \in \chi^h(TM)$ και

$$D_X\Theta(Y) = hD_X\Theta(Y) = hD_X(\Theta Y) - h\Theta D_X Y \tag{6.4}$$

$$hD_X(\Theta Y) = \Theta JD_X(\Theta Y) = \Theta D(J\Theta Y) - \underset{\upsilon\pi o\vartheta}{\cancelto{0}{\Theta DJ(\Theta Y)}} = \Theta D_X(vY) \tag{6.5}$$

η σχέση 6.4 λόγω 6.5 γίνεται

$$D_X\Theta(Y) = \Theta D_X(vY) - \Theta D_X(vY) = \Theta D_X(vY) - \Theta hD_X(hY) - \Theta vD_X(vY) = 0$$

□

Ορισμός 6.2. Μια $d-$συνοχή λέγεται $N-$γραμμική αν ισχύει μια από τις συνθήκες της πρότασης 6.2

Σε χάρτη και συγκεκριμένα στη βάση *Berwald* μια $N-$γραμμική συνοχή έχει αναπαράσταση

$$\begin{cases} D_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\left(\dfrac{\delta}{\delta x^j}\right) = F^k_{ij}(x,y)\dfrac{\delta}{\delta x^k} \quad D_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\left(\dfrac{\partial}{\partial y^j}\right) = F^k_{ji}(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y^k} \\ \\ D_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\left(\dfrac{\delta}{\delta x^j}\right) = C^k_{ji}(x,y)\dfrac{\delta}{\delta x^k} \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\left(\dfrac{\partial}{\partial y^j}\right) = C^k_{ji}(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y^k} \end{cases} \tag{6.6}$$

Παρατήρηση 6.1. Μια $N-$γραμμική συνοχή

1)Μετατοπίζει παράλληλα με τον ίδιο τρόπο οριζόντια και κάθετα διανυσματικά πεδία.

2)Διατηρεί την κάθετη και οριζόντια κατανομή εμφανώς διότι κάθετα διανυσματικά πεδία πάνε σε κάθετα και οριζόντια αντιστοίχως.

3)Οι συντελεστές $F^k_{ij}(x,y)$ και $C^k_{ji}(x,y)$ είναι οι συντελεστές της $N-$γραμμικής συνοχής D την οποία θα συμβολίζουμε και ως $D\Gamma(N) = (F^k_{ij}, C^k_{ij})$ με N η μη γραμμική συνοχή που επάγει την D.

Ακολουθούν οι εκφράσεις των F^k_{ij}, C^k_{ij} πώς μετασχηματίζονται σε αλλαγή χάρτη

$$\widetilde{F}^k_{ij} = \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^l} F^l_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^j} - \frac{\partial^2 \widetilde{x}^k}{\partial x^p \partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^j} \tag{6.7}$$

$$\widetilde{C}^k_{ij} = \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^l} C^l_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \widetilde{x}^j} \tag{6.8}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι οριζόντιοι συντελεστές F^k_{ij} μετασχηματίζονται όπως οι συντελεστές μιας γραμμικής συνοχής στην πολλαπλότητα και οι κάθετοι C^k_{ij} είναι συνιστώσες ενός $d-$τανυστικού πεδίου τύπου (1,2).

Απόδειξη. Ορίζουμε ως $J^i_j := \dfrac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^j}$

A)$\widetilde{F}^k_{ij}\dfrac{\delta}{\delta \widetilde{x}^k} = D_{\frac{\delta}{\delta \widetilde{x}^i}}\left(\dfrac{\delta}{\delta \widetilde{x}^j}\right) = D_{J^a_i \frac{\delta}{\delta x^i}}\left(J^b_j \dfrac{\delta}{\delta x^b}\right) = J^a_i\left(D_{\frac{\delta}{\delta x^a}}(J^b_i)\dfrac{\delta}{\delta x^b} + J^b_j D_{\frac{\delta}{\delta x^a}}\left(\dfrac{\delta}{\delta x^b}\right)\right)$

$\widetilde{F}^k_{ij}\dfrac{\delta}{\delta \widetilde{x}^k} = J^a_i D_{\frac{\delta}{\delta x^a}} J^b_j (J^{-1})^k_b \dfrac{\delta}{\delta \widetilde{x}^k} + J^b_j F^n_{ba}(J^{-1})^k_n \dfrac{\delta}{\delta \widetilde{x}^k} J^a_i \Rightarrow$

$$F^k_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial^2 x^b}{\partial \widetilde{x}^j \partial \widetilde{x}^a}\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^b} + F^n_{ba}\frac{\partial x^b}{\partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial x^a}{\partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^n}$$

εναλλακτική μορφή

$J^b_{j,a}(J^{-1})^k_b = \cancelto{0}{\left(J^b_j(J^{-1})^k_b\right)_{,a}} - J^b_j(J^{-1})^k_{b,a} = -J^b_j(J^{-1})^k_{b,a}$

άρα

$F^k_{ij} = \frac{\partial x^b}{\partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial x^a}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial^2 \widetilde{x}^k}{\partial x^b \partial x^a} + F^n_{ba}\frac{\partial x^b}{\partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial x^a}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^n}$

B)$\widetilde{C}^k_{ij}\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^k} = D_{\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^j}}\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^j}\right) = D_{J^a_i\frac{\partial}{\partial y^a}}\left(J^b_i\frac{\partial}{\partial y^b}\right) \Rightarrow$

$\widetilde{C}^k_{ij}\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^k} = J^a_j\left(\cancelto{0}{D_{\frac{\partial}{\partial y^a}}(J^b_i)}\frac{\partial}{\partial y^b} + J^a_j J^b_i D_{\frac{\partial}{\partial y^a}}\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right)\right) = J^b_i J^a_j C^k_{ba}\frac{\partial}{\partial y^k} \Rightarrow$

$$\widetilde{C}^k_{ij} = C^n_{ba}\frac{\partial x^a}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^n}$$

□

6.2 Συνοχή Berwald

Το σημαντικό σχετικά με τις γραμμικές συνοχές είναι ότι εκτός από όλες τις επιπλέον δομές που ορίζουν όπως τις J, P, F μπορούν πάντα να επάγουν και μια $N-$γραμμική συνοχή στη δέσμη.

Θεώρημα 6.1. *Η απεικόνιση* $D : \chi(TM) \times \chi(TM) \to \chi(TM)$ *με τύπο*

$$D_X Y = v[hX, vY] + h[vX, hY] + J[vX, \Theta Y] + \Theta[hX, JY]$$

είναι μια $N-$*γραμμική συνοχή στη δέσμη. Η συνοχή αυτή ονομάζεται συνοχή Berwald.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα

1)Είναι Συνοχή

i)Προσθετικότητα, προφανής γιατί όλοι οι όροι είναι προσθετικοί

ii)Ομογένεια

$$D_{fX} Y = v[hfX, vY] + h[vfX, hY] + J[vfX, \Theta Y] + \Theta[hfX, J] \tag{6.9}$$

$$\begin{cases} v[hfX, vY] = fv\left[X^h, Y^v\right] \\ h[vfX, hY] = fh\left[X^v, Y^h\right] \\ J[vfX, \Theta Y] = Jf[vX, \Theta Y] \\ \Theta[hfX, J] = \Theta f[hX, JY] \end{cases} \tag{6.10}$$

αντικαθιστώντας την 6.10 στην 6.9 φαίνεται εύκολα ότι $D_{fX}Y = fD_XY$ και επομένως ότι είναι ομογενής.

$iii)$Γραμμικότητα

$$D_XfY = v[hX, vfY] + h[vX, hfY] + J[vX, \Theta fY] + \Theta[hX, JfY] \tag{6.11}$$

$$\begin{cases} v[hX, vfY] = fv\left[X^h, Y^v\right] + hX(f)vY \\ h[vfX, hY] = fh\left[X^v, Y^h\right] + vX(f)hY \\ J[vfX, \Theta Y] = Jf[vX, \Theta Y] + vX(f)J\Theta Y \\ \Theta[hfX, J] = f\Theta[hX, JY] + hX(f)\Theta JY \end{cases} \tag{6.12}$$

με απλή αντικατάσταση των όρων της 6.12 στην 6.11 βλέπουμε ότι

$$D_XfY = fD_XY + X(f)Y$$

2)Είναι $d-$συνοχή δηλαδή $Dh = Dv = 0$

$D_X(hY) = hD_X(hY) = h[vX, hY] + \Theta[hX, JY] = h[vX, hY] + \Theta[hX, JY]$

και άρα είναι $d-$συνοχή.

3)Είναι $N-$ γραμμική $DJ = D\Theta = DF = 0$

επιλέγουμε $DJ = 0$ και τα υπόλοιπα συνεπάγονται από αυτό

$$(D_XJ)(Y) = D_X(JY) - JD_XY = 0 \tag{6.13}$$

$$\begin{cases} D_X JY = v[hX, JY] + J[vX, hY] \\ -JD_X Y = -J[vX, hY] - v[hX, JY] \end{cases} \tag{6.14}$$

αντικαθιστώντας τη σχέση 6.14 στη 6.13 $D_X J(Y) = 0$ άρα η D είναι και $N-$γραμμική. □

Στη βάση *Berwald* οι συντελεστές της ομώνυμης συνοχής δίνονται ως

$$D_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) = \Theta\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = \Theta\left(\frac{\partial N_i^k}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = \frac{\partial N_i^k}{\partial y^i}\frac{\delta}{\delta x^k}$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) = h\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] = 0$$

οπότε $F_{ij}^k = \dfrac{\partial N_i^k}{\partial y^i}$ και $C_{ij}^k = 0$ άρα πιο συνοπτικά έχουμε ότι $B\Gamma(N) = \left(F_{ij}^k = \dfrac{\partial N_i^k}{\partial y^i}, C_{ij}^k = 0\right)$.

Αν έχουμε μια γραμμική συνοχή στην πολλαπλότητα με συντελεστές $\gamma_{jk}^i(x)$ τότε $N_{jk}^i(x,y) = \gamma_{jk}^i y^\kappa$ είναι οι συντελεστές μιας μη γραμμικής συνοχής N στη δέσμη. Η $B\Gamma(N)$ σε αυτή την περίπτωση είναι $B\Gamma(N) = (\gamma_{jk}^i(x), 0)$.

6.3 Οριζόντια και κάθετη συναλλοίωτη παράγωγος

Με τη βοήθεια μιας $N-$γραμμικής συνοχής μπορούμε να ορίσουμε την οριζόντια και κάθετη συναλλοίωτη παράγωγο, οι οποίες είναι χρήσιμες για τη μελέτη της στρέψης και της καμπυλότητας. Οι τελεστές που αντιστοιχούν στις παραπάνω συναλλοίωτες παραγώγους δρουν σαν παραγωγίσεις στην άλγεβρα των $d-$τανυστικών πεδίων. Έχουμε λοιπόν για ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ και μια 1-μορφή $\omega \in \Lambda^1(TM)$ ορίζουμε για κάθε $X, Y \in \chi(TM)$,$f \in \mathcal{F}(TM)$

$$D_X^h(Y) := D_{hX}Y \qquad\qquad D_X^h(f) := hX(f)$$

$$\left(D_X^h\omega\right)(Y) := D_X^h\omega(Y) - \omega D_X^h Y = (hX)(\omega Y) - \omega hX(Y)$$

αντίστοιχα

$$D^v_X(Y) := D_{vX}Y \qquad\qquad D^v_X(f) := vX(f)$$

$$\left(D^v_X\omega\right)(Y) := D^v_X\omega(Y) - \omega D^v_X Y = (vX)(\omega Y) - \omega vX(Y)$$

Το σύμβολο D^h_X ονομάζεται τελεστής της οριζόντιας συναλλοίωτης[3] παραγώγου και το D^v_X αντίστοιχα της κάθετης. Αυτοί οι τελεστές μπορούν να επεκταθούν δρώντας σε κάθε $d-$τανυστικό πεδίο ζητώντας.

1. Να διατηρούν το είδους του τανυστικού πεδίου

2. Να είναι $\mathbb{R}$ γραμμική

3. Να ικανοποιούν τον κανόνα του *Leibnitz* ως προς το τανυστικό γινόμενο και να μετατίθενται με όλες τις συστολές.

Η δράση τους σε ένα $d-$τανυστικό πεδίο T τύπου (r,s) δίνει ένα $d-$τανυστικό πεδίο τύπου $(r,s+1)$ το οποίο συμβολίζεται ως $D_X T$.

$$D^h_X T := X^k T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_{s|k}} \frac{\delta}{\delta x^{i_1}} \otimes,..,\otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes,..,\otimes \delta y^{j_s} \tag{6.15}$$

$$T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_{s|k}} := \frac{\delta T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_s}}{\delta x^k} + F^{i_1,..,i_r}_{pk} T^{pi_2,..,i_r}_{j_1,..,j_s} + .. + F^{i_r}_{pk} T^{i_1,..,p}_{j_1,..,j_s} - F^p_{j_1 k} T^{i_1,..,i_r}_{p,..,j_s} - .. - F^p_{j_s k} T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,p} \tag{6.16}$$

και για το κάθετο μέρος

$$D^v_X T := X^k \, T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_s}\Big|_k \frac{\delta}{\delta x^{i_1}} \otimes,..,\otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes,..,\otimes \delta y^{j_s} \tag{6.17}$$

[3]Να σημειωθεί πως δεν είναι συναλλοίωτες παράγωγοι με την αυστηρή έννοια διότι $D^h_X(f) = hX(f) \neq X(f)$ και $D^v_X(f) = vX(f) \neq X(f)$

$$T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_s}\big|_k := \frac{\partial T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_s}}{\partial y^k} + C^{i_1,..,i_r}_{pk} T^{pi_2,..,i_r}_{j_1,..,j_s} + .. + C^{i_r}_{pk} T^{i_1,..,p}_{j_1,..,j_s} - C^p_{j_1 k} T^{i_1,..,i_r}_{p,..,j_s} - .. - C^p_{j_s k} T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,p} \quad (6.18)$$

6.4 Στρέψη μιας N-γραμμικής συνοχής

Η στρέψη μιας $N-$γραμμικής συνοχής ορίζεται ως $\forall X, Y, \in \chi(TM)$ ως

$$T(X,Y) := D_X Y - D_Y X - [X,Y]$$

Θεώρημα 6.2. *Η στρέψη μιας $N-$γραμμικής συνοχής καθορίζεται πλήρως από τα 5 παρακάτω $d-$τανυστικά πεδία*

$$\begin{aligned}
hT(hX,hY) &= D^h_X(hY) - D^h_Y(hX) - h[hX,hY] \\
vT(hX,hY) &= -v[hX,hY] \\
hT(hX,vY) &= -D^v_Y(hX) - h[hX,vY] \\
vT(hX,vY) &= D^h_X(vY) - v[hX,vY] \\
vT(vX,vY) &= D^v_X(vY) - D^v_Y(vX) - v[vX,xY]
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 6.2.
1)Αν $F^k_{ij} = F^k_{ji}$ και $C^k_{ij} = C^k_{ji}$ τότε η μια τυχαία $N-$γραμμική συνοχή είναι συμμετρική.
2)Η συνοχή $B\Gamma(N) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}, 0\right)$ έχει μόνο hh και vh συνιστώσες στρέψης

$$hT\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = T^k_{ji}\frac{\delta}{\delta x^k}$$

$$vT\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = R^k_{ji}\frac{\partial}{\partial y^k}$$

Αν επίσης η $B\Gamma(N) = \left(\frac{\partial N}{\partial y}, 0\right)$ είναι και συμμετρική τότε έχει μόνο μια συνιστώσα, την $vT\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = R^k_{ji}\frac{\partial}{\partial y^k}$. Γενικά για μια συμμετρική συνοχή όλοι οι οριζόντιοι παράγοντες μηδενίζονται.

6.5 Καμπυλότητα μιας N-γραμμικής συνοχής

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία όπως με τη στρέψη ξεκινώντας από μια $N-$γραμμική συνοχή D και τον ορισμό της καμπυλότητας

$$R(X,Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z, \quad \forall X,Y,Z \in \chi(TM) \tag{6.19}$$

Φαίνεται εύκολα ότι ο τανυστής καμπυλότητας διατηρεί την οριζόντια και κάθετη δέσμη διότι πάει οριζόντια/κάθετα διανυσματικά πεδία σε οριζόντια/κάθετα διανυσματικά πεδία.

$$R(X,Y)Z := hR(X,Y)Z + vR(X,Y)Z, \quad \forall X,Y,Z \in \chi(TM) \tag{6.20}$$

Θεώρημα 6.3. *(Προσδιορισμός Καμπυλότητας)*
Η καμπυλότητα R μιας $D\Gamma(N)$ προσδιορίζεται πλήρως από τα παρακάτω 6 $d-$τανυστικά πεδία

$$\begin{aligned}
R(hX,hY)hZ &= D^h_X D^h_Y hZ - D^h_Y D^h_X hZ - D_{[hX,hY]}hZ \\
R(hX,hY)vZ &= D^h_X D^h_Y vZ - D^h_Y D^h_X vZ - D_{[hX,hY]}vZ \\
R(vX,hY)hZ &= D^v_X D^h_Y hZ - D^h_Y D^v_X hZ - D_{[vX,hY]}hZ \\
R(vX,hY)vZ &= D^v_X D^h_Y vZ - D^h_Y D^h_X vZ - D_{[vX,hY]}vZ \\
R(vX,vY)hZ &= D^v_X D^v_Y hZ - D^v_Y D^v_X hZ - D_{[vX,vY]}hZ \\
R(vX,vY)hZ &= D^v_X D^v_Y vZ - D^v_Y D^v_X vZ - D_{[vX,vY]}vZ
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Στη βάση *Berwald*, χρησιμοποιώντας την απόλυτη παραλληλία της εφαπτόμενης δομής J, επειδή $DJ = 0$ έχουμε ότι

$$JR(X,Y)Z = R(X,Y)J(Z), \quad \forall X,Y,Z \in \chi(TM)$$

και επομένως

$$\begin{cases} R\left(\dfrac{\delta}{\delta x^k}, \dfrac{\delta}{\delta x^j}\right)\dfrac{\delta}{\delta x^h} := R^i_{hjk}\dfrac{\delta}{\delta x^i} \\[2em] R\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}, \dfrac{\delta}{\delta x^j}\right)\dfrac{\delta}{\delta x^h} := P^i_{hjk}\dfrac{\delta}{\delta x^i} \\[2em] R\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\dfrac{\partial}{\partial y^h} := S^i_{hjk}\dfrac{\partial}{\partial y^i} \end{cases} \qquad \begin{cases} R\left(\dfrac{\delta}{\delta x^k}, \dfrac{\delta}{\delta x^j}\right)\dfrac{\partial}{\partial y^h} := R^i_{hjk}\dfrac{\partial}{\partial y^i} \\[2em] R\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}, \dfrac{\delta}{\delta x^j}\right)\dfrac{\partial}{\partial y^h} := P^i_{hjk}\dfrac{\partial}{\partial y^i} \\[2em] R\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\dfrac{\partial}{\partial y^h} := S^i_{hjk}\dfrac{\partial}{\partial y^i} \end{cases} \tag{6.22}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό πως για μια τυχαία συνοχή $D\Gamma(N) = (F, C)$ η καμπυλότητα έχει 3 τοπικές συνιστώσες

$$\begin{cases} R^i_{jhk} := \dfrac{\delta F^i_{hj}}{\delta x^k} - \dfrac{\delta F^i_{hk}}{\delta x^j} + F^m_{hj}F^i_{mk} - F^m_{hk}F^I_{mj} + C^i_{hm}R^m_{jm} \\[2em] P^i_{jhm} := \dfrac{\partial F^i_{hj}}{\partial y^k} - C^i_{h\,k|j} + C^i_{hm}P^m_{jk} \\[2em] S^i_{hjk} := \dfrac{\partial C^i_{hj}}{\partial y^k} - \dfrac{\partial C^i_{hk}}{\partial y^j} + C^m_{hj}C^i_{mk} - C^m_{hk}C^i_{mj} \end{cases} \tag{6.23}$$

Η $B\Gamma(N) = (F, C)$ έχει μόνο δύο τοπικές συνιστώσες

$$\begin{cases} R^i_{jhk} := \dfrac{\delta F^i_{hj}}{\delta x^k} - \dfrac{\delta F^i_{hk}}{\delta x^j} + F^m_{hj}F^i_{mk} - F^m_{hk}F^I_{mj} \\[2em] P^i_{jhm} := \dfrac{\partial F^i_{hj}}{\partial y^k} = \dfrac{\partial^2 N^i_h}{\partial y^j \partial y^k} := D^i_{hjk} \end{cases} \tag{6.24}$$

Η καμπυλότητα R^i_{jhk} μιας μη γραμμικής συνοχής N είναι ένα $d-$τανυστικό πεδίο τύπου (1.2) ενώ η οριζόντια συνιστώσα της καμπυλότητας R^i_{jkl} της $B\Gamma(N)$ είναι ένα $d-$τανυστικό πεδίο τύπου (1.3). Αυτά τα δύο τανυστικά πεδία συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$R^k_{lij} = \frac{\partial R^k_{ij}}{\partial y^i} \tag{6.25}$$

Δεδομένης μιας $D\Gamma(N)$ και ενός διανυσματικού πεδίου $X \in \chi(TM)$, οι ταυτότητες του *Ricci* για το X είναι

$$\begin{cases} X^i_{|j|k} - X^i_{|k|j} = X^m R^i_{mjk} - X^i_{|m} T^m_{jk} - X^i\big|_m R^m_{jk} \\ X^i_{|j}\Big|_k - X^i_{|k}\Big|_j = X^m P^i_{mjk} - X^i_{|m} C^m_{jk} - X^i\big|_m P^m_{jk} \\ X^i\big|_j\Big|_k - X^i\big|_k\big|_j = X^m S^i_{mjk} - X^i\big|_m S^m_{jk} \end{cases} \tag{6.26}$$

Συγκεκριμένα για $X = C$ το διανυσματικό πεδίο *Liouville* οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν την απλή μορφή

$$y^i_{|j|k} - y^i_{|k|j} = R^i_{mjk} y^m - R^i_{jk} - y^i\big|_m T^m_{jk} \tag{6.27}$$

Αν επιπλέον η N είναι συμμετρική και ομογενής τότε $y^i_{|j} = 0$ και $y^i_{|j} = y^k \dfrac{\partial N^i_k}{\partial y^j} - N^i_j$ οπότε παίρνουμε ότι

$$R^i_{mjk} y^m = R^i_{jk} \tag{6.28}$$

με R^i_{mj} την καμπυλότητα της N η οποία είναι συμμετρική και ομογενής ενώ R^i_{mjk} είναι η οριζόντια καμπυλότητα της $B\Gamma(N)$.

6.6 Πλήρης παραλληλισμός

Έστω $\{H_a\}_{a=1,..,2m}$ ένα πεδίο πλαισίων ορισμένο στην υποπολλαπλότητα $TU \subseteq TM$. Προσαρμόζουμε αυτό το πλαίσιο στην κάθετη και οριζόντια κατανομή απαιτώντας να δρα στη βάση *Berwald* ως $\left\{H^i_a\left(\dfrac{\delta}{\delta x^i}\right), V^a_i\left(\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right)\right\}_{a=1,..,2m}$. Έχουμε λοιπόν ότι $span_{\mathbb{R}}\{H_a(u), V_a(u)\}_{a=1,..,2m} = T_u TM$, αυτού του είδους τα πλαίσια τα ονομάζουμε μη ολόνομα. Πιο συγκεκριμένα

$$H_a(u) = H_a^i \left(\frac{\delta}{\delta x^i}\bigg|_u \right) \qquad V_a(u) = V_i^a \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_u \right) \tag{6.29}$$

όπου H_a^i, V_a^i είναι αντιστρέψιμοι πίνακες που έχουν αντίστροφους τους H_i^a, V_i^a έτσι ώστε

$$\begin{cases} H_a^i H_j^a = \delta_j^i & V_i^a V_a^j = \delta_j^i \\ H_i^a H_a^j = \delta_j^i & V_a^i V_j^a = \delta_j^i \end{cases} \tag{6.30}$$

Χρησιμοποιώντας την απόλυτη παραλληλία της εφαπτόμενης δομής J και τον περιορισμό μας σε μη ολόνομα πλαίσια για τα οποία ισχύει $V_a = J(H_a)$ παίρνουμε τα πλαίσια $Finsler$. Δρώντας με μια $N-$γραμμική συνοχή D σε πλαίσιο $Finsler$ έχουμε

$$\begin{cases} D_{H_a} H_b = F_{ba}^c H_c & D_{V_a} V_b = C_{ba}^c V_c \\ D_{H_a} V_b = F_{ba}^c V_c & D_{V_a} H_b = C_{ba}^c H_c \end{cases} \tag{6.31}$$

Οι F, C ονομάζονται μη ολόνομοι συντελεστές της D ως προς το πλαίσιο $Finsler$ $\{H_a, V_a\}_{a=1,..,2m}$ και δίνονται ως

$$\begin{cases} F_{ab}^c = H_k^c H_{a|i}^k H_b^i = -H_{k|i}^c H_a^k H_b^i \\ C_{ab}^c = H_k^c \left. H_a^k \right|_i H_b^i = -\left. H_k^c \right|_i H_a^k H_b^i \end{cases} \tag{6.32}$$

Θεώρημα 6.4. *(Κρυσταλλογραφική Συνοχή)*
Δεδομένου ενός πλαισίου, το οποίο είναι κατά h, v συναλλοίωτο, υπάρχει μοναδική $N-$γραμμική συνοχή που του αντιστοιχεί. Για τη συνοχή αυτή ισχύει ότι όλες οι συνιστώσες της καμπυλότητας είναι μηδενικές.

Απόδειξη. Συναλλοιώτητα ενός πλαισίου κατά h, v σημαίνει ότι $H_{a|j}^i = 0$ και $\left. H_a^i \right|_j = 0$ από τις οποίες παίρνουμε

$$\begin{cases} \dfrac{\delta H_a^i}{\delta x^i} + F_{mj}^i H_a^m = 0 \Rightarrow \quad F_{mj}^i = -\dfrac{\delta H_a^i}{\delta x^i} H_m^a = H_a^i \dfrac{\delta H_m^a}{\delta x^j}. \\[2ex] \dfrac{\partial H_a^i}{\partial y^j} + C_{mj}^i H_a^m = 0 \Rightarrow \quad C_{mj}^i = -\dfrac{\partial H_a^i}{\partial y^i} H_m^a = H_a^i \dfrac{\partial H_m^a}{\partial y^j} \end{cases}$$

αξιοποιώντας έπειτα τις ταυτότητες *Ricci* για τα H_a^m

$$\begin{cases} R^i_{mkj}H^m_a = 0 \\ P^i_{mkj}H^m_a = 0 \\ S^i_{mkj}H^m_a = 0 \end{cases} \overset{(H^a_n)^{-1}}{\Rightarrow} \begin{cases} R^i_{nkj} = 0 \\ P^i_{nkj} = 0 \\ S^i_{nkj} = 0 \end{cases} \qquad \square$$

Η $N-$γραμμική συνοχή με συντελεστές

$$F^i_{mj} = -\frac{\delta H^i_a}{\delta x^i}H^a_m = H^i_a\frac{\delta H^a_m}{\delta x^j} \qquad C^i_{mj} = -\frac{\partial H^i_a}{\partial y^i}H^a_m = H^i_a\frac{\partial H^a_m}{\partial y^j} \tag{6.33}$$

ονομάζεται Κρυσταλλογραφική και αντιστοιχεί σε δομή μιας πλήρους παραλληλίας στη δέσμη που επάγεται από το μη ολόνομο πλαίσιο $\{H_a(u), V_a(u)\}_{a=1,..,2m}$.

6.7 Εξισώσεις Δομής για μη γραμμική συνοχή N

Συμβολίζουμε με $\{X_a\}_{a=1,..,2m}$ τα διανυσματικά πεδία βάσης και με $\{\theta_a\}_{a=1,..,2m}$ τα πεδία των ένα-μορφών που είναι δυικά στα πρώτα. Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε τη βάση *Berwald* με $X_a \in \left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}_{a=1,..,2m}$, $\theta_a \in \{dx^i, \delta y^i\}_{a=1,..,2m}$ και N η μη γραμμική συνοχή που παράγει τη βάση *Berwald*. Γενικά οι μορφές συνοχής ω^b_a σε μια βάση $\{X_a\}_{a=1,..,2m}$ ορίζονται ως $\omega^b_a(X) := \theta^a\left(\nabla_X\left(X_b\right)\right), \quad \forall X \in \chi(TM)$. Συγκεκριμένα για μια $N-$γραμμική συνοχή D στη βάση *Berwald* έχουμε ότι $\omega^b_a(X) := \theta^a\left(D_X\left(X_b\right)\right)$ και με πολύ απλές πράξεις $\omega^b_a = \begin{pmatrix} \omega^i_j & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix}$ με $\omega^i_j := F^i_{jk}dx^k + C^i_{jk}\delta y^k$.
Συνδέουμε τη δράση της D σε ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο $V = V^a \in \chi(TM)$

$$D_W V = \left(W(V^a) + V^b\omega^a_b(W)\right)X_a \tag{6.34}$$

$$\theta^a(D_W V) = W(V^a) + V^b\omega^a_b(W) = W(\theta^a(V)) + \theta^b(V)\omega^a_b(W) \tag{6.35}$$

Θεώρημα 6.5. *(Οι πρώτες και δεύτερες εξισώσεις δομής του Cartan)*
Για μια $N-$γραμμική συνοχή D έχουμε τις

1)Πρώτες εξισώσεις δομής του Cartan

$$\begin{cases} -dx^h \wedge \omega_n^i = \Theta^i \\ d(\delta y^i) - \delta y^h \wedge \omega_h^i = -\Theta^i \end{cases}$$

όπου $\Theta^a = (\Theta^i, \widetilde{\Theta}^i)$ *είναι οι δύο-μορφές στρέψης που ορίζονται ως*

$$\begin{aligned} \Theta^i &= \frac{1}{2} T^i_{jk} dx^j \wedge dx^k + C^i_{jk} dx^j \wedge dy^k \\ \widetilde{\Theta}^i &= \frac{1}{2} R^i_{jk} dx^j \wedge dx^k + P^i_{jk} dx^j \wedge \delta y^k + \frac{1}{2} S^i_{jk} \delta y^j \wedge \delta y^k \end{aligned}$$

2)Δεύτερες εξισώσεις δομής του Cartan

$$d\omega_j^i - \omega_j^h \wedge \omega_h^i = -\Omega_j^i$$

όπου οι δύο-μορφές καμπυλότητας $\Omega_b^a = \begin{pmatrix} \Omega_j^i & 0 \\ 0 & \Omega_j^i \end{pmatrix}$ *ορίζονται ως*

$$\Omega_b^a (X, Y) = \theta^a (R (X, Y) X_b) \tag{6.36}$$

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R^i_{jkh} dx^k \wedge dx^h + P^i_{jkh} dx^k \wedge \delta y^h + \frac{1}{2} S^i_{jkh} \delta y^k \wedge \delta y^h \tag{6.37}$$

Παρατήρηση 6.3.
1)Τα Θ^i θα τα ονομάζουμε οριζόντιες δύο-μορφές στρέψης ενώ τα $\widetilde{\Theta}^i$ κάθετες γιατί η κάθε δύο-μορφή εμπεριέχει τις οριζόντιες και κάθετες συνιστώσες της στρέψης.
2)Για τη συνοχή *Berwald* D, οι Θ^i μηδενίζονται αν και μόνο αν η N είναι συμμετρική.

Πρόταση 6.3. *(Μη ολόνομα πλαίσια και οι μορφές καμπυλότητας)*
Αν οι δύο-μορφές καμπυλότητας Ω_j^i *μηδενίζονται τότε υπάρχει ένα μη ολόνομο πλαίσιο* H_a^i *τέτοιο ώστε οι τοπικοί συντελεστές της* D *δίνονται ως*

$$F^i_{mj} = -\frac{\delta H_a^i}{\delta x^i} H_m^a = H_a^i \frac{\delta H_m^a}{\delta x^j} \qquad C^i_{mj} = -\frac{\partial H_a^i}{\partial y^i} H_m^a = H_a^i \frac{\partial H_m^a}{\partial y^j} \tag{6.38}$$

Το πλαίσιο $\left\{H_a = H_a^i\left(\dfrac{\delta}{\delta x^i}\right), V_a = V_i^a\left(\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right)\right\}_{a=1,..,2m}$ λέγεται ολόνομο αν υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi^a \in \mathcal{F}(M)$ τέτοιες ώστε $H_i^a = \dfrac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}$ που είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι οι μορφές $\eta^a = H_i^a dx^i$ είναι ακριβείς.

Πρόταση 6.4. *(Συνθήκη ολονομίας πλαισίου)*
Ένα πλαίσιο H_a^i είναι ολόνομο αν και μόνο αν οι οριζόντιες δύο-μορφές Θ^a της κρυσταλλογραφικής συνοχής επαγόμενες από τις H_a^i μηδενίζονται.

Θεώρημα 6.6. *(Συνθήκη μηδενισμού Θ^a, Ω_j^i)*
Οι δύο-μορφές Θ^a, Ω_j^i μηδενίζονται για μια συνοχή $D\Gamma = \left(F_{jk}^i, C_{jk}^i\right)$ αν και μόνο αν υπάρχει χάρτης στην πολλαπλότητα του οποίου η ανύψωση στη δέσμη δίνει $F_{jk}^i = C_{jk}^i = 0$.

Πρόταση 6.5. *(Εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος στη συνοχή Berwald)*
Έστω μια μη γραμμική συνοχή N η οποία είναι επιπλέον συμμετρική με συντελεστές N_j^i. Τότε υπάρχει χάρτης στην M στου οποίου την ανύψωση έχουμε ότι $N_j^i = N_j^i(x)$ αν και μόνο αν η συνοχή Berwald έχει μηδενική καμπυλότητα.

6.8 Γεωδαισιακές μιας N-γραμμικής συνοχής

Έστω μια $N-$γραμμική συνοχή D με N μια συμμετρική μη γραμμική συνοχή. Μια ομαλή καμπύλη

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} \supseteq & \; I \to \gamma(I) \subseteq TM \\ t \mapsto & \; \gamma(t) = \left(\gamma^i(t), \dot{\gamma}^i(t)\right) \end{aligned}$$

είναι μια γεωδαισιακή της $N-$γραμμικής συνοχής D αν $D_V V = 0$. Εδώ συγκεκριμένα

$$V(t) = \dot{\gamma}^i(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i} + \frac{\delta y^i}{\delta t}\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{6.39}$$

είναι εφαπτόμενο στη γ και

$$\frac{\delta y^i}{\delta t} := \nabla\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{dy^i}{dt} + N_j^i \frac{dx^j}{dt} \tag{6.40}$$

Μια καμπύλη $\gamma(t) = (\gamma^i(t), \dot{\gamma}^i(t))$ είναι γεωδαισιακή της συνοχής $D = \left(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk}\right)$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk}\dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dx^j}{dt} + C^i_{jk}\dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{\delta y^k}{\delta t} = 0 \\ \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\delta y^i}{\delta t}\right) + F^i_{jk}\dfrac{\delta y^j}{\delta t}\dfrac{dx^k}{dt} + C^i_{jk}\dfrac{\delta y^j}{\delta t}\dfrac{\delta y^k}{\delta t} = 0 \end{cases} \tag{6.41}$$

Πολύ εύκολα βλέπουμε ότι μπορούμε να κάνουμε ανάκτηση της κλασσικής εξίσωσης γεωδαισιακών για $\dfrac{\delta y^i}{\delta t} = 0$ που σημαίνει ότι η οριζόντια καμπύλη είναι γεωδαισιακή δηλαδή

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{6.42}$$

Αντίστοιχα λέμε ότι μια καμπύλη από την M είναι γεωδαισιακή της D αν η ανύψωσή της $\widetilde{\gamma}(t) = \left(x^i(t), \dfrac{dx^i}{dt}\right)$ είναι γεωδαισιακή της D. Επίσης μια αυτοπαράλληλη καμπύλη μιας μη γραμμικής συνοχής N είναι γεωδαισιακή μιας $N-$γραμμικής συνοχής αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις 6.42.

Θεώρημα 6.7. *Η πλήρης ανύψωση μιας καμπύλης γ από την πολλαπλότητα στη δέσμη είναι αυτοπαράλληλη για την μη γραμμική συνοχή N αν και μόνο αν η $\widetilde{\gamma}$ είναι γεωδαισιακή για την D με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τα τανυστικά πεδία εκτροπής*

$$D^i_j := y^i_{j|} = F^i_{mj}y^m - N^i_j = 0$$

$$d^i_j := y^i\big|_j = \delta^i_j + C^i_{mj}y^m = \delta^i_j \tag{6.43}$$

Τώρα αν οι δύο-μορφές συνοχής Ω μηδενίζονται έχουμε ένα μη ολόνομο πλαίσιο $\left\{H_a = H^i_a\left(\dfrac{\delta}{\delta x^i}\right), V_a = V^a_i\left(\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right)\right\}_{a=1,..,2m}$ και αν συμβολίσουμε ως $\dfrac{dx^a}{dt} = H^a_i\dfrac{dx^i}{dt}, \dfrac{\delta y^a}{\delta t} = H^a_i\dfrac{\delta y^i}{\delta t}$ τις μη ολόνομες συνιστώσες του εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου $\dfrac{dx^i}{dt}$ τότε η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή της D αν και μόνο αν

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^a}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta y^a}{\delta t}\right) = 0 \tag{6.44}$$

Αν επιπλέον οι δύο-μορφές συνοχής $\widetilde{\Theta}^i$ μηδενίζονται τότε υπάρχει χάρτης σε κάθε σημείο τέτοιος ώστε η εξίσωση γεωδαισιακών της D δίνονται ως

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta y^i}{\delta t}\right) = 0 \tag{6.45}$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η M είναι επίπεδη και οι γεωδαισιακές ευθείες γραμμές.

6.9 Ομογενής μη γραμμική συνοχή

Για μια μη γραμμική συνοχή N ισχύει ότι οι $N^i_j(x,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις τάξης 1 ως προς y. Έστω D η συνοχή *Berwald* της N, εφόσον η N είναι ομογενής έχουμε ότι $y^k \dfrac{\partial N^i_j}{\partial y^k} = N^i_j$ που σημαίνει ότι $N^i_j = y^k F^i_{jk}$ και έτσι τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων είναι ισοδύναμα

$$\begin{cases} \frac{\delta y^i}{\delta t} = \dfrac{d^2x^i}{dt^2} + N^i_j \dfrac{dx^j}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk} \dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{dx^k}{dt} = 0 \end{cases} \tag{6.46}$$

Η ισοδυναμία αυτή σημαίνει ότι οι αυτοπαράλληλες καμπύλες μιας ομογενούς συνοχής συμπίπτουν με τις γεωδαισιακές της επαγώμενης συνοχής *Berwald*. Αν τώρα $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \chi(TM)$ τότε το (1.2) τανυστικό πεδίο $a^i_{jk}(x,y,X)$ είναι η *Lie* παράγωγος των F^i_{jk} ως προς το διανυσματικό πεδίο X^c δηλαδή

$$a^i_{jk}(x,y,X) = \mathcal{L}_{X^c} F^i_{jk} \tag{6.47}$$

Επομένως ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι μια *Lie* συμμετρία της συνοχής N αν και μόνο αν

$$\mathcal{L}_{X^c} F^i_{jk} y^k = 0 \tag{6.48}$$

Αν η φ_t είναι η ροή του $X \in \chi(TM)$ και η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή της συνοχής *Berwald* τότε η $\varphi_t(\gamma(t))$ είναι επίσης γεωδαισιακή της παραπάνω συνοχής.

7 Διαφορικές εξισώσεις

Σε αυτό το σημείο κάνουμε χρήση της θεωρίας που έχουμε αναπτύξει ως τώρα με σκοπό τη γεωμετρική μελέτη ενός συστήματος ΣΔΕΔ(Συνήθων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως). Γενικά ένα τέτοιο σύστημα ορίζεται τοπικά στην πολλαπλότητα από ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{7.1}$$

επίσης μπορεί να οριστεί και στη δέσμη με τη βοήθεια ενός γεωμετρικού αντικειμένου που λέγεται *semispray* μέσω του οποίου μελετάμε και τις ολικές ιδιότητες του συστήματος ΣΔΕΔ. Το σημαντικό είναι ότι μπορούμε να συσχετίσουμε στο ΣΔΕΔ μια μη γραμμική συνοχή N, όταν το μελετάμε στη δέσμη, στη συνέχεια τη συνοχή D και τέλος από τις εξισώσεις δομής του $Cartan$ για την D έχουμε τη γεωμετρική συμπεριφορά του συστήματός μας. Με τον όρο γεωμετρική συμπεριφορά αναφερόμαστε στα γεωμετρικά αναλλοίωτα καθώς και τις συμμετρίες του ΣΔΕΔ.

Αρχικά θα ξεκαθαρίσουμε πώς το δυναμικό σύστημά μας περιγράφεται από τις εξισώσεις 7.1 και θα πρέπει πάντα να ορίζεται σε κάποιο χάρτη και να υπάρχει συμβατότητα στην τομή γειτονικών χαρτών. Θα πρέπει δηλαδή όλο το αριστερό μέλος να μετασχηματίζεται ως $d-$τανυστικό πεδίο που σημαίνει ότι

$$2\widetilde{G}^i = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}2G^i - \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^i}y^j \tag{7.2}$$

Με τη βοήθεια των G^i ορίζουμε ένα ολικό διανυσματικό πεδίο S.

Πρόταση 7.1. *Το διανυσματικό πεδίο* $S = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ *είναι καλώς ορισμένο αν οι συναρτήσεις* G^i *μετασχηματίζονται όπως στη σχέση 7.2.*

Ορισμός 7.1. Το διανυσματικό πεδίο S ονομάζεται *semispray* αν $JS = C$

Πρόταση 7.2. *Ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο* $X \in \chi(TM)$ *είναι semispray αν και μόνο αν έχουμε σε κάθε χάρτη συναρτήσεις* G^i *τέτοιες ώστε* $X = S$.

Οι συναρτήσεις G^i ονομάζονται συντελεστές του *semispray*, θα πρέπει να είναι $C^\infty(TM)$ και απλά συνεχείς στη μηδενική τομή.

Πρόταση 7.3. *Ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$, το οποίο είναι τομή της δέσμης (TTM, τ, TM) είναι semispray αν είναι ταυτόχρονα τομή και στη δέσμη (TTM, π_*, TM).*

Ορισμός 7.2. Μια καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ είναι τροχιά ενός *semispray* S αν η ανύψωσή της $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \supseteq I \to \widetilde{\gamma}(I) \subseteq TM$ με $\widetilde{\gamma}(t) = \left(x^i(t), \dfrac{dx^i}{dt}\right)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του S.

Πρόταση 7.4. *Για να είναι μια τυχαία καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ ροή του $S = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ θα πρέπει να ικανοποιεί την 7.1.*

7.1 Μη γραμμικές συνοχές και semispray

Η γέφυρα σύνδεσης των συστημάτων 7.1 με τις μη γραμμικές συνοχές είναι η δομή των *semispray*. Έχοντας ένα *semispray* μπορούμε να συσχετίσουμε μια μη γραμμική συνοχή στο εκάστοτε σύστημά μας και οι αντίστοιχες λύσεις του θα είναι οι αυτοπαράλληλες καμπύλες της συνοχής. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία μεταβολών και συμμετριών που αναπτύξαμε για τις μη γραμμικές συνοχές και έτσι να γίνει πιο πλήρης η μελέτη.

Θεώρημα 7.1. *(Σύνδεση semispray με τη γραμμική συνοχή N)*
Έστω S ένα semispray και J η εφαπτόμενη δομή. Η σχέση $P := -\mathcal{L}_S J$ μας καθορίζει μια δομή σχεδόν-γινομένου στη δέσμη.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η δομή $P := -\mathcal{L}_S J$ ικανοποιεί τις σχέσεις $P \circ J = -J$ και $J \circ P = J$.
Για την πρώτη σχέση έχουμε ότι $P \circ J(X) = (-\mathcal{L}_S J)(J(X)) = -[S, JJ(X)] + J[S, J(X)] = J[S, J(X)]$
όμως $N_J(S, X) = 0 \Rightarrow [C, JX] - J[C, X] = 0 = 0 \cdot JX - JX \Rightarrow J[S, JX] = -JX$ και αυτό γιατί το J είναι ομογενές τάξης 0 ενώ το X είναι 1. Άρα $P \circ J(X) = -J(X)$.
Για τη δεύτερη σχέση έχουμε ότι $J \circ P(X) = (-J \circ \mathcal{L}_S J)(X) = -J([S, JX] + J[S, JX]) = JX \Rightarrow J \circ P(X) = J(X)$. ☐

Μπορούμε με βάσει της παραπάνω απόδειξης να υπολογίσουμε τους συντελεστές της μη γραμμικής σύνδεσης. Ξέρουμε ότι για την P ισχύει ότι

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = -\mathcal{L}_S J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = -\left[S, J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] + J\left[S, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \left[S, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] + J\left[S, \frac{\partial}{\partial x^i}\right]$$
$$= -\left[\frac{\partial}{\partial x^j} - 2G^j\frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] + J\left[\frac{\partial}{\partial x^j} - 2G^j\frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = -2\frac{\partial G^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Επομένως η επαγόμενη μη γραμμική συνοχή έχει συντελεστές $N^i_j = \dfrac{\partial G^j}{\partial y^i}$. Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι είναι όντως συντελεστές μη γραμμικής συνοχής από τον τρόπο μετασχηματισμού τους:

$$2\widetilde{N}^i_j = 2\frac{\partial \widetilde{G}^i}{\partial \widetilde{y}^j} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^j}\left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k}2G^k - \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^k}y^k\right) = \frac{\partial x^l}{\partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial}{\partial y^l}\left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k}2G^k - \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^k}y^k\right) \Rightarrow$$
$$\widetilde{N}^i_j\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k}2\frac{\partial G^k}{\partial y^l} - \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k}N^k_l - \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^l} \Rightarrow$$
$$\widetilde{N}^i_j\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^l} = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k}N^k_l - \frac{\partial \widetilde{y}^i}{\partial x^l}$$

Παρατήρηση 7.1.

1)Από τους συντελεστές $N^i_j = \dfrac{\partial G^j}{\partial y^i}$ εύκολα βλέπουμε ότι η επαγόμενη συνοχή είναι συμμετρική γιατί $\dfrac{\partial N^i_j}{\partial y^k} = \dfrac{\partial^2 G^j}{\partial y^k \partial y^i}$.

2)Για κάθε (1,1) τανυστικό πεδίο X^i_j οι συντελεστές $N^i_j = \dfrac{\partial G^j}{\partial y^i} + X^i_j$ είναι πάλι συντελεστές της ίδιας συνοχής N. Κάτι σαν βαθμίδα.

3)Οι προβολείς h, v που αντιστοιχούν στην συνοχή N συνδέονται μέσω της σχέσης $P = h - v$ και δίνονται ως

$$h(X) = \frac{1}{2}\left(X - [S, JX] - J[X, S]\right)$$

$$v(X) = \frac{1}{2}\left(X + [S, JX] + J[X, S]\right) \tag{7.3}$$

Θεώρημα 7.2. *(semispray επαγόμενο από μη γραμμική συνοχή N)*
Έστω N μια μη γραμμική συνοχή και h ο οριζόντιος προβολικός τελεστής της. Υπάρχει μοναδικό semispray S τέτοιο ώστε $S = h\left[C, S\right]$

Σε χάρτη το παραπάνω *semispray* έχει αναπαράσταση $S = y^i \dfrac{\delta}{\delta x^i} = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} - N^i_j y^j \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ και επομένως έχει συντελεστές $2G^i = N^i_j y^j$.

Για ένα *semispray* της μορφής $S = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ με επαγόμενη συνοχή $N^i_j = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$ ισχύει ότι $S = y^i \left(\dfrac{\delta}{\delta x^i} + N^j_i \dfrac{\partial}{\partial y^j} \right) - 2G^i \dfrac{\partial}{\partial y^i} = y^i \dfrac{\delta}{\delta x^i} - \left(2G^i - y^i N^j_i\right) \dfrac{\partial}{\partial y^j} \Rightarrow$

$$S = y^i \frac{\delta}{\delta x^i} - \mathcal{E}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = hS - -\mathcal{E}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{7.4}$$

Καλούμε τις συνιστώσες $\mathcal{E}^i(x,y) := 2G^i(x,y) - y^i N^j_i(x,y)$ το πρώτο αναλλοίωτο του *semispray* S.

Ορισμός 7.3. Ένα *semispray* S ονομάζεται *spray* αν το πρώτο αναλλοίωτο $\mathcal{E}^i$ μηδενίζεται.

Παρατήρηση 7.2.
1)Ένα *semispray* S είναι *spray* αν και μόνο αν $\mathcal{E}^i = 0 \Rightarrow 2G^i = y^j \dfrac{\partial G^i}{\partial y^j} \Leftrightarrow G^i$
είναι ομογενείς δευτέρας τάξεως και η συνθήκη $\mathcal{E}^i = 0$ είναι το θεώρημα του *Euler*.
2)Η ομογένεια των G^i μεταφέρεται στο S και λέμε ότι είναι ομογενές διανυσματικό πεδίο τάξης 2 στη δέσμη. Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι το *semispray* S είναι *spray* αν και μόνο αν $\mathcal{L}_C S = S$.

Πρόταση 7.5.
1)Έστω S semispray και N η επαγόμενη μη γραμμική συνοχή. Το S είναι spray αν και μόνο αν ταυτίζεται με το semispray που επάγεται από την N.
2)Έστω N μια συμμετρική μη γραμμική συνοχή στη δέσμη και S το επαγόμενο semispray. Η N' που επάγεται από το S συμπίπτει με την N αν και μόνο αν αυτή είναι ομογενής.

7.2 Συνοχή Berwald ενός semispray

Πολλές φορές η απλούστευση έως και λύση ενός προβλήματος με διαφορικές εξισώσεις προκύπτει από τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων ως προς τις ταχύτητες. Τις συνθήκες λοιπόν για τη γραμμικοποίηση των ταχυτήτων σε ένα σύστημα ΣΔΕΔ μας παρέχουν οι εξισώσεις δομής του *Cartan* για τη συνοχή *Berwald* του συστήματος.

Τα δεδομένα έχουν ως εξής, έστω ένα *semispray* S με συντελεστές G^i και N η επαγόμενη συνοχή με συντελεστές $N^i_j = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$. Η συνοχή *Berwald* που αντιστοιχεί στην N, D είναι η $N-$Γραμμική συνοχή

$$B\Gamma = \left(N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j},\ F^i_{jk} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k},\ C^i_{jk} = 0 \right) \tag{7.5}$$

και επομένως οι μορφές συνοχής είναι

$$\omega^i_j = F^i_{jk} dx^k = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} dx^k \tag{7.6}$$

Λόγω συμμετρικότητας της N η D είναι συμμετρική και έτσι έχει μόνο μια συνιστώσα στρέψης την vh η οποία είναι και η καμπυλότητα της N.

$$vT\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j} \right) = R^k_{ji} \frac{\partial}{\partial y^k} = \left(\frac{\delta N^k_j}{\delta x^i} - \frac{\delta N^k_i}{\delta x^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{7.7}$$

έχουμε επίσης μόνο κάθετες δύο-μορφές στρέψης της D τις

$$\widetilde{\Theta}^i = \frac{1}{2} R^i_{jk} dx^j \wedge dx^k \tag{7.8}$$

Η καμπυλότητα της D έχει μόνο δυο μη μηδενικές συνιστώσες τις

$$\begin{aligned} R^i_{hjk} &= \frac{\delta F^i_{hj}}{\delta x^j} - \frac{\delta F^i_{hk}}{\delta x^j} + F^m_{hj} F^i_{mk} - F^m_{hk} F^i_{mj} \\ D^i_{hjk} &= \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^h \partial y^j \partial y^k} \end{aligned} \tag{7.9}$$

οι δύο-μορφές συνοχής της D δίνονται ως

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkh}dx^k \wedge dx^h + D^i_{jkh}dx^k \wedge \delta y^h \tag{7.10}$$

Θεώρημα 7.3. *(Εξισώσεις δομής Cartan για την $B\Gamma$)*
Οι πρώτες εξισώσεις δομής του Cartan για την $B\Gamma$ είναι

$$\begin{cases} -dx^h \wedge \omega^i_h = 0 \\ d(\delta y^i) - \delta y^h \wedge \omega^i_h = \frac{1}{2}R^i_{jk}dx^j \wedge dx^k \end{cases} \tag{7.11}$$

Οι δεύτερες εξισώσεις δομής του Cartan για την $B\Gamma$ είναι

$$d\omega^i_j - \omega^h_j \wedge \omega^i_h = -\frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^h - D^i_{jkh}dx^k \wedge \delta y^h \tag{7.12}$$

(Συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας για την $B\Gamma$ ενός semispray)
Η $B\Gamma$ ενός semispray S έχει μηδενική καμπυλότητα εάν υπάρχει χάρτης $\forall p \in M$ που επάγει χάρτη στην TM στον οποίο οι συντελεστές του S έχουν τη μορφή

$$2G^i(x,y) = A^i_j(x,y)y^j + B^i(x) \tag{7.13}$$

Άμεση εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος είναι στο σύστημα 7.1 στο οποίο αν πάρουμε ως δεδομένο ότι η $B\Gamma$ του S έχει μηδενική καμπυλότητα τότε το σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + A^i_j(x)\frac{dx^j}{dt} + B^i(x) = 0 \tag{7.14}$$

7.3 Εξισώσεις Jacobi ενός semispray

Θα δούμε τώρα πως προσαρμόζουμε τη θεωρία με τη δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο και τη θεωρία των μεταβολών στο σύστημα 7.1 με τη βοήθεια του *semispray S*.

Ορίζουμε τη δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο ενός $d-$διανυσματικού πεδίου στη δέσμη ως

$$\nabla X^i(x,y) = X^i_{|} = S(X^i) + N^i_j X^j \tag{7.15}$$

η οποία προφανώς είναι $d-$διανυσματικό πεδίο. Μπορούμε τώρα να δούμε τη δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο σαν απεικόνιση

$$\begin{aligned} \nabla : \chi^v(TM) &\to \chi^v(TM) \\ X^i \frac{\partial}{\partial y^i} &\mapsto \nabla\left(X^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \nabla(X^i)\frac{\partial}{\partial y^i} = X^i_{|}\frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned}$$

ή κατευθείαν ως

$$\begin{aligned} \nabla' : \chi(TM) &\to \chi^v(TM) \\ X^i \frac{\partial}{\partial x^i} &\mapsto \nabla'\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \nabla(X^i)\frac{\partial}{\partial y^i} = X^i_{|}\frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned}$$

Η σχέση μεταξύ τους είναι $\nabla' = \nabla \circ l_v$. Επαναδιατυπώνοντας το σύστημα 7.1 με τη βοήθεια της δυναμικής συναλλοίωτης παραγώγου έχουμε

$$\nabla\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = -\mathcal{E}^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{7.16}$$

Δοκιμάζουμε λύσεις τις μορφής $\widetilde{x}^i(t) = x^i(t) + \varepsilon\xi^i(t)$ και έχουμε το εξής σύστημα

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} + 2\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{d\xi^j}{dt} + 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j}\xi^j = 0 \tag{7.17}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο $\xi^i(t)$ κατά μήκος μιας τροχιάς $\gamma(t)$ του *semispray* S ονομάζεται πεδίο *Jacobi* αν ικανοποιεί τη σχέση 7.17.

Θεώρημα 7.4. *(Αναλλοίωτη μορφή των εξισώσεων μεταβολής)*
Οι εξισώσεις Jacobi του συστήματος 7.17 είναι

$$\nabla^2\xi^i + \left(R^i_{jk}\frac{dx^k}{dt} + \mathcal{E}^i_{|j}\right)\xi^j = 0 \tag{7.18}$$

όπου $\mathcal{E}^i_{|j} := \dfrac{\delta\mathcal{E}^i}{\delta x^j} + F^i_{kj}\mathcal{E}^k$ *είναι η $h-$συναλλοίωτη παράγωγος του πρώτου αναλλοίωτου $\mathcal{E}^i$.*

7.4 Συμμετρίες ενός semispray

Όταν λέμε συμμετρία ενός *semispray* θα αναφερόμαστε στις ροές ενός διανυσματικού πεδίου που διατηρούν τις λύσεις του συστήματος 7.1.

Ορισμός 7.4.
1)Μια συμμετρία *Lie* του *semispray* S είναι ένα διανυσματικό πεδίο
$X \in \chi(M) \ni [S, X^c] = 0$
2)Μια δυναμική συμμετρία του *semispray* S είναι ένα διανυσματικό πεδίο
$X \in \chi(TM) \ni [S, X] = 0$.
3)Μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(TM)$ λέγεται σταθερά της κίνησης ή νόμος διατήρησης του *semispray* S αν $S(f) = 0$.

Παρατήρηση 7.3.
1)Αν $X \in \chi(M)$ είναι μια συμμετρία *Lie* του S τότε το $X^c \in \chi(TM)$ είναι μια δυναμική συμμετρία του S.
2)Για $X \in \chi(M)$ ισχύει ότι $X^c = 2X^h + [S, X^v]$ και είναι συμμετρία *Lie* του S αν και μόνο αν

$$2\left[S, X^h\right] + [S, [S, X^v]] = 2\mathcal{L}_S X^h + \mathcal{L}_S \mathcal{L}_S X^v = 0 \tag{7.19}$$

3)Αν η $f \in \mathcal{F}(TM)$ είναι σταθερά της κίνησης τότε είναι σταθερή συνάρτηση κατά μήκος όλων των τροχιών του S.

Θεώρημα 7.5. *Έστω* $\widetilde{X} = X^i \dfrac{\delta}{\delta x^i} + Y^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$
1)Ένα διανυσματικό πεδίο $\widetilde{X}$ *είναι δυναμική συμμετρία του semispray* S *αν και μόνο αν*

$$Y^i = \nabla X^i \quad \kappa\alpha\iota \quad \nabla^2 X^i + B^i_j X^j = 0 \tag{7.20}$$

2)Αν $\widetilde{X}$ *είναι δυναμική συμμετρία του* S *και* $\gamma(t)$ *μια τροχιά του* S *τότε* $X^i|_{\widetilde{\gamma}(t)}$ *είναι ένα διανυσματικό πεδίο Jacobi.*

Παρατήρηση 7.4. Οι σχέσεις 7.20 είναι οι αναλλοίωτη μορφή των συμμετριών *Lie*/δυναμικών σε όρους δυναμικής συναλλοίωτης παραγώγου.

Υπάρχει επίσης μια επαναδιατύπωση των παραπάνω σε όρους $a^i(x, y, X)$ με $X \in \chi(M)$

$$a^i(x, y, X) = \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} y^j y^k - 2G^i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} X^j + 2\frac{\partial X^j}{\partial x^k} y^k \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \tag{7.21}$$

$$\mathcal{L}_{X^c}(2G^i) = X^c(2G^i) - 2G^i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} y^j y^k \tag{7.22}$$

Τέλος για κάθε $X \in \chi(TM)$ κάθε μέλος της $a^i(x, y, X) = \mathcal{L}_{X^c}(2G^i)$ αναπαριστά ένα $d-$διανυσματικό πεδίο.

1)Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι μια συμμετρία *Lie* για ένα *semispray* S αν και μόνο αν $\mathcal{L}_{X^c}(2G^i(x, y)) = a^i(x, y, X) = 0$.

2)Ένα διανυσματικό πεδίο $\xi^i(t)$ κατά μήκος μιας τροχιάς $\gamma(t)$ του *semispray* S είναι διανυσματικό πεδίο *Jacobi* αν και μόνο αν $\mathcal{L}_{\xi^c}\left(2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\right) = a^i\left(x, \frac{dx}{dt}, \xi\right) = 0.$

7.5 Γεωμετρικά αναλλοίωτα μιας ΣΔΕΔ

Τα γεωμετρικά αναλλοίωτα ενδιαφέροντός μας προκύπτουν από εφαρμογή μετασχηματισμών της μορφής $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x)$ στο σύστημα 7.1. Στόχος μας είναι να τα καθορίσουμε από δεδομένο *semispray* S χρησιμοποιώντας την επαγόμενη μη γραμμική συνοχή από αυτό.

Παραθέτουμε συγκεντρωμένα όλα τα γεωμετρικά αναλλοίωτα

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}^i = 2G^i - y^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \\
B^i_j = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - S\left(\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\right) - \frac{\partial G^i}{\partial y^r}\frac{\partial G^r}{\partial y^j} \\
B^i_{jk} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial B^i_j}{\partial y^k} - \frac{\partial B^i_k}{\partial y^j}\right) \\
B^i_{ljk} := \frac{\partial B^i_{jk}}{\partial y^l} \\
D^i_{jkl} := \frac{\partial F^i_{jk}}{\partial y^l} = \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}
\end{gathered} \tag{7.23}$$

Ο πρώτος όρος είναι και το πρώτο αναλλοίωτο που ορίσαμε μέσω της έκφρασης του S. Ο δεύτερος όρος είναι το δεύτερο αναλλοίωτο ή αλλιώς ενδομορφισμός $Jacobi$ και χρησιμεύει στη μελέτη των εξισώσεων $Jacobi$ αλλά και στη μελέτη των συμμετριών του S. Οι όροι B^i_{jk}, B^i_{ljk} είναι οι συνιστώσες του τρίτου και τέταρτου αναλλοίωτου και σχετίζονται άμεσα με το δεύτερο αναλλοίωτο. Ο πέμπτος όρος είναι και το πέμπτο αναλλοίωτο που είναι μια από τις μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστικού πεδίου της καμπυλότητας της συνοχής D.

Θεώρημα 7.6. *(Σύνδεση γεωμετρικών αναλλοίωτων με τη συνοχή N)*
1)Η καμπυλότητα R^i_{jk} της συνοχής N είναι το τρίτο αναλλοίωτο στοιχείο του $semispray$ S.
2)Το $Riemann - Christoffel$ τανυστικό πεδίο καμπυλότητας R^i_{jkl} της συνοχής D είναι το τέταρτο αναλλοίωτο στοιχείο του $semispray$ S.

8 Χώροι Finsler

Η βασική διαφορά μεταξύ αντικειμένων ενός *Riemann* χώρου και ενός *Finsler* χώρου είναι ότι στο δεύτερο χώρο υπάρχει επιπλέον εξάρτηση από τη διεύθυνση εκτός της θέσης. Η εξάρτηση αυτή της κατεύθυνσης ωστόσο δεν είναι αυθαίρετη και ανάλογα με το πρόβλημα επιβάλουμε τους κατάλληλους περιορισμούς. Το δρόμο προς τη γεωμετρία *Finsler* αρχικά τον έδειξε ο ίδιος ο *Riemann* όταν έψαχνε για πιο γενικευμένες μετρικές που ήταν της μορφής κάτι σε υπόριζο[7]. Μια δεύτερη σημαντική αναγκαιότητα χρήσης χώρων *Finsler* προήλθε από το λογισμό των μεταβολών όπου είναι απαραίτητη η εισαγωγή μιας μετρικής *Finsler* όπως και θα δούμε.

8.1 Η ιδέα της μετρικής

Ορισμός 8.1. Μια μετρική *Finsler* σε μια πολλαπλότητα καθορίζεται από μια οικογένεια μετρικών *Minkowski* $F_p \ni F : M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto F_p$ στον εφαπτόμενο χώρο T_pM.
Μια μετρική *Finsler* σε μια πολλαπλότητα M δίνεται από μια θετική συνάρτηση $F : TM \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε

$\boldsymbol{F_1}$)$F \in \mathcal{F}(\widetilde{TM})$ και μόνο συνεχής στη μηδενική τομή της προβολής $\pi : TM \to M$

$\boldsymbol{F_2}$)Η F είναι θετική και ομογενής τάξης 1 ως προς τις συντεταγμένες ίνας y, $F(x, ay) = aF(x, y)$, $a \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{F_3}$)Η συμμετρική διγραμμική μορφή $g_{(x,y)}$ είναι μη εκφυλισμένη και έχει σταθερό ίχνος $\forall (x, y) \in \widetilde{TM}$ και έχει τύπο

$$g_{(x,y)}(u, w) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[F^2 \left(x, y + su + tw\right)\right]\Big|_{t=s=0} \tag{8.1}$$

Η δυάδα $F^n = (M, F)$, με F μετρική *Finsler*, ονομάζεται χώρος *Finsler* και η διγραμμική μορφή $g_{(x,y)}$ ονομάζεται μετρικός τανυστής.

Θεώρημα 8.1. *(Ύπαρξη χώρων Finsler)*
Αν η πολλαπλότητα M είναι παρασυμπαγής τότε υπάρχουν συναρτήσεις $F : TM \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι κατάλληλες ως θεμελιώδεις συναρτήσεις για χώρους Finsler.

Απόδειξη.

Στην ουσία εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι αν η M είναι παρασυμπαγής τότε υπάρχει πάντα μια *Riemann* μετρική. Συνέπεια αυτού είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε την F ως $F(x,y) = \sqrt{g_x(y,y)}$. Ο μετρικός τανυστής g δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες ίνας και ταυτίζεται με τα g_x. □

Χρησιμοποιώντας την ομογένεια της F εύκολα βλέπουμε ότι η F^2 είναι ομογενής τάξης 2 και μπορούμε να γράψουμε το μετρικό τανυστή ως

$$g_{(x,y)}(y,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left[F^2\left(x, y + su\right)\right]\Big|_{s=0}, \qquad g_{(x,y)}(y,y) = F^2(x,y) \tag{8.2}$$

Παρατήρηση 8.1.
1)Το πιο τετριμμένο παράδειγμα ενός χώρου F^n είναι αυτός που προκύπτει από ένα *Riemann* χώρο με μετρικό τανυστή g_x αν ορίσουμε την F ως $F(x,y) = \sqrt{g_x(y,y)}$, $\forall (x,y) \in \widetilde{TM}$.

2)Γενικά αν ο $g_{(x,y)}(u,w)$ δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες ίνας τότε ο F^n μπορεί να αναχθεί σε ένα ημι-*Riemann* ή *Riemann* χώρο αν ο g_x είναι θετικά ορισμένος.

Πρόταση 8.1. *Ένας χώρος F^n ανάγεται σε ημι-Riemann χώρο αν και μόνο αν η θεμελιώδης συνάρτηση F ικανοποιεί την παρακάτω σχέση παραλληλογράμμου.*

$$F^2(x, y+u) + F^2(x, y-u) = 2F^2(x,y) + 2F^2(x,u),\ \forall y,u \in T_xM \tag{8.3}$$

Η αναπαράσταση του μετρικού τανυστή σε χάρτη με επαγόμενη βάση $B = \{e_i\}_{i=1,..,n}$ είναι

$$g_{(x,y)}(u,w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}u^i w^j \tag{8.4}$$

για $u = e_i$ και $w = e_j$

$$g_{(x,y)}(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} := g_{ij}(x,y) \tag{8.5}$$

οι συνιστώσες g_{ij} είναι συνιστώσες ενός συμμετρικού $d-$τανυστικού πεδίου τύπου (0,2).

8.2 Γεωμετρικά αντικείμενα σε ένα χώρο Finsler

Η συνθήκη ομογένειας F_2 είναι ιδιαίτερης σημασίας για τις ιδιότητες τον γεωμετρικών αντικειμένων γιατί σε ένα χώρο $Finsler$ εκτός από την εξάρτηση σε συντεταγμένες ίνας έχουμε και τη συνθήκη ομογένειας.

Θεώρημα 8.2. *Για ένα χώρο Finsler $F^n = (F, M)$ ισχύουν τα ακόλουθα*
1)Οι συναρτήσεις

$$p_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i} = F\frac{\partial F}{\partial y^i}$$

είναι συνιστώσες ενός $d-$συναλλοίωτου πεδίου στη δέσμη $\widetilde{TM}$.
2)Οι συναρτήσεις

$$C_{ijk} = \frac{1}{4}\frac{\partial F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} \tag{8.6}$$

είναι συνιστώσες ενός (0,3) αντισυμμετρικού $d-$τανυστικού πεδίου στη δέσμη, το οποίο ονομάζεται τανυστικό πεδίο του $Cartan$.
3)Η μορφή

$$\theta = p_i dx^i = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}dx^i = F\frac{\partial F}{\partial y^i}dx^i = \frac{1}{2}J^*(dF^2) \tag{8.7}$$

ορίζεται ολικά στη δέσμη και ονομάζεται μορφή του $Cartan$.
4)Η δυο-μορφή

$$\omega = d\theta = dp_i \wedge dx^i = \frac{1}{2}d(J^*(dF^2)) \tag{8.8}$$

ορίζεται ολικά στη δέσμη, αποτελεί μια συμπλεκτική δομή σε αυτή και ονομάζεται δυο-μορφή του $Cartan$.
5)Συμβατότητα μεταξύ συμπλεκτικής και εφαπτόμενης δομής

$$\omega(JX, Y) + \omega(X, JY) = 0,\ \forall X, Y \in \chi(TM) \tag{8.9}$$

Ιδιότητες:

1. $p_i y^i = F^2$

2. $y_i := g_{ij}y^j = g_{0i} = p_i$

3. $C_{ojh} := y^i C_{ijh} = 0$, $C_{j0h} = C_{jh0} = 0$

4. $F^2(x,y) = g_{ij}(x,y)y^i y^j$

5. $i_C\theta = 0$, $i_C\omega = \theta$

Ορίζουμε επίσης ως

$$\text{κανονικοποιημένο στοιχείο στήριξης} \quad l_i := \frac{1}{F}y_i = \frac{\partial F}{\partial y^i} \tag{8.10}$$

$$\text{γωνιακή μετρική } h_{ij} := F\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \tag{8.11}$$

τα παραπάνω συνδέονται με τον μετρικό τανυστή μέσω της σχέσης

$$g_{ij} = h_i + l_i l_j \tag{8.12}$$

Με την εισαγωγή των παραπάνω εννοιών είμαστε σε θέση να επαναδιατυπώσουμε τη συνθήκη για την οποία ένας χώρος $Finsler$, $F^n = (F, M)$ ανάγεται σε $Riemann$.

Πρόταση 8.2. *Για να είναι ένας χώρος Finsler, $F^n = (F, M)$ αναγόμενος σε Riemann χώρο θα πρέπει το τανυστικό πεδίο του Cartan, C_{ijk} να μηδενίζεται σε όλη τη δέσμη.*

8.3 Θεωρία μεταβολών και γεωδαισιακές

Κατά τα γνωστά έχουμε ένα χώρο $Finsler$, $F^n = (F, M)$. Για να μπορούμε να μετρήσουμε μήκη καμπυλών και να κάνουμε τέτοιου είδους υπολογισμούς αρκεί να έχουμε μια θετική συνάρτηση στη δέσμη. Μια άμεσα κατάλληλη συνάρτηση είναι η θεμελιώδης συνάρτηση F. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε γενικεύοντας το μήκος μιας καμπύλης $\gamma : [0,1] \to \gamma(I) \subseteq TM$ ως

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_0^1 F\left(\gamma, \frac{d\gamma}{dt}\right) dt \tag{8.13}$$

Παρατήρηση 8.2. Η ποσότητα $\mathcal{L}(\gamma)$

1)Είναι ανεξάρτητη χάρτη.

2)Είναι ανεξάρτητη παραμέτρου της γ λόγω ομογένειας της F.

3)Εξαρτάται μόνο από την εκάστοτε καμπύλη ενδιαφέροντος γ.

Υπάρχει ειδική παράμετρος s η οποία ονομάζεται μήκος τόξου και αναγκάζει την καμπύλη να έχει μοναδιαία ταχύτητα

$$F\left(\gamma(s), \frac{d\gamma}{dt}\right) = 1 \tag{8.14}$$

και συνδέεται με μια τυχαία παράμετρο

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} F\left(\gamma(t'), \frac{d\gamma}{dt'}\right) dt' \qquad t_0, t \in [0,1] \tag{8.15}$$

$$\frac{ds}{dt} = F\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\right) > 0 \qquad \forall t \in [0,1] \tag{8.16}$$

είναι δηλαδή αντιστρέψιμη επομένως η συνάρτηση f, $t = f(s)$ είναι αμφιδιαφόριση.
Αν για κάποια παράμετρο t ισχύει ότι

$$F\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\right) = \sigma\tau\alpha\theta \tag{8.17}$$

τότε η t συνδέεται με το μήκος τόξου s αφινικά ως $t = as + b$ με $a, b \in \mathbb{R}$.
Για να κάνουμε μεταβολή των εξισώσεων 8.13 χρησιμοποιούμε την οικογένεια καμπυλών

$$\gamma_\varepsilon : t \in [0,1] \to \left(\gamma^i(t), \varepsilon V^i(t)\right) \in M \tag{8.18}$$

οι οποίες είναι παραμορφώσεις της γ, ισχύει ότι $\gamma_\varepsilon(0) = \gamma(0), \quad \gamma_\varepsilon(1) = \gamma(1)$ και $V^i(0) = V^i(1) = 0$. Ο αριθμός ε είναι αρκετά μικρός για να ισχύει $Im\gamma_\varepsilon \subset U$ ώστε να μην ξεφεύγει η καμπύλη γ_ε από το χάρτη που μελετάμε την γ. Η γ_ε εκφράζεται στο χάρτη ως

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}_\varepsilon : [0,1] &\to \pi^{-1}(U) \\ t &\mapsto \widetilde{\gamma}_\varepsilon(t) = \left(x(t) + \varepsilon V(t), \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}\right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την γ_ε στην 8.13 έχουμε

$$\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = \int_0^1 F\left(x(t) + \varepsilon V(t), \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}\right) dt \tag{8.19}$$

Για να μελετήσουμε τα ακρότατα της 8.19 πρέπει να βρούμε τις γ_ε για τις οποίες ισχύει

$$\left.\frac{d\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{8.20}$$

$$\frac{d\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\int_0^1 F\left(x(t) + \varepsilon V(t), \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dV}{dt}\right) dt\right) = \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial F}{\partial y^i}\frac{dV^i}{dt}\right) dt \Rightarrow \tag{8.21}$$

$$\frac{d\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^i}\right)\right) V^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^i} V^i\right)\right) dt \overset{5.19}{\Rightarrow}$$

$$E_i(F) := \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^i}\right) = 0 \quad \text{Εξισώσεις } Euler - Lagrange \tag{8.22}$$

Όταν εμπλέκεται καμπύλη στους υπολογισμούς μας οι συντεταγμένες ίνας θα ορίζονται ως $y^i := \dfrac{dx^i}{dt}$.
Ορίζουμε την συνάρτηση ενέργειας μιας καμπύλης γ ως

$$\mathcal{E}(\gamma) := \int_0^1 F^2\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\right) dt \tag{8.23}$$

με τον ίδιο τρόπο μεταβάλλοντας παίρνουμε τις εξισώσεις

$$E_i(F^2) := \frac{\partial F^2}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^2}{\partial y^i}\right) = 0 \tag{8.24}$$

Μπορούμε να κάνουμε μια πιο γενική μελέτη αν ορίσουμε τον τελεστή $Euler - Lagrange$

$$E_i(\cdot) := \frac{\partial \cdot}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \cdot}{\partial y^i}\right) \tag{8.25}$$

Ιδιότητες:

1. $E_i(f)$ είναι $d-$μορφή $\forall f \in \mathcal{F}(TM)$
2. $E_i(f + ag) = E_i(f) + E_i(g)$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(TM)$, $a \in \mathbb{R}$
3. $E_i(f) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι πλήρης ανύψωση μιας συνάρτησης από την M.

Πρόταση 8.3. *Για κάθε ομαλή καμπύλη γ στην M, στο χώρο Finsler $F^n = (F, M)$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

$$\begin{gathered} E_i(F^2) = 2FE_i(F) - 2\frac{dF}{dt}\frac{\partial F}{\partial y^i} \\ \frac{dF^2}{dt} = -\frac{dx^i}{dt}E_i(F^2) \qquad \frac{dx^i}{dt}E_i(F^2) = 0 \end{gathered} \tag{8.26}$$

Θεώρημα 8.3. *Για ένα χώρο Finsler $F^n = (F, M)$*
1)Η συνάρτηση ενέργειας F^2 διατηρείται κατά μήκος των ακρότατων καμπυλών που ικανοποιούν την εξίσωση 8.24
2)Αν μια καμπύλη γ είναι λύση των εξισώσεων 8.24 *τότε είναι και λύση των εξισώσεων 8.22*
3)Αν μια καμπύλη γ είναι λύση των εξισώσεων 8.22 και έχει παράμετρο μήκους τόξου, τότε η γ είναι επίσης λύση των εξισώσεων 8.24

Ορισμός 8.2. Καλούμε μια καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$, γεωδαισιακή ενός χώρου $Finsler$ $F^n = (F, M)$ αν ικανοποιεί τις εξισώσεις 8.22 με $y^i := \dfrac{dx^i}{dt}$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την εξίσωση γεωδαισιακών αν κάνουμε την αντικατάσταση $F^2(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j$ στη σχέση 8.22

$$g_{ij}\left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\right) = \frac{dF}{dt}\frac{\partial F}{\partial y^i} \tag{8.27}$$

με $y^i := \dfrac{dx^i}{dt}$,

$$G^i(x,y) = \frac{1}{2}\gamma^i_{jk}(x,y)y^j y^k \tag{8.28}$$

και $\gamma^i_{jk}(x,y)$ είναι τα σύμβολα $Christoffel$ του μετρικού τανυστή g τα οποία δίνονται ως

$$\gamma^i_{jk}(x,y) = \frac{1}{2}g^{ir}(x,y)\left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r}\right) \tag{8.29}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το μήκος τόξου s οι εξισώσεις των γεωδαισιακών 8.27 παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \gamma^i_{jk}\left(x, \frac{dx}{ds}\right)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{8.30}$$

Είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο ότι η μεταβολή του συναρτησιακού της ενέργειας μας δίνει ένα ΣΔΕΔ και σύμφωνα με τη θεωρία του κεφαλαίου 4 ένα τέτοιο σύστημα καθορίζει ένα *semispray* S. Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα δούμε πώς το S γίνεται *spray* γιατί είναι ομογενές και η ροή του ταυτίζεται με τις καμπύλες-ακρότατα των εξισώσεων 8.24. Το S δίνεται ως

$$S = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{8.31}$$

όπου τα G^i δίνονται από τις σχέσεις 8.28 και προφανώς είναι δευτέρας τάξεως ομογενείς ως προς τα y λόγω των συμβόλων $Christoffel$, γ^i_{jk} τα οποία είναι μηδενικής τάξης ομογενή.

Πρόταση 8.4. *Σε ένα χώρο Finsler, $F^n = (F, M)$ η ροή του S είναι οι γεωδαισιακές καμπύλες με παράμετρο το μήκος τόξου s. Έτσι το S καλείται και γεωδαισιακό spray.*

Θεώρημα 8.4. *(Εναλλακτική μορφή των συντελεστών G^i)*
Οι συντελεστές του S δίνονται και ως

$$2G^i(x,y) = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial x^k}y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^i}\right) \tag{8.32}$$

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να φέρουμε τις εξισώσεις $Euler - Lagrange$ στη μορφή ΣΔΕΔ

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial x^j}\frac{dx^j}{dt} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}\frac{dy^j}{dt} \Rightarrow$$

$$-g_{ij}\frac{dy^j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial x^j}\frac{dx^j}{dt} \overset{g^{ki}}{=} \frac{dy^k}{dt} + \underbrace{g^{ki}\left(-\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial x^j}y^j\right)}_{2G^i}$$

□

Θεώρημα 8.5. *Το γεωδαισιακό spray S ενός χώρου Finsler, $F^n = (F, M)$ είναι το μοναδικό διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$i_S\omega = \frac{1}{2}dF^2 \tag{8.33}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα

1)Πρέπει να δείξουμε ότι το S είναι μοναδικό. Ξέρουμε ότι η συμπλεκτική δομή ω συνδέεται με την F μέσω της σχέσης $\omega = \frac{1}{2}d\left(J^*\left(dF^2\right)\right)$ και καθορίζει ένα ισομορφισμό $\chi(TM)\widetilde{\rightarrow}\Lambda^1(TM), \quad X \mapsto i_X\omega$. Εφόσον η παρακάτω απεικόνιση είναι ισομορφισμός το όρισμα X είναι μοναδικό.

2)Πρέπει να δείξουμε ότι το S είναι *semispray*. Για να είναι όντως το S *semispray* πρέπει $JS = C$. Από τη σχέση συμβατότητας της συμπλεκτικής και εφαπτόμενης δομής 8.9 για $Y = S$ έχουμε

$$\omega(JX, S) + \omega(X, JS) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega(X, JS) = -\omega(JX, S) = \frac{1}{2}dF^2(JX) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}X^i \tag{8.34}$$

$$\omega(C, X) = d\theta(C, X) = C(\theta(X)) - X(\theta(C)) - \theta[C, X] \Rightarrow$$

$$\omega(C, X) = C\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}\right)X^i = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}X^i \tag{8.35}$$

από τις 8.34 και 8.35 βλέπουμε ότι $\omega(JS, X) = \omega(C, X)$ και εφόσον το ω είναι μη εκφυλισμένο $C = JS$ άρα το S είναι *semispray*

3)Απόδειξη της εξίσωσης 8.33 σε χάρτη.

$$(i_S\omega)(X) = \omega(S,X) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial x^i}\left(y^i X^j - y^j X^i\right) + g_{ij}\left(-2G^i X^j - y^j X^i\right)$$
$$-\frac{1}{2}dF(X) = -\frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial x^i}X^i - \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}X^i$$

εφόσον το X είναι αυθαίρετο μετά από στοιχειώδεις πράξεις

$$2g_{ij}G^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial x^i}y^j - \frac{\partial F^2}{\partial x^i}\right)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση 8.32 κι επομένως το S είναι και γεωδαισιακό *spray*. □

Ορισμός 8.3. Για ένα χώρο *Finsler*, $F^n = (F, M)$
1)Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(M)$ λέμε ότι είναι συμμετρία *Lie* αν $[X^c, S] = 0$.
2)Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(M)$ λέμε ότι είναι αναλλοίωτο αν $X^c(F) = 0$.
3)Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ λέμε ότι είναι δυναμική συμμετρία αν $[X, S] = 0$
4)Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ λέμε ότι είναι συμμετρία *Cartan* αν $\mathcal{L}_X\omega = 0$.
5)Μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(TM)$ είναι σταθερά της κίνησης ή νόμος διατήρησης αν $Sf = 0$.

Παρατήρηση 8.3.
1)Αν $X \in \chi(M)$ είναι συμμετρία *Lie* τότε το X^c είναι δυναμική συμμετρία.
2)Αν $X \in \chi(M)$ είναι συμμετρία *Lie* έχουμε σε χάρτη

$$\mathcal{L}_{X^c}\left(2G^i\right) = X^c(2G^i) - 2G^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k}y^j y^k = 0$$

3)Αν $X \in \chi(M)$ είναι αναλλοίωτο και έχει ροή φ_t τότε $F \circ \varphi_t^c = F$ το οποίο σε χάρτη έχει αναπαράσταση $X^i\dfrac{\partial F}{\partial x^i} + y^j\dfrac{\partial X}{\partial x^j}\dfrac{\partial F}{\partial y^i} = 0$
4)Αν $X \in \chi(TM)$ είναι μια δυναμική συμμετρία με ροή φ_t και γ_ε είναι η ροή γεωδαισιακού *spray* τότε $\varphi_t \circ \gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon \circ \varphi_t$.
5)Συναρτήσεις της μορφής $f \in \mathcal{F}(TM)$ με $S(f) = 0$ ονομάζονται και πρώτα

ολοκληρώματα των εξισώσεων *Euler-Lagrange*.

Πρόταση 8.5. *Το γεωδαισιακό spray S ενός χώρου Finsler, $F^n = (F, M)$ είναι μια συμμετρία Cartan και επακολούθως η συνάρτηση F^2 είναι μια σταθερά της κίνησης.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $S(F^2) = 0$.
Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις 8.33 στο S

$$(i_S\omega)(S) = -\frac{1}{2}dF^2(S) = -\frac{1}{2}S(F^2) = 0$$

άρα η F^2 είναι σταθερά της κίνησης. Έχουμε επίσης ότι $d\omega = 0$ άρα και

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S\omega &= d_{i_S}\omega + i_S d\omega \\ \mathcal{L}_S\omega &= \frac{1}{2}d(dF^2) = 0\end{aligned}$$

οπότε το S είναι συμμετρία *Cartan*. □

Πρόταση 8.6. *Μια συμμετρία Cartan είναι και δυναμική συμμετρία για ένα χώρο Finsler, $F^n = (F, M)$*

Απόδειξη. Αν $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία *Cartan* τότε ισχύει ότι $X(F) = 0$ και $\mathcal{L}_X\omega = 0$.
Εφόσον το ω είναι μη εκφυλισμένο και ακριβές $d\omega = 0$ άρα

$$i_{[X,S]}\omega = \mathcal{L}_X(i_S\omega) - i_S\mathcal{L}_X\omega = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X\left(dF^2\right) = -\frac{1}{2}d\left(X(F^2)\right) = 0$$

οπότε $[X, S] = 0$ και έτσι το X είναι και δυναμική συμμετρία. □

Παρατήρηση 8.4. Για μια συμμετρία *Cartan* η εξωτερική και *Lie* παράγωγος μετατίθενται και έχουμε

$$d\mathcal{L}_X\theta = \mathcal{L}_X d\theta = \mathcal{L}_X\omega = 0$$

που σημαίνει ότι αν $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία *Cartan* τότε η μορφή $\mathcal{L}_X\theta$ είναι κλειστή.

Ορισμός 8.4. Μια συμμετρία *Cartan*, $X \in \chi(TM)$, λέγεται ακριβής αν η μορφή $\mathcal{L}_X\theta$ είναι ακριβής.

Θεώρημα 8.6. *(Το πρώτο θεώρημα της Noether για χώρους Finsler)*
Έστω ότι το $X \in \chi(TM)$ είναι μια ακριβής συμμετρία Cartan. Υπάρχει $f \in \mathcal{F}(TM) \ni df = \mathcal{L}_X \theta$ και επακολούθως η συνάρτηση $f - \theta(X)$ είναι σταθερά της κίνησης.

Απόδειξη.
Για να είναι σταθερά της κίνησης η συνάρτηση $f - \theta(X)$ πρέπει

$$S\left(f - \theta(X)\right) = 0 \Rightarrow d\left(f - \theta(X)\right)(S) = 0 \Rightarrow$$
$$\left(\mathcal{L}_X \theta - d_{i_X}\theta\right)(S) = i_X d\theta(S) = i_X \omega(S) = \frac{1}{2} dF^2(X) = 0$$

□

Πρόταση 8.7. *Για μια σταθερά της κίνησης $f \in \mathcal{F}(TM)$ το διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ που καθορίζεται από τη σχέση $i_X \omega = -df$, είναι μοναδικό και είναι μια ακριβής συμμετρία Cartan του χώρου Finsler, $F^n = (F, M)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $i_X \omega = -df$, τότε το $X \in \chi(TM)$ είναι μοναδικό και έχουμε ότι η $\mathcal{L}_X \theta = i_X \omega$ είναι ακριβής μορφή. Άρα $d\mathcal{L}_X \theta = \mathcal{L}_X d\theta = \mathcal{L}_X \omega = 0$ και $S(f) = df(S) = -i_X \omega(S) = i_S \omega(X) = -\frac{1}{2} dF^2(X) = -\frac{1}{2} X\left(F^2\right) = 0 \Rightarrow X(F^2) = 0$ κι επομένως το X είναι μια ακριβής συμμετρία $Cartan$. □

Θεώρημα 8.7. *(Δεύτερο Θεώρημα Noether για χώρους Finsler)*
Αν το διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι αναλλοίωτο για ένα χώρο Finsler, $F^n = (F, M)$ τότε η πλήρης ανύψωση του X^c είναι μια ακριβής συμμετρία Lie. Επίσης η συνάρτηση $\theta(X)$ είναι μια σταθερά της κίνησης.

Απόδειξη. Εφόσον το $X \in \chi(TM)$ είναι αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο ισχύει ότι $X^c(F) = 0$, για να είναι ακριβής συμμετρία $Cartan$ θα πρέπει $\mathcal{L}_{X^c}\theta = 0$.

$$\left(\mathcal{L}_{X^c}\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}\left(X^c(F^2)\right) = 0$$
$$\left(\mathcal{L}_{X^c}\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0$$

επομένως το $\mathcal{L}_{X^c}\theta = 0$ είναι ακριβές και $\mathcal{L}_{X^c}\omega = 0$ και έτσι το X^c είναι ακριβής συμμετρία *Cartan*. Το X^c είναι επιπλέον δυναμική συμμετρία σύμφωνα με την πρόταση 8.6 άρα και συμμετρία *Lie*. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα 8.6 για το X^c και έχουμε $\mathcal{L}_{X^c}\theta = df$ και $f - \theta(X^c) = \sigma\tau\alpha\theta$ όμως $\mathcal{L}_{X^c}\theta = 0$ άρα $f = 0$ δηλαδή $\theta(X^c) = \sigma\tau\alpha\theta$. Σε χάρτη έχει αναπαράσταση

$$\theta(X^c) = \theta(X) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}X^i$$

□

8.4 Συνοχή Cartan

Η συνοχή *Cartan* ανήκει σε μια οικογένεια συνοχών οι οποίες προκύπτουν από το γεωδαισιακό *spray* S και είναι μετρικές ως προς τη μετρική *Finsler*. Συγκεκριμένα η συνοχή αυτή καθορίζεται μοναδικά μέσω μιας συνθήκης συμβατότητας που εμπεριέχει τη συμπλεκτική δομή.

Ορισμός 8.5. Η μη γραμμική συνοχή που καθορίζεται από το γεωμετρικό *spray* S ενός χώρου *Finsler*, $F^n = (F, M)$ ονομάζεται συνοχή *Cartan*.

Πρόταση 8.8. *Η συνοχή Cartan έχει συντελεστές, σε χάρτη*

$$N^i_j = \gamma^i_{jk}y^k - C^i_{pj}\gamma^p_{ks}y^k y^j \tag{8.36}$$

Παρατήρηση 8.5.

1)Η συνοχή *Cartan*, όπως και γενικά μια μη γραμμική συνοχή, επάγει μια οριζόντια κατανομή τέτοια ώστε να ισχύει η γνωστή ανάλυση για τη διάσπαση της δέσμης και να έχουμε μια βάση *Berwald* .

2)Η συνοχή *Cartan* είναι ομογενής διότι οι συντελεστές N^i_j είναι ομογενείς τάξης ένα, γεγονός που προκύπτει από τις G^i που είναι ομογενείς δευτέρας τάξης.

Ισχύει λοιπόν και

$$N^i_j y^j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}y^j = 2G^i = \gamma^i_{jk}y^j y^k = \gamma^i_{00}$$

3)Λόγω του 2) οι αυτοπαράλληλες καμπύλες της συνοχής *Cartan* ενός χώρου *Finsler*, συμπίπτουν με τις γεωδαισιακές καμπύλες του ιδίου χώρου αν επιλέξουμε ως παράμετρο το μήκος τόξου s

$$\frac{dy^i}{dt} + N^i_j \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}$$

Για να μελετήσουμε τις συνθήκες μετρικότητας της συνοχής $Cartan$ θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τη δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο της. Το κάνουμε όπως ακριβώς σε προηγούμενο κεφάλαιο.

$$\nabla X^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \left(S(X^i) + N^i_j X^j\right) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

και εφαρμόζοντας στο μετρικό τανυστή $g = g_{ij}\delta y^i \otimes \delta y^j$ έχουμε κατά τα γνωστά

$$g_{ij|} = S(g_{ij}) - g_{mj}N^m_i - g_{im}N^m_j$$

Θεώρημα 8.8. *Το μετρικό τανυστικό πεδίο του χώρου F^n είναι συναλλοίωτα σταθερό ως προς τη δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο που επάγει η συνοχή Cartan.*

$$\nabla g = 0$$

Συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η συνοχή $Cartan$ είναι συμμετρική. Ωστόσο αυτή συνθήκη καθορίζει μόνο το συμμετρικό μέρος των N^i_j και όχι πλήρως όλους τους συντελεστές.

Θεώρημα 8.9. *Κάθε μη γραμμική συνοχή N που είναι συμβατή με το μετρικό τανυστή g, $\nabla g = 0$ έχει συντελεστές*

$$N^i_j := N^{ci}_j + O^{ki}_{jm} X^m_k \tag{8.37}$$

όπου

$$\begin{cases} X^m_k & \text{τυχαίο (1,1) } d\text{−τανυστικό πεδίο} \\ N^{ci}_j & \text{συντελεστές της συνοχής Cartan} \\ O^{ij}_{kl} := \frac{1}{2}(\delta^i_k \delta^j_l - g^{ij} g_{kl}) & \text{τελεστές Obata} \\ O^{*ij}_{kl} := \frac{1}{2}(\delta^i_k \delta^j_l + g^{ij} g_{kl}) & \text{τέτοιοι ώστε } O^{ij}_{kl} O^{*km}_{pj} = 0 \end{cases} \tag{8.38}$$

Απόδειξη.
Η μετρική συμβατότητα για τα N^i_j, N^{ci}_j όπως τα έχουμε δει δίνεται ως

$$S(g_{ij}) = g_{mj}N^{cm}_i + g_{im}N^{cm}_j$$
$$S(g_{ij}) = g_{im}N^m_j + g_{mj}N^m_i$$

αφαιρώντας τις έχουμε

$$g_{mj}(N^{cm}_i - N^m_i) + g_{im}(N^{cm}_j - N^m_j) = 0 \overset{g^{is}}{\Rightarrow} ..$$
$$O^{*is}_{jm}(N^{cm}_j - N^m_j) = 0$$

χρησιμοποιώντας της σχέση που συνδέει τους τελεστές *Obata* 8.38 έχουμε τελικά πως το παραπάνω σύστημα έχει λύσεις της μορφής 8.37. □

Θεώρημα 8.10. *(Απλουστευμένη έκφραση της συμπλεκτικής δομής ω)*
Η συμπλεκτική δομή ω έχει την εξής απλή έκφραση στη βάση Berwald που επάγεται από τη συνοχή Cartan

$$\omega = g_{ij}\delta y^j \wedge dx^i \tag{8.39}$$

Έστω ένας χώρος Finsler, $F^n = (F, M)$. Η μοναδική μη γραμμική συνοχή που μπορεί να συσχετιστεί με το γεωδαισιακό spray έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες

$$\nabla g = 0$$
$$\omega(hX, hY) = 0 \,\forall X, Y \in \chi(TM)$$

είναι η συνοχή Cartan.

Η πρώτη συνθήκη καθορίζει τους συντελεστές $N_{(ij)}$ ενώ η δεύτερη τους $N_{[ij]}$ και έτσι έχουμε πλήρη καθορισμό της συνοχής N. Γενικά η συμπλεκτική δομή μηδενίζεται αν και τα δυο ορίσματά της είναι είτε οριζόντια είτε κάθετα και έτσι μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη συμβατότητας μεταξύ των h, v και ω.

Πρόταση 8.9. *(Συνθήκη συμβατότητας ω με h, v)*
Έστω οι τελεστές h, v που επάγονται από μια συνοχή Cartan και αντιστοιχούν στη γνωστή

αποσύνθεση $T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM$. *Για αυτούς τους τελεστές ισχύει ότι* $\forall X, Y \in \chi(TM)$

$$\begin{cases} \omega(hX, hY) & = 0 \\ \omega(hX, Y) + \omega(X, hY) & = \omega(X, Y) \\ \omega(vX, Y) + \omega(X, vY) & = \omega(X, Y) \\ \omega(hX, Y) & = \omega(X, vY) \end{cases} \tag{8.40}$$

8.5 Συνοχές Finsler

Οι συνοχές $Finsler$ είναι οι 4 $N-$Γραμμικές συνοχές των $Cartan$, $Berwald$, $Chern-Rund$ και $Hashiguchi$. Για κάθε μια από αυτές η βασική μη γραμμική συνοχή N είναι αυτή του $Cartan$, το οριζόντιο τανυστικό πεδίο της απόκλισης μηδενίζεται και το κάθετο είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Για μια $N-$γραμμική συνοχή $D = (N, F, C)$ έχουμε και τις αντίστοιχες συναλλοίωτες παραγώγους D^h, D^v των οποίων η δράση στο μετρικό τανυστή είναι

$$\begin{aligned} g_{ij|k} &= \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - g_{mj}F^m_{ik} - g_{im}F^m_{jk} = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - 2F_{(ij)k} \\ g_{ij}|_k &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - g_{mj}C^m_{ik} - g_{im}C^m_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - 2C_{(ij)k} \end{aligned} \tag{8.41}$$

όπου

$$\begin{aligned} F_{ijk} &:= g_{in}F^n_{jk} \\ C_{ijk} &:= g_{in}C^n_{jk} \end{aligned}$$

και τα $g_{ij|k}$, $g_{ij}|_k$ είναι συνιστώσες $d-$τανυστικών πεδίων (0,3). Από τις πέντε συνιστώσες στρέψης της D θα ασχοληθούμε μόνο με την $h-h$, $T^i_{jk} = F^i_{jk} - F^i_{kj} = 2F^i_{[jk]}$ και την $v-v$, $S^i_{jk} = C^i_{jk} - C^i_{kj} = 2C^i_{[jk]}$.

Θεώρημα 8.11. *Συνοχή $Cartan(C\Gamma)$*
Έστω F^n. Υπάρχει μοναδική $N-$γραμμική συνοχή $D = (N, F, C)$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα

$C_1) D^i_j := y^i_{|j} = 0$ *δηλαδή* $N^i_j = F^i_{kj} y^k$

$C_2)$ *Η* D *είναι* $h-$*μετρική* $D^h g = 0$ *σε χάρτη*

$$g_{ij|k} = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - g_{mj} F^m_{ik} - g_{im} F^m_{jk} = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - 2F_{(ij)k} = 0 \Rightarrow \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} = 2F_{(ij)k}$$

$C_3)$ *Η* D *είναι* $h-$*συμμετρική*

$$T^i_{jk} = 0 \Rightarrow F^i_{jk} = F^i_{kj} \Leftrightarrow F_{i[jk]} = 0$$

$C_4)$ *Η* D *είναι* $v-$*μετρική* $D^v g = 0$

$$g_{ij}|_{\,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - g_{mj} C^m_{ik} - g_{im} C^m_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - 2C_{(ij)k} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 2C_{(ij)k}$$

$C_5)$ *Η* Δ *είναι* $v-$*συμμετρική*

$$S^i_{jk} = 0 \Rightarrow C^i_{jk} = C^i_{kj} \Leftrightarrow C_{i[jk]} = 0$$

Συνοχή Berwald$(B\Gamma)$
Έστω F^n. *Υπάρχει μοναδική* $N-$*γραμμική συνοχή* $D = (N, F, C)$ *η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα*

$B_1) D^i_j := y^i_{|j} = 0$ *δηλαδή* $N^i_j = F^i_{kj} y^k$

$B_2) F^2_{|i} = 0$ *δηλαδή* $\dfrac{\delta F^2}{\delta x^i} = 0$

$B_3)$ *Η* D *είναι* $h-$*συμμετρική*

$$T^i_{jk} = 0 \Rightarrow F^i_{jk} = F^i_{kj} \Leftrightarrow F_{i[jk]} = 0$$

$B_4) C^i_{jk} = 0$

$B_5) P^i_{jk} = 0$ *δηλαδή* $F^i_{jk} = \dfrac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$

Παρατήρηση 8.6.
Τα αξιώματα C_1, C_2 συνδέονται άμεσα με τα αξιώματα B_1, B_2 μέσω της σχέσης

$$F^2_{|k} = \left(g_{ij}y^iy^j\right)_{|k} = g_{ij|k}y^iy^j + 2g_{ij}y^iD^j_k$$

Θεώρημα 8.12. *Συνοχή* $Chern - Rund(CR\Gamma)$
Έστω F^n. *Υπάρχει μοναδική* $N-$*γραμμική συνοχή* $D = (N, F, C)$ *η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα*

$CR_1) D^i_j := y^i_{|j} = 0$ *δηλαδή* $N^i_j = F^i_{kj}y^k$

$CR_2)$*Η* D *είναι* $v-$*μετρική* $D^v g = 0$

$$g_{ij}|_{\,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - g_{mj}C^m_{ik} - g_{im}C^m_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - 2C_{(ij)k} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 2C_{(ij)k}$$

$CR_3)$*Η* D *είναι* $h-$*συμμετρική*

$$T^i_{jk} = 0 \Rightarrow F^i_{jk} = F^i_{kj} \Leftrightarrow F_{i[jk]} = 0$$

$CR_4) C^i_{jk} = 0$

Παρατήρηση 8.7.
Η συνοχή $CR\Gamma$ έχει ίδιους οριζόντιους συντελεστές με την συνοχή $C\Gamma$ και κάθετους με την $B\Gamma$.

Θεώρημα 8.13. *Συνοχή* $Hashiguchi(H\Gamma)$
Έστω F^n. *Υπάρχει μοναδική* $N-$*γραμμική συνοχή* $D = (N, F, C)$ *η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα*

$H_1) D^i_j := y^i_{|j} = 0$ *δηλαδή* $N^i_j = F^i_{kj} y^k$

$H_2) F^2_{|i} = 0$ *δηλαδή* $\dfrac{\delta F^2}{\delta x^i} = 0$

$H_3)$ *H* D *είναι* $h-$*συμμετρική*

$$T^i_{jk} = 0 \Rightarrow F^i_{jk} = F^i_{kj} \Leftrightarrow F_{i[jk]} = 0$$

$H_4) P^i_{jk} = 0$ *δηλαδή* $F^i_{jk} = \dfrac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$

$H_5)$ *H* D *είναι* $v-$*μετρική* $D^v g = 0$

$$g_{ij}|_k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - g_{mj} C^m_{ik} - g_{im} C^m_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - 2C_{(ij)k} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 2C_{(ij)k}$$

$H_6)$ *H* D *είναι* $v-$*συμμετρική*

$$S^i_{jk} = 0 \Rightarrow C^i_{jk} = C^i_{kj} \Leftrightarrow C_{i[jk]} = 0$$

Παρατήρηση 8.8.
1)Τα H_1,H_2 καθορίζουν τη συνοχή $Cartan$ και τους οριζόντιους συντελεστές της συνοχής $B\Gamma$.
2)Τα $H_5 - H_6$ καθορίζουν τους κάθετους συντελεστές όπως στη συνοχή $Cartan$.

Πρόταση 8.10. *Ιδιότητες συνοχών Finsler :*
1)$F_{|k} = 0,\ F|_k = \frac{1}{F} y_k$
2)$F^2_{|k} = 0,\ F^2|_k = 2y_k$
3)$y_{i|k} = 0,\ y_{i|k} = g_{ik}$

Ταυτότητες Ricci για μια συνοχή Finsler

$$
\begin{aligned}
X^i_{|k|h} - X^i_{|h|k} &= X^r R^i_{rkh} - X^i\big|_r R^r_{kh} \\
X^i_{|k}\big|_h - X^i_{|h}\big|_k &= X^r P^i_{rkh} - X^i_{|r} C^r_{kh} - X^i\big|_r P^r_{kh} \\
X^i\big|_k\big|_h - X^i\big|_h\big|_k &= X^r S^i_{rkh}
\end{aligned}
\tag{8.42}
$$

Ιδιότητες τανυστικού πεδίου καμπυλότητας:

$$
\begin{aligned}
&R_{ijkh} + R_{jikh} = 0 \qquad && P_{ijkh} + P_{jikh} = 0 \qquad && S_{ijkh} + S_{jikh} = 0 \\
&R_{ijkh} + R_{ijhk} = 0 && && S_{ijkh} + S_{ijhk} = 0
\end{aligned}
\tag{8.43}
$$

$$
\begin{aligned}
R^i_{0hk} &= C_{ijk|0} \qquad & P^i_{0hk} &= P^i_{hk} \qquad & S^i_{0hk} &= 0 \\
P_{ijk} &= C_{ijk|0} \\
\sum_{ijk} R_{ijk} &= 0
\end{aligned}
\tag{8.44}
$$

Εφόσον όλες οι συνοχές *Finsler* στηρίζονται στη συνοχή *Cartan*, κληρονομούν όλες τις αυτοπαράλληλες καμπύλες τις συνοχή *Cartan* για την οποία ισχύει $F^i_{jk} y^k = N^i_j$ και σε χάρτη έχουμε

$$
\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) := \frac{d^2x^i}{dt^2} + N^i_j \frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{8.45}
$$

$$
\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{8.46}
$$

που είναι προφανώς ισοδύναμες διότι για αντικαθιστώντας $F^i_{jk} y^k = N^i_j$ στην 8.45 παίρνουμε απευθείας την 8.46.

Θεώρημα 8.14. *Μια καμπύλη γ στη δέσμη είναι αυτοπαράλληλη της συνοχής Cartan αν και μόνο αν είναι γεωδαισιακή μιας συνοχής Finsler*

Παρατήρηση 8.9.

1)Γνωρίζουμε ότι αυτοπαράλληλες καμπύλες της συνοχής $Cartan$ με παράμετρο μήκους τόξου s, είναι γεωδαισιακές ενός χώρου $Finsler$, $F^n = (F, M)$

2)Συνδυάζοντας το θεώρημα 8.14 με το 1) έχουμε ότι μια $\gamma = \gamma(s)$ είναι γεωδαισιακή ενός χώρου $Finsler$, $F^n = (F, M)$ αν και μόνο αν είναι γεωδαισιακή μιας συνοχής $Finsler$.

3)Συνέπεια του 2) είναι μια αξιοσημείωτη ελευθερία επιλογής συνοχής στη μελέτη γεωδαισιακών ενός χώρου $Finsler$, $F^n = (F, M)$.

8.6 Γεωδαισιακή Απόκλιση

Έστω S το γεωδαισιακό *spray* ενός $Finsler$, $F^n = (F, M)$, ,ε συντελεστές G^i και μια συνοχή $Cartan$ με συντελεστές N^i_j. Το S σε αυτή την περίπτωση είναι οριζόντιο

$$S = y^i \frac{\delta}{\delta x^i}$$

Η συνοχή $Cartan$ επάγει μια δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο

$$\nabla X^i = S(X^i) + N^i_j X^j = y^j \frac{\delta}{\delta x^j} X^i = X^i_{|j} y^j$$

Επαναδιατυπώνουμε τις εξισώσεις 8.45 με τη βοήθεια της ∇

$$\nabla \left(\frac{dx^i}{dt} \right) = \left(\frac{dx^i}{dt} \right)_{|j} \frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{8.47}$$

Κάνουμε μια μεταβολή της κλασικής μορφής

$$\widetilde{x}^i(t) = x^i(t) + \varepsilon \xi^i(t)$$

και αντικαθιστώντας στην 8.47

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} \xi^j + 2 \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{d\xi^j}{dt} = 0 \tag{8.48}$$

και σε συναλλοίωτη μορφή

$$\nabla^2 \xi^i + B^i_j \xi^j = 0 \tag{8.49}$$

$$B^i_j := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - S\left(\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\right) - \frac{\partial G^i}{\partial y^k}\frac{\partial G^k}{\partial y^j} = R^i_{jk} y^k = R^i_{ljk} y^l y^k \tag{8.50}$$

όπου οι συνιστώσες R^i_{jk} είναι του τανυστικού πεδίου καμπυλότητας της συνοχής $Cartan$ και οι R^i_{ljk} είναι η οριζόντια καμπυλότητα μιας από τις συνοχές $Finsler$. Όπως έχουμε πει και προηγουμένως συνδέονται μέσω της σχέσης $R^i_{jk} = R^i_{ljk} y^l$. Οι εξισώσεις 8.50 αποτελούν τη συνθήκη συμμετριών Lie.

Πρόταση 8.11. *Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ είναι συμμετρία Lie αν και μόνο αν*

$$\nabla^2 X^i + B^i_j X^j = 0 \tag{8.51}$$

Για μια συνοχή $Finsler$ ισχύει ότι $D^i_j = 0$ άρα η 8.51 παίρνει τη μορφή

$$\left(X^i_{|j|k} - R^i_{jmk} X^m\right) y^j y^k = 0 \tag{8.52}$$

αυτή η εξίσωση είναι στην ουσία το πάτημά μας για να ορίσουμε την $flag$ καμπυλότητα του X ως

$$R(x, y, X) := \frac{R_{lijk} y^l y^k X^i X^j}{\left(g_{lk} g_{ij} - g_{li} g_{jk}\right) y^l y^k X^i X^j} \tag{8.53}$$

και από την 8.53 μπορούμε να πάρουμε άλλη μια σχέση που εμπλέκει και τον ενδομορφισμό $Jacobi$

$$B_{ij}(x, y) X^i X^j = R(x, y, X) F^2(x, y) h_{ij}(x, y) X^i X^j \tag{8.54}$$

Ορισμός 8.6. Ένας χώρος $Finsler$, $F^n = (F, M)$ λέμε ότι έχει βαθμωτή καμπυλότητα $R(x, y)$ αν η $flag$ καμπυλότητα 8.53 δεν εξαρτάται από τα $X \in \chi(TM)$ σε κάθε σημείο $(x, y) \in TM$.

Πρακτικά ο ορισμός 8.6 μας λέει ότι για να έχουμε βαθμωτή καμπυλότητα η σχέση 8.54

πρέπει να μπορεί να γραφεί ως

$$B_{kj} = RF^2 h_{kj} \Rightarrow B^i_j \overset{g^{ki}}{=} RF^2 h^i_j \tag{8.55}$$

αντικαθιστώντας την 8.55 στην 8.50 έχουμε τη συνθήκη για συμμετρίες *Lie* όταν έχουμε F^n που δέχεται βαθμωτή καμπυλότητα

$$\nabla^2 \xi^i + RF^2 h^i_j \xi^j = 0 \tag{8.56}$$

Ορισμός 8.7. Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(M)$ λέμε ότι είναι συμμετρία *Lie* μιας συνοχής *Cartan* αν $\mathcal{L}_{X^c} Y = [X^c, Y] \in \chi^h(TM)$, $\forall Y \in \chi^h(TM)$

Τροποποιώντας τη συνθήκη $\mathcal{L}_{X^c} Y = [X^c, Y]$ για το διάνυσμα βάσης $\dfrac{\delta}{\delta x^i}$ έχουμε μια ισοδύναμη

$$\left[X^c, \frac{\delta}{\delta x^i}\right] = -\mathcal{L}_{X^c}(N^i_j)\frac{\partial}{\partial y^j} \in \chi^h(TM)$$

θα πρέπει δηλαδή $\mathcal{L}_{X^c}(N^i_j) = 0$ όμως $y^j \mathcal{L}_{X^c}(N^i_j) = \mathcal{L}_{X^c}(2G^i)$. Επομένως μια συμμετρία *Lie* μιας συνοχής *Cartan* είναι και *Lie* συμμετρία του χώρου F^n.

Μέρος III

Εφαρμογές στη Βαρύτητα

9 Γιατί γεωμετρία Finsler

Τα τελευταία χρόνια εμφανίστηκαν αρκετά επιχειρήματα υπέρ της χρήσης των χώρων *Finsler* στη βαρύτητα. Μερικά από τα βασικότερα είναι

1. Είναι ένα γενικευμένο είδος γεωμετρίας
2. Ανισοτροπιών και ανομοιογενειών στην κοσμολογία
3. Σκοτεινής ύλης και ενέργειας
4. Η ομογένεια της ακτινοβολίας υποβάθρου
5. Fly-by anomaly

Χρησιμοποιώντας μια γενικευμένη γεωμετρία μπορεί να χρειαστεί να τροποποιήσουμε βασικές αρχές και νόμους διατήρησης. Για παράδειγμα σε κάποιες προσεγγίσεις στην κβαντική βαρύτητα από χώρο *Finsler* υπάρχουν είτε τροποποιήσεις όπως (μικροί) όροι παραβιάσεων στην αρχή της ισοδυναμίας καθώς και στην αναλλοιώτητα ως προς τους μετασχηματισμούς *Lorentz* για χαμηλές ενέργειες είτε γενικά παραβιάσεις σε κλασικούς νόμους διατήρησης.

Γενικά υπάρχουν δυο είδη βαρύτητας *Finsler*, η μετρική και η μη μετρική. Η πρώτη έχει να κάνει με συνοχές οι οποίες είναι συμβατές με τη μετρική δομή με συνθήκη $\nabla g = 0$, σε αυτή την κατηγορία οι δυο βασικότερες $d-$συνοχές είναι αυτή του *Cartan* και η κανονική. Οι μετρικές προσεγγίσεις στη βαρύτητα *Finsler* είναι όμοιες με τις κλασσικές $pseudo - Riemann$ προσεγγίσεις στη μετρική βαρύτητα όπως η *GR*. Η δεύτερη κατηγορία των μη μετρικών συνοχών έχει ως βασικές $d-$συνοχές αυτές των *Berwald* και *Chern*. Σε αυτή την κατηγορία ακριβώς λόγω της μη μετρικότητας εμφανίζονται προβλήματα στους ορισμούς μεγεθών και με μετρήσεων.

Ένα αξιοσημείωτο παράδειγμα εμφάνισης μιας μετρικής *Finsler* στην *SR* προκύπτει αντικαθιστώντας την ομάδα *Lorentz* από μια μη γραμμική ομάδα, περιορισμούς συμμετριών και την 'μικρή' παραμόρφωση της μετρικής *Minkowski*.

9.1 Αδυναμία των μετρικών Finsler

Οι μετρικές *Finsler* σε αντίθεση με τις μετρικές (*pseudo*−)*Riemann* δεν ορίζουν πλήρεις γεωμετρίες[10]. Για να ορίσουμε μια γεωμετρία (*pseudo*−)*Riemann* σε μια πολλαπλότητα M χρειαζόμαστε μια μετρική g, μια συνοχή που στην περίπτωση αυτή έχουμε πάντα τη συνοχή $Levi-Civita$ η οποία καθορίζεται πλήρως από τη μετρική συμβατότητα $\nabla g = 0$ και το μηδενισμό της στρέψης. Για να ορίσουμε όμως μια γεωμετρία *Finsler* χρειαζόμαστε μια μετρική δομή g στη δέσμη, μια μη γραμμική συνοχή N και μια γραμμική συνοχή που είναι προσαρμοσμένη στην N. Αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε μια $Levi-Civita$ συνοχή για μια μετρική τύπου *Sasaki* g, η οποία δεν είναι παρά μια επέκταση της μετρικής *Finsler* g_F στη δέσμη με τύπο

$$\begin{aligned} g = g_{ab} du^a \otimes du^b =^F g_{ij}(u) dx^i \otimes dx^j +^F g_{ab}(u) e^a \otimes e^b \\ e^a = dy^a + N_i^a(u) dx^i \end{aligned} \tag{9.1}$$

όπου $u = (x, y) \in TM$ και $du = (dx, dy)$. Ωστόσο αυτή η συνοχή $Levi-Civita$ $\nabla = \left\{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}$ δε χρησιμοποιείται στη γεωμετρία *Finsler* γιατί δεν είναι συμβατή με τη διάσπαση που ορίζει η μη γραμμική συνοχή δηλαδή η δράση μιας παράλληλης μετατόπισης με την $\nabla = \left\{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}$ δε διατηρεί τη διάσπαση $T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM$.

Τα κύρια προβλήματα για να κάνουμε μια γενίκευση *Finsler* της *GR* είναι να εισαγάγουμε μια ανολόνομη πολλαπλότητα TM, μια μετρική g με (*pseudo*−)*Riemann* υπογραφή και να αποφασίσουμε ποια μετρικά συμβατή συνοχή θα χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε τις εξισώσεις πεδίου.

9.2 Παρατηρούμενα μεγέθη στην GR

Στην ΓΘΣ ο χωροχρόνος μοντελοποιείται ως μια ομαλή πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μια *Lorentzian* μετρική g με υπογραφή $(-, +, +, +)$, ένα προσανατολισμό και ένα χρονικό προσανατολισμό(“Βέλος του χρόνου”)[8], [11] .

Ορισμός 9.1. Καλούμε ως παρατηρητές τις ομαλές καμπύλες $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ για τις οποίες ισχύει ότι

$$g_{ab}(\gamma(t))\dot{\gamma}^a(t)\dot{\gamma}^b(t) < 0 \tag{9.2}$$

Αν διαλέξουμε την παράμετρο μήκους τόξου τ (με κατάλληλες διαστάσεις) η 9.2 γίνεται

$$g_{ab}(\gamma(\tau))\dot{\gamma}^a(\tau)\dot{\gamma}^b(\tau) = -1 \tag{9.3}$$

στα πλαίσια της ΓΘΣ αυτή η πάραμετρος λέγεται ιδιόχρονος και δίνεται από τη σχέση

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|g_{ab}(\gamma(t))\dot{\gamma}^a(t)\dot{\gamma}^b(t)|}dt \tag{9.4}$$

Η σχέση 9.4 μας δίνει ένα τρόπο μέτρησης του χρόνου. Σύμφωνα με το αξίωμα της μέτρησης του χρόνου της ΓΘΣ κάθε κινούμενο ρολόι κατά μήκος μιας καμπύλης γ μετράει τον ιδιόχρονο ανεξαρτήτως από τη σύσταση του ίδιου του ρολογιού. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο τρόπος μέτρησης του χρόνου συνδέεται και εξαρτάται άμεσα από τη γεωμετρία μέσω του g_{ab} στη σχέση 9.4.

Η επόμενη σημαντική δομή είναι αυτή της αιτιότητας. Η δομή αυτή μας βοηθάει να απαντήσουμε αν κάποια γεγονότα στο χωροχρόνο M έχουν αιτιατή επιρροή σε κάποια άλλα γεγονότα και πού βρίσκονται αυτά. Πιο συγκεκριμένα, ένα γεγονός $x \in M$ μπορεί να επηρεάσει ένα γεγονός $x' \in M$ αν και μόνο αν υπάρχει μια συνεχής, χρονοειδής ή φωτοειδής καμπύλη που ξεκινάει από το x και περνάει από το x'. Όλα τα γεγονότα που μπορούν να επηρεαστούν από το x αποτελούν το αιτιακό μέλλον του x και αντίθετα τα γεγονότα που μπορούν να επηρεάσουν το x αποτελούν το αιτιακό παρελθόν του. Αυτή η αιτιακή δομή συνδέεται άμεσα με τη γεωμετρία μέσω τον αιτιακών καμπυλών (φωτοειδών ή χρονοειδών).

Ο μετρικός τανυστής μας καθορίζει και τον ορισμό των παρατηρούμενων μεγεθών αλλά και της δυναμικής όπως θα δούμε.

Ορισμός 9.2. Καλούμε ως παρατηρούμενα μεγέθη τα τανυστικά πεδία, τα οποία είναι και ομαλές τομές της μορφής $\Phi : M \rightarrow T^{r,s}M$ με

$$T^{r,s}M = TM^{\otimes r} \otimes TM^{\otimes s} \tag{9.5}$$

Η δυναμική των παρατηρούμενων μεγεθών δίνεται από τις εξισώσεις κίνησης μιας δράσης της μορφής

$$S_M = \int_M d^4x \sqrt{-g}\mathcal{L}\left(g, \Phi, \partial\Phi, ..\right) \tag{9.6}$$

η δράση αυτή θα πρέπει να είναι προφανώς αναλλοίωτη στη δράση της ομάδας των διαφορομορφισμών της M, Diff(M) διότι οι εξισώσεις κίνησης είναι τανυστικές εξισώσεις. Για να κάνουμε όμως πραγματικά μια μέτρηση και να πάρουμε αριθμητικά αποτελέσματα χρειαζόμαστε και ένα πλαίσιο στον εφαπτόμενο χώρο T_xM το οποίο θα ονομάσουμε f. Ως προς το f λοιπόν μπορούμε να αναπτύξουμε τις συνιστώσες του $\Phi(x)$ οι οποίες είναι και ποσότητες που μετράμε στα πειράματα. Η βάση φ μπορεί να επιλεχθεί κατάλληλα από τον παρατηρητή έτσι ώστε να ισχύει

$$g_{ab}f_i^a f_j^b = \eta_{ij} \tag{9.7}$$

Εφόσον ο ιδιόχρονος ταυτίζεται με το μήκος τόξου της καμπύλης μπορεί ο εκάστοτε παρατηρητής να επιλέξει το $f_0 = \dot{\gamma}(\tau)$. Η επιλογή αυτή είναι κανονική και το ορθοκανονικό πλαίσιο που προκύπτει είναι το πιο εύχρηστο πλαίσιο για υπολογισμούς.

Αν τώρα έχουμε δύο διαφορετικούς παρατηρητές που συναντιούνται σε ένα σημείο και τα πλαίσια τους είναι ορθοκανονικά όπως περιγράψαμε πιο πάνω μπορούμε να μεταβούμε από το ένα πλαίσιο στο άλλο με έναν μετασχηματισμό *Lorentz*, Λ και επομένως οι συνιστώσες ενός παρατηρούμενου μεγέθους μετασχηματίζονται ως

$$(\Phi')^{\,i_1,..,i_r}_{\,j_1,..,j_s} = \Lambda^{i_1}_{k_1}..\Lambda^{i_r}_{k_r}\Lambda^{m_1}_{j_1}..\Lambda^{n_s}_{j_s}\Phi^{k_1..k_r}_{m_1..m_s} \tag{9.8}$$

Αυτός ακριβώς ο τρόπος μετασχηματισμού μεταξύ δυο πλαισίων παρατηρητών είναι η τοπική αναλλοιώτητα *Lorentz* και είναι συνέπεια της επιλογής που κάναμε χρησιμοποιώντας τη *Lorentzian* μετρική. Στις *Lorentzian* πολλαπλότητες η ταχύτητα του παρατηρητή ευθύνεται για το διαχωρισμό χώρου-χρόνου που βλέπει ο παρατηρητής.

Η μετρική g εκτός από τη βοήθεια που μας παρέχει ως προς τους γεωμετρικούς ορισμούς μεταφέρει και τη βαρυτική αλληλεπίδραση, παίζει δηλαδή το ρόλο και του δυναμικού πεδίου της βαρύτητας. Στην ουσία δεν επιβάλει πώς θα κινηθούν τα υλικά πεδία αλλά επηρεάζεται και από αυτά. Αυτό φαίνεται από τη δράση *Einstein-Hilbert*

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int\limits_M d^4x\sqrt{-g}R \tag{9.9}$$

η οποία μαζί με τη δράση για τα υλικά πεδία 9.6 μας δίνει τη συνολική δράση την οποία αν μεταβάλουμε παίρνουμε τις εξισώσεις πεδίου

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{9.10}$$

Οι πιο πολλές θεωρίες κβαντικής βαρύτητας όπως οι γεωμετροδυναμικές(κανονική και βρόχων), ιστοριών(*spin foam*) ή *causal dynamical triangulations* υποδεικνύουν ότι είτε η γεωμετρία χρειάζεται τροποποίηση ή διαχωρισμό του χωροχρόνου σε χώρο και χρόνο. Γενικά αυτές οι θεωρίες εισαγάγουν μη τανυστικά αντικείμενα που με τη σειρά τους μπορούν να δημιουργήσουν την ανάγκη του σπασίματος της γενικής συναλλοιώτητας.

10 Βαρύτητα Finsler

Στα πλαίσια της γεωμετρίας *Finsler* θα δούμε ότι μπορούμε να κάνουμε έναν καθαρό ορισμό των παρατηρητών έναν λίγο πιο περίπλοκο ορισμό των παρατηρούμενων μεγεθών και μια φυσική γενίκευση της αιτιακής δομής της ΓΘΣ. Το μοντέλο που θα αναπτυχθεί είναι επίσης χρήσιμο για μοντελοποίηση μικρών μεταβολών από μια θεωρία μετρικής βαρύτητας. Όλη η παρακάτω ανάλυση βασίζεται στις εργασίες [4, 5, 3, 1]

10.1 Βασικές έννοιες στο χωροχρόνο Finsler

Αρχικά δουλεύουμε στον κλασικό χάρτη $(TU, \Phi = (x^i, y^i))$ στη δέσμη που επάγεται από τον χάρτη $(U, \varphi = (x^i)$ στην πολλαπλότητα με

$$y = y^a \frac{\partial}{\partial x^a}, \qquad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \qquad \overline{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial y^a} \tag{10.1}$$

Ξεκινάμε έχοντας μια χρονοειδή καμπύλη γ και αν κάνουμε την αντικατάσταση

$$F'(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \sqrt{|g_{ab}(\gamma(t))\gamma^a(t)\dot{\gamma}^b(t)|} \tag{10.2}$$

αρχικά βλέπουμε ότι για την F' πρέπει να ισχύει $F' : TM \to \mathbb{R}$. Παίρνουμε λοιπόν μια "άυθαίρετη" συνάρτηση $F : TM \to \mathbb{R}$ και αντικαθιστώντας την στη σχέση 9.4 έχουμε

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt \tag{10.3}$$

Η σχέση αυτή είναι αρκετά σημαντική γιατί μας παρέχει τον πιο γενικευμένο γεωμετρικό τρόπο να εκφράσουμε το αξίωμα της μέτρησης του χρόνου όπου ο ιδιοχρόνος εξαρτάται τοπικά από τη θέση και την ταχύτητα αλλά και τη δράση για ένα σωματίδιο με μάζα. Αυτό σημαίνει ότι η μέτρηση του ιδιοχρόνου δεν εξαρτάται από τη δομή του εκάστοτε ρολογιού και επίσης οι τροχιές των παρατηρητών και των σωματιδίων με μάζα είναι τα ακρότατα της μεταβολής του 10.3.

Η αντικατάσταση 10.2 είναι η σύνδεση της *Lorentzian* γεωμετρίας με τη γεωμετρία

$Finsler$

Για να έχουν ουσιαστικό νόημα οι δυο παραπάνω σχέσεις 10.2 και 10.3 πρέπει να ισχύουν τα αξιώματα:

F_1)$F(x, y) \geq 0$ θετικότητα

F_2)Η F να είναι συνεχής και ομαλή στη δέσμη και απλά συνεχής στη μηδενική τομή

F_3)Η F να είναι ομογενής βαθμού 1 ως προς τις συντεταγμένες ίνας y
$F(x, \lambda y) = |\lambda|\, F(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση 10.1.
F_1)Μας εγγυάται θετικότητα του μήκους μιας καμπύλης.
F_2)Το μήκος τόξου μιας καμπύλης εξαρτάται ομαλώς από τη μεταβολή της καμπύλης μέχρι την κρίσιμη τιμή $F = 0$.
F_3)Το μήκος τόξου μιας καμπύλης είναι ανεξάρτητο σε αλλαγές παραμέτρου και από διευθύνσεις κάθετες στην καμπύλη.
1)Μπορούμε να κάνουμε ανάκτηση της $Lorentzian$ μετρικής από τη 10.2 ως

$$^{F}g_{ab}(x, y) = \frac{1}{2}\overline{\partial}_a \overline{\partial}_b F^2(x, y) \tag{10.4}$$

η οποία για y χωροειδές ταυτίζεται με την g_{ab} ενώ για y χρονοειδές με την -g_{ab}. Ωστόσο για $F = 0$ έχουμε παθογένεια και η F δεν είναι διαφορίσιμη. Αυτό είναι σημαντικό πρόβλημα για οτιδήποτε θέλουμε να ορίσουμε από την F όπως συνοχές, καμπυλότητα ή χρονοειδείς γεωδαισιακές έτσι κάνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 10.1. Χωροχρόνος $Finsler$ (M, L, F) καλείται μια $Hausdorff$, παρασυμπαγής, συνεκτική ομαλή πολλαπλότητα εφοδιασμένη με τις συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $L, F : TM \to R$ ώστε να ισχύουν

L_1)Η L είναι ομαλή στην $\widetilde{TM} = TM - \{0\}$

L_2)Η L είναι ομογενής βαθμού $n \geq 2$ ως προς τις συντεταγμένες ίνας
$L(x, \lambda y) = \lambda^n L(x, y), \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ και ορίζει την F μέσω της σχέσης

$$F(x, y) = |L(x, y)|^{\frac{1}{n}} \tag{10.5}$$

L_3)Η L είναι αντιστρεπτή $|L(x, -y)| = |L(x, y)|$

L_4)Η Εσσιανή

$$^{L}g_{ab}(x, y) = \frac{1}{2}\overline{\partial}_a \overline{\partial}_b L(x, y) \tag{10.6}$$

είναι μη εκφυλισμένη στο $TM \setminus A$ όπου το A έχει μηδενικό μέτρο και δεν περιέχει το σύνολο $\{(x, y) \in TM | L(x, y) = 0\}$

L_5) $\forall x \in M$ το σύνολο

$$\Omega_x = \{y \in T_x M | L(x, y) = 1,\ g_{ab}(x, y) \text{ έχει υπογραφή } (\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon)\} \tag{10.7}$$

όπου $\varepsilon := \dfrac{L(x, y)}{|L(x, y)|}$, εμπεριέχει ένα μη κενό κλειστό και συνεκτικό σύνολο
$S_x \subseteq \Omega_x \subset T_x M$

Η θεμελιώδης συνάρτηση $Finsler$ που επάγεται από την L αυτομάτως ικανοποιεί τα αξιώματα F_1), F_2) και F_3). Επίσης η μετρική $Finsler$ 10.4 είναι μη εκφυλισμένη στην $TM \setminus (A \cup \{L = 0\})$ όπου A όπως ορίστηκε παραπάνω στο L_4). Θα βασιστούμε λοιπόν στη συνάρτηση L για να κάνουμε επέκταση των ορισμών συνοχών, καμπυλότητας και της $null$ δομής $F = 0$.

Οι χωροχρόνοι $Finsler$ που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο είναι αναλλοίωτοι ως προς την αντιστροφή του χρόνου και αυτό γιατί το ολοκλήρωμα 10.3 είναι αναλλοίωτο σε αναπαραμετρήσεις που εμπεριέχουν χρονική αντιστροφή.

Ο ρόλος των συναρτήσεων L, ${}^{L}g_{ab}$ στον χωρόχρονο *Finsler* είναι για την επέκταση των γεωμετρικών αντικειμένων σε μεγαλύτερο πεδίο ορισμού το $TM \setminus A$. Αυτή ακριβώς η επέκταση μας επιτρέπει να έχουμε μια βιώσιμη φωτοειδή δομή.

Η συνθήκη L_5 μας εγγυάται την ύπαρξη χρονοειδών διανυσμάτων τα οποία ορίζονται στο κέλυφος S_x των μοναδιαίων χρονοειδών διανυσμάτων. Στο S_x επίσης η υπογραφή της μετρικής ${}^{L}g_{ab}$ είναι $(\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon)$ και έτσι το πρόσημο του ε ορίζει μια χρονοειδή κατεύθυνση. Δυστυχώς είναι αδύνατο ανάγουμε ένα χωροχρόνο *Finsler*, με μια μετρική σταθερής υπογραφής σε όλο το χώρο, σε ένα μετρικό *Lorentzian* χωροχρόνο. Εκτός από τον παραπάνω περιορισμό μπορούμε να πούμε ότι ο χωροχρόνος *Finsler* είναι μια γενίκευση του *Lorentzian*.

Ο παραπάνω ορισμός για το χωροχρόνο *Finsler* δεν καλύπτει όλο το εύρος των μετρικών *Finsler* που υπάρχουν. Συγκεκριμένα για τη μετρική FR

$$F(x,y) = \sqrt{\widetilde{g}_{ab} y^a y^b} + b_a y^a \tag{10.8}$$

την οποία μπορούμε να τη δούμε ως μια μικρή διαταραχή από τη *Lorentzian* γεωμετρία $(M, \widetilde{g})$ και b μια μη μηδενική μορφή, δεν υπάρχει ομαλή συνάρτηση $L : TM \setminus 0 \to \mathbb{R}$ και πραγματικός αριθμός $r \geq 2$ έτσι ώστε να ισχύει $|L|^{1/r} = F$. Αυτό σημαίνει ότι η μετρική 10.8 δεν ορίζει χωροχρόνο *Finsler* όπως παραπάνω. Δεν είναι πραγματικό πρόβλημα όμως διότι η μετρική 10.8 δεν ορίζεται στους φωτοειδής κώνους της $\widetilde{g}$ γεγονός που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να μελετήσουμε φωτοειδείς γεωδαισιακές.

10.2 Αιτιακή Δομή στο χώρο Finsler

Μια καλή κατασκευή μιας αιτιακής δομής πρέπει να περιέχει έναν ακριβή ορισμό των χρονοειδών διανυσμάτων και επακολούθως έναν καθαρό ορισμό της έννοιας των παρατηρητών. Επίσης πρέπει να είμαστε σε θέση να περιγράψουμε την φωτοειδή κίνηση έτσι ώστε να μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του φωτός.

Ουσιαστικά ο ορισμός τον αιτιακών καμπυλών δίνεται από το χωρισμό των εφαπτόμενων χώρων σε χρονοειδή, χωροειδή και φωτοειδή διανυσματικά πεδία. Στη συνέχεια θα δούμε μια κατασκευή ανάλογη για τον χωρόχρονο *Finsler* 10.1.

Ορισμός 10.2. Ως ένα παρατηρητή σε ένα *Finsler* χωροχρόνο καλούμε μια καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \gamma(I) \subseteq M$ τέτοια ώστε τα διανυσματικό πεδίο $\dot{\gamma}$ εμπεριέχεται $\forall t \in I$ μέσα στο σύνολο $C_{\gamma(t)}$ ή στο μοναδιαίο κέλυφος $S_{\gamma(\tau)}$ αν η καμπύλη γ έχει παραμετροποίηση ιδιοχρόνου.

Το σύνολο S_x ορίζεται από τη σχέση $|L(x,y)| = 1$ και επιπλέον από την επιλογή του θετικού χρονικού προσανατολισμού και είναι το σύνολο των θετικών μοναδιαίων χρονικών διανυσμάτων. Επίσης κατασκευάσουμε το κυρτό σύνολο $C_x = \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda S_x \subset T_x M$ το οποίο είναι σημαντικό για την ερμηνεία των στοιχείων του S_x ως εφαπτόμενα διανύσματα σε καμπύλες παρατηρητών.

Επίσης το σύνορο του $C_{\gamma(t)}$, $\partial C_{\gamma(t)}$ γεννάται από φωτοειδή διανύσματα $y \in T_x M$ τέτοια ώστε $L(x,y) = 0$, το $\partial C_{\gamma(t)}$ είναι δηλαδή φωτοειδές. Το αποτέλεσμα αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι το S_x είναι κλειστό και έτσι το $\partial C_{\gamma(t)}$ πρέπει να είναι φωτοειδές και επομένως η ${}^L g_{ab}$ δεν μπορεί να είναι εκφυλισμένη.

10.3 Γεωδαισιακές και Συνοχή Cartan

Οι παρατηρητές που ακολουθούν τροχιές όπως αυτές των σημειακών μαζών που κάνουν ελεύθερη πτώση ονομάζονται αδρανειακοί και στην ουσία είναι αυτοί οι παρατηρητές που μπορούν να αγνοήσουν τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις. Οι τροχιές των αδρανειακών παρατηρητών δίνονται ως ακρότατα της σχέσης 9.4 και ως αναλογία στο χωρόχρονο *Finsler* θα απαιτήσουμε να δίνονται ως ακρότατα της σχέσης 10.3.

Μεταβάλλοντας την 10.3 έχουμε τις εξισώσεις

$$\ddot{\gamma}^{\alpha} + N^a_b(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma}^b = 0 \tag{10.9}$$

και οι συναρτήσεις N^a_b είναι οι συντελεστές τις συνοχής *Cartan* δίνονται ως

$$N^a_b = \frac{1}{4}\overline{\partial}_b \left[{}^F g^{ac} \left(y^d \partial_d \overline{\partial}_c F^2 - \partial_c F^2 \right) \right] \tag{10.10}$$

Η συνοχή *Cartan* είναι το ανάλογο της συνοχής *Levi−Civita* για *Lorentzian* γεωμετρίες.

Σε περίπτωση μετρικής βαρύτητας $Finsler$ οι συναρτήσεις N_b^a δίνονται ως

$$N_b^a = \Gamma_{bc}^a y^c \tag{10.11}$$

όπου τα Γ_{bc}^a είναι τα σύμβολα $Christoffel$ της συνοχής $Cartan$ και επίσης οι τανυστές καμπυλότητας S_{kl}^j, C_{abc} μηδενίζονται. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι οι τανυστές S_{kl}^j, C_{abc} μετράνε κατά πόσο έχουμε απόκλιση από τη μετρική γεωμετρία.

Στο κεφάλαιο 9 είδαμε πως η εξίσωση 10.9 μοντελοποιείται στη δέσμη ανυψώνοντας την καμπύλη γ στην $\Gamma = (\gamma, \dot{\gamma})$ στη δέσμη και απαιτώντας να είναι οριζόντια.

$$\dot{\Gamma} = \dot{\gamma}^\alpha \partial_a + \ddot{\gamma}^\alpha \overline{\partial}_a = \dot{\gamma}^\alpha \partial_a - \dot{\gamma}^b N_b^a \overline{\partial}_a = \dot{\gamma}^a \delta_a \tag{10.12}$$

με $\dot{\gamma}^\alpha := y^a$. Οπότε η κανονική ανύψωση Γ μιας γεωδαισιακής του χώρου $Finsler$ θα πρέπει να είναι ροή του $spray$ $S = y^a \delta_a$. Το θέμα ωστόσο είναι η γενίκευση σε φωτοειδείς γεωδαισιακές όπου και εμφανίζονται δυο προβλήματα. Πρώτο και βασικότερο οι συντελεστές 10.10 δεν είναι καλώς ορισμένοι για $F = 0$ και έτσι χρειάζεται να εκφράσουμε τους συντελεστές συναρτήσει της L:

$$N_b^a = \frac{1}{4}\overline{\partial}_b \left[{}^L g^{ac} \left(y^d \partial_d \overline{\partial}_c L - \partial_c L \right) \right] \tag{10.13}$$

Το δεύτερο πρόβλημα προέρχεται από τη μεταβολή της δράσης 10.3 η οποία μηδενίζεται ταυτοτικά, για φωτοειδής καμπύλες. Η λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα πολλαπλασιαστή $Lagrange$ κ

$$S[\gamma, \lambda] = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(\gamma, (t), \dot{\gamma}(t)) + \lambda(t) \left[L(\gamma, (t), \dot{\gamma}(t)) - \kappa \right] \right) dt \tag{10.14}$$

Η δράση μας δίνει ισοδύναμες εξισώσεις κίνησης με αυτές της σχέσης 10.9.

10.4 Διαδικασία Μέτρησης στο χωρόχρονο Finsler

Η γεωμετρία στα πλαίσια της φυσικής, ένας από τους λόγους που είναι τόσο σημαντική είναι γιατί μας ορίζει τη δομή της αιτιότητας, τις επιτρεπτές τροχιές των παρατηρητών, τις πιθανές παρατηρήσεις και τη σχέση μεταξύ παρατηρήσεων από διαφορετικούς παρατηρητές. Η ίδια η γεωμετρία επίσης μας καθορίζει μια συγκεκριμένη κατηγορία από πλαίσια κατάλληλα για μετρήσεις, τα ορθοκανονικά και πώς αυτά συνδέονται στο ίδιο σημείο από τους μετασχηματισμούς $Lorentz$.

Όπως τα γεωμετρικά αντικείμενα σε ένα χώρο $Finsler$ εξαρτώνται από ένα σημείο της δέσμης (x, y) αντίστοιχα θα απαιτήσουμε και τα παρατηρούμενα μεγέθη να έχουν τέτοια εξάρτηση. Βέβαια ο ρόλος της ταχύτητας του παρατηρητή στο χωρόχρονο $Finsler$ είναι σαφώς πιο περίπλοκος σε σχέση με αυτόν στη $Lorentzian$ γεωμετρία γιατί εκτός από το χωρισμό χώρου-χρόνου εμπλέκεται και στη μέτρηση των παρατηρούμενων μεγεθών. Άμεση επιπλοκή αυτού είναι διαφορετική αντιμετώπιση για για κινούμενους παρατηρητές στο ίδιο χωροχρονικό σημείο.

Για την ακρίβεια θα απαιτήσουμε να είναι ομογενείς συναρτήσεις στη δέσμη. Ωστόσο δεν θα κάνουμε απευθείας γενίκευση του 9.2 διότι αν πάμε στη δέσμη ένα (r, s) τανυστικό πεδίο θα έχει 2^{r+s} συνιστώσες κάτι το οποίο απλά μπλέκει τα πράγματα διότι στη φύση δεν παρατηρούμε τόσες συνιστώσες. Θα ορίσουμε λοιπόν τα παρατηρούμενα μεγέθη στην οριζόντια υποδέσμη HTM διότι οι ίνες τις είναι τετραδιάστατες, συνδέεται άμεσα με την συνοχή μας $(Cartan)$ και κατ επέκταση με τις γεωδαισιακές.

Ορισμός 10.3. Καλούμε ως παρατηρούμενο μέγεθος σε ένα χωροχρόνο $Finsler$ τα οριζόντια τανυστικά πεδία (που είναι ομαλές τομές Φ) της τανυστικής δέσμης

$$H^{r,s}TM = HTM^{\otimes r} \otimes H^{*}TM^{\otimes s} \tag{10.15}$$

Θα ερμηνεύουμε την ποσότητα $\Phi(x, y)$ ως το πεδίο που μετρήθηκε από έναν παρατηρητή στο σημείο $x \in M$ ο οποίο έχει ταχύτητα $y \in T_xM$.

Ορισμός 10.4. Καλούμε ως παρατήρηση ενός παρατηρούμενου μεγέθους Φ από έναν παρατηρητή γ για ιδιόχρονο τ τη μέτρηση των συνιστωσών του οριζόντιου τανυστικού πεδίου $\Phi(x, y)$ ως προς τη βάση f του οριζόντιου εφαπτόμενου χώρου $H_{(x,y)}TM$ στο $x = \gamma(\tau)$, $y = \dot{\gamma}(\tau)$.

Καλούμε ως ορθοκανονικό πλαίσιο παρατήρησης, ενός παρατηρητή γ για ιδιόχρονο τ, μια βάση f του οριζόντιου εφαπτόμενου χώρου $H_{(x,y)}TM$ στο $x = \gamma(\tau)$, $y = \dot{\gamma}(\tau)$ για το οποίο επίσης ισχύει ότι $y = \pi_* f_0$ και είναι ορθοκανονική ως προς τη μετρική $Finsler$:

$$^F g_{ab}(x,y) f_i^a f_j^b = -\eta_{ij} \tag{10.16}$$

Μια σημαντική ιδιότητα θεωριών μετρικής βαρύτητας είναι ότι οποιαδήποτε ορθοκανονικά πλαίσια παρατήρησης f, f' στο σημείο $x \in M$ σχετίζονται μοναδικά από ένα μετασχηματισμό $Lorentz$. Αυτό το είδαμε για την GR ωστόσο η τροποποίηση του για την περίπτωσή μας δεν είναι τόσο απλή. Ξεκινάμε λοιπόν προσπαθώντας να βρούμε μια απεικόνιση μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων $H_{(x,f_0)}TM$ και $H_{(x,f_0')}TM$ η οποία θα διατηρεί την ορθοκανονικότητα. Κοινώς χρειάζεται να κατασκευάσουμε μια παράλληλη μετατόπιση που θα διατηρεί την ορθοκανονικότητα. Άρα στην ουσία χρειαζόμαστε μια νέα συνοχή στο HTM η οποία να είναι μετρική. Ευτυχώς για μας υπάρχει τέτοια συνοχή και είναι η γραμμική συνοχή του $Cartan$:

Ορισμός 10.5. Η γραμμική συνοχή $Cartan$ ∇ ορίζεται ως η συνοχή στη δέσμη για την οποία ισχύουν

$$\begin{cases} \nabla_{\delta_a}\delta_b = F^a_{bc}\delta_c, \quad F^c_{ab} = \frac{1}{2}\left({}^F g\right)^{cd}\left[\delta_a\left({}^F g\right)_{bd} + \delta_b\left({}^F g\right)_{ad} - \delta_d\left({}^F g\right)_{ab}\right] \\ \nabla_{\delta_a}\overline{\partial}_b = F^a_{bc}\overline{\partial}_c \\ \nabla_{\overline{\partial}_a}\delta_b = C^a_{bc}\delta_c, \quad C^c_{ab} = \frac{1}{2}\left({}^F g\right)^{cd}\left[\overline{\partial}_a\left({}^F g\right)_{bd} + \overline{\partial}_b\left({}^F g\right)_{ad} - \overline{\partial}_d\left({}^F g\right)_{ab}\right] \\ \nabla_{\overline{\partial}_a}\overline{\partial}_b = F^a_{bc}\overline{\partial}_c \end{cases} \tag{10.17}$$

Η γραμμική συνοχή $Cartan$ προφανώς είναι συμβατή με τη μη γραμμική συνοχή $Cartan$ δηλαδή με τη διάσπαση $T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM$. Έχοντας τώρα τη συνοχή ορίζουμε την απεικόνιση της παράλληλης μετατόπισης ως, όπως ακριβώς την ορίσαμε στο υποκεφάλαιο 5.1. Το σημαντικό είναι ότι η απεικόνιση αυτή θα εξαρτάται από την καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία. Ωστόσο εφόσον τα δύο σημεία μας έχουν το ίδιο σημείο βάσης x, είναι στοιχεία της ίδιας ίνας της δέσμης άρα μας αρκεί να περιοριστούμε σε κάθετες καμπύλες(εμπεριέχονται πλήρως στην ίνα). Επιπλέον απαιτούμε η καμπύλη που ενώνει τα σημεία ενδιαφέροντος να είναι αυτοπαράλληλη της γραμμικής συνοχής $Cartan$ και την ορίζουμε ως $u : [0,1] \to TM$. Η τελευταία απαίτηση κάνει την καμπύλη αυτή μοναδική τοπικά. Ορίζουμε λοιπόν την απεικόνιση της παράλληλης μετατόπισης ως $P_u : T_{(x,f_0)} \to T_{(x,f_0')}$. Εύκολα βλέπουμε ότι η $P_u f$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $H_{(x,f_0')}TM$ ως προς τη μετρική $^F g_{ab}(x, f_0')$ και εφόσον και η

f' είναι ορθοκανονική βάση ως προς τη μετρική ${}^F g_{ab}(x, f'_0)$ υπάρχει μοναδικός συνήθης μετασχηματισμός *Lorentz* $P_u f \xrightarrow{\Lambda} f'$. Συνοψίζοντας ο γενικευμένος μετασχηματισμός *Lorentz* που ορίσαμε είναι ένας συνδυασμός της παράλληλης μετατόπισης κατά μήκος της καμπύλης $u : [0, 1] \to TM$ και του μοναδικού συνήθους μετασχηματισμού *Lorentz*, Λ.

Οι μετασχηματισμοί παρατηρητών σε ένα χωροχρόνο *Finsler* είναι πιο σύνθετοι διότι εμπεριέχουν μια παράλληλη μετατόπιση στην κάθετη υποδέσμη προτού γίνει η δράση του κλασικού μετασχηματισμού *Lorentz* για να πάμε από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Προφανώς στο μετρικό όριο η κάθετη συναλλοίωτη παράγωγος είναι τετριμμένη και έτσι δεν υπάρχει κάποια αλλαγή ως προς την κάθετη δέσμη όταν γίνει παράλληλη μετατόπιση ως προς την καμπύλη u.

Με αυτή ακριβώς η γενίκευση των μετασχηματισμών *Lorentz* στο χωροχρόνο *Finsler* μπορούμε να αποσυνθέσουμε οποιοδήποτε μετασχηματισμό παρατηρητή σε ένα κλασικό μετασχηματισμό *Lorentz* και μια παράλληλη μετατόπιση έτσι ώστε να μπορούμε να συγκρίνουμε/ταυτίσουμε τις ταχύτητές τους. Συνέπεια αυτού είναι ότι μπορούμε να σώσουμε την έννοια της αναλλοιώτητας κατά *Lorentz* και να μην έχουμε τη συνήθη παραβίαση όπως σε κάποιους χωροχρόνους *Finsler*.

Σε αυτό το σημείο είμαστε όσο κοντά γίνεται στο ανάλογο της GR αλλά υπάρχει μια βασική διαφορά. Στη GR ορίσαμε τα παρατηρούμενα μεγέθη ως τανυστικά πεδία στην M, στη γεωμετρία *Finsler* τα ορίσαμε ως οριζόντια τανυστικά πεδία στη δέσμη. Ο ορισμός αυτός στη δέσμη έχει τη σημαντική διαφορά ότι μπορεί να έχουμε μια παραπάνω εξάρτηση στα παρατηρούμενα μεγέθη από την ταχύτητα του παρατηρητή που είναι εν γένει μη τανυστικό μέγεθος.

10.5 Δράση και Θεωρία Πεδίου

Το βασικότερο πρόβλημα στις μέχρι τώρα απόπειρες κατασκευής συναρτησιακών δράσης σε χωροχρόνο *Finsler* είναι αυτό σύγκλισης του συναρτησιακού της δράσης η οποία δε βασίζεται πάντα στη δέσμη.

Για να μιλήσουμε για εξισώσεις πεδίου πρέπει πρώτα να γενικεύσουμε τη δράση 9.6 στο χωροχρόνο *Finsler*. Η γενίκευση αυτή έχει δυο μέρη, το πρώτο είναι η ανύψωση κάποιου κατάλληλου στοιχείου όγκου από την πολλαπλότητα στη δέσμη και το δεύτερο να γενικεύσουμε την Λαγρανζιανή $\mathcal{L}$ ώστε να έχει ως ορίσματα πεδία από το χωροχρόνο $Finsler$.

Ο προσδιορισμός της μορφής όγκου για την περίπτωσή μας ακολουθεί αυτόν μιας μετρικής γεωμετρίας δηλαδή επιλέγουμε μια μορφή Vol_G μιας κατάλληλης μετρικής G στη δέσμη. Η μετρική G που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η ανύψωση της μετρικής ${}^F g$ στην οριζόντια δέσμη συν ένα κάθετο μέρος έτσι ώστε να ορίζεται συνολικά σε όλη τη δέσμη. Η συνολική μετρική G λοιπόν μπορεί να επιλεχθεί κανονικά και είναι μια μετρική $Sasaki$:

Ορισμός 10.6. Καλούμε ως μετρική $Sasaki$ τη μετρική στη δέσμη που ορίζεται ως

$$G = -{}^F g_{ab} dx^a \otimes dx^b - \frac{{}^F g_{ab}}{F^2} \delta y^a \otimes \delta y^b \tag{10.18}$$

Ο παράγοντας $1/F^2$ στο δεύτερο όρο υπάρχει για να είναι συνολικά η G ομογενής βαθμού 0 διότι η κάθε μορφή δy^a είναι ομογένειας 1. Έχουμε λοιπόν ότι για μια συνάρτηση $f : TM \to \mathbb{R}$

$$\int_{TM} Vol_G f(x, y) \tag{10.19}$$

Για να γίνει η f κατάλληλη ως Λαγκρανζιανή του προβλήματος θα απαιτήσουμε επίσης να είναι ομογενής γιατί τα πεδία που θα έχει ως ορίσματα είναι και αυτά ομογενή. Δυστυχώς αυτή ακριβώς η ιδιότητα μας παρουσιάζει πρόβλημα σύγκλισης του ολοκληρώματος 10.19 και για να την ξεπεράσουμε αλλάζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης.

Ορισμός 10.7. Καλούμε ως μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη ενός χωροχρόνου $Finsler$ το σύνολο $\Sigma \subset TM$ για το οποίο ισχύει $F|_\Sigma = 1$.

Οπότε τώρα μπορούμε να "διώξουμε" την ομογένεια που οδηγεί σε απόκλιση της 10.19, περιορίζοντας το χωρίο ολοκλήρωσης σε μια υποδέσμη όπου $F = 1$. Να σημειωθεί ότι η ομογένεια των εμπλεκόμενων πεδίων εγγυάται ότι οι εξισώσεις μπορούν να επεκταθούν σε όλη τη δέσμη. Περιορίζουμε το ολοκλήρωμα 10.19 στην Σ, περιορίζοντας μαζί και τη μετρική

$$\tilde{G} = G|_\Sigma \tag{10.20}$$

και έχουμε τελικά τη μορφή ολοκλήρωσής μας.

Όσον αφορά τη γενίκευση της Λαγκρανζιανής, θα περιοριστούμε σε πεδία που είναι $p-$μορφές Φ και τις πρώτες παραγώγους τους $D\Phi$ και ο περιορισμός αυτός σχετίζεται με τις εξισώσεις $Klein-Gordon$ και $Maxwell$ που ανήκουν στην κατηγορία του περιορισμού. Η γενίκευση θα γίνει με αντικατάσταση των αντικειμένων της μετρικής βαρύτητας GR δηλαδή

$$g \rightarrow G \tag{10.21}$$

$$\Phi \rightarrow \Phi \in HTM \tag{10.22}$$

και επομένως η νέα γενικευμένη Λαγρανζιανή είναι συνάρτηση στη δέσμη. Εδώ βέβαια παρουσιάζεται το πρόβλημα αν η $D\Phi$ είναι οριζόντια ή όχι. Εν γένει δεν είναι, οπότε το αντιμετωπίζουμε απαιτώντας εξ αρχής το πεδίο να ισχύει $\Phi \rightarrow \Phi \in TTM$ και χρησιμοποιώντας τον οριζόντιο προβολικό τελεστή παίρνουμε τις οριζόντιες συνιστώσες του

$$P^H\Phi = \frac{1}{p!}dx^{a_1} \wedge .. \wedge dx^{a_p}\Phi\left(\delta_{a_1}, .., \delta_{a_p}\right) \tag{10.23}$$

και επίσης επιβάλουμε ως δεσμό να μηδενίζονται οι κάθετες συνιστώσες. Άρα έχουμε την ολική δράση

$$S_M = \int\limits_{\Sigma} Vol_{\tilde{G}}\left[\mathcal{L}\left(G, \Phi, D\Phi\right) + \lambda\left(1 - P^H\right)\Phi\right]\Big|_{\Sigma} \tag{10.24}$$

την οποία αν μεταβάλουμε ως προς τις οριζόντιες συνιστώσες του πεδίου Φ παίρνουμε τις εξισώσεις πεδίου ενώ μεταβάλλοντας τις κάθετες συνιστώσες προσδιορίζουμε τους πολλαπλασιαστές $Lagrange$ λ.

Να σημειωθεί ότι στο μετρικό όριο όπου $L\left(x, y\right) = g_{ab}(x)y^a y^b$ η γεωμετρία $Finsler$ γίνεται γεωμετρία $Lorentz$ δηλαδή έχουμε τον τανυστή καμπυλότητας του $Riemann$, $R^a_{bc}(x, y) = -R^a_{dbc}(x)y^d$, τα γενικευμένα σύμβολα $Christoffel$ ανάγονται στα συνήθη $\Gamma^{\delta a}_{bc}(x, y) = \Gamma^a_{bc}(x)$, η μη γραμμική συνοχή $Cartan$ είναι τώρα γραμμική και έχει συντελεστές $N^a_b(x, y) = \Gamma^a_{bc}(x)y^c$ και η γραμμική συναλλοίωτη παράγωγος $Cartan$ ανάγεται στη συνοχή $Levi-Civita$, γίνεται δηλαδή μόνο οριζόντια και τετριμμένη κάθετα. Οι εξισώσεις πεδίου λοιπόν μετατρέπονται σε αυτές που προκύπτουν από την κλασσική δράση 9.6.

10.6 Βαρύτητα

Η μελέτη της βαρύτητας είναι στην ουσία η μελέτη της δυναμικής του ίδιου του χωροχρόνου *Finsler*. Ακολουθούμε ακριβώς την ίδια λογική με το προηγούμενο υποκεφάλαιο και γενικεύουμε τη δράση *Einstein-Hilbert* 9.9. Το μόνο που χρειάζεται προσέξουμε είναι πώς θα γενικεύσουμε το βαθμωτό *Ricci*, R στη γεωμετρία *Finsler*, κάτι το οποίο θα γίνει μέσω της καμπυλότητας που ορίζει η μη γραμμική συνοχή *Cartan*, που δίνεται από τη σχέση 5.46. Για την ακρίβεια θα κάνουμε την εξής αντικατάσταση

$$R \to R^a_{ab} y^b \tag{10.25}$$

η ποσότητα $R^a_{ab} y^b$ είναι το πιο απλό βαθμωτό που μπορούμε να κατασκευάσουμε από την καμπυλότητα της μη γραμμικής συνοχής *Cartan*, R^c_{ab}. Έχουμε λοιπόν τη γενικευμένη δράση

$$S_F = \frac{1}{\kappa} \int\limits_{\Sigma} Vol_{\tilde{G}} R^a_{ab} y^b \tag{10.26}$$

Σε περίπτωση που έχουμε μετρική *Finsler* βαρύτητα δηλαδή οι συντελεστές τις συνοχής μας δίνονται από τη σχέση 10.11 η δράση μας μετατρέπεται στην κλασική *Einstein-Hilbert* δράση 9.9. Η συνολική δράση βέβαια είναι το άθροισμα $S = S_M + S_F$ και η μεταβολή της ως προς το θεμελιώδες αντικείμενο που ορίζει τη γεωμετρία του χωροχρόνου μας δίνει τις εξισώσεις πεδίου. Στην περίπτωσή μας, για το χωροχρόνο *Finsler*, αυτό το θεμελιώδες μαθηματικό αντικείμενο είναι η συνάρτηση L που σημαίνει ότι οι εξισώσεις πεδίου δεν είναι (0,2) τανυστικές εξισώσεις αλλά μια βαθμωτή εξίσωση στη μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη Σ:

$$\begin{aligned} &\Big[{}^F g^{ab} \overline{\partial}_a \overline{\partial}_b \left(R^c_{cd} y^d \right) - 6 \frac{R^c_{cd} y^d}{F^2} \\ &\qquad + 2 {}^F g^{ab} \left(\nabla_a S_b + S_a S_b + \overline{\partial}_a \left(y^c \delta_c S_b - N^c_b S_c \right) \right) \Big]_{\Sigma} = \kappa \, T|_{\Sigma} \end{aligned} \tag{10.27}$$

όπου το βαθμωτό ενέργειας ορμής καθορίζεται ως

$$T := \frac{\delta S_M}{\delta L} = \frac{nL}{\sqrt{-\tilde{G}}} \frac{\delta}{\delta L} \left[\sqrt{-\tilde{G}} \left(\mathcal{L}\left(G, \Phi, D\Phi\right) + \lambda \left(1 - P^H\right) \Phi \right) \right] \tag{10.28}$$

Στο όριο μετρικής βαρύτητας η εξίσωση 10.27 ανάγεται στις κλασικές εξισώσεις *Einstein* 9.10, τον οποίων οι ελεύθεροι δείκτες συστέλλονται με τα y^a. Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι οι 10.27, 10.28 γενικεύουν τις κλασικές εξισώσεις πεδίου.

Μέρος IV

Ανακεφαλαίωση και συμπεράσματα

Τα βασικά προβλήματα ορισμού μιας θεωρίας Βαρύτητας στα πλαίσια της γεωμετρίας $Finsler$ βρίσκονται κυρίως σε κακούς ορισμούς των δομών $Lorentz$-$Finsler$, σε ασαφείς αιτιακές δομές και κυρίως στην κατασκευή των δράσεων που αποκλίνουν. Εισάγοντας λοιπόν μια νέα συνάρτηση L που γενικεύει κατά κάποιο τρόπο τη θεμελιώδη συνάρτηση F μπορέσαμε να έχουμε καλώς ορισμένα γεωμετρικά αντικείμενα ακόμα και στη $null$ δομή όπου $F = 0$ και έτσι έγινε πιο ξεκάθαρη κατασκευή της αιτιακής δομής. Μέσω της αιτιακής δομής έγινε σαφές τι είναι χρονοειδές/φωτοειδές διάνυσμα, τι είναι παρατηρητής και επομένως μπορούμε να περιγράψουμε τροχιές παρατηρητών, σημειακών σωματιδίων και του φωτός ως φωτοειδείς/χρονοειδείς/$null$ γεωδαισιακές. Γενικεύτηκαν οι μετασχηματισμοί $Lorentz$ έτσι ώστε να μην υπάρχει παραβίαση σε σχέση με άλλες θεωρίες βαρύτητας. Τέλος οι δράσεις τροποποιήθηκαν έτσι ώστε να μην έχουν αποκλίσεις αφού τις περιορίσαμε στη μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη.

Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε προφανώς δεν είναι πλήρης αλλά λύνει πολλά βασικά προβλήματα. Μένει να εμπλουτιστεί η αιτιακή δομή και με χωρικό τμήμα, να γίνει σύγκριση με άλλες γενικευμένες γεωμετρίες, προσπάθεια συσχέτισης των επιπλέον βαθμών ελευθερίας που μας παρέχει η θεωρία με τα προβλήματα της σκοτεινής ύλης και ενέργειας. Ανοικτό παραμένει και το ενδεχόμενο για κβάντωση αυτής της θεωρίας ωστόσο πρέπει να γίνουν πρώτα πιο βασικά βήματα όπως ολοκλήρωση της αιτιακής δομής.

Μέρος V

Αναφορές

[1] G.S. Asanov. *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories (Fundamental Theories of Physics)*. Springer, 1985.

[2] Ioan Bucataru and Radu Miron. Finsler-lagrange geometry: Applications to dynamical systems, 2007.

[3] Manuel Hohmann. Observer dependent geometries. 2014.

[4] Christian Pfeifer and Mattias N. R. Wohlfarth. Causal structure and electrodynamics on Finsler spacetimes. *Phys. Rev.*, D84:044039, 2011.

[5] Christian Pfeifer and Mattias N. R. Wohlfarth. Finsler geometric extension of Einstein gravity. *Phys. Rev.*, D85:064009, 2012.

[6] P.Stavrinos. *Differential Geometry and Applications II*. University of Athens Press, 1995.

[7] Hanno Rund. *The Differential Geometry of Finsler Spaces (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2012.

[8] Norbert Straumann. *General Relativity (Graduate Texts in Physics)*. Springer, 2012.

[9] Loring W Tu. *An introduction to manifolds*. Springer Science & Business Media, 2010.

[10] Sergiu I. Vacaru. Principles of einstein-finsler gravity and perspectives in modern cosmology. 2010.

[11] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.