

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Εκφυλισμοί και συμμετρίες
στην κρίσιμη περιοχή
του **Interacting Boson Model**

Παναγιώτης Ε. Γεωργουδής

Τριμελής επιτροπή

Γ. Κουτσούμπας
Κ. Παπαδόπουλος
Δ. Μπονάτσος

Φεβρουάριος 2011

Στους Γονείς μου... Για την υπομονή και την αλληλεγγύη τους.

Περίληψη

Το αλγεβρικό Interacting Boson Model (πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων) και το συλλογικό πρότυπο του Bohr αποτελούν δύο συμπληρωματικούς τρόπους περιγραφής της δομής των ατομικών πυρήνων, οι οποίοι παρουσιάζουν ποικιλία σχημάτων και δομών, από σφαιρικούς (δονητικούς) μέχρι ελλειψοειδείς εκ περιστροφής (παραμορφωμένους) πυρήνες, καθώς και πυρήνες επιρρεπείς σε τριαξονικές παραμορφώσεις (γ-ασταθείς).

Την τελευταία δεκαετία έχει προσελκύσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη απότομων αλλαγών στη δομή πυρήνων ως αποτέλεσμα της βαθμιαίας πρόσθεσης ζευγών νετρονίων. Οι αλλαγές αυτές αναφέρονται ως *αλλαγές φάσης/σχήματος* και έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά.

Στην εργασία αυτή μελετώνται αριθμητικά οι αλλαγές φάσης/σχήματος στα πλαίσια του Interacting Boson Model, εστιάζοντας την προσοχή σε εκφυλισμούς που παρουσιάζονται στις περιοχές αυτές και στον εντοπισμό συμμετριών που οι εκφυλισμοί αυτοί υποκρύπτουν.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται μια επισκόπηση βασικών εννοιών και προτύπων της πυρηνικής δομής με στόχο την εισαγωγή στο Interacting Boson Model. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται οι αλλαγές φάσης/σχήματος στα πλαίσια του συλλογικού προτύπου του Bohr, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο μελετώνται οι αλλαγές φάσης/σχήματος στα πλαίσια του Interacting Boson Model, με χρήση του κώδικα IBAR, ο οποίος αναπτύχθηκε πρόσφατα στο Πανεπιστήμιο Yale και επιτρέπει υπολογισμούς για μεγάλους (μέχρι 400) αριθμούς μποζονίων, που είναι απαραίτητοι για τη μελέτη αυτών των φαινομένων. Στο κεφάλαιο 4 γίνεται μια σύντομη επισκόπηση της αλγεβρικής δομής των σχετικών προτύπων και εντοπίζονται προβλήματα που παραμένουν ανοιχτά.

Τα σπουδαιότερα αποτελέσματα στην κρίσιμη περιοχή του Interacting Boson Model συνοψίζονται ως εξής:

1) Οι καταστάσεις 0^+ εμφανίζουν κανονική συμπεριφορά (αύξηση ως $n(n+3)$, όπου n η τάξη τους), ίδια με αυτή που εντοπίστηκε αναλυτικά στα πλαίσια των συμμετριών κρίσιμου σημείου της Χαμιλτωνιανής του Bohr και διαφορετική από την γραμμική αύξηση που εμφανίζεται στις γνωστές συμμετρίες του Interacting Boson Model.

2) Επιπλέον αυτές οι καταστάσεις 0^+ εμφανίζουν εκφυλισμούς με καταστάσεις της ζώνης της θεμελιώδους κατάστασης με στροφορμές $L > 4$ και $L/2$ περιττό αριθμό ($E(0_2^+) = E(6_1^+)$, $E(0_3^+) = E(10_1^+)$, $E(0_4^+) = E(14_1^+)$, κ.ο.κ.).

3) Επιπροσθέτως ο λόγος $E(6_1^+)/E(0_2^+)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως (εύκολα μετρήσιμη) παράμετρος τάξης που μπορεί να κάνει διάκριση ανάμεσα σε αλλαγές σχήματος/φάσης πρώτης και δεύτερης τάξης.

Ένα σημαντικό πρόβλημα που παραμένει άλυτο είναι η φύση της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$, η οποία χαρακτηρίζει την αλλαγή φάσης/σχήματος μεταξύ σφαιρικών και ελλειψοειδών εκ περιστροφής

πυρήνων.

Αντί προλόγου

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών του ΕΜΠ και του ΕΚΕΦΕ Δημόκριτος, " Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές ", υπό την επίβλεψη τριμελούς επιτροπής με πρόεδρο τον Αναπλ. Καθηγητή του Ε.Μ.Π. Γεώργιο Κουτσούμπα και μέλη τον Αναπλ. Καθηγητή του Ε.Μ.Π. Κωνσταντίνο Παπαδόπουλο και τον ερευνητή Α' του Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. Δημόκριτος Διονύσιο Μπονάτσο, τους οποίους ευχαριστώ. Η διδασκαλία μιας μεθόδου εργασίας, η μύηση στις αλγεβρικές μεθόδους, όπως επίσης και η παρεχόμενη ελευθερία μου κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας προέκυψαν από τη καθημερινή αλληλεπίδραση με το Διονύση Μπονάτσο και αποτελούν κάποια από τα στοιχεία για τα οποία οφείλω να τον ευχαριστήσω θερμά.

Ότι παρουσιάζεται στο τρίτο κεφάλαιο αποτελεί κομμάτι εργασίας στο οποίο έχει ασχοληθεί λίγο έως πολύ όλη η ομάδα του Διονύση Μπονάτσου στο ΙΠΦ του Δημόκριτου. Στο πλαίσιο αυτό οφείλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Yale, Richard F. Casten και τον μεταδιδακτορικό ερευνητή του Lawrence Livermore National Laboratory, Robert J. Casperson για την παραχώρηση του κώδικα IBAR, και τις πολλές χρήσιμες συζητήσεις. Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω τη συνάδελφό μου, υπότροφο του ΕΚΕΦΕ "Δημόκριτος", Σοφία Καραμπάγια για τη καθοδήγηση στη χρήση του κώδικα IBAR. Η αλληλεγγύη της θα είναι πάντα ένα σημείο αναφοράς για τους καιρούς των κανιβάλων που διανύουμε.

Επίσης ευχαριστώ το Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. Δημόκριτος για την μεταπτυχιακή υποτροφία που μου παρέχει, χωρίς την οποία η εκπόνηση αυτής της εργασίας θα ήταν αδύνατη, καθώς και το Ινστιτούτο Πυρηνικής Φυσικής για την παροχή των αναγκαίων συνθηκών εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Πρότυπα πυρηνικής δομής

1.1 Αρμονικός ταλαντωτής

Η δεύτερη κβάντωση αποτελεί τη γλώσσα του προτύπου των αλληλεπιδρώντων μποζονίων της πυρηνικής δομής. Ο χώρος Fock του προτύπου αναπαριστά αρμονικό ταλαντωτή έξι βαθμών ελευθερίας. Η παρουσία βαθμών ελευθερίας επιπλέον του ενός εισάγει νέους τελεστές άρα και νέα φυσικά μεγέθη. Το φυσικό τους περιεχόμενο αναδύεται από τις συμμετρίες που διατηρούν ή παραβιάζουν. Οι συμμετρίες αναδύονται από τη μαθηματική μηχανή των αλγεβρών-Ομάδων Lie. Προκειμένου να ομαλοποιηθεί η εισαγωγή τους η ανασκόπηση ξεκινά από τους τελεστές της μονοδιάστατης περίπτωσης.

1.1.1 Μποζονικός ταλαντωτής ενός βαθμού ελευθερίας

Το φυσικό σύστημα του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή ορίζεται από τη συνάρτηση του Χάμιλτον,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (1.1)$$

Η κβάντωση της ανωτέρω συνάρτησης συνίσταται στην επιβολή της σχέσης μετάθεσης στη θέση και την ορμή

$$[x, p] = i\hbar, \quad (1.2)$$

οπότε τα φυσικά μεγέθη της θέσης, ορμής και ενέργειας αναπαρίστανται από τους αντίστοιχους τελεστές. Το αποτέλεσμα της κβάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή είναι η παρουσία διακριτών καταστάσεων της ενέργειας καθώς και η βασική του κατάσταση που αντιστοιχεί στην ενέργεια του μηδενικού σημείου.

Σε κάθε κατάσταση αντιστοιχεί μια κυματοσυνάρτηση και συνολικά όλες μαζί δομούν το χώρο Hilbert του συστήματος ο οποίος περιγράφει πλήρως τη δυναμική του. Ανακαλώντας το φαινόμενο του κυματοσωματιδιακού δυισμού όπως στη περίπτωση ηλ/μ κύματος και φωτονίου, ένα επιπλέον βήμα κβάντωσης μπορεί να πραγματοποιηθεί. Αυτό καλείται δεύτερη κβάντωση και ορίζεται από τους τελεστές,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) \quad (1.3)$$

Το βασικό χαρακτηριστικό της δεύτερης κβάντωσης είναι το εξής. Μια διεγερμένη n οστή κατάσταση αρμονικού ταλαντωτή είναι ταυτόσημη με τη παρουσία n τον αριθμό μποζονίων. Τούτο αναπαρίσταται από τη δράση των τελεστών δημιουργίας a^\dagger και καταστροφής a στη βασική του κατάσταση. Η τελευταία ταυτίζεται με την απουσία μποζονίων ($n = 0$) και βαφτίζεται ως η κατάσταση του κενού $|0\rangle$. Η δράση των τελεστών στο κενό αντανακλά τη διέγερση του ταλαντωτή και ορίζεται από,

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad (1.4)$$

όπου $|1\rangle$ είναι η παρουσία ενός μποζονίου, δηλαδή η πρώτη διεγερμένη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή.

Οι δράση τους σε μια τυχαία διεγερμένη κατάσταση ορίζεται από

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.5)$$

ενώ μια διεγερμένη n οστή κατάσταση ορίζεται από,

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (1.6)$$

Οι παραπάνω καταστάσεις μπορούν να θεωρηθούν ως βάση για την αναπαράσταση των φυσικών μεγεθών στη δεύτερη κβάντωση. Ο χώρος που δομούν ονομάζεται Fock.

Η μέτρηση του πλήθους των μποζονίων σε μία τυχαία κατάσταση βρίσκεται από τη δράση του τελεστή πλήθους $N = a^\dagger a$,

$$N|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle. \quad (1.7)$$

Από το τελεστή πληθυσμού παράγεται και η χαμιλτονιανή του ταλαντωτή:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \quad (1.8)$$

Απο τα παραπάνω συνάγονται οι σχέσεις μετάθεσης των τελεστών a^\dagger , a

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = 0, \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (1.9)$$

Η τελευταία σχέση περιέχει όλες τις πληροφορίες για τη μαθηματική δομή της βάσης που χρησιμεύει στην αναπαράσταση της δυναμικής του αρμονικού ταλαντωτή. Η άλγεβρα Lie που κλείνουν οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής του αρμονικού ταλαντωτή είναι η $u(1)$ με γεννήτορα και τελεστή Casimir παράλληλα το πληθυσμό των μποζονίων

$$C(u(1)) = a^\dagger a. \quad (1.10)$$

Άρα η συμμετρία του αρμονικού ταλαντωτή έχει να κάνει με το πληθυσμό. Στο μονοδιάστατο έχουμε μία κατάσταση και όσα μποζόνια τη κατοικήσουν η συμμετρία της $u(1)$ διατηρείται. Η χαμιλτονιανή παράγεται από το πολυώνυμο της δυναμικής συμμετρίας $u(1)$,

$$H = E_0 + aC(u(1)) = \hbar\omega/2 + \hbar\omega a^\dagger a. \quad (1.11)$$

Η ανταποκρινόμενη ομάδα Lie είναι η $U(1)$, που χαρακτηρίζει τη συμμετρία των στροφών στο μιγαδικό επίπεδο, ή αλλιώς μιας μιγαδικής διάστασης α .

Η μιγαδική μεταβλητή α ορίζεται ως

$$\alpha = x + ip = |\alpha|e^{i\theta}. \quad (1.12)$$

Ο αρμονικός ταλαντωτής διαγράφει στο χώρο των φάσεων κύκλο με ακτίνα μονάδα,

$$|\alpha| = |\alpha|^*|\alpha| = 1 \quad (1.13)$$

Η συμμετρία $U(1)$ δηλώνει πως όλες οι διεγέρσεις του αρμονικού ταλαντωτή βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο του χώρου των φάσεων. Εδώ βρίσκεται και η αφηρητή της κβαντικής στατιστικής όπου η συνέλευση των μποζονίων πραγματοποιείται βάσει του καταστατικού της $U(1)$, και έτσι πληθυσμοί μποζονίων κατοικούν μονοσωματιδιακές (ενός βαθμού ελευθερίας) καταστάσεις.

Σύμφωνες καταστάσεις της H_4

Όλοι οι παραπάνω τελεστές $\{a^\dagger a, a^\dagger, a, 1\}$, λαμβανόμενου του ταυτοτικού και του πλήθους ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης [1],

$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [a^\dagger a, 1] = 0, \quad [a^\dagger a, a] = a, \quad [a^\dagger, 1] = 0, \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad [a^\dagger a, 1] = 0, \quad (1.14)$$

που κλείνουν την άλγεβρα Heisenberg-Weyl h_4 . Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι η,

$$[a^\dagger a, 1] = 0, \quad (1.15)$$

ορίζει ξανά μια μορφή $u(1)$ όπου λόγω και της παρουσίας του 1 η ανταποκρινόμενη ομάδα είναι η $U(1) \times U(1)$. Η εκθετικοποίηση στη γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου για το μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή παράγει το πιο γενικό μετασχηματισμό της $U(1) \times U(1)$,

$$h = \exp(i\delta a^\dagger a + i\varphi 1), \quad (1.16)$$

και συνιστά την αναπαράσταση της $U(1) \times U(1)$.

Όταν ο μετασχηματισμός αυτός δράσει στο κενό $|0\rangle$ θα το αφήσει αναλλοίωτο με μια διαφορά φάσης,

$$h|0\rangle = |0\rangle e^{i\theta}. \quad (1.17)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί συγκροτούν την ομάδα συμμετρίας του κενού και καλείται stability group.

Αν τα στοιχεία της h_4 , $\{a^\dagger a, 1\}$ εκθετικοποιούνται στη μορφή (1.16) τότε τα υπόλοιπα στοιχεία $\{a^\dagger, a\}$ θα γράφονται ως διανύσματα Lie στο σώμα σημείων της ομάδας H_4 με τη μορφή,

$$aa^\dagger, \quad a^*a. \quad (1.18)$$

Τώρα ένα γενικό στοιχείο g της H_4 θα δέχεται την αποσύνθεση,

$$g = Dh, \quad (1.19)$$

όπου αν $g \in H_4$, εξόρισμού από τη θεωρία ομάδων (δες σύμπλοκα)

$$D \in \frac{H_4}{U(1) \times U(1)}. \quad (1.20)$$

Η αναπαράσταση της $\frac{H_4}{U(1) \times U(1)}$ στο μιγαδικό επίπεδο ορίζεται από τους μετασχηματισμούς,

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a). \quad (1.21)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί προκαλούν πεπερασμένες μετατοπίσεις

$$\begin{aligned} D^{-1}(\beta)aD(\beta) &= a + \beta \\ D^{-1}(\beta)a^\dagger D(\beta) &= a^\dagger + \beta^*, \end{aligned} \quad (1.22)$$

που συνιστούν ένα κλασικό όριο για το χώρο Fock, που είναι ο χώρος των φάσεων $\alpha = q + ip$.

Πλέον το κενό μετασχηματίζεται κάτω από τη δράση του μετασχηματισμού της H_4 ως,

$$g|0\rangle = D(\alpha)h|0\rangle = D(\alpha)|0\rangle e^{i\theta} \equiv |\alpha\rangle e^{i\theta}. \quad (1.23)$$

Η τελευταία ιδιότητα αποτελεί τον ορισμό των συμφώνων καταστάσεων μέσω της αλγεβρικής θεωρίας. Οι πεπερασμένες μετατοπίσεις του κενού,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad (1.24)$$

μπορούν να είναι κλασικές αν ο αριθμός των μποζονίων τείνει στο άπειρο, γι'αυτό και οι σύμφωνες καταστάσεις ορίζονται και ως ιδιοκαταστάσεις του τελεστή καταστροφής,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.25)$$

Ο ορισμός του χώρου των φάσεων είναι εφικτός αν και μόνο αν οι καταστάσεις αυτές ελαχιστοποιούν την απροσδιοριστία θέσης ορμής,

$$\langle \alpha | \Delta q | \alpha \rangle = \langle \alpha | \Delta p | \alpha \rangle = \frac{1}{2}. \quad (1.26)$$

1.1.2 Μποζονικός ταλαντωτής δύο βαθμών ελευθερίας

Τα παραπάνω ισχύουν στη περίπτωση του ενός βαθμού ελευθερίας. Στη περίπτωση των δύο όπως πχ σε δις διάστατο αρμονικό ταλαντωτή, τελεστές δημιουργίας και καταστροφής θα ορίζονται όχι μόνο για τις κανονικές συντεταγμένες $\{x, p_x\}$ αλλά και για τις $\{y, p_y\}$. Άρα εισάγονται τελεστές για τα μποζόνια $\{a_x, a_x^\dagger\}$ και $\{a_y, a_y^\dagger\}$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης [2]:

$$[a_x, a_x^\dagger] = 1, \quad [a_x, a_x] = 0, \quad [a_x^\dagger, a_x^\dagger] = 0, \quad (1.27)$$

$$[a_y, a_y^\dagger] = 1, \quad [a_y, a_y] = 0, \quad [a_y^\dagger, a_y^\dagger] = 0, \quad (1.28)$$

$$[a_x, a_y^\dagger] = 0, \quad [a_x, a_y] = 0, \quad [a_x^\dagger, a_y^\dagger] = 0. \quad (1.29)$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται σε πιο κομψή μορφή για οποιεσδήποτε δύο καταστάσεις i, j ως,

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (1.30)$$

Άρα μια διεγερμένη κατάσταση του διδιάστατου συστήματος θα δίνεται από τη κατάσταση

$$|n_i, n_j\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^{n_i} (a_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_i! n_j!}} |0\rangle. \quad (1.31)$$

Ο πληθυσμός των μποζονίων εδώ μεταφράζεται στον αριθμό κατάληψης n_i της κατάστασης i και n_j της κατάστασης j . Στην ορισμένη πλέον βάση του χώρου Fock μπορούν να οριστούν οι φυσικοί τελεστές. Ορμόμενοι από τη περίπτωση του μονοδιάστατου παίρνουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις κατασκευής δι-γραμμικών γινομένων:

$$a_i^\dagger a_i, \quad a_i^\dagger a_j, \quad a_j^\dagger a_j, \quad a_j^\dagger a_i. \quad (1.32)$$

Ο πρώτος και ο τρίτος είναι οι τελεστές αριθμού κατάληψης των καταστάσεων i και j αντίστοιχα. Για τη διερεύνηση της άλγεβρας που κλείνουν οι τελεστές του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή εχμεταλευόμαστε τη πιο γενική σχέση μετάθεσης για την άλγεβρα Lie,

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = \delta_{jk} a_i^\dagger a_l - \delta_{il} a_k^\dagger a_j. \quad (1.33)$$

Αν εξετάσουμε τις σχέσεις μετάθεσης όλων των διγραμμικών γινομένων τα αποτελέσματα είναι γραμμικοί συνδυασμοί τους. Αντί να έχουμε ξέμπαρκα τα γινόμενα αναγνωρίζουμε ότι κλείνουν την άλγεβρα $u(2)$. Περαιτέρω όπως δείχνεται παρακάτω η διερεύνηση των πιθανών αλγεβρών που κλείνουν οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αναδύει και τις μετρήσιμες ποσότητες (observables) του συστήματος.

Χώρος Fock και στροφορμή

Το παραπάνω σύστημα δύο καταστάσεων μπορεί να χρησιμεύσει και για την αναπαράσταση του φυσικού μεγέθους της στροφορμής, τροχιακής ή σπιν όπως έδειξε ο Julian Schwinger [2]. Το γινόμενο $a_i^\dagger a_j$ δημιουργεί ένα μποζόνιο 'πάνω' ενώ το $a_j^\dagger a_i$ το αντίστοιχο 'κάτω'. Ευθέως γίνεται η αντιστοιχία:

$$J_+ = a_i^\dagger a_j, \quad J_- = a_j^\dagger a_i, \quad (1.34)$$

$$J_3 = \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_i - a_j^\dagger a_j). \quad (1.35)$$

Τα εναπομείναντα διγραμμικά γινόμενα συγκροτούν το τελεστή πληθυσμού,

$$\widehat{N} = a_i^\dagger a_i + a_j^\dagger a_j. \quad (1.36)$$

Άρα από την άλγεβρα $u(2)$ των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής κατασκευάσαμε το ισοδύναμο σύνολο $\{J_+, J_-, J_3, \widehat{N}\}$. Εφόσον το ισοδύναμο σύνολο δείχνει στροφορμή, μπορεί να επιχειρηθεί μια αλλαγή βάσης για την άλγεβρα $u(2)$ που θα την εφάπτει στο χώρο κάποιων γωνιών, αρκεί να διατηρούνται οι σχέσεις μετάθεσης. Μια τέτοια αλλαγή επιτρέπει στο σύστημα χρήση φορμαλισμού δράσεων-γωνίας. Αυτός είναι ο γνωστός φορμαλισμός των μητρών του Pauli.

Κάνοντας την καθιερωμένη αντιστοιχία από τη θεωρία της στροφορμής,

$$J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2, \quad (1.37)$$

οι νέοι τελεστές δίνουν τις εξής σχέσεις μετάθεσης,

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2, \quad (1.38)$$

$$[\widehat{N}, J_1] = 0, \quad [\widehat{N}, J_2] = 0, \quad [\widehat{N}, J_3] = 0. \quad (1.39)$$

Το σύνολο των τελεστών $\{J_1, J_2, J_3, \widehat{N}\}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση της άλγεβρας $u(2)$. Οι (1.38,39) κλείνουν τις ίδιες σχέσεις μετάθεσης με τη στροφορμή. Οι καταστάσεις πάνω και κάτω που αντιπροσωπεύουν οι τελεστές $\{J_+, J_-\}$, μπορούν να δείχνουν διάφορους κβαντικούς αριθμούς όπως σπιν, ισοσπίν ή εν γένει διανυσματικά φορτία. Η συμπεριφορά του "αυτόνομου" συνόλου $\{J_+, J_-, J_3\}$ μέσα στο χώρο Fock του συστήματος των δύο καταστάσεων μαθηματικά εκφράζεται από την ενιαία γραφή του ως τανυστής πρώτης τάξης,

$$Q_m^{(1)}, \quad m = 0, \pm 1, \quad (1.40)$$

με το m να είναι η ιδιοτιμή του J_3 η οποία στο χώρο Fock αναπαρίστανται ως,

$$m = \frac{1}{2}(N_i - N_j). \quad (1.41)$$

Έτσι τα στοιχεία του τανυστή είναι,

$$Q_0^{(1)} = J_3, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = J_{\pm}. \quad (1.42)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σημείο εκκίνησης για τις παραπάνω αντιστοιχίες προέρχεται από την ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{d} = d_x \hat{x} + d_y \hat{y} + d_z \hat{z}$. Η επίδρασή της στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μπορεί να αναπαρισταθεί από το τανυστή πρώτης τάξης [3],

$$Q_0^{(1)} = id_z, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(d_x + id_y), \quad (1.43)$$

$$Q_m^1 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{\alpha}^1 \sqrt{\frac{4\pi}{2 \cdot 1 + 1}} Y_{1m}(\theta_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) \quad (1.44)$$

Τα αντίστοιχα διανύσματα κατεύθυνσης ως προς τα οποία αντανακλάται η επίδραση της στροφορμής στη συμμετρία της κυματοσυνάρτησης είναι οι μήτρες του Pauli,

$$\vec{J} = j_x \sigma_x + j_y \sigma_y + j_z \sigma_z. \quad (1.45)$$

οι οποίες ικανοποιούν την άλγεβρα $su(2)$ των μητρών με ορίζουσα 1. Η άλγεβρα $su(2)$ είναι ισόμορφη με την άλγεβρα $o(3)$ καθώς ικανοποιούν ίδιες σχέσεις μετάθεσης. Ο τελεστής Casimir της $su(2)$ παράγεται ομοίως με της $o(3)$ ως,

$$\hat{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \quad (1.46)$$

Σε αυτό το επίπεδο παρατηρούμε ότι η δομή της $u(2)$ περιέχει και την $su(2)$ και τη $u(1)$ που ορίζεται από το τελεστή πληθυσμού και δείχνει το ταλαντωτικό χαρακτήρα. Η δομή αυτή δηλώνεται ως,

$$u(2) = su(2) + u(1). \quad (1.47)$$

Συνολικά η άλγεβρα $u(2)$ έχει 4 γεννήτορες και 2 τελεστές Casimir. Έχουμε ένα Casimir για τις στροφές, J^2 και ένα για το πληθυσμό \hat{N} . Σε μια τέτοια συμμετρία οι καταστάσεις της στροφορμής κατοικούνται από πληθυσμό N μποζονίων και κάθε κατάσταση στροφορμής ανοίγει σε καταστάσεις [4],

$$j \rightarrow j^N. \quad (1.48)$$

Αν η $su(2)$ χαρακτηρίζει καταστάσεις σπιν, τότε η $u(2)$ ως άλγεβρα των δύο καταστάσεων αποκομίζεται μέσω του κβαντικού αριθμού του σπιν, $s = 1/2$, άρα,

$$u(2) = u(2\frac{1}{2} + 1) \quad (1.49)$$

1.1.3 Σύμφωνες καταστάσεις της $SU(2)$

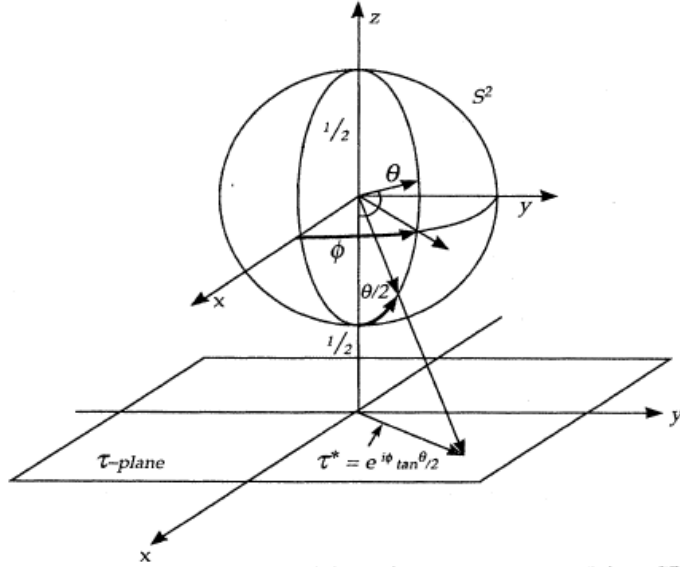
Αγνοώντας πλήρως το τελεστή πληθυσμού \hat{N} , θα βρούμε τις σύμφωνες καταστάσεις της $su(2)$, που γεννούν τις γωνίες Euler. Εδώ δε χρειάζεται να ανατρέξουμε σε άλγεβρα που να περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο (Heisenberg-Weyl) καθώς όπως δείχθηκε αμέσως η άλγεβρα $su(2)$ σπάει σε ευθύ άθροισμα,

$$su(2) = u(1) + su(2)/u(1). \quad (1.50)$$

Εδώ το στοιχείο της $u(1)$ είναι ο J_3 ενώ μια μετατόπιση στο $SU(2)/U(1)$ παράγεται από το μετασχηματισμό [1],

$$\Omega(\zeta) = \exp(\zeta J_+ - \zeta^* J_-). \quad (1.51)$$

Ο καταστατικός χώρος του συστήματος είναι οι ιδιοκαταστάσεις της στροφορμής $|jm\rangle$. Οι σύμφωνες καταστάσεις γεννούνται από τη δράση των $\Omega(\zeta)$ στη κατάσταση στην οποία η $u(1)$ είναι η stability algebra, που είναι και η βασική κατάσταση (ground state). Μια τέτοια κατάσταση είναι η λεγόμενη ακρότατη,



Σχήμα 1.1: Η στερεογραφική προβολή της σφαίρας Bloch σε μιγαδικό επίπεδο. Από την [1].

$$h|j, -j\rangle \equiv J_3|j, -j\rangle = |j, -j\rangle e^{i\varphi} \quad (1.52)$$

Άρα οι σύμφωνες καταστάσεις ορίζονται από τη σχέση,

$$\Omega(\zeta)|j, -j\rangle = |j, \zeta\rangle \quad (1.53)$$

Αντικαθιστώντας τις μήτρες της στροφορμής,

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (1.54)$$

οι μετασχηματισμοί στο μιγαδικό χώρο γίνονται η μήτρα,

$$\Omega(\zeta) = \exp \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ -\zeta^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos|\zeta| & \frac{\zeta}{|\zeta|} \sin|\zeta| \\ -\frac{\zeta^*}{|\zeta|} \sin|\zeta| & \cos|\zeta| \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Ο χώρος των συμφώνων καταστάσεων $|j, \zeta\rangle$ αναπαρίσταται γεωμετρικά ως μια σφαίρα Bloch S^2 , όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απεικόνιση $|j, \zeta\rangle \rightarrow S^2$ επιτυγχάνεται από τη παραμετροποίηση,

$$\zeta = \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (1.56)$$

Ο κλασικός χώρος των φάσεων αποκομίζεται από τη λεγόμενη στερεογραφική προβολή της σφαίρας S^2 στο μιγαδικό επίπεδο τ , με τη συνθήκη κανονικοποίησης,

$$|j, \zeta\rangle = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^j} \exp(\tau J_+) |j, -j\rangle, \quad \tau = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}. \quad (1.57)$$

Οι κανονικές μεταβλητές αποκομίζονται από την εκθετικοποίηση της μήτρας για το μετασχηματισμό $\Omega(\zeta)$,

$$z = \tau(1 + \tau\tau^*)^{-1/2} = \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}. \quad (1.58)$$

Ο μετασχηματισμός,

$$z = \frac{1}{\sqrt{4j}}(q + ip), \quad (1.59)$$

δημιουργεί χώρο φάσεων με τη συμπλεκτική δομή των αγκυλών Poisson.

1.2 Η δεύτερη κβάντωση για την υγρή σταγόνα

Το πρότυπο της υγρής σταγόνας χρησιμοποιείται για τη περιγραφή των συλλογικών ιδιοτήτων του πυρήνα. Ωστόσο ο πυρήνας είναι ένα καθαρά κβαντικό σύστημα και αυτό αποτελεί μια αντίθεση στη έννοια της επιφάνειας της σταγόνας. Η μαθηματικά συνεπής αντιμετώπιση της δεύτερης κβάντωσης για τον αρμονικό ταλαντωτή μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας στην υγρή σταγόνα και να ενσαρκώσει την αντίθεση αυτή ως θεμελιώδες στοιχείο της. Στη κατασκευή του αρμονικού ταλαντωτή για την υγρή σταγόνα πρέπει να ικανοποιούνται συγκεκριμένες απαιτήσεις.

1.2.1 Το σύμφωνο Racah-BCS

Η άλγεβρα $su(2)$ χαρακτηρίζει τη βασική κατάσταση του διδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, που μπορεί να αντιπροσωπεύει δύο καταστάσεις στροφορμής. Όταν κατοικείται από πληθυσμό μποζονίων η συμμετρία του ταλαντωτή ανάγεται στη $u(2)$. Κατά την εποίκηση των καταστάσεων θα δημιουργηθούν νέες καταστάσεις με διαφορετική συνεισφορά στην ενέργεια. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η κατοίκηση ενός φλοιού στροφορμής j από πληθυσμό n νουκλεονίων. Μια τέτοια διαμόρφωση καλείται j^n , στο πρότυπο των φλοιών. Ένα καλό μέτρο για την ενέργεια είναι ο αριθμός των ζευγών νουκλεονίων με ολική στροφορμή μηδέν [5], διότι τότε η αλληλεπίδρασή τους είναι πολύ ισχυρή. Μια τέτοιου είδους αλληλεπίδραση καλείται αλληλεπίδραση ζευγών (pairing interaction). Ο κβαντικός αριθμός ο οποίος ταξινομεί τις επιπρόσθετες καταστάσεις, εισήχθηκε από τον Racah είναι ο ν (seniority) και διατηρείται κάτω από τις αλληλεπιδράσεις ζευγών καθώς ορίζεται ως το πλήθος των ασύζευκτων σωματιών.

Δύο αντίθετα σπιν δημιουργούν ζεύγος αν βρίσκονται σε χρονικά αντίστροφες καταστάσεις οι οποίες θα ληφθούν ως οι καταστάσεις βάσης $|jm\rangle$ και $(-1)^{j-m}|j-m\rangle$. Η βασική κατάσταση θα περιέχει μόνο ζεύγη (Κλειστός φλοιός) και ένα ζεύγος δημιουργείται από το τελεστή [6]

$$\hat{S}_j^+ = \sum_{m>0} (-1)^{j-m} a_{jm}^\dagger a_{j-m}^\dagger. \quad (1.60)$$

Ορίζονται οι λεγόμενοι τελεστές ημι-σπίν, ώστε να συγκροτηθεί μια αναπαράσταση της $su(2)$,

$$\hat{S}_j^- = \sum_{m>0} (-1)^{j-m} a_{j-m} a_{jm}, \quad (1.61)$$

$$\hat{S}_j^0 = \frac{1}{2} \sum_{m>0} (a_{jm}^\dagger a_{jm}^\dagger + a_{j-m} a_{j-m} - 1). \quad (1.62)$$

Ο τελεστής της seniority μετρά το μέγεθος της αλληλεπίδρασης ζευγών, και μετρά το μέγεθος της ζεύξης σε $J = 0$,

$$\widehat{S}_j^+ \widehat{S}_j^- = \sum_{m>0} (-1)^{2(j-m)} a_{jm}^\dagger a_{j-m}^\dagger a_{j-m} a_{jm}. \quad (1.63)$$

Η Χαμιλτονιανή που περιγράφει ένα σύστημα σωματίων με αλληλεπίδραση ζευγών είναι εκείνη των Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS), όπου στη πυρηνική φυσική χρησιμοποιείται με δείκτες στροφορμής [6],

$$H = \sum_{jm} \varepsilon_j a_{jm}^\dagger a_{jm} - |G| \sum_{jj'} c_{jj'} \widehat{S}_j^+ \widehat{S}_{j'}^-. \quad (1.64)$$

Ο συντελεστής ε_j είναι η ενέργεια των μονοσωματιδιακών επιπέδων, η $|G|$ είναι ο συντελεστής της αλληλεπίδρασης ζεύγους (pairing interaction strength), ενώ οι παράμετροι $c_{jj'}$ δείχνουν πως κατανέμεται η αλληλεπίδραση μεταξύ των διάφορων τροχιακών.

Η χρήση της ανωτέρω περιγραφής στους πυρήνες προσφέρει το υπόστρωμα της σύνδεσης μεταξύ των νουκλεονικών κινήσεων και της υγρής σταγόνας. Η υπέρρευση συμπύκνωση των ζευγών δημιουργεί την έννοια της επιφάνειας της υγρής σταγόνας [7], και το πρότυπο που αναδεικνύει την ομορφιά αυτή είναι εκείνο των αλληλεπιδρώντων μποζονίων, όπου εφαρμόζεται απευθείας δεύτερη κβάντωση στην υγρή σταγόνα. Ο κβαντικός αριθμός της seniority βρίσκεται στο μεταίχμιο των δύο προσεγγίσεων. Ο Racah πρότεινε τη μετάλλαξη των τελεστών της δεύτερης κβάντωσης σε τανυστική μορφή ώστε να περιέχουν τροχιακή στροφορμή. Τα στοιχεία της άλγεβρας $G_{jj'} = a_j^\dagger a_{j'}$ υφίσταται τη μετάλλαξη,

$$G_{jj'} \longrightarrow G_\mu^k(j, j') = [a_j^\dagger \times \tilde{a}_{j'}]_\mu^k. \quad (1.65)$$

Με αυτό το τρόπο επιτυγχάνεται η ύπαρξη της άλγεβρας $o(3)$. Ένα παράδειγμα τέτοιας γραφής είναι ο τανυστής της $su(2)$, Q_μ^1 , που είναι πρώτης τάξης, $k = 1$. Όσον αφορά τη seniority έχει αποδειχθεί ότι αποτελεί το αναλλοίωτο μέγεθος της ομάδας στροφών για πέντε βαθμούς ελευθερίας της $o(5)$ [8] της οποίας ο τελεστής Casimir 2ης τάξης Λ^2 έχει ιδιοτιμές seniority $\Lambda^2 = v(v + 3)$. Επομένως η σύζευξη σωματίων αναδύει συμμετρία την οποία δε μπορούμε να φανταστούμε αλλά απορρέει από την αλγεβρική μέθοδο ως ένα παράδειγμα δυναμικής συμμετρίας που εκφράζεται από την αλυσίδα,

$$O(3) \subset O(5). \quad (1.66)$$

1.2.2 Το σύμφωνο Nilsson-Elliott

Αν το ένα βασικό χαρακτηριστικό της ανάδειξης της συλλογικότητας των νουκλεονικών διαμορφώσεων είναι η αλληλεπίδραση ζευγών νουκλεονίων, τότε το άλλο είναι η γεωμετρική παραμόρφωση της συλλογικότητας που συνηθίζεται να καλείται πυρήνας. Ένα καθαρά κβαντικό σύστημα μπορεί να δεχθεί έννοιες γεωμετρίας μονάχα μέσα από το μαθηματικό εργαλείο της θεωρίας των ομάδων. Η γεωμετρία του συστήματος τότε αναδεικνύεται από τη συμμετρία που σέβεται η βασική του κατάσταση (ground state). Ένα παράδειγμα τέτοιας αντιμετώπισης είναι η εισαγωγή της συμμετρίας $SU(3)$ από τον J.P Elliott [9] στο πρότυπο του Nilsson, όπου θεωρείται ότι ανεξάρτητα νουκλεόνια κινούνται σε παραμορφωμένο δυναμικό, είναι δηλαδή ένα περιστροφικό μοντέλο για τη σωματιδιακή δομή. Σε όρους

αρμονικού ταλαντωτή, η παραμόρφωση εισάγεται με το χέρι ως η αλληλεπίδραση \mathbf{LS} ολικού σπιν και τροχιάς του πυρήνα στη Χαμιλτονιανή της δεύτερης κβάντωσης [6],

$$H = \omega b_i^\dagger b_i - 2k\mathbf{LS} - k\mu\mathbf{L}^2. \quad (1.67)$$

Ο J.P Elliott στη [9] προσπάθησε να βρει τη σύνδεση του προτύπου αυτού με εκείνου των φλοιών. Αυτό τον οδήγησε στη διερεύνηση νέων κβαντικών αριθμών που θα αναδείκνυαν τις περιστροφικές καταστάσεις των σωματιδίων, κατάναλογία με τη seniority που αναδείκνυε το ζευγάρι των νουκλεονίων. Άρα έψαξε για μια νέα συμμετρία, υψηλότερη από εκείνη της ολικής στροφορμής του πυρήνα, $O(3)$. Παρατήρησε ότι όταν η αλληλεπίδραση \mathbf{LS} είναι πολύ ισχυρή, κατοίκηση φλοιών p ($L = 1$), p^n παρουσιάζει περιστροφικό φάσμα τύπου $L(L+1)$. Ο φλοιός p είναι ένα διάνυσμα τριών καταστάσεων. Επομένως αν ανεξάρτητα σωματάρια αποικούν καταστάσεις συστήματος με τρεις βαθμούς ελευθερίας, αναδεικνύεται το περιστροφικό φάσμα. Επομένως το σύμφωνο που πρότεινε ώστε η αλληλεπίδραση \mathbf{LS} να μη μπαίνει με το χέρι, είναι να θεωρηθεί αρμονικός ταλαντωτής τριών βαθμών ελευθερίας, με ομάδα συμμετρίας τη $U(3)$.

Κατάναλογία με την άλγεβρα $u(2)$, έχουμε ένα επιπλέον μοζόνιο, άρα προκύπτουν 9 διγραμμικά γινόμενα. Ομοίως τρεις από αυτούς θα σχηματίζουν το ταυυστή πρώτης τάξης $Q_m^{(1)}$ που αναπαριστά την άλγεβρα της τροχιακής στροφορμής και ένας θα είναι ο τελεστής πληθυσμού \hat{N} που αναπαριστά την άλγεβρα $u(1)$. Άρα μια πρώτη αναγωγή της άλγεβρας $u(3)$, είναι η αλυσίδα

$$u(3) \supset u(2) \supset su(2) \supset u(1). \quad (1.68)$$

Έχουν μείνει $9 - 4 = 5$ διγραμμικά γινόμενα. Αυτά συγκροτούν το ταυυστή 2ης τάξης $Q_\mu^{(2)}$. Αν όλοι αυτοί οι τελεστές γραφούν σε κανονικές συντεταγμένες ο ταυυστής $Q_\mu^{(2)}$ είναι ο τετραπολικός. Αν διώξουμε το τελεστή πληθυσμού, \hat{N} λαμβάνουμε τις εξής σχέσεις μετάθεσης

$$[Q_\mu^{(2)}, Q_\nu^{(2)}] = 3\sqrt{10}\langle 2\mu 2\nu | 1\mu + \nu \rangle L_{\mu+\nu} \quad , \quad (1.69)$$

$$[L_\mu, Q_\nu^{(2)}] = -\sqrt{6}\langle 1\mu 2\nu | 2\mu + \nu \rangle Q_{\mu+\nu}^{(2)} \quad , \quad (1.70)$$

$$[L_\mu, L_\nu] = -\sqrt{2}\langle 1\mu 1\nu | 1\mu + \nu \rangle L_{\mu+\nu} \quad . \quad (1.71)$$

Οι τελεστές L_μ και $Q_\mu^{(2)}$ κλείνουν την άλγεβρα $su(3)$. Η άλλη αποσύνθεση της άλγεβρας $u(3)$ είναι η,

$$u(3) \supset su(3) \supset o(3) \supset o(2). \quad (1.72)$$

Η ανταποκρινόμενη ομάδα $SU(3)$ έχει δύο κβαντικούς αριθμούς, εκείνους του J.P Elliott ($\lambda\mu$). Στη συμμετρία $SU(3)$ η αλληλεπίδραση \mathbf{LS} και το παραμορφωμένο δυναμικό, δίνει τη θέση της στο Casimir $Q_\mu^{(2)} \cdot Q_\mu^{(2)}$. Έτσι επιτυγχάνεται η γεωμετροποίηση της αλληλεπίδρασης του Nilsson από τη τετραπολική παραμόρφωση του πυρήνα. Αυτό σημαίνει ότι οι στοιχειώδεις διεγέρσεις του ταλαντωτή όπως αναπαρίστανται από τη δράση του τελεστή \hat{N} , θα κατοικούν τη βασική κατάσταση που είναι αναπαράσταση της συμμετρίας $SU(3)$, έχει δηλαδή διανύσματα βάσης που ορίζονται από τις ιδιοτιμές του τετραπολικού τελεστή ($\lambda\mu$). Για παράδειγμα αν έχω ένα κβάντο ενέργειας με στροφορμή 1 θα έχω την αναπαράσταση της $SU(3)$, (10). Αν έχω ένα κβάντο ενέργειας έχω στροφορμή $L = 2$ και η αναπαράσταση της $SU(3)$ είναι η (20). Οι καταστάσεις της στροφορμής θα περιέχονται στις

αναπαραστάσεις της $SU(3)$. Η μετάβαση $SU(3) \rightarrow O(3)$ αναδεικνύει τη σπουδαιότητα και την ομορφιά της σύλληψης του J.P Elliott. Όταν αναλύσουμε τη στροφορμή του πυρήνα θα πρέπει να επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς. Επιλέγουμε ότι αν στο εργαστήριο μετράμε στροφορμή L , στο σύστημα του πυρήνα μετράμε στροφορμή K . Ο K είναι ένας χαμένος κβαντικός αριθμός, δε χαρακτηρίζει δηλαδή επίπεδα καμίας ομάδας συμμετρίας. Η εισαγωγή του συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα καθώς είναι ο κβαντικός αριθμός των ενεργειακών ζωνών. Τότε αναδεικνύεται και η σημασία του μ ως η προβολή της ροπής λ στο πυρήνα. Μια κατάσταση της ανωτέρω αλυσίδας είναι,

$$|[N], (\lambda\mu), KLM). \quad (1.73)$$

Στο τριδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή ο πληθυσμός είναι $N = n_x + n_y + n_z$, με τις ταυσιτικές παραμορφώσεις της τετραπολικής ροπής να ορίζονται ως,

$$\lambda = n_z(\lambda\mu) - n_x(\lambda\mu) \quad (1.74)$$

$$\mu = n_x(\lambda\mu) - n_y(\lambda\mu).$$

1.2.3 Μποζονικός ταλαντωτής n βαθμών ελευθερίας

Ό,τι προηγήθηκε είχε να κάνει με τα προεόρτια για την εφαρμογή της δεύτερης κβάντωσης στην υγρή σταγόνα. Ένας τέτοιος φορμαλισμός πέρα από την αισθητική της συμμετρίας μέσα από τις άλγεβρες, μπορεί να δώσει και νέες συμμετρίες άρα και νέα ικανότητα πρόβλεψης πυρηνικών φασμάτων. Οι απαιτήσεις που θέτουμε σε μια τέτοια αντιμετώπιση είναι οι εξής:

1. Το σύμφωνο Helmholtz-Sommerfeld

Η κλασσική αντιμετώπιση της υγρής σταγόνας είναι ευρέως γνωστή κυρίως στους μηχανικούς και έχει να κάνει με τη μηχανική του παραμορφώσιμου σώματος. Η πιο γενική κίνηση ενός παραμορφώσιμου σώματος μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα τριών θεμελιωδών κινήσεων. Μιας μετατόπισης μιας στροφής και μιας παραμόρφωσης. Σε σύστημα ηρεμίας για τη μεταφορική κίνηση, οι κινήσεις αναπαρίσταται από ταυστή,

$$u_i = F_{ik}x_k, \quad F_{ik} = \frac{\partial u_i}{x_k}. \quad (1.75)$$

Ο ταυστής F_{ik} σπάει σε ένα αντισυμμετρικό και ένα συμμετρικό μέρος,

$$F_{ik} = \frac{1}{2}(F_{ik} - F_{ki}) + \frac{1}{2}(F_{ik} + F_{ki}) = A_{ik} + S_{ik}. \quad (1.76)$$

Βάσει του συμφώνου Helmholtz-Sommerfeld ο αντισυμμετρικός ταυστής A_{ik} αντιπροσωπεύει τη περιστροφική κίνηση του σώματος ενώ ο συμμετρικός S_{ik} τη παραμόρφωσή του, [10].

Μια τέτοια ανάλυση ενός κβαντικού συστήματος δε μπορεί να γίνει δυνατή από τη κανονική κβάντωση, καθώς διάφορες δυναμικές συμμετρίες αναδύονται από τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής και αυτό συνιστά τη λεγόμενη αλγεβρική μέθοδο. Σε μιαν άλγεβρα ομαδοποιούνται τα στοιχεία σε ένα ταυστή. Τότε λέγεται ότι έχουμε μια ταυσιτική αναπαράσταση της ομάδας συμμετρίας ή της άλγεβρας [11]. Κάθε δείκτης αναπαρίσταται από ένα κουτί \square [12]. Αλλιώς, η δεύτερη κβάντωση της υγρής σταγόνας αποκομίζεται αν οι δείκτες των ταυστών που

χαρακτηρίζουν τη κίνησή της αναπαρασταθούν από κουτιά. Κάθε κουτί αναπαριστά ένα κβάντο διέγερσης της σταγόνας ή ένα μποζόνιο.

Ένας αντισυμμετρικός τανυστής δύο δεικτών αναπαρίσταται με δύο κουτιά σε μια στήλη,

$$A_{ik} = \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad (1.77)$$

ενώ ένας συμμετρικός με δύο κουτιά σε μία γραμμή,

$$S_{ik} = \square\square \quad (1.78)$$

Η χρησιμότητα της θεωρίας ομάδων στη φυσική έχει να κάνει με τη προσαρμογή του καταστατικού χώρου της Χαμιλτονιανής στις αναπαραστάσεις της ομάδας συμμετρίας του συστήματος. Στη δεύτερη κβάντωση οι καταστάσεις αυτές είναι σωματίδια, και η δυναμική συμμετρία δηλώνει πως τα σωματίδια "κάθονται" στις αναπαραστάσεις της συμμετρίας. Αν έχουμε ένα σύνολο σωματιδίων μια τανυστική αναπαράσταση της άλγεβρας δίνει αμέσως την εποπτεία της αρχής του Pauli. Η ομάδα συμμετρίας που ικανοποιείται τότε είναι η ομάδα μεταθέσεων f αντικειμένων σε n θέσεις [13]. Εν γένει μια διαμέριση του τύπου

$$[f] = [f_1, f_2, \dots, f_n], \quad (1.79)$$

δηλώνει πως έχουν τοποθετηθεί f_1 στη πρώτη γραμμή, f_2 στη δεύτερη κ.ο.κ .

Για παράδειγμα σε ένα σύστημα σπιν, $s = 1/2$ η αποίκησή από δύο σωματίδια θα είναι είτε συμμετρική, $[f] = [2]$ δηλαδή $\uparrow\uparrow \downarrow\downarrow$ είτε αντισυμμετρική $[f] = [11]$, δηλαδή $\uparrow\downarrow$.

Οι τανυστικές αναπαραστάσεις $[f]$ καλούνται διαγράμματα Young και μετατίθενται με τους λεγόμενους δι-συμμετρικούς μετασχηματισμούς που γεννούνται από τα διγραμμικά γινόμενα [13]. Η ομάδα συμμετρίας των γινομένων αυτών είναι εκείνη του n -διάστατου αρμονικού ταλαντωτή $U(n)$, της οποίας οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις είναι ένα διάγραμμα Young. Προσθέτοντας σωματίδια δημιουργούνται τανυστές υψηλότερης τάξης οι οποίοι αναγάγονται σε νέους με αποσύνθεση τύπου *Glebsch – Gordon*. Αλγεβρικά τούτο σημαίνει ότι οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $U(n)$ μεταβάλλονται σε αναγωγίσιμες, δηλαδή σε αλυσίδα συμμετριών. Ας πάρουμε το παράδειγμα του μποζονικού ταλαντωτή με n βαθμούς ελευθερίας. Η αρχή του Pauli επιβάλλει μονάχα συμμετρικές αναπαραστάσεις, επομένως από τις n γραμμές της τανυστικής αναπαραστάσεως της $U(n)$ κρατείται μονάχα η πρώτη. Το πλήθος των κουτιών είναι το πλήθος των μποζονίων,

$$S_{ik} = \square\square\square\square \dots \square. \quad (1.80)$$

Μια τέτοια αναπαράσταση δηλώνει ότι τα μποζόνια κατανέμονται σε όλες τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις n , απόλυτα συμμετροποιημένα μεταξύ τους. Κόβοντας τελεστές πληθυσμού από κάθε μονοσωματιδιακή κατάσταση επιτυγχάνεται η αναγωγή,

$$U(n) \supset U(n-1) \supset U(n-2) \dots \quad (1.81)$$

Εν γένει η άλγεβρα $U(n)$ έχει n^2 γεννήτορες και n τελεστές Casimir. Η πιο γενική παραμόρφωση της υγρής σταγόνας μέσω αυτής της ανάλυσης είναι η δόνηση που περιγράφεται από τις πιθανές δυναμικές συμμετρίες της $U(n)$.

2. Το σύμφωνο Racah-BCS

Η δεύτερη χβάντωση θα πρέπει να υποδέχεται την αλληλεπίδραση ζευγών ώστε να αντανακλά την αντίθεση του προτύπου της υγρής σταγόνας με εκείνο της σωματιδιακής δομής. Άρα οι μποζονικές διεγέρσεις στις οποίες θα αναλυθεί, πρέπει να ικανοποιούν Χαμιλτονιανή τύπου (1.64). Αν επιλεγθεί να έχει n βαθμούς ελευθερίας ή n μονοσωματιδιακές καταστάσεις βάσης, η ομάδα συμμετρίας της σταγόνας είναι $U(n)$.

Εν γένει διάσταση του αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να ληφθεί εν ψυχρώ ως η πολλαπλότητα των καταστάσεων της στροφορμής,

$$U(n) = U(2j + 1). \quad (1.82)$$

Στη περίπτωση που επιλέξουμε τη τροχιακή στροφορμή, η πιο γενική αναγωγή είναι [4],

$$U(4\ell + 2) \supset U(2\ell + 1) \supset O(2\ell + 1). \quad (1.83)$$

Οι τανυστές που δομούν την $O(2\ell + 1)$ έχουν περιττό δείκτη [11] και όταν δρουν σε μια βάση της συμπεριφέρονται ως τανυστικοί τελεστές. Από το τανυστή της $U(n)$ τα στοιχεία που κλείνουν την άλγεβρα $O(2\ell + 1)$ είναι εκείνα που ομαδοποιούνται σε τανυστή περιττής τάξης. Δομείται έτσι αντισυμμετρικός τανυστής που δηλώνει γενικευμένες στροφές του συστήματος και αναμένεται φάσμα περιστροφικού χαρακτήρα.

Για $\ell = 1$ λαμβάνουμε την υποάλγεβρα $o(3)$ ενώ για $\ell = 2$ λαμβάνουμε την $o(5)$. Παρατηρούμε ότι ο τανυστής που θα ομαδοποιεί τα στοιχεία της άλγεβρας $o(3)$ θα έχει δείκτη 1, της μορφής T_μ^1 και περιέχει τρία στοιχεία. Είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής ώστε δηλώνει τη περιστροφή του συστήματος στο τριδιάστατο. Τέτοιες άλγεβρες μπορούν να αποκομιστούν μονάχα αν τα στοιχεία των τανυστών γραφούν ως τανυστικοί τελεστές με δείκτη στροφορμής. Μέσω μιας τέτοιας γραφής αποκομίζεται η αλυσίδα,

$$U(n) \supset O(n). \quad (1.84)$$

3. Το σύμφωνο Nilsson-Elliott

Πάντοτε από τη $U(n)$ κόβοντας το τελεστή πληθυσμού της, αποκομίζεται η άλγεβρα $SU(n)$, επιτυγχάνοντας την αναγωγή,

$$U(n) \supset SU(n). \quad (1.85)$$

Κόβοντας μονάχα το τελεστή πληθυσμού σημαίνει ότι από τα στοιχεία της $U(n)$ κόβονται εκείνα που ομαδοποιούνται σε τανυστή μηδενικής τάξης. Η $SU(n)$ είναι ένα παράδειγμα συμμετρίας όπου δεν είναι εμφανές το κλασικό ανάλογο της στροφής και παραμόρφωσης. Περιγράφει δονητικές καταστάσεις στροφορμής. Στη περιγραφή της υγρής σταγόνας λόγω της επιτυχίας Nilsson-Elliott η $SU(n)$ απαιτείται να είναι η $SU(3)$.

Άρα στον αρμονικό ταλαντωτή n βαθμών ελευθερίας, οι πιο γενικές αναγωγές της ομάδας συμμετρίας του $U(n)$ που περιέχουν την ομάδα συμμετρίας της στροφορμής $O(3)$ είναι,

$$O(3) \subset \left\{ \begin{array}{c} U(n-1) \\ O(n) \\ SU(n) \end{array} \right\} \subset U(n). \quad (1.86)$$

Σύμφωνες καταστάσεις της $U(n)$

Οι κανονικές μεταβλητές της υγρής σταγόνας θα αποκομιστούν από τις σύμφωνες καταστάσεις της $U(n)$. Η διαδικασία εύρεσής τους συστηματοποιεί την αλγεβρική μέθοδο που παρουσιάστηκε για τις σύμφωνες καταστάσεις του μονοδιάστατου ταλαντωτή και της $SU(2)$. Η συστηματοποίηση αυτή οφείλεται στον Gilmore και είναι γνωστή ως ο αλγόριθμός του [1].

Η $u(n)$ είναι άλγεβρα Lie και δέχεται πάντα αποσύνθεση σε ευθύ άθροισμα, αν $u(n) \supset g$

$$u(n) = g + u(n)/g. \quad (1.87)$$

Η g καλείται η μέγιστη σταθεροποιητική υποάλγεβρα. Οι σύμφωνες καταστάσεις γεννούνται από τη δράση των μετασχηματισμών που ανήκουν στο χώρο $U(n)/G$ στη βασική κατάσταση που εξαιρώνεται από τη δράση τελεστών της g . Οι κανονικές μεταβλητές αποκομίζονται από τη κατάλληλη στερεογραφική προβολή των συμφώνων καταστάσεων στο μιγαδικό επίπεδο.

1.3 Τελεστές στο πρότυπο των αλληλεπιδρώντων μποζονίων της πυρηνικής δομής

Η κανονική χβάντωση της υγρής σταγόνας συνιστά το πρότυπο του Bohr για τη πυρηνική δομή. Οι βαθμοί ελευθερίας του προτύπου είναι οι συντελεστές της τετραπολικής παραμόρφωσης του πυρήνα, $\alpha_{2\mu}$ στους οποίους επιβάλλονται οι σχέσεις μετάθεσης,

$$[\alpha_{2\mu}, \pi_{2\nu}] = i\hbar\delta_{\mu\nu}. \quad (1.88)$$

Πάνω σε αυτή τη κανονική σχέση μετάθεσης μια πρώτη προσπάθεια δεύτερης χβάντωσης της υγρής σταγόνας που θα την ανέλυε σε όρους αλληλεπιδρώντων μποζονίων επιχειρήθηκε από τον ίδιο το Bohr. Οι 5 τετραπολικοί βαθμοί ελευθερίας δημιουργούν τα τετραπολικά φωνόνια της $u(5)$. Εν τούτοις, στους παραμορφωμένους πυρήνες γίνεται η μετάβαση στο σύστημα των κυρίων αξόνων, $\alpha'_{21} = \alpha'_{2-1} = 0, \alpha'_{22} = \alpha'_{2-2}$ στο οποίο μένουν μονάχα δύο ενεργοί βαθμοί ελευθερίας οι,

$$\alpha'_{20} = \beta \cos \gamma, \quad \alpha'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma. \quad (1.89)$$

Η δεύτερη χβάντωση της υγρής σταγόνας σε όρους μονάχα τετραπολικών φωνονίων αντανακλά τη θεμελιώδη αντίθεση του προτύπου του Bohr σε σχέση με την αλλαγή του συστήματος αναφοράς στους παραμορφωμένους πυρήνες. Σε μια τέτοια ανάλυση η $SU(3)$ απουσιάζει λόγω της αλλαγής του συστήματος αναφοράς και την επικράτηση 2 βαθμών ελευθερίας. Ο χαμένος βαθμός ελευθερίας μπορεί να αντικατασταθεί από ένα απόλυτα δονητικό ή αλλιώς μονοπολικό μποζόνιο s . Η ζητούμενη

άλγεβρα τότε για την υγρή σταγόνα είναι η $U(n) = U(6)$ όπως έδειξαν οι Iachello, Arima, σε μια σειρά από δημοσιεύσεις στα τέλη της δεκαετίας του 70' που συνιστούν το πρότυπο των αλληλεπιδρώντων μποζονίων της πυρηνικής δομής. Ό,τι ακολουθεί έως το τέλος του κεφαλαίου αυτού και δεν υπάρχει παραπομπή σε επιπλέον αναφορά, στηρίζεται στις [14],[15],[16],[17].

1.3.1 Μποζονικοί Τελεστές

Οι συλλογικές πυρηνικές διεγέρσεις περιγράφονται μέσω της δεύτερης κβάντωσης. Αν και καθαρά κβαντικές, οι εν λόγω διεγέρσεις σχετίζονται με γεωμετρική παραμόρφωση του πυρήνα. Η τελευταία εκδηλώνεται από το παρατηρούμενο φάσμα πολλών βαρέων πυρήνων, το οποίο ακολουθεί το κανόνα $j(j+1)$ και δηλώνει ιδιοπεριστροφή. Η ιδιοπεριστροφή αυτή συνδέεται με γεωμετρικές παραμορφώσεις μέσω του προτύπου του Bohr. Άρα οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και οι αντίστοιχοι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής των συλλογικών διεγέρσεων, θα διακρίνονται ως προς το κβαντικό αριθμό της στροφορμής. Η διάκριση αυτή αντανακλά τη μελλοντική σύνδεση του κβαντικού συστήματος με τη γεωμετρία του.

Σε πρώτη προσέγγιση (IBM1) η παραμόρφωση περιγράφεται έως το τετραπολικό τρόπο ταλάντωσης. Ο τελευταίος αναγνωρίζεται ως η κατάσταση της συλλογικής διέγερσης με κβαντικό αριθμό της στροφορμής $j = 2$. Στους άρτιους-άρτιους πυρήνες ο διπολικός όρος αγνοείται διότι η μοσιμία των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων διατηρείται για άρτιες τιμές της j . Άρα δομείται ένα σύστημα δύο καταστάσεων από τη μονοπολική $J^P = 0^+$ καλούμενη κατάσταση s και τη τετραπολική $J^P = 2^+$ καλούμενη κατάσταση d .

Οι τελεστές δημιουργίας s^\dagger και καταστροφής s της κατάστασης s ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[s, s^\dagger] = 1. \quad (1.90)$$

Η τετραπολική κατάσταση d γεννά πέντε πιθανές υποκαταστάσεις $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$ όταν η στροφορμή προβληθεί σε άξονα επιλεγμένου συστήματος αναφοράς. Οι αντίστοιχοι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής τους d_μ^\dagger, d_μ ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης

$$[d_\mu, d_{\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'}, \quad [d_\mu, d_{\mu'}] = [d_\mu^\dagger, d_{\mu'}^\dagger] = 0. \quad (1.91)$$

Οι σχέσεις μετάθεσης μεταξύ τελεστών της μονοπολικής και της τετραπολικής κατάστασης είναι

$$[s, d_\mu^\dagger] = [s, d_\mu] = [s^\dagger, d_\mu^\dagger] = [s^\dagger, d_\mu] = 0. \quad (1.92)$$

Οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται αν οι έξι τελεστές s^\dagger, d_μ^\dagger γραφούν σε ενιαία μορφή ως $b_{\ell\mu}^\dagger, \ell = 0, 2 \equiv s, d$, ή πιο απλά, $b_\alpha^\dagger, b_\alpha$ με

$$b_1 = s, b_2 = d, b_3 = d_1, b_4 = d_0, b_5 = d_{-1}, b_6 = d_{-2} \quad (1.93)$$

Όλες μαζί εκφράζονται ως

$$[b_{\ell\mu}, b_{\ell'\mu'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (1.94)$$

$$[b_{\ell\mu}, b_{\ell'\mu'}] = [b_{\ell\mu}^\dagger, b_{\ell'\mu'}^\dagger] = 0, \quad (1.95)$$

ή ακόμα πιο απλά

$$[b_\alpha, b_{\alpha'}^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha'}; [b_\alpha, b_{\alpha'}] = [b_\alpha^\dagger, b_{\alpha'}^\dagger] = 0. \quad (1.96)$$

Η μαθηματική σύνδεση του κβαντικού συστήματος με τη γεωμετρία του πραγματοποιείται αν εξετασθούν οι ιδιότητες συμμετρίας του στο φυσικό χώρο οι οποίες προκύπτουν από τις ιδιότητες στροφών του. Σε κβαντικό σύστημα οι τελευταίες καθορίζονται πλήρως από τις σχέσεις μετάθεσης με τους τελεστές της στροφορμής. Τα παραπάνω δηλώνουν ότι οι μποζονικοί τελεστές θα εκφράζονται ως σφαιρικοί τανυστικοί τελεστές τάξης ℓ , T_μ^ℓ , καθ'όσον οι τελευταίοι οριζόμενοι από τις σχέσεις μετάθεσης με τη στροφορμή θα αναδεικνύουν τις πιθανές συμμετρίες του συστήματος. Η μορφή αυτή προτάθηκε από τον Racah με το τελεστή T_μ^ℓ να συμπεριφέρεται κάτω από μια στροφή R ως διάνυσμα βάσης

$$RT_\mu^\ell R^{-1} = \sum_{\mu'} T_{\mu'}^\ell R_{\mu'\mu}^\ell, \quad (1.97)$$

στο χώρο των αναπαραστάσεων της ομάδας των στροφών, δηλαδή τις σφαιρικές αρμονικές ή τις συναρτήσεις Wigner.

Κατ' αυτόν το τρόπο μπορούν να οριστούν οι τελεστές δημιουργίας αλλά όχι οι καταστροφής. Προκειμένου να οριστούν και οι αντίστοιχοι σφαιρικοί τανυστές για τους τελεστές καταστροφής, οι τελευταίοι τροποποιούνται ως

$$b_{\ell\mu} \rightarrow \tilde{b}_{\ell\mu} = (-)^{\ell+\mu} b_{\ell,-\mu}. \quad (1.98)$$

Τώρα μετασχηματίζονται ως σφαιρικοί τανυστές.

1.3.2 Αριθμοί κατάληψης και βάση

Ο πυρήνας αναλυόμενος με τους επιλεγμένους μποζονικούς τελεστές αποτελεί έναν αρμονικό ταλαντωτή έξι βαθμών ελευθερίας που αποκαλύπτονται από το μποζόνιο s και τα πέντε μποζόνια d_μ . Επομένως μια n -οστή κατάσταση συλλογικής πυρηνικής διέγερσης μπορεί να οριστεί ως,

$$|n_s, n_d\rangle = b_{\ell\mu}^\dagger b_{\ell'\mu'}^\dagger \dots |0\rangle, \quad (1.99)$$

που απλά αντιστοιχεί στη παρουσία $n = n_s + n_d$ μποζονίων. Οι ιδιοκαταστάσεις αυτές ορίζουν το πλήρες σύνολο

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = I. \quad (1.100)$$

Το παραπάνω σύνολο θα αποτελέσει τη βάση για την αναπαράσταση καταστάσεων των συλλογικών πυρηνικών διεγέρσεων όπως επίσης και τελεστών για τις μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων αυτών. Η εν λόγω αναπαράσταση αναφέρεται ως εκείνη των αριθμών κατάληψης και αποτελεί τον ορισμό της δεύτερης κβάντωσης.

Για λόγους γεωμετρικής συνέπειας που αναφέρθηκαν παραπάνω, το πλήθος των μποζονίων που στην (10) εκφράζεται από την επαναλαμβανόμενη δράση των τελεστών δημιουργίας στο κενό, θα πρέπει να εκφράζεται ως σφαιρικός τανυστής. Οι λόγοι αυτοί διαφωτίζονται εδώ από το γεγονός ότι διάφορα μποζόνια του πλήθους θα κατοικούν κάποια από τη μονοπολική ή τετραπολική κατάσταση

του πυρήνα. Κατηλλειμένες πλέον θα αποτελούν τους δομικούς λίθους για την ανάδειξη της ολικής πυρηνικής στροφορμής όπως αυτή εκφράζεται από το δείκτη του ολικού σφαιρικού τανυστή. Η σχέση

$$T_{\mu}^{(\ell)} = [T^{(\ell_1)} \times T^{(\ell_2)}]_{\mu}^{\ell}, \quad (1.101)$$

ορίζει το γινόμενο δύο σφαιρικών τανυστών με το μετασχηματισμό από τη συζευγμένη στην ασύζευκτη βάση να είναι τύπου Glebsch Gordan

$$[T^{(\ell_1)} \times T^{(\ell_2)}]_{\mu}^{\ell} = \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle \ell_1 \mu_1 \ell_2 \mu_2 | \ell \mu \rangle T_{\mu_1}^{(\ell_1)} T_{\mu_2}^{(\ell_2)}. \quad (1.102)$$

Επομένως η βάση για τις αναπαραστάσεις καταστάσεων και τελεστών εκφράζεται ως,

$$[b_{\ell\mu}^{\dagger} \times b_{\ell'\mu'}^{\dagger} \times \dots]_M^{(L)} |0\rangle. \quad (1.103)$$

Η παραπάνω μαθηματική έκφραση δηλώνει ότι ο γεννηθέντας αριθμός κατάληψης θα έχει συγκεκριμένη στροφορμή L όπως εκφράζεται από το σφαιρικό τανυστικό τελεστή τάξης L .

1.3.3 Χαμιλτονιανή

Στον αρμονικό ταλαντωτή ενός μποζονικού βαθμού ελευθερίας έστω a η χαμιλτονιανή έχει τη γνωστή διαγωνοποιημένη μορφή του πλήθους μποζονίων $a^{\dagger} a$. Για κάθε μία επιπλέον διάσταση εισάγεται ένας νέος τύπος μποζονίου. Η διαγωνοποιημένη μορφή διατηρείται ως άθροισμα σε όλους τους τύπους και σημαίνει απουσία αλληλεπίδρασης μεταξύ των μποζονίων. Στο IBM η απουσία αλληλεπίδρασης δηλώνει πως οι καταστάσεις s και d θα είναι εκφυλισμένες μεταξύ τους [18]. Η αλληλεπίδρασή τους εισάγεται στη Χαμιλτονιανή από επιπρόσθετους όρους οι οποίοι σε αναλογία με τον ένα βαθμό ελευθερίας γεννούν ζεύγη δύο, τριών και παραπάνω μποζονίων. Λόγω του προαναφερθέντος περιορισμού σε δεύτερη τάξη, ο επιπρόσθετος όρος είναι εκείνος των δύο σωμάτων (two body). Η ενέργεια είναι βαθμωτό μέγεθος άρα ο τελεστής της χαμιλτονιανής είναι βαθμωτός ($L = 0$) και έχει τη μορφή,

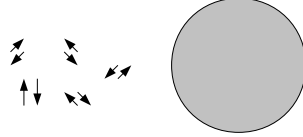
$$H = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} [b_{\alpha}^{\dagger} \times b_{\beta}]^{(0)} + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{1}{2} u_{\alpha\beta\gamma\delta} [[b_{\alpha}^{\dagger} \times b_{\beta}^{\dagger}]^l \times [b_{\gamma} \times b_{\delta}]^l]^{(0)}. \quad (1.104)$$

Ο επιπρόσθετος όρος προκαλεί την ενεργειακή διαφορά $\epsilon = \epsilon_d - \epsilon_s$ η οποία αντιστοιχεί στο στοιχείο μήτρας

$$u_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle [b_{\alpha} \times b_{\beta}]^l | V | [b_{\gamma} \times b_{\delta}]^l \rangle, \quad (1.105)$$

και δηλώνει την αλληλεπίδραση μεταξύ των s και d . Σηματοδοτεί την εμφάνιση της αλληλεπίδρασης ζευγών μεταξύ τους (pairing interaction) και την αλληλεπίδραση μεγάλης εμβέλειας (long range interaction) ως εκδήλωση ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης δεύτερης τάξης που είναι τετραπολικής φύσεως (quadrupole interaction).

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην ανάλυση της πυρηνικής δομής είναι η σύνδεση των συλλογικών με τους μονοσωματιδιακούς βαθμούς ελευθερίας. Στους τελευταίους αντιστοιχεί το πρότυπο των φλοιών στο οποίο θεωρείται ότι τα νουκλεόνια 'κινούνται' σε ένα μέσο πεδίο. Η σύνδεσή

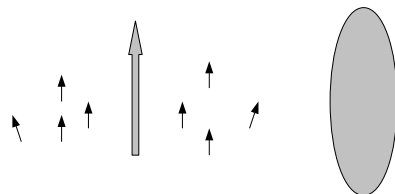


Σχήμα 1.2: Συσχέτιση ζευγών και σφαιρική συμμετρία. Απουσία μίξης s και d .

τους με τις συλλογικές διεγέρσεις σήμερα πιστεύεται πως προέρχεται από το ζευγάρωμά τους (pairing) με τη τάση του να παράγει μια υπέρρευστη συμπίκνωση [19]. Η τελευταία στο όριο του απείρου αριθμού μποζονίων δημιουργεί το κατάλληλο μέσο (bulk) για τη πραγμάτωση συγκεκριμένης γεωμετρικής μορφής του πυρήνα. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να γίνει μια πρώτη εκτίμηση της απλότητας του προτύπου με τη διαύγεια που αυτή προσφέρει.

Στο νουκλεονικό επίπεδο η αλληλεπίδραση ζευγών ευθύνεται για τη δημιουργία των μποζονίων από τη σύζευξη χρονικά αντεστραμμένων καταστάσεων νουκλεονίων σθένους δηλαδή αντιθέτου σπιν (pair correlations) και συνεισφέρει στη σταθεροποίηση του πυρήνα. Χαμιλτονιανή περιγραφόμενη αποκλειστικά από μποζόνια ενός τύπου s ή d , χωρίς μίξη μεταξύ τους, αντανακλά απόλυτη συσχέτιση των νουκλεονίων σθένους του σε ολική στροφορμή μηδέν ή δύο. Αναμένεται έτσι πυρήνας σφαιρικής συμμετρίας όπως δείχνεται στο σχήμα 1.2. Στο κβαντικό επίπεδο μια σφαίρα δε στρέφεται και ο μοναδικός βαθμός ελευθερίας που απομένει είναι η δόνηση. Πράγματι, πυρήνες εκδηλώνουν ισαπέχουσες φασματικές γραμμές, που συνιστούν απουσία περιστροφικής κίνησης, καθαρό φάσμα αρμονικού ταλαντωτή. Άρα η χαμιλτονιανή που περιέχει καθαρούς όρους $s^\dagger s$ και $d^\dagger d$ δηλώνει δονητικό πυρήνα σφαιρικού σχήματος. Επειδή η ενέργεια της κατάστασης s είναι μηδέν, τελικά δονητικοί πυρήνες περιγράφονται από χαμιλτονιανή μόνο του πλήθους n_d , $d^\dagger d$.

Η άλλη περίπτωση συσχέτισης αφορά τα σπιν των νουκλεονίων με το μέσο πεδίο του πυρήνα (aligned pairing)[20], όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. Τότε κάποια νουκλεόνια θα βρεθούν σε ανοικτούς φλοιούς και φαινόμενα πόλωσης θα λάβουν χώρα μεταξύ αυτών και των αρχικών τους, ως μian αλληλεπίδραση μεγάλης εμβέλειας, με αποτέλεσμα τη συλλογική παραμόρφωση του πυρήνα [21]. Η κατάσταση αυτή αναπαρίστανται στη χαμιλτονιανή του IBM για εκείνες τιμές του συντελεστή $u_{\alpha\beta\gamma\delta}$



Σχήμα 1.3: Συσχέτιση με μέσο πεδίο και τετραπολική παραμόρφωση. Μίξη s και d .

στις οποίες τα τροχιακά s και d μιζάρονται με αποτέλεσμα τη τετραπολική παραμόρφωση. Εδώ η στροφή είναι καλά ορισμένη στο κβαντικό επίπεδο ως η παραβίαση της σφαιρικής συμμετρίας [22]. Η περιστροφή συμβαίνει ως προς άξονα κάθετο σε εκείνον της συμμετρίας του πυρήνα [23], και άρα αποκομίζεται περιστροφικό φάσμα. Οι περιστροφικές καταστάσεις συνδέονται μεταξύ τους με πλάτος πιθανότητας που υπολογίζεται από τη δράση του αντίστοιχου ηλεκτρικού τετραπολικού τελεστή μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης ($B(E2)$), αναδεικνύοντας τη τετραπολική παραμόρφωση ως αποτέλεσμα των φαινομένων πόλωσης. Επομένως η παρουσία όρων $s^\dagger d$, $d^\dagger s$ στη χαμιλτονιανή, δηλώνει περιστροφικό πυρήνα ως ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Το IBM καλύπτει τις δύο κύριες περιπτώσεις της κίνησης της πυρηνικής δομής. Στη πραγματικότητα οι περισσότεροι πυρήνες εκδηλώνουν και τους δύο τύπους κίνησης, όπως αυτοί φανερώνονται από την ύπαρξη ενεργειακών ζωνών στο φάσμα. Δύο περιστροφικές καταστάσεις ανήκουν στην ίδια ζώνη αν συνδέονται με ισχυρό πλάτος της $B(E2)$. Κάθε ζώνη με τη σειρά της δείχνει το τρόπο ταλάντωσης του πυρήνα. Έτσι σε κάθε τύπο δόνησης χτίζονται διάφορες περιστροφικές καταστάσεις.

Η μαθηματική σύνδεση των μποζονίων με τη γεωμετρία του πυρήνα επιτυγχάνεται με την εισαγωγή των συμφώνων καταστάσεων. Στο μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή η κατάληψη ενός ket από άπειρο αριθμό μποζονίων συνιστά μια σύμφωνη κατάσταση. Για παράδειγμα στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που αποτελεί ένα μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή, άπειρος αριθμός φωτονίων συνιστά μεγάλες τιμές στη φάση του κύματος η οποίες ορίζουν μια εικόνα γεωμετρίας (eikonal) [24], και αποτελεί το όριο της γεωμετρικής οπτικής. Αυτό είναι το κλασικό όριο για το μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή. Το αντίστοιχο για τον εξαδιάστατο του IBM συναντά τη γεωμετρία του μοντέλου των Bohr και Mottelson.

Οι τελευταίοι αντί να αναφέρονται σε μέση πυκνότητα νουκλεονίων, εισήγαγαν την έννοια του μέσου πεδίου τους, η κυματοσυνάρτηση του οποίου αποκαλύπτει τις συμμετρίες του πυρήνα [20].

Η μαθηματικά συνεπής σύνδεση των δύο προσεγγίσεων είναι εκείνη των αλγεβρών Lie και των ομάδων Lie. Η εκθετικοποίηση των αλγεβρών Lie [25] που κλείνουν τα μποζόνια s και d παράγουν τις αντίστοιχες ομάδες Lie οι οποίες δείχνουν τις συμμετρίες του πεδίου των Bohr και Mottelson. Οι σύμφωνες καταστάσεις της $U(6)$ βρίσκονται με την εφαρμογή του αλγορίθμου του Gilmore, [1], για τη περίπτωση της $U(6)$ [26],[27].

Παρακάτω παρουσιάζονται οι άλγεβρες που κλείνουν οι μποζονικοί τελεστές του προτύπου. Μιαν άλγεβρα γράφεται με μικρό γράμμα g , ενώ η αντίστοιχη ομάδα της με μεγάλο G . Λόγω του μαθηματικού ισομορφισμού τους καταχρηστικά πολλές φορές δεν είναι απαραίτητη η διάκρισή τους όταν υπολογίζονται οι αναπαραστάσεις τους. Γι'αυτό σε ό,τι ακολουθεί, στα δι-γραμμικά γινόμενα χρησιμοποιείται το g , ενώ στις αναπαραστάσεις χρησιμοποιείται το G .

1.4 $u(6)$

Οι σχέσεις μετάθεσης που κλείνουν οι συνολικά 36 τελεστές του προτύπου, ορίζουν την άλγεβρα σε έξι βαθμούς ελευθερίας που είναι η $u(6)$. Όλα τα δι-γραμμικά γινόμενα είναι της μορφής

$$G_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 6). \quad (1.106)$$

Για παράδειγμα ας υπολογίσουμε το μεταθέτη

$$[G_{31}, G_{11}] = [b_3^{\dagger} b_1, b_1^{\dagger} b_1] = [d^{\dagger} s, s^{\dagger} s], \quad (1.107)$$

στη βάση που ορίστηκε παραπάνω, $|n_d, n_s\rangle$. Έχουμε

$$[d^{\dagger} s, s^{\dagger} s]|n_d, n_s\rangle = (d^{\dagger} s \mathbf{s}^{\dagger} \mathbf{s} - s^{\dagger} s d^{\dagger} s)|n_d, \mathbf{n}_s\rangle = d^{\dagger} s n_s |n_d, n_s\rangle - s^{\dagger} s d^{\dagger} s |n_d, n_s\rangle = \quad (1.108)$$

$$(n_s - s^{\dagger} s) d^{\dagger} s |n_d, \mathbf{n}_s\rangle = (n_s - s^{\dagger} s) \sqrt{n_s} \mathbf{d}^{\dagger} |n_d, n_s - 1\rangle = \quad (1.109)$$

$$\sqrt{n_s} \sqrt{n_d + 1} (n_s - s^{\dagger} s) |n_d + 1, \mathbf{n}_s - 1\rangle = \sqrt{n_s} \sqrt{n_d + 1} |n_d + 1, n_s - 1\rangle = d^{\dagger} s |n_d, n_s\rangle. \quad (1.110)$$

Αναπαράγει το $d^{\dagger} s$ άρα ικανοποιεί τις απαιτήσεις της Lie. Εν γένει οι σχέσεις μετάθεσης είναι,

$$[G_{\alpha\beta}, G_{\gamma\delta}] = G_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - G_{\gamma\beta} \delta_{\delta\alpha}. \quad (1.111)$$

Όπως αναφέρθηκε, η μαθηματικά συνεπής μορφή των ανωτέρω τελεστών με τις ιδιότητες της γεωμετρικής συμμετρίας του ταλαντωτή αποκομίζεται από τη μετάλλαξή τους σε σφαιρικούς τανυστικούς τελεστές. Άρα η μετάλλαξη,

$$G_{\alpha\beta} \longrightarrow G_{\mu}^k(l, l') = [b_l^{\dagger} \times \tilde{b}_{l'}]_{\mu}^k \quad (l, l' = 0, 2 \equiv s, d), \quad (1.112)$$

ορίζει τους παρακάτω τανυστικούς τελεστές και εκτός των άλλων εξασφαλίζει την επιβίωση της $o(3)$, ως της άλγεβρας της τροχιακής στροφορμής.

$$G_0^0(s, s) = [s^{\dagger} \times \tilde{s}]_0^0, \quad (1.113)$$

$$G_0^0(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^0, \quad (1.114)$$

$$G_\mu^1(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1, \quad (1.115)$$

$$G_\mu^2(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2, \quad (1.116)$$

$$G_\mu^3(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3, \quad (1.117)$$

$$G_\mu^4(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^4, \quad (1.118)$$

$$G_\mu^2(d, s) = [d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^2, \quad (1.119)$$

$$G_\mu^2(s, d) = [s^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2, \quad (1.120)$$

Οι αναπαραστάσεις της $u(6)$ ορίζονται από τους τελεστές Casimir. Λόγω της παρουσίας της αλληλεπίδρασης ζευγών, δηλαδή δύο σωμάτων, ο Casimir θα έχει και δεύτερη τάξη. Η δράση των γεννητόρων της συμμετρίας στις καταστάσεις $|n_d, n_s\rangle$ συντηρούν πάντα την αναπαράσταση. Η δράση τους δε μπορεί να συνδέσει τις αναπαραστάσεις πρώτης τάξης με εκείνες της δεύτερης. Οι τελεστές Casimir είναι πάντα βαθμωτά μεγέθη ως οι αναλλοίωτες ποσότητες της κάθε αναπαράστασης και απορρέουν από βαθμωτά γινόμενα ταυστικών τελεστών. Οι τελεστές Casimir πρώτης τάξης της $u(6)$ είναι ο τελεστής πληθυσμού,

$$C_1\{u(6)\} = G_0^0(s, s) + \sqrt{5}G_0^0(d, d) = [s^\dagger \tilde{s}]^0 + [d^\dagger \tilde{d}]^0, \quad (1.121)$$

$$\langle C_1\{u(6)\} \rangle = n_s + n_d = N. \quad (1.122)$$

Σημειώνεται εδώ ότι τα γινόμενα $[s^\dagger \tilde{d}]^0$ και $[d^\dagger \tilde{s}]^0$ δεν ορίζουν πληθυσμό μποζονίων άρα σε πρώτη τάξη δε συνεισφέρουν στην ενέργεια. Ο τελεστής Casimir δεύτερης τάξης της $u(6)$ λαμβάνεται από βαθμωτά γινόμενα ταυστών και αντανακλά όλες τις πιθανές συσχετίσεις ζευγών μποζονίων που συνεισφέρουν στην ενέργεια. Παίρνονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί ταυστικών γινομένων από τους συνολικά 36 τελεστές, δηλαδή γινόμενα με στροφορμή 0.

$$G^0(s, s) \cdot G^0(s, s) = [s^\dagger \tilde{s}]^0 \cdot [s^\dagger \tilde{s}]^0 \equiv \hat{n}_s \cdot \hat{n}_s, \quad (1.123)$$

$$G^0(d, d) \cdot G^0(d, d) = [d^\dagger \tilde{d}]^0 \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^0 \equiv \hat{n}_d \cdot \hat{n}_d,$$

$$G^1(d, d) \cdot G^1(d, d) = [d^\dagger \tilde{d}]^1 \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^1,$$

$$G^2(s, d) \cdot G^2(d, s) = [s^\dagger \tilde{d}]^2 \cdot [d^\dagger \tilde{s}]^2,$$

$$G^2(d, s) \cdot G^2(s, d) = [d^\dagger \tilde{s}]^2 \cdot [s^\dagger \tilde{d}]^2,$$

$$G^2(d, d) \cdot G^2(d, d) = [d^\dagger \tilde{d}]^2 \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^2,$$

$$G^3(d, d) \cdot G^3(d, d) = [d^\dagger \tilde{d}]^3 \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^3,$$

$$G^4(d, d) \cdot G^4(d, d) = [d^\dagger \tilde{d}]^4 \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^4. \quad (1.124)$$

Τα γινόμενα αυτά μαζί με τα προηγούμενα πρώτης τάξης ορίζουν όλες τις πιθανές συνεισφορές στη Χαμιλτονιανή στο πλαίσιο της $u(6)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι στη Χαμιλτονιανή η αλληλεπίδραση ζευγών έχει τη μορφή $[d^\dagger d^\dagger]^L \cdot [\tilde{d}\tilde{d}]^L$, $L = 0, 2, 4$. Τα παραπάνω γινόμενα έχουν μορφή $[d^\dagger \tilde{d}]^l \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^l$, $l = 0, 1, 2, 3, 4$. Χρησιμοποιώντας [28] τη σχέση,

$$[d^\dagger \tilde{d}]^l \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^l = (2l + 1) \sum_L \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & L \\ 2 & 2 & l \end{matrix} \right\} [d^\dagger d^\dagger]^L \cdot [\tilde{d}\tilde{d}]^L + \frac{2l+1}{5} \hat{n}_d, \quad (1.125)$$

επιτυγχάνεται η σύνδεση τους τουλάχιστον για τα μποζόνια d , ενώ για τα s , ισχύουν τετριμμένες σχέσεις λόγω της μετάθεσης $[s, d] = [s^\dagger, d^\dagger] = 0$.

Η εμφανής φυσική σημασία των n_d και n_s έρχεται από τον ορισμό του Casimir 1ης τάξης της $u(6)$. Ο τελεστής Casimir δεύτερης τάξης της $u(6)$ είναι το πιο γενικό άθροισμα των διγραμμικών γινομένων των 1.123, 1.124,

$$\begin{aligned} C_2\{u(6)\} &= G^0(s, s) \cdot G^0(s, s) + G^0(d, d) \cdot G^0(d, d) + G^1(d, d) \cdot G^1(d, d) + \\ &G^2(s, d) \cdot G^2(d, s) + G^2(d, s) \cdot G^2(s, d) + G^2(d, d) \cdot G^2(d, d) + \\ &+ G^3(d, d) \cdot G^3(d, d) + G^4(d, d) \cdot G^4(d, d), \end{aligned} \quad (1.126)$$

$$\langle C_2\{u(6)\} \rangle = N(N + 5). \quad (1.127)$$

Η αλγεβρική δομή της $u(6)$ θα αναδείξει και τα μετρήσιμα μεγέθη, δηλαδή τους φυσικούς τελεστές του προτύπου. Το ανωτέρω φαινομενικό χάος των διαφόρων τελεστών τακτοποιείται μονάχα από την αλγεβρική μέθοδο. Επιπροσθέτως, τα φυσικά μεγέθη που απορρέουν από αυτά τα γινόμενα αναδεικνύονται από τη δυναμική συμμετρία που αποτελεί ένα πλήρες σύνολο ταυτόχρονα μετρήσιμων φυσικών μεγεθών.

1.4.1 U(5)

Η διερεύνηση υποαλγεβρών της $u(6)$ έρχεται από την αναγνώριση σχέσεων μετάθεσης των τανυστικών τελεστών 1.113 - 1.120. Αν αφαιρεθεί ένας βαθμός ελευθερίας επιτυγχάνεται η αναγωγή $u(n) \supset u(n - 1)$. Άρα αν από την άλγεβρα $u(6)$ αφαιρεθούν οι γεννήτορες που περιέχουν το μποζόνιο s , η άλγεβρα $u(5)$ κλείνεται από τους παρακάτω 25 τανυστικούς τελεστές,

$$G_0^0(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^0, \quad (1.128)$$

$$G_\mu^1(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1, \quad (1.129)$$

$$G_\mu^2(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^2, \quad (1.130)$$

$$G_\mu^3(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3, \quad (1.131)$$

$$G_\mu^4(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^4. \quad (1.132)$$

Οι αναπαραστάσεις της $u(5)$ ορίζονται από τους τελεστές Casimir πρώτης και δεύτερης τάξης. Ο πληθυσμός των μποζονίων d είναι ο Casimir πρώτης τάξης,

$$C_1\{u(5)\} = \sqrt{5}G_0^0(d, d) = [d^\dagger \tilde{d}]^0, \quad (1.133)$$

$$\langle C_1\{u(5)\} \rangle = n_d. \quad (1.134)$$

Αντίστοιχα ο Casimir 2ης τάξης της $u(5)$ είναι,

$$C_2\{u(5)\} = \sum_{k=0}^4 G^k(d, d) \cdot G^k(d, d) = [d^\dagger \tilde{d}]^0 \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^0 + 4[d^\dagger \tilde{d}]^0 \cdot [d^\dagger \tilde{d}]^0, \quad (1.135)$$

$$\langle C_2\{u(5)\} \rangle = n_d(n_d + 4). \quad (1.136)$$

U(6) ⊃ U(5)

Οι αναπαραστάσεις της $u(6)$ ορίζονται από το Casimir που είναι ο ολικός πληθυσμός των μποζονίων N όπως κατανέμονται στη ταυστική αναπαράσταση Young της $u(6)$, $[N]$. Η μποζονική δομή επιβάλλει να κρατήσουμε μονάχα το συμμετρικό ταυσστή άρα κρατάμε μονάχα τη πρώτη γραμμή του διαγράμματος Young από όλες τις πιθανές διαμερίσεις, με μήκος N

$$[N] \equiv \square \square \dots \square \equiv [N, 0, 0, 0, 0, 0]. \quad (1.137)$$

Στην απόλυτα συμμετρική κατάσταση το κάθε κουτί της σειράς θα παίρνει τιμές ή θα έχει δείκτη για το πληθυσμό των μποζονίων στη κάθε κατάσταση από τις έξι του προτύπου. Η πιο γενική αποσύνθεση της αναπαράστασης D ενός ταυσστή ή διαγράμματος $[f]$ σε σύστημα n μονοσωματιδιακών καταστάσεων εκφράζεται ως [15],

$$D([f], n) = \sum_{[f']} D([f'], n - 1). \quad (1.138)$$

Η μαθηματική σχέση για την αναγωγή είναι ίδια με την αλυσίδα του Gel'fand για τη $GL(n)$, που δηλώνει ότι,

$$f_1 \geq f'_1 \geq f_2 \geq f'_2 \dots \quad (1.139)$$

Εδώ έχουμε μονάχα $f_1 = N$, άρα ο κανόνας γίνεται $N \geq N'$ με βήμα ένα, δηλαδή,

$$D([N], 6) = D([N], 5) + D([N - 1], 5) + D([N - 2], 5) + \dots + D([1], 5) + D([0], 5). \quad (1.140)$$

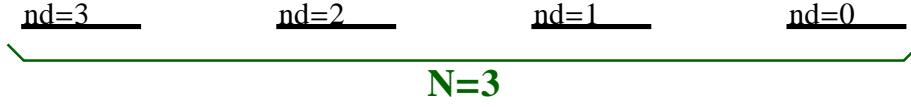
Η παραπάνω σχέση επαληθεύεται από το γεγονός ότι στη $u(6)$ ο πληθυσμός N μπορεί να κατοικεί είτε s είτε d καταστάσεις. Αγνοώντας την s , ή θα είναι όλα τα μποζόνια στη d ή λιγότερα κατά ένα κάθε φορά. Ο πληθυσμός της κατάστασης d είναι ο κβαντικός αριθμός της $u(5)$, n_d και βάσει της 1.140 δίνεται από το κανόνα,

$$n_d = N, N - 1, N - 2, \dots, N - N. \quad (1.141)$$

Άρα από την αναγωγή $u(6) \supset u(5)$ προκύπτει το φάσμα,

$$u(6) \supset u(5) \rightarrow |N, n_d\rangle. \quad (1.142)$$

Για παράδειγμα αν $N = 3$ τότε $n_d = 3, 2, 1, 0$. Μια διαγραμματική απεικόνιση των αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων φαίνεται στο σχήμα 1.4 .



Σχήμα 1.4: $N=3$, $U(6) \supset U(5)$

$O(5)$

Η $u(5)$ κρύβει και άλλες συμμετρίες. Κρατώντας τους τελεστές με περιττή τάξη λαμβάνουμε ομάδα με αντισυμμετρικό τανυστή. Αν από τα στοιχεία της $u(5)$ κρατηθούν μονάχα οι τανυστές περιττής τάξης,

$$G_{\mu}^1(d, d) = [d^{\dagger} \times \tilde{d}]_{\mu}^1, \quad (1.143)$$

$$T_3 \equiv G_{\mu}^3(d, d) = [d^{\dagger} \times \tilde{d}]_{\mu}^3, \quad (1.144)$$

λαμβάνονται 10 συνολικά στοιχεία. Εν γένει η άλγεβρα $o(n)$ περιέχει $n(n-1)/2$ στοιχεία, άρα οι εναπομείναντες τανυστικοί τελεστές κλείνουν την άλγεβρα $o(5)$, για τα μοζόνια d .

Οι αναπαραστάσεις των ορθογωνίων ομάδων δείχνουν συμμετρίες σε ορθογώνιους μετασχηματισμούς οι οποίοι έχουν σχέση με γεωμετρικές διαστάσεις. Με αυτό το τρόπο οι Casimir είναι δεύτερης ή και ανώτερης τάξης λαμβάνοντας έτσι τη θεμελιώδη ιδιότητα του αναλλοίωτου σε στροφές, όπως αυτό αντανακλάται στο τετράγωνο του μέτρου. Η $O(5)$ έχει τελεστή Casimir 2ης τάξης,

$$C_2\{O(5)\} = 4G_{\mu}^1(d, d) \cdot G_{\mu}^1(d, d) + 4G_{\mu}^3(d, d) \cdot G_{\mu}^3(d, d) = 2\hat{n}_d(\hat{n}_d + 3) - 10[d^{\dagger}d^{\dagger}]^0 \cdot [\tilde{d}\tilde{d}]^0, \quad (1.145)$$

$$\langle C_2\{O(5)\} \rangle = v(v + 3). \quad (1.146)$$

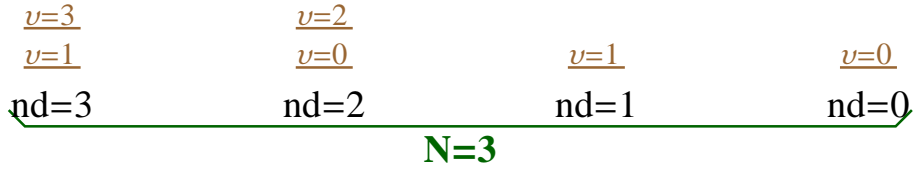
$U(6) \supset U(5) \supset O(5)$

Άρα η αλυσίδα γίνεται,

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5). \quad (1.147)$$

Οι αναπαραστάσεις της $U(5)$ με αυτό το τρόπο ανάγονται σε εκείνες της $O(5)$. Η $O(5)$ δομείται από αντισυμμετρικούς τανυστές και δηλώνει γενικευμένες στροφές σε 5 βαθμούς ελευθερίας. Εν γένει η ομάδα $O(n)$ για περιττό αριθμό μονοσωματιδιακών καταστάσεων έχει $(n-1)/2$ Casimir, άρα η $O(5)$ θα χαρακτηρίζεται από 2 χβαντικούς αριθμούς. Αν ο τανυστής της $O(5)$ αναπαρασταθεί κατά Young, από τους 2 χβαντικούς αριθμούς της $O(5)$, λόγω της συμμετροποίησης κρατάμε μονάχα ένα,

$$v \equiv (v, o). \quad (1.148)$$



Σχήμα 1.5: $N=3$, $U(6) \supset U(5) \supset O(5)$

Η αναγωγή $U(5) \supset O(5)$ είναι της μορφής της $U(n) \supset O(n)$. Οι αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της συμμετρίας $U(n)$ σε εκείνες της συμμετρίας $O(n)$, γράφονται στη κλασική τανυστική μορφή, όχι σαν διάγραμμα Young. Ο πιο απλός τανυστής για την ομάδα $O(n)$ είναι το δέλτα του Kronecker, το οποίο είναι και συμμετρικό $\delta^{ia}i_b = \delta^{ib}i_a$. Αν ο τανυστής της $U(n)$ γραφεί ως $F^{i_1 i_2 \dots i_N}$, τότε μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των δέλτα μέσω των συστολών [15],

$$F^{(i)N} = F_0^{(i)N} + \sum_{1,2} \delta^{i_1 i_2} F^{(i)N-2} + \sum_{1,2} \delta^{i_1 i_2} \delta^{i_3 i_4} F^{(i)N-4} + \dots \quad (1.149)$$

Η έκφραση αυτή μπορεί να ειπωθεί ως η αναγωγή της αναπαράστασης της $U(n)$ σε όρους της $O(n)$. Η τάξη του τανυστή μειώνεται κατά δύο για κάθε όρο του αθροίσματος του δεξιού μέλους. Ο κβαντικός αριθμός της $U(5)$ είναι ο πληθυσμός των μποζονίων στη κατάσταση d , n_d , ο οποίος είναι το πλήθος των κουτιών, αν ο τανυστής $F^{(i_1)N}$ αναπαρασταθεί κατά Young. Η αναγωγή $U(5) \supset O(5)$ επιτυγχάνεται βάσει της παραπάνω αποσύνθεσης μέσω των συστολών, αν δηλαδή από το διάγραμμα Young της $U(5)$ αφαιρούνται δύο συμμετροποιημένα κουτάκια, παράγεται η αντίστοιχη τιμή για το Casimir της $O(5)$. Ο Casimir της $O(5)$ είναι η seniority v και βάσει της 1.149 παίρνει τιμές,

$$v = n_d, n_d - 2, n_d - 4, \dots, 0. \quad (1.150)$$

Έτσι αναδύεται αλγεβρικά η σημασία της ως το πλήθος των ζευγών μποζονίων που μένουν σε στροφορμή διάφορη του μηδενός. Άρα παράγεται το φάσμα,

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \rightarrow |N, n_d, v\rangle. \quad (1.151)$$

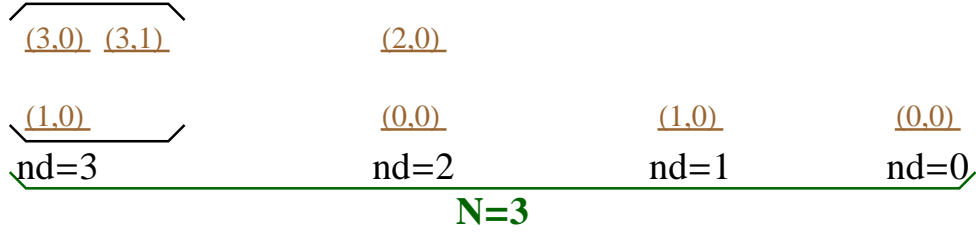
Στο παράδειγμα του $N = 3$, η seniority παίρνει τιμές

$$v = \begin{cases} 3, 1 & n_d = 3 \\ 2, 0 & n_d = 2 \\ 1 & n_d = 1 \\ 0 & n_d = 0, \end{cases} \quad (1.152)$$

Διαγραμματικά οι αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις $U(6) \supset U(5) \supset O(5)$ φαίνονται στο σχήμα 1.5 .

Από τους εναπομείναντες τανυστές, είναι φανερό ότι ο $G_\mu^1(d, d)$, είναι ο τανυστής της $O(3)$. Άρα παρήχθη ολοκληρωμένη αλυσίδα που αναπαριστά την αντίστοιχη δυναμική συμμετρία του προτύπου,

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3). \quad (1.153)$$



Σχήμα 1.6: $N=3, (v, n_\Delta)$

Οι αναγωγίσιμες πλέον αναπαραστάσεις της $O(5)$ δε περιέχονται πλήρως στις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $O(3)$. Σε αυτή τη περίπτωση εισάγουμε με το χέρι το λεγόμενο χαμένο κβαντικό αριθμό ώστε η αναγωγή να στέκει αλγεβρικά. Η τρόπος με τον οποίο βρίσκεται έρχεται από τη μέθοδο των ημι-σπιν και σύγκριση των επιπέδων μεταξύ τους. Ο χαμένος κβαντικός αριθμός σχετίζεται με τα μποζόνια που κάνουν σύζευξη ανά τρία και είναι το πλήθος τους, συμβολίζεται δε με n_Δ και παίρνει τιμές από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Η αλγεβρική σχέση μεταξύ των κβαντικών αριθμών n_d, v, n_Δ είναι,

$$n_d = n_d - v + 3n_\Delta + \lambda, \quad (1.154)$$

όπου λ ο κβαντικός αριθμός που σχετίζεται με τη στροφορμή από τη σχέση,

$$L = \lambda, \lambda + 1, \dots, 2\lambda. \quad (1.155)$$

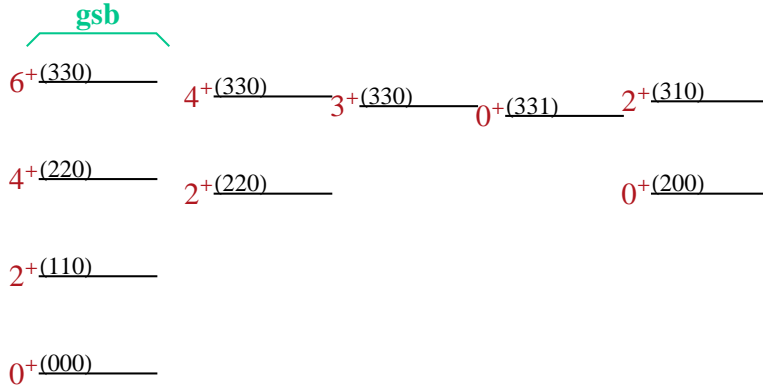
Τα επίπεδα της συμμετρίας μπορούν να καθοριστούν πλήρως από το ζεύγος τιμών (v, n_Δ) . Ο τρόπος με τον οποίο παίρνει τιμές γίνεται αντιληπτός από το παράδειγμα για $N = 3$. Έχουμε

$$n_d = 3 \left\{ \begin{array}{l} v = 3, \quad 3 = 3 - 3 + 3\nu_\Delta + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \nu_\Delta = 0, \lambda = 3 \Rightarrow L = 6, 4, 3 \\ \nu_\Delta = 1, \lambda = 0 \Rightarrow L = 0 \end{array} \right\} \\ v = 1, \quad 3 = 3 - 1 + 3\nu_\Delta + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \nu_\Delta = 0, \lambda = 1 \Rightarrow L = 1, 2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (1.156)$$

$$n_d = 2 \left\{ \begin{array}{l} v = 2, \quad 2 = 2 - 2 + 3\nu_\Delta + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \nu_\Delta = 0, \lambda = 2 \Rightarrow L = 2, 3, 4 \end{array} \right\} \\ v = 0, \quad 2 = 2 - 0 + 3\nu_\Delta + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \nu_\Delta = 0, \lambda = 0 \Rightarrow L = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (1.157)$$

$$n_d = 1, 0 \left\{ \begin{array}{l} n_d = 1, v = 1, \quad 1 = 1 - 1 + 3\nu_\Delta + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \nu_\Delta = 0, \lambda = 1 \Rightarrow L = 1, 2 \end{array} \right\} \\ n_d = 0, v = 0, \quad 0 = 0 - 0 + 3\nu_\Delta + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \nu_\Delta = 0, \lambda = 0 \Rightarrow L = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (1.158)$$

Η αναπαράσταση της συμμετρίας σε κβαντικά επίπεδα (v, n_Δ) για τρία μποζόνια φαίνεται διαγραμματικά στο σχήμα 1.6 .



Σχήμα 1.7: $N=3, U(5), (n_d, v, \nu_\Delta)$

Το φάσμα $U(5)$

Έχοντας βρει την $O(3)$ έχει παραχθεί ένα σύνολο ταυτόχρονα μετρήσιμων φυσικών μεγεθών. Μια βάση στο χώρο Hilbert της Χαμιλτονιανής μπορεί να οριστεί από τις καταστάσεις,

$$\left| \begin{array}{ccccccc} U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \\ N & n_d & v & n_\Delta & L \end{array} \right\rangle \quad (1.159)$$

Αν βρισκόμαστε σε δυναμική συμμετρία το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αλυσίδας είναι η Χαμιλτονιανή,

$$H = e_0 + e_1 C_1 \{U(6)\} + e_2 C_2 \{U(6)\} + \varepsilon C_1 \{U(5)\} + \alpha C_2 \{U(5)\} + \beta C_2 \{O(5)\} + \gamma C_2 \{O(3)\}, \quad (1.160)$$

$$\langle H \rangle = e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5) + \varepsilon n_d + \alpha n_d(n_d + 4) + \beta 2v(v + 3) + \gamma 2L(L + 1). \quad (1.161)$$

Η μέση τιμή της Χαμιλτονιανής αυτής στις καταστάσεις $|N, n_d, v, n_\Delta, L, M\rangle$, γεννά τους κανόνες επιλογής,

$$\Delta n_d = \pm 1, \Delta v = \pm 1, |\Delta L| \leq 2. \quad (1.162)$$

Οι κανόνες επιλογής ομαδοποιούν τις καταστάσεις σε ενεργειακές ζώνες όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7. Οι ζώνες είναι δονητικού χαρακτήρα, οι καταστάσεις τους προκύπτουν από διέγερση των τετραπολικών φωνονίων. Οι καταστάσεις των πυρήνων που "κάθονται" στις αναπαραστάσεις του σχήματος 1.7, λέγεται ότι εκδηλώνουν τη δυναμική συμμετρία $U(5)$.

1.5 SU(3)

Το σύμφωνο Nilsson-Elliott, επβάλλει τη παρουσία της $su(3)$. Στο πρότυπο των αλληλεπιδρώντων μποζονίων το μποζόνιο s προσφέρει το χαμένο επιπρόσθετο βαθμό ελευθερίας για τη πραγμάτωση της $su(3)$. Από τους τανυστικούς τελεστές 1.113 - 1.120 ψάχνουμε εκείνους που ορίζουν το τετραπολικό τανυστικό τελεστή. Ο τανυστής αυτός είναι δεύτερης τάξης. Από τους δομικούς λίθους του προτύπου η πιο γενική τέτοια περίπτωση είναι

$$\hat{Q} = G_\mu^2(d, s) + G_\mu^2(s, d) + G_\mu^2(d, d). \quad (1.163)$$

Πράγματι η άλγεβρα $su(3)$ κλείνεται από το τανυστικό τελεστή $G_\mu^1(d, d)$ της στροφορμής και τη γραφή του πιο γενικού τετραπολικού τελεστή ως στοιχείου της $su(3)$,

$$\hat{Q} = G_\mu^2(d, s) + G_\mu^2(s, d) + \frac{\sqrt{7}}{2} G_\mu^2(d, d) = [d^\dagger \bar{s}]^2 + [s^\dagger \bar{d}]^2 + \frac{\sqrt{7}}{2} [d^\dagger \bar{d}]^2. \quad (1.164)$$

Οι αναπαραστάσεις της $SU(3)$ ορίζονται από το Casimir 2ης τάξης,

$$C_2\{SU(3)\} = \frac{2}{3}(2\hat{Q} \cdot \hat{Q} + \frac{3}{4}\hat{L} \cdot \hat{L}), \quad (1.165)$$

$$\langle C_2\{SU(3)\} \rangle = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu) + L(L + 1). \quad (1.166)$$

1.5.1 U(6) ⊃ SU(3)

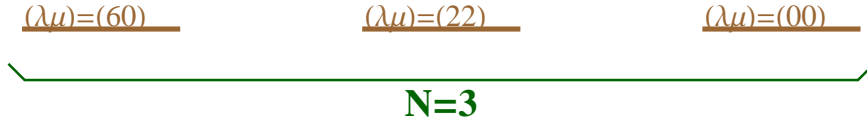
Οι αναπαραστάσεις της $U(6)$ [N], για N μποζόνια, γίνονται αναγωγίσιμες σε εκείνες της $SU(3)$. Η πιο γενική αναγωγή $U(n) \supset SU(n)$ στηρίζεται στη παρακάτω διαπίστωση. Για μια πλήρως αντισυμμετροποιημένη κατάσταση της $U(n)$, $[1111 \dots 1]$, ο πιο γενικός μετασχηματισμός $T(U)$ της $U(n)$, αποδεικνύεται [29] ότι έχει τη μορφή,

$$T(U)\Psi = \det(U)\Psi. \quad (1.167)$$

Αν $\det(U) = 1$, αφενός ο μετασχηματισμός της $U(n)$ στη $[1111 \dots 1]$ είναι ισοδύναμος με το μετασχηματισμό της $U(n)$ στη $[0]$, αφετέρου η σχέση $\det(U) = 1$ για τους μετασχηματισμούς της $U(n)$, ορίζει την $SU(n)$. Άρα τα διαγράμματα Young $[f]$ της $U(n)$ ανάγονται σε εκείνα της $SU(n)$ ως $[f - s]$, όπου s ο αριθμός των πλήρων στηλών του διαγράμματος. Κατά την αναγωγή $U(n) \supset SU(n)$ κόβουμε όλες τις πλήρεις στήλες από τη διαμέριση Young. Το μήκος των στηλών είναι n άρα κόβοντας όλες τις πλήρεις στήλες αποκομίζουμε διάγραμμα $n - 1$ γραμμών συνολικά. Επομένως οι αναπαραστάσεις της $SU(n)$ ταξινομούνται από διάγραμμα $n - 1$ γραμμών. Αυτός είναι ένας γενικός κανόνας για τις αναπαραστάσεις τη $SU(n)$.

Κατά την αναγωγή $U(6) \supset SU(3)$, αν και στη $U(6)$ έχουν ληφθεί μονάχα οι πλήρως συμμετρικές αναπαραστάσεις, προκύπτουν και αντισυμμετρικές αναπαραστάσεις καθώς αφενός $U(6) \supset SU(3) \neq U(n) \supset SU(n)$, αφετέρου το διάγραμμα Young της $SU(3)$ σίγουρα έχει $3 - 1 = 2$ γραμμές. Από αυτές τις γραμμές οι κβαντικοί αριθμοί του Elliott ($\lambda\mu$) είναι,

$$\lambda = f_1 - f_2, \quad \mu = f_2. \quad (1.168)$$



Σχήμα 1.8: $N=3, U(6) \supset SU(3)$

Η αναγωγή των αναπαράστασεων $U(6) \supset SU(3)$ δε γίνεται βάσει κάποιου γενικού κανόνα. Ο αλγόριθμος που προκύπτει στηρίζεται στην εξής παρατήρηση.

Στη $U(3) \supset SU(3)$, η πιο απλή αναπαράσταση της $U(3)$ ορίζεται από το Casimir $N = \square$. Μπορεί να πάρει τρεις τιμές για κάθε μια από τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις της $U(3)$, άρα είναι τριδιάστατη. Η αντίστοιχη πιο απλή τριδιάστατη αναπαράσταση της $SU(3)$ είναι η (10). Αυτό ερμηνεύτηκε παραπάνω ως ένα χβάντο διέγερσης. Οι πολυσωματιδιακές καταστάσεις, δηλαδή περισσότερα χβάντα διέγερσης, στήνονται από αυτά τα θεμελιώδη διανύσματα βάσης ως γινόμενά τους. Για παράδειγμα για δύο μποζόνια η αναπαράσταση της $U(3)$ είναι,

$$\square \times \square = \square\square + \square, \quad (1.169)$$

ενώ η αναπαράσταση της $SU(3)$ είναι,

$$(10) \times (10) = (20) + (21). \quad (1.170)$$

Εν γένει για κάθε πολυσωματιδιακή κατάσταση αποδεικνύεται ότι,

$$(\lambda\mu) \times (1, 0) = (\lambda + 1, \mu) + (\lambda - 1, \mu + 1) + (\lambda, \mu - 1). \quad (1.171)$$

Στη $U(6) \supset SU(3)$ η πιο απλή αναπαράσταση της $U(6)$, $N = \square$, είναι εξαδιάστατη. Αντίστοιχα η πιο απλή αναπαράσταση της $SU(3)$ με τον αυτό αριθμό διαστάσεων είναι η $(\lambda\mu) = (20)$. Άρα συνάγουμε ότι στις αναπαράστασεις της $SU(3)$ μέσα στη $U(6)$, ο ολικός αριθμός των μποζονίων θα ικανοποιεί τη σχέση $2N = n_x + n_y + n_z$, για τους τρεις βαθμούς ελευθερίας της $SU(3)$. Οι πολυσωματιδιακές καταστάσεις θα στηρίζονται στο γινόμενο των θεμελιωδών διανυσμάτων,

$$(20) \times (20) = (40) + (20) + (02). \quad (1.172)$$

Εδώ οι συμμετρικές αναπαράστασεις (40),(02) της $SU(3)$ περιέχονται στη συμμετρική αναπαράσταση [2] της $U(6)$ ενώ η (20) στην [11]. Στη πιο γενική περίπτωση αποδεικνύεται ότι οι αναπαράστασεις της $U(6)$, N , ανάγονται στις αναπαράστασεις $(\lambda\mu)$ της $SU(3)$ από τον αλγόριθμο,

$$[N] = (2N, 0) + \left\{ \begin{array}{l} +(2N - 4, 2) + (2N - 8, 4) + \dots + \left\{ \begin{array}{ll} (0, N) & N = \text{even} \\ (2, N - 1) & N = \text{odd} \end{array} \right\} \\ +(2N - 6, 0) + (2N - 10, 2) + \dots + \left\{ \begin{array}{ll} (0, N - 3) & N - 3 = \text{even} \\ (2, N - 4) & N - 3 = \text{odd} \end{array} \right\} \\ +(2N - 12, 0) + (2N - 16, 2) + \dots + \left\{ \begin{array}{ll} (0, N - 6) & N - 6 = \text{even} \\ (2, N - 7) & N - 6 = \text{odd} \end{array} \right\}. \end{array} \right. \quad (1.173)$$

Άρα παράγονται οι καταστάσεις,

$$U(6) \supset SU(3) \rightarrow |[N], (\lambda\mu)\rangle. \quad (1.174)$$

Για παράδειγμα στα $N = 3$ μποζόνια,

$$[3] = (2 \cdot 3, 0) + (2 \cdot 3 - 4, 2) + (2 \cdot 3 - 6, 0) = (6, 0) + (2, 2) + (0, 0). \quad (1.175)$$

1.5.2 $U(6) \supset SU(3) \supset O(3)$

Από τους τελεστές της $su(3)$ κρατώντας μονάχα το ταχυστή πρώτης τάξης για τη στροφορμή $G_\mu^1(d, d)$, αποκομίζεται η άλγεβρα $o(3)$. Έτσι παράγεται και η δεύτερη αλυσίδα συμμετριών του προτύπου $U(6) \supset SU(3) \supset O(3)$.

Οι κανόνες αναγωγής για τη μετάβαση $SU(n) \supset O(3)$, έχει συγκεκριμένη μέθοδο που παρουσιάζεται αναλυτικά στη [Μπονάτσος] και στηρίζεται στις καταστάσεις

$$|[f]_j, JM\rangle. \quad (1.176)$$

Οι διαμερίσεις $[f]_j$ αναπαριστούν τις ιδιότητες συμμετρίας του διαγράμματος Young ως προς τη στροφορμή. Σχετίζονται με τους συντελεστές Glebsch-Gordon, δηλαδή η ολική στροφορμή παίρνει άρτιες ή περιπτές τιμές ανάλογα με τη συμμετροποίηση ή αντισυμμετροποίηση αντίστοιχα. Ωστόσο στην αναγωγή $SU(3) \supset O(3)$ χρησιμοποιούνται λόγω ευκολίας οι εμπειρικοί κανόνες του Elliott. Σε κάθε αναπαράσταση $(\lambda\mu)$ ο χαμένος κβαντικός αριθμός K παίρνει τιμές,

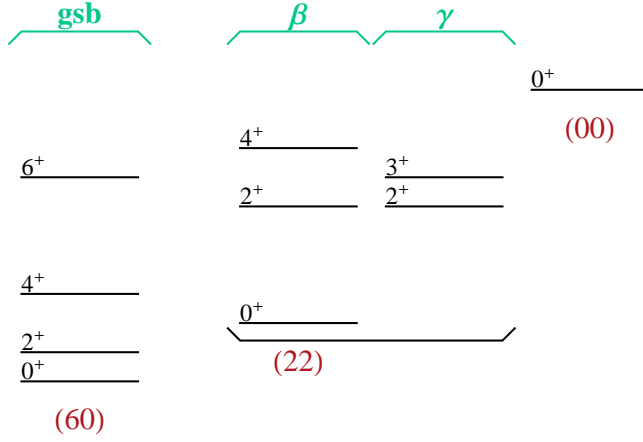
$$K = \min\{\lambda\mu\}, \min\{\lambda\mu\} - 2, \dots, 1 \text{ or } 0. \quad (1.177)$$

Για κάθε K η στροφορμή L παίρνει τιμές,

$$L = \begin{cases} K, K + 1, K + 2, \dots, K + \max\{\lambda\mu\} & \text{if } K \neq 0 \\ \max\{\lambda\mu\}, \max\{\lambda\mu\} - 2, \dots, 0 & \text{if } K = 0. \end{cases} \quad (1.178)$$

Στο παράδειγμα του $N = 3$ προκύπτουν οι εξής καταστάσεις:

1. $(6, 0) \Rightarrow K = \min\{\lambda\mu\} = \min\{6, 0\} = 0$. Άρα $L = \max\{\lambda\mu\}, \max\{\lambda\mu\} - 2, \dots, 0 = 6, 4, 2, 0$.
Τελικά $(6, 0) \Rightarrow K = 0, L = 6, 4, 2, 0$.



Σχήμα 1.9: $N=3, SU(3)$

2. $(2, 2) \Rightarrow K = \min\{\lambda\mu\}, \min\{\lambda\mu\} - 2 = \min\{2, 2\}, \min\{2, 2\} - 2 = 2, 0$. Άρα,

$$L = \begin{cases} K, K + 1, K + \max\{\lambda\mu\} = 2, 3, 4 & K = 2 \\ \max\{\lambda\mu\}, \max\{\lambda\mu\} - 2 = 2, 0 & K = 0. \end{cases} \quad (1.179)$$

Τελικά $(2, 2) \Rightarrow K = 2 \Rightarrow L = 6, 4, 2, 0$ και $(2, 2) \Rightarrow K = 0 \Rightarrow L = 2, 0$.

3. $(0, 0) \Rightarrow K = 0 \Rightarrow L = 0$.

Το φάσμα $SU(3)$

Απο τα παραπάνω είναι φανερό πως μια βάση στο χώρο Hilbert της Χαμιλτονιανής μπορεί να οριστεί από τις καταστάσεις,

$$\left| \begin{array}{c} U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \\ N \quad (\lambda\mu) \quad K \quad L \end{array} \right\rangle \quad (1.180)$$

Αν βρισκόμαστε σε δυναμική συμμετρία το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αλυσίδας είναι η Χαμιλτονιανή,

$$H = e_0 + e_1 C_1\{U(6)\} + e_2 C_2\{U(6)\} + \delta C_2\{SU(3)\} + \gamma C_2\{O(3)\}, \quad (1.181)$$

$$\langle H \rangle = e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5) + \delta(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)) + \gamma L(L + 1). \quad (1.182)$$

Η μέση τιμή της Χαμιλτονιανής αυτής στις καταστάσεις $|N, (\lambda\mu), K, L, M\rangle$, γεννά τους κανόνες επιλογής, $\Delta\lambda = 0, \Delta\mu = 0$. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.9 το φάσμα δημιουργεί περιστροφικές ζώνες οι οποίες διακρίνονται από τις διάφορες τιμές του K . Η ονομασία των ζωνών δίνεται σε σύγκριση με τις προβλέψεις του προτύπου του Bohr. Ανάλογα με τη ταλάντωση του συλλογικού βαθμού ελευθερίας (β, γ) δημιουργούνται ζώνες περιστροφικών καταστάσεων. Οι καταστάσεις των πυρήνων που

”κάθονται” στις αναπαράστασεις του σχήματος 1.9, λέγεται ότι εκδηλώνουν τη δυναμική συμμετρία $SU(3)$.

1.6 $O(6)$

Η τελευταία αλυσίδα του προτύπου είναι ένα παράδειγμα της αυτονομίας της αλγεβρικής μεθόδου. Η συμμετρία $O(6)$ δεν είχε συμφωνηθεί σε κανένα ”επίπεδο κορυφής”, προέκυψε αυθόρμητα από τα διγραμμικά γινόμενα της άλγεβρας $u(6)$. Μέχρι στιγμής από όλα τα πιθανά σενάρια της Χαμιλτονιανής έχουμε προβλέψει ταλαντωτικούς και περιστροφικούς πυρήνες. Οι αλληλεπιδράσεις ζευγών που εισήχθησαν αφορούν ζεύγη τύπου $[d^\dagger d^\dagger]^0 \cdot [\tilde{d}\tilde{d}]^0$ στην $O(5)$ που προέρχεται από το γινόμενο $G_\mu^3(d, d) \cdot G_\mu^3(d, d)$ και ό,τι εναπομείνουσα αλληλεπίδραση ζευγών μπορεί να θεωρηθεί ότι περιέχεται στο γινόμενο του τετραπολικού τελεστή της $SU(3)$, $Q \cdot Q$. Στη πιο γενική Χαμιλτονιανή του προτύπου, περιέχονται αλληλεπιδράσεις δύο σωμάτων τύπου $[d^\dagger d^\dagger]^0 \cdot [\tilde{s}\tilde{s}]^0 + [s^\dagger s^\dagger]^0 \cdot [\tilde{d}\tilde{d}]^0$. Αλγεβρικά λογω των μεταθέσεων $[d^\dagger, s^\dagger] = [d^\dagger, s] = [d, s^\dagger] = 0$, τέτοια γινόμενα μπορούν να παράχρουν απευθείας από το μέρος του τετραπολικού τελεστή,

$$[d^\dagger \tilde{s}]^2 + [s^\dagger \tilde{d}]^2 = G_\mu^2(d, s) + G_\mu^2(s, d). \quad (1.183)$$

Αυτός ο τελεστής μαζί με τους τελεστές της $O(5)$ δομούν τανυστή με 15 συνολικά στοιχεία. Η άλγεβρα $O(n)$ για άρτιο n , έχει συνολικά $\frac{n(n-1)}{2}$ στοιχεία, και ο αριθμός 15 αντιστοιχεί στην $O(6)$. Άρα αν από τη $U(6)$ απομονωθούν τα στοιχεία,

$$G_\mu^1(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1, \\ T_3 \equiv G_\mu^3(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3, \quad (1.184)$$

$$G_\mu^2(d, s) + G_\mu^2(s, d) = [d^\dagger \times \tilde{s}]^2 + [s^\dagger \times \tilde{d}]^2,$$

αποκομίζεται η άλγεβρα $O(6)$. Οι αναπαράστασεις της $O(6)$, ορίζεται από το τελεστή Casimir που είναι [30],

$$C_2\{O(6)\} = C_2\{O(5)\} + (G_\mu^2(d, s) + G_\mu^2(s, d))(G_\mu^2(d, s) + G_\mu^2(s, d)) = \\ = 2\hat{N}(\hat{N} + 4) - 8\left\{\left(\frac{1}{2} \sum_m (-)^m d_m^\dagger d_{-m}^\dagger - \frac{1}{2} s^\dagger s^\dagger\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_m (-)^m \tilde{d}_m \tilde{d}_{-m} - \frac{1}{2} \tilde{s}\tilde{s}\right)\right\}. \quad (1.185)$$

Η παραπάνω αλληλεπίδραση ζευγών δείχνει μια διαφορά τύπου ”πάνω-κάτω” σε σχέση με σύζευξη των d μείον σύζευξη των s . Σε αναλογία με το φορμαλισμό των ημι-σπιν, ορίζεται ο τελεστής της αλληλεπίδρασης ζευγών \hat{P} και ο Casimir της $O(6)$ παίρνει τη μορφή,

$$C_2\{O(6)\} = 2\{\hat{N}(\hat{N} + 4) - 4\hat{P}^\dagger \hat{P}\}. \quad (1.186)$$

Οι ιδιοτιμές του $C_2\{O(6)\}$ προσδιορίζουν τα κβαντικά επίπεδα της συμμετρίας και σχετίζονται με τη γενίκευση της στροφορμής σε 6 βαθμούς ελευθερίας, όπως η seniority συνιστά μια γενίκευση της στροφορμής σε 5 βαθμούς ελευθερίας. Όπως οι ιδιοτιμές του Casimir της $O(3)$ είναι $L(L + 1)$, του Casimir της $O(5)$ είναι $v(v + 3)$, οι ιδιοτιμές του Casimir της $O(6)$ συμβολίζονται με,

$$\langle C_2\{O(6)\} \rangle = \sigma(\sigma + 4). \quad (1.187)$$

1.6.1 $U(6) \supset O(6)$

Το απόλυτα συμμετρικό διάγραμμα Young της $U(6)$ για N μποζόνια έχει N κουτάκια,

$$[N] \equiv \square \square \dots \square \equiv [N, 0, 0, 0, 0, 0]. \quad (1.188)$$

Οι αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $U(6)$ ταξινομούνται από το κβαντικούς αριθμούς της $O(6)$. Εν γένει η ομάδα $O(n)$ για άρτιο αριθμό μονοσωματιδιακών καταστάσεων έχει $n/2$ Casimir, άρα η $O(6)$ θα χαρακτηρίζεται από τρεις κβαντικούς αριθμούς. Αν ο ταυστής της $O(6)$ αναπαρασταθεί κατά Young, από τους τρεις κβαντικούς αριθμούς της $O(6)$, λόγω της συμμετροποίησης κρατάμε μονάχα ένα,

$$\sigma \equiv (\sigma, 0, 0). \quad (1.189)$$

Σε ευθεία αναλογία με την αναγωγή $U(5) \supset O(5)$, ο ταυστής της $U(6)$ γράφεται συναρτήσε των ταυστών της $O(6)$ με τη μέθοδο των συστολών. Η αναγωγή των αναπαραστάσεων $U(6) \supset O(6)$ επιτυγχάνεται αφαιρώντας δύο συμμετροποιημένα κουτάκια τη φορά,

$$\sigma = N, N - 2, N - 2 - 2, \dots, 1 \quad \text{or} \quad 0. \quad (1.190)$$

Στο παράδειγμα για $N = 3$,

$$\sigma = 3, 1. \quad (1.191)$$

1.6.2 $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$

Από τους τελεστές της $O(6)$ κρατώντας μόνο τους,

$$G_\mu^1(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^1, \quad (1.192)$$

$$T_3 \equiv G_\mu^3(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^3,$$

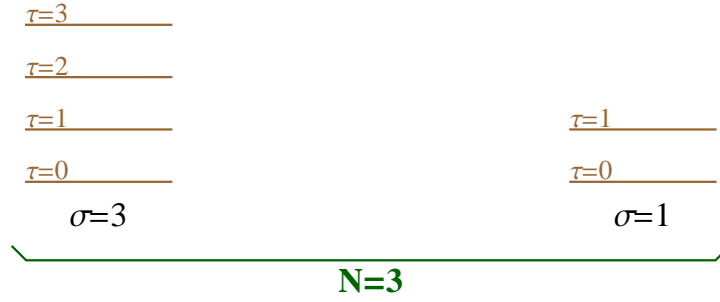
αποκομίζεται η άλγεβρα $O(5)$. Πλέον η υπόλοιπη αλυσίδα όπως και οι κανόνες αναγωγής είναι ακριβώς ίδια με τη πρώτη αλυσίδα. Η μόνη διαφορά είναι ότι στα κβαντικά επίπεδα της $O(5)$ η seniority συμβολίζεται με τ . Η αναγωγή $O(6) \supset O(5)$, είναι τύπου $O(n) \supset O(n - 1)$, και η τ παίρνει τιμές,

$$\tau = \sigma, \sigma - 1, \dots, 0. \quad (1.193)$$

Ως εδώ έχουμε τις καταστάσεις,

$$|[N](\sigma)\tau\rangle. \quad (1.194)$$

Στο παράδειγμα για $N = 3$ λαμβάνονται οι ακόλουθες καταστάσεις της $O(6)$, που αναπαρίστανται διαγραμματικά στο σχήμα 1.10,



Σχήμα 1.10: $N=3, U(6) \supset O(6) \supset O(5)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 3 \Rightarrow \tau = 3, 2, 1, 0 \\ \sigma = 1 \Rightarrow \tau = 1, 0 \end{array} \right\}. \quad (1.195)$$

Η αναγωγή $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$ εμπεριέχει το χαμένο κβαντικό αριθμό ν_{Δ} στον οποίο προσδίδονται τιμές $\nu_{\Delta} = 0, 1, \dots$. Ο αλγόριθμος αναγωγής είναι,

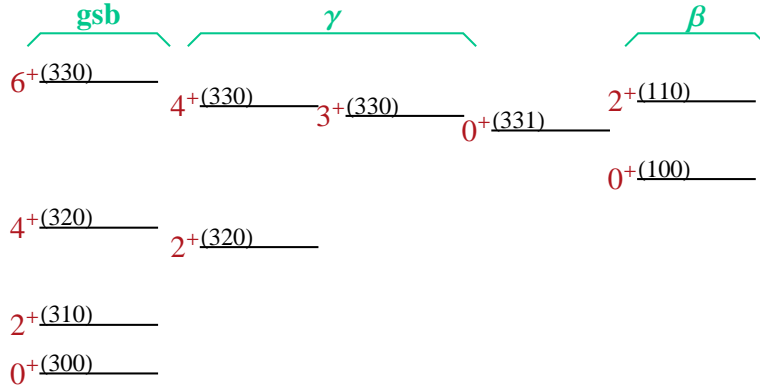
$$\tau = 3\nu_{\Delta} + \lambda, \quad L = 2\lambda, 2\lambda - 2, \dots, \lambda + 1, \lambda. \quad (1.196)$$

Το παράδειγμα για $N = 3$ δίνει τις εξής περιπτώσεις,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = 3 \left\{ \begin{array}{l} \tau = 3 = 3\nu_{\Delta} + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \nu_{\Delta} = 0, \lambda = 3 \Rightarrow L = 6, 4, 3 \\ \nu_{\Delta} = 1, \lambda = 0 \Rightarrow L = 0 \end{array} \right\} \\ \tau = 2 = 3\nu_{\Delta} + \lambda \left\{ \nu_{\Delta} = 0, \lambda = 2 \Rightarrow L = 4, 2 \right\} \\ \tau = 1 = 3\nu_{\Delta} + \lambda \left\{ \nu_{\Delta} = 0, \lambda = 1 \Rightarrow L = 2 \right\} \\ \tau = 0 = 3\nu_{\Delta} + \lambda \left\{ \nu_{\Delta} = 0, \lambda = 0 \Rightarrow L = 0 \right\} \end{array} \right\} \\ \sigma = 1 \left\{ \begin{array}{l} \tau = 1 = 3\nu_{\Delta} + \lambda \left\{ \nu_{\Delta} = 0, \lambda = 1 \Rightarrow L = 2 \right\} \\ \tau = 0 = 3\nu_{\Delta} + \lambda \left\{ \nu_{\Delta} = 0, \lambda = 0 \Rightarrow L = 0 \right\} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (1.197)$$

Το φάσμα της $O(6)$

Σε αυτή τη περίπτωση μια βάση στο χώρο Hilbert της Χαμιλτονιανής μπορεί να οριστεί από τις καταστάσεις,



Σχήμα 1.11: $N=3, O(6), (\sigma, \tau, \nu_{\Delta})$

$$\left| \begin{array}{cccccc} U(6) & \supset & O(6) & \supset & O(5) & \supset & O(3) \\ N & & \sigma & & \tau & & \nu_{\Delta} & & L \end{array} \right\rangle. \quad (1.198)$$

Σε αυτή τη δυναμική συμμετρία το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αλυσίδας είναι η Χαμιλτονιανή,

$$H = e_0 + e_1 C_1\{U(6)\} + e_2 C_2\{U(6)\} + \eta C_2\{O(6)\} + \beta C_2\{O(5)\} + \gamma C_2\{O(3)\}, \quad (1.199)$$

$$\langle H \rangle = e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5) + \eta 2\sigma(\sigma + 4) + \beta 2\tau(\tau + 3) + \gamma 2L(L + 1). \quad (1.200)$$

Η μέση τιμή της Χαμιλτονιανής αυτής στις καταστάσεις $|N, (\sigma), \tau, \nu_{\Delta}, L\rangle$, γεννά τους κανόνες επιλογής, $\Delta\sigma = 0, \Delta\tau = \pm 1$. Εδώ οι σχηματιζόμενες ζώνες δεν έχουν σαφή περιστροφικό ή δονητικό χαρακτήρα. Γι'αυτό το λόγο η ονομασία τους είναι (quasi β) ή (quasi γ). Οι καταστάσεις των πυρήνων που "κάθονται" στις αναπαραστάσεις του σχήματος 8, λέγεται ότι εκδηλώνουν τη δυναμική συμμετρία $O(6)$.

Κεφάλαιο 2

Μεταβολές σχήματος -φάσης στη Χαμιλτονιανή του Bohr

Οι πυρήνες εκδηλώνουν κβαντικές μεταβολές φάσης (μεταβολές φάσης της βασικής κατάστασης) μεταξύ διαφόρων σχημάτων ως προς τη μεταβολή του αριθμού των νουκλεονίων, με αποτέλεσμα αλλαγές στη βασική κατάσταση και τις καταστάσεις χαμηλής ενέργειας. Εδώ θα περιγραφούν ειδικές λύσεις της Χαμιλτονιανής του Bohr κατάλληλες για το κρίσιμο σημείο τέτοιων μεταβολών σχήματος -φάσης, όπως επίσης και άλλες ειδικές λύσεις που εφαρμόζονται σε συγγενείς πυρηνικές περιοχές.

2.1 Εισαγωγή

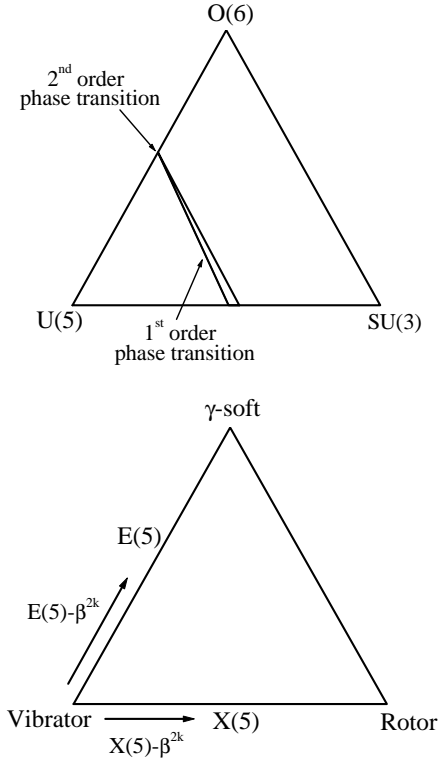
Οι ατομικοί πυρήνες εκδηλώνουν αλλαγές στα ενεργειακά τους επίπεδα, καθώς και στις ηλεκτρομαγνητικές μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων αυτών, όταν ο αριθμός των πρωτονίων ή(και) των νουκλεονίων μεταβάλλεται, με αποτέλεσμα τη μεταβολή σχήματος -φάσης από το ένα είδος συλλογικής συμπεριφοράς στο άλλο. Αυτές οι μεταβολές δεν είναι οι συνήθεις θερμοδυναμικές. Είναι κβαντικές μεταβολές φάσης [31] (αρχικά καλούμενες μεταβολές φάσης της βασικής κατάστασης [32]), που εκδηλώνονται σε Χαμιλτονιανές του τύπου $H = c(H_1 + gH_2)$, όπου c είναι ένας παράγοντας κλίμακας, g είναι μια παράμετρος ελέγχου, και H_1, H_2 περιγράφουν τις δύο διαφορετικές φάσεις του συστήματος. Η φάση του συστήματος χαρακτηρίζεται από την αναμενόμενη τιμή ενός κατάλληλα επιλεγμένου τελεστή, η οποία χρησιμοποιείται ως η παράμετρος τάξης.

Στο πλαίσιο του IBM, το οποίο περιέχει τις δυναμικές συμμετρίες $U(5), SU(3), O(6)$, οι οποίες αντιστοιχούν σε δονητικούς, αξονικά παραμορφωμένους και ασταθείς κατά γ πυρήνες, οι μεταβολές σχήματος -φάσης έχουν μελετηθεί εδώ και 25 χρόνια [32], μέσω του κλασικού ορίου του IBM [33, 26, 27], δείχνοντας ότι το πρότυπο εκδηλώνει (σύμφωνα με τη συνήθη ταξινόμηση κατά Ehrenfest) μεταβολή φάσης δεύτερης τάξης μεταξύ των $U(5)$ και $O(6)$, μεταβολή φάσης πρώτης τάξης μεταξύ $U(5)$ και $SU(3)$ και καμία μεταβολή φάσης μεταξύ $O(6)$ και $SU(3)$.

Τα τρία όρια του IBM τοποθετούνται στις κορυφές του τριγώνου [34] των συμμετριών του IBM το οποίο είναι επίσης πρόσφορο και για τη τοποθέτηση των μεταβολών φάσης -σχήματος [31].

Πρόσφατα συνειδητοποιήθηκε [35, 36] ότι οι ιδιότητες των πυρήνων που "κάνονται" στο κρίσιμο σημείο, μπορούν να περιγραφούν από κατάλληλες ειδικές λύσεις της Χαμιλτονιανής του Bohr [37], οι

οποίες καλούνται συμμετρίες κρίσιμου σημείου. Η κρίσιμη συμμετρία $E(5)[35]$ αντιστοιχεί στο κρίσιμο σημείο δεύτερης τάξης μεταξύ $U(5)$ και $O(6)$. Η κρίσιμη συμμετρία $X(5)[36]$ αντιστοιχεί στη μεταβολή πρώτης τάξης μεταξύ $U(5)$ και $SU(3)$. Οι $E(5)$ και $X(5)$ δείχνονται στην εικόνα 2.1, δίπλα στα σημεία των μεταβολών πρώτης και δεύτερης τάξης του IBM, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1: (Πάνω) Το τρίγωνο των συμμετριών [34] με τις τρεις δυναμικές συμμετρίες του IBM να τοποθετούνται στις κορυφές του. Η περιοχή της συνύπαρξης των φάσεων δηλώνεται από τις κεκλιμένες γραμμές στο εσωτερικό του τριγώνου. (Κάτω) Το αντίστοιχο τρίγωνο [185] στο γεωμετρικό πλαίσιο. Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$ τοποθετούνται κοντά στην περιοχή μεταβολής φάσης του IBM. Τα μοντέλα $E(5)-\beta^{2k}$ και $X(5)-\beta^{2k}$ αναπαριστούν δομές μεταξύ καθαρού δονητή και συμμετρίας κρίσιμου σημείου.

Η εισαγωγή των συμμετριών κρίσιμου σημείου $E(5)[35]$ και $X(5)[36]$ έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον στις ειδικές λύσεις της Χαμιλτονιανής του Bohr, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές φυσικές καταστάσεις. Εδώ θα παρουσιαστούν κάποιες από αυτές, μαζί με κατάλληλα πειραματικά παραδείγματα για τη κάθε περίπτωση.

Η αυθεντική Χαμιλτονιανή του Bohr[37] είναι

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k \right)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (2.1)$$

όπου β και γ είναι οι συνήθεις συλλογικές μεταβλητές που περιγράφουν τη μορφή της πυρηνικής επιφάνειας, Q_k ($k = 1, 2, 3$) είναι οι συνιστώσες της στροφορμής, και B είναι η παράμετρος μάζας.

Για πολλά χρόνια ήταν γνωστό [38] ότι ο ακριβής χωρισμός των μεταβλητών συμβαίνει στην αντίστοιχη εξίσωση του Schrödinger χρησιμοποιώντας δυναμικά της μορφής $V(\beta, \gamma) = U(\beta)$, δηλαδή ανεξάρτητα της μεταβλητής γ , ανταποκρινόμενα σε ασταθείς κατά γ (γ -soft) πυρήνες. Τότε οι κυματοσυναρτήσεις παίρνουν τη μορφή $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta)\Phi(\gamma, \theta_i)$, όπου θ_i ($i = 1, 2, 3$) είναι οι γωνίες Euler που περιγράφουν το προσανατολισμό του πυρήνα στο χώρο.

Οι τιμές της στροφορμής L που περιέχονται σε κάθε αναπαράσταση της $SO(5)$ (δηλ. για κάθε τιμή του τ) ως γνωστόν, δίνονται από τον αλγόριθμο [14] $\tau = 3\nu_\Delta + \lambda$, όπου $\nu_\Delta = 0, 1, \dots$ ο ελλείπων κβαντικός αριθμός στην αναγωγή $SO(5) \supset SO(3)$, και $L = \lambda, \lambda + 1, \dots, 2\lambda - 2, 2\lambda$ (με $2\lambda - 1$ απουσιάζει). Οι επιτρεπόμενες τιμές της L για κάθε (τ, ν_Δ) βρίσκονται σε πίνακες στις [14, 41, 42].

Η εξίσωση για το ακτινικό μέρος μπορεί να απλοποιηθεί [35] εισάγοντας τις ανηγμένες ενέργειες $\epsilon = \frac{2B}{\hbar^2}E$ και τα ανηγμένα δυναμικά $u = \frac{2B}{\hbar^2}U$. Εν τέλει η μορφή της λύσης για την ακτινική εξίσωση εξαρτάται από την επιλογή του $U(\beta)$.

2.1.1 E(5)

Στη περίπτωση της $E(5)$ [35, 42], χρησιμοποιείται ένα 5-διάστατο άπειρο πηγάδι, [$u(\beta) = 0$ αν $\beta \leq \beta_W$, $u(\beta) = \infty$ για $\beta > \beta_W$], με την αιτιολόγηση ότι στο κρίσιμο σημείο μιας μεταβολής σχήματος -φάσης δεύτερης τάξης, το δυναμικό αναμένεται να είναι περίπου επίπεδο. Τότε η εξίσωση για τη μεταβλητή β παίρνει τη μορφή της εξίσωσης Bessel τάξεως $\nu = \tau + 3/2$, με ιδιοσυναρτήσεις ανάλογες των συναρτήσεων Bessel $J_{\tau+3/2}(z)$ (με $z = \beta k$, $k = \sqrt{\epsilon}$), ενώ το φάσμα καθορίζεται από τις ρίζες των συναρτήσεων Bessel

$$E_{\xi, \tau} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{\xi, \tau}^2, \quad k_{\xi, \tau} = \frac{x_{\xi, \tau}}{\beta_W} \quad (2.2)$$

όπου $x_{\xi, \tau}$ είναι η ξ -οστή ρίζα της συνάρτησης Bessel $J_{\tau+3/2}(z)$.

Το αναδυόμενο φάσμα είναι απελευθερωμένο από ελεύθερες παραμέτρους, εκτός από ένα συνολικό παράγοντα κλίμακας, ο οποίος ορίζεται από την κανονικοποίηση όλων των ενεργειών στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης κατάστασης 2^+ , δηλαδή την 2_1^+ . Εδώ ο λόγος $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$ είναι 2.199. Το αυτό ισχύει και για τις τιμές των $B(E2)$, οι οποίες κανονικοποιούνται στην $B(E2)$ που συνδέει τις δύο χαμηλότερες καταστάσεις, $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$. Η συμμετρία σε αυτή την περίπτωση [42] είναι η $E(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2)$.

Αν το δυναμικό έχει τη μορφή $u(\beta) = \beta^2/2$, αποκομίζεται η αρχική λύση του Bohr [37, 43], που ανταποκρίνεται σε έναν 5-διάστατο αρμονικό ταλαντωτή και αντανακλά τη συμμετρία $U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2)$ [44]. Οι ιδιοσυναρτήσεις του δυναμικού αυτού περιέχουν πολυώνυμα του Laguerre [45] και το φάσμα παίρνει την απλή μορφή $E_N = N + 5/2$, με $N = 2\nu + \tau$ και $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$, το οποίο έχει $R_{4/2} = 2$.

Η σύγκριση των φασμάτων του δυναμικού $u(\beta) = \beta^2/2$ και του προτύπου $E(5)$ δηλώνει την αντιστοιχία $\nu = \xi - 1$.

Το δυναμικό Davidson $u(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}$ (όπου β_0 η θέση του ελάχιστου του δυναμικού) [46, 47, 48] επίσης οδηγεί σε ιδιοσυναρτήσεις που περιέχουν τα πολυώνυμα του Laguerre, με τις ιδιοτιμές να είναι [47, 48] (σε μονάδες $\hbar\omega = 1$)

$$E_{n, \tau} = 2n + 1 + \left[\left(\tau + \frac{3}{2} \right)^2 + \beta_0^4 \right]^{1/2}. \quad (2.3)$$

Για $\beta_0 = 0$ αποκομίζεται η προαναφερθείσα αρχική λύση του Bohr [U(5)], ενώ για $\beta_0 \rightarrow \infty$

αποκομίζεται το όριο $O(6)$ του IBM [47]. Συνάγεται με αυτό το τρόπο ότι το δυναμικό Davidson παράγει τη σύνδεση των ορίων $U(5)$ και $O(6)$ μονοπαραμετρικά (β_0). Θα καλέσουμε αυτό το πρότυπο $E(5)$ -D. Μια τέτοια σύνδεση μπορεί να εισαχθεί και μέσω προσέγγισης μεταβολών [49, 50], όπου οι ρυθμοί μεταβολής των ενεργειακών λόγων $R_L = E(L_1^+)/E(2_1^+)$ της ζώνης της βασικής κατάστασης ως προς τη παράμετρο β_0 μεγιστοποιούνται για κάθε L χωριστά. Τα αποτελέσματα οδηγούν σε ενεργειακό φάσμα πολύ κοντά σε εκείνο της $E(5)$ [49]. Η μέθοδος έχει επίσης εφαρμοστεί και σε άλλες ζώνες όπως επίσης και στους ρυθμούς μετάβασης $B(E2)$ [50].

Η ακολουθία των δυναμικών $u_{2n}(\beta) = \frac{\beta^{2n}}{2}$ (με n ακέραιο) οδηγεί για $n = 1$ στη περίπτωση του Bohr, ενώ για $n \rightarrow \infty$ οδηγεί στο άπειρο πηγάδι της $E(5)$ [51]. Επομένως αυτή η ακολουθία των δυναμικών παράγει μια γέφυρα μεταξύ της συμμετρίας $U(5)$ και του προτύπου $E(5)$, η οποία χρησιμοποιεί την κοινή αλυσίδα υποαλγεβρών $SO(5) \supset SO(3)$ για τη ταξινόμηση των φασμάτων. Για $n \neq 1$ έχουν αποκομιστεί αριθμητικές λύσεις [52, 53, 41]. Για $n = 2, 3, 4$, οι λύσεις αναφέρονται ως $E(5)$ - β^4 , $E(5)$ - β^6 , και $E(5)$ - β^8 , οι οποίες οδηγούν σε λόγους $R_{4/2} = 2.093, 2.135$, και 2.157 αντίστοιχα. Πλήρη ενεργειακά φάσματα με $B(E2)$ δίνονται στην [41].

Η σύνδεση μεταξύ της $E(5)$ και του ασταθής κατά γ περιστροφέα $O(5)$, δηλαδή η σύνδεση που αφορά το υπόλοιπο αυτής της πλευράς του τριγώνου του IBM, έχει αποκομιστεί για ένα άπειρο πηγάδι με σύνορα $\beta_M > \beta_m > 0$ [54]. Το πρότυπο αυτό, το οποίο καλείται $O(5)$ -CBS, γιατί είναι ένα ασταθές κατά γ ανάλογο του περιορισμένου ασταθούς κατά β προτύπου Confined Beta Soft (CBS) [55, 56], περιέχει μια ελεύθερη παράμετρο, $r_\beta = \beta_m/\beta_M$, με τη τιμή $r_\beta = 0$ να ανταποκρίνεται στο πρότυπο $E(5)$ και $r_\beta \rightarrow 1$ να δίνει το όριο του ασταθούς κατά γ περιστροφέα $O(5)$.

Παρακάτω αναφέρονται και άλλες λύσεις σε αυτό το πλαίσιο.

α) Μορφή προτύπου $E(5)$ όπου αντί του άπειρου πηγαδιού χρησιμοποιείται πηγάδι πεπερασμένου βάθους [57].

β) Ο ταλαντωτής έκτου βαθμού, που είναι ένα ημί- ακριβώς επιλύσιμο δυναμικό [58, 59], έχει επίσης χρησιμοποιηθεί ως ένα ανεξάρτητο κατά γ δυναμικό [60].

γ) Δυναμικά τύπου Coulomb και Kratzer έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί [61].

δ) Στην [62] εφαρμόζεται ένα γραμμικό δυναμικό. Επίσης δίνεται μια ανασκόπηση όλων των δυναμικών που χρησιμοποιούνται σε αυτό το πλαίσιο.

ε) Στην [63] αναπτύσσεται ένα υβριδικό πρότυπο που συνίσταται από έναν αρμονικό ταλαντωτή για $L \leq 2$ και ένα άπειρο πηγάδι για $L \geq 4$.

2.1.2 Πειραματικές ενδείξεις για την $E(5)$

Ο πρώτος πυρήνας που αναγνωρίστηκε ως $E(5)$ ήταν το ^{134}Ba [64], ενώ το ^{102}Pd [65] φαίνεται να είναι καλός υποψήφιος. Επιπλέον μελέτες στο ^{134}Ba [66] και στο ^{102}Pd [67], όπου το φαινόμενο του backbending απουσιάζει από τη ζώνη της βασικής κατάστασης, ενδυναμώνουν αυτήν την προοπτική, καθώς βρίσκονται σε άριστη συμφωνία (έως μεγάλες τιμές της στροφορμής) με το απαλλαγμένο από παραμέτρους πρότυπο $E(5)$. Επίσης τα ^{104}Ru [68], ^{108}Pd [69], ^{114}Cd [70], και ^{130}Xe [71] έχουν προταθεί ως καλοί υποψήφιοι. Μια συστηματική μελέτη [72, 73] από διαθέσιμα δεδομένα σε ενέργειες και ρυθμούς $B(E2)$ προτείνουν ακόμη τους πυρήνες ^{102}Pd , $^{106,108}\text{Cd}$, ^{124}Te , ^{128}Xe και ^{134}Ba ως πιθανούς υποψήφιους, με το ^{128}Xe ως το πιθανότερο, επιπροσθέτως του ^{134}Ba .

Τα παραπάνω βρίσκονται σε συμφωνία με τη πρόσφατη αναφορά [74] σε μετρήσεις των ρυθμών $E1$ και $M1$ για τα $^{124-136}\text{Xe}$, που έγιναν στη Στουτγκάρδη και δίνουν σήμα για τη διερεύνηση μεταβολών

σχήματος φάσης στη περιοχή $A \simeq 130$. Το ^{128}Xe μετρήθηκε (Νοέμβριος 2006) στη Jyväskylä [75]. Πρόσφατα το ^{58}Cr επίσης προτάθηκε ως υποψήφιος [76].

Η υπόθεση ενός επίπεδου δυναμικού για τη μεταβλητή β στη συμμετρία $E(5)$ έχει εξεταστεί και μέσω της σχετικιστικής θεωρίας μέσου πεδίου [77]. Σε αυτή τη περίπτωση κατασκευάζονται οι ισοδυναμικές επιφάνειες [Potential Energy Surfaces (PESs)], οι οποίες ανταποκρίνονται στους πυρήνες που βρίσκονται κοντά στη συμμετρία $E(5)$ και η υπόθεση της $E(5)$ σχεδόν επιβεβαιώνεται καθώς το σχήμα των επιφανειών είναι περίπου επίπεδο.

2.1.3 Περιττοί πυρήνες: $E(5/4)$ και $E(5/12)$

Ό,τι προηγήθηκε είναι κατάλληλο για τη περιγραφή άρτιων-άρτιων πυρήνων σε κρίσιμα σημεία. Περιττοί πυρήνες περιγράφονται μέσω της σύζευξης του άρτιου μέρους του πυρήνα με το περιττό νουκλεόνιο [78, 42]. Το άρτιο μέρος περιγράφεται από το πρότυπο $E(5)$, ενώ η σύζευξή του με το περιττό νουκλεόνιο περιγράφεται από την 5-διάστατη αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς. Αν το νουκλεόνιο αυτό βρίσκεται σε φλοιό με $j = 3/2$, αναδύεται η υπερσυμμετρία $E(5/4)$ [78, 42], ενώ αν ο φλοιός είναι το σύστημα των νουκλεονικών επιπέδων $j = 1/2, 3/2, 5/2$, αποκομίζεται η υπερσυμμετρία $E(5/12)$ [79].

Μεταβολές σχήματος -φάσης από σφαιρικές σε ασταθείς κατά γ μορφές για περιττούς πυρήνες έχουν μελετηθεί [80, 81] στο πλαίσιο του προτύπου αλληλεπιδρώντων μποζονίων-φερμιονίων [Interacting Boson Fermion Model (IBFM)] [82, 83] για την περίπτωση του περιττού νουκλεονίου στο φλοιό $j = 3/2$. Οι μεταβολές σχήματος -φάσης για περιττούς πυρήνες έχουν επίσης μελετηθεί [84] για την περίπτωση του νουκλεονίου σε σύστημα επιπέδων με $j = 1/2, 3/2, 5/2$, στο πλαίσιο της υπερσυμμετρίας $U(5/12)$ [82, 83], με καλά αποτελέσματα στη περιοχή Os-Hg.

Μια πρώτη προσπάθεια αντιστοίχισης πυρηνικού φάσματος και της υπερσυμμετρίας $E(5/4)$ έχει γίνει για το ^{135}Ba [85], με αμφιλεγόμενα αποτελέσματα. Ίσως η περιοχή Ir-Au να είναι καταλληλότερη, δεδομένου ότι η υπερσυμμετρία $U(6/4)$ έχει ήδη βρεθεί εκεί [82, 83]. Τέλος ο ^{63}Cu , θα μπορούσε να είναι ένας καλός υποψήφιος για την $E(5/4)$, όπως συζητείται στην [78], μολονότι δεν είναι και τόσο βαρύς.

2.2 $X(5)$ και σχετικές λύσεις

Στην περίπτωση του $X(5)$ εφαρμόζονται στη Χαμιλτονιανή του Bohr δυναμικά της μορφής $U(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)$ για την επίλυση της εξίσωσης (2.1). Η αντίστοιχη εξίσωση του Schrödinger παίρνει τη μορφή $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \phi_K^L(\beta, \gamma) \mathcal{D}_{M,K}^L(\theta_i)$, όπου θ_i ($i = 1, 2, 3$) είναι οι γωνίες Euler, $\mathcal{D}(\theta_i)$ δηλώνουν τις συναρτήσεις Wigner, L είναι οι ιδιοτιμές της στροφορμής, ενώ M και K είναι οι προβολές της στροφορμής στον άξονα z του συστήματος του εργαστηρίου και στον άξονα z' του συστήματος ηρεμίας του πυρήνα αντίστοιχα.

Η διερεύνηση σε αυτή την περίπτωση αφορά πυρήνες πολύ κοντά στην αξονική συμμετρία, δηλαδή $\gamma = 0$. Τότε χρησιμοποιείται δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή $v(\gamma) = (3c)^2 \gamma^2 / 2$. Κοντά στο όριο $\gamma = 0$, ο τελευταίος όρος στη χαμιλτονιανή του Bohr γράφεται στη μορφή [36]

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \approx \frac{4}{3}(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right). \quad (2.4)$$

Η χρήση του ανωτέρω αποτελέσματος στην αντίστοιχη εξίσωση του Schrödinger για τη χαμιλτο-

νιανή της εξίσωσης (2.1), με την εισαγωγή των ανηγμένων ενεργειών $\epsilon = 2BE/\hbar^2$, των ανηγμένων δυναμικών $u = 2BV/\hbar^2$ όπως στην E(5), και λαμβάνοντας υπόψη ότι το ανηγμένο δυναμικό είναι της μορφής $U(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)$, φέρνει το αποτέλεσμα του χωρισμού της εξίσωσης του Schrödinger σε δύο εξισώσεις [36].

Στην εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή γ , οι παρονομαστές β^2 επιζούν, απλά αντικαθίστανται από τις μέσες τιμές τους στις κυματοσυναρτήσεις β , $\langle \beta^2 \rangle$. Λαμβάνοντας υπόψη τις απλοποιήσεις που προκύπτουν από την τιμή του γ , που είναι κοντά στο μηδέν, η σχετική εξίσωση παίρνει μορφή που ανταποκρίνεται σε δισδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή για το γ , με κυματοσυναρτήσεις ανάλογες των πολυωνύμων Laguerre [36]. Η μορφή της λύσης για την ακτινική εξίσωση εξαρτάται τελικά από την επιλογή για το $u(\beta)$.

2.2.1 X(5)

Όπως και στη περίπτωση της E(5), στην X(5) [36] το δυναμικό που χρησιμοποιείται είναι 5-διάστατο άπειρο πηγάδι. Η σχετική εξίσωση έχει ξανά τη μορφή Bessel, με τη διαφορά ότι η τάξη της είναι

$$\nu = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4} \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Οι λύσεις της διατηρούν τη μορφή της (2.2), με τα (ξ, τ) να αντικαθίστανται από τα (s, L) , όπου s είναι η τάξη της σχετικής ρίζας της συνάρτησης Bessel $J_\nu(k_{s,L}\beta)$.

Το αντίστοιχο πρότυπο είναι ακριβώς επιλύσιμο και αναφέρεται ως X(5). Η ονομασία εδώ δε σημαίνει αναγκαστικά κάποια ομάδα συμμετρίας αν και υπάρχει μια συσχέτιση με προβαλλόμενες αναπαραστάσεις της E(5), της ευκλείδειας ομάδας σε 5 διαστάσεις [36].

Η ολική ενέργεια έχει τη μορφή

$$E(s, L, n_\gamma, K, M) = E_0 + B(x_{s,L})^2 + An_\gamma + CK^2, \quad (2.6)$$

όπου n_γ είναι ο κβαντικός αριθμός του δισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή για την εξίσωση της γ , ενώ E_0, A, B, C είναι ελεύθερες παράμετροι.

Απο αυτή την εξίσωση είναι φανερό ότι τα φάσματα για τη ζώνη της βασικής κατάστασης και τη ζώνη β , εξαρτώνται μονάχα από ένα παράγοντα κλίμακας, ο οποίος καθορίζεται από τη κανονικοποίηση των ζωνών στην ενέργεια της κατάστασης 2_1^+ , ενώ οι πρώτες στάθμες των ζωνών γ είναι παραμετρικά εξαρτημένες. Ωστόσο, οι αποστάσεις των σταθμών μέσα στη ζώνη γ είναι καθορισμένες [86]. Ο λόγος $R_{4/2}$ είναι 2.904.

2.2.2 Άλλες λύσεις

Για $u(\beta) = \beta^2/2$ αποκομίζεται ακριβώς επιλύσιμο πρότυπο, το οποίο καλείται X(5)- β^2 [87], με τις ιδιοσυναρτήσεις του να περιέχουν πολυώνυμα του Laguerre και το φάσμα να έχει τη μορφή

$$E_{n,L} = 2n + 1 + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1)}{3}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

με $R_{4/2} = 2.646$. Το φάσμα του δυναμικού $u(\beta) = \beta^2/2$ και του προτύπου X(5) γίνονται άμεσα συγκρίσιμα μέσω της αντιστοιχίας $n = s - 1$, όπου n ο συνήθης κβαντικός αριθμός του αρμονικού ταλαντωτή.

Το δυναμικό Davidson, $u(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}$ (με β_0 να είναι η θέση του ελάχιστου για το δυναμικό) [46, 47, 48], οδηγεί επίσης σε ιδιοσυναρτήσεις που περιέχουν πολυώνυμα του Laguerre, με τις ιδιοτιμές της ενέργειας να είναι [49, 50] (σε μονάδες $\hbar\omega = 1$)

$$E_{n,L} = 2n + 1 + \left[\frac{1}{3}L(L+1) + \frac{9}{4} + \beta_0^4 \right]^{1/2}. \quad (2.8)$$

Για $\beta_0 = 0$ αποκομίζεται η προαναφερθείσα λύση του $X(5)-\beta^2$, ενώ για $\beta_0 \rightarrow \infty$ αποκομίζεται η λύση του συμπαγούς περιστροφέα. Συνάγεται ότι το δυναμικό Davidson παράγει μια μονοπαραμετρική σύνδεση μεταξύ του $X(5)-\beta^2$ και του συμπαγούς περιστροφέα. Όπως και στην περίπτωση του $E(5)$, μπορεί να εισαχθεί μια ανάλυση μεταβολών [49, 50], όπου οι ρυθμοί μεταβολής του λόγου των ενεργειών $R_L = E(L_1^+)/E(2_1^+)$ της ζώνης της βασικής κατάστασης ως προς την παράμετρο β_0 μεγιστοποιούνται χωριστά για κάθε L . Τα αποτελέσματα οδηγούν σε ενεργειακό φάσμα πολύ κοντά σε εκείνο του $X(5)$ [49]. Η μέθοδος έχει επίσης εφαρμοστεί και σε άλλες ζώνες, όπως επίσης και στους ρυθμούς μετάβασης $B(E2)$ [50].

Η οικογένεια των δυναμικών $u_{2n}(\beta) = \frac{\beta^{2n}}{2}$ (με n ακέραιο) οδηγεί για $n = 1$ στην περίπτωση $X(5)-\beta^2$, ενώ για $n \rightarrow \infty$ οδηγεί στο άπειρο πηγάδι της $X(5)$ [51]. Επομένως και εδώ η οικογένεια αυτή παράγει τη σύνδεση μεταξύ της λύσης $X(5)-\beta^2$ και της $X(5)$, για τη περιοχή του τριγώνου που βρίσκεται μεταξύ $U(5)$ και $X(5)$. Για την περίπτωση $n \neq 1$ έχουν αποκομιστεί αριθμητικές λύσεις [87]. Για τις περιπτώσεις $n = 2, 3, 4$, οι λύσεις αναφέρονται ως $X(5)-\beta^4$, $X(5)-\beta^6$, και $X(5)-\beta^8$, οδηγώντας σε λόγους $R_{4/2} = 2.769, 2.824$ και 2.852 αντίστοιχα. Τα πλήρη φάσματα δίνονται στην [87].

Η συμπληρωματική σύνδεση για την ολοκλήρωση της αντίστοιχης πλευράς του τριγώνου, δηλαδή μεταξύ της $X(5)$ και της $SU(3)$, έχει αποκομιστεί χρησιμοποιώντας για δυναμικό άπειρο πηγάδι με σύνορα $\beta_M > \beta_m > 0$ [55, 56]. Εδώ, το πρότυπο, το οποίο καλείται περιορισμένο ασταθές κατά β [Confined Beta-Soft(CBS)] [55, 56] πρότυπο, περιέχει μian ελεύθερη παράμετρο, $r_\beta = \beta_m/\beta_M$, με την τιμή $r_\beta = 0$ να αντιστοιχεί στο $X(5)$ και το όριο $r_\beta \rightarrow 1$ να δίνει τον συμπαγή περιστροφέα.

Παρακάτω αναφέρονται συνοπτικά άλλες λύσεις σε αυτό το πλαίσιο.

α) Στην [88] θεωρείται δυναμικό με κεκλιμένο το δεξιό τείχος. Η κλίση του τείχους του δυναμικού μειώνει την αύξηση των ενεργειακών σταθμών για τη ζώνη β ως συνάρτηση του L , σε σύγκριση με το $X(5)$. Με αυτόν τον τρόπο βελτιώνεται η συμφωνία με το πείραμα.

β) Στην [89] χρησιμοποιούνται δυναμικά τύπου Coulomb και Kratzer.

γ) Ο χωρισμός των μεταβλητών κατά προσέγγιση στην $X(5)$ έχει εξεταστεί πρόσφατα μέσω της ακριβούς διαγωνοποίησης της χαμιλτονιανής του Bohr [90], χρησιμοποιώντας την πρόσφατα εισαχθείσα [91, 92, 93] και υπολογιστικά διαχειρίσιμη μορφή του συλλογικού προτύπου των Bohr–Mottelson.

δ) Η χρήση δυναμικών της μορφής $U(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)/\beta^2$ αποφέρει ακριβή χωρισμό των μεταβλητών [38]. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να κατασκευαστούν πρότυπα ανάλογα των $X(5)$ και $X(5)-\beta^2$, τα οποία καλούνται ES- $X(5)$ και ES- $X(5)-\beta^2$ αντίστοιχα [94], καθόσον ο χωρισμός των μεταβλητών σε αυτά είναι ακριβής Exactly Separable.

ε) Η χρήση περιοδικών δυναμικών $v(\gamma)$ στο πλαίσιο του $X(5)$ μελετήθηκε πρόσφατα στην [95].

Μια ανασκόπηση όλων των δυναμικών που χρησιμοποιούνται στο $X(5)$ δίνεται στην [62].

2.2.3 X(3)

Η ειδική περίπτωση για την οποία η μεταβλητή γ παγώνει, δηλαδή $\gamma = 0$, ενώ παράλληλα για τη μεταβλητή β χρησιμοποιείται το δυναμικό του άπειρου πηγαδιού, οδηγεί σε ακριβή χωρισμό των μεταβλητών σε τρεις διαστάσεις και καλείται X(3) [96]. Οι τρεις μεταβλητές του X(3) είναι η β και δύο γωνίες για τις σφαιρικές συντεταγμένες, αφού η συνθήκη $\gamma = 0$ επιβάλλει αξονικά συμμετρικό επίμηκες σχήμα, για το οποίο οι δύο γωνίες των σφαιρικών συντεταγμένων είναι αρκετές για τον καθορισμό του προσανατολισμού του στο χώρο.

Ο χωρισμός των μεταβλητών είναι ακριβής σε αυτήν την περίπτωση. Το γωνιακό μέρος έχει τις συνήθεις ιδιοσυναρτήσεις, που είναι οι σφαιρικές αρμονικές με ιδιοτιμές $L(L+1)$, ενώ για την εξίσωση της μεταβλητής β , στην οποία χρησιμοποιείται ένα άπειρο πηγάδι, παίρνει τη μορφή Bessel. Η μορφή των ακτινικών ιδιοσυναρτήσεων είναι όμοια με του X(5), αλλά η τάξη τους είναι

$$\nu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3} + \frac{1}{4}}, \quad (2.9)$$

η οποία θα πρέπει να συγκριθεί με την εξίσωση (2.5).

Αξίζει να σημειωθεί εδώ η ομοιότητα με την E(3), την ευκλείδια άλγεβρα σε τρεις διαστάσεις. Η E(3) είναι το ημεισθύ άθροισμα της άλγεβρας T_3 των γραμμικών μετατοπίσεων σε τρεις διαστάσεις και της άλγεβρας SO(3) των περιστροφών σε τρεις διαστάσεις [97]. Το πρόβλημα των ιδιοτιμών για τον L^2 , που είναι ένας τελεστής Casimir δεύτερης τάξης της E(3), οδηγεί επίσης [97, 41] σε όμοια λύση, με την αντικατάσταση $\nu = L + \frac{1}{2} = \sqrt{L(L+1) + \frac{1}{4}}$.

Από τη συμμετρία των κυματοσυναρτήσεων ως προς το επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα συμμετρίας του πυρήνα και περνά από τον άξονά του, συμπεραίνεται ότι η στροφορμή L λαμβάνει μονάχα άρτιες, μη μηδενικές τιμές. Επομένως, σε αυτό το πρότυπο οι ζώνες γ απουσιάζουν όπως άλλωστε αναμένεται από το πάγωμα του αντίστοιχου βαθμού ελευθερίας γ . Ο λόγος ενεργειών $R_{4/2}$ είναι 2.44. Πλήρη φάσματα δίνονται στην [96].

2.2.4 Πειραματικές ενδείξεις για την X(5)

Ο πρώτος πυρήνας που αναγνωρίστηκε να εκδηλώνει τη συμπεριφορά της X(5) ήταν ο ^{152}Sm [98], και ακολούθησε ο ^{150}Nd [99]. Οι ενδείξεις αυτές ενδυναμώθηκαν από τις μελέτες των [100, 101, 102, 86] για το ^{152}Sm και των [101, 102, 103] για το ^{150}Nd . Τα γειτονικά ισότονα με $N=90$, ^{154}Gd [104, 105] και ^{156}Dy [105, 106], φαίνονται να είναι καλά παραδείγματα για την X(5), με το ^{156}Dy να είναι ήσσονος ποιότητας. Στη βαρύτερη περιοχή, το ^{162}Yb [107] και το ^{166}Hf [108] έχουν επίσης προταθεί ως υποψήφιοι. Πιο πρόσφατα πειράματα στο ^{176}Os και το ^{178}Os [109] δείχνουν πως το τελευταίο είναι καλό παράδειγμα της X(5).

Επιπροσθέτως των ισότονων Nd, Sm, Gd, και Dy της περιοχής $N=90$, η συστηματική μελέτη των [110] σε διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα για τις ενεργειακές στάθμες και τους ρυθμούς μετάβασης $B(E2)$, προτείνει το ^{126}Ba και το ^{130}Ce ως πιθανές καλές υποψηφιότητες. Όμοια μελέτη σε ελαφρύτερους πυρήνες [111] προτείνει τα ^{76}Sr , ^{78}Sr και ^{80}Zr ως πιθανούς υποψήφιους. Το ^{104}Mo είχε προταθεί ως υποψήφιος της X(5) βάσει διαθέσιμων φασμάτων [112, 111], όμως μεταγενέστερες μετρήσεις στις τιμές των ρυθμών $B(E2)$ έδωσαν αποτελέσματα πιο κοντά στο όριο του συμπαγούς περιστροφέα [113].

Το ^{122}Ba [114] βρίσκεται υπό διερεύνηση, καθώς η ζώνη της θεμελιώδους κατάστασής του συμπί-

ππει με εκείνη του X(5).

Πρόσφατες μετρήσεις [115] στο ^{128}Ce δείχνουν ότι και αυτός ο πυρήνας είναι ένα καλό παράδειγμα για την X(5). Αυτό είναι κάπως αναμενόμενο, καθώς το ^{128}Ce , έχοντας 8 πρωτόνια σθένους και 12 νετρονικές σπές σθένους, θυμίζει το ^{152}Sm , το οποίο έχει 12 πρωτόνια σθένους και 8 νετρονικές σπές σθένους, το οποίο ξέρουμε ότι είναι καλό παράδειγμα για την X(5).

Η υπόθεση ενός επίπεδου δυναμικού για τη μεταβλητή β στη συμμετρία X(5) έχει επίσης εξεταστεί με την κατασκευή ισοδυναμικών επιφανειών [Potential Energy Surfaces (PES)], που αφορούν τους πυρήνες κοντά στη συμμετρία X(5), μέσω της σχετικιστικής θεωρίας μέσου πεδίου [77, 116, 117, 118]. Οι σχετικές PES εκδηλώνουν ένα τοπικό μέγιστο στη μέση, σε συμφωνία με υπολογισμούς που χρησιμοποιούν μίαν ενεργή παραμόρφωση β , προσδιοριζόμενη από μέθοδο των μεταβολών μετά από προβολή της στροφορμής και μίξη δύο σταθμών [119]. Το τοπικό μέγιστο εκδηλώνεται και σε υπολογισμούς Nilsson-Strutinsky-BCS [120] για το ^{152}Sm και το ^{154}Gd .

2.3 Z(5) και σχετικά πρότυπα

Η Z(5) [121] είναι ένα ανάλογο της X(5) για τους τριαξονικούς πυρήνες. Η αναλογία αυτή αναδύεται από τη συγγένεια των εφαρμοζόμενων δυναμικών, καθώς και στις δύο περιπτώσεις είναι της μορφής $U(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)$. Στην περίπτωση της X(5) η χαμιλτονιανή απλοποιείται από την επικέντρωση στην περιοχή κοντά στο $\gamma \simeq 0$, η οποία αντιστοιχεί σε αξονικά συμμετρικούς επιμήκεις πυρήνες. Στη Z(5) η προσοχή επικεντρώνεται στην περιοχή κοντά στο $\gamma \simeq \pi/6$, η οποία αντιστοιχεί στη μέγιστη δυνατή τριαξονικότητα.

Αν ισχύει ότι $\gamma = \pi/6$, τότε η προβολή της στροφορμής στον άξονα \hat{x}' του συστήματος ηρεμίας του πυρήνα, συμβολιζόμενη με α , είναι καλός κβαντικός αριθμός [122], ενώ η προβολή στον άξονα \hat{z}' του συστήματος ηρεμίας του πυρήνα, συμβολιζόμενη με K , δεν είναι καλός κβαντικός αριθμός. Η αντίστοιχη εξίσωση του Schrödinger γράφεται στη μορφή $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \phi_\alpha^L(\beta, \gamma) \mathcal{D}_{M, \alpha}^L(\theta_i)$, με θ_i ($i = 1, 2, 3$) να είναι οι γωνίες Euler, $\mathcal{D}(\theta_i)$ να είναι οι συναρτήσεις Wigner, L να είναι οι ιδιοτιμές της στροφορμής, ενώ M και α να είναι οι ιδιοτιμές των προβολών της στροφορμής στον άξονα z του συστήματος εργαστηρίου και τον άξονα x' του συστήματος ηρεμίας του πυρήνα αντίστοιχα. Ο κβαντικός αριθμός α πρέπει να είναι άρτιος ακέραιος [122]. Αντί της προβολής α , συχνά χρησιμοποιείται ο κβαντικός αριθμός της αστάθειας (wobbling quantum number) [122, 123] $n_w = L - \alpha$.

Για την περίπτωση της μέγιστης τριαξονικότητας, $\gamma = \pi/6$, χρησιμοποιείται το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή, $v(\gamma) = c(\gamma - \frac{\pi}{6})^2/2 = c\tilde{\gamma}^2/2$, με $\tilde{\gamma} = \gamma - \pi/6$.

Στην περίπτωση που το δυναμικό έχει ελάχιστο γύρω από το $\gamma = \pi/6$, ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (2.1) γράφεται στη μορφή

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \approx Q_1^2 + 4(Q_2^2 + Q_3^2) = 4(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) - 3Q_1^2. \quad (2.10)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα στην εξίσωση του Schrödinger που αντιστοιχεί στη χαμιλτονιανή της εξίσωσης (2.1), εισάγοντας [36] τις ανηγμένες ενέργειες $\epsilon = 2BE/\hbar^2$, τα ανηγμένα δυναμικά $v = 2BV/\hbar^2$, και υποθέτοντας [36] ότι τα ανηγμένα δυναμικά χωρίζονται σε έναν όρο εξαρτημένο από τη β και έναν όρο εξαρτημένο από τη γ , $U(\beta, \gamma) = u(\beta) + v(\gamma)$, η εξίσωση του Schrödinger μπορεί να χωριστεί σε δύο εξισώσεις [121].

Στην εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή γ , οι παρονομαστές β^2 , σε αναλογία με την $X(5)$, αντικαθίστανται από τις μέσες τιμές τους στις κυματοσυναρτήσεις για τη μεταβλητή β , $\langle \beta^2 \rangle$. Λαμβάνοντας υπόψη τις απλοποιήσεις που εισάγονται από την απαίτηση $\gamma \simeq \pi/6$, η αντίστοιχη εξίσωση λαμβάνει τη μορφή απλού μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή για τη μεταβλητή γ . Οι κυματοσυναρτήσεις περιέχουν πολυώνυμα του Hermite [121]. Η μορφή της λύσης για την ακτινική εξίσωση εξαρτάται από την επιλογή του δυναμικού για τη μεταβλητή β , $u(\beta)$.

2.3.1 Z(5)

Το δυναμικό που χρησιμοποιείται στη $Z(5)$ είναι εκείνο του 5-διάστατου άπειρου πηγαδιού, όπως και στη $X(5)$. Η ανταποκρινόμενη εξίσωση είναι ξανά τύπου Bessel τάξεως,

$$\nu = \frac{\sqrt{4L(L+1) - 3\alpha^2 + 9}}{2} = \frac{\sqrt{L(L+4) + 3n_w(2L - n_w) + 9}}{2}. \quad (2.11)$$

Οι λύσεις διατηρούν τη μορφή της εξίσωσης (2.2), με τα (ξ, τ) να αντικαθίστανται από $(s, \nu) = (s, n_w, L)$, όπου s η τάξη των ριζών της συνάρτησης Bessel $J_\nu(k_{s,\nu}\beta)$. Το ανταποκρινόμενο ακριβώς επιλύσιμο μοντέλο ονομάζεται $Z(5)$, και δεν αναφέρεται σε κάποια ομάδα συμμετρίας.

Η ολική ενέργεια έχει τη μορφή

$$E(s, n_w, L, n_{\tilde{\gamma}}) = E_0 + A(x_{s,\nu})^2 + Bn_{\tilde{\gamma}}, \quad (2.12)$$

με $n_{\tilde{\gamma}}$ να είναι ο κβαντικός αριθμός του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή για τη μεταβλητή γ και E_0, A, B να είναι ελεύθερες παράμετροι.

Ο ασταθής κβαντικός αριθμός n_w ταξινομεί την οικογένεια των ζωνών με $L = n_w, n_w+2, n_w+4, \dots$ (με $n_w > 0$) αμέσως μετά τη ζώνη της βασικής κατάστασης (με $n_w = 0$) [122]. Η ζώνη της βασικής κατάστασης ανταποκρίνεται στα $s = 1, n_w = 0$ και έχει $R_{4/2} = 2.350$. Εναλλακτικά το μοντέλο $Z(5)$ θα αναφέρεται ως εκείνο του οποίου η λύση είναι η παραπάνω. Τα φάσματα δίνονται στη [121, 124]. Ως υποψήφιοι πυρήνες για το $Z(5)$ έχουν προταθεί οι $^{192-196}\text{Pt}$ για τη πειραματική ένδειξη του προτύπου [121, 124].

2.3.2 Άλλες λύσεις

Οι λύσεις στη γειτονιά της απαίτησης $\gamma = \pi/6$ έχουν επίσης διερευνηθεί μελετώντας δυναμικά της μορφής $u(\beta, \gamma) = u(\beta) + u(\gamma)/\beta^2$ [125, 126], τα οποία επιτρέπουν τον ακριβή διαχωρισμό των μεταβλητών. Τα δυναμικά του Coulomb, του Kratzer, του αρμονικού ταλαντωτή, του Davidson και του άπειρου πηγαδιού έχουν εφαρμοστεί για τη μορφή του $u(\beta)$ [125, 126], ενώ για τη μορφή του $u(\gamma)$ έχει θεωρηθεί μετατοπισμένος αρμονικός ταλαντωτής. Ακόμη για το $u(\gamma)$ έχει θεωρηθεί και ένα περιοδικό δυναμικό $u(\gamma) = \mu/\sin^2(3\gamma)$ [127]. Στη [128], έχει αναλυθεί μια λύση όμοια με το $Z(5)$, αλλά με το $u(\gamma)$ ανάλογο του $\cos^2(3\gamma)$.

2.3.3 Z(4)

Η ειδική περίπτωση για την οποία η γ παγώνει στη τιμή $\gamma = \pi/6$, ενώ στη β χρησιμοποιείται το άπειρο πηγάδι για δυναμικό, οδηγεί σε ακριβώς διαχωρισμό 4-διάστατο μοντέλο, το οποίο καλείται $Z(4)$ [129]. Οι τέσσερις μεταβλητές του μοντέλου είναι η β και οι τρεις γωνίες Euler αφού σε αυτό

το πρότυπο η γ δεν αντιμετωπίζεται ως μεταβλητή αλλά ως παράμετρος, σε αναλογία με το μοντέλο των Davydov και Chaban [130].

Ο ακριβής διαχωρισμός των μεταβλητών είναι ευκαίος σε αυτή τη περίπτωση. Η εξίσωση για τις γωνίες Euler έχει λυθεί από τους Meyer-ter-Vehn [122], με τις ιδιοσυναρτήσεις να είναι κατάλληλοι συνδυασμοί των συναρτήσεων Wigner. Στην εξίσωση για τη μεταβλητή β χρησιμοποιείται άπειρο τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού και η μορφή της είναι εκείνη του Bessel.

Οι ακτινικές λύσεις έχουν την ίδια μορφή όπως και στη $Z(5)$, αλλά είναι τάξεως,

$$\nu = \sqrt{L(L+1) - \frac{3}{4}\alpha^2 + 1} = \frac{\sqrt{L(L+4) + 3n_w(2L - n_w) + 4}}{2}, \quad (2.13)$$

η οποία θα πρέπει να συγκριθεί με την εξίσωση (2.11), όπου τα διάφορα σύμβολα έχουν το ίδιο νόημα όπως και στη $Z(5)$. Ο λόγος ενεργειών $R_{4/2}$ είναι 2.226. Τα φάσματα δίνονται στη [129, 124]. Οι πυρήνες $^{128-132}\text{Xe}$ έχουν προταθεί ως πιθανοί υποψήφιοι για το πρότυπο $Z(4)$ [129, 124].

2.3.4 Για τη μετάβαση από την αξονική στη τριαξονική περίπτωση

Μια ειδική λύση της χαμιλτονιανής του Bohr ανταποκρίνεται στη μετάβαση από αξονικά παραμορφωμένες σε τριαξονικά παραμορφωμένες μορφές, έχει δοθεί στη [131], η οποία καλείται $\Upsilon(5)$. Η τριαξονικότητα πρωτονίου-νετρονίου, αναδυόμενη στο όριο $SU(3)^*$ [132] του IBM-2 [14], έχει κινητοποιήσει τη λεπτομερή μελέτη των των μεταβολών φάσης για το IBM-2 [133, 134, 135]. Τα κύρια χαρακτηριστικά της τριαξονικότητας πρωτονίου-νετρονίου είναι μια ζώνη χαμηλής ενέργειας $K = 2$ και οι ρυθμοί μετάβασης $B(E2)$ παραμένουν κοντά σε εκείνους του προτύπου του Davydov [136].

2.4 Οι καταστάσεις 0^+ στη χαμιλτονιανή του Bohr

Πίνακας 2.1: Καταστάσεις τάξεως ν για κάθε J , και για την ειδική περίπτωση των καταστάσεων $J^\pi = 0^+$, στα γεωμετρικά μοντέλα $E(5)$, $X(5)$, $Z(5)$, $Z(4)$, και $X(3)$. J είναι το σπιν του επιπέδου, $\tau = J/2$, και n_w είναι ο κβαντικός αριθμός της αστάθειας [123] που είναι μηδέν για τις καταστάσεις 0^+ .

Μοντέλο	ν	$\nu_{J=0^+}$	Μοντέλο	ν	$\nu_{J=0^+}$
$E(5)$	$\tau + \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$			
$X(5)$	$\sqrt{\frac{J(J+1)}{3} + \frac{9}{4}}$	$\frac{3}{2}$	$Z(5)$	$\frac{\sqrt{J(J+4) + 3n_w(2J - n_w) + 9}}{2}$	$\frac{3}{2}$
$X(3)$	$\sqrt{\frac{J(J+1)}{3} + \frac{1}{4}}$	$\frac{1}{2}$	$Z(4)$	$\frac{\sqrt{J(J+4) + 3n_w(2J - n_w) + 4}}{2}$	1

Οι καταστάσεις 0^+ είναι αξιοσημείωτα κατάλληλες για την εκδήλωση συμμετριών κυρίως εξαιτίας της απουσίας φυγόκεντρων τάσεων.

Όπως φαίνεται και στο πίνακα 2.1, οι προαναφερθείσες συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$, καθώς και το πρότυπο $Z(5)$ [121], εκφράζονται μέσα από ιδιοσυναρτήσεις τύπου Bessel, J_ν . Αν και

Πίνακας 2.2: (Αριστερά) Οι ενέργειες των καταστάσεων 0^+ στα πρότυπα E(5), Z(5), και X(5). Οι ενέργειες στα αριστερά είναι σε μονάδες $E(2_1^+) = 1.0$, ενώ στη στήλη Norm, σε μονάδες $E(0_2^+) = 1.0$. Για όλα τα μοντέλα, τα κανονικοποιημένα αποτελέσματα συμπίπτουν. Η στήλη IBA-Norm τις κανονικοποιημένες ενέργειες για τις 0^+ κοντά στο κρίσιμο σημείο, βάσει υπολογισμών για μεγάλο N_B στο IBA και συζητείται στο τέλος. (Κέντρο) Το αυτό για το πρότυπο Z(4). (Δεξιά) Το αυτό για το πρότυπο X(3).

0_i^+	E(5)	Z(5)	Z(5)	Norm	IBA-Norm	Z(4)	Norm	X(3)	Norm
0_1^+	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0_2^+	3.03	3.91	5.65	1.0	1.0	2.95	1.0	2.87	1.0
0_3^+	7.58	9.78	14.12	2.50	2.48	7.60	2.57	7.65	2.67
0_4^+	13.64	17.61	25.41	4.50	4.62	13.93	4.71	14.34	5.00
0_5^+	21.22	27.39	39.53	7.00	7.13	21.95	7.43	22.95	8.00
0_6^+	30.31	39.12	56.47	10.00	9.85	31.65	10.72	33.47	11.67

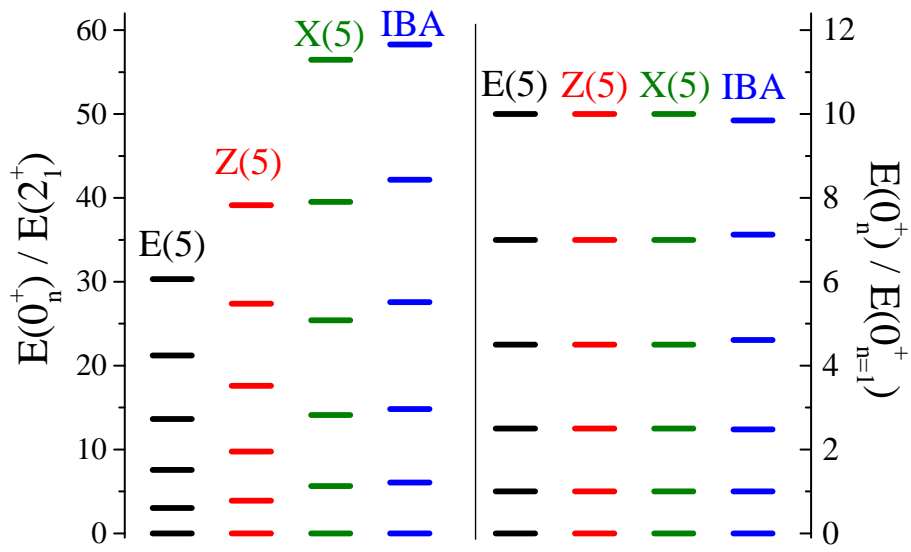
για $J \neq 0$ η τάξη ν των συναρτήσεων Bessel είναι διαφορετική για κάθε λύση, για $J = 0$ η ίδια τάξη αποκομίζεται και στις τρεις περιπτώσεις. Ως αποτέλεσμα, οι καταστάσεις 0^+ σε αυτά τα μοντέλα μοιάζουν διαφορετικές αν κανονικοποιηθούν στην ενέργεια της κατάστασης 2_1^+ , αλλά ταυτίζονται αν κανονικοποιηθούν στη κατάσταση 0_2^+ , όπως φαίνεται στο πίνακα 2.2 και την εικόνα 2.2.

Προχωρώντας περισσότερο γίνεται αντιληπτό ότι στη τελευταία κανονικοποίηση, οι ενέργειες των καταστάσεων 0_n^+ , με n το δείκτη διάταξής τους ως προς την ενέργεια, ακολουθούν τον απλό κανόνα $n(n+3)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το φάσμα των ριζών των συναρτήσεων Bessel J_ν ακολουθεί σε πολύ καλή προσέγγιση το κανόνα $n(n + \nu + 3/2)$, για χαμηλά ν , και γίνεται ακριβής για $\nu = 1/2$ [144]. Άρα οι καταστάσεις 0_n^+ στο πρότυπο Z(4) [129] [όμοιες με εκείνες του Z(5), αλλά με το γ να περιορίζεται στο $\pi/6$] ακολουθούν το κανόνα $n(n + 2.5)$. Επίσης, οι καταστάσεις 0_n^+ στο πρότυπο X(3) [96] [όπου $\gamma = 0$] ακολουθούν το κανόνα $n(n + 2)$, όπως φαίνεται από τους πίνακες 2.1 και 2.2.

Λαμβάνοντας υπόψιν το τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της ευκλείδιας άλγεβρας σε 5 βαθμούς ελευθερίας E(5) [129, 97], φαίνεται ότι οι καταστάσεις 0_n^+ στη X(5) και τη Z(5) αναπαριστούν τη περίπτωση μιας μερικής δυναμικής συμμετρίας (partial dynamical symmetry) [146] τύπου I [147], στην οποία μέρος των καταστάσεων (εδώ για τις καταστάσεις 0^+) διατηρούν ολόκληρη τη συμμετρία.

2.5 Συμπεράσματα

Στη τελευταία δεκαετία αναπτύχθηκε και εξακολουθεί να αναπτύσσεται μεγάλο ενδιαφέρον για τις ειδικές λύσεις της χαμιλτονιανής του Bohr, σε σχέση με τις μεταβολές σχήματος -φάσης και τις συμμετρίες κρίσιμου σημείου στους πυρήνες. Η επέκταση αυτών των ιδεών αποτελεί κομμάτι της τρέχουσας ερευνας συμπεριλαμβανομένων και των προσπαθειών για την εγχόλπωση των διπολικών [74] και οκταπολικών [137, 138, 139, 140] βαθμών ελευθερίας. Επιπρόσθετες αναλύσεις και επεκτάσεις σχετικές με τις μεταβολές σχήματος -φάσης και συμμετρίες κρίσιμου σημείου μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [141, 142, 143].



Σχήμα 2.2: (Αριστερά) Οι ενέργειες των διεγερμένων 0^+ στα πρότυπα E(5), Z(5), και X(5) και ένας υπολογισμός του IBM κοντά στο κρίσιμο σημείο (δες κείμενο). (Δεξιά) Το ίδιο με αριστερά με τις ενέργειες να κανονικοποιούνται στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης 0^+ . Από την αναφορά [144].

Κεφάλαιο 3

Μεταβολές σχήματος -φάσης στο IBM

3.1 Εισαγωγή

Στο πλαίσιο του IBM, που περιγράφει τα όρια των δυναμικών συμμετριών $U(5), SU(3), O(6)$ οι οποίες αντιστοιχούν σε δονητικούς, αξονικά παραμορφωμένους και ασταθείς κατά γ πυρήνες, οι μεταβολές σχήματος -φάσης έχουν μελετηθεί εδώ και 25 χρόνια [32], μέσω του κλασσικού ορίου του IBM [33, 26, 27], δείχνοντας ότι το πρότυπο εκδηλώνει (σύμφωνα με τη συνήθη ταξινόμηση κατά Ehrenfest) μεταβολή φάσης δεύτερης τάξης μεταξύ των $U(5)$ και $O(6)$, μεταβολή φάσης πρώτης τάξης μεταξύ $U(5)$ και $SU(3)$ και καμία μεταβολή φάσης μεταξύ $O(6)$ και $SU(3)$. Τα τρία όρια του IBM τοποθετούνται στις κορυφές του τριγώνου [34] των συμμετριών του IBM το οποίο είναι και πρόσφορο για τη τοποθέτηση και των μεταβολών φάσης -σχήματος [31].

Οι μεταβολές σχήματος/φάσης από το ένα πυρηνικό σχήμα στο άλλο συζητήθηκαν για πρώτη φορά στο πλαίσιο του IBM στη [32], εφαρμόζοντας θεωρία καταστροφών στο συναρτησιοειδές της ενέργειας [148] που αποκομίζεται μέσω της χρήσης του φορμαλισμού των συμφώνων καταστάσεων στο κλασσικό όριο του IBM [33, 26]. Μεταξύ των δυναμικών συμμετριών $U(5)$ και $SU(3)$ η μεταβολή φάσης βρέθηκε να είναι 1ης τάξης (σύμφωνα με τη ταξινόμηση κατά Ehrenfest), ενώ μεταξύ των δυναμικών συμμετριών $U(5)$ και $O(6)$ η μεταβολή φάσης αναφέρεται ως πρώτης τάξεως. Εν γένει οι φάσεις του πυρήνα μπορούν να θεωρηθούν ως περιπτώσεις σφαιρικής και παραμορφωμένης συμπεριφοράς, οι οποίες κατά τη παραπάνω ανάλυση διαχωρίζονται από μια στενή περιοχή συνύπαρξης [148] (όπως φαίνεται στην εικόνα 1), που συγχλίνει στο σημείο της αλλαγής φάσης 2ης τάξης καθώς προσεγγίζεται η πλευρά του τριγώνου για τη $U(5)-O(6)$.

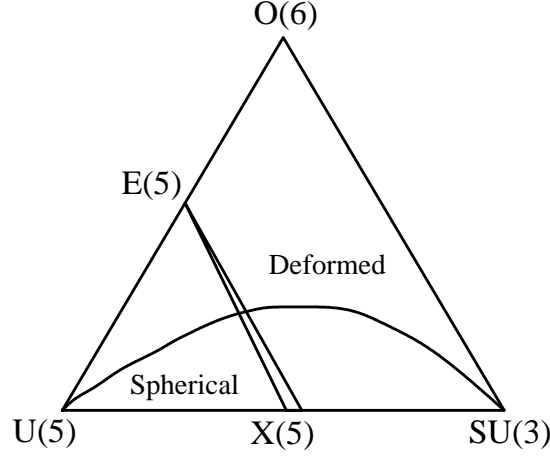
3.2 Η χαμιλτονιανή του IBM και το τρίγωνο συμμετρίας

Στο πλαίσιο του IBM, η πυρηνική δομή των άρτιων-άρτιων πυρήνων περιγράφεται μέσα στη συμμετρία $U(6)$, που εμπεριέχει τα όρια των δυναμικών συμμετριών $U(5), SU(3)$ και $O(6)$ και ανταποκρίνονται στις περιπτώσεις των δονητικών, αξονικά παραμορφωμένων και ασταθών κατά γ πυρήνων αντίστοιχα.

Για τη μελέτη των μεταβολών σχήματος/φάσης η χαμιλτονιανή που χρησιμοποιείται είναι η [149,

$$H(\zeta, \chi) = c \left[(1 - \zeta) \hat{n}_d - \frac{\zeta}{4N_B} \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x \right], \quad (3.1)$$

όπου $\hat{n}_d = d^\dagger \cdot \tilde{d}$ είναι ο τελεστής πληθυσμού των μποζονίων d , $\hat{Q}^x = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s) + \chi (d^\dagger \tilde{d})^{(2)}$ είναι ο τετραπολικός τελεστής, N_B είναι το πλήθος των μποζονίων σθένους και c είναι ένας παράγοντας κλίμακας. Η ανωτέρω χαμιλτονιανή περιέχει τις δύο παραμέτρους ζ και χ , με τη $\zeta \in [0, 1]$ και τη $\chi \in [0, -\sqrt{7}/2 = -1.32]$. Σε αυτή τη παραμετροποίηση το όριο της $U(5)$ ανταποκρίνεται στη $\zeta = 0$, το όριο της $O(6)$ στη $\zeta = 1$, $\chi = 0$ και το όριο της $SU(3)$ στη $\zeta = 1$, $\chi = -\sqrt{7}/2$.



Σχήμα 3.1: Το τρίγωνο συμμετριών του IBM με τις τρεις δυναμικές συμμετρίες. Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$ έχουν τοποθετηθεί κοντά στην περιοχή της αλλαγής φάσης /σχήματος, η οποία απεικονίζεται με επικλινείς γραμμές. Η συνεχής καμπύλη περιγράφει το τόξο κανονικότητας των Alhassid και Whelan [186].

Τα παραπάνω μπορούν να παρουσιαστούν παραστατικά με τη τοποθέτηση των τριών ορίων (τρεις δυναμικές συμμετρίες) του IBM στις κορυφές ενός τριγώνου [34] που καλείται το τρίγωνο των συμμετριών του προτύπου IBM. Με την ανωτέρω παραμετροποίηση γίνεται εφικτή και η μελέτη περιοχών της πυρηνικής δομής (δηλ μελέτη των αντίστοιχων πυρήνων) που δεν ανταποκρίνονται σε κάποιο από τα τρία όρια του IBM, όπως οι περιοχές αυτές αναπαρίστανται στην εσωτερική περιοχή του τριγώνου συμμετριών στο IBM στην εικόνα 3.1. Οι παράμετροι (ζ, χ) προβάλλονται στο τρίγωνο των συμμετριών από τη μετατροπή τους στις πολικές συντεταγμένες [151]

$$\rho = \frac{\sqrt{3}\zeta}{\sqrt{3} \cos \theta_\chi - \sin \theta_\chi}, \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \theta_\chi, \quad (3.2)$$

όπου $\theta_\chi = (2/\sqrt{7})\chi(\pi/3)$.

Οι μετατροπές σχήματος/φάσης στο IBM μπορούν να μελετηθούν από το κλασσικό όριο του προτύπου, το οποίο ευρίσκεται με διάφορους τρόπους:

- α) Τις σύμφωνες καταστάσεις [152, 33, 153, 26, 27].
- β) Τη μέθοδο των εξισώσεων κίνησης [154].
- γ) Τη μέθοδο που περιλαμβάνει ένα μετασχηματισμό Holstein-Primakoff [155, 156].

Χρησιμοποιώντας τη πρώτη μέθοδο [26], αποκομίζονται τρία συναρτησιοειδή της ενέργειας $E(\beta, \gamma)$ (σε όρους των μεταβλητών του Bohr β και γ), ανταποκρινόμενα στο κάθε όριο του προτύπου, τα

οποία ελαχιστοποιούνται ως προς τις β και γ προκειμένου να αντανakλούν το κλασσικό ανάλογο. Η ελαχιστοποίηση αυτή προέρχεται από την αρχή της ελάχιστης δράσης για την εκάστοτε σύμφωνη κατάσταση, η οποία αντανakλά το κλασσικό όριο σύμφωνα με τη θεωρία των ολοκληρωμάτων τροχιάς. Τα συναρτησιοειδή της ενέργειας για τα όρια U(5) και O(6) είναι ανεξάρτητα της μεταβλητής γ και παρουσιάζουν απότομο ελάχιστο στα σημεία $\beta = 0$ και $\beta = 1$ αντίστοιχα. Από την άλλη το συναρτησιοειδές της ενέργειας για το όριο της SU(3) εξαρτάται από τη μεταβλητή γ , με ένα απότομο ελάχιστο στο σημείο $\gamma = 0$ (ανταποκρινόμενο στην επιμήκη prolate αξονική συμμετρία) και $\beta = \sqrt{2}$.

Τα ελάχιστα είναι σε συμφωνία με την ερμηνεία των ορίων U(5), O(6) και SU(3) ως αναπαρστάσεις δονητικών (σφαιρικών), ασταθών κατά γ και παραμορφωμένων prolate πυρήνων αντίστοιχα. Αντιστρέφοντας το πρόσημο της παραμέτρου χ στο τετραπολικό τελεστή το ελάχιστο μετατοπίζεται στο σημείο $\gamma = 60^\circ$, ανταποκρινόμενο στην πεπλατυσμένη oblate αξονική συμμετρία και συμβολίζεται με $\overline{\text{SU}(3)}$, $\beta = \sqrt{2}$.

Πριν από 30 χρόνια περίπου [32] εφαρμόστηκε στο κλασσικό όριο του IBM η ταξινόμηση κατά Ehrenfest, σύμφωνα με την οποία η τάξη μιας μετατροπής φάσης ορίζεται από τη τάξη n της παραγώγου της ενέργειας $\partial^n E / \partial \zeta^n$ στην οποία εμφανίζεται ασυνέχεια.

Χρησιμοποιώντας το φορμαλισμό των συμφώνων καταστάσεων του IBM [33, 153, 26] αποκομίζεται η ολική ενέργεια ανά μπόζόνιο, $E(\beta, \gamma) / (cN_B)$, ανταποκρινόμενη στη χαμιλτονιανή της εξίσωσης (3.1), στη μορφή [157]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\beta, \gamma) = & \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \left[(1 - \zeta) - (\chi^2 + 1) \frac{\zeta}{4N_B} \right] - \frac{5\zeta}{4N_B(1 + \beta^2)} \\ & - \frac{\zeta(N_B - 1)}{4N_B(1 + \beta^2)^2} \left[4\beta^2 - 4\sqrt{\frac{2}{7}}\chi\beta^3 \cos 3\gamma + \frac{2}{7}\chi^2\beta^4 \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου β και γ οι δύο κλασσικές συντεταγμένες που σχετίζονται [14] με τις γεωμετρικές μεταβλητές του [37].

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή και υπάρχουν στη [32], αναμένεται μεταβολή φάσης 1ης τάξης μεταξύ των ορίων U(5) και SU(3), δηλαδή στη πλευρά του τριγώνου συμμετριών του IBM που χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες $\chi = -\sqrt{7}/2 = -1.32$, μεταβολή 2ης τάξης μεταξύ των ορίων U(5) και O(6), δηλαδή στη πλευρά του τριγώνου με συντεταγμένες $\chi = 0$ και καμία μεταβολή φάσης μεταξύ των ορίων SU(3) και O(6). Συναρτήσε του ζ , μια περιοχή συνύπαρξης σχήματος -φάσης [148] ξεκινά όταν επιπροσθέτως του σφαιρικού ελάχιστου ($\beta = 0$) εμφανιστεί ένα επιπλέον παραμορφωμένο ελάχιστο ($\beta \neq 0$) και τελειώνει με την επιβίωση μονάχα του παραμορφωμένου. Επομένως το κλείσιμο της περιοχής συνύπαρξης επιτυγχάνεται όταν η $\mathcal{E}(\beta, \gamma)$ γίνεται επίπεδο στο $\beta = 0$, ικανοποιώντας τη συνθήκη [150] $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \beta^2} |_{\beta=0} = 0$, που πραγματοποιείται για

$$\zeta^{**} = \frac{4N_B}{8N_B + \chi^2 - 8}. \quad (3.4)$$

Από την άλλη το άνοιγμα της περιοχής συνύπαρξης, ζ^* , αποκομίζεται από τα αποτελέσματα της [158]. Για $\chi = -\sqrt{7}/2$ το σημείο αυτό δίνεται από

$$\zeta^* = \frac{(896\sqrt{2} + 656R)N_B}{-1144\sqrt{2} + 123R + (1536\sqrt{2} + 164R)N_B} \quad (3.5)$$

όπου

$$R = \sqrt{\frac{35456}{15129} + \frac{32 \cdot 6^{2/3}}{41}} - \sqrt{\frac{70912}{15129} - \frac{32 \cdot 6^{2/3}}{41} + \frac{3602816}{15129\sqrt{1108 + 369 \cdot 6^{2/3}}}} \quad (3.6)$$

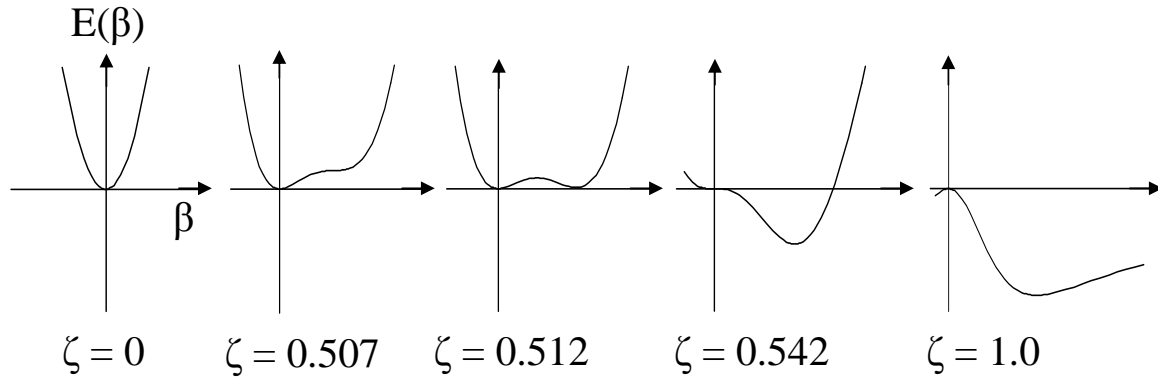
Ανάμεσα υπάρχει ένα σημείο, το ζ_{crit} , όπου τα δύο ελάχιστα είναι ίσα και η πρώτη παράγωγος της \mathcal{E}_{min} , $\partial\mathcal{E}_{min}/\partial\zeta$, είναι ασυνεχής, σηματοδοτώντας μεταβολή φάσης πρώτης τάξεως. Για $\chi = -1.32$, στη πλευρά του τριγώνου U(5)-SU(3), το σημείο αυτό είναι [159]

$$\zeta_{crit} = \frac{16N_B}{34N_B - 27}. \quad (3.7)$$

Εκφράσεις για το σημείο ζ^* και το ζ_{crit} που να περιέχουν τη παράμετρο χ μπορούν επίσης να αποκομιστούν χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της [158].

Το σύνολο τιμών της ζ που ανταποκρίνεται στη περιοχή της συνύπαρξης σχήματος -φάσης συρρικνώνεται με τη μείωση της $|\chi|$ και συγχλίνει σε ένα μονάχα σημείο για $\chi = 0$. Αυτό είναι το σημείο της μεταβολής φάσης 2ης τάξης μεταξύ των U(5) και O(6), με συντεταγμένες στη πλευρά του τριγώνου U(5)-O(6) $\chi = 0$. Όπως φαίνεται από την εξίσωση (3.4) η απαίτηση $\chi = 0$ δίνει τη τιμή στο $\zeta = N_B/(2N_B - 2)$. Στην εικόνα 3.1 περιλαμβάνεται η μεταβατική περιοχή για τη μεταβολή φάσης.

Για $N_B = 10$, που είναι μια τυπική τιμή για πολλούς πυρήνες, είναι εμφανές ότι τα όρια που ορίζονται από το αριστερό σύνορο ζ^* και τη γραμμή ζ_{crit} , περίπου ταυτίζονται. Για παράδειγμα, αν $\chi = -1.32$, τότε $\zeta^* = 0.507$ και $\zeta_{crit} = 0.511$. Άρα συνάγεται ότι η γραμμή ζ_{crit} μπορεί να θεωρηθεί ως το αριστερό όριο της περιοχής μεταβολής φάσης.



Σχήμα 3.2: Η εξέλιξη ως προς ζ των συναρτησιοειδών ενέργειας του IBM για $N_B = 10$ και $\chi = -1.32$. Από τη [187].

Είναι χρήσιμο να εξεταστεί η εξέλιξη του συναρτησιοειδούς της ενέργειας του IBM ως προς τη ζ , για $\chi = -1.32$ δηλ στη πλευρά U(5)-SU(3) του τριγώνου για μια τυπική τιμή του N_B (π.χ $N_B = 10$). Η εξέλιξη αυτή φαίνεται στην εικόνα 3.2. Στο $\zeta = 0$ συμβαίνει ελάχιστο για $\beta = 0$. Στο $\zeta^* = 0.507$, επιπροσθέτως του σφαιρικού ελάχιστου ($\zeta = 0, \beta = 0$) συμβαίνει και δεύτερο, το οποίο είναι παραμορφωμένο. Στο $\zeta_{crit} = 0.512$ τα δύο ελάχιστα ταυτίζονται, δηλαδή για μία τιμή του ζ και οι δύο τιμές του β ελαχιστοποιούν την ενέργεια. Στη περίπτωση αυτή, η ολική ενέργεια παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο ανάμεσα στα δύο ελάχιστα, που σημαίνει αλλαγή φάσης πρώτης τάξεως. Στο $\zeta^{**} = 0.542$ το σφαιρικό ελάχιστο εξαφανίζεται, άρα για $\zeta > 0.542$ επιβώνει μόνο ένα παραμορφωμένο ελάχιστο.

Είναι επίσης χρήσιμο να εξεταστεί η εξέλιξη του συναρτησιοειδούς της ενέργειας του IBM ως προς τη ζ για $\chi = 0$, δηλαδή στην πλευρά U(5)-O(6) του τριγώνου ξανά για τη τυπική τιμή του $N_B = 10$. Στο $\zeta = 0$ μονάχα το σφαιρικό ελάχιστο στο $\beta = 0$ υπάρχει. Στο $\zeta_{crit} = 0.556$ η ελάχιστη ενέργεια μετατοπίζεται σε μη μηδενικές τιμές του β , με το ενδιάμεσο να έχει μορφή περίπου επίπεδη, σηματορός

μιας αλλαγής φάσης δευτέρας τάξεως.

3.3 Το όριο του μεγάλου μποζονικού πληθυσμού για το IBM

Στη διάρκεια των δύο πρώτων δεκαετιών της ανάπτυξης του IBM, οι μελέτες των συλλογικών ιδιοτήτων μεσαίων και βαρέων πυρήνων στηρίζονταν σε πεπερασμένο και μικρό αριθμό μποζονίων, με την ερμηνεία του ως το πλήθος των νουκλεονικών ζευγών σθένους για τον εκάστοτε πυρήνα. Η μελέτη των μετατροπών σχήματος /φάσης από το ένα όριο του IBM στο άλλο, έστρεψε τη προσοχή σε υπολογισμούς για μεγάλο πλήθος μποζονίων. Οι υπολογισμοί αυτοί αποκάλυψαν νέες κανονικότητες σε πυρηνικά φάσματα που επιβιώνουν και για πεπερασμένο αριθμό, οι οποίες παλαιότερα δεν είχαν παρατηρηθεί.

Εδώ θα αναλυθούν μερικές από τις εν λόγω κανονικότητες. Θαδειχθεί πως και για τα τρία όρια του IBM ($U(5), O(6), SU(3)$), οι ενέργειες των καταστάσεων 0^+ , αυξάνονται γραμμικά ως προς τον ενεργειακό τους δείκτη. Επιπροσθέτως θαδειχθεί ότι η στενή περιοχή μετάβασης που χωρίζει το τρίγωνο των συμμετριών του IBM σε μια σφαιρική και μια παραμορφωμένη περιοχή, περιγράφεται ικανοποιητικά από τους εκφυλισμούς $E(0_2^+) = E(6_1^+)$, $E(0_3^+) = E(10_1^+)$, $E(0_4^+) = E(14_1^+)$, τον ενεργειακό λόγο $E(6_1^+)/E(0_2^+)$ που αποκαλύπτεται ως μian απλή, εμπειρική και εύκολα μετρήσιμη ενεργή παράμετρος τάξης, για το διαχωρισμό μεταξύ 1ης και 2ης τάξης. Οι ενέργειες των 0^+ κοντά στο σημείο της μεταβολής σχήματος /φάσης 1ης τάξης μεταξύ των $U(5)$, $SU(3)$ θαδειχθεί ότι δέχονται αύξηση της μορφής $n(n+3)$, όπου n ο ενεργειακός τους δείκτης, σε συμφωνία με το κανόνα που σηματοδότησε η μελέτη των συμμετριών του κρίσιμου σημείου στη χαμιλτονιανή του Bohr. Οι υποβόσκουσες δυναμικές και ημί-δυναμικές συμμετρίες θα συζητηθούν επίσης.

Πίνακας 3.1: Καταστάσεις 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών (bandheads) σε μερικές αναπαραστάσεις (λ, μ) του ορίου $SU(3)$ του IBM. Το N δηλώνει το μποζονικό πλήθος, N_B .

irrep	0^+	irrep	0^+
(2N,0)	0		
(2N-4,2)	1		
(2N-8,4)	$(4N-6)/(2N-1)$	(2N-6,0)	$(4N-3)/(2N-1)$
(2N-12,6)	$(6N-15)/(2N-1)$	(2N-10,2)	$(6N-10)/(2N-1)$
(2N-16,8)	$(8N-28)/(2N-1)$	(2N-14,4)	$(8N-21)/(2N-1)$

Πίνακας 3.2: Καταστάσεις 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών (bandheads) σε μερικές αναπαραστάσεις (σ) του ορίου $O(6)$ του IBM. Το N δηλώνει το μποζονικό πλήθος, N_B .

irrep	0^+	irrep	0^+	irrep	0^+	irrep	0^+	irrep	0^+
(N)	0	(N-2)	1	(N-4)	2	(N-6)	$3-3/N$	(N-8)	$4-8/N$

3.4 Οι καταστάσεις 0^+ στο IBM

Εδώ θα εξεταστεί η συμπεριφορά των 0^+ στο όριο του μεγάλου μποζονικού πληθυσμού N_B του IBM. Στο όριο του $U(5)$ οι ενέργειες των 0^+ αυξάνουν γραμμικά με το πλήθος των μποζονίων d , δηλαδή ως προς το πλήθος των τετραπολικών φωνονίων. Στους πίνακες 3.1 και 3.2 παρουσιάζονται αναλυτικά αποτελέσματα για τις καταστάσεις 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών (bandheads) στα όρια $SU(3)$ και $O(6)$ του IBM. Και στις δύο περιπτώσεις, στο όριο του μεγάλου N_B η αύξηση έχει γραμμική συμπεριφορά. Άρα και στις τρεις δυναμικές συμμετρίες του IBM οι καταστάσεις 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών (bandheads) αυξάνονται γραμμικά, επομένως υποθέτουμε τη σχέση $E = An$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κοντά στο σημείο της μεταβολής πρώτης τάξης, υπολογισμός βασιζόμενος στο IBM [144, 145], γεννά φάσμα των καταστάσεων 0_n^+ το οποίο δεν ακολουθεί τον προαναφερθέντα κανόνα, αλλά εκείνο της αύξησης τύπου $n(n+3)$, που απορρέει από το άπειρο πηγάδι στη χαμιλτονιανή του Bohr για τους 5 βαθμούς ελευθερίας (β, γ , τρεις γωνίες Euler), όπως φαίνεται στο πίνακα 2.2 στο εδάφιο 2.4. Οι υπολογισμοί του IBM εκτελούνται βάσει της συνήθους χαμιλτονιανής του IBM [150], με τις δύο παραμέτρους (ζ, χ). Υπολογισμοί για μεγάλο μποζονικό πληθυσμό εκτελούνται βάσει του κώδικα IBAR [160, 161].

Συγκεντρικώς, η συμπεριφορά $n(n+3)$ των καταστάσεων 0_n^+ του IBM κοντά στο κρίσιμο σημείο της πρώτης τάξεως μεταβολής φάσης, είναι πολύ διαφορετική από εκείνη που αποκομίζεται για τη συμπεριφορά των καταστάσεων 0_n^+ πάνω σε κάποιο από τα όρια δυναμικής συμμετρίας του IBM.

3.5 Εκφυλισμοί στην περιοχή συνύπαρξης σχημάτων του IBM

Η κανονικότητα στη συμπεριφορά των 0^+ κοντά στο σημείο της μεταβολής φάσης πρώτης τάξης, είναι πρόκληση για τη μελέτη πιθανών κανονικοτήτων και των καταστάσεων με μη μηδενική στροφορμή.

Πρόσφατα παρατηρήθηκε πως η γραμμή που περιγράφει τον εκφυλισμό $6_1^+ = 0_2^+$ στο τρίγωνο συμμετριών του IBM για μεγάλο N ($N = 250$) βρίσκεται μέσα στη περιοχή συνύπαρξης σχημάτων, λίγο δεξιά από τη κρίσιμη γραμμή [144]. Παρόμοιες εικόνες λαμβάνονται και για τους εκφυλισμούς $10_1^+ = 0_3^+$, $14_1^+ = 0_4^+$ [144].

3.5.1 Σημείο $6_1^+ = 0_2^+$ στην πλευρά $U(5)$ - $SU(3)$ του τριγώνου συμμετριών του IBM

Στον πίνακα 3.3 παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη πλευρά του τριγώνου $U(5)$ - $SU(3)$, ($\zeta = 0.473$, $\chi = -\sqrt{7}/2$), τα οποία επιπλέον ικανοποιούν και τη συνθήκη $6_1^+ = 0_2^+$. Οι προκύπτουσες ενέργειες των καταστάσεων 0^+ κανονικοποιούνται στην ενέργεια της κατάστασης 0_2^+ , και συγκρίνονται με τις εκτιμήσεις του κανόνα $n(n+3)$. Έως και την $n = 5$ υπάρχει καλή συμφωνία. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ενδεικτικό μη αναμενόμενης κανονικότητας από αριθμητική μέθοδο, καθώς υπολογισμοί του IBM οδηγούν σε ενέργειες των 0^+ οι οποίες ακολουθούν το κανόνα που απορρέει από το άπειρο πηγάδι σε πέντε βαθμούς ελευθερίας για τη χαμιλτονιανή του Bohr. Ωστόσο υπενθυμίζεται ότι επίπεδες ισοδυναμικές επιφάνειες έχουν επίσης αποκομιστεί [162, 163, 164] σε υπολογισμούς σχετικιστικής θεωρίας μέσου πεδίου για πυρήνες που βρίσκονται πολύ κοντά στη κρίσιμη περιοχή, ενδυναμώνοντας την υπόθεση για άπειρο πηγάδι δυναμικού στη β .

Πίνακας 3.3: Εκτιμήσεις του IBM (με $N_B = 250$, $\chi = -\sqrt{7}/2$, $\zeta = 0.473$) σε σχέση με αναλυτικές εκφράσεις (κείμενο). Τα αποτελέσματα κανονικοποιούνται στην $E(2_1^+) = 1.0$.

n	Αναλυτικός	IBA	J	Αναλυτικός	IBA
	$\frac{3n(n+3)}{2}$	$E(0_n^+)$		$\frac{J(J+2)}{8}$	$E(J)$
1	6.00	6.08	2	1.00	1.00
			4	3.00	3.05
			6	6.00	6.08
			8	10.00	10.00
2	15.00	14.85	10	15.00	14.73
			12	21.00	20.23
3	27.00	27.57	14	28.00	26.43
			16	36.00	33.30
4	42.00	42.55	18	45.00	40.81

Προσπαθώντας να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα τα ευρήματα για τους εκφυλισμούς $6_1^+ = 0_2^+$ και $10_1^+ = 0_3^+$ με τις 0^+ που ακολουθούν το κανόνα $n(n+3)$, και με τις στάθμες της ζώνης της βασικής κατάστασης που ικανοποιούν τη σχέση

$$E(L) = aL + bL^2, \quad (3.8)$$

βρίσκεται ότι $a/b = 2$, δηλαδή τα επίπεδα της ζώνης της βασικής κατάστασης πρέπει να αυξάνονται ως $L(L+2)$, με τη σχετική σύνδεση να δίνεται από τη σχέση $L(L+2) = 12n(n+3)$. Στον πίνακα 3.3 συγκρίνονται οι υπολογισμοί του IBM με τις προβλέψεις για το κανόνα $L(L+2)$, οι οποίες κανονικοποιούνται στην ενέργεια της κατάστασης $L=2$. Στα χαμηλά επίπεδα υπάρχει καλή συμφωνία, με την απόκλιση να φτάνει το 10% για $L=18$.

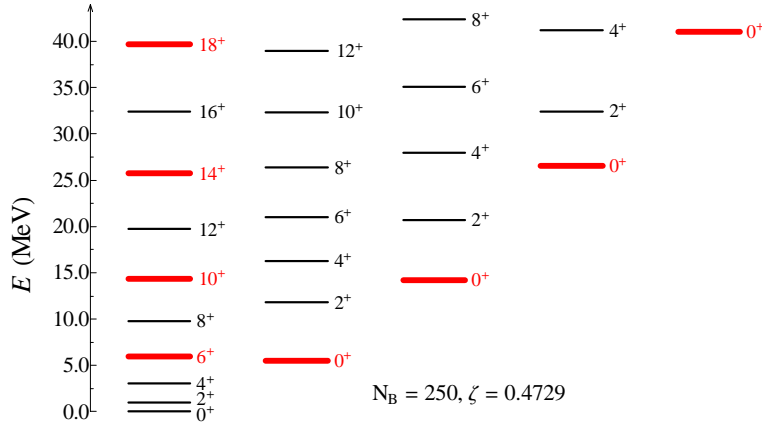
Ακόμη στον ίδιο πίνακα παρουσιάζονται οι υπολογισμοί του IBM για τις 0^+ , οι οποίες κανονικοποιούνται κατάλληλα στην ενέργεια της 2_1^+ για να συγκριθούν με εκείνες των εκφυλισμών $6_1^+ = 0_2^+$, $10_1^+ = 0_3^+$, $14_1^+ = 0_4^+$, $18_1^+ = 0_5^+$. Με αυτό το τρόπο ικανοποιούνται οι εκφυλισμοί στο IBM.

Πράγματι όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.3, για υπολογισμό του IBM κοντά στο κρίσιμο σημείο, οι καταστάσεις 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών (bandheads) είναι κατά προσέγγιση εκφυλισμένες με διαδοχικές καταστάσεις της ζώνης της βασικής κατάστασης για περιττό $J/2$.

Παραστατικά μπορεί να ειπωθεί ότι ο κανόνας $L(L+2)$ είναι μια "μέση κατάσταση" μεταξύ του κανόνα L , που δίνει τα επίπεδα στο όριο $U(5)$, και του κανόνα $L(L+1)$, που δίνει τα επίπεδα στο όριο της $SU(3)$. Η "μέση κατάσταση" του κανόνα $L(L+2)$ οδηγεί στον ενεργειακό λόγο $R_{4/2} = 3$, που είναι κοντά στη τιμή για την $X(5)$, $R_{4/2} = 2.904$.

3.5.2 Η γραμμή $6_1^+ = 0_2^+$ μέσα στο τρίγωνο

Προκειμένου να εξεταστεί το εύρος της επιβίωσης των ανωτέρω εκφυλισμών μακριά από τη γραμμή $U(5)$ - $SU(3)$ εκτελούνται υπολογισμοί απαιτώντας τον εκφυλισμό $6_1^+ = 0_2^+$. Στο πίνακα 3.4, παρου-



Σχήμα 3.3: Ενέργειες των χαμηλών ενεργειακών καταστάσεων (κανονικοποιημένες στη $E(2_1^+) = 1$) της χαμιλιονιανής του IBM [150] με $\chi = -\sqrt{7}/2$, $\zeta = 0.4729$, και $N_B = 250$. Το ζ επιλέχθηκε ώστε να αναπαράγει το προσεγγιστικό εκφυλισμό της $E(0_2^+)$ και $E(6_1^+)$.

σιάζονται αποτελέσματα από 8 διαφορετικά σημεία ξεκινώντας από το όριο της γραμμής U(5)-SU(3) (με $\chi = -1.32$), έως τη γραμμή U(5)-O(6) (με $\chi = 0.0$).

Σε κάθε στήλη παρουσιάζονται διαδοχικές 0^+ που είναι προσεγγιστικά εκφυλισμένες με την αντίστοιχη κατάσταση της ζώνης της βασικής κατάστασης. Ο εκφυλισμός $6_1^+ = 0_2^+$ συντηρείται εκ κατασκευής και διέπει όλα τα αποτελέσματα του πίνακα. Εκτός του εκ κατασκευής $6_1^+ = 0_2^+$, από τους υπόλοιπους προαναφερθέντες εκφυλισμούς επιβιώνουν και οι:

1) Ο $10_1^+ = 0_3^+$ έως τη τιμή $\chi = -0.4$, ο οποίος στη συνέχεια μεταμορφώνεται στον $10_1^+ = 0_4^+$. Η αιτία είναι πως σε όλη τη πλευρά U(5)-O(6) επιβιώνει η υποάλγεβρα O(5) [166]. Άρα στο $\chi = 0.0$ θα πρέπει να υπάρχουν δύο εκφυλισμένες 0^+ καταστάσεις με τη κατάσταση 6_1^+ . Η μία προέρχεται από τους εκφυλισμούς της O(5) (με $\xi = 1, \tau = 3$) και η άλλη προέρχεται από το περιορισμό του εκ κατασκευής εκφυλισμού $6_1^+ = 0_2^+$ (που αντανακλάται στην O(5) από $\xi = 2, \tau = 0$). Στο παρόντα υπολογισμό με $\chi = 0.0$, οι εν λόγω καταστάσεις είναι οι 0_2^+ και 0_3^+ .

2) Ο $14_1^+ = 0_4^+$ έως τη $\chi = -0.6$, και τότε βαθμιαία αλλάζει έως ότου γίνει ο $14_1^+ = 0_7^+$ στο $\chi = 0.0$. Για αυτή τη $\chi = 0.0$, η 0_5^+ αντιστοιχεί στη κατάσταση 0^+ με $\xi = 2, \tau = 3$, και επομένως είναι εκφυλισμένη με τη κατάσταση 6^+ , καθώς χαρακτηρίζεται από τους αυτούς χβαντικούς αριθμούς. Ακόμη σε αυτή τη $\chi = 0.0$, η 0_6^+ αντιστοιχεί στη 0^+ με $\xi = 1, \tau = 6$, η οποία ομοίως είναι εκφυλισμένη στη 12_1^+ .

3) Ο $18_1^+ = 0_5^+$ έως τη $\chi = -1.0$, και τότε σταδιακά αλλάζει στον $18_1^+ = 0_{10}^+$ για $\chi = 0.0$. Σε αυτό το $\chi = 0.0$, η 0_8^+ είναι η 0^+ με $\xi = 3, \tau = 3$, η οποία όπως και παραπάνω είναι εκφυλισμένη στη 6^+ . Τέλος σε αυτό το $\chi = 0.0$, η 0_9^+ είναι η 0^+ με $\xi = 2, \tau = 6$, που ομοίως εκφυλίζεται στη 12^+ .

Η επιβίωση των εκφυλισμών στο εσωτερικό του τριγώνου, που αρχικά παρατηρήθηκαν μονάχα στη πλευρά U(5)-SU(3), μπορεί να ειπωθεί ως το υπόλοιπο των παρατηρούμενων ημιδυναμικών συμμετριών (quasi-dynamical symmetries) για ολόκληρες τις πλευρές U(5)-O(6) και U(5)-SU(3) [167, 141], όπως επίσης και της μετάβασης από δονητική συμπεριφορά σε ασταθή κατά γ περιστροφία στο πρότυπο του Bohr [168]. Υπάρχει ωστόσο η εξής βασική διαφορά. Οι ημιδυναμικές συμμετρίες των [167, 141, 168] εμφανίζονται κατά μήκος των πλευρών του τριγώνου, κατά τη μετάβαση από τη γωνία που φιλοξενεί την εκάστοτε δυναμική συμμετρία προς το κρίσιμο σημείο πάνω στη πλευρά, ενώ στη

Πίνακας 3.4: Προβλέψεις του IBM για τη γραμμή $0_2^+ = 6_1^+$ του τριγώνου για $N = 250$, κανονικοποιημένες στην ενέργεια της κατάστασης 2_1^+ .

χ	-1.32	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0
ζ	0.473	0.479	0.488	0.496	0.504	0.512	0.519	0.518
6_1^+	6.078	5.825	5.540	5.340	5.168	4.940	4.568	3.815
0_2^+	6.080	5.826	5.540	5.338	5.182	4.939	4.568	3.815
10_1^+	14.731	13.834	12.803	12.083	11.486	10.754	9.644	7.457
0_3^+	14.846	13.631	12.609	12.056	11.685	11.195	8.443	3.815
0_4^+							10.598	8.122
14_1^+	26.429	24.502	22.277	20.727	19.467	17.991	15.861	11.758
0_4^+	27.574	25.135	22.651	21.094	19.476	13.966	10.598	8.122
0_5^+						18.764	14.390	9.033
0_6^+							17.624	9.533
0_7^+								13.075
18_1^+	40.806	37.483	33.644	30.976	28.834	26.404	23.019	16.615
0_5^+	42.554	38.530	33.932	28.037	21.151	18.764	14.390	9.033
0_6^+				31.954	27.041	20.899	17.624	9.533
0_7^+					30.445	26.545	18.346	13.075
0_8^+							22.210	14.645
0_9^+								15.748
0_{10}^+								16.615

παρούσα κατάσταση οι εναπομείνουσες συμμετρίες εμφανίζονται στη κρίσιμη περιοχή στο εσωτερικό του τριγώνου και όχι πάνω σε κάποια πλευρά.

Στον πίνακα 3.5 παρουσιάζεται η εξέλιξη των καταστάσεων 0^+ (κανονικοποιημένες στη 0_2^+) κατά μήκος της γραμμής $0_2^+ = 6_1^+$ στο εσωτερικό του τριγώνου. Στο $\chi = -\sqrt{7}/2$ η συμπεριφορά είναι παρόμοια του κανόνα $n(n+3)$, που αντιστοιχεί σε ένα άπειρο πηγάδι δυναμικού για τη γραμμή U(5)-SU(3). Στο $\chi = 0$ οι τιμές είναι πολύ κοντά στο πρότυπο E(5)- β^4 , που είναι γνωστό [52, 53] ότι αναπαριστά το κρίσιμο σημείο της πλευράς U(5)-O(6). Ακόμη παρουσιάζονται οι ενεργειακοί λόγοι $R_{4/2}$ και $R_{0/2}$, οι οποίοι εκδηλώνουν μια παρόμοια εξέλιξη από την X(5) στις τιμές του E(5)- β^4 .

Επιπλέον μελέτη των αναφερθέντων εκφυλισμών [165] δείχνει ότι ο τόπος των εκφυλισμών $E(0_2^+) = E(6_1^+)$ [που είναι ο σηματορός της X(5)] στο τρίγωνο, είναι μιαν ευθεία γραμμή, η οποία προσεγγίζει τη περιοχή συνύπαρξης στο όριο του μεγάλου μποζονικού πληθυσμού, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.4. Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνονται για τους εκφυλισμούς $E(0_3^+) = E(10_1^+)$ και $E(0_4^+) = E(14_1^+)$. Το συμπέρασμα είναι πως αυτοί οι εκφυλισμοί χαρακτηρίζουν τη περιοχή της συνύπαρξης, έως ότου εμφανιστεί το σύνορο της πλευράς U(5)-O(6).

3.5.3 Το σημείο $6_1^+ = 0_2^+$ κατά τη μετάβαση U(5)-SU(3) σε άλλα πρότυπα

Οι παρατηρούμενοι εκφυλισμοί του IBM στο σημείο $6_1^+ = 0_2^+$ για τη γραμμή U(5)-SU(3) γεννά το ερώτημα αν όμοιοι εκφυλισμοί συμβαίνουν και σε άλλα πρότυπα, στην εν λόγω περιοχή. Στον πίνακα

Πίνακας 3.5: Εκτιμήσεις για τις καταστάσεις 0^+ του IBM, κανονικοποιημένες στην ενέργεια της κατάστασης 0_2^+ , κατά μήκος της γραμμής $0_2^+ = 6_1^+$ του τριγώνου με $N = 250$, συγκρινόμενες με τις εκτιμήσεις του προτύπου $E(5)-\beta^4$ [52, 53, 41] και την αναλυτική έκφραση $n(n+3)$. Στο χαμηλότερο μέρος του πίνακα, παρουσιάζονται οι λόγοι $R_{4/2}$ και $R_{0/2}$ όπως εκτιμώνται από το IBM, μαζί με τις εκτιμήσεις του $X(5)$ [στη στήλη $n(n+3)$] και του $E(5)-\beta^4$.

	$n(n+3)$	β^4								
χ		-1.32	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	
ζ		0.473	0.479	0.488	0.496	0.504	0.512	0.519	0.518	
0_3^+	2.5	2.442	2.340	2.276	2.259	2.255	2.267	2.320	2.129	2.156
0_4^+	4.5	4.535	4.314	4.089	3.952	3.758	3.799	3.858	3.428	3.436
0_5^+	7.0	6.999	6.613	6.125	5.986	5.875	5.375	4.862	4.355	
$R_{4/2}$	2.904	3.051	2.972	2.885	2.824	2.770	2.693	2.560	2.288	2.093
$R_{0/2}$	5.649	6.080	5.826	5.540	5.338	5.182	4.939	4.568	3.815	2.390

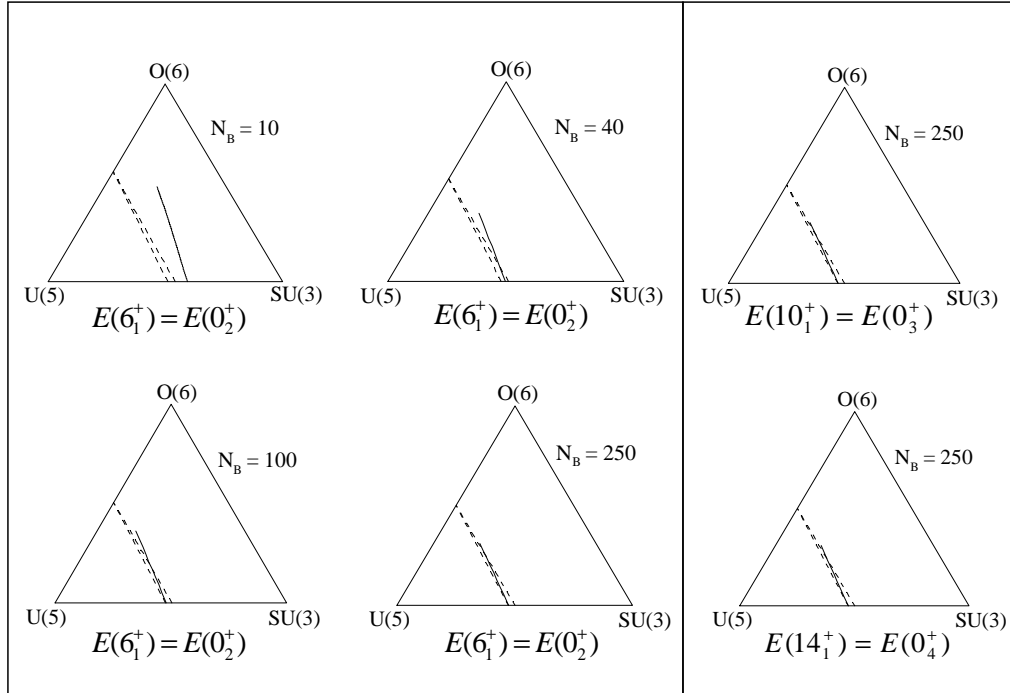
3.6 μελετώνται διάφορα πρότυπα αυτού του είδους, το Exactly Separable Davidson (ESD) [184], τα $X(5)-\beta^6$ [87], $X(5)-\beta^8$ [87], και το $X(5)$ [36], όπως επίσης και η αριθμητική λύση του Caprio [169]. Στο μονοπαραμετρικό πρότυπο ESD [184], οι εκφυλισμοί αναπαράγονται καλά για το συνδυασμό των παραμέτρων $\beta_0^4 + 3C = 4$, που λαμβάνεται από τη συνθήκη $6_1^+ = 0_2^+$. Στη μονοπαραμετρική αριθμητική λύση του Caprio [169], η καλύτερη αναπαραγωγή των εκφυλισμών φαίνεται να συμβαίνει στη γειτονιά $a = 150-200$, η οποία είναι και η περιοχή των παραμέτρων που προσεγγίζει καλύτερα τις εκτιμήσεις του $X(5)$ [169]. Στην οικογένεια των παραμετρικά απελευθερωμένων προτύπων $X(5)-\beta^{2m}$, η καλύτερη αναπαραγωγή φαίνεται να συμβαίνει στο πρότυπο $X(5)-\beta^6$.

3.5.4 Το σημείο $6_1^+ = 0_2^+$ στην πλευρά $U(5)-O(6)$ του τριγώνου συμμετριών του IBM

Η γραμμή του εκφυλισμού $6_1^+ = 0_2^+$ στο εσωτερικό του τριγώνου συναντά την πλευρά $U(5)-O(6)$ στο σημείο όπου οι καταστάσεις 0^+ με $\xi = 1$, $\tau = 3$ και $\xi = 2$, $\tau = 0$ γίνονται εκφυλισμένες, εφόσον η πρώτη είναι εκφυλισμένη με την 6_1^+ λόγω της συμμετρίας $O(5)$, ενώ η δεύτερη είναι εκ κατασκευής εκφυλισμένη με την 6_1^+ . Σε αυτό το σημείο ο υπολογισμός βάσει IBM δίνει $R_{4/2} = 2.288$ και $R_{0/2} = E(0_2^+)/E(2_1^+) = 3.815$. Στο πρότυπο O5-CBS [54] η συνάντηση αυτή της εσωτερικής γραμμής με τη πλευρά του τριγώνου φαίνεται στο $r_\beta = 0.171$, που αντιστοιχεί σε $R_{4/2} = 2.279$ και $R_{0/2} = 3.778$. Χρησιμοποιώντας το δυναμικό του Davidson στο πρότυπο της $E(5)$ [49], η συνάντηση συμβαίνει για $\beta^4 = 10$, οδηγώντας σε $R_{4/2} = 2.291$ και $R_{0/2} = 3.766$. Σημειώνεται ότι και τα τρία πρότυπα δίνουν τις ίδιες προβλέψεις για το σημείο συνάντησης.

Στο πίνακα 3.7 παρουσιάζονται οι ζώνες της βασικής κατάστασης μαζί με τις ενεργειακά χαμηλές 0^+ καταστάσεις των προαναφερθέντων προτύπων. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα επίπεδα της ζώνης της βασικής κατάστασης σταδιακά αποκλίνουν για τα διαφορετικά πρότυπα με την αύξηση της L , αλλά οι εκφυλισμοί των 0^+ με τα αντίστοιχα επίπεδα της ζώνης της βασικής κατάστασης διατηρούνται σε ικανοποιητικό βαθμό.

Σε πλήρη αναλογία με την επιχειρηματολογία του εδαφίου 3.5.1, το σημείο συνάντησης αναμένεται να περιγραφεί ως μια "μέση κατάσταση" μεταξύ του κανόνα L για τη $U(5)$, και του κανόνα $L + \frac{L^2}{6}$



Σχήμα 3.4: (Αριστερά) Η γραμμή του εκφυλισμού μεταξύ των επιπέδων 0_2^+ και 6_1^+ για $N_B = 10, 40, 100$, και 250 στο τρίγωνο του IBM. (Δεξιά) Η γραμμή του εκφυλισμού μεταξύ των επιπέδων 0_3^+ και 10_1^+ για $N_B = 250$ (πάνω) και μεταξύ των $0_4^+, 14_1^+$ για $N_B = 250$ (κάτω). Οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν τη κρίσιμη περιοχή στο IBM που αποκομίζεται στο όριο του μεγάλου μοζονικού πληθυσμού από το φορμαλισμό των συμφώνων καταστάσεων.

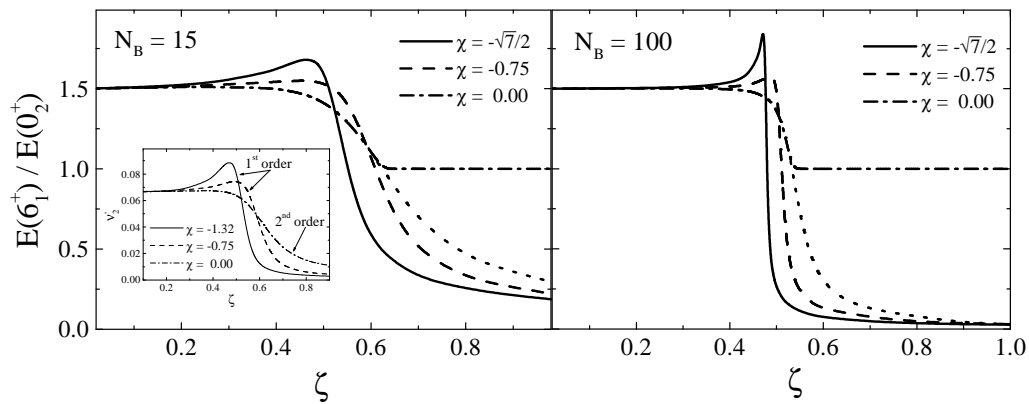
(δηλαδή $L(L + 6)$) για την $O(6)$, που οδηγεί στο κανόνα για τη "μέση κατάσταση" $L(L + 12)$. Στον πίνακα 3.7 παρουσιάζεται επίσης αυτή η συμπεριφορά για λόγους σύγκρισης. Όπως φαίνεται, τα αποτελέσματα του IBM ακολουθούν τον κανόνα σε ικανοποιητικό βαθμό. Ο κανόνας $L(L + 12)$ οδηγεί στην τιμή $R_{4/2} = 2.286$, η οποία είναι αρκετά κοντά στις τιμές που παράγονται στο σημείο συνάντησης από όλα τα προαναφερθέντα πρότυπα.

3.5.5 Κρίσιμο σημείο στην πλευρά $U(5)$ - $O(6)$ του τριγώνου συμμετριών του IBM

Το κρίσιμο σημείο στην πλευρά $U(5)$ - $O(6)$ είναι ήδη γνωστό ότι ανταποκρίνεται στο πρότυπο $E(5)$ - β^4 [52, 53], όπως αναμένεται από τη θεωρία μετατροπών φάσης του Landau [170, 171]. Το φάσμα του $E(5)$ - β^4 , που φαίνεται στο πίνακα 3.8, αναπαράγεται σε πολύ καλή ακρίβεια από υπολογισμό του IBM με $N = 250$, $\zeta = 0.4975$, και $\chi = 0$. Το κρίσιμο σημείο, το οποίο δίνεται στη γραμμή $\chi = 0$ από τη σχέση $\zeta_{crit} = N/(2N - 2)$ [150], για $N = 250$ είναι 0.502. Το γεγονός ότι τα αποτελέσματα του $E(5)$ - β^4 , ανταποκρινόμενα στο $N \rightarrow \infty$, λαμβάνονται για τιμή του ζ ελαφρώς μικρότερη από την κρίσιμη τιμή, οφείλεται στην πεπερασμένη τιμή του N που χρησιμοποιείται εδώ. Πράγματι, στην [53], όπου έγιναν υπολογισμοί έως και $N=10,000$, φαίνεται ότι (για μεγάλο N) ο $R_{4/2}$ είναι μια ελαφρώς φθίνουσα συνάρτηση του N . Άρα μια αύξηση του N πάνω από το 250 θα οδηγούσε σε μια ελαφρώς μικρότερη τιμή για τον $R_{4/2}$ για τιμή του ζ_{crit} πλησιέστερα στη 0.5.

Σημειώνεται ότι στην [53] το μεγάλο N στους υπολογισμούς του IBM (μέχρι $N = 10,000$) πραγματοποιήθηκε από τη διαγωνοποίηση μέσα σε υποχώρους της αρχαιότητας (seniority), που είναι έγκυρη κατά μήκος της ολοκληρώσιμης γραμμής $U(5)-O(6)$, η οποία φιλοξενεί την $O(5)$ σε όλο το μήκος της. Τα αποτελέσματα του IBM εδώ παρήχθησαν χρησιμοποιώντας τον κώδικα IBAR[160], φτάνουν έως το $N = 250$, αλλά μπορούν να καλύψουν ολόκληρο το τρίγωνο συμμετριών του IBM. Άρα το γεγονός ότι ο κώδικας IBAR αναπαράγει σωστά την κρίσιμη συμπεριφορά στη πλευρά $U(5)-O(6)$, συνιστά έναν επιτυχημένο έλεγχο για αυτόν.

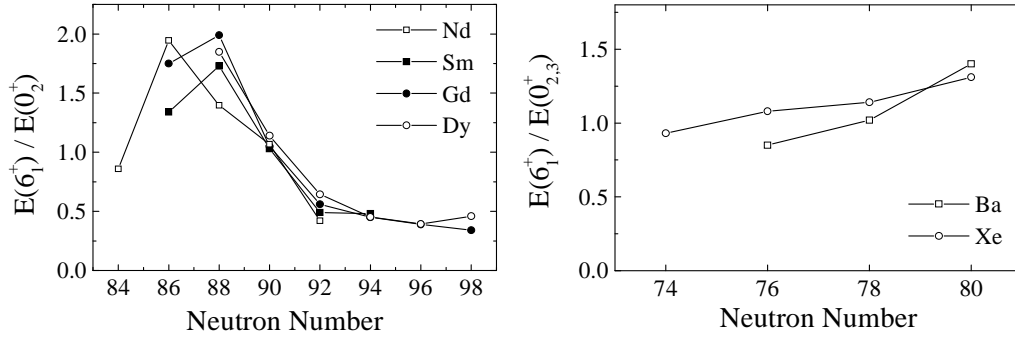
3.6 Μια εμπειρική παράμετρος τάξης



Σχήμα 3.5: Ο λόγος $E(6_1^+)/E(0_2^+)$ ως συνάρτηση της ζ για τρεις τιμές του χ για (α) $N_B = 15$ και (β) $N_B = 100$. Η τιμή για το (α) δείχνει την αντίστοιχη συμπεριφορά για ν'_2 [157].

Ο ενεργειακός λόγος $E(6_1^+)/E(0_2^+)$ [165], που σχετίζεται με τους προαναφερθέντες εκφυλισμούς, αποδεικνύεται ότι είναι μια απλή, εμπειρική παράμετρος τάξης ικανή να διαχωρίσει την πρώτη από τη δεύτερη τάξη μιας μεταβολής φάσης. Πράγματι, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.5, ο λόγος αυτός φανερώνει την ίδια συμπεριφορά όπως η παράμετρος τάξης ν'_2 , η οποία χρησιμοποιείται στην [157]. Για $\chi = -\sqrt{7}/2$ φαίνεται ότι συμβαίνει μια μεταβολή φάσης πρώτης τάξης, ενώ για $\chi = 0$ η εν λόγω μεταβολή φαίνεται ως δεύτερης τάξης. Ο λόγος εκδηλώνει επίσης ένα απότομο ελάχιστο μόλις πριν από το κρίσιμο σημείο στη πρώτη περίπτωση (με το φαινόμενο να γίνεται εμφανέστερο για μεγάλο μοζονικό πληθυσμό), ενώ στη δεύτερη περίπτωση η συμπεριφορά είναι ήπια, δηλαδή χωρίς απότομα τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα.

Τα πειραματικά δεδομένα στη περιοχή των ισοτόπων $N = 90$, τα καλύτερα εμπειρικά παραδείγματα για την $X(5)$ [98, 99, 104, 105, 172], εκδηλώνουν ένα καθαρό μέγιστο ακριβώς πριν το $N = 90$, όπως πράγματι φαίνεται στην εικόνα 3.6(α), σε συμφωνία με την αναμενόμενη συμπεριφορά για μια μεταβολής φάσης πρώτης τάξης. Από την άλλη, τα πειραματικά δεδομένα γύρω από το ^{134}Ba , το καλύτερο παράδειγμα για την $E(5)$ [64, 172], δείχνουν στην εικόνα 5(β) την ήπια συμπεριφορά που αναμένεται για μια μεταβολή φάσης δεύτερης τάξης.



Σχήμα 3.6: (α) Ο πειραματικός λόγος $E(6_1^+)/E(0_2^+)$ συναρτήσει του αριθμού νετρονίων για τα ισότοπα των Nd, Sm, Gd, και Dy. (β) Το αυτό για τα ισότοπα των Xe και Ba. Για μικρότερους αριθμούς νετρονίων, η κατάσταση 0_3^+ λαμβανόταν υπόψη στον λόγο, αν οι δικές της διασπάσεις $B(E2)$ ήταν συμβατές με κατάσταση $\sigma = N - 2$. Αυτό αντιστοιχεί σε $N=74$ στο Xe και $N=76,78$ στο Ba. Ο νετρονικός αριθμός του σθένους (οπές) αυξάνει προς στα αριστερά.

3.7 Εξέλιξη μορφών στη πλευρά U(5)-SU(3)

Στην πλευρά U(5)-SU(3), η οποία αντιστοιχεί σε $\chi = -\sqrt{7}/2$, το κρίσιμο σημείο βρίσκεται στο [159] $\zeta_{crit} = 16N/(34N - 27)$. Στην παρούσα περίπτωση, όπου $N = 250$, έχουμε $\zeta_{crit} = 0.4721$. Στο πίνακα 3.9 φαίνονται διάφορες ποσότητες, όπως οι ενεργειακοί λόγοι $0_3/0_2$, $0_4/0_2$, $0_5/0_2$, $R_{4/2} = \frac{E(4_1) - E(0_1)}{E(2_1) - E(0_1)}$, $R_\beta = \frac{E(4_\beta) - E(0_\beta)}{E(2_\beta) - E(0_\beta)}$, και η ενεργειακή διαφορά $2_\beta - 0_\beta$ κανονικοποιημένη στη $E(2_1^+)$. Έχουν θέση τα παρακάτω σχόλια.

1) Οι ενεργειακοί λόγοι $0_3/0_2$, $0_4/0_2$, $0_5/0_2$ δείχνουν ένα απότομο μέγιστο ακριβώς στο κρίσιμο σημείο, επομένως είναι καλοί σηματοδότες της κρίσιμης συμπεριφοράς. Ακόμη, στα όρια U(5) και SU(3) εκδηλώνουν περίπου γραμμική αύξηση (2, 3, 4), όπως αναμένεται από τον πίνακα 3.1 .

2) Η διαφορά $2_\beta - 0_\beta$ εκδηλώνει απότομο μέγιστο αμέσως μετά το κρίσιμο σημείο. Άρα δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι ο R_β δείχνει ελάχιστο αμέσως πριν το κρίσιμο σημείο. Αμφότεροι οι δύο λόγοι $R_{4/2}$ και R_β πλησιάζουν την οριακή τιμή 2.0 κοντά στην U(5), και την αντίστοιχη τιμή 3.333 κοντά στην SU(3), όπως αναμένεται. Αυτές οι τιμές επιβιώνουν αρκετά σε όλο το μονοπάτι προς το κρίσιμο σημείο, αναδύοντας το φαινόμενο της ημι-δυναμικής συμμετρίας (quasidynamical symmetry), όπως έχει ήδη συζητηθεί στην [141].

3.8 Εξέλιξη των μορφών στη πλευρά U(5)-O(6)

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κατά μήκος της πλευράς U(5)-O(6) ($\chi = 0$), και για $N = 250$, η ζ παίρνει την τιμή $\zeta_{crit} = 0.502$. Οι ποσότητες (κανονικοποιημένες στη $E(2_1^+)$) $0_3/0_2$, $0_4/0_2$, $R_{4/2} = \frac{E(4_1) - E(0_1)}{E(2_1) - E(0_1)}$, $R_\beta = \frac{E(4_\beta) - E(0_\beta)}{E(2_\beta) - E(0_\beta)}$, και $2_\beta - 0_\beta$, παρουσιάζονται στον πίνακα 3.10 . Έχουν θέση τα παρακάτω σχόλια.

1) Οι ενεργειακοί λόγοι $0_3/0_2$ και $0_4/0_2$ δείχνουν ένα μέγιστο ακριβώς μετά το κρίσιμο σημείο. Τα μέγιστα παραμένουν καλοί σηματοδότες της κρίσιμης συμπεριφοράς, αν είναι κατά πολύ λιγότερο απότομα σε σύγκριση με τη περίπτωση U(5)-SU(3), όπως άλλωστε αναμένεται, αφού στη παρούσα περίπτωση η μετατροπή φάσης είναι δεύτερης και όχι πρώτης τάξης. Σε αμφότερα τα όρια U(5) και

$O(6)$ εκδηλώνουν περίπου γραμμική αύξηση (2, 3), όπως αναμένεται από τον πίνακα 3.2 .

2) Στα $2_\beta - 0_\beta$ και R_β έχει ληφθεί υπόψη ότι οι 0_2^+ και 0_3^+ συναντιούνται στο $\zeta = 0.5181$, όπως φαίνεται στον πίνακα 3.7 και το εδάφιο 2.5.4 . Κάτω από το $\zeta = 0.5181$, η ζώνη β_1 ανταποκρίνεται στο $\xi = 2$, ενώ πάνω από το $\zeta = 0.5181$ ανταποκρίνεται στο $\xi = 1$.

3) Οι $2_\beta - 0_\beta$, $R_{4/2}$, και R_β εκδηλώνουν μian απότομη αύξηση στη γειτονιά του κρίσιμου σημείου, αλλά όχι μέγιστα. Αυτή είναι η αναμενόμενη συμπεριφορά για μια μεταβολή φάσης δεύτερης τάξης. Ο λόγος $R_{4/2}$ προσεγγίζει την οριακή τιμή 2.0 κοντά στην $U(5)$, και την οριακή τιμή 2.5 κοντά στην $O(6)$, όπως αναμένεται.

Ο R_β πλησιάζει την οριακή τιμή 2.0 κοντά στην $U(5)$, και την οριακή τιμή 2.2 κοντά στην $O(6)$, όπως αναμένεται, λαμβάνοντας υπόψη στην τελευταία ότι οι 4_β , 2_β , και 0_β είναι εκφυλισμένες με τις καταστάσεις 10_1 , 8_1 , και 6_1 αντίστοιχα. Οι εν λόγω τιμές επιβιώνουν αρκετά στο μονοπάτι που οδηγεί στο κρίσιμο σημείο, αντανακλώντας έτσι την αντίστοιχη ημι-δυναμική συμμετρία (quasidynamical symmetry), όπως έχει ήδη αναλυθεί στις [167, 168].

3.9 Εν κατακλείδι

Εν κατακλείδι, στο όριο του μεγάλου μποζονικού πληθυσμού στο IBM αποκαλύπτονται πολλές κανονικότητες για τις καταστάσεις 0^+ . Η συμπεριφορά των εγγύτερων 0^+ στο κρίσιμο σημείο της μεταβολής φάσης πρώτης τάξης είναι πολύ κοντά στην αντίστοιχη συμπεριφορά των 0^+ που λαμβάνονται από τις συμμετρίες κρίσιμου σημείου στη χαμιλτονιανή του Bohr. Οι εκφυλισμοί των 0^+ με καταστάσεις μη μηδενικής στροφορμής, φαίνεται ότι χαρακτηρίζουν την περιοχή συνύπαρξης φάσεων, η οποία διαχωρίζει τη σφαιρική από την παραμορφωμένη συμπεριφορά. Αντίθετα, οι λόγοι ενεργειακών ζευγών από τέτοιες καταστάσεις όπως ο $E(6_1^+)/E(0_2^+)$, λειτουργούν ως παράμετροι για το διαχωρισμό της πρώτης από τη δεύτερη τάξη. Όλοι οι αναφερθέντες εκφυλισμοί καλούν για τη διερεύνηση της υποβόσκουσας συμμετρίας που τους γεννά.

Πίνακας 3.6: Οι προβλεψεις του ESD [184] στο σημείο $0_2^+ = 6_1^+$ ($\beta_0^4 + 3C = 4$) συγκρινόμενες με τις εκτιμήσεις των προτύπων X(5)- β^6 [87], X(5)- β^8 [87], και X(5) [36], όπως επίσης και με αυτές της αριθμητικής λύσης του Caprio [169] για $a = 150, 200$.

L	ES-D	L	ES-D	L	β^6	L	β^6
0	0.000	0_1	0.000	0	0.000	0_1	0.000
2	1.000			2	1.000		
4	2.939			4	2.824		
6	5.372	0_2	5.372	6	5.125	0_2	4.816
8	8.058			8	7.777		
10	10.882	0_3	10.745	10	10.721	0_3	10.823
12	13.786			12	13.922		
14	16.740	0_4	16.117	14	17.359	0_4	17.831
16	19.729			16	21.013		
18	22.740	0_5	21.489	18	24.871	0_5	
20	25.769			20	28.923		
L	β^8	L	β^8	L	X(5)	L	X(5)
0	0.000	0_1	0.000	0	0.000	0_1	0.000
2	1.000			2	1.000		
4	2.852			4	2.904		
6	5.230	0_2	5.091	6	5.430	0_2	5.649
8	8.015			8	8.483		
10	11.151	0_3	11.758	10	12.027	0_3	14.119
12	14.605				16.041		
14	18.355	0_4	19.781		20.514	0_4	25.414
16	22.383				25.437		
18	26.677	0_5			30.804	0_5	
20	31.225				36.611		
L	150	L	150	L	200	L	200
0	0.00	0_1	0.00	0	0.00	0_1	0.00
2	1.00			2	1.00		
4	2.64			4	2.76		
6	4.72	0_2	4.83	6	5.06	0_2	5.66
8	7.17			8	7.79		
10	9.94	0_3	8.70	10	10.90	0_3	10.94

Πίνακας 3.7: Εκτιμήσεις για το σημείο $0_2^+ = 6_1^+$ στην πλευρά U(5)-O(6) μέσω του IBM ($N = 250$, $\zeta = 0.5181$, $\chi = 0$), του προτύπου E(5)-D ($\beta_0^4 = 10$), και του O(5)-CBS [54] ($r_\beta = 0.171$). Οι $L(L + 12)$ δείχνονται επίσης για λόγους σύγκρισης.

L	$L(L + 12)$	IBA	L	IBA	L	E(5)-D	L	E(5)-D	L	CBS	L	CBS
0	0.000	0.000	0_1	0.000	0	0.000	0_1	0.000	0	0.000	0_1	0.000
2	1.000	1.000			2	1.000			2	1.000		
4	2.286	2.288			4	2.291			4	2.279		
6	3.857	3.815	0_2	3.815	6	3.766	0_2	3.766	6	3.778	0_2	3.778
8	5.714	5.546			8	5.355						
10	7.857	7.457	0_3	8.122	10	7.020	0_3	7.531				
12	10.286	9.533			12	8.735						
14	13.000	11.758	0_4	13.075	14	10.486	0_4	11.297				
16	16.000	14.122			16	12.262						
18	19.286	16.615			18	14.057	0_5	15.062				
20	22.857	19.230			20	15.866						

Πίνακας 3.8: Εκτιμήσεις του E(5)- β^4 [52, 53, 41], και του IBM με $N = 250$ στην πλευρά U(5)-O(6) ($\chi = 0$) για $\zeta = 0.4975$ και για $\zeta_{crit} = 0.502$.

L	β^4	0.4975	0.502	L	β^4	0.4975	0.502
$\xi = 1$				$\xi = 2$			
0	0.000	0.000	0.000	0	2.390	2.384	2.516
2	1.000	1.000	1.000	2	3.625	3.628	3.815
4	2.093	2.102	2.128	4	4.918	4.940	5.194
6	3.265	3.291	3.364	6	6.266	6.314	6.650
8	4.508	4.559	4.695	8	7.666	7.749	8.178
10	5.813	5.898	6.112	10	9.115	9.241	
12	7.176	7.303	7.608	$\xi = 3$			
14	8.592	8.769	9.177	0	5.153	5.158	5.484
16	10.057	10.292		2	6.563	6.587	7.006
18	11.569	11.870	12.515	4	8.015	8.067	8.587
20	13.124	13.499		6	9.509	9.569	10.227
$\xi = 4$				8	11.043	11.174	
0	8.213	8.246	8.821	10	12.617	12.801	

Πίνακας 3.9: Η εξέλιξη των $0_3/0_2$, $0_4/0_2$, $0_5/0_2$, $R_{4/2} = \frac{E(4_1)-E(0_1)}{E(2_1)-E(0_1)}$, $2_\beta - 0_\beta$, $R_\beta = \frac{E(4_\beta)-E(0_\beta)}{E(2_\beta)-E(0_\beta)}$ κατά μήκος της πλευράς U(5)-SU(3) ($\chi = -\sqrt{7}/2$), για N=250 στο τρίγωνο συμμετριών του IBM.

ζ	$0_3/0_2$	$0_4/0_2$	$0_5/0_2$	$R_{4/2}$	$2_\beta - 0_\beta$	R_β
0.1	2.001	3.005	4.007	2.0003	1.001	2.001
0.2	2.002	3.015	4.021	2.0006	1.002	2.007
0.3	2.003	3.047	4.055	2.0002	1.003	2.026
0.35	2.003			1.999	1.002	2.059
0.4	2.003	3.232	4.219	1.991	0.999	2.157
0.425	2.010			1.977	0.993	2.303
0.45	2.167	3.581	4.691	1.925	0.999	2.633
0.46	2.410			1.847	1.119	2.415
0.47	2.667	4.712	7.090	1.557	2.878	2.259
0.4721	4.020	7.660	11.971	2.553	5.191	1.710
0.4725	3.241	6.127	9.539	2.827	6.048	1.697
0.473	2.482	4.615	7.127	3.041	6.362	1.705
0.474	1.699	3.024		3.218	5.326	1.811
0.475	1.415	2.359		3.274	3.485	2.125
0.48	1.812	2.232		3.320	1.298	3.278
0.5	1.961	2.880	3.752	3.331	1.082	3.329
0.55	1.985	2.955	3.909	3.333	1.028	3.333
0.6	1.990	2.783	3.756	3.333	1.016	3.332
0.7	1.992	2.434	3.415	3.333	1.006	3.336
0.8	1.993	2.980	3.960	3.333	1.004	3.332
0.9	1.994	2.981	3.962	3.333	1.001	3.334

Πίνακας 3.10: Η εξέλιξη των λόγων $0_3/0_2$, $0_4/0_2$, $R_{4/2} = \frac{E(4_1)-E(0_1)}{E(2_1)-E(0_1)}$, $2_\beta - 0_\beta$, $R_\beta = \frac{E(4_\beta)-E(0_\beta)}{E(2_\beta)-E(0_\beta)}$ κατά μήκος της πλευράς U(5)-O(6) ($\chi = 0$) του τριγώνου συμμετριών του IBM N=250.

ζ	$0_3/0_2$	$0_4/0_2$	$R_{4/2}$	$2_\beta - 0_\beta$	R_β
0.1	2.001	3.003	2.001	1.001	2.000
0.2	2.003	3.009	2.001	1.003	2.001
0.3	2.007	3.021	2.003	1.007	2.003
0.4	2.021	3.061	2.009	1.022	2.007
0.45	2.048	3.141	2.020	1.052	2.017
0.46	2.060	3.174	2.026	1.067	2.021
0.47	2.077	3.221	2.034	1.088	2.026
0.48	2.101	3.287	2.048	1.122	2.033
0.49	2.134	3.378	2.072	1.178	2.043
0.4925	2.144	3.404			
0.4950	2.154	3.432	2.090	1.220	2.049
0.4975	2.164	3.459	2.102	1.244	2.055
0.500	2.173	3.486			
0.502	2.180	3.506	2.128	1.299	2.062
0.51	2.186	3.541	2.195	1.421	2.086
0.52	2.106	3.374	2.312	1.793	2.110
0.525	2.037	3.202	2.368	1.954	2.125
0.527	2.010	3.131	2.388	2.015	2.130
0.53	1.977	3.031	2.413	2.097	2.139
0.55	1.940	2.820	2.482	2.387	2.177
0.6			2.498	2.488	2.196

Κεφάλαιο 4

Ανασκόπηση στο πλαίσιο της θεωρίας ομάδων

Ό,τι προηγήθηκε μετά την εισαγωγή του προτύπου των αλληλεπιδρώντων μποζονίων, ήταν η αριθμητική μελέτη της κρίσιμης περιοχής του IBM και των αντίστοιχων λύσεων της χαμιλτονιανής του Bohr στα κρίσιμα σημεία. Η ενοποίηση των θεωριών που περιγράφουν τα εκάστοτε φυσικά συστήματα αποτελεί μια πάγια μέθοδο εργασίας στη φυσική. Με αφετηρία τις σημάνσεις της αριθμητικής μεθόδου, σε αυτό το μικρό κεφάλαιο συζητάται πιθανό κοινό θεωρητικό υπόβαθρο των διαφόρων λύσεων της χαμιλτονιανής του Bohr και των αντίστοιχων ορίων του IBM στο πλαίσιο της θεωρίας ομάδων. Η ενοποίηση παραμένει ένα ανοιχτό πρόβλημα.

4.1 Συστολές

Το πρότυπο των αλληλεπιδρώντων μποζονίων (IBM) [14] φιλοξενεί τρεις αλυσίδες αλγεβρών

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset SO(3) \supset SO(2), \quad \text{IBM - I}, \quad (4.1)$$

$$U(6) \supset SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2), \quad \text{IBM - II}, \quad (4.2)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset SO(3) \supset SO(2), \quad \text{IBM - III}, \quad (4.3)$$

που αναφέρονται και ως όρια $U(5)$, $SU(3)$, $O(6)$ αντίστοιχα, και ανταποκρίνονται σε δονητικούς, περιστροφικούς και ασταθείς κατά γ πυρήνες.

Από την άλλη, το πρότυπο του Bohr (BM) [37] επίσης φιλοξενεί τρεις αλυσίδες υποαλγεβρών [173, 174, 175],

$$[HW(5)]U(5) \supset U(5) \supset O(5) \supset SO(3) \supset SO(2), \quad \text{BM - I}, \quad (4.4)$$

$$[HW(5)]U(5) \supset [R^5]SO(5) \supset [R^5]SO(3) \supset SO(3) \supset SO(2), \quad \text{BM - II}, \quad (4.5)$$

$$[HW(5)]U(5) \supset [R^5]O(5) \supset O(5) \supset SO(3) \supset SO(2), \quad \text{BM - III} \quad (4.6)$$

όπου $HW(5)$ είναι η ομάδα Heisenberg–Weyl του 5-διάστατου αρμονικού ταλαντωτή, και η $[R^5]O(5)$ γεννάται από τους γεννήτορες της $O(5)$ και τις 5 συντεταγμένες.

Οι τρεις αλυσίδες εδώ ανταποκρίνονται σε σφαιρικό αρμονικό ταλαντωτή, συμπαγή περιστροφή και το πρότυπο του ευσταθούς κατά β , ασταθούς κατά γ πυρήνα των Wilets και Jean [38] αντίστοιχα.

Οι αλυσίδες του IBM συστέλλονται στις αντίστοιχες των BM μέσω των συστολών İnönü–Wigner [176] με τους ακόλουθους τρόπους:

1) Η IBM-I συστέλλεται στη BM-I μέσω της $U(6) \rightarrow [HW(5)]U(5)$ [174].

2) Η IBM-II συστέλλεται στη BM-II μέσω της $SU(3) \rightarrow [R^5]SO(3)$ [173, 177], όπου η $[R^5]SO(3)$ είναι η άλγεβρα του συμπαγούς περιστροφής [178], που γεννάται από τους τελεστές της $SO(3)$ και τις 5 συντεταγμένες.

3) Η IBM-III συστέλλεται στη BM-III μέσω της $O(6) \rightarrow [R^5]SO(5)$ [179, 180].

Η $[R^5]SO(5)$ διαφέρει από την ευκλείδεια άλγεβρα $E(5) = T_5 \oplus_s SO(5)$ [97], με τη πρώτη να γεννάται από τους τελεστές της $SO(5)$ και τις συντεταγμένες, και τη δεύτερη να γεννάται από τους τελεστές της $SO(5)$ και τις ορμές [181]. Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις τους είναι όμοιες [179, 182].

4.2 E(5)

Στο πρότυπο $E(5)$ [35], χρησιμοποιείται η άλγεβρα $E(5) = T_5 \oplus_s SO(5)$ [181]. Ο χωρισμός των μεταβλητών είναι ακριβής, εφόσον το δυναμικό εξαρτάται μονάχα από τη μεταβλητή β και όχι τη γ . Μετά το χωρισμό των μεταβλητών, η ακτινική εξίσωση περιέχει ένα φυγόκεντρο όρο $\tau(\tau + 3)/\beta^2$, όπου $\tau(\tau + 3)$ οι ιδιοτιμές του τελεστή Casimir της $SO(5)$ [38]. Απουσία δυναμικού, ή ισοδύναμα παρουσία ενός άπειρου τετραγωνικού πηγαδιού (με όλους τους τελεστές να περιορίζονται στην περιοχή απουσίας δυναμικού) οι γεννήτορες της T_5 και $SO(5)$ μετατίθενται με τη χαμιλτονιανή εξαιτίας της ομοιογένειας και ισοτροπίας του 5-διάστατου χώρου, και επομένως αναγνωρίζονται ως οι τελεστές Casimir της $E(5)$ [181]. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ η $O(6)$ της αλυσίδας IBM-III συστέλλεται στην $[R^5]SO(5)$ της BM-III, η αντίστοιχη συμμετρία του κρίσιμου σημείου στο πλαίσιο των BM είναι η $T_5 \oplus_s SO(5)$. Πράγματι όπως φαίνεται στην [145], το πλήρες σύνολο των ιδιοτιμών ενέργειας του προτύπου $E(5)$ και της $T_5 \oplus_s SO(5)$ συμπίπτουν πλήρως.

4.3 X(5)

Θα ακολουθηθούν τα ίδια βήματα για την περίπτωση του προτύπου $X(5)$ [36]. Δεδομένου ότι στην $X(5)$ ο χωρισμός των μεταβλητών είναι κατά προσέγγιση, αντί αυτού θα αναλυθεί το πρότυπο ES- $X(5)$ [94], όπου ο χωρισμός των μεταβλητών είναι ακριβής. Μετά το χωρισμό των μεταβλητών η ακτινική εξίσωση περιέχει ένα φυγόκεντρο όρο $L(L + 1)3/\beta^2$, με $L(L + 1)$ να είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της $SO(3)$. Περιέχει επίσης τον όρο λ/β^2 , όπου λ η σταθερά χωρισμού είναι $\lambda = 3c(n_\gamma + 1) - K^2/3$. Τα αποτελέσματα της $X(5)$ αναπαράγονται πλήρως για $\lambda = 0$, δηλαδή για $c = 0$ και $K = 0$, με την πρώτη να είναι προβληματική, καθώς προκειμένου να επιτευχθεί ο χωρισμός των μεταβλητών έγινε η υπόθεση ότι το δυναμικό είναι της μορφής $u(\gamma) = (3c)^2\gamma^2/2$ και μάλιστα με τοιχώματα που αυξάνουν απότομα. Αν δεν υπήρχε αυτό το πρόβλημα, τότε στην περίπτωση μηδενικού δυναμικού β , ή ενός άπειρου τετραγωνικού πηγαδιού στη μεταβλητή β (ξανά, με όλους τους τελεστές να περιορίζονται στη περιοχή όπου το δυναμικό είναι μηδενικό), θα ανέμενε κανείς τη μετάθεση των γεννητόρων της T_5 και της $SO(3)$, εξαιτίας της ομοιογένειας του χώρου των 5 διαστάσεων και της ισοτροπίας του χώρου των 3 διαστάσεων. Το ES- $X(5)$ τότε θα μπορούσε να αναγνωριστεί ως

$T_5 \oplus_s SO(3)$.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η $SU(3)$ της αλυσίδας IBM-II συστέλλεται στην $[R^5]SO(3)$ της BM-II. Σε πλήρη αναλογία, αναμένεται η αντίστοιχη συμμετρία κρίσιμου σημείου στο πλαίσιο του BM να είναι $T_5 \oplus_s SO(3)$. Ωστόσο το επιχείρημα αυτό δε φαίνεται να στέκει, καθώς το $1/\beta^2$ δεν είναι αναλλοίωτο ως προς τις μετατοπίσεις [179, 181]. Όμως, για $L = 0$ ο φυγόκεντρος όρος απουσιάζει και σε αυτή την περίπτωση ανακαλείται η εγκυρότητά του. Αυτό το συμπέρασμα βρίσκεται σε συμφωνία με τα ευρήματα της [145], όπου οι καταστάσεις με $L = 0$ έχουν βρεθεί να ικανοποιούν τη συμμετρία $E(5) = T_5 \oplus_s SO(5)$ και επομένως τη συμμετρία της υποάλγεβράς της, $T_5 \oplus_s SO(3)$.

4.4 X(3)

Τα συμπεράσματα αυτά φαίνεται να ενδυναμώνονται από την ανάλυση του προτύπου $X(3)$ [96], όπου ο χωρισμός των μεταβλητών είναι ακριβής. Μετά το χωρισμό των μεταβλητών, η ακτινική εξίσωση περιέχει ένα φυγόκεντρο όρο $L(L+1)3/\beta^2$, όπου $L(L+1)$ οι ιδιοτιμές του τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της $SO(3)$. Τότε η μετάθεση των γεννητόρων της T_3 και της $SO(3)$ με τη χαμιλτονιανή είναι αναμενόμενη, λόγω της ομοιογένειας και της ισοτροπίας του χώρου των 3 διαστάσεων. Η $X(3)$ θα μπορούσε τότε να αναγνωριστεί ως η $T_3 \oplus_s SO(3)$, δηλαδή η $E(3)$. Ωστόσο όπως και στην [145], ένα τέτοιο συμπέρασμα είναι έγκυρο μονάχα για $L = 0$.

4.5 E(5)-D

Εδώ θα συζητηθεί η χρήση του δυναμικού Davidson στο πρότυπο του Bohr. Όπως αναφέρεται στην [183], η χαμιλτονιανή του Bohr για την περίπτωση της αστάθειας κατά γ με το δυναμικό Davidson χαρακτηρίζεται από τη συμμετρία $SU(1,1) \times SO(5)$. Ακόμη, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το δυναμικό Davidson δίνει γραμμική αύξηση για τις στάθμες 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών (bandheads). Άρα δεν πρέπει να αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι η χρήση του δυναμικού Davidson καθιστά εφικτή την προσέγγιση αμφοτέρων των ορίων, της δονητικής συμπεριφοράς για $\beta_0 = 0$ και της ασταθούς κατά γ για $\beta_0 \rightarrow \infty$, αφού και τα δύο μοιράζονται την υποάλγεβρα $SO(5)$. Τα αντίστοιχα όρια του IBM, $U(5)$ και $O(6)$, επίσης οδηγούν (για μεγάλο μοζονικό πληθυσμό N) σε μια γραμμική αύξηση των σταθμών 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών bandheads, όπως φαίνεται στο εδάφιο 3.4.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, το δυναμικό Davidson δε μπορεί να δώσει το κρίσιμο σημείο της αντίστοιχης μετατροπής φάσης για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων, καθώς η συμπεριφορά των σταθμών 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών bandheads δε συμφωνεί με εκείνη του κρίσιμου σημείου. Η διαπίστωση αυτή βρίσκεται σε συμφωνία με τα ευρήματα των [52, 53], σύμφωνα με τα οποία το κρίσιμο σημείο της μεταβολής φάσης δεύτερης τάξης $U(5)$ - $O(6)$ ανταποκρίνεται στο πρότυπο $E(5)$ - β^4 . Επίσης βρίσκεται σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις της [49], όπου η $E(5)$ αναδύεται από το δυναμικό Davidson μονάχα μέσω της μεθόδου των μεταβολών και οδηγεί σε διαφορετική τιμή της παραμέτρου β_0 για κάθε τιμή του L . Εν αντιθέσει, το $O(5)$ -CBS δίνει το $E(5)$ στο όριο του $r_\beta = 0$, αλλά στο όριο του $r_\beta \rightarrow 1$ (εξαιρετικά στενό πηγάδι) παράγει φάσμα των 0^+ ανάλογο του $n(n+2)$, το οποίο δε βρίσκεται σε συμφωνία με την $O(6)$ για μεγάλα N .

4.6 ESD

Παρόμοια σχόλια εφαρμόζονται και στη χρήση του δυναμικού Davidson στην περίπτωση $\gamma \approx 0$, δηλαδή στο πρότυπο ES-D [184]. Στα όρια $\beta_0 = 0$ και $\beta_0 \rightarrow \infty$, λαμβάνονται αντίστοιχα το πρότυπο $X(5)-\beta^2$ [87] και το πρότυπο του συμπαγούς περιστροφέα. Το πρώτο εκδηλώνει ένα γραμμικό φάσμα για τις στάθμες 0^+ οι οποίες είναι επικεφαλείς ζωνών (bandheads) λόγω του δονητικού δυναμικού, ενώ το δεύτερο αντιστοιχεί στο όριο της $SU(3)$ του IBM για μεγάλα N , το οποίο όπως έχει ήδη φανεί από το εδάφιο 3.4, επίσης εκδηλώνει γραμμικό φάσμα για τις 0^+ .

Στο κρίσιμο σημείο αναμένεται φάσμα τύπου $n(n+3)$ για τις καταστάσεις 0^+ , όπως και στην $X(5)$. Το εν λόγω φάσμα δεν είναι εφικτό να γεννηθεί από το δυναμικό Davidson για οποιαδήποτε τιμή του β_0 , αλλά μονάχα από μια διαδικασία μεταβολών που οδηγεί σε διαφορετική τιμή για το β_0 για κάθε L [49]. Το κρίσιμο σημείο επίσης προσεγγίζεται από την οικογένεια των προτύπων $X(5)-\beta^{2m}$ [87], η οποία περιέχει δυναμικά τα οποία προσεγγίζουν βαθμιαία το άπειρο πηγάδι δυναμικού για μεγάλο n . Σε αντίθεση, το CBS δίνει το $X(5)$ στο όριο του $r_\beta = 0$, αλλά στο όριο του $r_\beta \rightarrow 1$ (εξαιρετικά στενό πηγάδι) γεννά για τις 0^+ συμπεριφορά τύπου $n(n+2)$, η οποία δεν βρίσκεται σε συμφωνία με την $SU(3)$ για μεγάλο N .

4.7 Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι:

- 1) Η μαθηματική φύση της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$ παραμένει άγνωστη.
- 2) Δεν έχει βρεθεί ακόμη λύση της χαμιλτονιανής του Bohr ικανή να περιγράψει τη κρίσιμη περιοχή όπως επίσης και τις περιοχές που τη περιβάλλουν.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήθηκαν αριθμητικά οι αλλαγές φάσης/σχήματος στα πλαίσια του Interacting Boson Model, εστιάζοντας την προσοχή σε εκφυλισμούς που παρουσιάζονται στις περιοχές αυτές και στον εντοπισμό συμμετριών που οι εκφυλισμοί αυτοί υποκρύπτουν.

Οι αλλαγές φάσης/σχήματος έχουν προσελκύσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον την τελευταία δεκαετία, μια και εμφανίζονται στα πλαίσια τόσο του αλγεβρικού Interacting Boson Model (πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων), όσο και του συλλογικού προτύπου του Bohr, που αποτελούν δύο συμπληρωματικούς τρόπους περιγραφής της δομής των ατομικών πυρήνων, οι οποίοι παρουσιάζουν ποικιλία σχημάτων και δομών, από σφαιρικούς (δονητικούς) μέχρι ελλειψοειδείς εκ περιστροφής (παραμορφωμένους) πυρήνες, καθώς και πυρήνες επιρρεπείς σε τριαξονικές παραμορφώσεις (γ-ασταθείς). Οι αλλαγές φάσης/σχήματος προκύπτουν ως αποτέλεσμα της βαθμιαίας πρόσθεσης ζευγών νετρονίων στους ατομικούς πυρήνες και έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά.

Οι θεμελιώδεις έννοιες της πυρηνικής δομής και τα βασικά πρότυπα περιγράφηκαν στο πρώτο κεφάλαιο. Αλλαγές φάσης/σχήματος μελετήθηκαν στα πλαίσια του συλλογικού προτύπου του Bohr στο δεύτερο κεφάλαιο, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο μελετήθηκαν στα πλαίσια του Interacting Boson Model. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί έγιναν με χρήση του κώδικα IBAR, ο οποίος αναπτύχθηκε πρόσφατα στο Πανεπιστήμιο Yale και επιτρέπει υπολογισμούς για μεγάλους (μέχρι 400) αριθμούς μποζονίων, που είναι απαραίτητοι για τη μελέτη αυτών των φαινομένων. Μια σύντομη επισκόπηση της αλγεβρικής δομής των σχετικών προτύπων έγινε στο τέταρτο κεφάλαιο, με σκοπό τον εντοπισμό προβλημάτων που παραμένουν ανοιχτά.

Τα σπουδαιότερα αποτελέσματα στην κρίσιμη περιοχή του Interacting Boson Model συνοψίζονται ως εξής:

1) Οι καταστάσεις 0^+ εμφανίζουν κανονική συμπεριφορά (αύξηση ως $n(n+3)$, όπου n η τάξη τους), ίδια με αυτή που εντοπίστηκε αναλυτικά στα πλαίσια των συμμετριών κρίσιμου σημείου της Χαμιλτωνιανής του Bohr και διαφορετική από την γραμμική αύξηση που εμφανίζεται στις γνωστές συμμετρίες του Interacting Boson Model.

2) Επιπλέον αυτές οι καταστάσεις 0^+ εμφανίζουν εκφυλισμούς με καταστάσεις της ζώνης της θεμελιώδους κατάστασης με στροφορμές $L > 4$ και $L/2$ περιττό αριθμό ($E(0_2^+) = E(6_1^+)$, $E(0_3^+) = E(10_1^+)$, $E(0_4^+) = E(14_1^+)$, κ.ο.κ.).

3) Επιπροσθέτως ο λόγος $E(6_1^+)/E(0_2^+)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως (εύκολα μετρήσιμη) παράμετρος τάξης που μπορεί να κάνει διάκριση ανάμεσα σε αλλαγές σχήματος/φάσης πρώτης και δεύτερης τάξης.

Ένα σημαντικό πρόβλημα που παραμένει άλυτο είναι η φύση της συμμετρίας κρίσιμου σημείου X(5), η οποία χαρακτηρίζει την αλλαγή φάσης/σχήματος μεταξύ σφαιρικών και ελλειψοειδών εκ περιστροφής

πυρήνων.

Βιβλιογραφία

- [1] W.M Zhang, D.H. Feng and R. Gilmore, *Reviews of Modern Physics*, Vol.62, No.4, October 1990.
- [2] J. Schwinger, "On angular Momentum", NYO-3071, January 26,1952.
- [3] L. D. Landau and E.M Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Butterworth-Heinemann, 1999).
- [4] P. Van Isacker, "Seniority in quantum many-body systems", arXiv:1010.2415v1, [nucl-th] 12 Oct 2010.
- [5] I. Talmi, "Pairing and Seniority in Finite Nuclei", *Proceedings of the LXX International School of Physics "Enrico Fermi"*, 1976, Edited by A. Bohr and R. Broglia, (p.352).
- [6] A.B Balantekin, "Symmetry and Supersymmetry in nuclear physics", arXiv:0711.0710v1, [nucl-th] 5 Nov 2007.
- [7] J. P. Elliott, *Rep. Prog. Phys.* **48**, 173 (1985).
- [8] D.J.Rowe, J.L. Wood, *Fundamentals of Nuclear models* (World Scientific, 2010).
- [9] J.P Elliott, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* 245 (1958) 128.
- [10] A. Sommerfeld, *Mechanics of Deformable Bodies*, (Academic Press INC.,Publishers 1950).
- [11] F. Iachello, *Lie Algebras and Applications*, (Springer, 2006).
- [12] G.'tHooft, *Lie Groups in Physics* (<http://www.phys.uu.nl/~thooft/lectures/lieg07.pdf>).
- [13] D. Bonatsos, *Group Theory*, Lecture notes, University of Fribourg (1989).
- [14] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [15] D.Bonatsos, *Interacting Boson Models of Nuclear Structure*, Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [16] D.Bonatsos, *Lectures on nuclear models*, Intstitute of Nuclear Physics, N.C.S.R "Demokritos", summer 2009.
- [17] D.Bonatsos, *Notes on IBM spectra*, unpublished.
- [18] A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 16 (1975).

- [19] A. Bohr and B.R. Mottelson, "Features of Nuclear Deformations Produced by the alignment of Individual Particles or Pairs", *Physica Scripta*, Vol. 22, 468-474, 1980.
- [20] D.J. Rowe, *Nuclear Collective Motion* (Methuen, London, 1970).
- [21] B. R. Mottelson, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 2 (1957).
- [22] D. M. Brink and R.A Broglia, *Nuclear Superfluidity: Pairing in finite systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [23] L.D. Landau and Y. Smorodinsky, *Lectures on Nuclear Theory* (Consultants Bureau translated from State Technical-Theoretical Literature Press, Moscow, 1955).
- [24] L. D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1977).
- [25] R. Gilmore, *Lie Groups, Physics and Geometry* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [26] A. E. L. Dieperink, O. Scholten, and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1747-1750 (1980).
- [27] O. S. van Roosmalen, Ph.D. thesis, U. Groningen, The Netherlands (1982).
- [28] P.O Lipas, "Group Theory of the IBM and algebraic models in general", available at *Algebraic approaches to Nuclear Structure*, edited by R.F. Casten (Harwood Academic Publishers, 1993).
- [29] J.P. Elliott and P.G. Dawber, *Symmetry in Physics, Volume 2: Further applications* (Macmillan, 1986), p. 464.
- [30] A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 6 (1978).
- [31] F. Iachello, *Int. J. Mod. Phys. B* **20**, 2687-2694 (2006).
- [32] D. H. Feng, R. Gilmore, and S. R. Deans, *Phys. Rev. C* **23**, 1254-1258 (1981).
- [33] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1744-1747 (1980)
- [34] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [35] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3580-3583 (2000).
- [36] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052502 (2001).
- [37] A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.* **26**, no. 14 (1952).
- [38] L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev.* **102**, 788-796 (1956).
- [39] G. Rakavy, *Nucl. Phys.* **4**, 289-294 (1957).
- [40] D. R. Bès, *Nucl. Phys.* **10**, 373-385 (1959).
- [41] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, *Phys. Rev. C* **69**, 044316 (2004).

- [42] M. A. Caprio and F. Iachello, Nucl. Phys. **A** (2006), doi:10.1016/j.nuclphysa.2006.10.032
- [43] G. G. Dussel and D. R. Bès, Nucl. Phys. **A** **143**, 623–640 (1970).
- [44] E. Chacón and M. Moshinsky, J. Math. Phys. **18**, 870–880 (1977).
- [45] M. Moshinsky, J. Math. Phys. **25**, 1555–1564 (1984).
- [46] P. M. Davidson, Proc. R. Soc. **135**, 459–472 (1932).
- [47] J. P. Elliott, J. A. Evans, and P. Park, Phys. Lett. **B** **169** 309–312 (1986).
- [48] D. J. Rowe and C. Bahri, J. Phys. **A** **31**, 4947–4961 (1998).
- [49] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Lett. **B** **584**, 40–47 (2004).
- [50] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Rev. **C** **70**, 024305 (2004).
- [51] C. M. Bender, S. Boettcher, H. F. Jones, and V. M. Savage, J. Phys. **A** **32**, 6771–6781 (1999).
- [52] J. M. Arias, C. E. Alonso, A. Vitturi, J. E. García-Ramos, J. Dukelsky, and A. Frank, Phys. Rev. **C** **68**, 041302 (2003).
- [53] J. E. García-Ramos, J. Dukelsky, and J. M. Arias, Phys. Rev. **C** **72**, 037301 (2005).
- [54] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Pietralla, and P. A. Terziev, Phys. Rev. **C** **74**, 044306 (2006).
- [55] N. Pietralla and O. M. Gorbachenko, Phys. Rev. **C** **70**, 011304 (2004).
- [56] K. Dusling and N. Pietralla, Phys. Rev. **C** **72**, 011303 (2005).
- [57] M. A. Caprio, Phys. Rev. **C** **65**, 031304 (2002).
- [58] A. V. Turbiner, Commun. Math. Phys. **118**, 467–474 (1988).
- [59] A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*, Institute of Physics, Bristol, 1994.
- [60] G. Lévai and J. M. Arias, Phys. Rev. **C** **69**, 014304 (2004).
- [61] L. Fortunato and A. Vitturi, J. Phys. **G** **29**, 1341–1349 (2003).
- [62] L. Fortunato, Eur. Phys. J. **A** **26**, s01, 1–30 (2005).
- [63] A. A. Raduta, A. C. Gheorghe, and A. Faessler, J. Phys. **G** **31**, 337–353 (2005).
- [64] R. F. Casten and N. V. Zamfir, Phys. Rev. Lett. **85**, 3584–3586 (2000).
- [65] N. V. Zamfir, *et al.*, Phys. Rev. **C** **65**, 044325 (2002).
- [66] J. M. Arias, Phys. Rev. **C** **63**, 034308 (2001).

- [67] G. Kalyva, *et al.*, in *Frontiers in Nuclear Structure, Astrophysics and Reactions* (Kos 2005), ed. S. V. Harissopulos, P. Demetriou, and R. Julin, AIP CP **831**, 472–474 (2006).
- [68] A. Frank, C. E. Alonso, and J. M. Arias, Phys. Rev. **C 65**, 014301 (2001).
- [69] D.-L. Zhang and Y.-X. Liu, Phys. Rev. **C 65**, 057301 (2002).
- [70] J.-F. Zhang, G.-L. Long, Y. Sun, S.-J. Zhu, F.-Y. Liu, and Y. Jia, Chin. Phys. Lett. **20**, 1231–1233 (2003).
- [71] D.-L. Zhang and Y.-X. Liu, Chin. Phys. Lett. **20**, 1028–1030 (2003).
- [72] R. M. Clark, *et al.*, Phys. Rev. **C 69**, 064322 (2004).
- [73] M. W. Kirson, Phys. Rev. **C 70**, 049801 (2004).
- [74] H. von Garrel, *et al.*, Phys. Rev. **C 73**, 054315 (2006).
- [75] S. V. Harissopulos, private communication (2006).
- [76] N. Marginean, *et al.*, Phys. Lett. **B 633**, 696–700 (2006).
- [77] R. Fission, D. Bonatsos, and G. A. Lalazissis, Phys. Rev. **C 73**, 044310 (2006).
- [78] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **95**, 052503 (2005).
- [79] C. E. Alonso, J. M. Arias, and A. Vitturi, Phys. Rev. Lett., in press.
- [80] C. E. Alonso, J. M. Arias, L. Fortunato, and A. Vitturi, Phys. Rev. **C 72**, 061302 (2005).
- [81] C. E. Alonso, J. M. Arias, and A. Vitturi, Phys. Rev. **C 74**, 027301 (2006).
- [82] F. Iachello and P. Van Isacker, *The Interacting Boson-Fermion Model*, Cambridge U. Press, Cambridge, 1991.
- [83] A. Frank and P. Van Isacker, *Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Structure Physics*, Wiley, New York, 1994.
- [84] J. Jolie, S. Heinze, P. Van Isacker, and R. F. Casten, Phys. Rev. **C 70**, 011305 (2004).
- [85] M. S. Fetea, *et al.*, Phys. Rev. **C 73**, 051301 (2006).
- [86] R. Bijker, R. F. Casten, N. V. Zamfir, and E. A. McCutchan, Phys. Rev. **C 68** 064304 (2003).
Erratum: Phys. Rev. **C 69**, 059901 (2004).
- [87] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev, and P. A. Terziev, Phys. Rev. **C 69**, 014302 (2004).
- [88] M. A. Caprio, Phys. Rev. **C 69**, 044307 (2004).
- [89] L. Fortunato and A. Vitturi, J. Phys. **G 30**, 627–635 (2004).
- [90] M. A. Caprio, Phys. Rev. **C 72**, 054323 (2005).
- [91] D. J. Rowe, Nucl. Phys. **A 735**, 372–392 (2004).

- [92] C. J. Rowe, P. S. Turner, and J. Repka, *J. Math. Phys.* **45** 2761–2784 (2004).
- [93] D. J. Rowe and P. S. Turner, *Nucl. Phys.* **A 753**, 94–105 (2005).
- [94] D. Bonatsos, D. Lenis, E. A. McCutchan, D. Petrellis, and I. Yigitoglu, *Phys. Lett. B* **649**, 394 (2007).
- [95] A. C. Gheorghe, A. A. Raduta, and A. Faessler, *nucl-th/0607064*.
- [96] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, and I. Yigitoglu, *Phys. Lett. B* **632**, 238–242 (2006).
- [97] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [98] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052503 (2001).
- [99] R. Krücken, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 232501 (2002).
- [100] N. V. Zamfir, *et al.*, *Phys. Rev. C* **65**, 067305 (2002).
- [101] R. M. Clark, M. Cromaz, M. A. Deleplanque, R. M. Diamond, P. Fallon, A. Görge, I. Y. Lee, A. O. Macchiavelli, F. S. Stephens, and D. Ward, *Phys. Rev. C* **67**, 041302 (2003).
- [102] R. F. Casten, N. V. Zamfir, and R. Krücken, *Phys. Rev. C* **68**, 059801 (2003).
- [103] D.-L. Zhang and H.-Y. Zhao, *Chin. Phys. Lett.* **19**, 779–781 (2002).
- [104] D. Tonev, A. Dewald, T. Klug, P. Petkov, J. Jolie, A. Fitzler, O. Möller, S. Heinze, P. von Brentano, and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **69**, 034334 (2004).
- [105] A. Dewald, *et al.*, *Eur. Phys. J. A* **20**, 173–178 (2004).
- [106] M. A. Caprio, *et al.*, *Phys. Rev. C* **66**, 054310 (2002).
- [107] E. A. McCutchan, *et al.*, *Phys. Rev. C* **69**, 024308 (2004).
- [108] E. A. McCutchan, N. V. Zamfir, R. F. Casten, M. A. Caprio, H. Ai, H. Amro, C. W. Beausang, A. A. Hecht, D. A. Meyer, and J. J. Ressler, *Phys. Rev. C* **71**, 024309 (2005).
- [109] A. Dewald, *et al.*, *J. Phys. G* **31**, $\Sigma 1427$ – $\Sigma 1432$ (2005).
- [110] R. M. Clark, *et al.*, *Phys. Rev. C* **68**, 037301 (2003).
- [111] D. S. Brenner, in *Mapping the Triangle*, ed. A. Aprahamian, J. A. Cizewski, S. Pittel, and N. V. Zamfir, *AIP CP* **638**, 223–227 (2002).
- [112] P. G. Bizzeti and A. M. Bizzeti-Sona, *Phys. Rev. C* **66**, 031301 (2002).
- [113] C. Hutter, *et al.*, *Phys. Rev. C* **67**, 054315 (2003).
- [114] C. Fransen, N. Pietralla, A. Linnemann, V. Werner, and R. Bijker, *Phys. Rev. C* **69**, 014313 (2004).
- [115] D. Balabanski, private communication (2006).

- [116] J. Meng, W. Zhang, S. G. Zhou, H. Toki, and L. S. Geng, *Eur. Phys. J. A* **25**, 23–27 (2005).
- [117] Z.-Q. Sheng and J.-Y. Guo, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 2711–2721 (2005).
- [118] M. Yu, P.-F. Zhang, T.-N. Ruan, and J.-Y. Guo, *Int. J. Mod. Phys. E* **15**, 939–950 (2006).
- [119] A. Leviatan, *Phys. Rev. C* **72**, 031305 (2005).
- [120] J.-Y. Zhang, M. A. Caprio, N. V. Zamfir, and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **60**, 061304 (1999).
- [121] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, 172–179 (2004).
- [122] J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249**, 111–140 (1975).
- [123] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure, Vol. II: Nuclear Deformations*, Benjamin, New York, 1975.
- [124] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, and I. Yigitoglu, in *Symmetries and Low-Energy Phase Transition in Nuclear-Structure Physics (Camerino 2005)*, $\epsilon\delta$. Γ. Λο Βιαρσο, Υ. $\tilde{\alpha}\mu\epsilon\rho\nu\omega$, 2006, π. 63–68. nucl-th/0512046.
- [125] L. Fortunato, *Phys. Rev. C* **70**, 011302 (2004).
- [126] L. Fortunato, S. De Baerdemacker, and K. Heyde, *Phys. Rev. C* **74**, 014310 (2006).
- [127] S. De Baerdemacker, L. Fortunato, V. Hellemans, and K. Heyde, *Nucl. Phys. A* **769**, 16–34 (2006).
- [128] R. V. Jolos, *Yad. Fiz.* **67**, 955–960 (2004) [*Phys. At. Nucl.* **67**, 931–936 (2004)].
- [129] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, and I. Yigitoglu, *Phys. Lett. B* **621**, 102–108 (2005).
- [130] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20**, 499–508 (1960).
- [131] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 132502 (2003).
- [132] A. E. L. Dieperink and R. Bijker, *Phys. Lett. B* **116**, 77–81 (1982).
- [133] J. M. Arias, J. E. García-Ramos, and J. Dukelsky, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 212501 (2004).
- [134] M. A. Caprio and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 242502 (2004).
- [135] M. A. Caprio and F. Iachello, *Ann. Phys. (N.Y.)* **318**, 454–494 (2005).
- [136] A. S. Davydov and G. F. Filippov, *Nucl. Phys.* **8**, 237–249 (1958).
- [137] P. G. Bizzeti and A. M. Bizzeti-Sona, *Phys. Rev. C* **70**, 064319 (2004).
- [138] P. G. Bizzeti and A. M. Bizzeti-Sona, nucl-th/0508005.
- [139] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, and P. Yotov, *Phys. Rev. C* **71**, 064309 (2005).
- [140] D. Lenis and D. Bonatsos, *Phys. Lett. B* **633**, 474–478 (2006).

- [141] G. Rosensteel and D. J. Rowe, Nucl. Phys. **A 759**, 92–128 (2005).
- [142] G. Lo Bianco, ed., *Symmetries and Low-Energy Phase Transition in Nuclear-Structure Physics (Camerino 2005)* U. Camerino, Camerino, 2006.
- [143] R. F. Casten, Nat. Phys. **2**, 811–820 (2006).
- [144] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. **101**, 022501 (2008).
- [145] D. Bonatsos, E.A. McCutchan, R.F. Casten, R.J. Casperson, V. Werner, and E. Williams, Phys. Rev. C **80** (2009) 034311.
- [146] Y. Alhassid, A. Leviatan, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) L1265.
- [147] A. Leviatan, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 242502.
- [148] F. Iachello, N. V. Zamfir, and R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. **81**, 1191–1194 (1998).
- [149] N. V. Zamfir, P. von Brentano, R. F. Casten, and J. Jolie, Phys. Rev. C **66**, 021304 (2002).
- [150] V. Werner, P. von Brentano, R. F. Casten, and J. Jolie, Phys. Lett. **B 527**, 55–61 (2002).
- [151] E. A. McCutchan, N. V. Zamfir, and R. F. Casten, Phys. Rev. C **69**, 064306 (2004).
- [152] R. Gilmore, J. Math. Phys. **20**, 891–893 (1979).
- [153] J. N. Ginocchio and M. W. Kirson, Nucl. Phys. **A 350**, 31–60 (1980).
- [154] R. L. Hatch and S. Levit, Phys. Rev. C **25**, 614(1982).
- [155] A. Klein and M. Vallières, Phys. Rev. Lett. **46**, 586–590 (1981).
- [156] A. Klein, C.-T. Li, and M. Vallières, Phys. Rev. C **25**, 2733–2742 (1982).
- [157] F. Iachello and N. V. Zamfir, Phys. Rev. Lett. **92**, 212501 (2004).
- [158] E. López-Moreno and O. Castaños, Phys. Rev. C **54**, 2374–2384 (1996).
- [159] N. V. Zamfir and G. E. Fernandes, in *Proceedings of the Eleventh International Symposium on Capture Gamma Ray Spectroscopy and Related Topics (Prohonic, 2002)*, ed. J. Kvasil, P. Cejnar, and M. Krlicka, World Scientific, Singapore, 2003.
- [160] R. J. Casperson, IBAR code (unpublished).
- [161] E. Williams, R. J. Casperson, V. Werner, Phys. Rev. C **77** (2008) 061302(R).
- [162] R. Fission, D. Bonatsos, and G. A. Lalazissis, Phys. Rev. C **73**, 044310 (2006).
- [163] Z.-Q. Sheng and J.-Y. Guo, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2711 (2005).
- [164] T. Nikšić, D. Vretenar, G. A. Lalazissis, and P. Ring, Phys. Rev. Lett. **99**, 092502 (2007).
- [165] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, R. F. Casten, R. J. Casperson, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 142501.
- [166] A. Leviatan, A. Novoselsky, I. Talmi, Phys. Lett. B **172** (1986) 144.

- [167] D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **745**, 47 (2004).
- [168] P. S. Turner and D. J. Rowe, Nucl. Phys. A **756**, 333 (2005).
- [169] M. A. Caprio, Phys. Rev. C **72**, 054323 (2005).
- [170] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Pergamon, Oxford, 1980).
- [171] J. Jolie, P. Cejnar, R. F. Casten, S. Heinze, A. Linnemann, and V. Werner, Phys. Rev. Lett. **89**, 182502 (2002).
- [172] R. F. Casten and E. A. McCutchan, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **34**, R285 (2007).
- [173] D. J. Rowe, Prog. Part. Nucl. Phys. **37**, 265 (1996).
- [174] D. J. Rowe and G. Thiamova, Nucl. Phys. A **760**, 59 (2005).
- [175] G. Thiamova and D. J. Rowe, Czech. J. Phys. **55**, 957 (2005).
- [176] E. Īn3n3 and E. P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. (N.Y.) **39**, 510 (1953).
- [177] R. Le Blanc, J. Carvalho, and D. J. Rowe, Phys. Lett. B **140**, 155 (1984).
- [178] H. Ui, Prog. Theor. Phys. **44**, 153 (1970).
- [179] J. P. Elliott, P. Park, and J. A. Evans, Phys. Lett. B **171**, 145 (1986).
- [180] J. Meyer-ter-Vehn, Phys. Lett. B **84**, 10 (1979).
- [181] M. A. Caprio and F. Iachello, Nucl. Phys. A **781**, 26 (2007).
- [182] J. P. Elliott and P. G. Dawber, *Symmetry in Physics* (Macmillan, London, 1979).
- [183] D. J. Rowe and C. Bahri, J. Phys. **A 31**, 4947 (1998).
- [184] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, N. Minkov, R. F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis, and I. Yigitoglu, Phys. Rev. C **76**, 064312 (2007).
- [185] J. Y. Zhang, R. F. Casten, and N. V. Zamfir, Phys. Lett. B **407**, 201 (1997).
- [186] Y. Alhassid, N. Whelan, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 816–819.
- [187] E. A. McCutchan, D. Bonatsos, and N. V. Zamfir, Phys. Rev. C **74**, 034306 (2006).