

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Οκταπολικός Βαθμός Ελευθερίας
σε ατομικούς πυρήνες

Σοφία Καραμπάγια

Τριμελής Επιτροπή

Γ. Κουτσούμπας
Κ. Παπαδόπουλος
Δ. Μπονάτσος

Ιούνιος 2011

Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
Αντί προλόγου	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Οργάνωση φασμάτων πυρήνων σε ζώνες	1
1.2 Ο λόγος $R_{4/2}$	2
1.3 Ηλεκτρομαγνητικές τετραπολικές μεταβάσεις $E2$	4
2 Το συλλογικό πρότυπο και συμμετρίες κρίσιμου σημείου	7
2.1 Το συλλογικό πρότυπο	7
2.1.1 Παράμετροι παραμόρφωσης	7
2.1.2 Τύποι πολυπολικών παραμορφώσεων	8
2.1.3 Τετραπολικές παραμορφώσεις	8
2.1.4 Συμμετρίες των κυματοσυναρτήσεων	9
2.2 Πυρηνική δόνηση τετραπολικού βαθμού	10
2.3 Αξονικά συμμετρικός ταλαντωτής	11
2.4 Τριαξονικός περιστροφέας	12
2.5 γ -ασταθής ταλαντωτής	13
2.6 Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$	14
2.6.1 Το πρότυπο $E(5)$	15
2.6.2 Πειραματικές εκδηλώσεις της $E(5)$	16
2.6.3 Το πρότυπο $X(5)$	17
2.6.4 Πειραματικές εκδηλώσεις της $X(5)$	19
3 Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων (IBM)	21
3.1 Οι δυναμικές συμμετρίες του IBM	21
3.2 Αλλαγές φάσης/σχήματος στο IBM	24
4 Καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία	29
4.1 Οκταπολικές παραμορφώσεις	30
4.2 Οκταπολικές δονήσεις	31
5 Οκταπολικά σχήματα σε επεκτάσεις του IBM	35
5.1 Εισαγωγή του f μποζονίου	35
5.2 Το πρότυπο $U(8)$	36

5.3	Το πρότυπο $U(11)$	36
5.4	Το πρότυπο $U(16)$	37
6	ΑQOA για ακτινίδες	39
6.1	Κατασκευή και βασικές παραδοχές	40
6.1.1	Το $\tilde{\beta}$ μέρος του φάσματος	42
6.1.2	Το ϕ -μέρος του φάσματος	44
6.1.3	Ρυθμοί μεταπτώσεων $B(EL)$	44
6.2	Αριθμητικά αποτελέσματα και σύγκριση με το πείραμα	45
6.3	Η μέθοδος των μεταβολών	49
7	ΑQOA για σπάνιες γαίες	63
7.1	Κατασκευή και βασικές παραδοχές	63
7.2	Αριθμητικά αποτελέσματα και σύγκριση με το πείραμα	65
	Συμπεράσματα	73
	Παράρτημα Α	75
	Παράρτημα Β	77

Πρόλογος

Το συλλογικό πρότυπο των Bohr και Mottelson έχει καταφέρει, θεωρώντας τετραπολική παραμόρφωση των πυρήνων, να περιγράψει φάσματα άρτιων-άρτιων πυρήνων, σε χαμηλές ενέργειες, που αποτελούνται από καταστάσεις με θετική ομοτιμία. Υπάρχουν όμως, τόσο μεσαίου, όσο και μεγάλου βάρους πυρήνες, των οποίων το φάσμα περιέχει καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία. Στην περιοχή των ακτινίδων τέτοιες καταστάσεις παρατηρούνται από τα 250 KeV, ενώ στην περιοχή των σπάνιων γαιών προκύπτουν στα 800 KeV. Για την κατανόηση της δομής τέτοιων καταστάσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες προσεγγίσεις - εξηγήσεις. Σε μία από αυτές, οι χαμηλοενεργειακές καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία αποδίδονται στο σχηματισμό μικρών συσσωματωμάτων (clusters) στην πυρηνική επιφάνεια και μπορούν να περιγραφούν στα πλαίσια του πυρηνικού δονητικού προτύπου (nuclear vibron model). Κατά μία άλλη προσέγγιση, αυτές οι καταστάσεις θεωρείται ότι προκύπτουν από οκταπολικές δονήσεις γύρω από μία σφαιρική ή τετραπολικά παραμορφωμένη βασική κατάσταση. Αυτή η δεύτερη ερμηνεία περιγράφεται αλγεβρικά με την εισαγωγή του f-μποζονίου με αρνητική ομοτιμία. Ακόμη, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο πυρήνας έχει αποκτήσει μια μόνιμη οκταπολική παραμόρφωση. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με την τρίτη προσέγγιση, προσθέτωντας έναν ακόμα βαθμό παραμόρφωσης, τον οκταπολικό, $\lambda=3$, στα πλαίσια του προτύπου του Bohr.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή του αναγνώστη στη μορφή των πυρηνικών φασμάτων και δίνονται χρήσιμες έννοιες, οι οποίες βοηθούν στην κατανόηση των ιδιοτήτων των πυρήνων και είναι απαραίτητες για τη σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται το συλλογικό πρότυπο, όπως αυτό είχε αναπτυχθεί από τους Bohr και Mottelson, με τον τετραπολικό βαθμό παραμόρφωσης και ακολουθεί περιγραφή των προτύπων E(5) και X(5), οι οποίες περιγράφουν αλλαγές φάσεις/σχήματος στο πλαίσιο αυτό.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται συνοπτικά η αλγεβρική περιγραφή των πυρήνων στα πλαίσια του προτύπου αλληλεπιδρώντων μποζονίων [Interacting Boson Model (IBM)], καθώς και η μελέτη των αλλαγών φάσης/σχήματος στο πλαίσιο αυτό.

Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μια πρώτη επαφή με τις καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία που παρουσιάζονται στο φάσμα ενός πυρήνα και δίνεται η πρώτη γεωμετρική περιγραφή της οκταπολικής παραμόρφωσης του πυρήνα, καθώς και των οκταπολικών δονήσεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο δίνεται μια ολοκληρωμένη αλγεβρική περιγραφή των καταστάσεων των πυρήνων που εκδηλώνουν οκταπολικό βαθμό ελευθερίας στο πλαίσιο κατάλληλων γενικεύσεων του IBM.

Στο έκτο κεφάλαιο αναπτύσσεται το Αναλυτικό Τετραπολικό Οκταπολικό Αξονικά Συμμετρικό Πρότυπο [Analytic Quadrupole Octupole Axially Symmetric Model (AQOA)], στο οποίο θεωρούνται ταυτόχρονα τετραπολικοί και οκταπολικοί βαθμοί ελευθερίας στο πρότυπο του Bohr και γίνεται εφαρμογή του προτύπου αυτού στις ακτινίδες.

Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο, το οποίο και αποτελεί το πρωτότυπο μέρος της εργασίας αυτής, το πρότυπο AQOA επεκτείνεται στις σπάνιες γαίες. Η επέκταση αυτή απαιτεί την εισαγωγή δυναμικού στο γ βαθμό ελευθερίας, το οποίο αποτελείται από δύο ταλαντωτές διαχωριζόμενους από ένα πεπερασμένο φράγμα, ενώ στην περίπτωση των ακτινίδων αρκεί η απλούστερη μορφή των δύο ταλαντωτών που διαχωρίζονται από άπειρο φράγμα. Εξετάζεται λεπτομερώς η συμπεριφορά των ισοτόνων με $N=90$ στην περιοχή Nd – Dy και αποδεικνύεται ότι τα ισότονα αυτά αντιστοιχούν όχι μόνο στο κρίσιμο σημείο της μετάβασης από σφαιρικούς σε ωοειδείς παραμορφωμένους πυρήνες όσον αφορά τον τετραπολικό βαθμό ελευθερίας, αλλά και στο κρίσιμο σημείο της μετάβασης από οκταπολικές δονήσεις σε μόνιμη οκταπολική παραμόρφωση, που είναι και το κύριο εύρημα της εργασίας αυτής.

Στα παραρτήματα στο τέλος της εργασίας περιέχονται συμπληρωματικές πράξεις, ώστε να αποσαφηνίζεται το πως προκύπτουν τα διάφορα αποτελέσματα.

Αντί προλόγου

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στο πλαίσιο του διατμηματικού μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών, “ Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές ”, το οποίο πραγματοποιείται σε συνεργασία της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών και του ΕΚΕΦΕ “ Δημόκριτος ”, υπό την επίβλεψη τριμελούς επιτροπής, με πρόεδρο τον Αναπλ. Καθηγητή του ΕΜΠ, Γεώργιο Κουτσούμπα και μέλη τον Αναπλ. Καθηγητή του ΕΜΠ, Κωνσταντίνο Παπαδόπουλο και τον Ερευνητή Α΄ του ΕΚΕΦΕ “ Δημόκριτος ”, Διονύσιο Μπονάτσο, τους οποίους και ευχαριστώ.

Ευχαριστώ τον Δρ. Διονύση Μπονάτσο για την καθοδήγηση και τις συμβουλές του. Ιδιαίτερα τον ευχαριστώ για την ελευθερία που μου έδωσε και μου δίνει στα πλαίσια τόσο της μεταπτυχιακής, όσο και της διδακτορικής μου εργασίας. Για τη συνεχή του ενθάρρυνση, εμπιστοσύνη και στήριξη που δείχνει σε εμένα, αλλά και σε όλους τους φοιτητές με τους οποίους συνεργάζεται.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλη την ομάδα του Διονύση Μπονάτσου για το όμορφο κλίμα που έχουμε δημιουργήσει, που έχει σαν αποτέλεσμα την άριστη συνεργασία μας, τόσο εντός όσο και εκτός “ Δημόκριτου ”. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω το συνάδελφο – υπότροφο του ΕΚΕΦΕ “ Δημόκριτος ”, Παναγιώτη Γεωργουδή, για τη θέλησή του να κτιστεί σιγά σιγά μια ουσιαστική συνεργασία, η οποία εύχομαι και ελπίζω να συνεχιστεί και μετέπειτα.

Τέλος, ευχαριστώ το ΕΚΕΦΕ “ Δημόκριτος ” για τη μεταπτυχιακή υποτροφία που μου παρέχει, καθώς και το Ινστιτούτο Πυρηνικής Φυσικής για την παροχή των αναγκαίων συνθηκών εργασίας και για την οικονομική υποστήριξη συμμετοχών μου σε διεθνή συνέδρια και σχολεία, όπου μου δόθηκε η δυνατότητα εποικοδομητικών συζητήσεων με πολλούς συναδέλφους από το εξωτερικό, καθώς και παρουσίασης των αποτελεσμάτων μου.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ένας από τους βασικούς στόχους της Πυρηνικής Φυσικής είναι η κατανόηση της δομής και η περιγραφή του πυρηνικού συστήματος. Τόσο μικροσκοπικά, όσο και συλλογικά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί προς αυτό το σκοπό. Το πρότυπο των φλοιών πρόκειται για μικροσκοπικό μοντέλο το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για την περιγραφή των πυρηνικών ιδιοτήτων. Θεωρώντας ανεξάρτητη κίνηση νουκλεονίων και ένα κεντρικό δυναμικό, το μοντέλο προβλέπει την ύπαρξη κλειστών φλοιών πρωτονίων και νετρονίων. Το πρότυπο των φλοιών έχει μεγάλη επιτυχία σε πυρήνες με όλους τους φλοιούς συμπληρωμένους, σε πυρήνες με ένα μόνο σωματίο έξω από συμπληρωμένους φλοιούς και σε πυρήνες με μία σπή. Αντίθετα, σε πυρηνικά συστήματα με μεγάλο αριθμό νουκλεονίων σθένους και σπών, η παραγωγή του φάσματος του πυρήνα δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση. Έτσι, υπάρχουν αρκετές ιδιότητες του πυρηνικού συστήματος οι οποίες δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν ή προβλέπονται λανθασμένα με την παραδοχή ανεξάρτητης κίνησης νουκλεονίων. Για παράδειγμα, υπάρχουν περιοχές του περιοδικού συστήματος όπου η βασική κατάσταση του πυρήνα διαφέρει από το σφαιρικό σχήμα που της αποδίδει το πρότυπο των φλοιών. Ακόμη, σε άρτιους - άρτιους πυρήνες οι μεταπτώσεις της πρώτης διεγερμένης στάθμης με $J^\pi = 2^+$ έχουν συλλογικό χαρακτήρα. Τα παραπάνω δε συνεπάγονται απαραίτητα αποτυχία του προτύπου των φλοιών. Ένα πυρηνικό σύστημα A νουκλεονίων με $3A$ βαθμούς ελευθερίας μπορεί να κινηθεί και να απορροφήσει ενέργεια με πολύ περισσότερους τρόπους απ' όσους προβλέπει ο απλός μηχανισμός ανεξάρτητης κίνησης των σωματιών. Έτσι, κρίνεται απαραίτητο να εισαχθούν συλλογικές παράμετροι οι οποίες θα μπορέσουν να εξηγήσουν ιδιότητες του πυρήνα που οφείλονται σε συλλογική κίνηση νουκλεονίων.

1.1 Οργάνωση φασμάτων πυρήνων σε ζώνες

Πράγματι, τα χαμηλοενεργειακά φάσματα των πυρήνων μακριά από κλειστούς φλοιούς δείχνουν μια σχετικά απλή δομή, που σχετίζεται με συλλογικά φαινόμενα, τα οποία μπορούν να περιγραφούν με συλλογικές παραμέτρους. Τα φάσματα των πυρήνων μπορούν να οργανωθούν σε ζώνες συλλογικών καταστάσεων, ενώ τα μέλη κάθε ζώνης συνδέονται με ισχυρές ηλεκτρικές τετραπολικές μεταβάσεις. Τα φάσματα αυτά ονομάζονται δονητικά αν η απόσταση μεταξύ των στάθμων είναι σχεδόν σταθερή ή περιστροφικά αν η απόσταση ακολουθεί τον κανόνα $J(J + 1)$.

Περιστροφικά φάσματα παρατηρούνται σε άρτιους-άρτιους πυρήνες με μόνιμη τετραπολική παραμόρφωση. Τέτοιοι πυρήνες παρατηρούνται μακριά από κλειστούς φλοιούς, συνήθως στο μέσο των φλοιών. Σε ένα ιδανικό περιστροφικό φάσμα παρατηρείται μια ακολουθία σταθμών με στροφορμή J και ομοτιμία (πάρτυ) π

$$J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots \quad (1.1)$$

που αναπτύσσεται πάνω στη θεμελιώδη κατάσταση και ονομάζεται θεμελιώδης ζώνη. Ίδιες ακολουθίες σταθμών που αναπτύσσονται πάνω σε διεγερμένες 0^+ καταστάσεις, ονομάζονται β -ζώνες. Ζώνες με ακολουθία σταθμών

$$J^\pi = 2^+, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+, \dots \quad (1.2)$$

ονομάζονται γ -ζώνες. Οι στάθμες της θεμελιώδους ζώνης έχουν ενέργεια που δίνεται από τον τύπο

$$E(J) = \frac{J(J+1)}{2\Theta}, \quad (1.3)$$

όπου Θ είναι η ροπή αδράνειας του πυρήνα.

Δονητικά φάσματα παρατηρούνται σε σφαιρικούς άρτιους-άρτιους πυρήνες, κοντά σε κλειστούς φλοιούς. Σε ένα ιδανικό δονητικό φάσμα περιμένουμε για τετραπολική τάλανση, διεγερμένη κατάσταση $J^\pi = 2^+$ ενός φωνονίου σε ενέργεια $\hbar\omega$. Σε διπλάσια ενέργεια περιμένουμε καταστάσεις δόνησης δύο φωνονίων με σπιν και ομοτιμία

$$J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+. \quad (1.4)$$

Σε τριπλάσια ενέργεια, $3\hbar\omega$ αναμένονται καταστάσεις δόνησης τριών φωνονίων με

$$J^\pi = 0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+. \quad (1.5)$$

Τα δονητικά φάσματα οργανώνονται και αυτά σε ζώνες, όπως τα περιστροφικά. Η ενέργεια των μελών της θεμελιώδους ζώνης δίνεται από την έκφραση $E(J) = \alpha J$, όπου $\alpha = \hbar\omega$.

Για τις ενεργειακές στάθμες πυρήνων είναι συνήθης ο συμβολισμός J_n , όπου J είναι η στροφορμή της στάθμης και n η τάξη της στάθμης με αυτή τη συγκεκριμένη στροφορμή, δηλαδή 4_1 σημαίνει την πρώτη στάθμη με στροφορμή 4, 4_2 σημαίνει τη δεύτερη στάθμη με στροφορμή 4, κ.ο.κ.

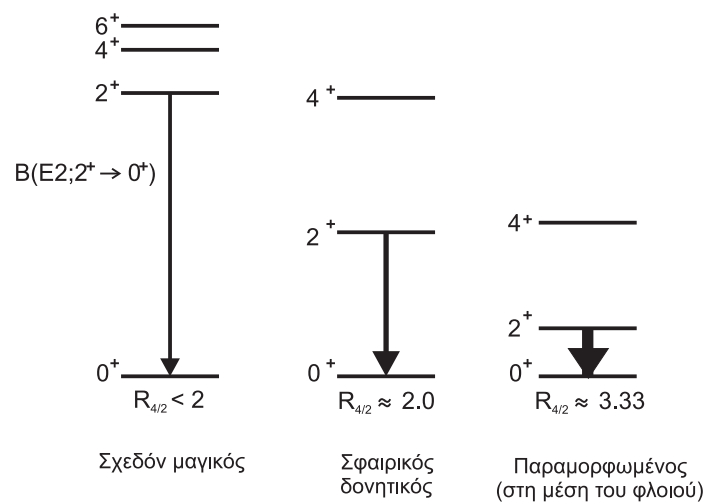
1.2 Ο λόγος $R_{4/2}$

Χρήσιμο μέτρο συλλογικότητας είναι ο λόγος

$$R_{4/2} = \frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)}, \quad (1.6)$$

όπου με $E(J)$ συμβολίζουμε την ενέργεια της στάθμης της θεμελιώδους ζώνης με στροφορμή J . Για δονητικούς πυρήνες, που οι ενέργειες είναι ανάλογες του J , ο λόγος έχει τιμή 2. Για περιστροφικούς πυρήνες, με ενέργειες ανάλογες του $J(J +$

1), ο λόγος είναι ίσος με 3.33. Η περιοχή με τιμές λόγου $2 \leq R_4 \leq 2.4$ λέγεται δονητική ή σχεδόν δονητική περιοχή. Αντίστοιχα, η περιοχή με τιμές $3 \leq R_4 \leq 3.33$ λέγεται περιστροφική ή σχεδόν περιστροφική περιοχή, ενώ η περιοχή με $2.4 \leq R_4 \leq 3$ είναι περιοχή μετάβασης. Η μετάβαση από τη δονητική στην περιστροφική περιοχή γίνεται καθώς απομακρυνόμαστε από τους κλειστούς φλοιούς. Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα του πως μεταβάλλεται ο λόγος $R_{4/2}$ από μαγικούς σε παραμορφωμένους πυρήνες [1].



Σχήμα 1.1: Αλλαγή του φάσματος και του λόγου $R_{4/2}$ κατά τη μετάβαση από σχεδόν μαγικούς πυρήνες σε παραμορφωμένους [1].

Αν ξεκινήσουμε θεωρώντας σχεδόν μαγικούς πυρήνες, π.χ. με μόνο 2 όμοια σωματίδια έξω από ένα διπλά μαγικό φλοιό (^{134}Sn με $Z = 50$ και $N = 84$ ή ^{210}Pb με $Z = 82$ και $N = 128$) το φάσμα θα ήταν σαν αυτό που φαίνεται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 1, όπου οι καταστάσεις με στροφορμή $J = 2^+, 4^+, \dots$ βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη, αλλά αρκετά μακριά από τη θεμελιώδη κατάσταση 0^+ . Για τέτοιο φάσμα $R_{4/2} < 2$. Καθώς προστίθενται νουκλεόνια σθένους έξω από τον κλειστό φλοιό, αναδύεται συλλογική συμπεριφορά και ισχύει $R_{4/2} \geq 2$. Έτσι, αρχικά εμφανίζονται δονητικοί πυρήνες με $R_{4/2} = 2$ και όσο προχωράμε προς το μέσο των φλοιών οι πυρήνες είναι περιστροφικοί με $R_{4/2} = 3.33$. Παρατηρείται ακόμη ότι καθώς αναπτύσσεται συλλογικότητα, η ενέργεια της 2^+ κατάστασης μειώνεται γρήγορα καθώς πηγαίνουμε προς παραμορφωμένους πυρήνες.

Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα του πως μεταβάλλεται ο λόγος R_4 στα ισότοπα του $_{64}\text{Gd}$.

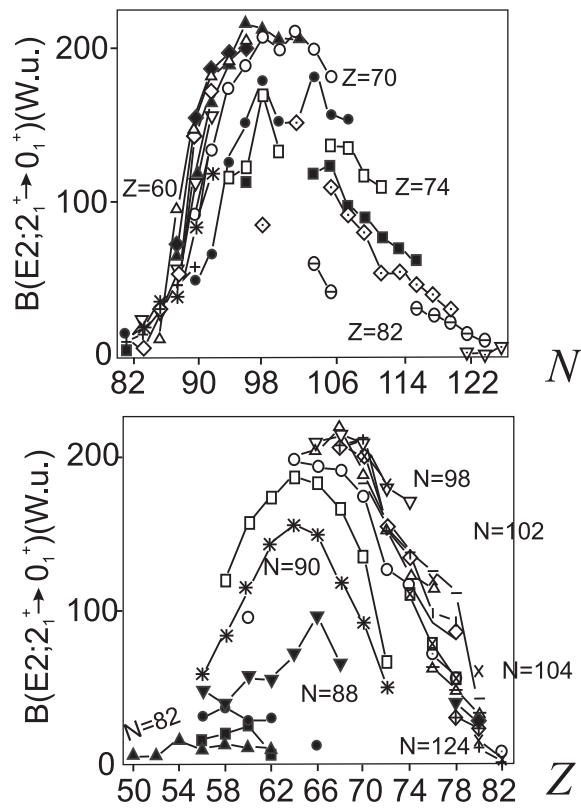
πυρήνας	R_4
$^{146}\text{Gd}_{82}$	1.326
$^{148}\text{Gd}_{84}$	1.806
$^{150}\text{Gd}_{86}$	2.019
$^{152}\text{Gd}_{88}$	2.194
$^{154}\text{Gd}_{90}$	3.015
$^{156}\text{Gd}_{92}$	3.239
$^{158}\text{Gd}_{94}$	3.288
$^{160}\text{Gd}_{96}$	3.298

Ο πρώτος από τους παραπάνω πυρήνες είναι μαγικός πυρήνας με $N=82$, οπότε δεν έχει καθόλου νετρόνια σθένους. Ο επόμενος, $^{148}\text{Gd}_{84}$, έχει δύο νετρόνια σθένους. Σε κανέναν από τους παραπάνω πυρήνες δεν έχει αναπτυχθεί συλλογικότητα, γι' αυτό ο λόγος R_4 είναι κάτω από 2. Οι πυρήνες $^{150}\text{Gd}_{86}$, $^{152}\text{Gd}_{88}$ είναι καθαρά δονητικοί, ενώ οι $^{154}\text{Gd}_{90}$ - $^{160}\text{Gd}_{96}$ είναι περιστροφικοί. Παρατηρείται ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των νετρονίων σθένους, τόσο πιο ξεκάθαρος γίνεται ο περιστροφικός χαρακτήρας του πυρήνα.

1.3 Ηλεκτρομαγνητικές τετραπολικές μεταβάσεις $E2$

Μια ακόμα ποσότητα που χρησιμεύει ως μέτρο συλλογικότητας είναι το μέγεθος των ηλεκτρικών τετραπολικών ($E2$) μεταβάσεων μεταξύ των 2_1^+ και 0_1^+ καταστάσεων, $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$, που εκφράζονται σε μονάδες $e^2 fm^2 = 10^{-2} e^2 b^2$ ή σε μονάδες Weisskopf (Weisskopf units) (W.u.). Οι τιμές των συγκεκριμένων $B(E2)$ αυξάνουν καθώς αυξάνει η συλλογικότητα. Στο Σχήμα 2 παρουσιάζονται τα δεδομένα για $Z = 50 - 82$, $N = 82 - 126$, όπου είναι σαφές ότι οι τιμές των $B(E2)$ από ελάχιστες που είναι κοντά στους μαγικούς αριθμούς, φτάνουν σε ένα μέγιστο κοντά στο μέσο του φλοιού και μειώνονται πάλι καθώς προχωράμε προς τον επόμενο μαγικό αριθμό.

Δείκτες του σχήματος του πυρήνα μπορεί να είναι και οι ηλεκτρομαγνητικές τετραπολικές μεταβάσεις $E2$, $4_1^+ \rightarrow 2_1^+$, που αυξάνουν κατά τη μετάβαση από σφαιρικά σε παραμορφωμένα σχήματα, ενώ ο λόγος $B_{4/2} = B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)/B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ μειώνεται. Εκτός από μεταβάσεις μέσα στη θεμελιώδη ζώνη, και μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών ζωνών μπορούν να αναδείξουν αλλαγές σχήματος. Η μετάβαση $2_2^+ \rightarrow 2_1^+$, που ενώνει τη β ή γ δονητική ζώνη με τη θεμελιώδη ζώνη, είναι ασθενής στους συμμετρικά παραμορφωμένους πυρήνες, όμως στους ασταθείς παραμορφωμένους πυρήνες η τιμή της αυξάνει σημαντικά, ενώ στους δονητικούς πυρήνες παρατηρείται μια μέτρια αύξηση. Κάποιες ηλεκτρικές τετραπολικές μεταβάσεις, $E2$, μεταξύ των ζωνών, χρησιμοποιήθηκαν ως δείκτες συνύπαρξης δονητικών και περιστροφικών δομών στους πυρήνες, στο κρίσιμο σημείο μεταξύ σφαιρικών και παραμορφωμένων σχημάτων [2]. Άλλες μεταβάσεις, όπως η $2_2^+ \rightarrow 0_1^+$, μηδενίζονται στα όρια των παραμορφωμένων, αξονικά ασταθών και δονητικών πυρήνων, αλλά εμφανίζονται μέγιστο στις περιοχές αλλαγής σχήματος.



Σχήμα 1.2: $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ τιμές σε μονάδες Weisskopf για $Z = 50 - 82$ και $N = 82 - 126$ [1].

Κεφάλαιο 2

Το συλλογικό πρότυπο και συμμετρίες κρίσιμου σημείου

2.1 Το συλλογικό πρότυπο

Το φάσμα των άρτιων - άρτιων πυρήνων στις χαμηλές ενέργειες δείχνει χαρακτηριστικές δονητικές και περιστροφικές ζώνες που μπορούν να ερμηνευτούν ως δονήσεις και περιστροφές της πυρηνικής επιφάνειας στα πλαίσια του συλλογικού προτύπου το οποίο προτάθηκε αρχικά από τους Bohr και Mottelson. Στο συλλογικό πρότυπο ο πυρήνας περιγράφεται ως μια ασυμπίεστη κλασική φορτισμένη υγρή σταγόνα της οποίας το πάχος της επιφάνειας θεωρείται αμελητέο. Η εσωτερική δομή του πυρήνα δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ομογενής πυρηνική μάζα σε μορφή υγρού. Η εικόνα μενονομένων νουκλεονίων μέσα στον πυρήνα δεν υπάρχει. Το μοντέλο της υγρής σταγόνας μπορεί να εφαρμοστεί μόνον αν το μέγεθος των νουκλεονίων μπορεί να αμεληθεί σε σχέση με το μέγεθος του πυρήνα, οπότε το μοντέλο δουλεύει καλύτερα για μεγάλου βάρους πυρήνες.

2.1.1 Παράμετροι παραμόρφωσης

Με αφετηρία τις παραπάνω υποθέσεις, θεωρούμε ότι η επιφάνεια του πυρήνα δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την $R(\theta, \varphi, t)$. Αναπτύσσουμε την R με τη βοήθεια σφαιρικών αρμονικών και παραμέτρων παραμόρφωσης που εξαρτώνται από το χρόνο

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right), \quad (2.1)$$

όπου R_0 είναι η ακτίνα του σφαιρικού πυρήνα η οποία προκύπτει όταν οι συντελεστές $\alpha_{\lambda\mu}$ εξαφανίζονται. Οι παράμετροι $\alpha_{\lambda\mu}$ είναι οι συντεταγμένες που περιγράφουν την παραμόρφωση της πυρηνικής επιφάνειας.

Καθώς η πυρηνική ακτίνα R είναι πραγματικός αριθμός, $R(\theta, \varphi, t) = R^*(\theta, \varphi, t)$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών

$$Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi) = (-1)^\mu Y_{\lambda, -\mu}(\theta, \varphi), \quad (2.2)$$

8ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

είναι φανερό ότι έχουμε

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu}. \quad (2.3)$$

Η πυρηνική ακτίνα R πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ανακλάσεις του συστήματος συντεταγμένων. Έτσι, όταν οι σφαιρικές αρμονικές ανακλώνται, οι $\alpha_{\lambda\mu}$ θα πρέπει να αλλάζουν και αυτές κατά το ίδιο πρόσημο, δηλαδή να πολλαπλασιάζονται με $(-1)^\lambda$. Τέλος, η R θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από περιστροφές. Κατά τον ίδιο τρόπο όπως και πριν, οι $\alpha_{\lambda\mu}$ θα πρέπει να συμπεριφέρονται παρόμοια με τις σφαιρικές αρμονικές όταν συμβαίνουν περιστροφές του συστήματος συντεταγμένων (οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις γωνίες Euler $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$), δηλαδή [3]

$$Y'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu'\mu}^{(\lambda)} Y_{\lambda\mu'} \quad (2.4)$$

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu'\mu}^{(\lambda)} \alpha_{\lambda\mu'}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Τύποι πολυπολικών παραμορφώσεων

Το ανάπτυγμα της πυρηνικής επιφάνειας (1.1) επιτρέπει να θεωρηθούν διαφόρων βαθμών παραμορφώσεις. Ο όρος με $\lambda = 0$ προβλέπει απλώς τη μεταβολή του πυρηνικού όγκου. Όμως, η πυρηνική ύλη στις ενέργειες που θα μελετηθούν σε αυτήν την εργασία, είναι ασυμπίεστη. Έτσι, υπολογίζοντας τον πυρηνικό όγκο [4] προκύπτει ότι ο όρος α_{00} είναι ίσος με

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda \geq 1, \mu} |\alpha_{\lambda,\mu}|^2 \quad (2.6)$$

Οι διπολικές παραμορφώσεις, $\lambda = 1$, αντιστοιχούν σε απλή μετατόπιση του κέντρου βάρους του πυρήνα και παραλείπονται από το άθροισμα της εξίσωσης (1.1). Οι όροι του αθροίσματος που παρουσιάζουν ενδιαφέρον περιέχουν τετραπολικές παραμορφώσεις, $\lambda = 2$, όπου ο πυρήνας έχει σχήμα ελλειψοειδούς και οκταπολικές παραμορφώσεις, $\lambda = 3$, οι οποίες δίνουν στον πυρήνα σχήμα "αχλαδιού". Παραμορφώσεις μεγαλύτερου βαθμού δε θα μελετηθούν στην παρούσα εργασία.

2.1.3 Τετραπολικές παραμορφώσεις

Στην περίπτωση της τετραπολικής παραμόρφωσης η πυρηνική επιφάνεια δίνεται από τη σχέση

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^* Y_{2\mu}(\theta, \varphi) \right). \quad (2.7)$$

Ο όρος α_{00} παραλείφθηκε μιας και είναι δεύτερης τάξης ως προς τον $\alpha_{2\mu}$. Οι παράμετροι $\alpha_{2\mu}$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3), προκύπτει ότι είναι πέντε. Το πρόβλημα με αυτές τις παραμέτρους είναι ότι ο άξονας συμμετρίας του πυρήνα, αν υπάρχει τέτοιος, έχει τυχαία διεύθυνση στο χώρο. Η γεωμετρία του προβλήματος γίνεται πιο απλή αν μεταφερθούμε στους κύριους άξονες του συστήματος, δηλαδή στο σύστημα συντεταγμένων που συμπίπτει με τους κύριους άξονες του ελλειψοειδούς, οι οποίοι θα

συμβολίζονται με x', y', z' . Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει [4, 5] ότι οι πέντε συντελεστές $a_{2\mu}$ μειώνονται σε δύο ανεξάρτητες παραμέτρους $a'_{20} = a_0$ και $a'_{2\pm 2} = a_2$ ($a'_{2\pm 1} = 0$), οι οποίες μαζί με τις 3 γωνίες Euler μπορούν να περιγράψουν το πυρηνικό σύστημα. Η γεωμετρική ερμηνεία των παραμέτρων είναι τώρα πιο απλή [4]:

- Η παράμετρος a_0 δείχνει το τέντωμα (stretching) του άξονα z' σε σχέση με τους x', y' άξονες
- η a_2 καθορίζει τη διαφορά μήκους των x' και y' αξόνων και
- οι 3 γωνίες Euler καθορίζουν τον προσανατολισμό των κύριων αξόνων του συστήματος (x', y', z') σε σχέση με τους άξονες στο σύστημα του εργαστηρίου (x, y, z) .

Υπάρχει ένα ακόμα σύνολο παραμέτρων που εισήχθη από τον Bohr [6]

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \quad (2.8)$$

για τις οποίες ισχύει

$$\sum_{\mu} |a_{2\mu}|^2 = \sum_{\mu} |a'_{2\mu}|^2 = a_0^2 + 2a_2^2 = \beta^2. \quad (2.9)$$

Μπορούμε να δούμε [7] ότι

- για $\gamma = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ το σχήμα είναι επίμηκες (ωοειδές), με αντίστοιχους άξονες συμμετρίας τους z', x', y'
- για $\gamma = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ το σχήμα είναι πεπλατυσμένο, με αντίστοιχους άξονες συμμετρίας τους y', z', x' και
- για ενδιάμεσες τιμές του γ έχουμε τριαξονικά σχήματα.

Τέλος, το τέντωμα stretching των πυρηνικών αξόνων κατά τη διεύθυνση x', y', z' ή $k = 1, 2, 3$ δίνεται από τη σχέση:

$$\delta R_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right). \quad (2.10)$$

2.1.4 Συμμετρίες των κυματοσυναρτήσεων

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν 2 διαφορετικά σύνολα παραμέτρων με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε τον προσανατολισμό και το σχήμα ενός ελλειψοειδούς στο χώρο. Περιοριζόμενοι σε δεξιόστροφα συστήματα αναφοράς, υπάρχουν 24 διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων κατά μήκος των κύριων αξόνων του πυρήνα. (Αυτό μπορεί να βρεθεί με απλό μέτρημα.) Μπορούμε να βρούμε και τα 24 διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων με τη βοήθεια 3 τελεστών μετασχηματισμού $\hat{R}_k, k = 1, 2, 3$.

Ο \hat{R}_1 αντιστοιχεί σε περιστροφή γύρω από τον άξονα x' κατά γωνία π , δηλαδή $\hat{R}_1(x', y', z') = (x', -y', -z')$. Οι συντεταγμένες β, γ δεν αλλάζουν, αλλά για τις γωνίες Euler ισχύει $\hat{R}_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1 + \pi, \pi - \theta_2, -\theta_3)$. Ακόμη, $\hat{R}_1^2 = 1$.

Ο \hat{R}_2 αντιστοιχεί σε στροφή κατά $\pi/2$ γύρω από τον άξονα z' , δηλαδή $\hat{R}_2(x', y', z') = (y', -x', z')$. Για τις συντεταγμένες (β, γ) ισχύει $\hat{R}_2(\beta, \gamma) = (\beta, -\gamma)$, ενώ για τις γωνίες Euler: $\hat{R}_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi/2)$. Προφανώς, $\hat{R}_2^4 = 1$.

Ο \hat{R}_3 αντιστοιχεί σε κυκλική εναλλαγή των αξόνων $\hat{R}_3(x', y', z') = (y', z', x')$, οπότε, $\hat{R}_3^3 = 1$. Αυτό αντιστοιχεί σε $\hat{R}_3(\beta, \gamma) = (\beta, \gamma + 2\pi/3)$ και για τις γωνίες Euler $\hat{R}_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1, \theta_2 + \pi/2, \theta_3 + \pi/2)$.

Ταυτόχρονα οι κυματοσυναρτήσεις πρέπει να έχουν την ίδια τιμή και στα 24 διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων, οπότε θα πρέπει:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1\psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \psi(\beta, \gamma, \theta_1 + \pi, \pi - \theta_2, -\theta_3) \\ \hat{R}_2\psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \psi(\beta, -\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi/2) \\ \hat{R}_3\psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \psi(\beta, \gamma + 2\pi/3, \theta_1, \theta_2 + \pi/2, \theta_3 + \pi/2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 Πυρηνική δόνηση τετραπολικού βαθμού

Θεωρώντας μικρές παραμέτρους παραμόρφωσης $\alpha_{\lambda,\mu}$, η χαμιλτονιανή που περιγράφει την ταλάντωση της υγρής σταγόνας δίνεται από τη σχέση

$$H = T + V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} (B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda,\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda,\mu}|^2) \quad (2.12)$$

Υποθέτοντας ασυμπίεστο πυρήνα σταθερής πυκνότητας ρ_0 και αστρόβιλη ροή, που είναι και η απλούστερη περίπτωση, οι παράμετροι B_λ και C_λ παίρνουν τη μορφή

$$B_\lambda = \frac{1}{\lambda} \rho_0 R_0^5 \quad (2.13)$$

$$C_\lambda = (\lambda - 1) \left((\lambda + 2) R_0^2 \sigma - \frac{3e^2 Z^2}{2\pi (2\lambda + 1) R_0} \right) \quad (2.14)$$

όπου σ η επιφανειακή τάση.

Προκειμένου να πετύχουμε την κβάντωση της χαμιλτονιανής, περιοριζόμενοι στην περίπτωση της τετραπολικής ταλάντωσης, $\lambda = 2$, εισάγουμε τις συζυγείς ορμές

$$\pi_{2\mu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} = B_2 \dot{\alpha}_{2\mu}^* \quad (2.15)$$

οι οποίες σε μορφή τελεστή γράφονται $\hat{\pi}_{2\mu} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha_{2\mu}}$. Στη συνέχεια, εισάγοντας τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής $\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger, \hat{\beta}_{2\mu}$:

$$\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger = \sqrt{\frac{B_2 \omega_2}{2\hbar}} \hat{\alpha}_{2\mu} - i \sqrt{\frac{1}{2B_2 \hbar \omega_2}} (-1)^\mu \pi_{2-\mu} \quad (2.16)$$

$$\hat{\beta}_{2\mu} = \sqrt{\frac{B_2 \omega_2}{2\hbar}} (-1)^\mu \hat{\alpha}_{2-\mu} + i \sqrt{\frac{1}{2B_2 \hbar \omega_2}} \pi_{2\mu} \quad (2.17)$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger, \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{\beta}_{2\mu}, \hat{\beta}_{2\mu'}] = 0, \quad [\hat{\beta}_{2\mu}, \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'} \quad (2.18)$$

παίρνουμε την χβαντισμένη χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \hbar\omega_2 \left(\sum_{\mu=-2}^{\mu=2} \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu} + \frac{5}{2} \right). \quad (2.19)$$

όπου $\omega_2 = \sqrt{C_2/B_2}$. Οι τελεστές $\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger$ δημιουργούν φωνόνια στροφορμής 2, ενώ εισάγοντας κατά τα γνωστά τον τελεστή που καταμετρά τα φωνόνια $N = \sum_{\mu} \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu}$, οι ενέργειες δίνονται από την $E_N = \hbar\omega_2 (N + 5/2)$

2.3 Αξονικά συμμετρικός ταλαντωτής

Υποθέτοντας ότι ο πυρήνας είναι μόνιμα παραμορφωμένος στη βασική του κατάσταση και ότι οι διεγέρσεις προέρχονται από περιστροφές και μικρές ταλαντώσεις γύρω από την παραμορφωμένη θέση ισορροπίας, επιλέγουμε τη χρήση των συντεταγμένων (a_2, a_0, Ω) κατά τους κύριους άξονες του σώματος. Το δυναμικό παρουσιάζει ένα σαφώς εκδηλωμένο ελάχιστο για $a_0 = \beta_0, a_2 = 0$ ή $\beta = \beta_0, \gamma = 0$.

Η κινητική ενέργεια της σχέσης (2.12) γράφεται συναρτήσει των καινούριων συντεταγμένων (β, γ, Ω)

$$T = T_{vib} + T_{rot} = \frac{1}{2}B_2 (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathcal{J}_k \omega_k'^2, \quad (2.20)$$

όπου ω_k' είναι η γωνιακή ταχύτητα ως προς τους κύριους άξονες του σώματος και \mathcal{J}_k είναι οι ροπές αδράνειας

$$\mathcal{J}_k = 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right) \quad (2.21)$$

Επόμενο βήμα είναι η χβάντωση της χαμιλτονιανής. Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες x_i , το γραμμικό στοιχείο έχει τη μορφή

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j \quad (2.22)$$

όπου $g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}$ ο μετρικός τανυστής. Ο τελεστής της κινητικής ενέργειας ως γνωστόν δίνεται από τη σχέση $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B} \nabla^2$, ενώ η λαπλασιανή σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (2.23)$$

όπου g είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή και g^{-1} ο αντίστροφός της.

12ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Από τα παραπάνω προκύπτει η χαμιλτονιανή [βλ. Παράρτημα Α]

$$\begin{aligned}
 H &= T + V(\beta, \gamma) \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left| \sin 3\gamma \right| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{8B\beta^2} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} + V(\beta, \gamma)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

με στοιχείο όγκου

$$dV = \beta^4 |\sin 3\gamma| d\beta d\gamma d^3\theta \tag{2.25}$$

Περιοριζόμενοι στο σημείο όπου το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο, $\beta = \beta_0, \gamma = 0$, οι ροπές αδράνειας μεταπίπτουν σε

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 3B\beta^2, \mathcal{J}_3 = 4B\beta^2 \sin^2 \gamma. \tag{2.26}$$

Οι ιδιοτιμές των $\hat{J}'^2, \hat{J}_3'^2$ (ως προς το σύστημα των κύριων αξόνων του πυρήνα), $\hat{J}_z'^2$ (ως προς το σταθερό σύστημα του εργαστηρίου) είναι αντίστοιχα $\hbar^2 I(I+1), \hbar^2 K^2, \hbar^2 M^2$.

Τελικά η κυματοσυνάρτηση, λαμβάνοντας υπόψιν τις συμμετρίες της κυματοσυνάρτησης κάτω από τους τελεστές στροφής $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3$ γράφεται

$$\psi_{IMKn_\beta n_\gamma} = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left(D_{MK}^{(I)*} + (-1)^I D_{M-K}^{(I)*} \right) g_{n_\gamma}(\gamma) f_{n_\beta}(\beta) \tag{2.27}$$

και οι επιτρεπόμενες ενέργειες δίνονται από τον τύπο

$$E_{n_\beta n_\gamma IK} = \hbar\omega_\beta \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_\gamma \left(2n_\gamma + \frac{1}{2} |K| + 1 \right) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} [I(I+1) - K^2] \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
 K &= 0, 2, 4, \dots \\
 I &= K, K+1, K+2, \dots \text{ για } K \neq 0 \\
 I &= 0, 2, 4, \dots \text{ για } K = 0 \\
 M &= -I, -I+1, \dots, +I \\
 n_\gamma &= 0, 1, 2, \dots, \quad n_\beta = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

2.4 Τριαξονικός περιστροφάς

Το φάσμα του τριαξονικού περιστροφάς μελετήθηκε αρχικά από τους Davydov και Fillipov [8]. Η χαμιλτονιανή του ασυμμετρικού περιστροφάς δίνεται από τη σχέση

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{J}_i'^2}{2\mathcal{J}_k}, \tag{2.29}$$

όπου όλες οι ροπές αδράνειας διαφέρουν μεταξύ τους. Στην περίπτωση του τριαξονικού περιστροφάς και οι τρεις άξονες του πυρήνα διαφέρουν μεταξύ τους, οπότε η τοποθέτηση ενός συστήματος συντεταγμένων πάνω τους δε δίνει πολλές επιλογές. Η μόνη

επιλογή που κάποιος έχει είναι $x' \rightarrow -x'$, $y' \rightarrow -y'$, $z' \rightarrow -z'$. Μία από τις συμμετρικές που επιτρέπονται είναι η \hat{R}_2^2 η οποία αντιστοιχεί σε $(x', y', z') \rightarrow (-x', -y', -z')$ και μετασχηματίζει τις γωνίες Euler σε $(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi)$. Από τον πίνακα περιστροφής

$$\begin{aligned} D_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi) = \\ \langle IM | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta_1 J_z\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta_2 J_y\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\theta_3 + \pi)J_z\right) | IK \rangle = \\ \exp(-i(\theta_1 M + (\theta_3 + \pi)K)J_z) d_{MK}^{(I)}(\theta_2) = \\ \exp(-i\pi K) D_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \end{aligned}$$

όπου $d_{MK}^{(I)}(\theta_2) = \langle IM | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta_2 J_y\right) | IK \rangle$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να υπάρχει αναλλοίωτο θα πρέπει $K=0,2,4,\dots$. Με τον ίδιο τρόπο, η συμμετρία \hat{R}_1 : $(x', y', z') \rightarrow (x', -y', -z')$ μετασχηματίζει τον $D_{MK}^{(I)*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ σε $(-1)^I D_{M-K}^{(I)*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Η παραπάνω συμμετρία ικανοποιείται συμμετροποιώντας την κυματοσυνάρτηση

$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left(D_{MK}^{(I)*}(\theta) + (-1)^I D_{M-K}^{(I)*}(\theta) \right) \quad (2.30)$$

Γενικά, ο κβαντικός αριθμός K παίρνει τις μη μηδενικές, άρτιες τιμές $0 \leq K \leq I$. Για $K=0$ η ολική στροφορμή μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές $I=0,2,4,\dots$, αλλιώς η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται.

Στη γενική περίπτωση, η χαμιλτονιανή (1.29) γράφεται ως εξής:

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_1} + \frac{1}{\mathcal{J}_2} \right) (\hat{J}'^2 - \hat{J}_3'^2) + \frac{\hat{J}_3'^2}{2\mathcal{J}_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_1} - \frac{1}{\mathcal{J}_2} \right) (\hat{J}_+'^2 + \hat{J}_-'^2) \quad (2.31)$$

και διαγωνοποιείται.

2.5 γ-ασταθής ταλαντωτής

Η γ-ασταθής περίπτωση, η οποία μελετήθηκε από τους Wilet, Jean [9], δίνει μια ακόμα λύση στα πλαίσια του συλλογικού προτύπου. Το δυναμικό έχει ελάχιστο σε κάποιο β_0 και είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής γ , $V(\beta, \gamma) = V(\beta)$.

Η χαμιλτονιανή, όπως και πριν, μπορεί να γραφτεί στους κύριους άξονες του πυρήνα:

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left| \sin 3\gamma \right| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \\ & - \frac{1}{8B\beta^2} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi k}{3}\right)} + V(\beta) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Οι κυματοσυναρτήσεις δίνονται από τη σχέση:

$$\psi_{n\beta\lambda IMK} = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2} \frac{f_{n\beta\lambda}(\beta)}{\beta^2}} \sum_{K=-I}^I g_{\lambda IK}(\gamma) D_{MK}^{(I)}(\theta) \quad (2.33)$$

Οι ενέργειες δίνονται από την έκφραση

$$\varepsilon_{n_\beta\lambda} = \sqrt{\frac{B}{C}} \left(n_\beta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_\lambda \right) - \frac{1}{4}C\beta_0^2 - D \quad (2.34)$$

όπου $\alpha_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{BC}\beta_0^4 + (2\lambda + 3)^2}$, D το βάθος του ελάχιστου του δυναμικού και $\lambda = 0, \dots, \infty$ ο κβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας $O(5)$. Οι επιτρεπόμενες στροφορμές για ένα συνδυασμό (n_β, λ) περιορίζονται στις 2λ .

2.6 Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$

Οι δυναμικές συμμετρίες είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που επιτρέπει την περιγραφή ιδιοτήτων φυσικών συστημάτων, ανάμεσά τους και των πυρήνων. Δυναμική συμμετρία είναι η κατάσταση κατά την οποία ο τελεστής της χαμιλτονιανής H μπορεί να γραφεί συναρτήσει των τελεστών Casimir μιας αλυσίδας αλγεβρών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εμφάνισης δυναμικής συμμετρίας είναι το Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων (Interacting Boson Model, IBM) [10]. Στο IBM, οι χαμηλοενεργειακές συλλογικές καταστάσεις του πυρήνα περιγράφονται με τη βοήθεια μποζονίων στροφορμής 0 (s -μποζόνια) και στροφορμής 2 (d -μποζόνια), μέσω των οποίων προκύπτει η συμμετρία $U(6)$. Βρίσκοντας τις αλυσίδες υποαλγεβρών της άλγεβρας $U(6)$ του προτύπου, μπορούν να βρεθούν όλες οι δυναμικές συμμετρίες. Έτσι, στο IBM υπάρχουν τρεις δυναμικές συμμετρίες, το όνομα των οποίων προκύπτει από το όνομα της πρώτης άλγεβρας της αλυσίδας αλγεβρών. Η $U(5)$ αντιστοιχεί σε σφαιρικούς πυρήνες, η $SU(3)$ είναι κατάλληλη για ορισμένους ωσειδείς πυρήνες, ενώ η $O(6)$ χρησιμοποιείται για την περιγραφή αξονικά ασταθών πυρήνων. Μεταξύ αυτών των συμμετριών συμβαίνουν αλλαγές φάσης [11], οι οποίες προκύπτουν σε Χαμιλτονιανές του τύπου $H = c(H_1 + gH_2)$, όπου c είναι παράγοντας κλίμακας, g είναι παράμετρος ελέγχου και οι H_1, H_2 περιγράφουν τις δύο φάσεις του συστήματος. Οι αλλαγές φάσεις στο πλαίσιο του IBM έχουν μελετηθεί εδώ και 30 χρόνια [11] χρησιμοποιώντας το κλασικό όριο του προτύπου [12], [13]. Έχει βρεθεί ότι η μετάβαση μεταξύ σφαιρικών $U(5)$ και γ -ασταθών $SO(6)$ πυρήνων είναι δεύτερης τάξης, ενώ η μετάβαση μεταξύ σφαιρικών $U(5)$ και ωσειδών πυρήνων $SU(3)$ είναι πρώτης τάξης. Δεν υπάρχει αλλαγή φάσης μεταξύ ωσειδών και γ -ασταθών πυρήνων. Οι τρεις συμμετρίες του IBM, καθώς και οι αλλαγές φάσεις σχήματος μεταξύ αυτών συνηθίζεται να τοποθετούνται στο τρίγωνο συμμετριών του IBM [14].

Στα πλαίσια του συλλογικού προτύπου βρέθηκε ότι οι ιδιότητες των πυρήνων που βρίσκονται στο κρίσιμο σημείο μιας αλλαγής φάσης μπορούν να περιγραφούν με ειδικές λύσεις της χαμιλτονιανής του Bohr, οι οποίες λύσεις ονομάζονται συμμετρίες κρίσιμου σημείου. Η συμμετρία κρίσιμου σημείου $X(5)$ [15] αντιστοιχεί σε αλλαγή φάσης πρώτης τάξης, ενώ η $E(5)$ [16] σε αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης. Με τις συμμετρίες $E(5)$ και $X(5)$ εισάγονται καινούριες δυναμικές συμμετρίες, οι οποίες σχετίζονται με την ακριβή επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Παρακάτω θα εξετάσουμε ξεχωριστά τα πρότυπα $E(5)$

και X(5). Η βασική διαφορά των δύο προτύπων έγκειται στη διαφορετική παραδοχή ως προς το γ -βαθμό ελευθερίας.

2.6.1 Το πρότυπο E(5)

Ξεκινώντας από τη χαμιλτονιανή του Bohr

$$\begin{aligned} H &= T + V(\beta, \gamma) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left| \sin 3\gamma \right| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \\ &\quad - \frac{1}{8B\beta^2} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} + V(\beta, \gamma) \end{aligned} \quad (2.35)$$

και θεωρώντας δυναμικό που εξαρτάται μόνο από το β , $V(\beta, \gamma) = V(\beta)$ οι κυματοσυναρτήσεις γράφονται στη μορφή

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta) \Phi(\gamma, \theta_i) \quad (2.36)$$

Κάνοντας χωρισμό μεταβλητών προκύπτουν δύο εξισώσεις. Η εξίσωση που περιέχει τις γωνίες είναι η

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left| \sin 3\gamma \right| \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} \right] \Phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_i), \quad (2.37)$$

όπου $\Lambda = \tau(\tau+3)$, $\tau = 0, 1, 2, \dots$, με Λ^2 τον τελεστή Casimir της ομάδας O(5), το ανάλογο σε 5 διαστάσεις του l^2 , του τετραγώνου της στροφορμής στις τρεις διαστάσεις [17] και τ τον κβαντικό αριθμό που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της O(5) [18].

Η εξίσωση που περιγράφει τη μεταβλητή β είναι η

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\Lambda}{\beta^2} \right) + V(\beta) \right] f(\beta) = E f(\beta) \quad (2.38)$$

Εισάγοντας ανηγμένες ενέργειες και δυναμικά $\epsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$, $u = \frac{2B}{\hbar^2} V$, η εξίσωση (2.38) απλοποιείται στην

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \epsilon f(\beta) \quad (2.39)$$

Αντικαθιστώντας $\phi(\beta) = \beta^{3/2} f(\beta)$ παίρνουμε

$$\phi'' + \frac{\phi'}{\beta} + \left[\epsilon - u(\beta) - \frac{\left(\tau + \frac{3}{2} \right)^2}{\beta^2} \right] \phi = 0 \quad (2.40)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε την περίπτωση που το δυναμικό είναι πηγάδι άπειρου βάθους, με πλάτος β_w

$$u(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_w \\ \infty, & \beta > \beta_w \end{cases}$$

οπότε η εξίσωση (2.40) μετά από αλλαγή μεταβλητής $z = \beta k$ όπου $k = \sqrt{\epsilon}$ παίρνει την τυπική μορφή μιας εξίσωσης Bessel

$$\phi'' + \frac{\phi'}{z} + \left[1 - \frac{\left(\tau + \frac{3}{2}\right)^2}{z^2} \right] \phi = 0 \quad (2.41)$$

με τάξη $\nu = \tau + \frac{3}{2}$ και λύσεις τις συναρτήσεις Bessel $J_\nu(z)$.

Η συνοριακή συνθήκη $\phi(\beta_w) = 0$ επιβάλλει, αν οι ρίζες της $\phi(z) = 0$ είναι οι $x_{\xi,\tau}$, με ξ τη σειρά εμφάνισης της ρίζας, να ισχύει $x_{\xi,\tau} = k_{\xi,\tau}\beta_w$. Επειδή, $\epsilon = k_{\xi,\tau}^2$

$$\epsilon = \left(\frac{x_{\xi,\tau}}{\beta_w} \right)^2 \Rightarrow E_{\xi,\tau} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{\xi,\tau}^2. \quad (2.42)$$

Προκειμένου να απαλειφθεί το πλάτος του πηγαδιού β_w , θεωρούμε λόγους ενεργειών ως προς την ενέργεια της πρώτης διεγερμένης στάθμης, δηλαδή $E_{\xi=1,L=2} - E_{\xi=1,L=0}$. Η $x_{\xi,\tau}$ αντιστοιχεί στη ρίζα με σειρά εμφάνισης ξ και τάξη $\nu = \tau + \frac{3}{2}$.

Οι κυματοσυναρτήσεις παίρνουν τη μορφή $f_{\xi,\tau} = c_{\xi,\tau}\beta_w^{-\frac{3}{2}}J_{\tau+\frac{3}{2}}(k_{\xi,\tau}\beta_w)$. Η σταθερά κανονικοποίησης $c_{\xi,\tau}$ προκύπτει από τη σχέση $\int_0^{\beta_w} \beta^4 d\beta f^2(\beta) = 1$ και από τη σχέση ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Bessel ίση με

$$c_{\xi,\tau} = \frac{\sqrt{2}}{\beta_w} J_{\tau+\frac{5}{2}}^{-1}(x_{\xi,\tau}). \quad (2.43)$$

Η συμμετρία που προκύπτει από αυτό το ακριβώς επιλύσιμο πρόβλημα ονομάζεται $E(5)$, καθώς οι εξισώσεις Bessel αποτελούν βάση για τις αναπαραστάσεις της ευκλείδειας άλγεβρας E και 5 είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος.

Οι ρυθμοί ηλεκτρομαγνητικών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$ υπολογίζονται με τη βοήθεια του τετραπολικού τελεστή

$$T^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)} \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)} + D_{\mu,-2}^{(2)} \right) \sin \gamma \right], \quad (2.44)$$

όπου t παράγοντας κλίμακας και έχουν τη μορφή

$$B(E2; \rho_i L_i \rightarrow \rho_f L_f) = \frac{1}{2L_i + 1} \left| \langle \rho_f L_f || T^{(E2)} || \rho_i L_i \rangle \right|^2 \quad (2.45)$$

Όπως και στις ενέργειες, θεωρούμε λόγους ρυθμών μεταβάσεων, κανονικοποιώντας στη χαμηλότερη μετάβαση, $B(E2 : 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) = 100$.

2.6.2 Πειραματικές εκδηλώσεις της $E(5)$

Ο πρώτος πυρήνας με εξακριβωμένη $E(5)$ συμπεριφορά ήταν το ^{134}Ba [19], ενώ το ^{102}Pb [20] επίσης φέρεται ως καλός υποψήφιος. Περαιτέρω μελέτες επιβεβαίωσαν τα συμπεράσματα για το ^{134}Ba [21]. Οι πυρήνες ^{104}Ru [22], ^{108}Pb [23], ^{114}Cd [24] και ^{130}Xe [25] επίσης έχουν προταθεί ως δυνατοί υποψήφιοι. Μια συστηματική έρευνα [26, 27]

στα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ενεργειών και ρυθμών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$, έδειξε ότι οι πυρήνες ^{102}Pb , $^{106,108}\text{Cd}$, ^{124}Te , ^{128}Xe και ^{138}Ba είναι δυνατοί υποψήφιοι, ξεχωρίζοντας τους ^{128}Xe και ^{138}Ba . Αυτή η έρευνα έρχεται σε συμφωνία με μια μεταγενέστερη [28], όπου μετρήσεις στις των διπολικών μεταβάσεων $E1$ και $M1$ στους πυρήνες $^{124-136}\text{Xe}$ έδωσαν ενδείξεις για αλλαγή φάσης για $A \simeq 130$. Ένας ακόμη υποψήφιος είναι το ^{58}Cr [29].

2.6.3 Το πρότυπο $X(5)$

Σε σύγκριση με το πρότυπο $E(5)$, εδώ δεν υπάρχει ακριβής λύση της εξίσωσης του Bohr, παρά μόνο προσεγγιστική. Συγκεκριμένα, ξεκινώντας πάλι από τη χαμιλτονιανή του Bohr, θεωρούμε ότι το δυναμικό έχει ελάχιστο για $\gamma = 0$ και ψάχνουμε λύσεις της μορφής $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_K^L(\beta, \gamma) D_{M,K}^L(\theta_i)$.

Για $\gamma = 0$, ο τελευταίος όρος της χαμιλτονιανής παίρνει τη μορφή

$$\sum_{\kappa=1}^3 \frac{Q_{\kappa}^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi\kappa)} \simeq \frac{4}{3} (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \quad (2.46)$$

Εισάγοντας ανηγμένες ενέργειες και δυναμικά $\epsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$ και $u = \frac{2B}{\hbar^2} V$, παίρνουμε την εξίσωση

$$\left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\beta^2} \left[\frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] \right\} \varphi_K^L(\beta, \gamma) + u(\beta, \gamma) \varphi_K^L(\beta, \gamma) = \epsilon \varphi_K^L(\beta, \gamma). \quad (2.47)$$

Θεωρώντας τώρα δυναμικά της μορφής $u(\beta, \gamma) = \tilde{u}(\beta) + v(\gamma)$ και κυματοσυναρτήσεις της μορφής $\varphi_K^L(\beta, \gamma) = \xi_L(\beta) \eta_K(\gamma)$, η (2.45) χωρίζεται στις εξής δύο εξισώσεις

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + \tilde{u}(\beta) \right] \xi_L(\beta) = \epsilon_{\beta} \xi_L(\beta), \quad (2.48)$$

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4 \langle \beta^2 \rangle} K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = \epsilon_{\gamma} \eta_K(\gamma), \quad (2.49)$$

όπου $\epsilon = \epsilon_{\beta} + \epsilon_{\gamma}$ και $\langle \beta^2 \rangle$ ο μέσος όρος του β^2 ως προς $\xi(\beta)$. Υποθέτουμε τώρα ότι το δυναμικό είναι τετραγωνικό πηγάδι ως προς τη μεταβλητή β και αρμονικός ταλαντωτής ως προς τη γ . Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν να επιλυθούν οι δύο εξισώσεις για τις $\xi_L(\beta)$ και $\eta_K(\gamma)$.

Θεωρώντας για το β μέρος, όπως και πριν, δυναμικό

$$\tilde{u}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_w \\ \infty, & \beta > \beta_w \end{cases}$$

18ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

και αντικαθιστώντας $\tilde{\xi}(\beta) = \beta^{\frac{3}{2}}\xi(\beta)$ και εν συνεχεία $z = \beta k_\beta$ με $k_\beta = \sqrt{\epsilon_\beta}$ παίρνουμε την εξίσωση Bessel

$$\tilde{\xi}'' + \frac{\tilde{\xi}'}{z} + \left[1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right] \tilde{\xi} = 0 \quad (2.50)$$

με $\nu = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. Από την οριακή συνθήκη $\tilde{\xi}(\beta_w) = 0$ προκύπτει ότι $x_{s,L} = k_{s,L}\beta_w$. Επειδή $\epsilon_{\beta;s,L} = k_{s,L}^2$,

$$\epsilon = \left(\frac{x_{s,L}}{\beta_w}\right)^2 \Rightarrow E_{\beta;s,L} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{s,L}^2 \quad (2.51)$$

, όπου $x_{s,L}$ είναι οι ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_\nu(z)$ με σειρά εμφάνισης s και τάξη $\nu = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Οι κυματοσυναρτήσεις παίρνουν τη μορφή $\xi_{s,L} = c_{s,L}\beta^{-\frac{3}{2}}J_\nu(k_{s,L}\beta)$ και η σταθερά κανονικοποίησης προκύπτει από τη συνθήκη $\int_0^{\beta_w} \beta^4 \xi_{s,L}^2(\beta) d\beta = 1$ ίση με

$$c_{s,L} = \frac{\sqrt{2}}{\beta_w} J_{\nu+1}^{-1}(x_{s,L}). \quad (2.52)$$

Για το γ κομμάτι του φάσματος, με την παραδοχή $\gamma \simeq 0$, αναπτύσσουμε τους όρους $\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma}$ και $\frac{1}{\sin^2 \gamma}$ γύρω από το μηδέν, οπότε,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4}{3}\right) + \langle \beta^2 \rangle (\epsilon_\gamma - u_\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = 0 \quad (2.53)$$

Για δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή $v_\gamma = c^2\gamma^2$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 \frac{1}{\gamma^2} + (\tilde{\epsilon}_\gamma - c^2\gamma^2) \right] \eta_K(\gamma) = 0, \quad (2.54)$$

με $\tilde{\epsilon}_\gamma = \epsilon_\gamma + \frac{4}{3} \left(\frac{K}{2}\right)^2 \frac{1}{\langle \beta^2 \rangle}$.

Αντικαθιστούμε $\lambda = c\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}$ και $x = \sqrt{\lambda}\gamma$, οπότε προκύπτει η

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 \frac{1}{x^2} + \tilde{\epsilon}_\gamma \langle \beta^2 \rangle \lambda^{-1} - x^2 \right] \eta_K(x) = 0 \quad (2.55)$$

Θέτοντας $\kappa = \tilde{\epsilon}_\gamma \langle \beta^2 \rangle \lambda^{-1}$, $\alpha = \frac{K}{2}$ η (2.51) επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\eta_K(x) = c \exp^{-\frac{x^2}{2}} x^{|\alpha|} W(x) \quad (2.56)$$

Αντικαθιστώντας την (2.52) στην (2.51) και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, $t = x^2$, έχουμε την εξίσωση

$$t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial W}{\partial t} (1 + \alpha - t) + W(t) \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{4}\right) \quad (2.57)$$

Θέτοντας $b = 1 + \alpha$, $a = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{\kappa}{4}$ η (2.53) παίρνει τη μορφή της εξίσωσης Kummer

$$t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + (b-t) \frac{\partial W}{\partial t} - aW = 0 \quad (2.58)$$

με λύσεις

$$W(t) \sim_1 F_1(a, b, t) \text{ ή}$$

$$W(t) \sim_1 F_1(a, b, x^2), \text{ οπότε}$$

$$\eta_{n,\alpha} = ce^{-\frac{x^2}{2}} x^{|\alpha|} L_n^{(|\alpha|)}(x) \text{ ή}$$

$$\eta_{n,K} = c_{n,K} e^{-\frac{\lambda\gamma^2}{2}} \gamma^{|\frac{K}{2}|} L_n^{(|\frac{K}{2}|)}(\lambda\gamma^2).$$

Οι ενέργειες δίνονται από τη συνθήκη κβάντωσης, $a = -n$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$, οπότε $-2n = \alpha + 1 - \frac{\kappa}{2} \Rightarrow \frac{\tilde{\epsilon}_\gamma \langle \beta^2 \rangle^{\lambda-1}}{2} = 2n + \alpha + 1 \Rightarrow \tilde{\epsilon}_\gamma = \frac{2c}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} \left(2n + \frac{K}{2} + 1 \right)$

Για την ενέργεια ϵ_γ ισχύει λοιπόν:

$$\epsilon_\gamma = \frac{2c}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} \left(2n + \frac{K}{2} + 1 \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{K}{2} \right)^2 \frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \quad (2.59)$$

Θέτοντας $n = \frac{1}{2} \left(n_\gamma - \frac{K}{2} \right)$ προκύπτουν οι δυνατοί συνδυασμοί τιμών για τα n_γ και K ,

$$n_\gamma = 0, K = 0; \quad n_\gamma = 1, K = 1; \quad n_\gamma = 2, K = 0, \pm 4; \dots \quad (2.60)$$

Η σταθερά κανονικοποίησης $c_{n,K}$ προκύπτει από τη συνθήκη $\int_0^\infty \left(\eta_{n,K}^2(\gamma) \right)^2 \gamma d\gamma = 1$ και τη σχέση ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Laguerre, να είναι

$$c_{n,K} = \sqrt{\frac{n! 2\lambda^{\frac{K}{2}+1}}{\Gamma\left(n + \frac{K}{2} + 1\right)}}. \quad (2.61)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε τη γενική έκφραση

$$E(s, L, n_\gamma, K, M) = E_0 + B (x_{s,L})^2 + A n_\gamma + C K^2 \quad (2.62)$$

Η συμμετροποιημένη κυματοσυνάρτηση γράφεται

$$\Psi_{s,L,n_\gamma,K,M}(\beta, \gamma, \vartheta_i) \simeq \left[\varphi_{L,K}(\beta, \gamma) D_{M,K}^L(\vartheta_i) + (-1)^{L+K} \varphi_{L,-K}(\beta, \gamma) D_{M,-K}^L \right]. \quad (2.63)$$

Για τον υπολογισμό των ρυθμών ηλεκτρομαγνητικών μεταβάσεων, ο ηλεκτρικός τετραπολικός τελεστής με την προσέγγιση $\gamma \simeq 0$ απλοποιείται σε $T^{(E2)} = t\beta D_{\mu,0}^{(2)}$.

Όπως και στο πρότυπο E(5), χρησιμοποιούνται λόγοι ενεργειών και λόγοι ρυθμών μεταβάσεων, ώστε τα αριθμητικά αποτελέσματα να μην περιέχουν ελεύθερες παραμέτρους.

2.6.4 Πειραματικές εκδηλώσεις της X(5)

Το πρώτο παράδειγμα πυρήνα με διαπιστωμένη X(5) συμπεριφορά ήταν αυτό του ^{152}Sm [30], καθώς και το ^{150}Nd [31]. Επιπλέον δουλειά στο ^{152}Sm [32, 33, 34] και στο ^{150}Nd

20ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

[33, 34, 35] επιβεβαίωσαν τα προηγούμενα. Τα γειτονικά ισότονα με $N=90$, ^{154}Gd [36, 37] και ^{156}Dy [37, 38] θεωρήθηκαν επίσης καλά παραδείγματα $X(5)$, αν και το δεύτερο σε μικρότερο βαθμό.

Στην περιοχή των βαρύτερων πυρήνων, τα ^{162}Yb [39] και ^{166}Hf [40] θεωρήθηκαν καλοί υποψήφιοι. Μετέπειτα πειράματα στους ^{176}Os και ^{176}Os [37], έδειξαν ότι ο τελευταίος πυρήνας είναι καλό παράδειγμα $X(5)$. Μία συστηματική μελέτη [42] στα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ενεργειών και ρυθμών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$, έδειξε ότι οι πυρήνες ^{126}Ba και ^{130}Ce είναι πιθανοί καλοί υποψήφιοι μαζί με τα ισότονα με $N=90$ των Nd , Sm , Gd , Dy . Μία παρόμοια μελέτη σε ελαφρύτερους πυρήνες [43] πρότεινε τους ^{76}Sr , ^{78}Sr , ^{80}Zr ως πιθανούς υποψήφιους. Το ^{104}Mo είχε προταθεί για $X(5)$ υποψήφιος με βάση τα διαθέσιμα φάσματα [43, 44], αλλά μεταγενέστερες μελέτες στις τιμές των ρυθμών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$ έδειξαν ότι είναι πιο κοντά στο όριο του συμπαγούς περιστροφέα [45]. Το ^{122}Ba είναι υπό εξέταση [46], καθώς η θεμελιώδης ζώνη του συμπίπτει με τις προβλέψεις του $X(5)$.

Κεφάλαιο 3

Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων (IBM)

3.1 Οι δυναμικές συμμετρίες του IBM

Το IBM εισήχθη από τους Arima και Iachello το 1974. Στην απλούστερη μορφή του, το πρότυπο υποθέτει ότι οι χαμηλοενεργειακές συλλογικές καταστάσεις των μεσαίου και μεγάλου βάρους άρτιων-άρτιων πυρήνων που βρίσκονται μακριά από κλειστούς φλοιούς κυριαρχούνται μόνο από διεγέρσεις των πρωτονίων και νετρονίων σθένους. Επιπλέον, θεωρείται ότι τα νουκλεόνια φτιάχνουν ζεύγη (ζεύγη πρωτονίων-πρωτονίων ή ζεύγη νετρονίων-νετρονίων), τα οποία αντιμετωπίζονται σαν μποζόνια. Μποζόνια με στροφορμή $L=0$ ονομάζονται s-μποζόνια, ενώ μποζόνια με στροφορμή $L=2$ ονομάζονται d-μποζόνια.

Ο αριθμός των ζευγών νουκλεονίων (μποζονίων) σθένους μετρείται από τον πιο κοντινό κλειστό φλοιό, δηλαδή, εάν είναι γεμάτος λιγότερο από το μισό του φλοιού, τότε ο αριθμός των μποζονίων είναι ίσος με τον αριθμό των ζευγών νουκλεονίων, ενώ αν είναι γεμάτος περισσότερο από το μισό του φλοιού, ο αριθμός των μποζονίων είναι ίσος με τον αριθμό των ζευγών οπών.

Οι δομικοί λίθοι του προτύπου είναι οι μποζονικοί τελεστές δημιουργίας και καταστροφής

$$\begin{cases} s^\dagger, d_\mu^\dagger & (\mu = 0, \pm 1, \pm 2), \\ s, d_\mu & (\mu = 0, \pm 1, \pm 2), \end{cases}$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[s, s^\dagger] = 1, \quad [d_\mu, d_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Όλοι οι άλλοι μεταθέτες μηδενίζονται. Ένας άλλος συμβολισμός των τελεστών δημιουργίας s^\dagger, d_μ^\dagger είναι ο $b_{l\mu}^\dagger$, όπου $l = 0, 2 \equiv s, d$. Έτσι, οι σχέσεις μετάθεσης των παραπάνω τελεστών συνοψίζονται στον εξής μεταθέτη:

$$[b_{l\mu}, b_{l'\mu'}^\dagger] = \delta_{ll'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (3.2)$$

Ενώ οι τελεστές δημιουργίας d_μ^\dagger συγκροτούν ένα σφαιρικό ταυυστικό τελεστή δεύτερης τάξης, δε συμβαίνει το ίδιο και με τους τελεστές καταστροφής d_μ , έτσι εισάγουμε τους

τελεστές

$$\tilde{b}_{l\mu} = (-1)^{l+\mu} b_{l,-\mu}, \quad (3.3)$$

οι οποίοι όντως συγκροτούν ένα σφαιρικό τανυστικό τελεστή. Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι

$$\tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}, \quad \tilde{s} = s. \quad (3.4)$$

Με τους σφαιρικούς τανυστικούς τελεστές μπορούμε να κατασκευάσουμε τανυστικά γινόμενα. Το τανυστικό γινόμενο δύο σφαιρικών τανυστικών τελεστών $T_{\kappa_1}^{k_1}, T_{\kappa_2}^{k_2}$ είναι

$$[T^{k_1} \otimes T^{k_2}]^{k_3} = \sum_{\kappa_1 \kappa_2} \langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k_3 \kappa_3 \rangle T_{\kappa_1}^{k_1} T_{\kappa_2}^{k_2}, \quad (3.5)$$

όπου $\langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k_3 \kappa_3 \rangle$ είναι οι τελεστές Glebsch-Gordan.

Εισάγουμε τώρα τους τελεστές

$$G_\kappa^k(l'l') = [b_l^\dagger \otimes \tilde{b}_{l'}]_\kappa^k, \quad (3.6)$$

όπου $l, l' = 0, 2 \equiv s, d$. Ο συμβολισμός σημαίνει ότι τα αντικείμενα στις αγκύλες με στροφορμή l και l' αντίστοιχα, συζεύγνυνται για να δημιουργήσουν ένα σφαιρικό τανυστικό τελεστής στροφορμής k .

Συμβαίνει οι σχέσεις μετάθεσης αυτών των τελεστών μεταξύ τους να είναι ίδιες με τις σχέσεις μετάθεσης της Lie άλγεβρας της ομάδας $U(6)$ των μοναδιακών μετασχηματισμών στις 6 διαστάσεις. Αυτοί οι τελεστές είναι επομένως οι γεννήτορες της άλγεβρας $U(6)$. Άρα η χαμιλτονιανή η οποία μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των παραπάνω τελεστών έχει τη δομή της άλγεβρας $U(6)$. Υπάρχουν συνολικά 36 γεννήτορες που μπορούν να γραφτούν αναλυτικά ως

$$G_0^0(ss) = [s^\dagger \otimes \tilde{s}]_0^0, \quad (3.7)$$

$$G_0^0(dd) = [d^\dagger \otimes \tilde{d}]_0^0, \quad (3.8)$$

$$G_\kappa^1(dd) = [d^\dagger \otimes \tilde{d}]_\kappa^1, \quad (3.9)$$

$$G_\kappa^2(dd) = [d^\dagger \otimes \tilde{d}]_\kappa^2, \quad (3.10)$$

$$G_\kappa^3(dd) = [d^\dagger \otimes \tilde{d}]_\kappa^3, \quad (3.11)$$

$$G_\kappa^4(dd) = [d^\dagger \otimes \tilde{d}]_\kappa^4, \quad (3.12)$$

$$G_\kappa^2(ds) = [d^\dagger \otimes \tilde{s}]_\kappa^2, \quad (3.13)$$

$$G_\kappa^2(sd) = [s^\dagger \otimes \tilde{d}]_\kappa^2. \quad (3.14)$$

Επόμενο βήμα είναι η εύρεση όλων των δυνατών αλυσίδων υποάλγεβρών της άλγεβρας $U(6)$, για λόγους κατασκευής μιας βάσης. Μια υποάλγεβρα κατασκευάζεται από ένα υποσύνολο των γεννητόρων της μεγαλύτερης άλγεβρας, της $U(6)$ στην περίπτωση μας, το οποίο πρέπει να είναι κλειστό κάτω από μεταθέσεις. Για εφαρμογές στην πυρηνική φυσική, θέλουμε καταστάσεις που να χαρακτηρίζονται από καλό κβαντικό αριθμό τη στροφορμή, δηλαδή πρέπει κάθε αλυσίδα να περιέχει την άλγεβρα $O(3)$. Λαμβάνοντας αυτόν τον περιορισμό υπόψιν μας, υπάρχουν μόνο τρεις πιθανές αλυσίδες υποάλγεβρών

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \quad (\text{I}) \quad (3.15)$$

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \quad (\text{II})$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \quad (\text{III})$$

Γνωρίζοντας τις παραπάνω αλυσίδες, μπορεί πλέον για κάθε μία από αυτές να κατασκευαστεί μια βάση, στην οποία η χαμιλτονιανή διαγωνοποιείται. Οι καταστάσεις που αντιστοιχούν στην κάθε αλυσίδα γράφονται συναρτήσει των κβαντικών αριθμών που χαρακτηρίζουν τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (μ.α.α.) των αλγεβρών που απαρτίζουν την εκάστοτε αλυσίδα.

Έτσι, οι καταστάσεις της πρώτης αλυσίδας έχουν τη μορφή

$$|[N](n_d)vn_\Delta L\rangle, \quad (3.16)$$

όπου

N είναι ο ολικός αριθμός μποζονίων, που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $U(6)$,

n_d είναι ο αριθμός των d μποζονίων, που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $U(5)$,

v είναι ο αριθμός των ζευγών μποζονίων που συζεύγγονται σε ολική στροφορμή διάφορη του μηδενός, χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(5)$ και ονομάζεται αρχαιότητα *seniority*,

n_Δ είναι ένας επιπλέον κβαντικός αριθμός, ο οποίος χρησιμοποιείται επειδή το βήμα από την άλγεβρα $O(5)$ στην $O(3)$ δεν είναι πλήρως αναγωγίσιμο και είναι ο αριθμός των τριπλετών μποζονίων που συζεύγγονται σε ολική στροφορμή διάφορη του μηδενός και τέλος,

L είναι η στροφορμή, που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(3)$

Κατά ανάλογο τρόπο οι καταστάσεις της δεύτερης αλυσίδας χαρακτηρίζονται από τους κβαντικούς αριθμούς

$$|[N](\lambda, \mu)\chi L\rangle, \quad (3.17)$$

όπου

(λ, μ) είναι οι δύο κβαντικοί αριθμοί που χαρακτηρίζουν τις μ.α.α. της $SU(3)$ και

χ είναι επιπλέον κβαντικός αριθμός, που χρησιμοποιείται επειδή το βήμα από την $SU(3)$ στην $O(3)$ δεν είναι πλήρως αναγωγίσιμο.

Οι καταστάσεις της τρίτης αλυσίδας έχουν μορφή

$$|[N](\sigma)\tau\nu_\delta L\rangle, \quad (3.18)$$

όπου

σ είναι ο κβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(6)$,

τ είναι ο κβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(5)$ και

n_Δ είναι επιπλέον κβαντικός αριθμός, που χρησιμοποιείται επειδή το βήμα από την $O(5)$ στην $O(3)$ δεν είναι πλήρως αναγωγίσιμο.

Η πιο γενική χαμιλτονιανή του IBM μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των τελεστών Casimir των αλγεβρών $U(5)$, $O(5)$, $O(3)$, $SU(3)$ και $O(6)$ [47], [10]. Επιπλέον, για τις παραπάνω τρεις αλυσίδες υποαλγεβρών, οι ιδιοτιμές της χαμιλτονιανής μπορούν να βρεθούν αναλυτικά, αν η χαμιλτονιανή μπορεί να γραφτεί με όρους των τελεστών Casimir μιας πλήρους αλυσίδας υποομάδων της $U(6)$. Έτσι, όπως αναφέρθηκε και πρωτίτερα, στην περίπτωση μας υπάρχουν τρεις δυναμικές συμμετρίες.

Η χαμιλτονιανή που χρησιμοποιείται συνήθως για εφαρμογές στην πυρηνική δομή έχει τη μορφή [48, 49]

$$H(\zeta, \chi) = c \left[(1 - \zeta)\hat{n}_d - \frac{\zeta}{4N_B} \hat{Q}^x \cdot \hat{Q}^x \right], \quad (3.19)$$

όπου $\hat{n}_d = d^\dagger \cdot \tilde{d}$, ο αριθμός των d -μποζονίων, είναι ο πρώτης τάξης τελεστής Casimir της $U(5)$, $\hat{Q}^x = (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s) + \chi(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}$ είναι ο τετραπολικός τελεστής, N_B είναι ο αριθμός των μποζονίων σθένους και c είναι παράγοντας κλίμακας. Η παραπάνω χαμιλτονιανή περιέχει δύο παραμέτρους, τις ζ και χ . Η παράμετρος ζ παίρνει τιμές από το 0 μέχρι το 1 και η χ από το 0 μέχρι το $-\sqrt{7}/2$. Για $\zeta = 0$ και τυχαίο χ , έχουμε συμμετρία $U(5)$, η οποία αντιστοιχεί σε δονητικούς πυρήνες. Για $\zeta = 1$ και $\chi = -\sqrt{7}/2$, έχουμε συμμετρία $SU(3)$, κατάλληλη για παραμορφωμένους ωσειδείς πυρήνες και τέλος για $\zeta = 1$, $\chi = 0$ έχουμε $O(6)$ συμμετρία, με την οποία περιγράφονται ασταθείς αξονικά ασύμμετροι πυρήνες. Οι παράμετροι ζ και χ ορίζουν ένα χώρο που ονομάζεται τρίγωνο του Casten (Σχήμα 3.1), με τις τρεις δυναμικές συμμετρίες τοποθετούνται στις κορυφές του εν λόγω τριγώνου.

3.2 Αλλαγές φάσης/σχήματος στο IBM

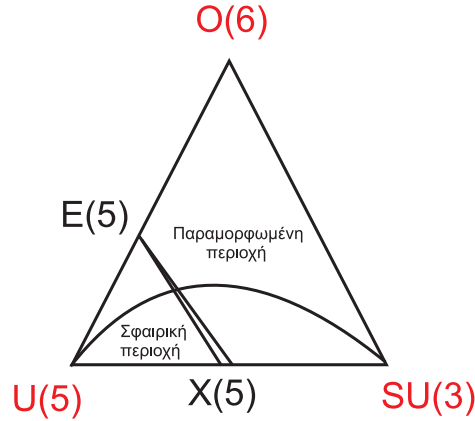
Ένα ενδιαφέρον ζήτημα στην πυρηνική δομή είναι η μελέτη των κβαντικών αλλαγών φάσης/σχήματος στους πυρήνες. Η κβαντική αλλαγή φάσης/σχήματος στους πυρήνες αναφέρεται στην αλλαγή της δομής του πυρήνα που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, είναι δηλαδή η αλλαγή από σφαιρικό σχήμα σε παραμορφωμένο. Αλλαγή φάσης/σχήματος συμβαίνει όταν μια παρατηρήσιμη ποσότητα ενός συστήματος αλλάζει απότομα καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος ελέγχου. Η παρατηρήσιμη ποσότητα ονομάζεται παράμετρος τάξης. Στην περίπτωση των πυρήνων, η κύρια παράμετρος ελέγχου είναι ο αριθμός των νουκλεονίων σθένους.

Οι αλλαγές φάσης/σχήματος εκδηλώνονται ως ασυνέχειες στην παράμετρο τάξης ή σε κάποια παράγωγο αυτής. Στη συνήθη ταξινόμηση κατά Ehrenfest, οι αλλαγές φάσης/σχήματος χαρακτηρίζονται ως πρώτης τάξης, αν η πρώτη παράγωγος της παραμέτρου τάξης είναι ασυνεχής στο κρίσιμο σημείο. Αντίστοιχα, οι αλλαγές φάσης/σχήματος χαρακτηρίζονται ως δεύτερης τάξης, αν η δεύτερη παράγωγος της παραμέτρου τάξης είναι ασυνεχής στο κρίσιμο σημείο.

Οι αλλαγές φάσης/σχήματος έχουν μελετηθεί και στο πλαίσιο του IBM [11], χρησιμοποιώντας το κλασικό όριο του προτύπου [12, 13]. Έχει βρεθεί ότι υπάρχει αλλαγή φάσης/σχήματος πρώτης τάξης μεταξύ των συμμετριών $U(5)$ και $SU(3)$, αλλαγή φάσης/σχήματος δεύτερης τάξης μεταξύ των συμμετριών $U(5)$ και $O(6)$, ενώ δεν υπάρχει καμία αλλαγή φάσης/σχήματος μεταξύ των συμμετριών $O(6)$ και $SU(3)$. Αυτές οι αλλαγές φάσης/σχήματος μπορούν να τοποθετηθούν στο τρίγωνο συμμετριών του IBM. Οι σφαιρικές και οι παραμορφωμένες φάσεις διαχωρίζονται από μια μικρή περιοχή συνύπαρξης φάσεων (η περιοχή ανάμεσα στις δύο γραμμές που ξεκινούν από την $E(5)$ και φτάνουν μέχρι την $X(5)$), η οποία συγκλίνει σε ένα σημείο, στο σημείο αλλαγής φάσης/σχήματος δεύτερης τάξης.

Για τη μελέτη των αλλαγών φάσης/σχήματος του IBM, χρησιμοποιείται ο φορμαλισμός των σύμφωνων καταστάσεων [51, 12, 13], μέσω του οποίου συνδέονται αλγεβρικά συστήματα με τα γεωμετρικά τους ανάλογα.

Πιο συγκεκριμένα, ορίζεται ως εσωτερική κατάσταση του IBM για ένα σύστημα



Σχήμα 3.1: Το τρίγωνο συμμετριών του IBM με τις τρεις δυναμικές συμμετρίες και τις συμμετρίες κρίσιμου σημείου E(5) και X(5). Στο σχήμα φαίνονται επίσης η περιοχή συνύπαρξης φάσεων, ανάμεσα στις δύο γραμμές που ξεκινούν από τη συμμετρία X(5) και καταλήγουν σε ένα σημείο στη συμμετρία E(5), αλλά και το τόξο κανονικότητας των Alhassid-Whelan [50].

2N νουκλεονίων σθένους, η κανονικοποιημένη σύμφωνη κατάσταση

$$|N; \beta, \gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!(1 + \beta^2)^N}} (B^\dagger)^N |0 \rangle, \quad (3.20)$$

όπου

$$B^\dagger = s^\dagger + \beta \left[\cos \gamma d_0^\dagger + \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} (d_2^\dagger + d_{-2}^\dagger) \right] \quad (3.21)$$

και $|0 \rangle$ είναι η κατάσταση διπλά κλειστού φλοιού των υπόλοιπων A-2N νουκλεονίων. Αυτή η σύμφωνη κατάσταση χρησιμοποιείται ως δοκιμαστική συνάρτηση σε έναν υπολογισμό αρχής μεταβολών, για να βρεθεί ένα άνω όριο της ενέργειας της θεμελιώδους κατάστασης της χαμιλτονιανής του IBM

$$E_N(\beta, \gamma) = \frac{\langle N; \beta, \gamma | \hat{H} | N; \beta, \gamma \rangle}{\langle N; \beta, \gamma | N; \beta, \gamma \rangle}. \quad (3.22)$$

Ελαχιστοποιώντας αυτήν την ενέργεια ως προς β και γ , μπορεί να βρεθεί μια ενεργειακή επιφάνεια για τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος, της μορφής (ακολουθείται ο συμβολισμός της εργασίας [52])

$$\mathcal{E}(\beta, \gamma) = \frac{N\beta^2}{1 + \beta^2} [1 - \xi(\chi^2 - 3)] - \frac{N(N-1)}{(1 + \beta^2)^2} \xi \left[4\beta^2 - 4\sqrt{\frac{2}{7}} \chi \beta^3 \cos 3\gamma + \frac{2}{7} \chi^2 \beta^4 \right] \quad (3.23)$$

26 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΩΝΤΩΝ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ (IBM)

όπου η παράμετρος ξ συνδέεται με την παράμετρο ζ μέσω της σχέσης

$$\xi = \frac{\zeta}{4N - 4N\zeta + \zeta}. \quad (3.24)$$

Συναρτήσει του ζ , η περιοχή συνύπαρξης φάσης/σχήματος ξεκινά όταν εμφανίζεται ένα παραμορφωμένο ελάχιστο μαζί με το σφαιρικό ελάχιστο, σημείο ζ^* και τελειώνει όταν παραμένει μόνο το παραμορφωμένο ελάχιστο. Το τελευταίο επιτυγχάνεται όταν η ενεργειακή επιφάνεια $\mathcal{E}(\beta, \gamma)$ γίνεται επίπεδη στο $\beta = 0$, ικανοποιώντας τη συνθήκη $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \beta^2} |_{\beta=0} = 0$, η οποία με τη σειρά της ικανοποιείται για [53]

$$\zeta^{**} = \frac{4N_B}{8N_B + \chi^2 - 8}. \quad (3.25)$$

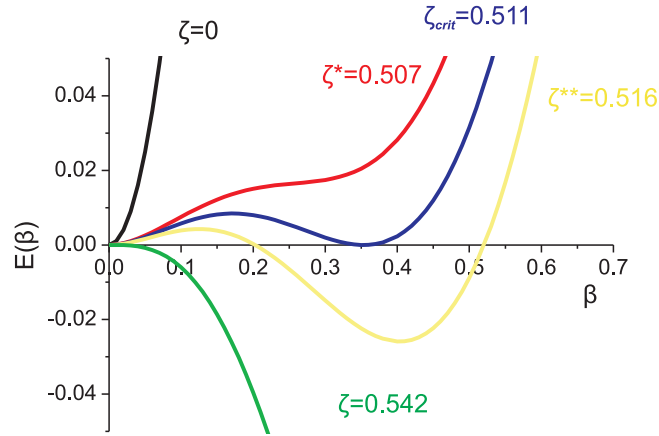
Μέσα στην περιοχή συνύπαρξης φάσεων υπάρχει ένα σημείο, το ζ_{crit} , όπου τα δύο ελάχιστα (σφαιρικό και παραμορφωμένο) είναι ίσα και η πρώτη παράγωγος της ενεργειακής επιφάνειας $\mathcal{E}(\beta, \gamma)$, $\partial \mathcal{E} / \partial \zeta$, είναι ασυνεχής, υποδηλώνοντας αλλαγή φάσης πρώτης τάξης. Για $\chi = -\sqrt{7}/2$, δηλαδή στο $U(5) - SU(3)$ πόδι του τριγώνου, αυτό το σημείο είναι το

$$\zeta_{crit} = \frac{16N_B}{34N_B - 27}. \quad (3.26)$$

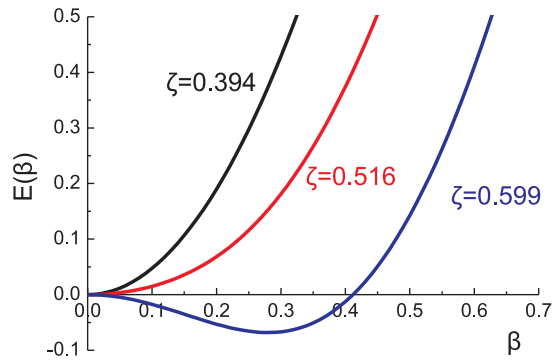
Είναι διδακτικό να κάνουμε τη γραφική παράσταση της ενεργειακής επιφάνειας συναρτήσει του β για διάφορες τιμές του ζ .

Για $\chi = -\sqrt{7}/2$, δηλαδή στο $U(5) - SU(3)$ πόδι του τριγώνου, η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Στο σημείο $\zeta = 0$, εμφανίζεται μόνο ένα ελάχιστο, στο $\beta = 0$, που αντιστοιχεί στο σφαιρικό σχήμα που έχει ο πυρήνας κοντά στη συμμετρία $U(5)$. Στο σημείο $\zeta^* = 0.507$, εμφανίζεται ένα παραμορφωμένο ελάχιστο μαζί με το σφαιρικό. Στο σημείο $\zeta_{crit} = 0.511$, τα δύο ελάχιστα είναι ίσα και το πεπερασμένο φράγμα που υπάρχει μεταξύ των δύο ελάχιστων είναι χαρακτηριστικό αλλαγής φάσης πρώτης τάξης. Στο σημείο $\zeta^{**} = 0.542$ το σφαιρικό ελάχιστο εξαφανίζεται, οπότε για $\zeta > 0.542$ υπάρχει μόνο το παραμορφωμένο ελάχιστο.

Η μετάβαση που πραγματοποιείται στο $U(5) - O(6)$ πόδι του τριγώνου, με $\chi = 0$, φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Το κύριο χαρακτηριστικό που αξίζει προσοχής, είναι ότι δεν υπάρχει πεπερασμένο φράγμα μεταξύ των δύο ελάχιστων. Το κρίσιμο σημείο είναι εκεί όπου το ελάχιστο μετακινείται από το $\beta = 0$ στο $\beta > 0$.



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της ενεργειακής επιφάνειας συναρτήσει του β για διάφορες τιμές του ζ στο $U(5)$ - $SU(3)$ πόδι του τριγώνου συμμετριών του IBM. Ο υπολογισμός έγινε για $N_B=10$, $\gamma = 0$ και $\chi = -1.32$.



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της ενεργειακής επιφάνειας συναρτήσει του β για διάφορες τιμές του ζ στο $U(5)$ - $O(6)$ πόδι του τριγώνου συμμετριών του IBM. Ο υπολογισμός έγινε για $N_B=10$, $\gamma = 0$ και $\chi = 0$.

Κεφάλαιο 4

Καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία

Μέχρι τώρα η περιγραφή του πυρηνικού σχήματος έγινε μέσω τετραπολικής παραμόρφωσης. Προκειμένου όμως να ξεφύγουμε από τις καθιερωμένες τεχνικές περιγραφής του πυρήνα, μπορούμε να προσθέσουμε και άλλους τύπους παραμόρφωσης, όπως τον οκταπολικό. Πειραματικά δεδομένα, όπως η παρουσία ζώνης με αρνητική ομοτιμία, $1^-, 3^-, 5^-, \dots$ κοντά στη θεμελιώδη ζώνη θετικής ομοτιμίας $0^+, 2^+, 4^+, \dots$, όπως και ορισμένες μεταβάσεις $E1, E3$, υποδεικνύουν την ύπαρξη σταθερής οκταπολικής παραμόρφωσης σε κάποια ισότοπα του Th και του Ra [54].

Οι Scott *et al.* [55] μίλησαν για δείκτες αλλαγής σχήματος των πυρήνων, από σφαιρικούς σε παραμορφωμένους, στα πλαίσια του οκταπολικού βαθμού ελευθερίας, προσέχοντας μια χαρακτηριστική αλλαγή στη σειρά των χαμηλότερων 1^- και 3^- καταστάσεων. Συγκεκριμένα, στη δονητική περιοχή η πρώτη οκταπολική κατάσταση είναι η στάθμη 3^- , ενώ η 1^- είναι μέλος της κατάστασης δόνησης 3 φωνονίων που βρίσκεται υψηλότερα σε ενέργεια. Στους παραμορφωμένους πυρήνες η κατάσταση 1^- πέφτει κάτω από την κατάσταση 3^- . Σε μία ανάλυση RPA οι Neergaard και Vogel [56] έδειξαν ότι η κεφαλή ζώνης (bandhead) 1^- θα πρέπει να βρίσκεται χαμηλότερα και συγκεκριμένα κάτω από την ενεργειακή στάθμη 3^- . Κάτι τέτοιο πράγματι παρατηρείται στους πυρήνες Sm και Gd γύρω στο $N=90$.

Μια θεωρητική περιγραφή των οκταπολικών σχημάτων των πυρήνων δεν είναι εύκολο πρόβλημα. Αυτό συμβαίνει επειδή η οκταπολική παραμόρφωση από μόνη της έχει ένα μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας και επιπλέον πρέπει να μελετηθεί σε συνδυασμό με την κυρίαρχη τετραπολική παραμόρφωση. Ο διαχωρισμός των μεταβλητών που περιγράφουν το σύστημα, τόσο ως προς το σύστημα του πυρήνα, όσο και ως προς το σύστημα του εργαστηρίου, είναι πολύ πιο δύσκολος στην οκταπολική περίπτωση [57]. Οι Bizzetti και Bizzetti-Sona, [58, 59] εισήγαγαν μια παραμετροποίηση, στην οποία ο τανυστής της αδράνειας είναι διαγωνοποιημένος μέχρι όρους πρώτης τάξης στις ποσότητες που περιγράφουν μη αξονικές παραμορφώσεις, αλλά χρειάζονται σοβαρές απλοποιήσεις ώστε το πρόβλημα να μπορεί να αντιμετωπιστεί. Με αυτές τις απλοποιήσεις εισήγαγαν ένα διδιάστατο πρότυπο σαν το $X(5)$, με τετραπολικές και οκταπολικές μεταβλητές παραμόρφωσης β_2 και β_3 .

Με παρόμοιο τρόπο οι Bonatsos *et al.* [60] περιόρισαν το σύστημα, απαιτώντας αξονική συμμετρία και διερεύνησαν λύσεις όμοιες των $X(5)$, $E(5)$ κοντά στο κρίσιμο

σημείο της μετάβασης από οκταπολικές δονήσεις σε οκταπολικές παραμορφώσεις.

Τόσο οι Bizzetti και Bizzetti-Sona, όσο και οι Bonatsos *et al.* εφάρμοσαν τα πρότυπά τους στην περιοχή Ra-Th και προσδιόρισαν ότι οι πυρήνες ^{226}Th , ^{226}Ra είναι κοντά στο κρίσιμο σημείο των πυρήνων τόσο για τους τετραπολικούς, όσο και για τους οκταπολικούς βαθμούς ελευθερίας.

4.1 Οκταπολικές παραμορφώσεις

Στα φτωχά σε νετρόνια ισότοπα Th, εκτός από τη ζώνη της θεμελιώδους κατάστασης που σχηματίζεται από επίπεδα με άρτια στροφορμή και θετική ομοτιμία, υπάρχουν ζώνες που σχηματίζονται από επίπεδα περιττής στροφορμής και αρνητικής ομοτιμίας. Το ίδιο ισχύει και για τα πλούσια σε νετρόνια ισότοπα Ba. Η ενεργειακή μετατόπιση μεταξύ ζωνών με θετική και αρνητική ομοτιμία είναι μια ποσότητα ιδιαίτερα χρήσιμη. Προκειμένου να τη μελετήσουμε εισάγουμε τη συνάρτηση [62]

$$\Delta E_L = E_{L-} - \frac{(L+1)E_{(L-1)+} + LE_{(L+1)+}}{2L+1} \quad (4.1)$$

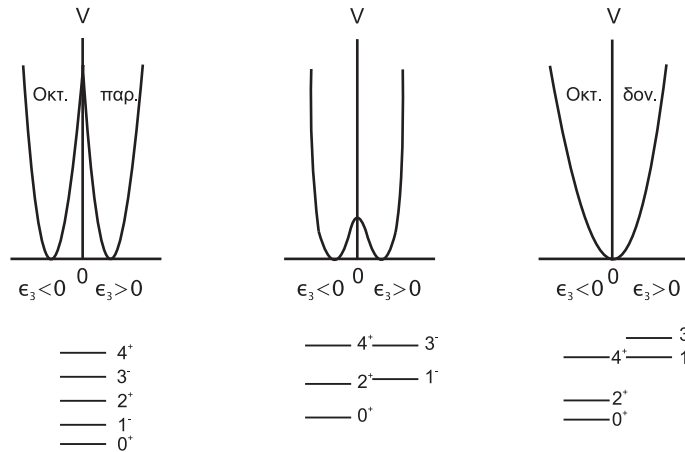
η οποία δείχνει τη σχετική μετατόπιση των ζωνών θετικής και αρνητικής ομοτιμίας.

Στα ισότοπα αυτά, διάγραμμα της συνάρτησης ΔE_L ως προς τη στροφορμή [93], δείχνει ότι η συνάρτηση πέφτει σταδιακά στο μηδέν καθώς αυξάνεται η στροφορμή. Έτσι, όσο η στροφορμή παίρνει όλο και μεγαλύτερες τιμές, τα επίπεδα θετικής και αρνητικής ομοτιμίας διαπλέκονται, με αποτέλεσμα να φαίνεται σα να ανήκουν στην ίδια ζώνη. Τα επίπεδα τέτοιων ζωνών συνδέονται μεταξύ τους με δυνατές ηλεκτρικές διπολικές και τετραπολικές μεταβάσεις, πράγμα το οποίο ενισχύει το επιχείρημα ότι αυτά ανήκουν στην ίδια ζώνη. Τέτοιου είδους διαπλεκόμενες ζώνες θετικής και αρνητικής ομοτιμίας με ενέργειες κατάλληλες για μία ζώνη, είναι γνωστές σε μόρια που δεν παρουσιάζουν συμμετρία ως προς την ανάκλαση. Έτσι, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι οι πυρήνες που παρουσιάζουν τέτοιου είδους συμπεριφορά αποκτούν σε μεγάλες τιμές της στροφορμής σταθερή οκταπολική παραμόρφωση, δηλαδή σχήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς την ανάκλαση. Η εξέλιξη προς την οκταπολική παραμόρφωση πραγματοποιείται σε χαμηλότερες τιμές της στροφορμής για τις φτωχές σε νετρόνια ακτινίδες, σε σχέση με τις πλούσιες σε νετρόνια σπάνιες γαίες.

Η πρώτη προσέγγιση που εισήχθη για την οκταπολική παραμόρφωση ήταν η γεωμετρική προσέγγιση [63]. Έχει προταθεί ότι σχήματα χωρίς συμμετρία ανάκλασης μπορούν να περιγραφούν από δυναμικό διπλού πηγαδιού. Οι οκταπολικές ζώνες παρουσιάζονται όταν το φράγμα που χωρίζει τα δύο πηγάδια είναι αρκετά υψηλό. Εάν το φράγμα δεν είναι τόσο υψηλό, οι ζώνες με θετική και αρνητική ομοτιμία είναι μετατοπισμένες η μία σε σχέση με την άλλη. Εάν το φράγμα εξαφανιστεί τελείως, παίρνουμε οκταπολικό δονητικό φάσμα. Το διπλό πηγάδι δυναμικού που χρησιμοποιήθηκε για αυτό το σκοπό έχει τη μορφή

$$V(\epsilon_3) = \frac{1}{2}C\epsilon_3^2 + D(e^{-\frac{\epsilon_3^2}{a^2}} - 1). \quad (4.2)$$

Το σπάσιμο της συμμετρίας ανάκλασης, για την οποία έγινε λόγος παραπάνω, παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2 [64]. Ένας σφαιρικός πυρήνας έχει περιστροφική συμμετρία.



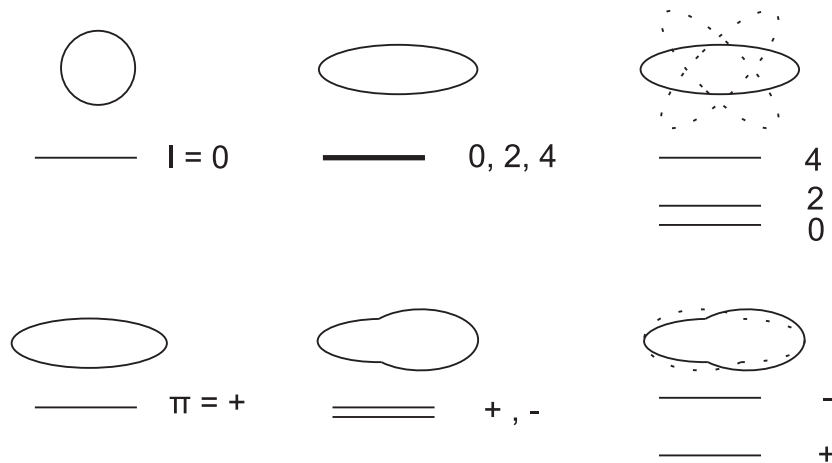
Σχήμα 4.1: Αναπαράσταση της εξάρτησης της περιστροφικής ζώνης από το σχημα του δυναμικού.

Αν ο πυρήνας παραμορφωθεί, η συμμετρία σπάει και ο πυρήνας αποκτά ωσειδές ή πεπλατυσμένο σχήμα, παραμένοντας όμως συμμετρικός ως προς την ανάκλαση. Σπάσιμο της συμμετρίας ανάκλασης συμβαίνει όταν ο πυρήνας παραμορφώνεται με τέτοιο τρόπο, που δεν παρουσιάζει πια συμμετρία ως προς την ανάκλαση. Στο σχήμα, η μεσαία στήλη δείχνει τον πυρήνα στο δικό του σύστημα αναφοράς, ενώ η δεξιά δείχνει τον ίδιο πυρήνα στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Ο περιστροφικός πυρήνας παράγει περιστροφικό φάσμα (στάθμες $0^+, 2^+, 4^+, \dots$ που υπακούουν στον κανόνα $L(L+1)$). Ο πυρήνας που δεν παρουσιάζει πια συμμετρία ως προς την ανάκλαση, ταλαντώνεται στο σύστημα του εργαστηρίου, όπως φαίνεται στην εικόνα κάτω δεξιά. Αυτό το είδος της ταλάντωσης δημιουργεί ζώνες τόσο θετικής, όσο και αρνητικής ομοτιμίας. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται διπλασιασμός της ομοτιμίας (parity doubling).

4.2 Οκταπολικές δονήσεις

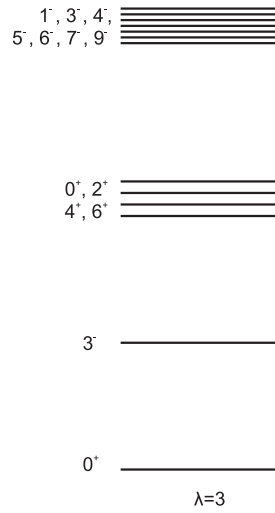
Οι χαμηλοενεργειακές καταστάσεις αρνητικής ομοτιμίας που εμφανίζονται στο ενεργειακό φάσμα των πυρήνων μπορούν να αποδοθούν σε οκταπολικές δονήσεις ($L^\pi = 3^-$) γύρω από ένα σφαιρικό ή τετραπολικά παραμορφωμένο σχήμα. Στο Σχήμα 4.3 εμφανίζονται οι οκταπολικές καταστάσεις δόνησης ενός, δύο και τριών φωνονίων.

Ένα παράδειγμα οκταπολικών δονήσεων παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4, όπου φαίνονται οι καταστάσεις 3^- μαζί με τις καταστάσεις 2^+ για μια σειρά ισοτόπων με $N=82$. Παρατηρείται ότι ενώ η κατάσταση 2^+ παραμένει σχεδόν σταθερή σε αυτήν τη σειρά ισοτόπων (υποδηλώνοντας σταθερή τετραπολική παραμόρφωση), η κατάσταση 3^- πέφτει χαρακτηριστικά καθώς αυξάνεται ο αριθμός των πρωτονίων. Αυτή η πτώση μπορεί να αποδοθεί [65, 66] στη θεωρηση της κατάστασης 3^- ως ένα σύμφωνο άθροισμα διεγέρσεων ενός σωματιδίου - μίας οπής ($1p - 1h$) μεταξύ δύο μονοσωαμιτιδιακών τροχιακών (αντίθετης ομοτιμίας) που διαφέρουν κατά 3 μονάδες τροχιακής στροφορμής. Τέτοια ζεύγη $\Delta l = 3$ υπάρχουν σε όλους τους μέγιστους φλοιούς πρωτονίων ή νετρονίων μεσαίων ή βαριών πυρήνων. Για παράδειγμα, στο φλοιό πρωτονίων 50-82,

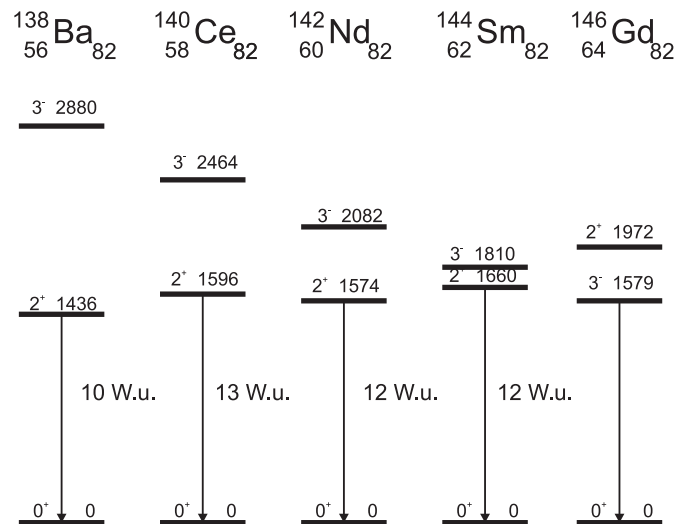


Σχήμα 4.2: Αναπαράσταση του σπασίματος της περιστροφικής συμμετρίας (επάνω μέρος του σχήματος) και του σπασίματος της συμμετρίας ανάκλασης (κάτω μέρος του σχήματος). Τα σχήματα στη μεσαία στήλη αντιστοιχούν στο σύστημα συντεταγμένων του πυρήνα, ενώ τα σχήματα στη δεξιά στήλη αντιστοιχούν στο σύστημα συντεταγμένων του εργαστηρίου.

που παρουσιάζει ενδιαφέρον για την περίπτωση των ισοτόπων του Σχήματος 4.4, αυτό το ζεύγος αποτελείται από τη μοναδική στάθμη $1h_{11/2}$ και την κανονική στάθμη $1g_{5/2}$. Καθώς προστίθενται πρωτόνια έξω από τον κλειστό φλοιό με $Z=50$, όλο και περισσότερα πρωτόνια καταλαμβάνουν τη χαμηλότερη από τις δύο στάθμες του ζεύγους με $\Delta l = 3$ και όλο και περισσότερες ($1p - 1h$) διεγέρσεις καθίστανται διαθέσιμες, ώστε η ενέργεια του σύμφωνου αθροίσματός τους, που είναι η συλλογική οκταπολική κατάσταση, μειώνεται.



Σχήμα 4.3: Αναπαράσταση των οκταπολικών δονήσεων ενός, δύο και τριών φωνονίων. Η κατάσταση με $L = 0^+$ είναι η βασική.



Σχήμα 4.4: Φάσμα των χαμηλότερων 2^+ και 3^- καταστάσεων για μια αλυσίδα ισοτόνων με $N=90$ [66].

Κεφάλαιο 5

Οκταπολικά σχήματα σε επεκτάσεις του IBM

Παραπάνω περιγράφηκε η γεωμετρική προσέγγιση περιγραφής των οκταπολικών δονήσεων και της οκταπολικής παραμόρφωσης. Στο αλγεβρικό πλαίσιο οι οκταπολικές δονήσεις περιγράφονται με την προσθήκη του f μποζονίου αρνητικής ομοτιμίας στο πρότυπο του IBM, ενώ η οκταπολική παραμόρφωση μπορεί να περιγραφεί με διάφορα πρότυπα τα οποία περιλαμβάνουν τη θεώρηση μόνο s και f μποζονίων, οπότε προκύπτει το $U(8)$ πρότυπο, τη θεώρηση s, p και f μποζονίων, οπότε προκύπτει το πρότυπο $U(11)$ και τέλος τη θεώρηση s, p, d, f μποζονίων που δίνουν το $U(16)$ πρότυπο.

5.1 Εισαγωγή του f μποζονίου

Όπως είναι γνωστό, το πρότυπο IBM, χρησιμοποιεί s και d μποζόνια θετικής ομοτιμίας για την περιγραφή της τετραπολικής συλλογικότητας των πυρήνων. Προκειμένου όμως, να περιγραφούν οι χαμηλοενεργειακές οκταπολικές δονητικές καταστάσεις των πυρήνων απαιτείται η εισαγωγή μποζονίων αρνητικής ομοτιμίας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή του f μποζονίου αρνητικής ομοτιμίας και στροφορμής $L=3$ [67, 68, 69, 70]. Η ολική χαμιλτονιανή σε αυτήν την περίπτωση έχει τη μορφή

$$H = H_{sd} + H_f + V_{sdf}, \quad (5.1)$$

όπου H_{sd} είναι η χαμιλτονιανή του IBM, H_f είναι η χαμιλτονιανή του f μποζονίου, η οποία σε χαμηλότερη προσέγγιση έχει τη μορφή

$$H_f = \epsilon_f n_f, \quad (5.2)$$

όπου n_f είναι ο αριθμός των f μποζονίων και V_{sdf} είναι η αλληλεπίδραση μεταξύ τετραπολικών και οκταπολικών βαθμών ελευθερίας η οποία συνήθως θεωρείται ίση με

$$V_{sdf} = A(L_{sd} \cdot L_f) + B(Q_{sd} \cdot Q_f) + C : (E_{df}^+ \cdot E_{sdf}) :, \quad (5.3)$$

όπου τα L_{sd}, Q_{sd} είναι ο τελεστής της στροφορμής και ο τετραπολικός τελεστής του IBM, αντίστοιχα, ενώ το L_f είναι ο τελεστής της στροφορμής του f μποζονίου

$$L_f = 2\sqrt{7}(f^+ \otimes \tilde{f})^1, \quad (5.4)$$

Q_f είναι ο τετραπολικός τελεστής του f μποζονίου

$$Q_f = -2\sqrt{7}(f^+ \otimes \tilde{f})^2, \quad (5.5)$$

E_{df}^+ είναι ο τελεστής ανταλλαγής

$$E_{df}^+ = \sqrt{5}(d^+ \otimes \tilde{f})^3 \quad (5.6)$$

και οι διπλές τελείες :: δείχνουν ότι όλοι οι μποζονικοί τελεστές δημιουργίας πρέπει να βρίσκονται πριν από τους μποζονικούς τελεστές καταστροφής. Στη σχέση που δίνει το V_{saf} , ο πρώτος όρος είναι μικρής σημασίας και η κύρια συνεισφορά προέρχεται από την τετραπολική τετραπολική αλληλεπίδραση και τους όρους ανταλλαγής.

Για τον υπολογισμό των ρυθμών ηλεκτρομαγνητικών μεταβάσεων χρειάζονται οι κατάλληλοι τελεστές μετάβασης. Για τις ηλεκτρικές τετραπολικές μεταβάσεις χρησιμοποιείται ο τετραπολικός τελεστής μετάβασης

$$T^{E2} = e_{sd}Q_{sd} + e_fQ_f. \quad (5.7)$$

Επειδή όμως το d μποζόνιο “κουβαλά” τη συλλογικότητα της ηλεκτρικής τετραπολικής μετάβασης, τελικά ο δεύτερος όρος μπορεί να αγνοηθεί.

Για τις ηλεκτρικές οκταπολικές μεταβάσεις, ο τελεστής μετάβασης είναι

$$T^{E3} = e_3(s^+ \tilde{f} + f^+ s)^3 + \chi_3(d^+ \tilde{f} + f^+ \tilde{d})^3. \quad (5.8)$$

5.2 Το πρότυπο U(8)

Το απλούστερο πρότυπο για την περιγραφή των χαμηλοενεργειακών καταστάσεων αρνητικής ομοτιμίας των πυρήνων, μπορεί να προκύψει αν θεωρηθούν μόνο τα s και f μποζόνια, τα οποία κλείνουν την άλγεβρα U(8) (1+7=8) [71]. Όμως, το πρότυπο αυτό αποτυγχάνει στην περιγραφή των πυρήνων, καθώς οδηγεί σε περιστροφικές ζώνες των οποίων η ενέργεια αυξάνεται κατά L(L+15), αντί για L(L+1).

5.3 Το πρότυπο U(11)

Στο αμέσως επόμενο απλούστερο πρότυπο θεωρούνται τα s, p και f μποζόνια [71] τα οποία κλείνουν την άλγεβρα U(11) (1+3+7=11). Στο συγκεκριμένο πρότυπο επιτυγχάνεται η περιγραφή της ενέργειας των περιστροφικών ζωνών σύμφωνα με τον κανόνα L(L+1). Μία από τις αλυσίδες υποαλγεβρών της U(11) είναι η

$$U(11) \supset U(10) \supset SU(3) \supset O(3), \quad (5.9)$$

της οποίας οι καταστάσεις έχουν μορφή

$$|[N](N_b)\omega_b(\lambda_b, \mu_b)K_bL\rangle, \quad (5.10)$$

όπου

N είναι ο ολικός αριθμός των μποζονίων που χαρακτηρίζουν τις μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις (μ.α.α.) της $U(11)$ και

N_b είναι ο ολικός αριθμός μποζονίων με αρνητική ομοτιμία (p, f μποζόνια) που χαρακτηρίζουν τις μ.α.α. της $U(10)$, ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα είναι ήδη γνωστά από το IBM.

Η χαμιλτονιανή που αντιστοιχεί στην παραπάνω δυναμική συμμετρία έχει ιδιοτιμές

$$\langle H \rangle = \alpha + \beta N_b + \gamma N_b^2 + \kappa_b C(\lambda_b, \mu_b) + \kappa' L(L + 1), \quad (5.11)$$

με

$$C(\lambda_b, \mu_b) = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu). \quad (5.12)$$

” Το φάσμα της παραπάνω χαμιλτονιανής ομοιάζει με το φάσμα ενός ισχυρά παραμορφωμένου, αξονικά συμμετρικού σχήματος, το οποίο δεν παρουσιάζει συμμετρία ως προς την ανάκλαση. Κάτι τέτοιο επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι οι καταστάσεις με θετική ομοτιμία προκύπτουν όταν το N_b είναι άρτιο, ενώ οι καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία προκύπτουν όταν το N_b είναι περιττό, οπότε οι ζώνες με αντίθετη ομοτιμία είναι μετατοπισμένες η μία σε σχέση με την άλλη. Όμως, ο διπλασιασμός της ομοτιμίας, ο οποίος αναμένεται από τα γεωμετρικά επιχειρήματα, δεν προκύπτει αυτόματα στο συγκεκριμένο πρότυπο. Προκειμένου να υπάρχει και αυτό το χαρακτηριστικό, μπορούν να εισαχθούν αλληλεπιδράσεις που εξαρτώνται από την “υπογραφή” (signature). Η “υπογραφή” είναι ένας χβαντικός αριθμός που χρησιμοποιείται στην περιγραφή των περιστροφικών φασμάτων και ορίζεται ίσος με $\sigma = (-1)^{L+K}$. Έτσι, σε κάθε ζώνη με συγκεκριμένο K , ο χβαντικός αριθμός της “υπογραφής” λαμβάνει διαφορετικά πρόσημα για διαδοχικές τιμές της στροφορμής L . Σαν αποτέλεσμα, ζώνες με $K \neq 0$ τείνουν να χωρίζονται σε δύο οικογένειες που ξεχωρίζουν από το σ . Στην παρούσα περίπτωση η “υπογραφή” εξαρτάται από τα N και N_b . Η χαμιλτονιανή με όρους υπογραφής έχει μορφή

$$\langle H \rangle = \alpha + \beta N_\gamma + \gamma \left[1 - \frac{(-1)^{N+N_b}}{N_b} \right] N_b^2 + \kappa_b \left[1 - \frac{(-1)^{N+N_b}}{N_b} \right] C(\lambda_b, \mu_b) + \kappa' L(L + 1) \quad (5.13)$$

5.4 Το πρότυπο $U(16)$

Ένα πιο ρεαλιστικό πρότυπο προκύπτει αν θεωρηθούν και τα τέσσερα μποζόνια s, p, d, f [71, 72]. Η άλγεβρα που κλείνουν είναι η $U(16)$ ($1+3+5+7=16$). Τα μποζόνια με θετική ομοτιμία s, d φτιάχνουν την υποομάδα $U_a(6)$, ενώ τα μποζόνια με αρνητική ομοτιμία p, f φτιάχνουν την υποομάδα $U_b(10)$. Τόσο η $U_a(6)$, όσο και η $U_b(10)$ έχουν τις ίδιες υποομάδες $U(5)$, $SU(3)$, $O(6)$. Οι δείκτες a, b χρησιμοποιούνται για να διαχωρίζονται οι υποομάδες που αποτελούνται από μποζόνια με θετική και αρνητική ομοτιμία. Μια από τις πιθανές αλυσίδες αλγεβρών είναι η

$$U(16) \supset U_a(6) \otimes U_b(10) \supset SU_a(3) \otimes SU_b(3) \supset SU(3) \supset O(3) \quad (5.14)$$

Οι καταστάσεις της παραπάνω αλυσίδας έχουν τη μορφή

$$|[N](N_a)(N_b)\omega_b(\lambda_a, \mu_a)(\lambda_b, \mu_b)(\lambda, \mu)KL\rangle \quad (5.15)$$

όπου

N_a είναι ο αριθμός των μποζονίων με θετική ομοτιμία, που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (μ.α.α.) της $U_a(6)$,

N_b είναι ο αριθμός των μποζονίων με αρνητική ομοτιμία, που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $U_b(10)$,

Η χαμιλτονιανή που αντιστοιχεί στην παραπάνω δυναμική συμμετρία έχει μορφή

$$\langle H \rangle = \alpha + \beta N_b + \gamma N_b^2 + \kappa_a C(\lambda_a, \mu_a) + \kappa_b C(\lambda_b, \mu_b) + \kappa C(\lambda, \mu) + \kappa' L(L+1) \quad (5.16)$$

Ο διπλασιασμός της ομοτιμία δεν προκύπτει αυτόματα ούτε στο συγκεκριμένο πρότυπο, οπότε όπως και πριν πρέπει να εισάγουμε στη χαμιλτονιανή τον κβαντικό αριθμό της “υπογραφής”

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = & \alpha + \beta N_b + \gamma \left[1 - \frac{(-1)^{N+N_b}}{N_b}\right] N_b^2 + \kappa_a \left[1 - \frac{(-1)^{N+N_b}}{N_b}\right] C(\lambda_a, \mu_a) + \\ & \kappa_b \left[1 - \frac{(-1)^{N+N_b}}{N_b}\right] C(\lambda_b, \mu_b) + \kappa \left[1 - \frac{(-1)^{N+N_b}}{3N_b + 2N_a}\right] C(\lambda, \mu) + \kappa' L(L+1) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Αυτό το πρότυπο έχει μελετηθεί σε διάφορες εργασίες (π.χ. [73]). Πρόσφατα εφαρμόστηκε για την περιγραφή της οκταπολικής συλλογικότητας στα ισότοπα του Sm [74].

Κεφάλαιο 6

ΑQOA για ακτινίδες

Τα περιστροφικά φάσματα οφείλονται σε τετραπολικές παραμορφώσεις [75], ενώ οι οκταπολικές παραμορφώσεις που αντιστοιχούν σε μη συμμετρικά ως προς την ανάκλαση (σαν αχλάδια) σχήματα, εμφανίζονται σε ορισμένες περιοχές, όπως αυτή των ελαφρών ακτινίδων [76, 77, 78, 79].

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σημάδι της οκταπολικής παραμόρφωσης είναι η ζώνη αρνητικής ομοτιμίας, με στάθμες $L^\pi = 1^-, 3^-, 5^-, \dots$ που βρίσκεται κοντά στη θεμελιώδη ζώνη και σχηματίζει με αυτή μία ζώνη με στροφορμή $L^\pi = 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, 4^+, \dots$. Από την άλλη, χαρακτηριστικό των οκταπολικών δονήσεων είναι μια ζώνη αρνητικής ομοτιμίας που βρίσκεται συστηματικά υψηλότερα σε ενέργεια από τη θεμελιώδη ζώνη. Η μετάβαση από τις οκταπολικές δονήσεις στις οκταπολικές παραμορφώσεις έχει μελετηθεί από διάφορους συγγραφείς [80, 62, 81].

Οι μεταβάσεις από δονητικούς πυρήνες $U(5)$, σε αξονικά συμμετρικά παραμορφωμένους πυρήνες $SU(3)$ και σε γ -ασταθείς παραμορφωμένους $O(6)$ πυρήνες μπορούν να περιγραφούν με τα πρότυπα $X(5)$ [15] και $E(5)$ [16] αντίστοιχα, τα οποία χρησιμοποιούν άπειρο πηγάδι δυναμικού ως προς το β βαθμό ελευθερίας, οδηγώντας σε προβλέψεις για τα φάσματα και τους ρυθμούς ηλεκτρικών τετραπολικών μεταβάσεων που είναι ανεξάρτητες από παραμέτρους.

Το πρότυπο που αναπτύσσεται εδώ, ονομάζεται αναλυτικό, τετραπολικό, οκταπολικό, αξονικά συμμετρικό πρότυπο (analytic quadrupole octupole axially symmetric model, AQOA) και ορίζει το όριο μεταξύ περιοχών οκταπολικής παραμόρφωσης και οκταπολικών δονήσεων. Στο πλαίσιο του AQOA, θα περιγραφούν οι ελαφρείς ακτινίδες που βρίσκονται σε αυτό ακριβώς το όριο. Τόσο οι τετραπολικές, όσο και οι οκταπολικές παραμορφώσεις συνεισφέρουν το ίδιο στο AQOA και η παρουσία τους καθορίζεται από τη μοναδική ελεύθερη παράμετρο ϕ_0 . Υποθέτουμε ότι υπάρχει αξονική συμμετρία, ενώ η συμμετροποίηση των κυματοσυναρτήσεων γίνεται όπως στην αναφορά [82], όπου οι στάθμες με άρτια ομοτιμία περιγράφονται από τη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση A της ομάδας D_2 και οι στάθμες με περιττή ομοτιμία από τη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση B_1 της ίδιας ομάδας. Ο χωρισμός μεταβλητών γίνεται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που χρησιμοποιείται στο πρότυπο $X(5)$. Για την περιγραφή της περιοχής του ορίου χρησιμοποιείται άπειρο πηγάδι δυναμικού, όπως και στα πρότυπα $E(5)$ και $X(5)$.

Οι προβλέψεις του AQOA συγκρίνονται με το φάσμα και τους ρυθμούς τετραπολικής μετάβασης $B(E2)$ των ^{226}Th και ^{226}Ra , των οποίων οι πίνακες πειραματικών δεδομένων δείχνουν ότι βρίσκονται κοντά στο όριο μεταξύ οκταπολικών δονήσεων και

οκταπολικών παραμορφώσεων.

Ενδιαφέρουσα είναι η ομοιότητα των αποτελεσμάτων του ΑQOA για $\phi_0 = 45^\circ$ για τα φάσματα της θεμελιώδους ζώνης και τους ρυθμούς τετραπολικής μετάβασης B(E2) με τις προβλέψεις του X(5). Επιπλέον, βρίσκονται αναλυτικές λύσεις με δυναμικά Davidson [83] της μορφής $\beta^2 + \beta_0^4/\beta^2$ και γίνεται επεξεργασία μιας μεθόδου μεταβολών [84, 85] η οποία οδηγεί από τα αποτελέσματα του Davidson στις προβλέψεις του ΑQOA.

Μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της αλλαγής φάσης του οκταπολικού τρόπου ταλάντωσης δόθηκε πρόσφατα στην αναφορά [58]. Εκεί, αρχικά εισάγεται μια καινούρια παραμετροποίηση των τετραπολικών και οκταπολικών βαθμών ελευθερίας, χρησιμοποιώντας ως εσωτερικό σύστημα συντεταγμένων τους κύριους άξονες του ολικού τανυστή της αδράνειας, όπως προκύπτει από τη συνδυασμένη τετραπολική και οκταπολική παραμόρφωση. Οι τρεις κύριες διαφορές των δύο προτύπων είναι οι εξής:

- 1) Το πρότυπο ΑQOA είναι αναλυτικό, ενώ το πρότυπο της αναφοράς [58] δεν είναι.
- 2) Στο ΑQOA οι συνεισφορές από τους τετραπολικούς και τους οκταπολικούς βαθμούς ελευθερίας είναι ισότιμες, ενώ στην ειδική μορφή του προτύπου της [58] που χρησιμοποιείται για σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα, ο οκταπολικός βαθμός ελευθερίας δεν υπόκειται σε περιορισμούς, ενώ ο τετραπολικός σταθεροποιείται σε συγκεκριμένη τιμή.
- 3) Στο ΑQOA, οι άξονες συμμετρίας των τετραπολικών και οκταπολικών παραμορφώσεων συμπίπτουν, προκειμένου να υπάρχει αξονική συμμετρία, ενώ στην αναφορά [58] λαμβάνονται υπόψιν μικρές, αλλά όχι μηδενικές μη αξονικές συνεισφορές.

6.1 Κατασκευή και βασικές παραδοχές

Αρχικά, θεωρείται πυρήνας στον οποίο η τετραπολική παραμόρφωση β_2 συνυπάρχει με την οκταπολική β_3 . Λαμβάνονται υπόψη μόνο αξονικά συμμετρικές παραμορφώσεις, οπότε αγνοείται ο γ βαθμός ελευθερίας όπως στην προσέγγιση Davydov-Chaban [86]. Το σύστημα συντεταγμένων του σώματος x', y', z' είναι κατά μήκος των κύριων αξόνων αδράνειας του αξονικά συμμετρικού πυρήνα και ο προσανατολισμός σε σχέση με το σύστημα αξόνων του εργαστηρίου περιγράφεται από τις γωνίες Euler $\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3$. Η χαμιλτονιανή έχει τη μορφή [82, 87]

$$H = - \sum_{\lambda=2,3} \frac{\hbar^2}{2B_\lambda} \frac{1}{\beta_\lambda^3} \frac{\partial}{\partial \beta_\lambda} \beta_\lambda^3 \frac{\partial}{\partial \beta_\lambda} + \frac{\hbar^2 \hat{L}^2}{6(B_2\beta_2^2 + 2B_3\beta_3^2)} + V(\beta_2, \beta_3), \quad (6.1)$$

όπου B_2, B_3 είναι παράμετροι μάζας.

Αναζητούνται λύσεις της εξίσωσης Schrödinger της μορφής [82]

$$\Phi_L^\pm(\beta_2, \beta_3, \theta) = (\beta_2\beta_3)^{-3/2} \Psi_L^\pm(\beta_2, \beta_3) |LM0, \pm\rangle, \quad (6.2)$$

όπου η συνάρτηση $|LM0, \pm\rangle$ περιγράφει την περιστροφή ενός αξονικά συμμετρικού πυρήνα με προβολή στροφορμής M στον άξονα z του συστήματος του εργαστηρίου και προβολή K στον άξονα z' του συστήματος συντεταγμένων του σώματος. Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα συμμετρίας z' είναι μηδέν κάτι που συνεπάγεται ότι οι στάθμες με $K \neq 0$ βρίσκονται πολύ ψηλά σε ενέργεια [82]. Έτσι, σε αυτό το πρότυπο περιορίζομαστε σε στάθμες με $K = 0$. Η συνάρτηση $|LM0, +\rangle$ μετασχηματίζεται σύμφωνα

με τη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση A της ομάδας D_2 , ενώ η συνάρτηση $|LM0, -\rangle$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση B_1 της ίδιας ομάδας [82, 87]. Η γενική μορφή αυτών των συναρτήσεων έχει τη μορφή [75]

$$|LMK, \pm\rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} (\mathcal{D}_{K,M}^L(\theta) \pm (-1)^L \mathcal{D}_{-K,M}^L(\theta)). \quad (6.3)$$

Για την ειδική περίπτωση όπου $K = 0$ που μας ενδιαφέρει εδώ, είναι φανερό ότι $|LM0, +\rangle \neq 0$ για $L = 0, 2, 4, \dots$, ενώ $|LM0, -\rangle \neq 0$ για $L = 1, 3, 5, \dots$. Οι συναρτήσεις $\Psi_L^+(\beta_2, \beta_3)$ και $\Psi_L^-(\beta_2, \beta_3)$ είναι αντίστοιχα συμμετρικές και αντισυμμετρικές ως προς ανάκλαση ως προς το επίπεδο $x'y'$, οπότε περιγράφουν καταστάσεις με θετική και αρνητική ομοτιμία αντίστοιχα [87].

Αντικαθιστώντας την εξ. (6.2) στη χαμιλτονιανή της εξ. (6.1), η εξίσωση Schrödinger παίρνει τη μορφή

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{\partial^2}{\partial \beta_2^2} - \frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{\partial^2}{\partial \beta_3^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{6(B_2\beta_2^2 + 2B_3\beta_3^2)} + V(\beta_2, \beta_3) + \frac{3\hbar^2}{8} \left(\frac{1}{B_2\beta_2^2} + \frac{1}{B_3\beta_3^2} \right) - E_L \right] \Psi_L^\pm(\beta_2, \beta_3) = 0. \quad (6.4)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί αν εισάγουμε τα [82, 87]

$$\tilde{\beta}_2 = \beta_2 \sqrt{\frac{B_2}{B}}, \quad \tilde{\beta}_3 = \beta_3 \sqrt{\frac{B_3}{B}}, \quad B = \frac{B_2 + B_3}{2}, \quad (6.5)$$

καθώς και ανηγμένες ενέργειες και δυναμικά

$$\epsilon = \frac{2BE}{\hbar^2} \quad u = \frac{2BV}{\hbar^2} \quad (6.6)$$

και παίρνει τη μορφή

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}_3^2} + \frac{L(L+1)}{3(\tilde{\beta}_2^2 + 2\tilde{\beta}_3^2)} + u(\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\tilde{\beta}_2^2} + \frac{1}{\tilde{\beta}_3^2} \right) - \epsilon_L \right] \Psi_L^\pm(\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3) = 0. \quad (6.7)$$

Αλλάζοντας πάλι συντεταγμένες, πηγαίνοντας σε πολικές, με $0 \leq \tilde{\beta} < \infty$ και $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ [82, 87]

$$\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta} \cos \phi, \quad \tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta} \sin \phi, \quad \tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{\beta}_2^2 + \tilde{\beta}_3^2}, \quad (6.8)$$

η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} - \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \frac{L(L+1)}{3\tilde{\beta}^2(1+\sin^2 \phi)} - \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + u(\tilde{\beta}, \phi) + \frac{3}{\tilde{\beta}^2 \sin^2 2\phi} - \epsilon_L \right] \Psi_L^\pm(\tilde{\beta}, \phi) = 0. \quad (6.9)$$

Είναι φανερό ότι όταν $\phi = 0$ υφίσταται μόνο τετραπολική παραμόρφωση, ενώ όταν $\phi = \pm\pi/2$ υφίσταται μόνο οκταπολική παραμόρφωση. Ο μετασχηματισμός σε πολικές

συντεταγμένες επιτρέπει στο β_3 να λαμβάνει τόσο θετικές, όσο και αρνητικές τιμές, ενώ το β_2 μπορεί να πάρει μόνο θετικές τιμές.

Χωρισμός μεταβλητών γίνεται θεωρώντας δυναμικό της μορφής $u(\tilde{\beta}, \phi) = u(\tilde{\beta}) + u(\tilde{\phi}^\pm)$, όπου $u(\tilde{\phi}^\pm)$ είναι δύο απότομοι αρμονικοί ταλαντωτές με ελάχιστα στις τιμές $\pm\phi_0$, δηλαδή

$$u(\tilde{\phi}^\pm) = \frac{1}{2}c(\phi \mp \phi_0)^2 = \frac{1}{2}c(\tilde{\phi}^\pm)^2, \quad \tilde{\phi}^\pm = \phi \mp \phi_0, \quad (6.10)$$

όπου c μία μεγάλη σταθερά. Με άλλα λόγια ο πυρήνας υποτίθεται ότι είναι συμπαγής ως προς τη μεταβλητή ϕ , δηλαδή η ϕ παραμένει κοντά στο $\pm\phi_0$, οπότε η αναλογία τετραπολικής και οκταπολικής παραμόρφωσης παραμένει σταθερή, όπως στους ενεργειακούς υπολογισμούς δυναμικού τύπου Strutinsky [80]. Αυτή η υπόθεση δικαιολογείται και από τα εκ των υστέρων αποτελέσματα, καθώς το φάσμα παραμένει σχεδόν σταθερό για τιμές της ϕ_0 μεταξύ 30° και 60° .

Έτσι, ο χωρισμός μεταβλητών δίνει

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} - \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \left(\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2 \phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} \right) + u(\tilde{\beta}) - \epsilon_{\tilde{\beta}}(L) \right] \psi_L^\pm(\tilde{\beta}) = 0, \quad (6.11)$$

και

$$\left[-\frac{1}{\langle \tilde{\beta}^2 \rangle} \frac{\partial^2}{\partial (\tilde{\phi}^\pm)^2} + u(\tilde{\phi}^\pm) - \epsilon_\phi \right] \chi(\tilde{\phi}^\pm) = 0, \quad (6.12)$$

όπου $\Psi_L^\pm(\tilde{\beta}, \phi) = \psi_L^\pm(\tilde{\beta})(\chi(\tilde{\phi}^+) \pm \chi(\tilde{\phi}^-))/\sqrt{2}$, ενώ $\langle \tilde{\beta}^2 \rangle$ είναι το μέσο $\tilde{\beta}^2$ πάνω στην $\psi^\pm(\tilde{\beta})$, και $\epsilon_L = \epsilon_{\tilde{\beta}}(L) + \epsilon_\phi$. Η εξ. (6.12) έχει την ίδια μορφή για $+\phi_0$ και $-\phi_0$, αφού παρουσιάζονται μόνο άρτιες συναρτήσεις της ϕ_0 .

6.1.1 Το $\tilde{\beta}$ μέρος του φάσματος

Για $u(\tilde{\beta})$ άπειρο πηγάδι δυναμικού

$$u(\beta) = \begin{cases} 0, & \tilde{\beta} \leq \tilde{\beta}_w \\ \infty, & \tilde{\beta} > \tilde{\beta}_w \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας τα $\epsilon_{\tilde{\beta}} = k_{\tilde{\beta}}^2$, $z = \tilde{\beta}k_{\tilde{\beta}}$, η εξ. (6.11) παίρνει τη μορφή Bessel

$$\frac{d^2 \psi_\nu^\pm}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi_\nu^\pm}{dz} + \left[1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right] \psi_\nu^\pm = 0, \quad (6.13)$$

με

$$\nu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2 \phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0}}. \quad (6.14)$$

Από την οριακή συνθήκη $\psi_\nu^\pm(\tilde{\beta}_w) = 0$ προκύπτει ότι $x_{s,\nu} = k_{s,\nu} \tilde{\beta}_w$. Επειδή $\epsilon_{\tilde{\beta},s,\nu} = \epsilon_{\tilde{\beta},s,\phi_0,L} = k_{s,\nu}^2$,

$$\epsilon_{\tilde{\beta},s,\phi_0,L} = \left(\frac{x_{s,\nu}}{\tilde{\beta}_w} \right)^2 \Rightarrow E_{\tilde{\beta},s,\phi_0,L} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{s,\nu}^2, \quad (6.15)$$

όπου $x_{s,\nu}$ είναι οι ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_\nu(z)$ με σειρά εμφάνισης s και τάξη $\nu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0}}$. Οι κυματοσυναρτήσεις παίρνουν τη μορφή $\psi_{s,\nu}^\pm(\tilde{\beta}) = \psi_{s,\phi_0,L}^\pm(\tilde{\beta}) = c_{s,\nu} J_\nu(k_{s,\nu}\tilde{\beta})$, και η σταθερά κανονικοποίησης προκύπτει από τη συνθήκη $\int_0^{\tilde{\beta}_0} |\psi_{s,\nu}^\pm|^2 \tilde{\beta} d\tilde{\beta}$ να είναι ίση με

$$c_{s,\nu} = \frac{\sqrt{2}}{J_{\nu+1}(k_{s,\nu})}. \quad (6.16)$$

Η εξ. (6.11) είναι ακριβώς επιλύσιμη [88, 89] και με δυναμικά Davidson [83]

$$u(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}^2 + \frac{\tilde{\beta}_0^4}{\tilde{\beta}^2} \quad (6.17)$$

Τότε η εξ. (6.11) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} - \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \left(\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} \right) + \tilde{\beta}^2 + \frac{\tilde{\beta}_0^4}{\tilde{\beta}^2} - \epsilon_{\tilde{\beta}}(L) \right] \psi_L^\pm(\tilde{\beta}) &= 0 \Rightarrow \\ \left[-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} - \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \left(\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \tilde{\beta}_0^4 \right) + \tilde{\beta}^2 - \epsilon_{\tilde{\beta}}(L) \right] \psi_L^\pm(\tilde{\beta}) &= 0 \Rightarrow \\ \left[-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\beta}^2} - \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} + \frac{1}{\tilde{\beta}^2} a^2 + \tilde{\beta}^2 - \epsilon_{\tilde{\beta}}(L) \right] \psi_L^\pm(\tilde{\beta}) &= 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

όπου

$$a^2 = \frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \tilde{\beta}_0^4 \quad (6.19)$$

Παίρνοντας λύσεις της μορφής $\psi_L^\pm(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}^a e^{-\tilde{\beta}/2} W(\tilde{\beta})$ και αντικαθιστώντας $t = \tilde{\beta}^2$, προκύπτει η εξίσωση Kummer

$$t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial W}{\partial t} (1+a-t) + W \left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\epsilon_{\tilde{\beta}}}{4} \right) = 0 \quad (6.20)$$

με λύσεις τις συναρτήσεις Laguerre, $W(\tilde{\beta}) \propto L_n^{(a)}(\tilde{\beta}^2)$, οπότε

$$\psi_L^\pm(\tilde{\beta}) = F_n^L(\tilde{\beta}) = b_1 \tilde{\beta}^a e^{-\tilde{\beta}/2} L_n^{(a)}(\tilde{\beta}^2) \quad (6.21)$$

με b_1 να προκύπτει από τη σχέση ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Laguerre ίσο με

$$b_1 = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+a+1)}}. \quad (6.22)$$

Οι ενεργειακές ιδιοτιμές δίνονται από τη σχέση

$$E_{n,L} = 2n + a + 1 = 2n + 1 + \sqrt{\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \beta_0^4}. \quad (6.23)$$

Οι ενέργειες διέγερσης της θεμελιώδους ζώνης, $E_{0,L} - E_{0,0}$, που χαρακτηρίζονται από $n = 0$, διαιρούμενες με κατάλληλη σταθερά δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} E_{0,L} - E_{0,0} &= \sqrt{\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \beta_0^4} - \sqrt{\frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \beta_0^4} \Rightarrow \\ \frac{E_{0,L} - E_{0,0}}{\sqrt{\frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \beta_0^4}} &= \sqrt{\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)(\frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \beta_0^4)}} + 1 - 1 \Rightarrow \\ E'_{0,L,exc} &= \sqrt{1 + b_H L(L+1)} - 1, \end{aligned} \quad (6.24)$$

όπου $b_H^{-1} = 3(1 + \sin^2\phi_0)(\frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \beta_0^4)$. Η εξ. (6.23) είναι ο τύπος Holmberg-Lipas [90]. Παρακάτω θα χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα από το άπειρο πηγάδι δυναμικού.

6.1.2 Το ϕ -μέρος του φάσματος

Η εξ. (6.12), χρησιμοποιώντας το δυναμικό της εξ. (6.10) παίρνει τη μορφή

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial(\tilde{\phi}^\pm)^2} + \frac{1}{2}c\langle\tilde{\beta}^2\rangle(\tilde{\phi}^\pm)^2 \right] \chi(\tilde{\phi}^\pm) = \epsilon_\phi\langle\tilde{\beta}^2\rangle\chi(\tilde{\phi}^\pm), \quad (6.25)$$

όπου $\tilde{\phi}^\pm = \phi \mp \phi_0$. Αυτή είναι η εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή με ενεργειακές ιδιοτιμές

$$\epsilon_\phi = \sqrt{\frac{2c}{\langle\tilde{\beta}^2\rangle}} \left(n_\phi + \frac{1}{2} \right), \quad n_\phi = 0, 1, 2, \dots \quad (6.26)$$

και ιδιοσυναρτήσεις

$$\chi_{n_\phi}(\tilde{\phi}^\pm) = N_{n_\phi} H_{n_\phi}(b\tilde{\phi}^\pm) e^{-b^2(\tilde{\phi}^\pm)^2/2}, \quad b = \left(\frac{c\langle\tilde{\beta}^2\rangle}{2} \right)^{1/4}, \quad (6.27)$$

με σταθερά κανονικοποίησης $N_{n_\phi} = \sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi} 2^{n_\phi} n_\phi!}}$.

Η ολική ενέργεια του προτύπου δίνεται από την έκφραση

$$E(s, L, \phi_0, n_\phi) = E_0 + A\epsilon_{\tilde{\beta},s,\phi_0,L} + Bn_\phi. \quad (6.28)$$

6.1.3 Ρυθμοί μεταπτώσεων $B(EL)$

Στην αξονική περίπτωση που χρησιμοποιείται εδώ, οι ηλεκτρικοί τετραπολικό και οκταπολικό τελεστές είναι

$$T_\mu^{(E2)} = t_2\beta_2\mathcal{D}_{\mu,0}^{(2)}(\theta), \quad T_\mu^{(E3)} = t_3\beta_3\mathcal{D}_{\mu,0}^{(3)}(\theta), \quad (6.29)$$

και ο ηλεκτρικός διπολικός τελεστής έχει τη μορφή [82]

$$T_\mu^{(E1)} = t_1\beta_2\beta_3\mathcal{D}_{\mu,0}^{(1)}(\theta). \quad (6.30)$$

Η ολική κυματοσυνάρτηση για την περίπτωση του άπειρου πηγαδιού δυναμικού είναι η

$$\Phi_L^\pm(\beta_2\beta_3, \theta) = C(\beta_2, \beta_3)^{-3/2} J_\nu(k_{s,\nu}\tilde{\beta}) \frac{[\chi_{n_\phi}(\tilde{\phi}^+) \pm \chi_{n_\phi}(\tilde{\phi}^-)]}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{2L+1}{32\pi^2}} [1 \pm (-1)^L] D_{0,M}^{(L)}(\theta), \quad (6.31)$$

όπου C είναι σταθερά, ενώ στην περίπτωση των δυναμικών Davidson η έκφραση είναι ίδια, μόνο που οι $J_\nu(k_{s,\nu}\tilde{\beta})$ αντικαθίστανται από τις κυματοσυναρτήσεις $F_n^L(\tilde{\beta})$. Οι ρυθμοί μετάβασης $B(EL)$ δίνονται από την

$$B(EL; L_i a_i \rightarrow L_f a_f) = \frac{|\langle L_f a_f || T^{(EL)} || L_i a_i \rangle|^2}{(2L_i + 1)}, \quad (6.32)$$

όπου το ανηγμένο στοιχείο πίνακα δίνεται από το θεώρημα Wigner-Eckart

$$\langle L_f a_f || T^{(EL)} || L_i a_i \rangle = \frac{\sqrt{2L_f + 1}}{(L_i 2L_f | M_i M M_f)} \langle L_f \mu_f a_f | T_\mu^{(EL)} | L_i \mu_i a_i \rangle, \quad (6.33)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της εξίσωσης (6.32) χρειάζονται τα ολοκληρώματα:

$$I_\beta^{(E2)} = I_\beta^{(E3)} = \int \tilde{\beta}^2 J_{\nu_i}(k_{s_i,\nu_i}\tilde{\beta}) J_{\nu_f}(k_{s_f,\nu_f}\tilde{\beta}) d\tilde{\beta}, \quad (6.34)$$

$$I_\beta^{(E1)} = \int \tilde{\beta}^3 J_{\nu_i}(k_{s_i,\nu_i}\tilde{\beta}) J_{\nu_f}(k_{s_f,\nu_f}\tilde{\beta}) d\tilde{\beta}, \quad (6.35)$$

για την περίπτωση του απειρόβαθου πηγαδιού, ενώ για την περίπτωση των δυναμικών Davidson οι συναρτήσεις Bessel αντικαθίστανται από τα πολυώνυμα Laguerre. Το τελικό αποτέλεσμα έχει μορφή

$$B(EL; L_i \rightarrow L_f) = c(c_{s_i,\nu_i} c_{s_f,\nu_f})^2 (L_i L L_f | 000)^2 (I_\beta^{(EL)})^2, \quad (6.36)$$

όπου $L = 1, 2, 3$ και όλοι οι σταθεροί παράγοντες έχουν απορροφηθεί στη σταθερά c . Στο Παράρτημα Β δίνεται ένα παράδειγμα υπολογισμού της ηλεκτρικής τετραπολικής μετάβασης $B(E2)$ από στάθμη άρτιας στροφορμής σε στάθμη άρτιας στροφορμής.

6.2 Αριθμητικά αποτελέσματα και σύγκριση με το πείραμα

Τα φάσματα της θεμελιώδους ζώνης και της ζώνης αρνητικής ομοτιμίας ($s = 1$), καθώς και αυτά της πρώτης διεγερμένης ($s = 2$) και δεύτερης διεγερμένης ($s = 3$) ζώνης για διάφορες τιμές της παραμέτρου ϕ_0 , φαίνονται στον Πίνακα 6.1. Οι ενέργειες είναι κανονικοποιημένες στην κατάσταση 2_1^+ της θεμελιώδους ζώνης. Στο Σχ. 6.1(α) απεικονίζονται ορισμένοι λόγοι $R(L) = E(L)/E(2)$ συναρτήσεων της ϕ_0 . Το γράφημα δείχνει καθαρά ότι τα αποτελέσματα είναι σχεδόν σταθερά στην περιοχή $30^\circ \leq \phi_0 \leq 60^\circ$, ενώ για τις οριακές περιπτώσεις $\phi_0 = 0^\circ$ και $\phi_0 = 90^\circ$ λαμβάνονται τα αποτελέσματα του συμπαγούς περιστροφέα. Αυτά αντιστοιχούν σε καθαρά περιστροφικό φάσμα για τη θεμελιώδη ζώνη και τη σχετική με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας, ενώ οι διεγερμένες ζώνες έχουν τιμές ενέργειας που τείνουν στο άπειρο.

Οι ρυθμοί μετάβασης $B(E2)$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.2 για διάφορες τιμές του ϕ_0 . Στο Σχ. 6.1(β) απεικονίζονται ορισμένοι λόγοι $B(E2)$ συναρτήσει του ϕ_0 και όπως φαίνεται η συμπεριφορά τους είναι αρκετά ομαλή στην περιοχή $30^\circ \leq \phi_0 \leq 60^\circ$. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τους ρυθμούς μετάβασης $B(E1)$ και $B(E3)$ που καταγράφονται στους Πίνακες 6.3 και 6.4 και απεικονίζονται στο Σχ. 6.1(γ). Παρατηρείται στο Σχ. 6.1 ότι το ελάχιστο των λόγων ενέργειας της θεμελιώδους ζώνης, όπως και το μέγιστο των λόγων $B(EL)$ που αφορούν τη θεμελιώδη ζώνη και τη σχετική με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας βρίσκονται μεταξύ $\phi_0 = 40^\circ$ και 43° . Από την άλλη, το ελάχιστο των λόγων ενέργειας των διεγερμένων ($s = 2, 3$) ζωνών βρίσκεται κοντά στο $\phi_0 = 35^\circ$.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η περιοχή που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο συγκεκριμένο πρότυπο είναι η $30^\circ \leq \phi_0 \leq 60^\circ$, στην την οποία τα φάσματα και οι λόγοι των $B(EL)$ εκδηλώνουν ομαλή συμπεριφορά, ανεξάρτητη από παραμέτρους.

Εκτός από τα αποτελέσματα του ΑQOA, στον Πίνακα 6.1 συμπεριλαμβάνεται και το φάσμα του προτύπου X(5). Είναι φανερό ότι η θεμελιώδης ζώνη του X(5) βρίσκεται κάπως χαμηλότερα από τη θεμελιώδη ζώνη του ΑQOA για $\phi_0 = 45^\circ$, ενώ για τις ζώνες με $s = 2, 3$ οι προβλέψεις του ΑQOA για $\phi_0 = 45^\circ$ είναι μεγαλύτερες από τις τιμές του X(5) κατά ένα παράγοντα 2. Επιπλέον, στον Πίνακα 6.2, παρατίθενται και οι μεταβάσεις $B(E2)$ της θεμελιώδους ζώνης του X(5) για σύγκριση. Πάλι, παρατηρείται ότι οι τιμές του X(5) είναι ελαφρώς υψηλότερες από τις αντίστοιχες προβλέψεις του ΑQOA για $\phi_0 = 45^\circ$.

Οι ομοιότητες που παρατηρούνται στις θεμελιώδεις ζώνες μεταξύ των προτύπων ΑQOA και X(5) οφείλονται στο ότι και τα δύο πρότυπα προέρχονται από τη χαμιλτονιανή του Bohr και χρησιμοποιούν άπειρο πηγάδι δυναμικού. Επιπλέον θεωρείται σημαντικός ο τετραπολικός βαθμός ελευθερίας, ο οποίος περιλαμβάνεται και στα δύο πρότυπα, για τις ιδιότητες της θεμελιώδους ζώνης. Αντιθέτως, οι διεγερμένες ζώνες φαίνονται να είναι πιο ευαίσθητες στην εισαγωγή του οκταπολικού βαθμού ελευθερίας. Έτσι, η σχετική θέση της κατάστασης 0_2^+ είναι σημαντικός παράγοντας για τη σύγκριση με το πείραμα. Το πρότυπο ΑQOA μπορεί να θεωρηθεί μια επέκταση του X(5), στο οποίο συμπεριλαμβάνονται καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία, καθώς και οι μεταβάσεις $B(EL)$ μεταξύ τους.

Τα πειραματικά δεδομένα της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης και της σχετικής με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας των $^{220-234}\text{Th}$ παρατίθενται στο Σχ. 6.2(α).

Έχει παρατηρηθεί [62] ότι στις οκταπολικές ζώνες τα επίπεδα με περιττή στροφορμή I και αρνητική ομοτιμία είναι μετατοπισμένα σε σχέση με τα επίπεδα με άρτια στροφορμή I και θετική ομοτιμία, δηλαδή τα περιττά επίπεδα δεν ακολουθούν τις ενέργειες που προβλέπει η $E(I) = I(I + 1)$, αλλά όλα βρίσκονται είτε συστηματικά από πάνω, είτε συστηματικά από κάτω από τις προβλεπόμενες ενέργειες. Αυτό είναι ένα παράδειγμα περιττού-άρτιου κλονισμού (odd-even staggering) ή $\Delta I = 1$ κλονισμός. Ο τελευταίος όρος προέρχεται από το γεγονός ότι κάθε ενεργειακό επίπεδο με στροφορμή I είναι μετατοπισμένο σχετικά με τα γειτονικά επίπεδα με στροφορμή $I \pm 1$.

Είναι φανερό ότι το ^{226}Th βρίσκεται στο όριο μεταξύ δύο περιοχών. Κάτω από το ^{226}Th ο περιττός -άρτιος κλονισμός είναι πολύ μικρός, ενώ από το ^{228}Th και πάνω ο περιττός -άρτιος κλονισμός γίνεται πολύ μεγάλος, αυξάνοντας με τον αριθμό των νετρονίων N . Ένα ποσοτικό μέτρο του περιττού-άρτιου κλονισμού μπορεί να βρεθεί

6.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ 47

στην αναφορά [91]. Έτσι, κάτω από το ^{226}Th υπάρχει οκταπολική παραμόρφωση, στην οποία η θεμελιώδης ζώνη και η ζώνη αρνητικής ομοτιμίας φτιάχνουν μία ενιαία ζώνη, ενώ από το ^{226}Th και πάνω η εικόνα αντιστοιχεί σε οκταπολικές δονήσεις, δηλαδή η ζώνη αρνητικής ομοτιμίας είναι μία περιστροφική ζώνη που κτίζεται πάνω σε μία οκταπολική κεφαλή, οπότε βρίσκεται συστηματικά υψηλότερα από τη θεμελιώδη ζώνη. Οι θεωρητικές προβλέψεις για $\phi_0 = 45^\circ$ βρίσκονται λίγο χαμηλότερα από το ^{226}Th , ενώ τα αποτελέσματα για $\phi_0 = 60^\circ$ ακολουθούν τα δεδομένα του ^{226}Th . Η διαδικασία της αναφοράς [58], η οποία είναι πολύ διαφορετική από αυτή που περιγράφεται εδώ, οδηγεί επίσης στην αναγνώριση του ^{226}Th ως πυρήνα ο οποίος βρίσκεται κοντά στο σημείο μετάβασης από την οκταπολική παραμόρφωση στις οκταπολικές δονήσεις.

Παρόμοια είναι και τα αποτελέσματα για $^{218-228}\text{Ra}$, που φαίνονται στο Σχ. 6.2(β). Σε αυτήν την περίπτωση η οκταπολική παραμόρφωση εμφανίζεται κάτω από το ^{226}Ra , ενώ το ^{228}Ra βρίσκεται ήδη στην περιοχή των οκταπολικών δονήσεων. Πάλι, οι θεωρητικές προβλέψεις για $\phi_0 = 45^\circ$ βρίσκονται χαμηλότερα από το ^{226}Ra , ενώ τα πειραματικά δεδομένα του ^{226}Ra ακολουθούνται πολύ καλά από προβλέψεις για $\phi_0 = 56^\circ$.

Η συμπεριφορά που παρατηρείται στο Σχ. 6.2(α) μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητή αν ληφθούν υπόψη τα Σχ. 6.3(α) και 6.3(β), όπου παρουσιάζονται τα πειραματικά ενεργειακά επίπεδα της θεμελιώδους ζώνης και της σχετικής με αυτή οκταπολικής ζώνης, για τα ίδια ισότοπα Th. Ενώ τα επίπεδα με άρτια στροφορμή του Σχ. 6.3(α), μειώνονται ομαλά καθώς αυξάνεται ο αριθμός των νετρονίων N , σαν αποτέλεσμα της αύξησης της τετραπολικής συλλογικότητας, τα επίπεδα περιττής στροφορμής του Σχ. 6.3(β), παρουσιάζουν ελάχιστο, το οποίο βρίσκεται στο $N = 136$ μέχρι $L = 9$ και προχωρά στο $N = 138$ για μεγαλύτερο L . Αυτή η αλλαγή της συμπεριφοράς αποδίδεται στον οκταπολικό βαθμό ελευθερίας, δείχνοντας ότι το $^{226}_{90}\text{Th}_{136}$ βρίσκεται κοντά στο όριο μεταξύ οκταπολικών παραμορφώσεων και οκταπολικών δονήσεων. Η αλλαγή δεν είναι απότομη, καθώς το φαινόμενο, εξαιτίας της οκταπολικής παραμόρφωσης, μετριάζεται από την τετραπολική παραμόρφωση που ξεκινά παράλληλα.

Κατά τον ίδιο τρόπο, η συμπεριφορά που παρατηρείται στο Σχ. 6.2(β) μπορεί να αποσαφηνιστεί χρησιμοποιώντας τα Σχ. 6.3(γ) και 6.3(δ), όπου παρουσιάζονται τα πειραματικά δεδομένα για τα ίδια ισότοπα του ραδίου. Ξανά, τα επίπεδα άρτιας στροφορμής μειώνονται αυξανόμενου του N , ενώ τα επίπεδα περιττής στροφορμής παρουσιάζουν ελάχιστο το οποίο βρίσκεται στο $N = 136$ μέχρι $L = 5$ και προχωρά στο $N = 138$ για μεγαλύτερο L , δείχνοντας ότι το $^{226}_{80}\text{Ra}_{138}$ βρίσκεται κοντά στο όριο μεταξύ οκταπολικών παραμορφώσεων και οκταπολικών δονήσεων.

Η μετάβαση από την οκταπολική παραμόρφωση στις οκταπολικές δονήσεις μπορεί να γίνει αντιληπτή χρησιμοποιώντας την απλούστερη ποσότητα που μετρά τη σχετική μετατόπιση των επιπέδων αρνητικής ομοτιμίας σε σχέση με τα επίπεδα θετικής ομοτιμίας,

$$\Delta E(L) = E(L) - \frac{E(L-1) + E(L+1)}{2}. \quad (6.37)$$

Τα αποτελέσματα για τα ισότοπα του Th και του Ra παρουσιάζονται στα Σχ. 6.4(α) και 6.4(β) αντίστοιχα. Στο Σχ. 6.4(α) είναι φανερό ότι στα $^{222-226}\text{Th}$ ο κλωνισμός μειώνεται ταχύτατα καθώς αυξάνεται η στροφορμή, φτάνοντας μία μηδενική τιμή και παραμένοντας εκεί, σημάδι οκταπολικής παραμόρφωσης [92, 93] ενώ στα $^{228-234}\text{Th}$ η μείωση είναι πολύ μικρότερη και αν υπάρχουν μηδενικές τιμές, αυτές αντιστοιχούν

σε πολύ υψηλές τιμές της στροφορμής, αναμενόμενη συμπεριφορά για οκταπολικές δονήσεις. Πάλι, το ^{226}Th βρίσκεται πιο κοντά στο όριο μεταξύ δύο περιοχών. Στο Σχ. 6.4(β), τα $^{220-226}\text{Ra}$ παρουσιάζουν γρήγορη μείωση του κλονισμού και προσκόλληση αυτής σε τιμές κοντά στο μηδέν, ενώ τα $^{228-230}\text{Ra}$ ακολουθούν το πρότυπο της αργής μείωσης. Το ^{226}Ra φαίνεται να είναι πιο κοντά στην οριακή γραμμή μεταξύ των δύο περιοχών.

Όσον αφορά την κεφαλή ζώνης 0_2^+ , οι πειραματικές τιμές (κανονικοποιημένες στην κατάσταση 2_1^+) είναι 12.186 για το ^{226}Ra και 11.152 για το ^{226}Th , σε καλή συμφωνία με τις προβλέψεις του προτύπου ΑQOA, 11.226 και 12.410 για τιμές $\phi_0 = 56^\circ$ και 60° του Σχ. 6.2. (Το πρότυπο της αναφοράς [58] δίνει για το ^{226}Th τιμή 8.528.) Η κανονικοποιημένη κεφαλή 0_2^+ βρίσκεται στο ίδιο ύψος για όλα τα ισότοπα του Ra και του Th για τα οποία υφίστανται πειραματικά δεδομένα, δηλαδή ^{222}Ra (8.225), ^{224}Ra (10.861), ^{228}Ra (11.300), ^{228}Th (14.402), ^{230}Th (11.934), ^{232}Th (14.794), ^{234}Th (16.347). Τα δεδομένα πάρθηκαν από τις αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν στο Σχ. 6.2.

Θεωρώντας το πρότυπο ΑQOA ως μία επέκταση του $X(5)$ που συμπεριλαμβάνει καταστάσεις αρνητικής ομοτιμίας, συνεπάγεται ότι η έρευνα για πυρήνες που παρουσιάζουν συμπεριφορά $X(5)$ στην περιοχή των ελαφρών ακτινίδων, όπου η παρουσία χαμηλοενεργειακών ζωνών αρνητικής ομοτιμίας είναι σημαντική, πρέπει να επικεντρωθεί σε πυρήνες με λόγο R_4 κοντά στο 3.0 και κεφαλή 0_2^+ υψηλότερα από την τιμή που δίνει το $X(5)$ (5.65).

Λεπτομερειακές συγκρίσεις ρυθμών μετάβασης $B(EL)$ δεν είναι δυνατές, εξαιτίας της έλλειψης πειραματικών δεδομένων. Ως εκ τούτου χρησιμοποιούνται οι λόγοι των μεταβάσεων $B(EL)$ που έχουν χρησιμοποιηθεί και σε προηγούμενες εργασίες [58, 94]. Στον Πίνακα 6.5 και στο Σχ. 6.5(α) παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές των λόγων $B(E1; L \rightarrow L - 1)/B(E2; L \rightarrow L - 2)$ που χρησιμοποιήθηκαν και στην αναφορά [58], μαζί με τις θεωρητικές προβλέψεις από την ίδια πηγή και προβλέψεις για $\phi_0 = 45^\circ$ και 60° , τιμές που χρησιμοποιήθηκαν επίσης στο Σχ. 6.2(α). Οι παρούσες θεωρητικές προβλέψεις για τις δύο διαφορετικές τιμές του ϕ_0 ουσιαστικά συμπίπτουν (υποδεικνύοντας ότι οι προβλέψεις είναι ουσιαστικά ελεύθερες παραμέτρων).

Στον Πίνακα 6.6 και στο Σχ. 6.5(β) παρουσιάζονται οι πειραματικοί λόγοι $B(E1; L \rightarrow L + 1)/B(E1; L \rightarrow L - 1)$ [95] που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία [94], μαζί με τρεις ομάδες θεωρητικών προβλέψεων στο πλαίσιο του Γενικευμένου Προτύπου Συναφών Καταστάσεων (Extended Coherent States Model (ECSM)) [96] από την ίδια πηγή, που αντιστοιχούν στην επιλογή χαμηλότερης τάξης για τον τελεστή μετάβασης $E1$ R-h, όπως και σε δύο διαφορετικές επιλογές για τον τελεστή μετάβασης $E1$, που περιλαμβάνει μη αρμονικούς όρους που θεωρούνται απαραίτητοι για την περιοχή μετάβασης (R-I, R-II) [94]. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι προβλέψεις για $\phi_0 = 45^\circ$ και 56° , με τιμές ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο Σχ. 6.2(β). Οι προβλέψεις για τις δύο διαφορετικές τιμές του ϕ_0 ουσιαστικά συμπίπτουν (υποδεικνύοντας ότι οι προβλέψεις είναι ουσιαστικά ελεύθερες παραμέτρων).

Επιπλέον σχόλια:

Τα Σχ. 6.2 και 6.5 δείχνουν ότι το ^{226}Th (^{226}Ra) μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας το πρότυπο ΑQOA με $\phi_0 = 60^\circ$ (56°), που δίνει σχεδόν ίδια αποτελέσματα με την περίπτωση όπου $\phi_0 = 45^\circ$. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, η εξ. (6.8) υποδεικνύει ότι οι τετραπολικές και οι οκταπολικές παραμορφώσεις είναι παρούσες σε συγκρίσιμο

βαθμό, κάτι που έρχεται σε συμφωνία με τους υπολογισμούς δυναμικού - ενέργειας τύπου Strutinsky [80, 97], από τους οποίους προκύπτουν συγκρίσιμες τιμές των β_2, β_3 για αυτούς τους πυρήνες. Η παρουσία οκταπολικής παραμόρφωσης στο ^{226}Ra έχει βρεθεί και σε μία εργασία [98] στο πλαίσιο του *spdf-IBM*.

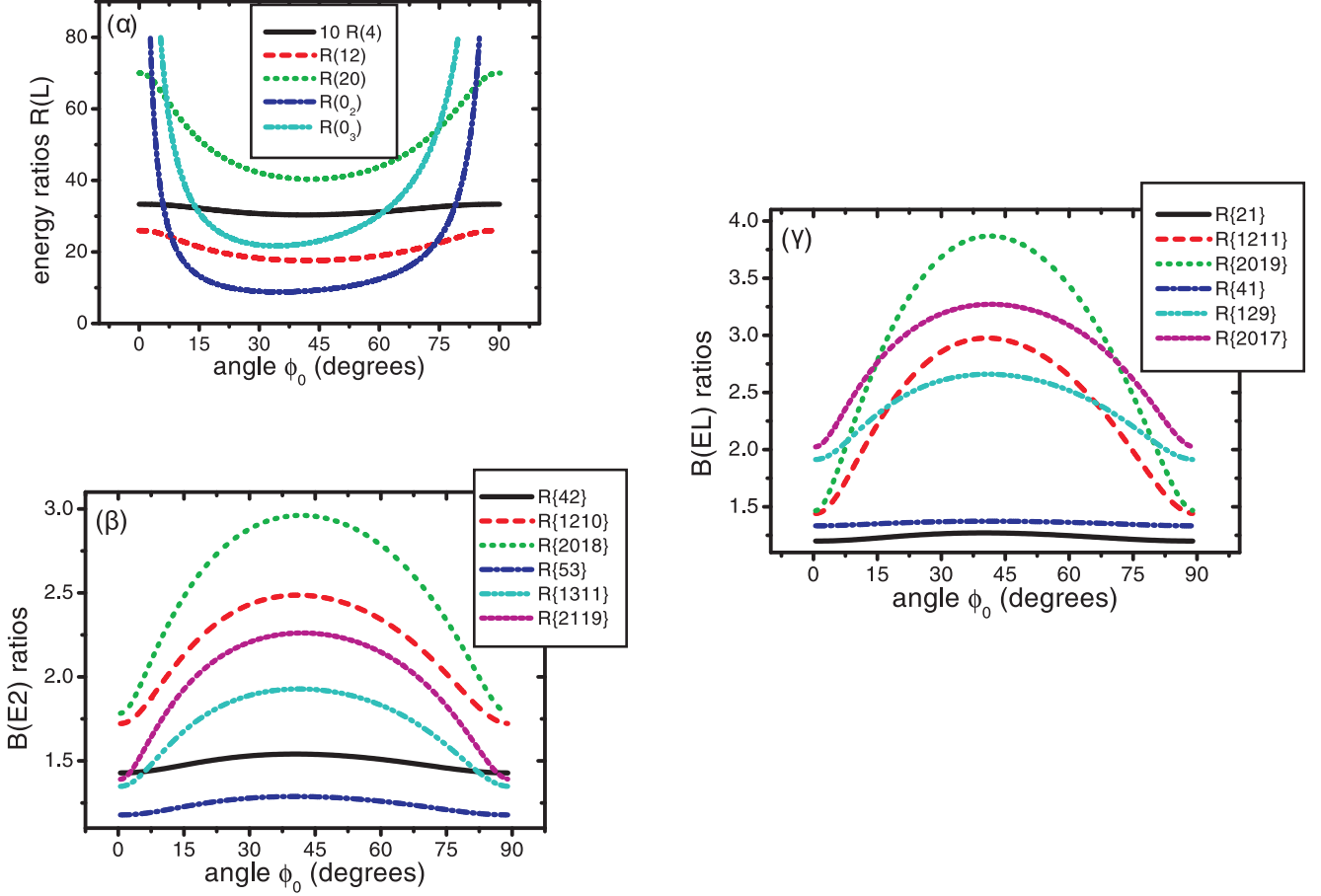
Τα Σχ. 6.2-6.4 υποδεικνύουν ότι τα ^{226}Th και ^{226}Ra βρίσκονται κοντά στο όριο μεταξύ οκταπολικών παραμορφώσεων και οκταπολικών δονήσεων. Αυτό είναι πάλι σε συμφωνία με υπολογισμούς *cranking* τύπου Woods-Saxon-Bogolyubov [62] για τα ισότοπα του Ra και του Th, που υπαινίσσονται αλλαγές φάσης από σχήματα σχεδόν σφαιρικά ($N \simeq 130$) σε οκταπολικά παραμορφωμένα ($N \simeq 134$) και κατόπιν σε πολύ παραμορφωμένα συμμετρικά ως προς την ανάκλαση ($N \simeq 140$) σχήματα, στα οποία οι ζώνες αρνητικής ομοτιμίας μπορούν να ερμηνευτούν με όρους οκταπολικών δονήσεων.

Το πρότυπο AQOA δεν προβλέπει περιττό - άρτιο κλονισμό, κάτι που έρχεται σε συμφωνία με το γεγονός ότι ο περιττός - άρτιος κλονισμός παράγεται όταν το δυναμικό στο β_3 είναι διπλό πηγάδι με δύο συμμετρικά ελάχιστα [63]. Ένα άπειρα υψηλό φράγμα δεν παρουσιάζει περιττό - άρτιο κλονισμό, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην παρούσα περίπτωση. Η εισαγωγή ενός πεπερασμένου φράγματος στο παρόν πρότυπο θα οδηγήσει σε κλονισμό, αλλά θα απαιτήσει την εισαγωγή τουλάχιστον μίας παραμέτρου και θα έρθει σε αντίθεση με το σκοπό της εργασίας, που είναι η περιγραφή του ορίου μεταξύ οκταπολικών παραμορφώσεων και οκταπολικών δονήσεων με τον ελάχιστο αριθμό παραμέτρων. Όπως φαίνεται στα Σχ. 6.2(α) και 6.2(β) το πρότυπο πράγματι προβλέπει αυτό το όριο με ουσιαστικά ανεξάρτητο από παραμέτρους τρόπο.

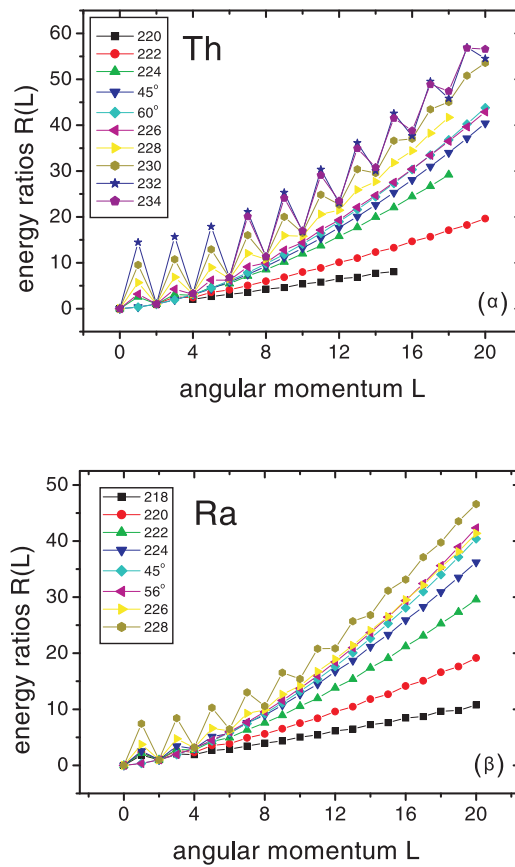
Η μετάβαση που εξετάστηκε εδώ είναι μια μετάβαση από την οκταπολική παραμόρφωση στις οκταπολικές δονήσεις συναρτήσει του αριθμού των νετρονίων σε μια αλυσίδα ισότοπων. Αυτή είναι διαφορετική από τη σταδιακή εμφάνιση οκταπολικής παραμόρφωσης συναρτήσει της στροφορμής σε ένα δεδομένο πυρήνα, που συνήθως λαμβάνεται υπόψιν όταν εξετάζεται ο περιττός - άρτιος κλονισμός [92, 93].

6.3 Η μέθοδος των μεταβολών

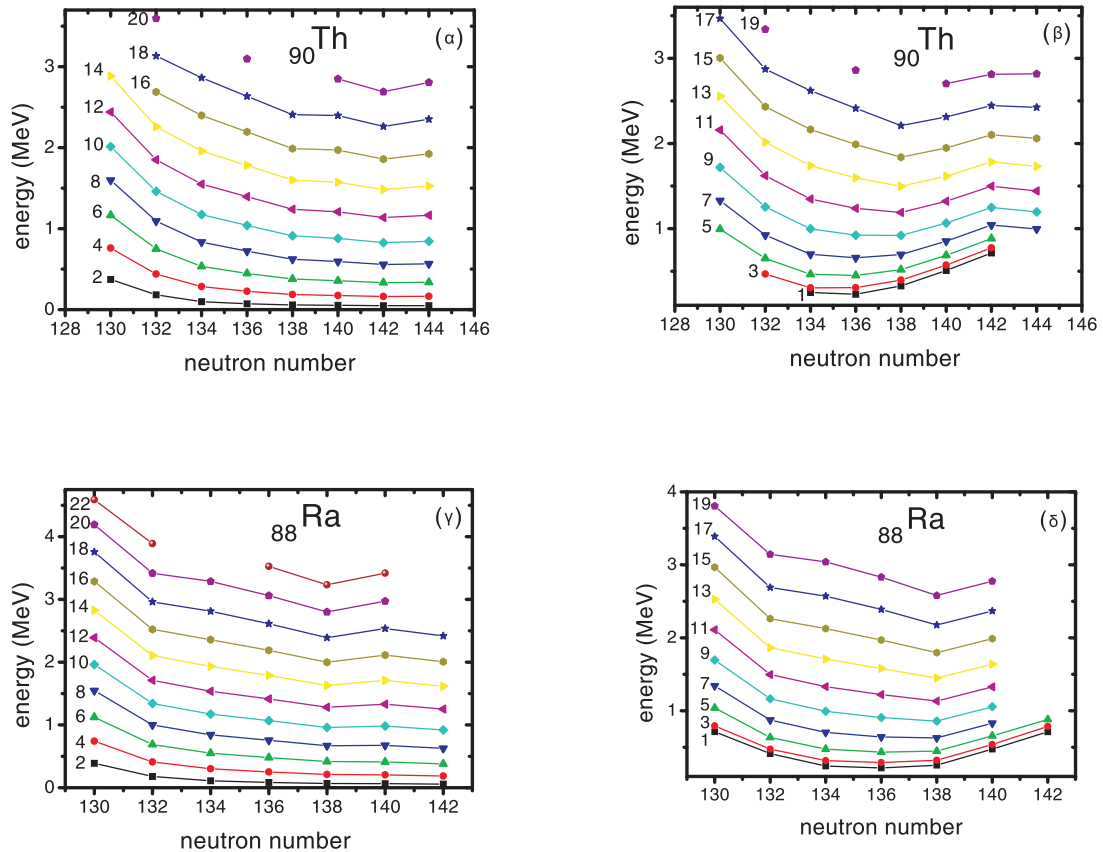
Στις εργασίες [84, 85] παρουσιάζεται μία μέθοδος μεταβολών, που οδηγεί από τα αποτελέσματα των δυναμικών Davidson μιας παραμέτρου, στις προβλέψεις των $E(5)$ και $X(5)$ που είναι ανεξάρτητες από παραμέτρους. Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και εδώ, αν θεωρηθούν για δοσμένο ϕ_0 οι λόγοι $R(L) = E(L)/E(2)$ που έχουν προβλεφθεί από τα δυναμικά Davidson της εξίσωσης (6.17) για τις ενέργειες διέγερσης της θεμελιώδους ζώνης και της σχετικής με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας και αν προσδιοριστεί για κάθε τιμή της στροφορμής L ξεχωριστά η τιμή της παραμέτρου β_0 , για την οποία η παράγωγος του λόγου $R(L)$ ως προς το β_0 παρουσιάζει μέγιστο. Η συλλογή τιμών του $R(L)$ που συγκεντρώθηκε με αυτή τη διαδικασία (για την περίπτωση $\phi_0 = 45^\circ$) φαίνεται στον Πίνακα 6.7 και στο Σχ. 6.6, μαζί με τις οριακές περιπτώσεις, $\beta_0 = 0$ (δονητής) και $\beta_0 \rightarrow \infty$ (συμπαγής περιστροφείας). Είναι φανερό ότι η συλλογή που δημιουργήθηκε μέσω αυτής της μεθόδου των μεταβολών ουσιαστικά συμπίπτει με τις προβλέψεις του AQOA με άπειρο πηγάδι δυναμικού, υποδηλώνοντας ότι η επιλογή του άπειρου πηγαδιού δυναμικού αντιστοιχεί πράγματι σε σημείο μετάβασης μεταξύ δονητή $\beta_0 = 0$ και συμπαγούς περιστροφείας $\beta_0 \rightarrow \infty$, αφού ο ρυθμός της αλλαγής των λόγων $R(L)$ αναμένεται να γίνει μέγιστη στο σημείο μετάβασης.



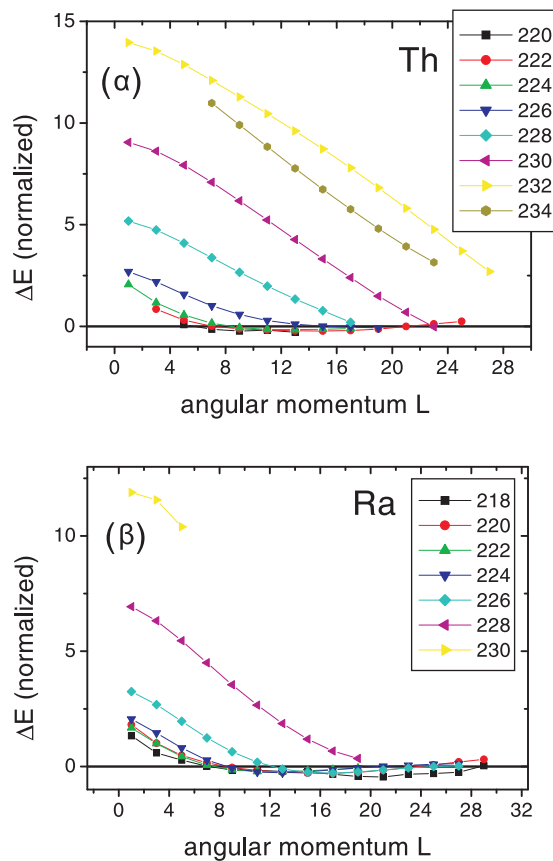
Σχήμα 6.1: (α) Λόγοι ενεργειών $R(L) = \frac{E(L)}{E(2_1^+)}$ συναρτήσεσι της γωνίας ϕ_0 . Τα ελάχιστα παρουσιάζονται με τη σειρά: $R(4)$ στο 41.19° , $R(12)$ στο 42.03° , $R(20)$ στο 42.61° , $R(0_2)$ στο 34.99° , $R(0_3)$ στο 34.13° . (β) Τα ίδια όπως στο (α) για τους λόγους $B(E2)$ $R\{42\} = \frac{B(E2;4^+ \rightarrow 2^+)}{B(E2;2^+ \rightarrow 0^+)}$ (40.5°), $R\{1210\} = \frac{B(E2;12^+ \rightarrow 10^+)}{B(E2;2^+ \rightarrow 0^+)}$ (41.0°), $R\{2018\} = \frac{B(E2;20^+ \rightarrow 18^+)}{B(E2;2^+ \rightarrow 0^+)}$ (42.0°), $R\{53\} = \frac{B(E2;5^- \rightarrow 3^-)}{B(E2;2^+ \rightarrow 0^+)}$ (40.5°), $R\{1311\} = \frac{B(E2;13^- \rightarrow 11^-)}{B(E2;3^- \rightarrow 1^-)}$ (41.5°), $R\{2119\} = \frac{B(E2;21^- \rightarrow 19^-)}{B(E2;3^- \rightarrow 1^-)}$ (42.0°). Μετά από κάθε λόγο, εμφανίζεται σε παρένθεση η θέση του κάθε μέγιστου (με ακρίβεια $\pm 0.5^\circ$). (γ) Τα ίδια και για τους λόγους $B(E1)$ $R\{21\} = \frac{B(E1;2^+ \rightarrow 1^-)}{B(E1;1^- \rightarrow 0^+)}$ (40.0°), $R\{1211\} = \frac{B(E1;12^+ \rightarrow 11^-)}{B(E1;1^- \rightarrow 0^+)}$ (40.5°), $R\{2019\} = \frac{B(E1;20^+ \rightarrow 19^-)}{B(E1;1^- \rightarrow 0^+)}$ (41.5°), και για τους λόγους $B(E3)$ $R\{41\} = \frac{B(E3;4^+ \rightarrow 1^-)}{B(E3;3^- \rightarrow 0^+)}$ (41.0°), $R\{129\} = \frac{B(E3;12^+ \rightarrow 9^-)}{B(E3;3^- \rightarrow 0^+)}$ (41.0°), $R\{2017\} = \frac{B(E3;20^+ \rightarrow 17^-)}{B(E3;3^- \rightarrow 0^+)}$ (41.5°). Πάλι, μετά από κάθε λόγο, εμφανίζεται σε παρένθεση η θέση του κάθε μέγιστου (με ακρίβεια $\pm 0.5^\circ$).



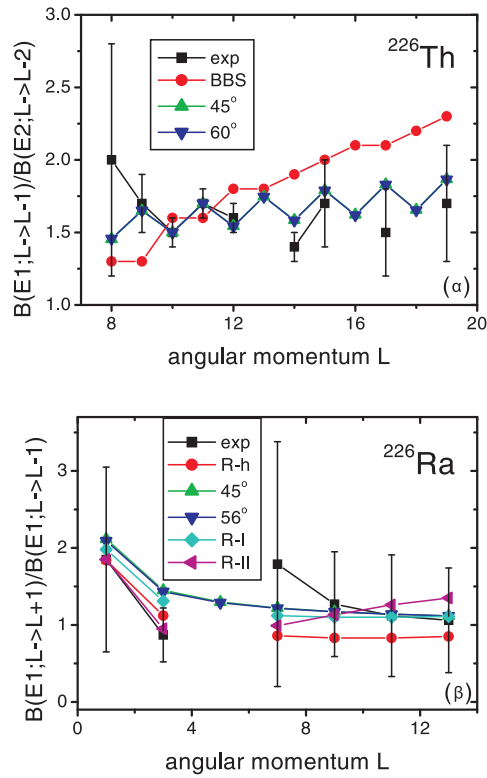
Σχήμα 6.2: (α) Πειραματικοί λόγοι ενεργειών $R(L) = E(L)/E(2_1^+)$ για τα ^{220}Th [99], ^{222}Th [100], ^{224}Th [101], ^{226}Th [102], ^{228}Th [103], ^{230}Th [104], ^{232}Th [104, 105], και ^{234}Th [104], συγκρινόμενοι με θεωρητικές προβλέψεις για $\phi = 45^\circ$ και $\phi = 60^\circ$. (β) Τα ίδια για τα ^{218}Ra [106, 107], ^{220}Ra [99], ^{222}Ra [104, 108], ^{224}Ra [104, 108], ^{226}Ra [104, 108], και ^{228}Ra [104], συγκρινόμενα με θεωρητικές προβλέψεις για $\phi = 45^\circ$ και $\phi = 56^\circ$.



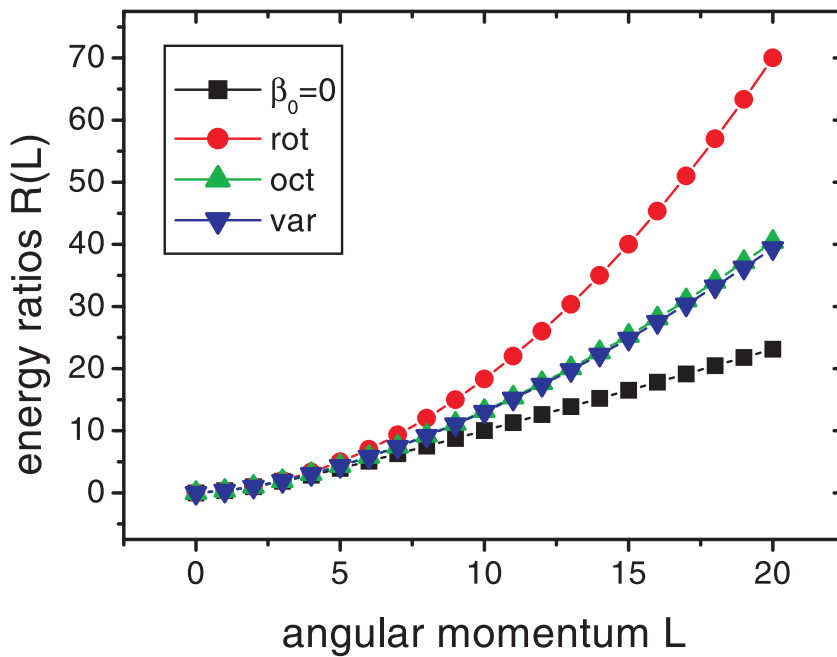
Σχήμα 6.3: (α) Πειραματικές στάθμες ενέργειας για τις ζώνες της θεμελιώδους κατάστασης των ^{220}Th [99], ^{222}Th [100], ^{224}Th [101], ^{226}Th [102], ^{228}Th [103], ^{230}Th [104], ^{232}Th [104, 105], και ^{234}Th [104], συναρτήσεως του αριθμού των νετρονίων. (β) Τα ίδια όπως στο (α), αλλά για τις σχετικές ζώνες με αρνητική ομοτιμία. (γ) Τα ίδια όπως στο (α), αλλά για τα ^{218}Ra [106, 107], ^{220}Ra [99], ^{222}Ra [104, 108], ^{224}Ra [104, 108], ^{226}Ra [104, 108], ^{228}Ra [104] και ^{230}Ra [104]. (δ) Τα ίδια όπως στο (γ), αλλά για τις σχετικές ζώνες με αρνητική ομοτιμία.



Σχήμα 6.4: (α) Πειραματικός ενεργειακός κλωνισμός ΔE , κανονικοποιημένος στην κατάσταση 2_1^+ του κάθε πυρήνα, για τους ^{220}Th [99], ^{222}Th [100], ^{224}Th [101], ^{226}Th [102], ^{228}Th [103], ^{230}Th [104], ^{232}Th [104, 105], και ^{234}Th [104], συναρτήσει της στροφορμής. (β) Τα ίδια όπως στο (α), αλλά για τους ^{218}Ra [106, 107], ^{220}Ra [99], ^{222}Ra [104, 108], ^{224}Ra [104, 108], ^{226}Ra [104, 108], ^{228}Ra [104], και ^{230}Ra [104].



Σχήμα 6.5: (α) Πειραματικοί λόγοι $B(E1; L \rightarrow L - 1) / B(E2; L \rightarrow L - 2)$ (πολλαπλασιασμένοι με 10^5) [58] των τιμών $B(E1)$ και $B(E2)$ που προκύπτουν από την ίδια στάθμη του ^{226}Th , συγκρινόμενοι με τις θεωρητικές προβλέψεις των Bizzeti και Bizzeti-Sona [58] (στήλη BBS) και με τις προβλέψεις της παρούσας εργασίας για $\phi_0 = 45^\circ, 60^\circ$. Οι λόγοι που αντιστοιχούν σε $L = 10$ και 11 χρησιμοποιήθηκαν για κανονικοποίηση, όπως στην εργασία [58]. (β) Πειραματικοί λόγοι $B(E1; L \rightarrow L + 1) / B(E1; L \rightarrow L - 1)$ [95] των τιμών $B(E1)$ που προκύπτουν από την ίδια στάθμη του ^{226}Ra , συγκρινόμενοι με τις τρεις διαφορετικές θεωρητικές προβλέψεις από την εργασία [94] (ονομάζονται R-h, R-I, R-II), όπως και με τις θεωρητικές προβλέψεις της παρούσας εργασίας για $\phi_0 = 45^\circ, 56^\circ$.



Σχήμα 6.6: Λόγοι ενεργειών $R(L) = E(L)/E(2)$ για τη θεμελιώδη ζώνη και τη σχετική με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας ($s = 1$) των δυναμικών Davidson της εξίσωσης (6.17), που επιλέχθηκαν μέσω της μεθόδου μεταβολών της παραγράφου 6.3 (ονομάζονται “var”), συγκρινόμενοι με τους λόγους που δίνονται από την παρούσα εργασία (ονομάζονται “oct”), συναρτήσει της στροφορμής. Για λόγους σύγκρισης, παρουσιάζονται επίσης και οι οριακές περιπτώσεις των δυναμικών Davidson με $\beta_0 = 0$ (ονομάζονται “ $\beta_0 = 0$ ”) και $\beta_0 \rightarrow \infty$ (ονομάζονται “rot”). Σε όλες τις περιπτώσεις, χρησιμοποιήθηκε η τιμή $\phi_0 = 45^\circ$.

Πίνακας 6.1: Το φάσμα του προτύπου ΑQOA για τη ζώνη θεμελιώδους κατάστασης και τη σχετική με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας ($s = 1$), όπως και η πρώτη διεγερμένη ζώνη ($s = 2$) και η δεύτερη διεγερμένη ζώνη ($s = 3$), κανονικοποιημένες στην ενέργεια της κατάστασης 2_1^+ , για διαφορετικές τιμές του ϕ_0 . Η δεύτερη στήλη περιέχει τις τιμές που προέκυψαν για λίγο πιο πάνω από τη γωνία 0° και λίγο πιο κάτω από τη γωνία 90° . Επιπλέον, περιλαμβάνεται το φάσμα της συμμετρίας κρίσιμου σημείου X(5) για σύγκριση.

ϕ_0	$0^\circ, 90^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	X(5)
L^π							
$s = 1$							
0^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1^-	0.333	0.337	0.344	0.346	0.342	0.336	
2^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3^-	2.000	1.969	1.921	1.912	1.938	1.981	
4^+	3.333	3.221	3.069	3.039	3.119	3.264	2.904
5^-	5.000	4.734	4.414	4.351	4.513	4.832	
6^+	7.000	6.490	5.935	5.829	6.098	6.667	5.430
7^-	9.333	8.471	7.620	7.459	7.857	8.755	
8^+	12.000	10.666	9.459	9.233	9.779	11.082	8.483
9^-	15.000	13.065	11.445	11.144	11.857	13.635	
10^+	18.333	15.659	13.574	13.187	14.082	16.406	12.027
11^-	22.000	18.443	15.841	15.359	16.451	19.386	
12^+	26.000	21.410	18.245	17.658	18.959	22.567	16.041
13^-	30.333	24.557	20.782	20.081	21.605	25.943	
14^+	35.000	27.881	23.452	22.626	24.384	29.510	20.514
15^-	40.000	31.379	26.251	25.293	27.297	33.264	
16^+	45.333	35.048	29.180	28.080	30.340	37.200	25.437
17^-	51.000	38.886	32.237	30.985	33.513	41.315	
18^+	57.000	42.892	35.421	34.009	36.814	45.607	30.804
19^-	63.333	47.064	38.731	37.150	40.242	50.074	
20^+	70.000	51.402	42.166	40.408	43.796	54.713	36.611
$s = 2$							
0^+		13.292	8.983	9.351	12.410	23.896	5.649
2^+		14.893	10.726	11.133	14.160	25.502	7.450
4^+		18.384	14.204	14.630	17.763	29.098	10.689
6^+		23.392	18.820	19.209	22.649	34.410	14.751
$s = 3$							
0^+		30.940	21.944	23.114	30.316	55.625	14.119

Πίνακας 6.2: $B(E2; L_i \rightarrow L_f)$ μεταξύ των καταστάσεων του προτύπου AQOA με $s = 1$. $B(E2)$ με άρτιες στροφορμές L_i και L_f κανονικοποιούνται στη μετάβαση $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$, ενώ $B(E2)$ με περιττές στροφορμές L_i και L_f κανονικοποιούνται στη μετάβαση $3_1^- \rightarrow 1_1^-$. Παρουσιάζονται επίσης τα αποτελέσματα της συμμετρίας κρίσιμου σημείου $X(5)$ για σύγκριση.

	ϕ_0	1°	15°	30°	45°	60°	75°	X(5)
L_i^π	L_f^π							
2^+	0^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4^+	2^+	1.429	1.475	1.530	1.539	1.509	1.457	1.599
6^+	4^+	1.574	1.701	1.834	1.855	1.786	1.656	1.982
8^+	6^+	1.648	1.870	2.072	2.104	2.005	1.797	2.276
10^+	8^+	1.693	2.011	2.268	2.309	2.187	1.915	2.509
12^+	10^+	1.723	2.131	2.431	2.480	2.342	2.019	2.697
14^+	12^+	1.746	2.236	2.569	2.626	2.476	2.111	2.854
16^+	14^+	1.762	2.327	2.687	2.751	2.593	2.194	2.987
18^+	16^+	1.776	2.407	2.790	2.860	2.695	2.269	3.101
20^+	18^+	1.787	2.478	2.881	2.955	2.785	2.337	3.200
3^-	1^-	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
5^-	3^-	1.179	1.227	1.278	1.286	1.260	1.210	
7^-	5^-	1.257	1.374	1.479	1.496	1.444	1.335	
9^-	7^-	1.301	1.491	1.642	1.665	1.595	1.433	
11^-	9^-	1.329	1.591	1.777	1.806	1.723	1.518	
13^-	11^-	1.350	1.677	1.890	1.924	1.832	1.594	
15^-	13^-	1.365	1.752	1.986	2.026	1.927	1.661	
17^-	15^-	1.376	1.817	2.069	2.114	2.010	1.722	
19^-	17^-	1.386	1.875	2.142	2.190	2.082	1.777	

Πίνακας 6.3: Τιμές $B(E1; L_i \rightarrow L_f)$ μεταξύ καταστάσεων με $s = 1$, κανονικοποιημένες στη μετάβαση $1_1^- \rightarrow 0_1^+$.

L_i^π	ϕ_0 L_f^π	1°	15°	30°	45°	60°	75°
1^-	0^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2^+	1^-	1.200	1.227	1.264	1.269	1.247	1.215
3^-	2^+	1.286	1.358	1.455	1.469	1.414	1.328
4^+	3^-	1.334	1.467	1.633	1.657	1.564	1.413
5^-	4^+	1.364	1.570	1.807	1.842	1.712	1.489
6^+	5^-	1.385	1.670	1.977	2.022	1.857	1.562
7^-	6^+	1.401	1.768	2.141	2.196	2.000	1.634
8^+	7^-	1.413	1.864	2.299	2.364	2.139	1.705
9^-	8^+	1.423	1.957	2.449	2.523	2.273	1.777
10^+	9^-	1.431	2.048	2.592	2.676	2.403	1.847
11^-	10^+	1.437	2.135	2.727	2.821	2.527	1.917
12^+	11^-	1.443	2.220	2.856	2.959	2.646	1.985
13^-	12^+	1.448	2.300	2.979	3.090	2.760	2.052
14^+	13^-	1.452	2.377	3.095	3.215	2.870	2.117
15^-	14^+	1.456	2.451	3.206	3.334	2.974	2.181
16^+	15^-	1.460	2.522	3.311	3.447	3.075	2.242
17^-	16^+	1.463	2.590	3.411	3.555	3.171	2.302
18^+	17^-	1.466	2.655	3.507	3.659	3.263	2.360
19^-	18^+	1.469	2.718	3.598	3.757	3.351	2.417
20^+	19^-	1.471	2.778	3.685	3.852	3.436	2.471

Πίνακας 6.4: Τιμές $B(E3; L_i \rightarrow L_f)$ μεταξύ καταστάσεων με $s = 1$, κανονικοποιημένες στη μετάβαση $3_1^- \rightarrow 0_1^+$.

L_i^π	ϕ_0 L_f^π	1°	15°	30°	45°	60°	75°
3^-	0^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4^+	1^-	1.333	1.351	1.369	1.373	1.364	1.345
5^-	2^+	1.515	1.563	1.613	1.623	1.596	1.547
6^+	3^-	1.632	1.719	1.809	1.825	1.778	1.690
7^-	4^+	1.714	1.847	1.979	2.001	1.934	1.804
8^+	5^-	1.774	1.958	2.130	2.158	2.073	1.900
9^-	6^+	1.821	2.058	2.267	2.300	2.199	1.986
10^+	7^-	1.859	2.149	2.390	2.429	2.314	2.063
11^-	8^+	1.889	2.233	2.502	2.546	2.420	2.135
12^+	9^-	1.915	2.310	2.605	2.653	2.517	2.202
13^-	10^+	1.936	2.381	2.699	2.752	2.607	2.264
14^+	11^-	1.955	2.447	2.786	2.842	2.691	2.323
15^-	12^+	1.971	2.509	2.865	2.926	2.768	2.379
16^+	13^-	1.985	2.567	2.939	3.004	2.841	2.431
17^-	14^+	1.998	2.621	3.008	3.076	2.908	2.481
18^+	15^-	2.009	2.671	3.072	3.143	2.971	2.528
19^-	16^+	2.019	2.719	3.132	3.207	3.031	2.573
20^+	17^-	2.028	2.763	3.188	3.266	3.087	2.615
2^+	1^-	1.800	1.794	1.797	1.797	1.793	1.795
3^-	2^+	1.333	1.353	1.386	1.390	1.370	1.344
4^+	3^-	1.273	1.321	1.383	1.391	1.356	1.301
5^-	4^+	1.259	1.338	1.429	1.441	1.393	1.308
6^+	5^-	1.257	1.370	1.486	1.503	1.442	1.329
7^-	6^+	1.258	1.406	1.545	1.565	1.495	1.355
8^+	7^-	1.261	1.443	1.602	1.625	1.547	1.383
9^-	8^+	1.264	1.480	1.656	1.683	1.598	1.413
10^+	9^-	1.267	1.516	1.707	1.736	1.646	1.442
11^-	10^+	1.270	1.550	1.754	1.786	1.691	1.471
12^+	11^-	1.272	1.582	1.798	1.833	1.734	1.498
13^-	12^+	1.275	1.612	1.840	1.876	1.774	1.526
14^+	13^-	1.277	1.641	1.878	1.917	1.812	1.552
15^-	14^+	1.279	1.669	1.914	1.955	1.848	1.577
16^+	15^-	1.281	1.695	1.948	1.991	1.881	1.601
17^-	16^+	1.283	1.719	1.979	2.025	1.913	1.624
18^+	17^-	1.285	1.742	2.009	2.056	1.943	1.646
19^-	18^+	1.287	1.764	2.037	2.086	1.971	1.667
20^+	19^-	1.288	1.785	2.064	2.114	1.998	1.688

Πίνακας 6.5: Πειραματικοί λόγοι $B(E1; L \rightarrow L - 1) / B(E2; L \rightarrow L - 2)$ (πολλαπλασιασμένοι με 10^5) [58] των τιμών $B(E1)$ και $B(E2)$ που προκύπτουν από την ίδια στάθμη του ^{226}Th , συγκρινόμενοι με τις θεωρητικές προβλέψεις για $\phi_0 = 45^\circ, 60^\circ$, καθώς και τις θεωρητικές προβλέψεις των Bizzeti και Bizzeti-Sona [58] (στήλη BBS). Όπως και στην εργασία [58], οι αστερίσκοι δείχνουν τις τιμές που χρησιμοποιούνται για κανονικοποίηση.

L^π	exp	45°	60°	BBS
8^+	2.0 (8)	1.454	1.457	1.3
9^-	1.7 (2)	1.649	1.652	1.3
10^+	1.5 (1)*	1.500*	1.500*	1.6*
11^-	1.7 (1)*	1.700*	1.700*	1.6*
12^+	1.6 (1)	1.544	1.542	1.8
13^-		1.747	1.746	1.8
14^+	1.4 (1)	1.585	1.582	1.9
15^-	1.7 (3)	1.791	1.789	2.0
16^+		1.622	1.619	2.1
17^-	1.5 (3)	1.831	1.829	2.1
18^+		1.656	1.653	2.2
19^-	1.7 (4)	1.867	1.865	2.3

Πίνακας 6.6: Πειραματικοί λόγοι $B(E1; L \rightarrow L + 1) / B(E1; L \rightarrow L - 1)$ [95] των τιμών $B(E1)$ που προκύπτουν από την ίδια στάθμη του ^{226}Ra , συγκρινόμενοι με τις θεωρητικές προβλέψεις για $\phi_0 = 45^\circ, 56^\circ$, καθώς και με τις τρεις θεωρητικές προβλέψεις της εργασίας [94], που ονομάζονται R-h, R-I, R-II.

L^π	exp	45°	56°	R-h	R-I	R-II
1^-	1.85 ± 1.20	2.116	2.092	1.84	1.98	1.85
3^-	0.87 ± 0.35	1.451	1.433	1.12	1.31	0.95
5^-		1.297	1.288			
7^-	1.79 ± 1.59	1.220	1.215	0.86	1.12	0.99
9^-	1.27 ± 0.68	1.172	1.170	0.83	1.10	1.13
11^-	1.12 ± 0.79	1.140	1.139	0.83	1.10	1.26
13^-	1.06 ± 0.68	1.117	1.117	0.85	1.11	1.35

Πίνακας 6.7: Τιμές των παραμέτρων $\beta_{0,max}$ όπου η πρώτη παράγωγος των λόγων ενέργειας $R(L) = E(L)/E(2)$ για τη θεμελιώδη ζώνη και τη σχετική με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας ($s = 1$) των δυναμικών Davidson της Εξίσωσης (6.17) παρουσιάζει μέγιστο, ενώ η δεύτερη παράγωγος εξαφανίζεται, μαζί με τους λόγους $R(L)$ που προκύπτουν σε αυτές τις τιμές (ονομάζονται “var”) και τους αντίστοιχους λόγους του παρόντος προτύπου (ονομάζονται “oct”), για διάφορες τιμές της στροφορμής L . Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε η γωνία $\phi_0 = 45^\circ$.

L^π	$\beta_{0,max}$	R_L var	R_L oct
1 ⁻	1.200	0.347	0.346
2 ⁺		1.000	1.000
3 ⁻	1.283	1.909	1.912
4 ⁺	1.329	3.030	3.039
5 ⁻	1.374	4.333	4.351
6 ⁺	1.419	5.797	5.829
7 ⁻	1.461	7.407	7.459
8 ⁺	1.502	9.154	9.233
9 ⁻	1.541	11.032	11.144
10 ⁺	1.579	13.034	13.187

Κεφάλαιο 7

ΑQOA για σπάνιες γαίες

Η οκταπολική παραμόρφωση στις σπάνιες γαίες με μαζικό αριθμό γύρω στο $A = 150$, παρατηρήθηκε πρώτη φορά στα ισότοπα του Βαρίου, ${}_{56}^{144}\text{Ba}_{88}$ και ${}_{56}^{146}\text{Ba}_{90}$ [93], ενώ ακολούθησαν και άλλα παραδείγματα, όπως αυτά των ${}_{58}^{146}\text{Ce}_{88}$ [109], ${}_{60}^{146}\text{Nd}_{86}$ και ${}_{60}^{148}\text{Nd}_{88}$ [110], ${}_{62}^{148}\text{Sm}_{88}$ και ${}_{62}^{150}\text{Sm}_{88}$ [111, 112], που έρχονται σε συμφωνία με υπολογισμούς μέσου πεδίου [80, 62, 97] που προβλέπουν [113] σταθερές, αξονικά συμμετρικές οκταπολικές παραμορφώσεις για τα ισότοπα Xe, Ba, Ce, Nd και Sm με $N=84, 86$ και 88 και για το ${}_{56}^{146}\text{Ba}_{90}$. Σε αυτές τις ισοτοπικές αλυσίδες, για μεγαλύτερους αριθμούς νετρονίων, αναμένεται η εμφάνιση οκταπολικών δονήσεων.

Από την άλλη, στα πλαίσια των συμμετριών κρίσιμου σημείου έχει βρεθεί ότι τα ισότονα με $N=90$, ${}^{150}\text{Nd}$ [31], ${}^{152}\text{Sm}$ [30], ${}^{154}\text{Gd}$ [36, 37] και ${}^{156}\text{Dy}$ [37, 114] αντιστοιχούν στο όριο της μετάβασης από τετραπολική δόνηση, σε τετραπολική παραμόρφωση, δηλαδή ακολουθούν τη συμμετρία $X(5)$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δειχθεί ότι τα ίδια ισότονα με $N=90$ βρίσκονται πολύ κοντά στο όριο μεταξύ οκταπολικών δονήσεων και οκταπολικών παραμορφώσεων. Τα φάσματά τους και ο ρυθμοί μεταβάσεων $B(EL)$, θα υπολογιστούν στα πλαίσια του προτύπου ΑQOA, το οποίο μελετήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την περιγραφή πυρήνων στο σύνορο οκταπολικών παραμορφώσεων, οκταπολικών δονήσεων στην περιοχή των ακτινίδων [60]. Η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο περιοχών, είναι ότι στις ακτινίδες ο περιττός - άρτιος κλωνισμός των ενεργειακών επιπέδων [62] είναι μικρός, με αποτέλεσμα τα φαινόμενα σύραγγας στο πρότυπο ΑQOA να μπορούν να αγνοηθούν, ενώ στις σπάνιες γαίες ο περιττός - άρτιος κλωνισμός είναι μεγάλος και τα φαινόμενα σύραγγας πρέπει να ληφθούν υπόψιν στο πρότυπο ΑQOA προκειμένου να πάρουμε μια ικανοποιητική περιγραφή του φάσματος και των μεταβάσεων $B(EL)$. Η εισαγωγή φαινομένων σύραγγας επιτυγχάνεται με το χωρισμό μεταβλητών με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τις ακτινίδες.

7.1 Κατασκευή και βασικές παραδοχές

Ακολουθώντας τα βήματα της παραγράφου 6.2 φτάνουμε στην εξ. (6.9). Χωρισμός μεταβλητών γίνεται θεωρώντας δυναμικό της μορφής $u(\beta, \phi) = u(\beta) + u(\phi^\pm)/\beta^2$, όπου $u(\phi)$ είναι δύο απότομοι αρμονικοί ταλαντωτές με ελάχιστα στις θέσεις $\pm\phi_0$ (βλ. εξ. (6.10)). Η ολική κυματοσυνάρτηση έχει πάλι τη μορφή

$$\Psi_L^\pm(\tilde{\beta}, \phi) = \psi_L^\pm(\tilde{\beta})[\chi(\tilde{\phi}^+) \pm \chi(\tilde{\phi}^-)]/\sqrt{2}. \quad (7.1)$$

Ακολουθώντας αδιαβατική προσέγγιση, η εξίσωση ως προς ϕ είναι

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial(\tilde{\phi}^\pm)^2} + u(\tilde{\phi}^\pm) - \epsilon_\phi \right] \chi(\tilde{\phi}^\pm) = 0, \quad (7.2)$$

για την οποία οι ενέργειες δίνονται από τη σχέση [115]

$$\epsilon_\phi = \sqrt{2c} \left(n_\phi + \frac{1}{2} \right) \mp \delta_{n_\phi}, \quad (7.3)$$

όπου δ είναι το σπάσιμο των ενεργειακών επιπέδων που συμβαίνει εξαιτίας φαινομένων σύραγγας μεταξύ των δύο πηγαδιών και εξαρτάται από τα ϕ_0 και c . Η εξίσωση ως προς β παίρνει τη μορφή

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\beta}^2} - \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial}{\partial\tilde{\beta}} + \frac{1}{\tilde{\beta}^2} \left(\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \sqrt{2c} \left(n_\phi + \frac{1}{2} \right) \mp \delta_{n_\phi} \right) + u(\tilde{\beta}) - \epsilon_{\tilde{\beta}}(L) \right] \psi_L^\pm(\tilde{\beta}) = 0. \quad (7.4)$$

Για $u(\tilde{\beta})$ άπειρο πηγάδι δυναμικού

$$u(\beta) = \begin{cases} 0, & \tilde{\beta} \leq \tilde{\beta}_w \\ \infty, & \tilde{\beta} > \tilde{\beta}_w \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας τα $\epsilon_{\tilde{\beta}} = k_{\tilde{\beta}}^2$, $z = \tilde{\beta}k_{\tilde{\beta}}$, η εξ. (7.4) παίρνει τη μορφή συνάρτησης Bessel

$$\frac{d^2\psi_\nu^\pm}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi_\nu^\pm}{dz} + \left[1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right] \psi_\nu^\pm = 0, \quad (7.5)$$

με

$$\nu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \sqrt{2c} \left(n_\phi + \frac{1}{2} \right) \mp \delta_{n_\phi}}. \quad (7.6)$$

Από την οριακή συνθήκη $\psi_\nu^\pm(\tilde{\beta}_w) = 0$ προκύπτει ότι $x_{s,\nu} = k_{s,\nu}\tilde{\beta}_w$. Επειδή $\epsilon_{\tilde{\beta},s,\nu} = \epsilon_{\tilde{\beta},s,\phi_0,c,L} = k_{s,\nu}^2$,

$$\epsilon_{\tilde{\beta},s,\phi_0,c,L} = \left(\frac{x_{s,\nu}}{\tilde{\beta}_w} \right)^2 \Rightarrow E_{\tilde{\beta},s,\phi_0,c,L} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{s,\nu}^2, \quad (7.7)$$

όπου $x_{s,\nu}$ είναι οι ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_\nu(z)$ με σειρά εμφάνισης s και τάξη $\nu = \sqrt{\frac{L(L+1)}{3(1+\sin^2\phi_0)} + \frac{3}{\sin^2 2\phi_0} + \sqrt{2c} \left(n_\phi + \frac{1}{2} \right) \mp \delta_{n_\phi}}$.

Στα επόμενα, θα ληφθούν υπόψη μόνο τα επίπεδα με τη μικρότερη τιμή του n_ϕ . Προκειμένου να διατηρηθεί ο αριθμός των παραμέτρων σε ένα ελάχιστο, ο όρος δ_0 θα παραμείνει, αλλά ο όρος που είναι ανάλογος του $\sqrt{2c}$ θα αγνοηθεί. Θα φανεί εκ των υστέρων ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα δεν επηρεάζονται δραστικά από αυτή την υπόθεση.

7.2 Αριθμητικά αποτελέσματα και σύγκριση με το πείραμα

Στο Σχήμα 7.1 φαίνεται η θεμελιώδης ζώνη και η σχετική με αυτή ζώνη αρνητικής ομοτιμίας, κανονικοποιημένη στην 2_1^+ κατάσταση για κάθε πυρήνα. Στην αλυσίδα Sm, είναι φανερό ότι τα ισότοπα $^{146,148,150}\text{Sm}$ ανήκουν στην περιοχή της οκταπολικής παραμόρφωσης (όπου επίπεδα με θετική και αρνητική ομοτιμία φτιάχνουν μία ενιαία ζώνη από πολύ χαμηλές τιμές της στροφορμής L), ενώ τα ισότοπα $^{154,156}\text{Sm}$ ανήκουν στην περιοχή των οκταπολικών δονήσεων (όπου ζώνες με θετική και αρνητική ομοτιμία είναι διαχωρισμένες). Ο πυρήνας ^{152}Sm βρίσκεται στο όριο αυτών των δύο περιοχών. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται οι θεωρητικές προβλέψεις του προτύπου AQOA για $\phi_0 = 45^\circ$ και χωρίς φαινόμενα σύραγγας ($\delta_0 = 0$). Είναι φανερό ότι τα άρτια επίπεδα του ^{152}Sm συμπίπτουν με τις προβλέψεις του προτύπου, το οποίο όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφει καλά τους πυρήνες ακτινιδών που βρίσκονται στο όριο των περιοχών μεταξύ οκταπολικών δονήσεων και οκταπολικής παραμόρφωσης.

Παρόμοια είναι η εικόνα για τα ισότοπα των Nd, Gd, Dy, με τους πυρήνες ^{150}Nd , ^{154}Gd και ^{156}Dy να βρίσκονται στο όριο μεταξύ των περιοχών οκταπολικών δονήσεων και οκταπολικής παραμόρφωσης. Όπως και στην περίπτωση του Sm, τα άρτια επίπεδα των παραπάνω πυρήνων συμπίπτουν με τις προβλέψεις του προτύπου AQOA για $\phi_0 = 45^\circ$ και χωρίς φαινόμενα σύραγγας ($\delta_0 = 0$), παρόλο που η συμφωνία στην περίπτωση του πυρήνα ^{156}Dy δεν είναι τόσο καλή. Στην περίπτωση των ισωτόπων του Ba και του Ce, φαίνεται ότι τα ^{148}Ba και ^{148}Ce βρίσκονται κοντά στο όριο, αλλά δεν υπάρχουν αρκετά δεδομένα για τα πλουσιότερα σε νετρόνια ισότοπα, τα οποία θα έπρεπε να αντιστοιχούν σε οκταπολικές δονήσεις.

Για τη μετάβαση από την περιοχή της οκταπολικής παραμόρφωσης στην περιοχή των οκταπολικών δονήσεων, στο προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιήθηκε μια απλή ποσότητα, η οποία μετρά τη σχετική μετατόπιση των επιπέδων με αρνητική ομοτιμία σε σχέση με τα επίπεδα με θετική ομοτιμία

$$\Delta E(L) = E(L) - \frac{E(L-1) + E(L+1)}{2} \quad (7.8)$$

Στο Σχήμα 7.2 φαίνεται αυτή η ποσότητα κανονικοποιημένη στην ενέργεια της 2_1^+ κατάστασης κάθε πυρήνα για τις ίδιες αλυσίδες ισωτόπων που παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.1. Οι πυρήνες ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd και ^{156}Dy βρίσκονται και πάλι στο όριο μεταξύ των περιοχών οκταπολικής παραμόρφωσης (που χαρακτηρίζεται από μικρό κλονισμό, ο οποίος πέφτει γρήγορα στο μηδέν συναρτήσει της στροφορμής) και οκταπολικών δονήσεων (που χαρακτηρίζεται από μεγάλο κλονισμό, που μειώνεται αργά συναρτήσει της στροφορμής). Τα ^{148}Ba και ^{148}Ce θα μπορούσαν να βρίσκονται κοντά στο όριο των περιοχών, αλλά δεν έχουν βρεθεί οκταπολικές δονήσεις που να αντιστοιχούν σε βαρύτερα ισότοπα.

Τα παραπάνω ευρήματα δείχνουν ότι τα ισότονα με $N=90$, ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd και ^{156}Dy , τα οποία είναι γνωστό ότι [116, 117, 30, 36, 38] είναι καλά παραδείγματα $X(5)$ συμμετρίας, δηλαδή αντιστοιχούν σε αλλαγή φάσης/σχήματος μεταξύ σφαιρικών $[U(5)]$ και συμμετρικά παραμορφωμένων $[SU(3)]$ πυρήνων, βρίσκονται επίσης κοντά στο σημείο μετάβασης μεταξύ οκταπολικής παραμόρφωσης και οκταπολικών δονήσεων. Με άλλα

λόγια, αν ληφθεί υπόψη μόνο ο τετραπολικός βαθμός ελευθερίας, όπως στο πρότυπο X(5), αυτοί οι πυρήνες είναι κρίσιμοι σε ό,τι αφορά τη μετάβαση από τις τετραπολικές δονήσεις στην αξονικά συμμετρική τετραπολική παραμόρφωση. Αν συμπεριληφθεί και ο οκταπολικός βαθμός ελευθερίας, όπως στο πρότυπο AQOA, οι ίδιοι πυρήνες είναι κρίσιμοι σε ό,τι αφορά τη μετάβαση από τις οκταπολικές δονήσεις στην αξονικά συμμετρική οκταπολική παραμόρφωση. Ο πυρήνας ^{156}Dy , σε κάθε περίπτωση, συμφωνεί λιγότερο με τις θεωρητικές προβλέψεις.

Τα ισότονα με $N=90$ έχουν προβλεφθεί ότι είναι καλοί υποψήφιοι της X(5) συμμετρίας μέσω της χρήσης του παράγοντα P [119]

$$P = \frac{N_p N_n}{N_p + N_n}, \quad (7.9)$$

όπου N_p και N_n είναι ο αριθμός των πρωτονίων και νετρονίων σθένους αντίστοιχα. Έχει βρεθεί ότι πυρήνες με $P \sim 5$ είναι υποψήφιοι για τη συμμετρία κρίσιμου σημείου X(5) [39], ενώ ταυτόχρονα αντιστοιχούν στην εμφάνιση οκταπολικής παραμόρφωσης [118].

Για τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων του προτύπου AQOA με φαινόμενα σύρραγας, οι οποίες είναι κατάλληλες για κάθε πυρήνα, ακολουθήθηκε το εξής μονοπάτι. Για ορισμένο πυρήνα, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ζευγών (ϕ_0, δ_0) που αναπαράγουν σωστά το λόγο $R(4) = E(4)/E(2)$ και άρα και τα επίπεδα της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης. Μεταξύ αυτών των ζευγών διαλέγεται αυτό που οδηγεί στην καλύτερη συμφωνία με τα επίπεδα αρνητικής ομοτιμίας. Τα επίπεδα της ζώνης με $s = 2$, καθώς και οι ενδοζωνικές και διαζωνικές μεταβάσεις υπολογίζονται με αυτές τις παραμέτρους.

Στον Πίνακα 7.1, τα αριθμητικά αποτελέσματα των φασμάτων των ^{150}Nd , ^{152}Sm , ^{154}Gd και ^{156}Dy συγκρίνονται με πειραματικά δεδομένα, καθώς και με τις προβλέψεις του X(5). Στον Πίνακα 7.2 δίνονται οι λόγοι μεταβάσεων $B(E2)$ και στον Πίνακα 7.3 οι λόγοι μεταβάσεων $B(E1)$.

Επιπλέον σχόλια:

Οι ζώνες θεμελιώδους κατάστασης αναπαράγονται με μεγάλη ακρίβεια, με τις προβλέψεις του προτύπου AQOA να βρίσκονται πιο κοντά στα πειραματικά δεδομένα σε σχέση με τις προβλέψεις του ελεύθερου παραμέτρων προτύπου X(5).

Οι ζώνες με αρνητική ομοτιμία αναπαράγονται αρκετά καλά. Οι μεγαλύτερες διαφορές παρατηρούνται στα χαμηλότερα επίπεδα (υποεκτιμούνται) και στα υψηλότερα επίπεδα (υπερεκτιμούνται). Αυτό δείχνει ότι ο κλωνισμός δε μειώνεται συναρτήσει της στροφορμής τόσο γρήγορα (εκθετικά) όσο θα έπρεπε.

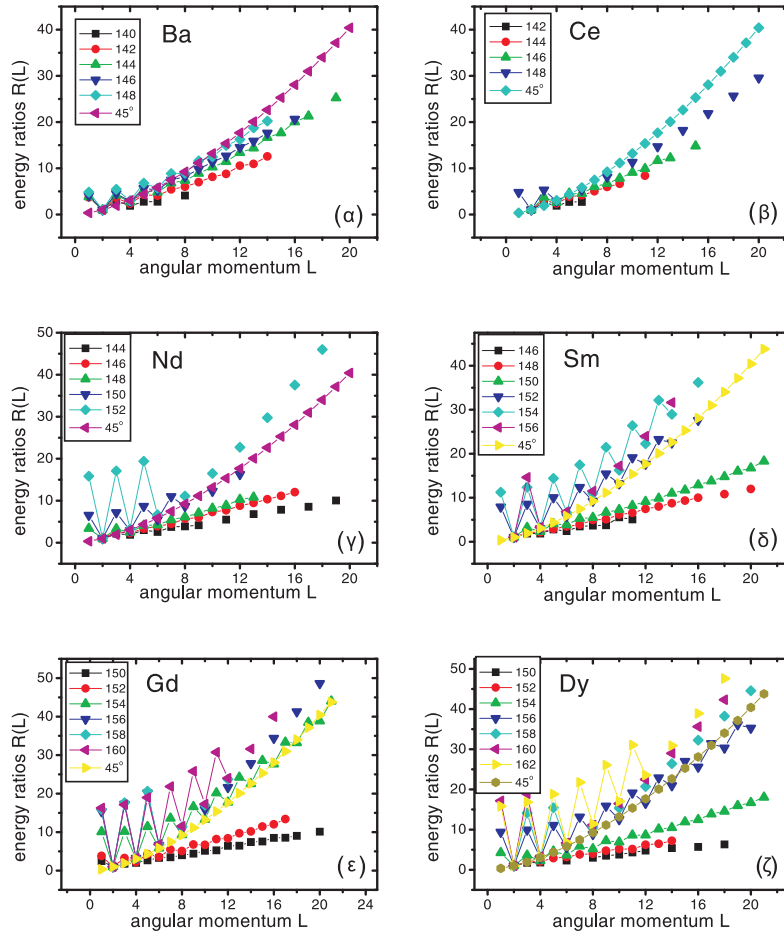
Οι προβλέψεις του προτύπου AQOA για τις ζώνες με $s = 2$ είναι λίγο υψηλότερες από τις X(5) προβλέψεις και επιπλέον παρουσιάζουν το ίδιο πρόβλημα με τις X(5) προβλέψεις, δηλαδή την υπερεκτίμηση της απόστασης δύο επιπέδων κατά ένα παράγοντα δύο. Είναι γνωστό ότι το πρόβλημα αυτό λύνεται, αντικαθιστώντας το δυναμικό του απειρόβαθου πηγαδιού με ένα δυναμικό πηγαδιού με τοιχώματα που έχουν κλίση [120].

Οι προβλέψεις του AQOA για τις διαζωνικές $B(E2)$ μεταβάσεις στη ζώνη θεμελιώδους κατάστασης και στη ζώνη με $s = 2$, καθώς και οι $B(E2)$ μεταβάσεις μεταξύ αυτών των ζωνών είναι τουλάχιστον το ίδιο καλές με τις προβλέψεις του ελεύθερου παραμέτρων προτύπου X(5). Οι προβλέψεις του AQOA για τις μεταβάσεις $B(E1)$ με-

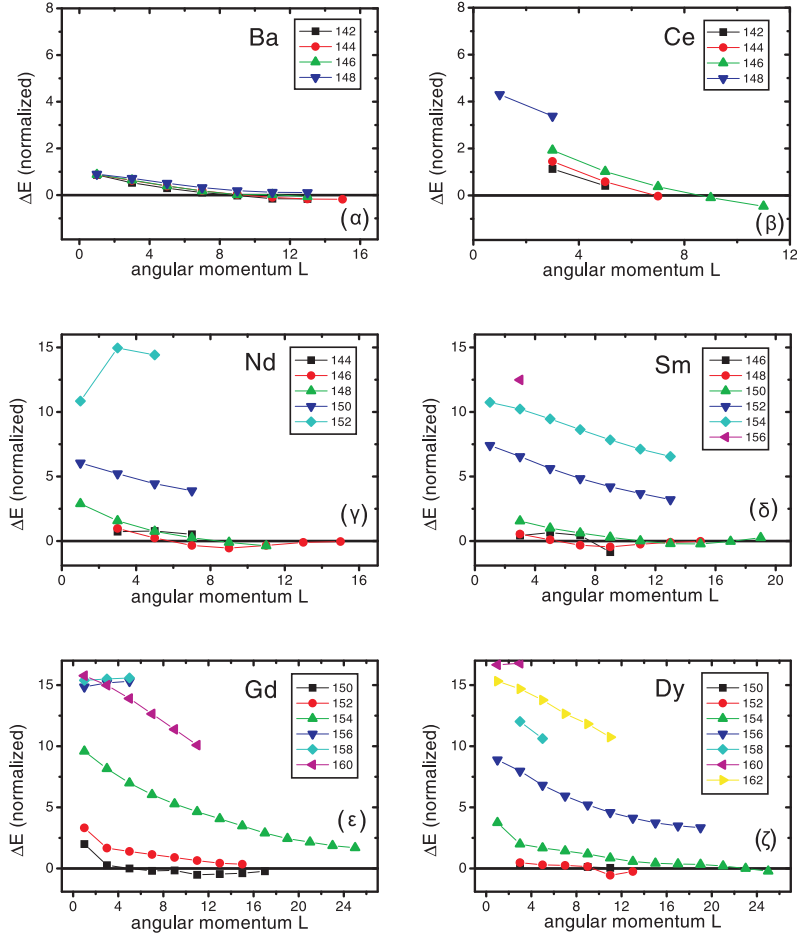
7.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ 67

ταξύ της ζώνης με αρνητική ομοτιμία και της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης για τον πυρήνα ^{152}Sm για τον οποίο υπάρχουν πειραματικά δεδομένα, βρίσκονται μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος [121].

Σε κάθε περίπτωση, η συμφωνία μεταξύ θεωρίας και πειράματος για τον πυρήνα ^{156}Dy είναι λιγότερο καλή σε σχέση με τους άλλους πυρήνες.



Σχήμα 7.1: (α) Τα ενεργειακά επίπεδα της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης και της σχετικής με αυτή ζώνης αρνητικής ομοτιμίας για τους πυρήνες ^{140}Ba [122], ^{142}Ba [123], ^{144}Ba [124], ^{146}Ba [125], και ^{148}Ba [126], κανονικοποιημένα στην κατάσταση 2_1^+ για κάθε πυρήνα, με το συμβολισμό $R(L) = E(L)/E(2)$, συναρτήσει της στροφορμής. Οι προβλέψεις του προτύπου ΑΞΟΑ [60] με $\phi_0 = 45^\circ$, χωρίς φαινόμενα σύραγγας ($\delta_0 = 0$), συμβολίζονται ως 45° και παραβάλλονται για σύγκριση. (β) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{142}Ce [123], ^{144}Ce [124], ^{146}Ce [125] και ^{148}Ce [126]. (γ) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{144}Nd [124], ^{146}Nd [125], ^{148}Nd [126], ^{150}Nd [127] και ^{152}Nd [128]. (δ) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{146}Sm [125], ^{148}Sm [126], ^{150}Sm [127], ^{152}Sm [128], ^{154}Sm [129] και ^{156}Sm [130]. (ε) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{150}Gd [127], ^{152}Gd [128], ^{154}Gd [129], ^{156}Gd [130], ^{158}Gd [131] και ^{160}Gd [132]. (ζ) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{150}Dy [127], ^{152}Dy [128], ^{154}Dy [129], ^{156}Dy [130], ^{158}Dy [131], ^{160}Dy [132] και ^{162}Dy [133].



Σχήμα 7.2: (α) Πειραματικός ενεργειακός κλωνισμός $\Delta(E)$ για τους πυρήνες ^{142}Ba [123], ^{144}Ba [124], ^{146}Ba [125] και ^{148}Ba [126], κανονικοποιημένος στην ενέργεια της κατάστασης 2_1^+ για κάθε πυρήνα, συναρτήσει της στροφορμής. (β) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{142}Ce [123], ^{144}Ce [124], ^{146}Ce [125] και ^{148}Ce [126]. (γ) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{144}Nd [124], ^{146}Nd [125], ^{148}Nd [126], ^{150}Nd [127] και ^{152}Nd [128]. (δ) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{146}Sm [125], ^{148}Sm [126], ^{150}Sm [127], ^{152}Sm [128], ^{154}Sm [129] και ^{156}Sm [130]. (ε) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{150}Gd [127], ^{152}Gd [128], ^{154}Gd [129], ^{156}Gd [130], ^{158}Gd [131] και ^{160}Gd [132]. (ζ) Τα ίδια για τους πυρήνες ^{150}Dy [127], ^{152}Dy [128], ^{154}Dy [129], ^{156}Dy [130], ^{158}Dy [131], ^{160}Dy [132] και ^{162}Dy [133].

Πίνακας 7.1: Φάσμα της ζώνης θεμελιώδους κατάστασης, της σχετικής με αυτή ζώνης αρνητικής ομοτιμίας και της πρώτης διεγερμένης ζώνης ($s = 2$) που προκύπτουν από τα πρότυπα ΑQOA και X(5), συγκρινόμενα με τα πειραματικά δεδομένα των $N = 90$, X(5) πυρήνων. Όλα τα επίπεδα είναι κανονικοποιημένα στην κατάσταση 2_1^+ .

	¹⁵⁰ Nd	¹⁵⁰ Nd	¹⁵² Sm	¹⁵² Sm	¹⁵⁴ Gd	¹⁵⁴ Gd	¹⁵⁶ Dy	¹⁵⁶ Dy	
Αναφ.	exp	AQOA	exp	AQOA	exp	AQOA	exp	AQOA	X(5)
	[127]		[128]		[129]		[130]		
ϕ_0		17.8°		16.0°		15.5°		15.8°	
δ_0		6.5		7.3		7.8		8.5	
L_s^π									
0_1^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_1^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_1^+	2.930	2.929	3.009	3.010	3.015	3.017	2.934	2.934	2.904
6_1^+	5.533	5.502	5.804	5.748	5.831	5.772	5.592	5.515	5.430
8_1^+	8.676	8.614	9.241	9.093	9.299	9.139	8.823	8.641	8.483
10_1^+	12.280	12.224	13.214	12.991	13.302	13.066	12.521	12.268	12.027
12_1^+	16.274	16.309	17.642	17.414	17.752	17.523	16.592	16.375	16.041
14_1^+			22.467	22.345	22.567	22.494	20.961	20.948	20.514
16_1^+			27.607	27.775	27.663	27.967	25.574	25.980	25.437
18_1^+					33.210	33.934	30.327	31.462	30.804
20_1^+					38.859	40.390	35.269	37.392	36.611
0_2^+	5.187	6.248	5.622	7.214	5.531	7.305	4.904	6.227	5.649
2_2^+	6.533	8.048	6.655	8.973	6.626	9.060	6.015	8.023	7.450
4_2^+	8.738	11.342	8.400	12.356	8.512	12.449	7.899	11.317	10.689
1_1^-	6.551	5.790	7.911	6.574	10.086	6.947	9.387	7.095	
3_1^-	7.180	6.853	8.549	7.696	10.170	8.067	9.932	8.118	
5_1^-	8.671	8.678	10.030	9.637	11.409	10.006	11.078	9.892	
7_1^-	11.002	11.173	12.363	12.306	13.603	12.680	13.138	12.340	
9_1^-			15.430	15.630	16.580	16.015	15.871	15.394	
11_1^-			19.108	19.554	20.170	19.958	19.137	19.008	
13_1^-			23.265	24.043	24.224	24.473	22.895	23.146	
15_1^-					28.594	29.532	26.999	27.784	
17_1^-					33.331	35.118	31.437	32.905	
19_1^-					38.478	41.217	36.138	38.498	

7.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ 71

Πίνακας 7.2: $B(E2; L_i \rightarrow L_f)$ λόγοι μεταβάσεων που συνδέουν τα επίπεδα θετικής ομοτιμίας που προκύπτουν από τα πρότυπα AQOA και X(5), συγκρινόμενα με τα πειραματικά δεδομένα των $N = 90$, X(5) πυρήνων. Όλοι οι λόγοι είναι κανονικοποιημένοι στη μετάβαση $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$.

		¹⁵⁰ Nd	¹⁵⁰ Nd	¹⁵² Sm	¹⁵² Sm	¹⁵⁴ Gd	¹⁵⁴ Gd	¹⁵⁶ Dy	¹⁵⁶ Dy	
		exp	AQOA	exp	AQOA	exp	AQOA	exp	AQOA	X5
		[31]		[30]		[36]		[37]		
Αναφ.			17.8°		16.0°		15.5°		15.8°	
	ϕ_0									
	δ_0		6.5		7.3		7.8		8.5	
$(L_s^\pi)_i$	$(L_s^\pi)_f$									
2_1^+	0_1^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_1^+	2_1^+	1.583	1.586	1.451	1.554	1.551	1.551	1.603	1.584	1.599
6_1^+	4_1^+	1.826	1.956	1.701	1.887	1.684	1.881	1.530	1.953	1.982
8_1^+	6_1^+	2.417	2.241	1.979	2.147	1.975	2.138	1.629	2.237	2.276
10_1^+	8_1^+	1.774	2.469	2.222	2.357			1.636	2.464	2.509
2_2^+	0_2^+	0.991	0.798	0.771	0.789	0.342	0.788	0.662	0.796	0.795
4_2^+	2_2^+	1.478	1.198	1.417	1.176	1.184	1.174	1.854	1.196	1.200
6_2^+	4_2^+							1.391	1.451	1.468
8_2^+	6_2^+							1.556	1.667	1.693
10_2^+	8_2^+							1.795	1.853	1.886
0_2^+	2_1^+	0.339	0.587	0.229	0.480	0.285	0.471		0.581	0.624
2_2^+	0_1^+	0.010	0.024	0.007	0.025	0.003	0.025	<0.001	0.023	0.021
2_2^+	2_1^+	0.078	0.082	0.042	0.074	0.040	0.073	0.073	0.081	0.082
2_2^+	4_1^+	0.148	0.349	0.132	0.297	0.127	0.292	0.086	0.347	0.366
4_2^+	2_1^+	0.001	0.012	0.007	0.013	0.003	0.013	0.003	0.012	0.009
4_2^+	4_1^+	0.061	0.062	0.035	0.056	0.032	0.056	0.086	0.061	0.061
4_2^+	6_1^+	0.609	0.272	0.028	0.241	0.090	0.238	0.126	0.270	0.279
6_2^+	4_1^+							0.003	0.008	0.006
6_2^+	6_1^+							0.073	0.050	0.049
8_2^+	8_1^+							0.126	0.041	0.041
10_2^+	10_1^+							0.106	0.035	0.035

Πίνακας 7.3: $B(E1; L_i \rightarrow L_f)$ λόγοι μεταβάσεων που συνδέουν επίπεδα $s = 1$ θετικής και αρνητικής ομοτιμίας που προκύπτουν από το πρότυπο AQOA με $\phi_0 = 16.0^\circ$ και $\delta = 7.3$, συγκρινόμενα με πειραματικά δεδομένα για τον πυρήνα ¹⁵²Sm [128]. Όλοι οι λόγοι είναι κανονικοποιημένοι στη μετάβαση $1_1^- \rightarrow 0_1^+$.

$(L_s^\pi)_i$	$(L_s^\pi)_f$	exp	AQOA
1_1^-	0_1^+	1.000	1.000
1_1^-	2_1^+	1.833 (341)	2.210
3_1^-	2_1^+	1.929 (565)	1.432
3_1^-	4_1^+	1.952 (567)	2.184

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε ο οκταπολικός βαθμός ελευθερίας, ο οποίος παρουσιάζεται πειραματικά σε αρκετούς πυρήνες, τόσο στην περιοχή των σπάνιων γαιών, όσο και στις ακτινίδες. Συγκεκριμένα, εντοπίζονται πυρήνες που παρουσιάζουν οκταπολικές δονήσεις, καθώς και άλλοι που παρουσιάζουν μόνιμη οκταπολική παραμόρφωση. Σε μερικές αλυσίδες ισοτόπων, η μετάβαση από τη μία αλυσίδα στην άλλη γίνεται απότομα, παρέχοντας ενδείξεις για αλλαγή φάσης/σχήματος.

Η μελέτη επεκτάθηκε τόσο σε αλγεβρικά πρότυπα της πυρηνικής δομής, γενικεύσεις του Προτύπου Αλληλεπιδρόντων Μποζονίων [Interacting Boson Model (IBM)], όσο και σε γεωμετρικά πρότυπα, επεκτάσεις του προτύπου του Bohr. Και στις δύο περιπτώσεις εξετάστηκαν και πρότυπα τα οποία περιγράφουν το κρίσιμο σημείο, όπου συμβαίνει αλλαγή φάσης/σχήματος σε μια σειρά ισοτόπων.

Για την ταυτόχρονη περιγραφή των τετραπολικών και οκταπολικών βαθμών ελευθερίας σε ατομικούς πυρήνες αναπτύχθηκε το Αναλυτικό Τετραπολικό Οκταπολικό Αξονικά Συμμετρικό Πρότυπο [Analytic Quadrupole Octupole Axially Symmetric Model (AQOA)], το οποίο αποτελεί επέκταση του προτύπου του Bohr και εφαρμόστηκε τόσο στις ακτινίδες, όσο και στις σπάνιες γαίες. Βρέθηκε ότι στις σπάνιες γαίες απαιτείται η εισαγωγή δυναμικού στο γ βαθμό ελευθερίας, το οποίο αποτελείται από δύο ταλαντωτές διαχωριζόμενους από ένα πεπερασμένο φράγμα, ενώ στην περίπτωση των ακτινίδων η απλούστερη μορφή των δύο ταλαντωτών που διαχωρίζονται από άπειρο φράγμα αρκεί. Εξετάστηκε λεπτομερώς η συμπεριφορά των ισοτόπων με $N=90$ στην περιοχή Nd–Dy και αποδείχτηκε ότι τα ισότονα αυτά αντιστοιχούν όχι μόνο στο κρίσιμο σημείο της μετάβασης από σφαιρικούς σε ωσειδείς παραμορφωμένους πυρήνες όσον αφορά τον τετραπολικό βαθμό ελευθερίας, αλλά και στο κρίσιμο σημείο της μετάβασης από οκταπολικές δονήσεις σε μόνιμη οκταπολική παραμόρφωση, που είναι και το κύριο εύρημα της εργασίας αυτής.

Στο πρότυπο AQOA έχει υποτεθεί ότι οι άξονες της τετραπολικής παραμόρφωσης και της οκταπολικής παραμόρφωσης συμπίπτουν. Είναι επιθυμητή η ανάπτυξη ενός προτύπου το οποίο θα αποφεύγει αυτήν την προσέγγιση.

Παράρτημα Α

Ας δούμε τώρα πως προκύπτει ο τύπος της χαμιλτονιανής (2.24)

$$\begin{aligned}
 H &= T + V(\beta, \gamma) \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left| \sin 3\gamma \right| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{8B\beta^2} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} + V(\beta, \gamma)
 \end{aligned}$$

και το στοιχείο όγκου

$$dV = \beta^4 |\sin 3\gamma| d\beta d\gamma d^3\theta$$

χρησιμοποιώντας το μετρικό ταυστή $g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}$ και τη λαπλασιανή σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, $\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις $\alpha_{2,0} = a_0 = \beta \cos \gamma$, $\alpha_{2,\pm 2} = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma$ και $\alpha_{2,\pm 1} = 0$ κατά το κύριο σύστημα αξόνων, έχουμε για το μετρικό ταυστή στις συντεταγμένες (β, γ, θ)

$$\begin{aligned}
 g_{\beta,\gamma} &= \frac{\partial \alpha_{2,0}}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha_{2,0}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \alpha_{2,\pm 2}}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha_{2,\pm 2}}{\partial \gamma} \\
 &= \cos \gamma \beta (-\sin \gamma) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma \frac{\beta}{\sqrt{2}} \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma \frac{\beta}{\sqrt{2}} \cos \gamma \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτουν τα $g_{\beta\beta} = 1$, $g_{\gamma\gamma} = \beta^2$ και $g_{\beta\gamma} = 0$. Προκειμένου να βρούμε τους ταυστές $g_{\theta'_x, \theta'_x}$, $g_{\theta'_y, \theta'_y}$, $g_{\theta'_z, \theta'_z}$, $g_{\theta'_x, \theta'_y}$, $g_{\theta'_y, \theta'_z}$ και $g_{\theta'_z, \theta'_x}$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις [4] $\frac{\partial \alpha_{2,\pm 2}}{\partial \theta'_z} = \mp 2ia_2$, $\frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \theta'_x} = -\frac{i}{2} (\sqrt{6}a_0 + 2a_2)$, $\frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \theta'_y} = \pm \frac{1}{2} (\sqrt{6}a_0 - 2a_2)$. Αυτοί είναι και οι μόνοι μη μηδενικοί όροι. Τελικά, γράφοντας τις ροπές αδράνειας στη μορφή

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_1 &= 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{B}{2} [\sqrt{6}a_0 + 2a_2]^2 \\
 \mathcal{J}_2 &= 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{B}{2} [\sqrt{6}a_0 - 2a_2]^2 \\
 \mathcal{J}_3 &= 4B\beta^2 \sin^2 \gamma = 8Ba_2^2
 \end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g_{\theta'_x, \theta'_x} &= -\frac{\mathcal{J}_1}{B} = 4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) \\ g_{\theta'_y, \theta'_y} &= \frac{\mathcal{J}_2}{B} = 4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) \\ g_{\theta'_z, \theta'_z} &= -\frac{\mathcal{J}_3}{B} = 4\beta^2 \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

Εφόσον έχουν μείνει μόνο τα διαγώνια στοιχεία, η ορίζουσα του μετρικού ταυυστή είναι

$$\begin{aligned} g &= g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma} g_{\theta'_x, \theta'_x} g_{\theta'_y, \theta'_y} g_{\theta'_z, \theta'_z} \\ &= 4\beta^8 (\sin 3\gamma)^2 \end{aligned}$$

Ξαναγράφοντας τη λαπλασιανή, αντικαθιστούμε όλες τις παραπάνω ποσότητες

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ &\quad + \frac{B}{\mathcal{J}_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2_x} + \frac{B}{\mathcal{J}_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2_y} + \frac{B}{\mathcal{J}_3} \frac{\partial^2}{\partial \theta'^2_z} \\ &= \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} + \sum_k \frac{B}{\mathcal{J}_k} \frac{J_k'^2}{\hbar^2} \end{aligned}$$

Έτσι, η κινητική ενέργεια παίρνει τη ζητούμενη μορφή

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\hbar^2}{2B} \nabla^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \sum_k \frac{J_k'^2}{2\mathcal{J}_k} \end{aligned}$$

Τα ίδια και για το στοιχείο όγκου

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{g} d\beta d\gamma d^3\theta \\ &= 2\beta^4 |\sin 3\gamma| d\beta d\gamma d^3\theta \end{aligned}$$

Παράρτημα Β

Η ολική κυματοσυνάρτηση για την περίπτωση απειρόβαθου πηγαδιού στο πρότυπο A-QOA στις ακτινίδες έχει μορφή

$$\Phi_L^\pm(\beta_2, \beta_3, \theta) = (\beta_2, \beta_3)^{-3/2} J_\nu(k_{s,\nu}\tilde{\beta}) \frac{[\chi_{n_\phi}(\tilde{\phi}^+) \pm \chi_{n_\phi}(\tilde{\phi}^-)]}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{2L+1}{32\pi^2}} [1 \pm (-1)^L] D_{0,M}^{(L)}(\theta).$$

Οι ρυθμοί ηλεκτρικών τετραπολικών μεταβάσεων δίνονται από τη σχέση

$$B(E2; L_i a_i \rightarrow L_f a_f) = \frac{|\langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle|^2}{(2L_i + 1)},$$

όπου το ανηγμένο στοιχείο πίνακα μπορεί να υπολογιστεί από το θεώρημα Wigner-Eckart

$$\langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle = \frac{\sqrt{2L_f + 1}}{(L_i 2L_f | M_i M M_f)} \langle L_f \mu_f a_f | T_\mu^{(E2)} | L_i \mu_i a_i \rangle.$$

Για τον υπολογισμό θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι η μετάβαση αφορά στάθμες με άρτια ομοτιμία, οπότε χρειάζεται μόνο το + της κυματοσυνάρτησης. Επιπλέον, θα εξεταστεί μόνο η περίπτωση $n_\phi = 0$, που αντιστοιχεί σε $H_0 = 1$ και σε κυματοσυνάρτηση

$$\chi_0(\tilde{\phi}^\pm) = \frac{b^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-b^2 \frac{(\tilde{\phi}^\pm)^2}{2}}$$

και επειδή $T(E2) = t_2 \beta_2 D_{M,0}^2$

$$\begin{aligned} \langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle &= \frac{\sqrt{2L_f + 1}}{(L_i 2L_f | M_i M M_f)} \times \\ &\int (\beta_2, \beta_3)^{-3/2} J_{\nu_f}(k_{s_f, \nu_f} \tilde{\beta}) \frac{[\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]}{\sqrt{2}} \times \\ &\sqrt{\frac{2L_f + 1}{32\pi^2}} [1 + (-1)^{L_f}] D_{M_f, 0}^{*(L_f)} t_2 \beta_2 D_{M, 0}^{(2)} \times \\ &(\beta_2, \beta_3)^{-3/2} J_{\nu_i}(k_{s_i, \nu_i} \tilde{\beta}) \frac{[\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]}{\sqrt{2}} \times \\ &\sqrt{\frac{2L_i + 1}{32\pi^2}} [1 + (-1)^{L_i}] D_{M_i, 0}^{(L_i)} \beta_2^3 \beta_3^3 d\beta_2 d\beta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle &= \frac{2L_f + 1}{(L_i 2L_f | M_i M M_f)} \times \\ &\int \frac{1}{64\pi^2} t_2 \sqrt{2L_i + 1} [1 + (-1)^{L_f}] [1 + (-1)^{L_i}] \times \\ &[\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \beta_2 J_{\nu_f}(k_{s_f, \nu_f} \tilde{\beta}) J_{\nu_i}(k_{s_i, \nu_i} \tilde{\beta}) \times \\ &D_{M_f, 0}^{*(L_f)} D_{M, 0}^{(2)} D_{M_i, 0}^{(L_i)} d\beta_2 d\beta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \end{aligned}$$

όπου $\tilde{\phi}^+ = \phi - \phi_0$ και $\tilde{\phi}^- = \phi + \phi_0$. Το ολοκλήρωμα ως προς τις τρεις συναρτήσεις Wigner δίνει

$$\int D_{M_f, 0}^{*(L_f)} D_{M, 0}^{(2)} D_{M_i, 0}^{(L_i)} d^3\theta_i = \frac{8\pi^2}{2L_f + 1} (L_i 2L_f | 000) (L_i 2L_f | M_i M M_f).$$

Αντικαθιστώντας στο ανηγμένο στοιχείο πίνακα προκύπτει,

$$\begin{aligned} \langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle &= \frac{1}{8} t_2 \int \sqrt{2L_i + 1} [1 + (-1)^{L_f}] [1 + (-1)^{L_i}] (L_i 2L_f | 000) \times \\ &[\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \beta_2 J_{\nu_f}(k_{s_f, \nu_f} \tilde{\beta}) J_{\nu_i}(k_{s_i, \nu_i} \tilde{\beta}) d\beta_2 d\beta_3. \end{aligned}$$

Εισάγωντας καινούριες συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \tilde{\beta}_2 \sqrt{\frac{B}{B_2}}, & \beta_3 &= \tilde{\beta}_3 \sqrt{\frac{B}{B_3}} \\ d\beta_2 &= d\tilde{\beta}_2 \sqrt{\frac{B}{B_2}}, & d\beta_3 &= d\tilde{\beta}_3 \sqrt{\frac{B}{B_3}}, \end{aligned}$$

όπου η ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι $\frac{B}{\sqrt{B_2 B_3}}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle &= \frac{1}{8} t_2 \sqrt{2L_i + 1} [1 + (-1)^{L_f}] [1 + (-1)^{L_i}] (L_i 2L_f | 000) \sqrt{\frac{B}{B_3} \frac{B}{B_2}} \times \\ &\int [\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \tilde{\beta}_2 J_{\nu_f}(k_{s_f, \nu_f} \tilde{\beta}) J_{\nu_i}(k_{s_i, \nu_i} \tilde{\beta}) d\tilde{\beta}_2 d\tilde{\beta}_3. \end{aligned}$$

Εισάγωντας πολικές συντεταγμένες $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta} \cos \phi$, $\tilde{\beta}_3 = \tilde{\beta} \sin \phi$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle &= \frac{1}{8} t_2 \sqrt{2L_i + 1} [1 + (-1)^{L_f}] [1 + (-1)^{L_i}] (L_i 2L_f | 000) \sqrt{\frac{B}{B_3} \frac{B}{B_2}} \times \\ &\int [\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \tilde{\beta} \cos \phi J_{\nu_f}(k_{s_f, \nu_f} \tilde{\beta}) J_{\nu_i}(k_{s_i, \nu_i} \tilde{\beta}) \tilde{\beta} d\tilde{\beta} d\phi. \end{aligned}$$

Ξαναγράφοντας το ολοκλήρωμα ως προς $\tilde{\beta}$, $I_{\tilde{\beta}}^{(E2)} = \int \tilde{\beta}^2 J_{\nu_f}(k_{s_f, \nu_f} \tilde{\beta}) J_{\nu_i}(k_{s_i, \nu_i} \tilde{\beta})$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle &= \frac{1}{8} t_2 \sqrt{2L_i + 1} [1 + (-1)^{L_f}] [1 + (-1)^{L_i}] (L_i 2L_f | 000) \sqrt{\frac{B}{B_3} \frac{B}{B_2}} \times \\ &I_{\tilde{\beta}}^{(E2)} \int [\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \cos \phi d\phi. \end{aligned}$$

Έτσι, μπορούν να υπολογιστούν οι $B(E2)$

$$\begin{aligned} B(E2; L_i a_i \rightarrow L_f a_f) &= \frac{|\langle L_f a_f || T^{(E2)} || L_i a_i \rangle|^2}{(2L_i + 1)} \\ &= \frac{1}{8^2} t_2^2 \frac{B^2}{B_2^2} \frac{B}{B_3} [1 + (-1)^{L_f}]^2 [1 + (-1)^{L_i}]^2 \times \\ &\quad \left(\int [\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \cos \phi d\phi \right)^2 (L_i 2L_f |000)^2 (I_{\tilde{\beta}}^{(E2)})^2. \end{aligned}$$

Για $s = 1$ και για μεταβάσεις μεταξύ άρτιων σταθμών οι $B(E2)$ κανονικοποιούνται ως προς τη μετάβαση $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$.

$$\begin{aligned} B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) &= \frac{1}{8^2} t_2^2 \frac{B^2}{B_2^2} \frac{B}{B_3} [1 + (-1)^{0}]^2 [1 + (-1)^2]^2 (220|000)^2 \times \\ &\quad \left(\int [\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \cos \phi d\phi \right)^2 \times \\ &\quad \left(\int \tilde{\beta}^2 J_{\nu_{L=0}}(k_{1,\nu_{L=0}} \tilde{\beta}) J_{\nu_{L=2}}(k_{1,\nu_{L=2}} \tilde{\beta}) d\beta \right)^2. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το ολοκλήρωμα $\int [\chi_0(\tilde{\phi}^+) + \chi_0(\tilde{\phi}^-)]^2 \cos \phi d\phi$ είναι μία σταθερά, οι κανονικοποιημένοι ρυθμοί τετραπολικών μεταβάσεων είναι

$$\frac{B(E2; L_i a_i \rightarrow L_f a_f)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)} = \frac{(L_i 2L_f |000)^2}{(220|000)^2} \frac{(\int \tilde{\beta}^2 J_{\nu_f}(k_{1,\nu_f} \tilde{\beta}) J_{\nu_i}(k_{1,\nu_i} \tilde{\beta}) d\beta)^2}{(\int \tilde{\beta}^2 J_{\nu_{(L=0)}}(k_{1,\nu_{(L=0)}} \tilde{\beta}) J_{\nu_{(L=2)}}(k_{1,\nu_{(L=2)}} \tilde{\beta}) d\beta)^2}.$$

Βιβλιογραφία

- [1] P. Cejnar, J. Jolie, R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2155 (2010).
- [2] N. V. Zamfir, R. F. Casten, M. A. Caprio, C. W. Beausang, R. Krücken, J. R. Novak, J. R. Cooper, G. Cata-Danil, C. J. Barton, *Phys. Rev. C* **60**, 054312 (1999).
- [3] A. R. Edmonds, *Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton, New Jersey, 1957), κεφ. 5, εξίς. 5.2.1.
- [4] W. Greiner, J. A. Maruhn, *Nuclear Models*, (Springer, 1996), κεφ. 6.
- [5] Π. Ασημακόπουλος, *Πυρηνική Φυσική*, Τόμος 2, κεφ. 9.
- [6] A. Bohr, *Dam. Mat. Fys. Medd.* **14**, (1952).
- [7] P. Ring, P. Schuck, *The nuclear Many-Body Problem*, (Springer-Verlag, New York, 1980), κεφ. 1.
- [8] A.S. Davydov, G. F. Filippov, *Nucl. Phys.* **8**, 237 (1958).
- [9] L. Willets, M. Jean, *Phys. Rev. C* **102**, 788 (1956).
- [10] Iachello, Arima, *The Interacting Boson Model*.
- [11] D. H. Feng, R. Gilmore, S. R. Deans, *Phys. Rev. C* **23**, 1254 (1981).
- [12] J. N. Ginocchio, M. W. Kirson, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1744 (1980).
- [13] A. E. L. Dieperink, O. Scholten, F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1747 (1980).
- [14] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective*, (Oxford University Press, Oxford, 1990).
- [15] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052502 (2001).
- [16] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3580 (2000).
- [17] J. P. Elliot, J. A. Evans, P. Park, *Phys. Lett. B* **169**, 309 (1986).
- [18] G. Rakavy, *Nucl. Phys.* **4**, 289 (1957).
- [19] R. F. Casten, N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3584 (2000).

- [20] N. V. Zamfir, *et al.*, Phys. Rev. C **65**, 044325 (2002).
- [21] J. M. Arias, Phys. Rev. C, **63**, 034308 (2001).
- [22] A. Frank, C. E. Alonso, J. M. Arias, Phys. Rev. C **65**, 014301 (2001).
- [23] D. L. Zhang, Y. X. Liu, Phys. Rev. C **65**, 057301 (2002).
- [24] J. F. Zhang, G. L. Long, Y. Sun, S. J. Shu, F. Y. Liu, Y. Jia, Chin. Phys. Lett. **20**, 1231 (2003).
- [25] D. L. Zhang, Y. X. Liu, Chin. Phys. Lett. **20**, 1028 (2003).
- [26] R. M. Clark, *et al.*, Phys. Rev. C **69**, 064322 (2004).
- [27] M. W. Kirson, Phys. Rev. C **70**, 049801 (2004).
- [28] H. von Garrel, *et al.*, Phys. Rev. C **73**, 054315 (2006).
- [29] N. Marginean, *et al.*, Phys. Lett. B **633**, 696 (2006).
- [30] R. F. Casten, N. V. Zamfir, Phys. Rev. Lett. **87**, 052503 (2001).
- [31] R. Krücken, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 232501 (2002).
- [32] N. V. Zamfir, *et al.*, Phys. Rev. C **65**, 067305 (2002).
- [33] R. M. Clark, M. Cromaz, M. A. Deleplanque, R. M. Diamond, P. Fallon, A. Gørgen, I. Y. Lee, A. O. Macchiavelli, F. S. Stephens, D. Ward, Phys. Rev. C **67**, 041302 (2003).
- [34] R. F. Casten, N. V. Zamfir, R. Krücken, Phys. Rev. C **68**, 059801 (2003).
- [35] D.-L. Zhang, H.-Y. Zhao, Chin. Phys. Lett. **19**, 779–781 (2002).
- [36] D. Tonev, A. Dewald, T. Klug, P. Petkov, J. Jolie, A. Fitzler, O. Möller, S. Heinze, P. von Brentano, R. F. Casten, Phys. Rev. C **69**, 034334 (2004).
- [37] A. Dewald, *et al.*, Eur. Phys. J. A **20**, 173–178 (2004).
- [38] M. A. Caprio, *et al.*, Phys. Rev. C **66**, 054310 (2002).
- [39] E. A. McCutchan, *et al.*, Phys. Rev. C **69**, 024308 (2004).
- [40] E. A. McCutchan, N. V. Zamfir, R. F. Casten, M. A. Caprio, H. Ai, H. Amro, C. W. Beausang, A. A. Hecht, D. A. Meyer, J. J. Ressler, Phys. Rev. C **71**, 024309 (2005).
- [41] A. Dewald, *et al.*, J. Phys. G **31**, S1427–S1432 (2005).
- [42] R. M. Clark, *et al.*, Phys. Rev. C **68**, 037301 (2003).

- [43] D. S. Brenner, in *Mapping the Triangle*, ed. A. Aprahamian, J. A. Cizewski, S. Pittel, N. V. Zamfir, AIP CP **638**, 223–227 (2002).
- [44] P. G. Bizzeti, A. M. Bizzeti-Sona, Phys. Rev. C **66**, 031301 (2002).
- [45] C. Hutter, *et al.*, Phys. Rev. C **67**, 054315 (2003).
- [46] C. Fransen, N. Pietralla, A. Linnemann, V. Werner, R. Bijker, Phys. Rev. C **69**, 014313 (2004).
- [47] D. Bonatsos, *Interacting Boson Models of Nuclear Structure*, (Clarendon Press, Oxford, 1988).
- [48] Phys. Rev. C **66**, 021304(R) (2002).
- [49] Phys. Lett. B **527**, 55 (2002).
- [50] Y. Alhassid, N. Whelan, Phys. Rev. Lett. **67**, 816 (1991).
- [51] J. N. Ginocchio, M. W. Kirson, Nucl. Phys. A **350**, 31 (1980).
- [52] F. Iachello, N. V. Zamfir, R. F. Casten, Phys. Rev. Lett. **81**, 1191 (1998).
- [53] E. A. McCutchan, Dennis Bonatsos, N. V. Zamfir, Phys. Rev. C , 034306 (2006).
- [54] P. A. Butler, W. Nazarewicz, Rev. Mod. Phys. **68**, 349 (1996).
- [55] S. M. Scott, D. D. Warner, W. D. Hamilton, G. Jung, K. D. Wunsch, B. Pfeiffer, J. Phys. G **5**, L187 (1979).
- [56] K. Neergaard, P. Vogel, Nucl. Phys. A **145**, 33 (1970).
- [57] S. G. Rohozinski, Rep. Prog. Phys. **51**, 541 (1988).
- [58] P. G. Bizzetti, A. M. Bizzetti-Sona, Phys. Rev. C **70**, 064319 (2004).
- [59] P. G. Bizzetti, A. M. Bizzetti-Sona, Phys. Rev. C **77**, 024320 (2008).
- [60] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P. P. Raychev, P. A. Terziev, Phys. Rev. C **71**, 064309 (2004b).
- [61] W. R. Phillips, I. Ahmad,
- [62] W. Nazarewicz, P. Olanders, Nucl. Phys. A **441**, 420 (1985).
- [63] G. A. Leander, R. K. Sheline, P. Moller, P. Olanders, I. Ragnarsson, A. J. Sierk, Nucl. Phys. A **388**, 452 (1982).
- [64] G. A. Leander, R. K. Sheline, Nucl. Phys. A **413**, 375 (1984).
- [65] P. D. Cottle, D. A. Bromley, Phys. Lett. B **182**, 129 (1986).
- [66] P. D. Cottle, D. A. Bromley, Phys. Rev. C **35**, 1891 (1987).

- [67] A. Arima, F. Iachello, *Ann. Phys.* **99**, 253 (1976).
- [68] A. Arima, F. Iachello, , *Ann. Phys.* **111**, 201 (1978).
- [69] O. Scholten, F. Iachello, A. Arima, *Ann. Phys.* **115**, 325 (1978).
- [70] Engel J., *Phys. Lett.* **171B**, 148 (1986)
- [71] J. Engel, F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1126 (1985).
- [72] J. Engel, F. Iachello, *Nucl. Phys. A* **472**, 61 (1987).
- [73] C. E. Alonso, J. M. Arias, A. Frank, H. M. Sofia, S. M. Lenzi, A. Vitturi, *Nucl. Phys. A* **586**, 100 (1995).
- [74] M. Babilon, N. V. Zamfir, D. Kusnezov, E. A. McCutchan, A. Zilges, *Phys. Rev. C* **72**, 064302 (2005).
- [75] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure, Vol. II: Nuclear Deformations*, Benjamin, New York, 1975.
- [76] P. Schüler, Ch. Lauterbach, Y. K. Agarwal, J. De Boer, K. P. Blume, P. A. Butler, K. Euler, Ch. Fleischmann, C. Günther, E. Hauber, H. J. Maier, M. Marten-Tölle, Ch. Schandera, R. S. Simon, R. Tölle, P. Zeyen, *Phys. Lett. B* **174**, 241 (1986).
- [77] S. G. Rohoziński, *Rep. Prog. Phys.* **51**, 541 (1988).
- [78] I. Ahmad, P. A. Butler, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43**, 71 (1993).
- [79] P. A. Butler, W. Nazarewicz, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 349 (1996).
- [80] W. Nazarewicz, P. Olanders, I. Ragnarsson, J. Dudek, G. A. Leander, P. Möller, E. Ruchowska, *Nucl. Phys. A* **429**, 269 (1984).
- [81] R. K. Sheline, *Phys. Lett. B* **197**, 500 (1987).
- [82] A. Ya. Dzyublik, V. Yu. Denisov, *Yad. Fiz.* **56**, 30 (1993) [*Phys. At. Nucl.* **56**, 303 (1993)].
- [83] P. M. Davidson, *Proc. R. Soc.* **135**, 459 (1932).
- [84] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev, P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **584**, 40 (2004)
- [85] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev, P. A. Terziev, *Phys. Rev. C* **70**, 024305 (2004).
- [86] A. S. Davydiv, A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20**, 499 (1960).
- [87] V. Yu. Denisov, A. Ya. Dzyublik, *Nucl. Phys. A* **589**, 17 (1995).

- [88] J. P. Elliott, J. A. Evans, P. Park, Phys. Lett. B **169** 309 (1986).
- [89] D. J. Rowe, C. Bahri, J. Phys. A**31**, 4947 (1998).
- [90] P. Holmberg, P. O. Lipas, Nucl. Phys. A **117**, 552 (1968).
- [91] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, S. B. Drenska, N. Karoussos, N. Minkov, P. P. Raychev, R. P. Roussev, Phys. Rev. C **62**, 024301 (2000).
- [92] P. Schüler, Ch. Lauterbach, Y. K. Agarwal, J. De Boer, K. P. Blume, P. A. Butler, K. Euler, Ch. Fleischmann, C. Günther, E. Hauber, H. J. Maier, M. Marten-Tölle, Ch. Schandera, R. S. Simon, R. Tölle, P. Zeyen, Phys. Lett. B **174**, 241 (1986).
- [93] W. R. Phillips, I. Ahmad, H. Emling, R. Holzmann, R. V. F. Janssens, T.-L. Khoo, M. W. Drigert, Phys. Rev. Lett. **57**, 3257 (1986).
- [94] A. A. Raduta, D. Ionescu, I. I. Ursu, A. Faessler, Nucl. Phys. A **720**, 43 (2003).
- [95] H. J. Wollersheim, H. Emling, H. Grein, R. Kulesa, R. S. Simon, C. Fleischmann, J. de Boer, E. Hauber, C. Lauterbach, C. Schandera, P. A. Butler, T. Czosnyka, Nucl. Phys. A **556**, 261 (1993).
- [96] A. A. Raduta, Recent Res. Devel. Nuclear Phys. **1**, 1 (2004).
- [97] G. A. Leander, W. Nazarewicz, G. F. Bertsch, J. Dudek, Nucl. Phys. A **453**, 58 (1986).
- [98] N. V. Zamfir, D. Kusnezov, Phys. Rev. C **63**, 054306 (2001).
- [99] A. Artna-Cohen, Nucl. Data Sheets **80**, 157 (1997).
- [100] Y. A. Akovali, Nucl. Data Sheets **77**, 271 (1996).
- [101] A. Artna-Cohen, Nucl. Data Sheets **80**, 227 (1997).
- [102] Y. A. Akovali, Nucl. Data Sheets **77**, 433 (1996).
- [103] A. Artna-Cohen, Nucl. Data Sheets **80**, 723 (1997).
- [104] J. F. C. Cocks, D. Hawcroft, N. Amzal, P. A. Butler, K. J. Cann, P. T. Greenlees, G. D. Jones, S. Asztalos, R. M. Clark, M. A. Deleplanque, R. M. Diamond, P. Fallon, I. Y. Lee, A. O. Macchiavelli, R. W. MacLeod, F. S. Stephens, P. Jones, R. Julin, R. Broda, B. Fornal, J. F. Smith, T. Lauritsen, P. Bhattacharyya, C. T. Zhang, Nucl. Phys. A **645**, 61 (1999).
- [105] M. R. Schmorak, Nucl. Data Sheets **63**, 139 (1991).
- [106] Y. A. Akovali, Nucl. Data Sheets **76**, 457 (1995).

- [107] N. Schulz, V. Vanin, M. Aïche, A. Chevallier, J. Chevallier, J. C. Sens, Ch. Briançon, S. Cwiok, E. Ruchowska, J. Fernandez-Niello, Ch. Mittag, J. Dudek, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2645 (1989).
- [108] J. F. C. Cocks, P. A. Butler, K. J. Cann, P. T. Greenlees, G. D. Jones, S. Asztalos, P. Bhattacharyya, R. Broda, R. M. Clark, M. A. Deleplanque, R. M. Diamond, P. Fallon, B. Fornal, P. M. Jones, R. Julin, T. Lauritsen, I. Y. Lee, A. O. Macchiavelli, R. W. MacLeod, J. F. Smith, F. S. Stephens, C. T. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2920 (1997).
- [109] W. R. Phillips, R. V. F. Janssens, I. Ahmad, H. Emling, R. Holzmann, T. L. Khoo, M. W. Drigert, *Phys. Lett. B* **212**, 402 (1988).
- [110] W. Urban et al. *Phys. Lett. B* **200**, 424 (1988).
- [111] W. Urban et al., *Phys. Lett. B* **185**, 331 (1987).
- [112] R. K. Sheline, P. C. Sood, *Phys. Rev. C* **34**, 2362 (1986).
- [113] W. Nazarewicz, *Proc. Intern. Conf. on Nuclear Structure through Static and Dynamic Moments (Melbourne 1987)*, edited by H. H. Bolotin (Conf. Proc. Press, Melbourne, 1987) σελ. 180.
- [114] P. S. Turner, D. J. Rowe, *Nucl. Phys. A* **756**, 333 (2005).
- [115] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1975), κεφ. 5.
- [116] R. M. Clark, M. Cromaz, M. A. Deleplanque, M. Descovich, R. M. Diamond, P. Fallon, R. B. Fierstone, I. Y. Lee, A. O. Macchiavelli, H. Mahmud, E. Rodriguez-Vieitez, F. S. Stephens, D. Ward, *Phys. Rev. C* **68**, 037301 (2003).
- [117] R. Krücken, B. Albanna, C. Bialik, R. F. Casten, J. R. Cooper, A. Dewald, N. V. Zamfir, C. J. Barton, C. W. Beausang, M. A. Caprio, A. A. Hecht, T. Klug, J. R. Novak, N. Pietralla, P. von Bretano, *Phys. Lett.* **88**, 232501 (2002).
- [118] N. V. Zamfir, P. von Bretano, R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **49**, R605 (1994).
- [119] R. F. Casten, D. S. Brenner, P. E. Haustein, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 658 (1987).
- [120] M. A. Caprio, *Phys. Rev. C* **69**, 044307 (2004).
- [121] A. Artna-Cohen, *Nucl. Data Sheets* **79**, 1 (1996).
- [122] L. K. Peker, *Nucl. Data Sheets* **73**, 261 (1994).
- [123] J. K. Tuli, *Nucl. Data Sheets* **89**, 641 (2000).
- [124] A. A. Sonzogni, *Nucl. Data Sheets* **93**, 599 (2001).
- [125] L. K. Peker, J. K. Tuli, *Nucl. Data Sheets* **82**, 187 (1997).

- [126] M. R. Bhat, Nucl. Data Sheets **89**, 797 (2000).
- [127] E. der Mateosian, J. K. Tuli, Nucl. Data Sheets **75**, 827 (1995).
- [128] A. Artna-Cohen, Nucl. Data Sheets **79**, 1 (1996).
- [129] C. W. Reich, R. G. Helmer, Nucl. Data Sheets **85**, 171 (1998).
- [130] C. W. Reich, Nucl. Data Sheets **99**, 753 (2003).
- [131] R. G. Helmer, Nucl. Data Sheets **101**, 325 (2004).
- [132] C. W. Reich, Nucl. Data Sheets **78**, 547 (1996).
- [133] R. G. Helmer, C. W. Reich, Nucl. Data Sheets **87**, 317 (1999).