ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Superradiance σε Φορτισμένες Μελανές Οπές

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της Στέλλας Κιορπελίδη

Επιβλέπων: Λευτέρης Παπαντωνόπουλος

Αθήνα, Ιούνιος, 2017

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΦΥΣΙΚΗ
ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Superradiance φορτισμένων Μελανών Οπών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Στέλλας Κιορπελίδη

Επιβλέπων : Παπαντωνόπουλος Ελευθέριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα
Ιούλιος 2017

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Διατμηματικο Προγραμμα Μεταπτυχιακων Σπουδων
Φυσικη και Τεχνολογικες Εφαρμογες
Τομεας Φυσικης

Superradiance φορτισμένων Μελανών Οπών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Στέλλας Κιορπελίδη

Επιβλέπων : Παπαντωνόπουλος Ελευθέριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τον Ιούλιο 2017.

(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)
... ...	... ...	... ...
Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος	Γεώργιος Κουτσούμπας	Νικόλαος Ήργες
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Abstract

The fundamental role played by black holes in many areas of physics makes it highly important to explore the nature of their stability. The stability of charged Reissner-Nordstrom black holes to *neutral* (gravitational and electromagnetic) perturbations was established almost four decades ago. However, the stability of these charged black holes under *charged* perturbations is getting complicated due to the well-known phenomena of superradiant scattering: A charged scalar field impinging on a charged Reissner-Nordtrom black hole can be amplified as it scatters off the hole. If the incident field has a non-zero rest mass, then the mass term effectively works as a mirror, preventing the energy extracted from the hole from escaping to infinity. One may suspect that superradiant amplification of charged fields by the charged black hole may lead to an instability of the Reissner-Nordstrom spacetime. In this thesis we study explicitly the phenomenon and we show that, for charged Reissner-Nordstrom black holes in the regime $(Q/M)^2 \leq 8/9$ the two conditions which are required in order to trigger a possible superradiant instability namely: the existence of a trapping potential well outside the black hole, and superradiant amplification of the trapped modes cannot be satisfied simultaneously. Afterward, the two-parameter charged McVittie solution of the Einstein equations may become very interesting if interpreted as a black hole. We hope the study of the superradiant scattering from these black holes will serve as a guide for the exciting developments lying ahead!

Περίληψη

Ο θεμελιώδης ρόλος των μελανών οπών σε πολλούς κλάδους της φυσικής κάνει εξαίρετης σημασίας την διερεύνηση της φύσης της σταθερότητας τους.Η σταθερότητα μια φορτισμένης μαύρης τρύπας Reissner-Nordstrom μετά από *ουδέτερες* διαταραχές (βαρυτικές και ηλεκτρομαγνητικές) έχει αποδειχθεί σχεδόν τέσσερις δεκαετίες πριν. Κάτω από *φορτισμένες* διαταραχές τα πράγματα γίνονται λίγο περίπλοκα, λόγω γνωστών φαινομένων σκέδασης superradiant. Ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο που προσπίπτει σε μια φορτισμένη μελανή οπή Reissner-Nordstrom ενισχύεται καθώς σκεδάζεται από αυτήν. Αν το αρχικό πεδίο έχει μη μηδενική μάζα ηρεμίας τότε η μάζα αυτή λειτουργεί ως ¨καθρέφτης¨ εμποδίζοντας την εξαγωγή ενέργειας από την μαύρη τρύπα στο άπειρο. Κάποιος μπορεί να υποθέσει ότι η ενίσχυση φορτισμένων πεδίων μετά από αλλεπάλληλες σκεδάσεις από μια φορτισμένη μελανή οπή μπορεί να οδηγήσει σε μια ασταθή Reissner-Nordstrom. Στην εργασία μας, μελετάμε αναλυτικά το φαινόμενο και δείχνουμε ότι για μια φορτισμένη μελανή οπή Reissner-Nordstrom στο όριο $(Q/M)^2 \leq 8/9$ οι δύο συνθήκες που απαιτούνται για να τεθεί εις ενέργεια το φαινόμενο superradiance δεν μπορούν να ικανοποιούνται ταυτόχρονα (ύπαρξη πηγαδίου δυναμικού έξω από την μελανή οπή και ενίσχυση του πεδίου που σκεδάζεται από αυτήν). Έπειτα η φορτισμένη λύση της εξίσωσης Einstein, η McVittie, μπορεί να γίνει πολύ ενδιαφέρουσα αν ερμηνευτεί ως μια φορτισμένη μελανή οπή και η μελέτη του φαινομένου για αυτήν την λύση ελπίζουμε να χρησιμεύσει ως οδηγός για συναρπαστικές εξελίξεις!

Ευχαριστίες

Πρώτους από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω την μητέρα μου που μου στάθηκε στις σπουδές μου και στην σταδιοδρομία μου τόσα χρόνια. Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου για την καθοδήγηση τους στα βήματά μου μέσα στο Πεδίο της Φυσικής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Ε. Παπαντωνόπουλο για τις πολύτιμες συμβουλές του στην διπλωματική μου εργασία. Επίσης ευχαριστώ τον συνάδελφο μου Κωνσταντίνο Ντρέκη για την αμέριστη βοήθειά του στην εργασία μου. Τέλος ευχαριστώ όλους τους φίλους μου που ο καθένας συνέβαλε με ένα μικρό λιθαράκι στην δουλειά μου αυτή!

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικά Εργαλεία

Το θεμαλιώδες χαρακτηριστικό της θεωρίας του Einstein για τη βαρύτητα είναι ότι ο επίπεδος $(1+3)$διάστατος χωρόχρονος του Minkowski πρέπει να αντικατασταθεί από έναν καμπύλο χωρόχρονο, και ότι η καμπυλότητα καθίσταται υπεύθυνη για τα βαρυτικά φαινόμενα. Τα γεγονότα εξακολουθούν να παριστάνονται από ¨σημεία¨ στον χωρόχρονο, αλλά οι σχέσεις μεταξύ διαφορετικών γεγονότων καθώς και μεταξύ διαφορετικών αδρανειακών παρατηρητών θα αλλάξουν όταν συνυπολογισθεί η καμπυλότητα. Τα συναφή μαθηματικά είναι γνωστά ως διαφορική γεωμετρία.Στο κεφάλαιο αυτό, λοιπόν, θα παρουσιάσουμε τα μαθηματικά εργαλεία της γεωμετρίας σε χώρους που συμβαίνει το φαινόμενο που εξετάζουμε. Ο χώρος στον οποίο λαμβάνουν διάφορα φαινόμενα μπορεί να οριστεί από μια Πολλαπλότητα. Πολλαπλότητα είναι ο χώρος εκείνος ο οποίος τοπικά φαίνεται να είναι ίδιος με έναν $n-$διάστατο Ευκλείδιο χώρο.

1.1 Μετρική

Πάνω σε έναν χώρο μπορούμε να του ορίσουμε την λεγόμενη μετρική. Η μετρική αποτελεί ένα εργαλείο με το οποίο μπορούμε να μετράμε πάνω στον χώρο αποστάσεις. Στον ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο ορίζουμε την απειροστή ποσότητα ως

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.1}$$

Η οποία γράφεται και ως εσωτερικό γινόμενο δυο διαφορικών μέσω της μετρικής

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.2}$$

όπου

$$dx^\nu = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

και με μετρική να ορίζουμε την ποσότητα:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Προφανώς η μετρική είναι ένας τανυστής τύπου $(0, 2)$. Επίσης μπορούμε να γράψουμε την μετρική σε σφαιρικές συντεταγμένες κάνοντας τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \tag{1.5}$$

Επομένως το στοιχείο μήκους γίνεται:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{1.6}$$

Προφανώς η μετρική παίρνει διαφορετική μορφή από εκείνης σε καρτεσιανές συντεταγμένες , όμως όλες οι ιδιότητες του χώρου παραμένουν αναλλοίωτες

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

όπου τώρα

$$dx^\nu = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$ έτσι ώστε να παραμένει αναλλοίωτο το στοιχειώδες μήκος με την εξής σχέση:

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{1.9}$$

όπου δ^μ_ν το δέλτα του Kronecker.

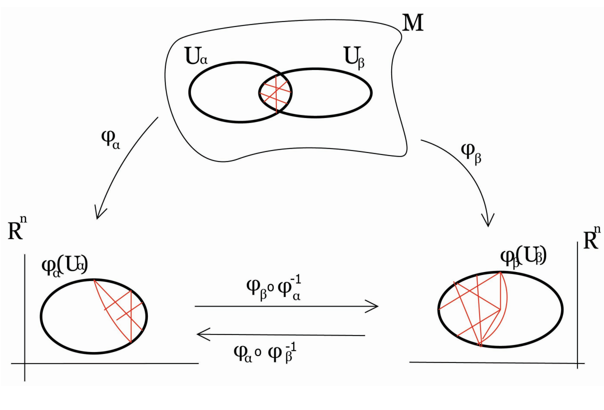
1.2 Πολλαπλότητα

Η πολλαπλότητα είναι εν γένει η γενίκευση της ιδέας των καμπύλων και των επιφανειών στον $\mathbb{R}^n$. Η καμπύλη στον $3-$διάστατο Ευκλείδειο χώρο παραμετροποιείται τοπικά από μια παράμετρο $t\,(x(t), y(t), z(t))$ μοιάζοντας τοπικά με τον $\mathbb{R}$. Παράλληλα χρειάζονται δύο παράμετροι u, v για να παραμετροποιήσουμε μια επιφάνεια $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ που τοπικά μοιάζει με τον $\mathbb{R}^2$. Αυτή η ιδιότηταγενικεύεται για μια πολλαπλότητα και έτσι δημιουργούνται τοπολογικοί χώροι που τοπικά θα μοιάζουν με τον $\mathbb{R}^m$.

1.2.1 Ορισμός

Πολλαπλότητα $\mathcal{M}$ είναι μια $n-$διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η $\mathcal{M}$ είναι ένας τοπολογικός χώρος.
2. Παρέχεται στην $\mathcal{M}$ μια οικογένεια από ζευγάρια $\{(U_i, \phi_i)\}$
3. Το σύνολο $\{U_i\}$ είναι μια οικογένεια από ανοιχτά σύνολα που καλύπτουν την $\mathcal{M}: \bigcup_i U_i = \mathcal{M}$. Τα ϕ_i είναι ομοιομορφισμοί από τα U_i στο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$
4. Δοθέντων των $U_\alpha, U_\beta : U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, η bijective απεικόνιση $\psi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \phi_\beta^{-\alpha} : \phi_\beta\,(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha\,(U_\alpha \cap U_\beta)$ είναι απειροστά διαφορίσιμη.



Σχήμα 1.1: Διαφορίσιμη πολλαπλότητα

Τα (U_i, ϕ_i) καλούνται χάρτης ή σύνολο συντεταγμένων ενώ το σύνολο $\{(U_i, \phi_i)\}$ καλείται Άτλαντας. Το υποσύνολο U_i καλείται γειτονιά συντεταγμένων ενώ η ϕ_i καλείται συνάρτηση συντεταγμένων. Η ϕ_i αναπαρίσταται από n συναρτήσεις $\{x^1(p), ..., x^n(p)\}$. Το σημείο p του $\mathcal{M}$ υφίσταται ανεξαρτήτως συντεταγμένων.

1.3 Λογισμός πάνω σε πολλαπλότητες

Ορίζουμε την έννοια της διαφορικής απεικόνισης . Έστω $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$, με $\mathcal{M}$ $m-$ πολλαπλότητα και $\mathcal{N}$ $n-$πολλαπλότητα. Τότε απεικονίζεται ένα σημείο $p \in \mathcal{M}$ σε ένα σημείο $f(p) \in \mathcal{N}$ με $f : p \in f(p)$. Διαλέγοντας έναν χάρτη (U, ϕ) στον $\mathcal{M}$ και (V, ψ) στον $\mathcal{N}$ και $p \in U, f(p) \in V$. Τότε ισχύει ότι:

$$\psi f \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n \tag{1.10}$$

Τότε λέμε ότι ο $\mathcal{M}$ είναι διαφορομορφικός του $\mathcal{N}$

1.3.1 Διανύσματα σε πολλαπλότητα

Η παράγωγος κατεύθυνσης μιας συνάρτησης $f\left(\gamma(t)\right)$ κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$ στο $t = 0$, τυχαίο σημείο p σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\left.\frac{df\left(\gamma(t)\right)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df\left(\gamma(t)\right)}{dx^\mu}\right|_{t=0} \left.\frac{dx^\mu\left(\gamma(t)\right)}{dt}\right|_{t=0} \tag{1.11}$$

Στην ουσία αντιστοιχούμε την $\dfrac{df\left(\gamma(t)\right)}{dt}$ σε έναν διαφορικό τελεστή X

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.12}$$

με

$$X^\mu = \left.\frac{dx^\mu\left(\gamma(t)\right)}{dt}\right|_{t=0} \tag{1.13}$$

που δρά πάνω στην f:

$$X[f] = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}[f] = \left.\frac{df\left(\gamma(t)\right)}{dx^\mu}\frac{dx^\mu\left(\gamma(t)\right)}{dt}\right|_{t=0} \tag{1.14}$$

Έτσι όλα τα εφαπτομενικά διανύσματα που αντιστοιχούν σε όλες τις διαφορετικές καμπύλες που περνάνε από το σημείο p αποτελούν τον εφαπτομενικό χώρο και συμβολίζεται ως $T_p\mathcal{M}$. Ως διάνυσμα βάσης θεωρούμε το σύνολο των μερικών παραγώγων $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right\} = \{\partial_\mu\}$.Ως γεωμετρικό αντικείμενο που είναι ένα διάνυσμα θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Επομένως πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Poincare δηλαδή το σύνολο περιστροφών, προωθήσεων (στροφές χώρου-χρόνου) και μετατοπίσεων. Έτσι μπορούμε να μετασχηματίσουμε από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο με απλή διαδικασία:

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \check{X}^\nu \frac{\partial}{\partial \check{x}^\mu} \tag{1.15}$$

και ο μετασχηματισμός είναι ο:

$$X^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \check{x}^\nu}\check{X}^\nu \tag{1.16}$$

1.3.2 Δυαδικά διανύσματα σε πολλαπλότητα

Θεωρώντας τον εφαπτόμενο χώρο $T_p\mathcal{M}$ μπορούμε να ορίσουμε τον δυαδικό εφαπτόμενο χώρο $T_p^*\mathcal{M}$ ο οποίος περιέχει τα δυϊαδικά διανύσματα $\omega : T_p\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ τα οποία λέγονται και $1-$μορφές. Ένα απλό παράδειγμα είναι το διαφορικό df μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{F}\left(\mathcal{M}\right)$,με $\mathcal{F}\left(\mathcal{M}\right)$ ο χώρος συναρτήσεων πάνω στα σημεία της πολλαπλότητας, , που δρά πάνω σε ένα διάνυσμα V:

$$\langle df, V\rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$

Αφού $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu$ τότε ορίζουμε την βάση των $1-$μορφών ως $\{dx^\mu\}$ και τότε:

$$\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{1.18}$$

έτσι μια αυθαίρετη $1-$μορφή γράφεται:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \acute{\eta} \breve{\omega}_\nu d\breve{x}^\nu \tag{1.19}$$

με τον μετασχηματισμό:

$$\omega_\mu = \breve{\omega}_\nu \frac{\partial \breve{x}^\nu}{\partial x^\mu} \tag{1.20}$$

1.3.3 Τανυστές σε πολλαπλότητα

Όπως και στον επίπεδο χώρο $\mathbb{R}^\nu$ μπορούμε να ορίσουμε έναν (k,l) σαν μια πολυγραμμική απεικόνιση από μια συλλογή k δυαδικών διανυσμάτων και l διανυσμάτων στο $\mathbb{R}$ με συνιστώσες:

$$T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = T\left(dx^{\mu_1},...,dx^{\mu_k};\partial_{\nu_1},...,\partial_{\nu_l}\right) \tag{1.21}$$

που είναι ισοδύναμο με την έκφραση:

$$T = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\partial_{\mu_1}\otimes ...\otimes\partial_{\mu_k}\otimes dx^{\nu_1}\otimes ...\otimes dx^{\nu_l} \tag{1.22}$$

Οι τανυστές αυτοί μετασχηματίζουν τους πάνω δείκτες σαν τον μετασχηματισμό των διανυσμάτων και τους κάτω δείκτες σαν αυτόν των δυαδικών διανυσμάτων, επομένως γράφουμε:

$$T^{\mu_1'\cdots\mu_k'}{}_{\nu_1'\ldots\nu_l'} = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_k'}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l'}}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \tag{1.23}$$

Κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των τανυστών είναι:

1. $T^{ab}{}_{bc} = T^a{}_c$ συστολή και θεωρούμε άθροιση ως προς τον δείκτη b
2. $T_{(\mu_1\ldots\mu_n)\rho}{}^\sigma = \dfrac{1}{n!}\left(T_{\mu_1\ldots\mu_n\rho}{}^\sigma + \text{άθροισμα μεταθέσεων των δεικτών}\,\mu_1...\mu_n\right)$
3. $T_{[\mu_1\ldots\mu_n]\rho}{}^\sigma = \dfrac{1}{n!}\left(T_{\mu_1\ldots\mu_n\rho}{}^\sigma - \text{άθροισμα εναλλαγής προσήμου των μεταθέσεων των δεικτών}\,\mu_1...\mu_n\right)$

1.3.4 Συναλλοίωτη παράγωγος

Η μερική παράγωγος ∂_ν των τανυστών δεν είναι καλός τανυστής εφόσον δεν μετασχηματίζεται σαν τανυστής

$$\partial_{\mu'}W_{\nu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}W_{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}W_\nu\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^\nu}{\partial x^{\nu'}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}W_\nu\right) + W_\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\right) \tag{1.24}$$

Παρατηρούμε ότι για να είναι καλός τανυστής θα έπρεπε να λείπει ο τελευταίος όρος. Επομένως χρειαζόμαστε μια παράγωγο η οποία θα μας δίνει καλούς τανυστές. Αυτή είναι η συναλλοίωτη παράγωγος και συμβολίζεται με ∇_μ και όταν δρά πάνω σε έναν τανυστή συμβολίζεται με $\nabla_\mu A_\nu = A_{\nu;\mu}$. Η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται πάνω σε μια πολλαπλότητα ως ο τελεστής ο οποίος πηγαίνει έναν τανυστή τύπου (k,l) σε έναν τύπου $(k,l+1)$, απαιτώντας να ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $\nabla(T+S) = \nabla T + \nabla S$
2. $\nabla(T\otimes S) = (\nabla T)\otimes S + T\otimes(\nabla S)$
3. $\nabla_\mu\left(T^\lambda_{\lambda\rho}\right) = (\nabla T)^\lambda_{\mu\lambda\rho}$
4. $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$

με T, S να είναι τανυστές ενώ το ϕ βαθμωτό, δηλαδή τανυστής τύπου $(0,0)$. Έτσι καταγράφουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους για ένα διάνυσμα, ένα δυαδικό διάνυσμα και ενός τανυστή:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}V^\lambda \tag{1.25}$$

$$\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\\ &+ \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda}T^{\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} + \cdots + \Gamma^{\mu_k}_{\sigma\lambda}T^{\mu_1\ldots\lambda}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\\ &- \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_1}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\lambda\ldots\nu_l} - \cdots - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_1}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\lambda}\end{aligned} \tag{1.27}$$

Έτσι από την απαίτηση το $\nabla_\mu V^\nu$ να μετασχηματίζεται σαν τανυστής έχουμε ότι:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu \tag{1.28}$$

Το αριστερό μέλος γράφεται:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} V^{\lambda'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu \right) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'} \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left(\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} (\partial_\mu V^\nu) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'}
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left(\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} (\partial_\mu V^\nu) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'} \tag{1.29}$$

Το δεξί της μέλος γίνεται:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1.30}$$

Εξισώνοντας τις δυο τελευταίες εξισώσεις έχουμε ότι:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left(\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1.31}$$

όμως ο δείκτης ν του δεύτερου όρου του αριστερού μέλους της εξίσωσης μπορεί και γίνεται λ γιατί είναι όρος αθροίσματος άρα οι συνιστώσες του διανύσματος φεύγουν:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left(\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) \tag{1.32}$$

όπου $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ ονομάζεται σύνδεσμος και δεν είναι τανυστής (διότι δεν μετασχηματίζεται σαν τέτοιος) αλλά είναι φτιαγμένος έτσι ώστε ο σύνδεσμος με την παράγωγο να είναι! Ορίζουμε δυο ακόμη ιδιότητες:

1. torsion-free:$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2!}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\right) \Leftrightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$
2. metric-compatibility : $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$

Η τελευταία ιδιότητα μας επιτρέπει να καθορίσουμε με μοναδικό τρόπο τους συνδέσμους $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ σε σχέση με την μετρική. Έτσι φτιάχνουμε τους παρακάτω όρους:

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} = 0 \\
\nabla_\mu g_{\rho\nu} &= \partial_\mu g_{\rho\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} = 0 \\
\nabla_\nu g_{\rho\mu} &= \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\rho\sigma} = 0
\end{aligned}$$

προσθέτοντας τις δυο τελευταίες και αφαιρώντας τες από την πρώτη έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
0 = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\rho\sigma} \\
\Leftrightarrow 0 = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

που πολλαπλασιάζοντας με $g^{\rho\lambda}$ την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} g^{\rho\lambda} &= -g^{\rho\lambda} (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu}) \\
\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \delta^\lambda_\sigma &= -\frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu})
\end{aligned}$$

και τελικά μας μένει η σχέση για τους συνδέσμους που ονομάζονται σύμβολα Christoffel :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \tag{1.33}$$

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε την απόκλιση ενός διανύσματος μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου για μια πολλαπλότητα ως:

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} V^\sigma \tag{1.34}$$

Όμως παρατηρούμε ότι

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right)$$

λόγω συμμετρικότητας της μετρικής $\Rightarrow$

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \partial_\nu g_{\sigma\mu}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι για έναν πίνακα A που μπορεί να γραφεί στην μορφή $\exp^L$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$A = \exp^L \Leftrightarrow \det(A) = \exp^{tr(L)} \Leftrightarrow tr(L) = \ln[\det(A)]$$
$$\Leftrightarrow \partial_k [tr(L) = \partial_k \left(\ln[\det(A)] \right) \Leftrightarrow tr\left(\partial_k L \right) = \partial_k \left(\ln[\det(A)] \right)$$

όμως

$$\partial_k L = \partial_k \left[\ln(A) \right] = A^{-1} \partial_k [A]$$

άρα έχουμε

$$tr \left(A^{-1} \partial_k [A] \right) = \partial_k \left(\ln[\det(A)] \right) \tag{1.35}$$

Ο $g_{\mu\nu}$ γράφεται σε μορφή εκθετικού επομένως μπορούμε να γράψουμε το σύμβολο Christoffel που έχει όπως λέμε υποστεί contraction (διότι δυο δείκτες του είναι ίδιοι και αθοίζονται) :

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \partial_\nu g_{\sigma\mu} = \frac{1}{2} \partial_\nu \left(\ln[\det g] \right)$$
$$= \partial_\nu \left([\sqrt{\det g}] \right) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\nu \left(\sqrt{\det g} \right)$$

άρα γράφουμε

$$\nabla_k V^k = \partial_k V^k + \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_k \left(\sqrt{\det g} \right) V^k = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_k \left(\sqrt{\det g} V^k \right) \tag{1.36}$$

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε την γενικευμένη σχέση του θεωρήματος Stokes για διανύσματα:

$$\int\limits_{\Sigma} \nabla_k V^k \sqrt{\det g} d^n x = \int\limits_{\partial\Sigma} n_k V^k \sqrt{\det \gamma} d^{n-1} x \tag{1.37}$$

με Σ να είναι ο $n-$χώρος στον οποίο ορίζεται το πεδίο V^k με μετρική $g^{\mu\nu}$ και $\partial\Sigma$ να είναι ο $(n-1)-$χώρος (σύνορο του χώρου Σ) με μετρική $\gamma^{\mu\nu}$ και κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια $\partial\Sigma$ τα n^k!

Σημειώνουμε ότι αυτό που προσφέρει η συναλλοίωτη παράγωγος είναι να μας επιτρέπει να μετατοπίζουμε ένα διάνυσμα από ένα σημείο σε ένα άλλο μιας πολλαπλότητας και να παραμένει παράλληλο στον εαυτό του. Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί είναι

$$\nabla_\mu V^\nu = 0 \tag{1.38}$$

1.3.5 Παράλληλη μετατόπιση

Παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος σε έναν χώρο σημαίνει να το μετατοπίζουμε στο χώρο και το μέτρο του να παραμένει αμετάβλητο. Σε μια πολλαπλότητα ένας τανυστής (γενικευμένο διάνυσμα) μπορεί να μετατοπιστεί παράλληλα με τον εαυτό του πάνω σε μια καμπύλη $x^\sigma(\lambda)$ σε επίπεδο χώρο σύμφωνα με την σχέση:

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = 0 \tag{1.39}$$

Έτσι για να υπολογίσουμε την παράλληλη μετατόπιση σε καμπύλο χωρόχρονο αντικαθιστούμε την παράγωγο με την συναλλοίωτη παράγωγο, ώστε η σχέση:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu \tag{1.40}$$

να ορίζεται ως η παράγωγος κατεύθυνσης και να είναι μια απεικόνιση από (k,l) τανυστές σε (k,l). Έτσι ορίζουμε την εξίσωση παράλληλης μετατόπισης:

$$\frac{D}{d\lambda}T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} = 0 \tag{1.41}$$

Για ένα διάνυσμα η παραπάνω εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\frac{d}{d\lambda}V^k + \Gamma^k_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}V^\rho = 0 \tag{1.42}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι για metric-compatible σύνδεσμο ισχύει ότι

$$\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.43}$$

Ενώ για δοθέν δυο διανύσματα V^μ, W^ν που μετατοπίζονται παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης $x^\sigma(\lambda)$ έχουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο θα είναι:

$$\begin{aligned}\frac{D}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu\right) &= \left(\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu}\right)V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}\left(\frac{D}{d\lambda}V^\mu\right)W^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu\left(\frac{D}{d\lambda}W^\nu\right)\\ &= 0+0+0=0\end{aligned} \tag{1.44}$$

Είναι προφανές ότι η παράλληλη μετατόπιση με έναν metric-compatible σύνδεσμο διατηρεί την νόρμα των διανυσμάτων, την έννοια της ορθογονιότητας και ούτω κάθε εξής.

1.3.6 Γεωδαισιακή

Με τον όρο γεωδαισιακή εννοούμε την γενίκευση της ευθείας γραμμής του Ευκλείδειου χώρου.
Με τον όρο ευθεία γραμμή εννοούμε:

1. τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων
2. τη διαδρομή που μετατοπίζει παράλληλα το δικό της εφαπτομενικό διάνυσμα!!!

Ο παραπάνω ορισμός αληθεύει αν ο σύνδεσμος που προκύπτει είναι τα σύμβολα Christoffel.
Απόδειξη
Το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας διαδρομής $x^\mu(\lambda)$ είναι το $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Για να μετατοπίζεται παράλληλα ακολουθεί την σχέση:

$$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(\frac{dx^k}{d\lambda}\nabla_k\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^k}{d\lambda}\partial_k\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{dx^k}{d\lambda}\Gamma^\mu_{k\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Έτσι η γεωδαισική εξίσωση φαίνεται να είναι η

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{k\sigma}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{s\lambda} = 0 \tag{1.45}$$

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα σύμβολα Christoffel εξαφανίζονται και τότε η γεωδαισιακή παίρνει την μορφή $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$ που αποτελεί εξίσωση ευθείας γραμμής.
Αξίζει να σημειώσουμε οτι η γεωδαισιακή δεν αλλάζει κάτω από τον μετασχηματισμό $\lambda \to \alpha\lambda + b$. Αυτό μας επιτρέπει να καθορίσουμε μια ολόκληρη κλάση από παραμέτρους που μας δίνουν την ίδια γεωδαισιακή και ονομάζονται συναφείς (affine) παράμετροι. Μπορούμε να έχουμε σαν παράμετρο πάντα τον ιδιοχρόνο ή ιδιοαπόσταση της καμπύλης σε lightlike και spacelike γεωδαισιακές.
Έπειτα η ελάχιστη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων δίνεται από την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος:

$$\tau = \int\left(-ds^2\right)^{1/2}\,d\lambda = \int\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{1/2}\,d\lambda \tag{1.46}$$

Η μεταβολή του ιδιοχρόνου δίνεται:

$$\delta\tau = \int \delta\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{1/2} d\lambda \tag{1.47}$$

που είναι για $f = -g_{\mu\nu}\dfrac{dx^\mu}{d\lambda}\dfrac{dx^\nu}{d\lambda}$ της μορφής:

$$\delta\tau = \frac{1}{2}\int \delta\sqrt{f}\, d\lambda = \frac{1}{2}\int (f)^{-1/2}\,\delta f\, d\lambda \tag{1.48}$$

Μπορούμε να ορίσουμε οτι $\lambda = \tau$ ο ιδιοχρόνος ,$\dfrac{dx^\mu}{d\tau} = U^\mu$ η τετραταχύτητα και τότε $f = -g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\delta\tau &= \frac{1}{2}\int \delta\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int\left\{(\delta g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\left(\delta\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\left(\delta\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)\right\} d\tau
\end{aligned}$$

για μετατοπίσεις της μορφής :

$$\begin{aligned}
x^\mu &\to x^\mu + \delta x^\mu \\
g_{\mu\nu} &\to g_{\mu\nu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu}\delta x^\sigma
\end{aligned}$$

έχουμε

$$\delta\tau = \frac{1}{2}\int\left\{\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\sigma + g_{\mu\nu}\frac{d\left(\delta x^\mu\right)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\left(\delta x^\nu\right)}{d\tau}\right\} d\tau$$

Όμως τους δύο τελευταίους όρους μπορούμε να τους σπάσουμε και να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{d\left(\delta x^\mu\right)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau &= \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\delta x^\mu\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) d\tau}_{0 \text{ στο όριο}} - \frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{d}{d\tau}g_{\mu\nu}\right)\delta x^\mu\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\delta x^\mu\right\} d\tau \\
&= -\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\delta x^\mu\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\delta x^\mu\right\} d\tau
\end{aligned}$$

έτσι

$$\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{d\left(\delta x^\mu\right)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau = -\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\mu d\tau$$

και όπου $\mu \leftrightarrow \sigma$

$$\frac{1}{2}\int g_{\sigma\nu}\frac{d\left(\delta x^\sigma\right)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\, d\tau = -\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\partial_\sigma g_{\sigma\nu}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\sigma d\tau \tag{1.49}$$

Για τον άλλον όρο έχουμε αντίστοιχα:

$$\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\left(\delta x^\nu\right)}{d\tau}\, d\tau = -\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\nu\, d\tau$$

όπου $\nu \leftrightarrow \sigma$ και γίνεται

$$\frac{1}{2}\int g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\left(\delta x^\sigma\right)}{d\tau}\, d\tau = -\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\partial_\sigma g_{\mu\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau} + g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\sigma\, d\tau \tag{1.50}$$

Επομένως γράφουμε την μεταβολή

$$\delta\tau = \frac{1}{2}\int\left\{\left(\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} - g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\sigma\, d\tau$$

Οι δύο τελευταίοι όροι λόγω αντισυμμετρικότητας της μετρικής είναι ίδιοι επομένως έχουμε :

$$\begin{aligned}\delta\tau &= \frac{1}{2}\int\left\{(\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - 2g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\sigma\, d\tau \\ &= -\int\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\sigma\, d\tau \end{aligned} \tag{1.51}$$

Στέλνοντας την μεταβολή του ιδιοχρόνου στο 0 έχουμε :

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\right\}\delta x^\sigma &= 0 \\ g^{\sigma\rho}g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g_{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0\end{aligned} \tag{1.52}$$

Που είναι ακριβώς η ίδια γεωδαισιακή με τα σύμβολα Christoffel όπως τα έχουμε ορίσει!

1.4 Riemannian γεωμετρία

Ορίζοντας την πολλαπλότητα ως έναν τοπολογικό χώρο, μπορούμε τώρα να ην εφοδιάσουμε με μια μετρική η οποία μας βοηθάει να μετράμε αποστάσεις και άλλα παράγωγα μεγέθη του χώρου αυτού. Αυτήν την μετρική την θεωρούμε σαν γενίκευση της μετρικής που ορίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, την θεωρούμε συμμετρική , αλλά σε έναν τοπολογικό χώρο όπως είναι η πολλαπλότητα η μετρική εξαρτάται από την θέση στην οποία ορίζεται. Το επόμενο βήμα ήταν να ορίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο η οποία μας επιτρέπει να μεταφέρουμε παράλληλα διανύσματα από ένα σημείο της πολλαπλότητας σε άλλο. Στην συνέχεια θα ορίσουμε δύο νέα μεγέθη, τον τανυστή καμπυλότητας και στρέψης. Όλα αυτά τα αντικείμενα ορίζονται από τα στοιχεία της γεωμετρίας και όχι από στοιχεία γεωμετρίας μεγαλύτερης διάστασης που μέσα σε αυτήν μελετάμε την εν λόγω γεωμετρία. Γι' αυτό τον λόγο η Riemannian γεωμετρία ονομάζεται εσωτερική.

1.4.1 Τανυστής Καμπυλότητας και Στρέψης

Σε αυτού του είδους την γεωμετρία μπορούμε να υπολογίσουμε τον τανυστή καμπυλότητας Riemann και τον τανυστή Στρέψης, δηλαδή το πόσο διαφέρει ένας τανυστής από τον εαυτό του όταν ακολουθεί δυο διαφορετικές διαδρομές μεταξύ δυο σημείων της πολλαπλότητας. Αφού με την συναλλοίωτη παράγωγο μπορούμε να μετατοπίζουμε ένα διάνυσμα απειροστά από την θέση, τότε θα υπολογίσουμε τον μεταθέτη δυο συναλλοίωτων παραγώγων ενός διανύσματος, από τις οποίες η κάθε μια θα μεταφέρει το διάνυσμα σε διαφορετική κατεύθυνση για να υπολογίσουμε το κατά πόσο αλλάζει το διάνυσμα όταν ακολουθεί αυτές τις δυο διαφορετικές διαδρομές για να πάει από το ένα σημείο της πολλαπλότητας στο άλλο.

$$\begin{aligned}[\nabla_\alpha, \nabla_b]V^c &= \nabla_\alpha\nabla_b V^c - \nabla_b\nabla_\alpha V^c \\ &= \partial_\alpha\nabla_b V^c - \Gamma^s_{\alpha b}\nabla_s V^c + \Gamma^c_{\alpha s}\nabla_b V^s - \partial_b\nabla_\alpha V^c + \Gamma^s_{b\alpha}\nabla_s V^c - \Gamma^c_{bs}\nabla_\alpha V^s \\ &= \partial_\alpha\partial_b V^c + \partial_\alpha(\Gamma^c_{bs}V^s) - \Gamma^s_{ab}\partial_s V^c - \Gamma^s_{ab}\Gamma^c_{sp}V^p + \Gamma^c_{as}\partial_b V^s + \Gamma^c_{as}\Gamma^s_{bp}V^p \\ &- \partial_b\partial_\alpha V^c - \partial_b(\Gamma^c_{as}V^s) - \Gamma^s_{b\alpha}\partial_s V^c + \Gamma^s_{b\alpha}\Gamma^c_{sp}V^p - \Gamma^c_{bs}\partial_\alpha V^s - \Gamma^c_{bs}\Gamma^s_{ap}V^p \\ &= (\partial_\alpha\Gamma^c_{bs})V^s - \Gamma^s_{ab}\partial_s V^c - \Gamma^s_{\alpha b}\Gamma^c_{sp}V^p + \Gamma^c_{\alpha p}\Gamma^p_{bs}V^s \\ &- (\partial_b\Gamma^c_{\alpha s})V^s + \Gamma^s_{b\alpha}\partial_s V^c + \Gamma^s_{b\alpha}\Gamma^c_{sp}V^p - \Gamma^c_{bp}\Gamma^p_{\alpha s}V^s \\ &= \left(\partial_\alpha\Gamma^c_{bs} - \partial_b\Gamma^c_{\alpha s} + \Gamma^c_{\alpha p}\Gamma^p_{bs} - \Gamma^c_{bp}\Gamma^p_{\alpha s}\right)V^s - 2\Gamma^s_{[\alpha b]}\nabla_s V^c \Leftrightarrow \\ [\nabla_\alpha, \nabla_b]V^c &= \mathcal{R}^c{}_{s\alpha b}V^c - \mathcal{T}^s_{\alpha b}\nabla_s V^c\end{aligned} \tag{1.53}$$

Κάπως έτσι ορίσαμε τον τανυστή καμπυλότητας Riemann

$$\mathcal{R}^c{}_{s\alpha b} = \partial_\alpha\Gamma^c_{bs} - \partial_b\Gamma^c_{\alpha s} + \Gamma^c_{\alpha p}\Gamma^p_{bs} - \Gamma^c_{bp}\Gamma^p_{\alpha s} \tag{1.54}$$

Ο οποίος υπολογίζει το πόσο διαφέρει ένα διάνυσμα από τον εαυτό του όταν ακολουθεί μια κλειστή καμπύλη από παράλληλες μετατοπίσεις.
Ενώ ορίσαμε και τον τανυστή στρέψης ως:

$$\mathcal{T}^s_{\alpha b} = \Gamma^s{}_{\alpha b} - \Gamma^s_{b\alpha} \tag{1.55}$$

ο οποίος υπολογίζει με την σειρά του το ποσό κατά το οποίο ο μεταθέτης του διανύσματος είναι ανάλογος της συναλλοίωτης παραγώγου του διανύσματος! Αυτό μας δείχνει το κατά πόσο το διάνυσμα που μεταφέραμε είναι παράλληλο με το διάνυσμα όταν θα το μεταφέραμε στο εφαπτόμενο επίπεδο. Κάθε απόκλιση από αυτήν την σύγκριση μας δίνει μη μηδενικό τανυστή στρέψης.

1.4.2 Ιδιότητες του τανυστή Riemann

Ο τανυστής καμπυλότητας Riemann με κατεβασμένους όλους τους δείκτες γράφεται:

$$\mathcal{R}_{\alpha bcd} = g_{\alpha s}\mathcal{R}^{s}{}_{bcd} \tag{1.56}$$

Από κατασκευής βάση ορισμού ο τανυστής Riemann έχει τις εξής αλγεβρικές ιδιότητες:

1. $\mathcal{R}_{\alpha bcd} = -\mathcal{R}_{\alpha bdc}$
2. $\mathcal{R}_{\alpha bcd} = -\mathcal{R}_{b\alpha cd}$
3. $\mathcal{R}^{\alpha}{}_{bcd} + \mathcal{R}^{\alpha}{}_{dbc} + \mathcal{R}^{\alpha}{}_{cdb} = 0 \Rightarrow \mathcal{R}^{\alpha}{}_{[bcd]} = 0$
4. $\mathcal{R}_{\alpha bcd} = \mathcal{R}_{cd\alpha b}$

Αυτές οι ταυτότητες μας βοηθούν στην καταμέτρηση των ανεξάρτητων συνιστωσών ενός τανυστή Riemann σε $n-$διαστάσεις!

Λόγω της ταυτότητας 1 μπορούμε να πούμε ότι ο $\mathcal{R}_{\alpha bcd}$ είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας με $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ανεξάρτητα στοιχεία. Το ίδιο προκύπτει και απο την ταυτότητα 2. Λόγω της 4 όμως φαίνεται να αποτελεί έναν συμμετρικό πίνακα με $\dfrac{m(m+1)}{2}$ με $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ άρα με $\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2} = \dfrac{1}{8}\left[n(n-1)\right]\left(n^2-n+2\right) = \dfrac{1}{8}\left(n^4-2n^3-3n^2-2n\right)$ ανεξάρτητα στοιχεία. Και η ταυτότητα 3 εξασφαλίζει για έναν πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή $4-$ης τάξης να έχει :

$$\frac{1}{8}\left[n(n-1)\right]\left(n^2-n+2\right) = \frac{1}{8}\left(n^4-2n^3-3n^2-2n\right) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{1}{12}n^2\left(n^2-1\right)$$

ανεξάρτητες συνιστώσες!

Στην Γενική Θεωρία Σχετικότητας ο τανυστής έχει $4^4 = 256$ συνιστώσες και λόγω του ορισμού και των ιδιοτήτων του τανυστή καμπυλότητας Riemann περιορίζεται σε $\dfrac{1}{12}4^2\left(4^2-1\right) = 20$ ανεξάρτητες συνιστώσες.

1.4.3 Τανυστής και Βαθμωτό Ricci

Από τον τανυστή Riemann μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή Ricci ως τη συστολή στον 1 και 3 δείκτη ως:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\mu} \tag{1.57}$$

ενώ το βαθμωτό Ricci ως την συστολή του τανυστή Ricci:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\sigma} = g^{\sigma\kappa}\mathcal{R}_{\kappa\sigma} \tag{1.58}$$

1.4.4 Ταυτότητα Bianchi

Δρώντας τον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων πάνω σ' έναν τανυστή $(0,2)$ για μια πολλαπλότητα που έχει μηδενική στρέψη (torsion-free ιδιότητα) παίρνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T_{\kappa\lambda} &= \nabla_\mu \nabla_\nu T_{\kappa\lambda} - \nabla_\nu \nabla_\mu T_{\kappa\lambda} \\
&= \partial_\mu \left(\nabla_\nu T_{\kappa\lambda}\right) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \nabla_\sigma T_{\kappa\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \nabla_\nu T_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \nabla_\nu T_{\kappa\sigma} \\
&- \partial_\nu \left(\nabla_\mu T_{\kappa\lambda}\right) + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \nabla_\sigma T_{\kappa\lambda} + \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} \nabla_\mu T_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \nabla_\mu T_{\kappa\sigma} \\
&= \partial_\mu \left(\partial_\nu T_{\kappa\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa} T_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} T_{\kappa\rho}\right) \\
&- \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \left(\partial_\nu T_{\sigma\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} T_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} T_{\sigma\rho}\right) - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \left(\partial_\nu T_{\kappa\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa} T_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} T_{\kappa\rho}\right) \\
&- \partial_\nu \left(\partial_\mu T_{\kappa\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\kappa} T_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\kappa\rho}\right) \\
&+ \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} \left(\partial_\mu T_{\sigma\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} T_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} T_{\sigma\rho}\right) + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \left(\partial_\mu T_{\kappa\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\kappa} T_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} T_{\kappa\rho}\right) \\
&= \left(-\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\kappa} + \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\kappa} + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\kappa}\right) T_{\rho\lambda} \\
&+ \left(-\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\lambda} + \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\right) T_{\kappa\rho} \\
&= \mathcal{R}^\rho{}_{\kappa\nu\mu} T_{\rho\lambda} + \mathcal{R}^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = -\mathcal{R}^\rho{}_{\kappa\mu\nu} T_{\rho\lambda} - \mathcal{R}^\rho{}_{\lambda\mu\nu} T_{\kappa\rho}
\end{aligned}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T_{\kappa\lambda} = -\mathcal{R}^\rho{}_{\kappa\mu\nu} T_{\rho\lambda} - \mathcal{R}^\rho{}_{\lambda\mu\nu} T_{\kappa\rho} \tag{1.59}$$

Τώρα εφαρμόζοντας την παραπανώ σχέση για έναν τανυστή της μορφής $\nabla_\nu V_\mu$ έχουμε:

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\kappa] \nabla_\nu V_\mu = -\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\lambda\kappa} \nabla_\nu V_\sigma - \mathcal{R}^\sigma{}_{\nu\lambda\kappa} \nabla_\sigma V_\mu$$

Αλλιώς μπορούμε να γράψουμε αυτήν την σχέση ως

$$V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} = \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\kappa\lambda} V_{\sigma;\nu} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\nu\kappa\lambda} V_{\mu;\sigma}$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$I = V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} + \textit{άθροισμα κυκλικών μεταθέσεων των } \nu\kappa\lambda$$

με δύο τρόπους.

Πρώτα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
I_1 &= V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} + V_{\mu;\lambda;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu;\lambda} + V_{\mu;\kappa;\lambda;\nu} - V_{\mu;\lambda;\kappa;\nu} \\
&= \left(V_{\mu;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu}\right)_{;\lambda} + \left(V_{\mu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\lambda;\kappa}\right)_{;\nu} + \left(V_{\mu;\lambda;\nu} - V_{\mu;\nu;\lambda}\right)_{;\kappa} \\
&= \left(\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu;\nu;\kappa} V_\sigma\right)_{;\lambda} + \left(\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu;\kappa;\lambda} V_\sigma\right)_{;\nu} + \left(\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu;\lambda;\nu} V_\sigma\right)_{;\kappa} \\
&= \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} V_\sigma + \mathcal{R}^\sigma_{\mu\nu\kappa} V_{\sigma;\lambda} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} V_\sigma + \mathcal{R}^\sigma_{\mu\kappa\lambda} V_{\sigma;\nu} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\lambda\nu;\kappa} V_\sigma + \mathcal{R}^\sigma_{\mu\lambda\nu} V_{\sigma;\kappa}
\end{aligned}$$

Αλλιώς μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
I_2 &= V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} + V_{\mu;\lambda;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu;\lambda} + V_{\mu;\kappa;\lambda;\nu} - V_{\mu;\lambda;\kappa;\nu} \\
&= \mathcal{R}^\sigma_{\mu\kappa\lambda} V_{\sigma;\nu} + \mathcal{R}^\sigma_{\nu\kappa\lambda} V_{\mu;\sigma} + \mathcal{R}^\sigma_{\mu\nu\kappa} V_{\sigma;\lambda} + \mathcal{R}^\sigma_{\lambda\nu\kappa} V_{\mu;\sigma} + \mathcal{R}^\sigma_{\mu\lambda\nu} V_{\sigma;\kappa} + \mathcal{R}^\sigma_{\kappa\lambda\nu} V_{\mu;\sigma}
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τις δυο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned}
I_1 = I_2 &\Leftrightarrow \\
\left(\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\lambda\nu;\kappa}\right) V_\sigma = \left(\mathcal{R}^\sigma_{\nu\kappa\lambda} + \mathcal{R}^\sigma_{\lambda\nu\kappa} + \mathcal{R}^\sigma_{\kappa\lambda\nu}\right) V_{\mu;\sigma} & \\
\left(\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\lambda\nu;\kappa}\right) V_\sigma = 0 &\Leftrightarrow \\
\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + \mathcal{R}^\sigma{}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0 &
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί την ταυτότητα Bianchi και σύμφωνα με τις ταυτότητες που ήδη σημειώσαμε γράφεται πιο συνοπτικά:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\sigma{}_{\mu[\nu\kappa;\lambda]} = 0 &\Leftrightarrow \\
\mathcal{R}_{\sigma\mu[\nu\kappa;\lambda]} = 0 &\Leftrightarrow \\
(\textit{επειδή}\, \mathcal{R}_{\sigma\mu\nu\kappa} = \mathcal{R}_{\nu\kappa\sigma\mu}) &\Leftrightarrow \\
\nabla_{[\lambda} \mathcal{R}_{\nu\kappa]\sigma\mu} = 0 &
\end{aligned}$$

1.4.5 Τανυστής Einstein

Μέσω της ταυτότητας Bianchi μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή καμπυλότητας Einstein:

$$(\textit{επειδή}\, \nabla_s g_{\mu\nu} = 0 \textit{από την ταυτότητα Bianchi έχουμε:})$$
$$\left(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\kappa\lambda}\right)_{;\sigma} + \left(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\sigma}\right)_{;\kappa} + \left(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma\kappa}\right)_{;\lambda} = 0$$

γνωρίζουμε όμως ότι

$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\kappa\lambda} = g^{\nu\lambda} \mathcal{R}^{\kappa}_{\nu\kappa\lambda} = g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\lambda} = \mathcal{R}$$
$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} = -g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\mu\lambda\sigma} = -g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma}$$
$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma\kappa} = -g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\kappa\sigma} = -g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\sigma}$$

Επομένως

$$\mathcal{R}_{;\sigma} - \left(g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma}\right)_{;\kappa} - \left(g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\sigma}\right)_{;\lambda} = 0$$

Αλλάζοντας δείκτες στον τελευταίο όρο $\nu \leftrightarrow \mu, \lambda \leftrightarrow \kappa$ γίνεται

$$\mathcal{R}_{;\sigma} - 2\left(g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma}\right)_{;\kappa} = 0$$

όμως

$$\mathcal{R}_{;\sigma} = \delta^{\kappa}_{\sigma} \mathcal{R}_{;\kappa} = g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} \mathcal{R}_{;\kappa} = \left(g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} \mathcal{R}\right)_{;\kappa}$$

Τότε

$$\left(g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} \mathcal{R} - 2 g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma}\right)_{;\kappa} = 0 \Leftrightarrow g^{\mu\kappa} \left(g_{\mu\sigma} \mathcal{R} - 2\mathcal{R}_{\mu\sigma}\right)_{;\kappa} = 0$$

ορίζοντας τώρα

$$-2G_{\mu\sigma} = g_{\mu\sigma} \mathcal{R} - 2\mathcal{R}_{\mu\sigma}$$

τότε

$$-2g^{\mu\kappa} G_{\mu\sigma;\kappa} = 0 \leftrightarrow g^{\mu\kappa} \nabla_{\kappa} G_{\mu\sigma} = 0 \Leftrightarrow \nabla^{\mu} G_{\mu\sigma} = 0$$

Έτσι λοιπόν ο τανυστής Einstein ,όπως τον ορίσαμε είναι ο

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \tag{1.61}$$

και υπακούει πάντα στην διαφορική εξίσωση στην οποία καταλήξαμε σε κάθε γεωμετρία!

1.4.6 Συμμετρίες και διάνυσμα Killing

Την φύση είναι δύσκολο να την περιγράψουμε ακριβώς γιατί μπορεί να περιέχει πολύπλοκες μορφές. Με την εφεύρεση των συμμετριών μπορούμε να περιγράψουμε ένα αντικείμενο "πρόχειρα" με την έννοια ότι δεν το περιγράφουμε ακριβώς αλλά μια προσέγγιση μέσω μιας συμμετρίας αυτού και στην συνέχεια ότι ατέλειες έχει μπορούμε να τις προσθέσουμε σαν μια μικρή απόκλιση από την συμμετρία αυτή. Για παράδειγμα στο διάστημα ένα άστρο κατά προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ως μια συμμετρική σφαίρα αν και στην πραγματικότητα στην επιφάνεια του γίνονται συχνά εκρήξεις που το κάνουν να χάνει αυτήν την συμμετρία. Στην Γενική θεωρία της σχετικότητας έχουμε μεγαλύτερη ανάγκη αυτών των συμμετριών, παρότι λιγότερο στον ηλεκτρομαγνητισμό , γιατί η φύση των μη γραμμικών εξισώσεων Einstein είναι δύσκολο να λυθούν επακριβώς.

Θεωρούμε λοιπόν ότι μια πολλαπλότητα διακατέχεται από συμμετρία όταν η μετρική της παραμένει αναλλοίωτη κάτω από κάποιον μετασχηματισμό που απεικονίζει την πολλαπλότητα στον εαυτό της: Η μετρική είναι ίδια από το ένα σημείο της πολλαπλότητας σε άλλο.

Επίσης μπορεί διαφορετικοί τανυστές να έχουνε διαφορετικές συμμετρίες. Οι συμμετρίες της μετρικής λέγονται ισομετρίες.Μια μετρική λοιπόν έχει ισομετρία κάτω απο μια συντεταγμένη $x^{\sigma*}$, όταν η μετρική είναι ανεξάρτητη από την συνάρτηση της συντεταγμένης γιατί τότε συνεπάγεται συμμετρία της μετρικής κάτω από οποιαδήποτε μετάθεση με μια σταθερά της εν λόγω συντεταγμένης:

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow x^{\sigma*} + \alpha^{\sigma*} \forall \mu, \nu \textit{είναι ισομετρία} \tag{1.62}$$

Θεωρώντας την γεωδαισιακή πάνω σε μια πολλαπλότητα και θεωρώντας την γενίκευση της ταχύτητας $U_\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ και της ορμής $p^\mu = mU^\mu$ κάνουμε τον παρακάτω συλλογισμό:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow$$
$$m\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu m\frac{dx^\mu}{d\tau} + m\frac{dx^\nu}{d\tau}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}m\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow m\frac{dx^\nu}{d\tau}\left(\partial_\nu m\frac{dx^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}m\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$p^\nu\left(\partial_\nu p^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}p^\lambda\right) = 0$$

$$p^\nu\nabla_\nu p^\mu = 0 \tag{1.63}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την γεωδαισιακή εκφρασμενή στην μορφή γενικευμένης ορμής.
Κάπως έτσι μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα:

$$\Rightarrow p^\nu\left(\partial_\nu p_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}p^\lambda\right) = 0 \Leftrightarrow p^\nu\partial_\nu p_\mu + p^\nu\Gamma^\lambda_{\nu\mu}p_\lambda = 0$$

Όμως οι δύο όροι ξεχωριστά είναι

$$p^\nu\partial_\nu p_\mu = m\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu p_\mu = m\frac{dp_\mu}{d\tau}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\nu\mu}p_\lambda p^\nu &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}\right)p_\lambda p^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}\right)p^\sigma p^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu}\right)p^\sigma p^\nu\end{aligned}$$

Τότε

$$m\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu}\right)p^\sigma p^\nu \tag{1.64}$$

Έτσι όταν έχουμε μια ισομετρία στην κατεύθυνση $x^{\sigma*}$ τότε έχουμε την παρακάτω σχέση

$$\partial_{\sigma*}g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \tag{1.65}$$

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε το διάνυσμα killing στην κατεύθυνση $x^{\sigma*}$ το οποίο αντιστοιχεί σε μια ισομετρία ως εξής:

$$K = \partial_{\sigma*} \Leftrightarrow K^\mu = \left(\partial_{\sigma*}\right)^\mu = \delta^\mu_{\sigma*} \tag{1.66}$$

Τότε

$$p_{\sigma*} = K^\nu p_\nu = K_\nu p^\nu \tag{1.67}$$

έτσι μπορούμε να γράψουμε μια ισομετρία στην μορφή

$$\frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow p^\mu\nabla_\mu\left(K_\nu p^\nu\right) = 0 \tag{1.68}$$

όμως

$$\begin{aligned}p^\mu\nabla_\mu\left(K_\nu p^\nu\right) &= p^\mu\left(\nabla_\mu K_\nu\right)p^\nu + p^\mu K_\nu\left(\nabla_\mu p_\nu\right) \\ &= p^\mu p^\nu\nabla_\mu K_\nu \\ &= p^\mu p^\nu\nabla_{(\mu}K_{\nu)}\end{aligned}$$

Έτσι η εξίσωση Killing γράφεται

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = 0 \tag{1.69}$$

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις κίνησης NLH

Σε αυτό κεφάλαιο θα μελετήσουμε την κλασική θεωρία που περιγράφει την φύση και κυρίως τις κινήσεις των σωματίων μέσα σε αυτήν. Τα προβλήματα που δίνει η φύση είναι προβλήματα δυναμικής και για την περιγραφή αυτών χρειαζόμαστε εξισώσεις οι οποίες να αποδίδουν όλα τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Τέτοιες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις **Newton** (διαφορικές εξισώσεις $2-$βαθμού ως προς την παράμετρο του χρόνου). Ωστόσο μια διαφορετική προσέγγιση των εξισώσεων αυτών αποτελούν οι εξισώσεις **Lagrange** και **Hamilton**, οι οποίες είναι γενίκευση των εξισώσεων του **Newton** και μας αποδίδουν μια εικόνα μόνο των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας του προβλήματος με την βοήθεια των εξισώσεων περιορισμών της κίνησης.

2.1 Εξισώσεις Newton

Για να περιγράψουμε τις εξισώσεις του Newton για τις βασικές κινήσεις σημειακού σωματίου πρέπει να ορίσουμε τις εξής ποσότητες:

1. Θέση $\vec{x} = \vec{x}(t)$
2. Ταχύτητα $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$
3. Ορμή $\vec{p} = m\dfrac{d\vec{x}}{dt}$
4. Δύναμη $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$
5. Στροφορμή $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$
6. Ροπή $\vec{N} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
7. Ενέργεια $E = T\left(\vec{x}, \dfrac{d\vec{x}}{dt}, t\right) + V\left(\vec{x}, \dfrac{d\vec{x}}{dt}, t\right)$

όπου με m εννοούμε την μάζα του σωματιδίου,και T, V η κινητική και η δυναμική ενέργεια του σωματίου αντίστοιχα.

Ο πρώτος νόμος του Newton λέει ότι σε ένα σωματίδιο που δεν του ασκείται καμία δύναμη τότε το σωματίδιο συνεχίζει να κινείται με την ίδια ταχύτητα:

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = \textit{σταθερή} \tag{2.1}$$

Αν σ' ένα σύστημα αναφοράς ισχύει ο νόμος αυτός τότε έχουμε, όπως λέμε, Αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Ο δεύτερος νόμος του Newton λέει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων ισούται με την χρονική μεταβολή της ορμής του:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$
$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \text{ Εξίσωση Newton} \tag{2.2}$$

Έπειτα έχουμε ότι το έργο W που προκαλεί μια δύναμη ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της δύναμης πάνω σε μια καμπύλη $C(\alpha,\beta)$:

$$W = \int_C \vec{F}\,d\vec{x} = \int_C m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\frac{d\vec{x}}{dt}\,dt = \int_C m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right)dt = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}(\beta)}{dt}\right)^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}(\alpha)}{dt}\right)^2$$

Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα αυτό είναι μηδέν για κάποια καμπύλη τότε λέμε ότι η δύναμη αυτή είναι συντηρητική πάνω σε αυτήν την καμπύλη. Από το θεώρημα Stokes όπου για μια επιφάνεια S που έχει ως όριο την καμπύλη C έχουμε ότι:

$$W = \int_C \vec{F}\,d\vec{x} = \int_S \left(\nabla\times\vec{F}\right)d\vec{S} = 0 \to \nabla\times\vec{F} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\vec{F} = -\nabla V \tag{2.3}$$

Έτσι ο τρίτος νόμος του Newton λέει ότι σε κάθε ασκούμενη δύναμη αντιστοιχεί μια ίσου μέτρου αλλά αντίθετης κατεύθυνσης δύναμη!

2.2 Φορμαλισμός Lagrange

2.2.1 Σύνδεσμος

Η γενίκευση των εξισώσεων του Νεύτωνα για την κίνηση σωματίου γίνεται με το να εισάγουμε περιορισμούς των εξισώσεων αυτών. Οι περιορισμοί αυτοί είναι εξισώσεις που επιβάλλονται από την γεωμετρία του προβλήματος και ονομάζονται **σύνδεσμοι** (π.χ. κίνηση σφαιρικού σωματιδίου πάνω σε μια επιφάνεια). Οι εξισώσεις των συνδέσμων για (N-σωματίων) ορίζονται ως:

$$f_k\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_N;t\right) = 0 \quad ,k = 1,2,\ldots,K \tag{2.4}$$

Με $\dot{x}$ αναπαρίσταται η παράγωγος της ποσότητας x ως προς τον χρόνο. Στην περίπτωση που ολοκληρώνοντας, οι εξισώσεις συνδέσμων απαλλαχθούν από την εξάρτηση των ταχυτήτων για $n-$διάστατα προβλήματα τότε ισχύει:

$$f_k\left(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N,;t\right) = 0 \quad ,k = 1,2,\ldots,K < nN \mu\varepsilon \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \tag{2.5}$$

Οι σύνδεσμοι αυτοί ονομάζονται ολόνομοι δεσμοί. Εισάγοντας στο σύστημα εξισώσεων του Νεύτωνα τις εξισώσεις των συνδέσμων τότε το σύστημα μας πλέον απαλλάσεται από έναν αριθμό μεταβλητών, ενώ ο αριθμός των μεταβλητών που παραμένουν αποτελεί τις γενικευμένες συντεταγμένες του προβλήματος (ο αριθμός τους είναι ίσος με το βαθμό ελευθερίας του συστήματος). Χρησιμοποιώντας τις γενικευμένες συντεταγμένες προσδιορίζουμε την κίνηση του σώματος λαμβάνοντας υπόψη όλους τους δυνατούς περιορισμούς.

2.2.2 Εξισώσεις κίνησης

Έστω

$$f\left(\vec{x};t\right) = 0 \text{ Εξίσωση συνδέσμου}$$
$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{C}$$

$\vec{F},\vec{C}$ είναι η γνωστή εξωτερική δύναμη και η άγνωστη δύναμη των συνδέσμων αντίστοιχα. Η δύναμη που προέρχεται από τους συνδέσμους θέλουμε να είναι άεργη οπότε την παίρνουμε κάθετη στην επιφάνεια κίνησης του σωματίου, ενώ υποθέτουμε ότι η εξωτερική δύναμη παράγεται από κάποιο δυναμικό:

$$\vec{C} = \lambda(t)\nabla f\left(\vec{x};t\right) \tag{2.6}$$
$$\vec{F}\left(\vec{x};t\right) = -\nabla V\left(\vec{x};t\right) \tag{2.7}$$

Άρα
$$m\ddot{\vec{x}} = -\nabla V\left(\vec{x};t\right) + \lambda(t)\nabla f\left(\vec{x};t\right) \tag{2.8}$$
Γενικά για ένα μέγεθος $Q\left(\vec{x},\dot{\vec{x}};t\right)$ ισχύει ότι:
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{\vec{x}}}\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{2.9}$$
Εδώ έχουμε ότι
$$\begin{aligned}\frac{dV\left(\vec{x};t\right)}{dt} &= \dot{\vec{x}}\nabla V\left(\vec{x};t\right) + \frac{\partial V\left(\vec{x};t\right)}{\partial t}\\ \frac{df\left(\vec{x};t\right)}{dt} &= \dot{\vec{x}}\nabla f\left(\vec{x};t\right) + \frac{\partial f\left(\vec{x};t\right)}{\partial t} = 0 \quad \textit{Ολόνομος}\end{aligned}$$
Επομένως:
$$\begin{aligned}m\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{2}\right) &= -\frac{dV\left(\vec{x};t\right)}{dt} + \frac{\partial V\left(\vec{x};t\right)}{\partial t} - \lambda(t)\frac{\partial f\left(\vec{x};t\right)}{\partial t} \Rightarrow\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + V\left(\vec{x};t\right)\right) \equiv \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial V\left(\vec{x};t\right)}{\partial t} - \lambda(t)\frac{\partial f\left(\vec{x};t\right)}{\partial t}\end{aligned}$$
Για k αριθμό συνδέσμων έχουμε:
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V\left(\vec{x};t\right)}{\partial t} - \sum_{k=1}\lambda_k(t)\frac{\partial f_k\left(\vec{x};t\right)}{\partial t} \tag{2.10}$$
Δηλαδή η ενέργεια του συστήματος αλλάζει όταν η επιφάνεια μεταβάλλεται με τον χρόνο για δυναμικά ανεξαρτήτου χρόνου:
$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{k=1}\lambda_k(t)\frac{\partial f_k\left(\vec{x};t\right)}{\partial t} \tag{2.11}$$
Για τυχαίο σωμάτιο έχουμε λοιπόν:
$$\begin{aligned}m_i\ddot{\vec{x}}_i - \vec{F}_i &= -\lambda_k(t)\nabla_i f_k\left(\vec{x};t\right) \xrightarrow{\cdot\vec{E}_i}\\ \vec{E}_i\left(m_i\ddot{\vec{x}}_i - \vec{F}_i\right) &= -\vec{E}_i\lambda_k(t)\nabla_i f_k\left(\vec{x};t\right) = 0\\ \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\left(m_i\ddot{\vec{x}}_i - \vec{F}_i\right) &= 0 \quad \textbf{Αρχή d'Alembert}\end{aligned} \tag{2.12}$$
Από την αρχή d'Alembert προκύπτουν $nN-K$ ανεξάρτητες εξισώσεις. Οι οποίες ορίζουν το σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων:
$$q^\alpha = q^\alpha\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_N;t\right) \quad \textit{με} \;\; \alpha = 1,\ldots,(nN-K) \quad \textit{και}\; \vec{x}_i = \vec{x}_i\left(q^1,q^2,\ldots,q^{nN-K};t\right) \tag{2.13}$$
Για $J = \det\left(\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^b}\right) \neq 0$ και εφόσον $\vec{E}_i$ είναι εφαπτόμενα στην επιφάνεια, μπορούμε να θέσουμε για $nN-K$ σταθερές ϵ :
$$\vec{E}_i = \epsilon^\alpha\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha} \tag{2.14}$$
Τότε
$$\vec{E}_i\nabla^i f_k\left(\vec{x};t\right) = \epsilon^\alpha\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}\nabla^i f_k\left(\vec{x};t\right) = \epsilon^\alpha\frac{\partial f_k\left(\vec{x};t\right)}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{2.15}$$
το οποίο ισχύει γιατί το f_k εξαρτάται μόνο από τα q^α , $\alpha = nN-K,\ldots,nN$
$$\vec{F}_i\epsilon^\alpha\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha} = -\nabla_i V\left(\vec{x};t\right)\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial V\left(\vec{x};t\right)}{\partial q^\alpha}$$

Επίσης

$$\ddot{\vec{x}}_i\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}\right)-\dot{\vec{x}}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}$$

Αλλά

$$\vec{v}_i\equiv\dot{\vec{x}}_i=\frac{d\vec{x}_i}{dt}=\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha+\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha}=\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}^\alpha}=\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}$$

και μην ξεχνάμε ότι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}=\frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\dot{q}^\beta+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}\right)=\frac{d}{dq^\alpha}\left(\frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\dot{q}^\beta+\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^\alpha}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}=\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-m_i\vec{v}_i\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}$$

Φυσικά όπου $T=\frac{1}{2}m_iv_i^2$ είναι η συνολική κινητική ενέργεια όλων των σωματίων με μάζα m_i. Έτσι η Αρχή d'Alembert γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial V\left(\vec{x};t\right)}{\partial q^\alpha}=0$$

Ορίζοντας την **Λαγκρανζιανή** συνάρτηση του συστήματος τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0 \tag{2.16}$$

Αυτές οι εξισώσεις ονομάζονται **Euler-Lagrange Εξισώσεις**, αναλυτικότερα γράφονται στην μορφή

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha\partial \dot{q}^\beta}\ddot{q}^\beta+\frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\dot{q}^\beta+\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial \dot{q}^\beta}-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0 \tag{2.17}$$

είναι οι εξισώσεις κίνησης των $N-$σωματιδίων που βρίσκονται μέσα σε $K-$συνδέσμους.

2.2.3 Αρχή Ελάχιστης Δράσης ή Αρχή Hamilton

Η μορφή των εξισώσεων *Euler-Lagrange* μοιάζουν με μεταβαλλόμενες εξισώσεις που προκύπτουν από το πρόβλημα Μεταβολών του τομέα των Μαθηματικών.

Στη φύση μπορούμε να ορίσουμε την **Δράση** S ενός φυσικού συστήματος. Θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις *Euler-Lagrange* προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της δράσης. Υποθέτοντας αρχικό, τελικό χρόνο t_i, t_f αντίστοιχα και την θέση ενός σωματίου $q(t)$ τότε:

$$S\left(q;t_i,t_f\right)=\int_{t_i}^{t_f}L\left(q,\dot{q},t\right)\,dt \tag{2.18}$$

Το $S=S\left[q(t)\right]$ το καλούμε συναρτησοειδές. Για την ελαχιστοποίηση του S θα πρέπει $\delta S=0$

$$\begin{aligned}
\delta S&=\int_{t_i}^{t_f}\delta L\,dt=\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial q(t)}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\delta\dot{q}(t)\right)\,dt\\
&=\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial q(t)}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\frac{d\left(\delta q(t)\right)}{dt}\right)\,dt\\
&=\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial q(t)}\delta q(t)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\right)\delta q(t)\right)\,dt+\int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\delta q(t)\right)\,dt\\
&=\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial L}{\partial q(t)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\right)\right)\delta q(t)\,dt+\cancelto{0}{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\delta q(t)\right]_{t_i}^{t_f}}
\end{aligned}$$

Για στάσιμα άκρα της τροχιάς του σωματιδίου έχουμε $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$. Επομένως για αυθαίρετο $\delta q(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \delta S = 0 \Leftrightarrow \\ \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) \right) \delta q(t)\, dt = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Μερικές φορές οι εξισώσεις $E - L$ μας προσφέρουν μια σταθερά της κίνησης με έναν απλό τρόπο. Αν μια από τις γενικευμένες συντεταγμένες δεν παρουσιάζεται στην Λαγκρανζιανή του προβλήματος τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} = 0 \Leftrightarrow \\ p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Η τελευταία ποσότητα αποτελεί την **Γενικευμένη Συζυγή Ορμή**. Δηλαδή αν μια γενικευμένη μεταβλητή είναι ασήμαντη τότε η συζυγής της μεταβλητή μας δίνει ένα σύνολο από αναλλοίωτες υποπολλαπλότητες. Δηλαδή αν η αρχική φάση ενός σημείου βρίσκεται πάνω σε μια υποπολλαπλότητα της οποίας η εξίσωση είναι $p_\beta =$σταθερό τότε η κίνηση παραμένει πάνω στην υποπολλαπλότητα.

2.2.4 Θεώρημα Noether

Θεωρώντας συνεχείς μετασχηματισμούς $q \to \psi(q)$ τότε μια μεταβολή στην Λαγκρανζιανή θα μας δώσει

$$\begin{aligned} L_\epsilon\,(q, \dot{q}; t) = L \left(\psi(q), \frac{\partial \psi(q)}{\partial t}; t \right) + \dot{\Phi}(q, \epsilon; t) \Leftrightarrow \\ \frac{dL_\epsilon}{d\epsilon} = \left(\frac{dL\,(q, \dot{q}; t)}{dq^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{dL\,(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^\alpha} \right) \frac{\partial \psi(q)}{\partial \epsilon} + \frac{d}{dt} \left(\frac{dL\,(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \right) + \delta \dot{\Phi}\,(q, \dot{q}; t) \Leftrightarrow \\ \delta L_\epsilon = \frac{d}{dt} \frac{dL\,(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha - \frac{d}{dt} \delta \Phi = 0 \Leftrightarrow \\ \Gamma = \frac{dL\,(q, \dot{q}; t)}{d\dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha - \delta \Phi \quad \textit{Σταθερά κίνησης} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Δηλαδή για κάθε τοπικό μετασχηματισμό που αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκρανζιανή υποκρύπτεται μια διατηρήσιμη ποσότητα.

2.3 Φορμαλισμός Hamilton

Μπορούμε την Λαγκρανζιανή του συστήματος να την γράψουμε στη μορφή $\hat{L}(q, p; t) = L(q, \dot{q}; t)$, τότε έχουμε δύο μεταβήτες για παραγώγιση q, p:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + p_b \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^\alpha} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \hat{L}}{\partial q^\alpha} - p_b \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \left(\hat{L} - p_b \dot{q}^b \right) = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ομοίως για την μεταβλητή p καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial p^\alpha} = p_b \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \left(p_b \dot{q}^b \right) - \frac{\partial p_b}{\partial p^\alpha} \dot{q}^b \Leftrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \left(\hat{L} - p_b \dot{q}^b \right) = -\dot{q}^\alpha \end{aligned} \tag{2.23}$$

Θέτουμε $H(q,p;t) = p_b\dot{q}^b - \hat{L}(q,p;t)$ την Χαμιλτονιανή του συστήματος, και ορίζουμε τις **Κανονικές Εξισώσεις Hamilton** ως:

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial q^\alpha} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial \dot{q}^\alpha} = -\frac{d}{dt}p_\alpha = \dot{p}_\alpha \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial}{\partial p^\alpha}\left(p_b\dot{q}^b - \hat{L}(q,p;t)\right) = \dot{q}^\alpha \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial t} \tag{2.26}$$

2.4 Φορμαλισμός Lagrange-Hamilton σε πεδία

Η θεωρία Πεδίου είναι ακριβώς ο φορμαλισμός Lagrange με την διαφορά ότι μεταβαίνουμε από το σύνολο των γενικευμένων συντεταγμένων σ' ένα σύνολο χωροχρονικά αναλλοίωτων πεδίων, και η δράση γίνεται το συναρτησοειδές αυτών των πεδίων:

$$q^i(t) \to \Phi^i\left(x^\mu\right) \tag{2.27}$$

$$S \to S\left[\Phi^i\right] \tag{2.28}$$

Στην θεωρία πεδίου η Λαγκρανζιανή μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής πυκνότητας που είναι μια συνάρτηση των πεδίων και των παραγώγων τους:

$$L = \int \mathcal{L}\left(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i\right)\, d^{n-1}x \tag{2.29}$$

Τότε η δράση γίνεται:

$$S = \int L\, d^0x = \int \mathcal{L}\left(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i\right)\, d^n x \tag{2.30}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτουν όταν χρησιμοποιούμε την μέθοδο μεταβολών για το πεδίο $\Phi^i\left(x^\mu\right)$:

$$\Phi^i\left(x^\mu\right) \to \Phi^i\left(x^\mu\right) + \delta\Phi^i\left(x^\mu\right) \tag{2.31}$$

$$\partial_\mu\Phi^i\left(x^\mu\right) \to \partial_\mu\Phi^i\left(x^\mu\right) + \delta\left(\partial_\mu\Phi^i\left(x^\mu\right)\right) = \partial_\mu\Phi^i\left(x^\mu\right) + \partial_\mu\left(\delta\Phi^i\left(x^\mu\right)\right) \tag{2.32}$$

Για αρκετά μικρή μεταβολή μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}\left(\Phi^i, \partial_\mu\Phi^i\right) \to \mathcal{L}\left(\Phi^i + \delta\Phi^i, \partial_\mu\Phi^i + \partial_\mu\delta\Phi^i\right) = \mathcal{L}\left(\Phi^i, \partial_\mu\Phi^i\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)}\delta\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right) \tag{2.33}$$

Έτσι η δράση μεταβάλλεται κατά $S \to S + \delta S$ με:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)}\delta\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)\right] d^n x \\
&= \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)}\partial_\mu\left(\delta\Phi^i\right)\right] d^n x \\
&= \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^i}\delta\Phi^i - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)}\right)\delta\Phi^i + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)}\delta\Phi^i\right)\right] d^n x
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Όμως σύμφωνα με το θεώρημα Stokes έχουμε

$$\delta S = \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)}\right)\right]\delta\Phi^i\, d^n x + \cancelto{0}{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\delta\Phi^i\right)}\delta\Phi^i\right)_{boundary}}$$

Τελικά θέλουμε η μεταβολή της δράσης να μηδενίζεται για αυθαίρετα μικ΄ρη μεταβολή του $\delta\Phi^i$, επομένως παίρνουμε :

$$\frac{\partial S}{\partial\delta\Phi^i} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi^i\right)} = 0 \tag{2.35}$$

Που είναι οι **Εξισώσεις Euler-Lagrange για τα Πεδία**.

Κεφάλαιο 3

Φυσική σε καμπύλο χωρόχρονο

Σε αυτό το κεφάλαιο, λοιπόν, είμαστε πλέον προετοιμασμένοι να μελετήσουμε την φυσική της *βαρύτητας* όπως αυτή περιγράφεται από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Σύμφωνα με αυτήν η κάθε είδους μάζα προκαλεί καμπύλωση του χωρόχρονου γύρω της. Επομένως πρέπει να μελετήσουμε την φυσική γύρω από τέτοια αντικείμενα που προκαλούν καμπύλωση στο χωρόχρονο. Η Γενική Σχετικότητα αποτελεί την γενίκευση της Νευτώνειας Θεωρίας για την Βαρύτητα.

3.1 Νευτώνεια Βαρύτητα

3.1.1 Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

¨Κάθε σώμα στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο σώμα στο σύμπαν με δύναμη ανάλογη με το γινόμενο των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ τους.¨

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{3.1}$$

όπου G είναι μια παγκόσμια σταθερά και σύμφωνα με τα Πειράματα του Henry Cavendish το 1798 και σύμφωνα με μοντέρνες μετρήσεις η τιμή της είναι

$$G = 6.67428 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \tag{3.2}$$

Μια συντηρητική δύναμη μπορεί να γραφεί σε μορφή βαθμίδας κάποιου δυναμικού:

$$F = -m\nabla\Phi \tag{3.3}$$

Τότε το βαρυτικό δυναμικό είναι της μορφής:

$$\Phi = G\frac{M}{r} \tag{3.4}$$

Επομένως σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα και τον Νόμο της Βαρύτητας για ένα σώμα που ταξιδεύει με το να ασκείται πάνω του μόνο το βαρυτικό πεδίο κάποιου Ουράνιου σώματος έχουμε την σχέση:

$$m_I \mathbf{a} = -m_G \nabla\Phi \tag{3.5}$$

Σύμφωνα με τα πειράματα του Γαλιλαίου στον Πύργο της Πίζας αποδείχθηκε ότι βαρυτική και αδρανειακή μάζα είναι ίσες, εφόσον δυο σώματα με διαφορετικές μάζες φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Επομένως:

$$m_I = m_G \tag{3.6}$$

και

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi \tag{3.7}$$

Αυτή είναι η *Αρχή Ισοδυναμίας* από την οποία διέπονται τα σώματα της φύσης.

3.1.2 Εξίσωση Νεύτωνα για το βαρυτικό πεδίο

Στην γενική περίπτωση που δεν πρόκειται για ένα σωματίδιο μάζας m που δημιουργεί βαρυτικό πεδίο αλλά μια κατανομή μάζας $\rho_m(\mathbf{r})$ έχουμε:

$$\Phi(\mathbf{r}) = G \int \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \tag{3.8}$$

Τότε το βαρυτικό πεδίο ορίζεται από ένα βαθμωτό δυναμικό και ισχύει η σχέση:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m(r) \tag{3.9}$$

Η εξίσωση αυτή του Νεύτωνα για το βαρυτικό πεδίο είναι ανάλογη του νόμου Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο. Ένα παράδειγμα θα μας πείσει.

Παράδειγμα:Για ένα βαρυτικό σώμα το οποίο έχει μια ακτινική κατανομή πυκνότητα μάζας $\rho_m(r)$ τότε η μάζα του δίνεται από την σχέση

$$M(\mathbf{r}) = \int \rho_m(\mathbf{r})\, d^3r = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_m(r) r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi = 4\pi \int \rho(r) r^2 \, dr \tag{3.10}$$

Τότε το δυναμικό του θα είναι της μορφής:

$$\Phi = G\frac{M(r)}{r} = 4\pi G \int \rho_m(r) r \, dr \tag{3.11}$$

Επομένως η βαθμίδα του δυναμικού αυτού μας δίνει:

$$\nabla \Phi = 4\pi G r \rho_m(r) \Leftrightarrow \tag{3.12}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m(r) \tag{3.13}$$

3.2 Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Η γενική θεωρία της σχετικότητας γενικεύει την θεωρία του Νεύτωνα για την βαρύτητα.

3.2.1 Αρχές Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας

Η *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας* διέπεται από τις εξής *Αρχές Ισοδυναμίας* :

1. *Ασθενής Αρχή Ισοδυναμίας*
   Η αδρανειακή μάζα και η Βαρυτική μάζα είναι ίσες

2. *Αρχή Ισοδυναμίας Einstein*
   Τοπικά στον χωρόχρονο οι νόμοι της φυσικής ελαττώνονται σε εκείνους της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, όπου η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα.

3. *Ισχυρή Αρχή Ισοδυναμίας*
   Το αποτέλεσμα ενός τοπικού πειράματος (βαρυτικό ή όχι) σε ένα freely falling εργαστήριο είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας και της θέσης του εργαστηρίου στον χωρόχρονο.

Σύμφωνα με την Αρχή Ισοδυναμίας του Einstein τοπικά θα μπορούμε να έχουμε μετρική του χώρου του Minkowski ενώ οι αποκλίσεις από αυτήν θα είναι μηδαμινές:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$$

Επομένως η γεωμετρία χαρακτηρίζεται από κάποια πολλαπλότητα που τοπικά θα μοιάζει με τον χωρόχρονο που περιγράφει ο χώρος Minkowski. Όλη αυτήν την φιλοσοφία μπορούμε να την συμμαζέψουμε σε μια συνταγή γνωστή ως **Αρχή Ελάχιστης Ζεύξης** :

1. Πάρε έναν νόμο του επίπεδου χωρόχρονου

2. Γράψε τον σε αναλλοίωτη από συντεταγμένες μορφή (τανυστική μορφή)

3. Ισχυρίσου ότι ο προκύπτον νόμος ισχύει σε καμπύλο χωρόχρονο

Επομένως παίρνουμε την εξίσωση ευθείας:

$$\frac{d^2x^\mu}{dl^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx^\nu}{dl}\partial_\nu\frac{dx^\mu}{dl} = 0 \xrightarrow{\partial_\nu \to \nabla_\nu} \frac{dx^\nu}{dl}\nabla_\nu\frac{dx^\mu}{dl} = 0$$

Η οποία αποτελέι την γεωδαισιακή καμπύλη! Έτσι και για την βαρύτητα θα πρέπει να πάρουμε την τροχιά του σωματιδίου σε ένα βαρυτικό πεδίο σύμφωνα με τον Νεύτωνα και να εξάγουμε μια εξίσωση, την εξίσωση Einstein για την βαρύτητα, που θα έχει ως όριο τις εξισώσεις του Νεύτωνα.

3.2.2 Νευτώνιο Όριο

Στο Νευτώνιο όριο τα σωματίδια θα πρέπει:

1. να κινούνται με ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός
2. το βαρυτικό πεδίο να είναι ασθενές (για να μπορεί να θεωρηθεί σαν διαταραχή του χωρόχρονου)
3. το βαρυτικό πεδίο να είναι στατικό (να μην αλλάζει με τον χρόνο)

Η αργή κίνηση των σωματιδίων ερμηνεύεται ως:

$$\frac{dx^i}{dt} \ll c^2 \Leftrightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \tag{3.14}$$

Η γεωδαισιακή τότε γίνεται:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{3.15}$$

Εφόσον το πεδίο είανι στατικό $(\partial_0 g_{\mu\nu} = 0)$, τα σχετικά σύμβολα Christoffel απλοποιούνται ως:

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{00} &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}\right)\\ &= -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00}\end{aligned} \tag{3.16}$$

Τέλος το ασθενές βαρυτικό πεδίο μας επιτρέπει να σπάσουμε την μετρική σε έναν όρο που είναι η μετρική του Minkowski συν μια μικρή διαταραχή:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,,\ |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{3.17}$$

Από τον ορισμό για την αντίστροφη μετρική, $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \phi^{\mu\nu}\,,\ |\phi^{\mu\nu} \ll 1 &\Rightarrow\\ g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma &\Leftrightarrow\\ \left(\eta^{\mu\nu} + \phi^{\mu\nu}\right)\left(\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}\right) = \delta^\mu_\sigma &\Leftrightarrow\\ \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} + \eta^{\mu\nu}h_{\nu\sigma} + \phi^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} + \cancelto{0}{\phi^{\mu\nu}h_{\nu\sigma}} = \delta^\mu_\sigma &\Leftrightarrow\\ \delta^\mu_\sigma + h^\mu{}_\sigma + \phi^\mu{}_\sigma + 0 = \delta^\mu_\nu &\Leftrightarrow\\ \phi^\mu{}_\sigma = -h^\mu{}_\sigma &\Leftrightarrow\\ \eta^{\nu\sigma}\phi^\mu{}_\sigma = -\eta^{\nu\sigma}\phi^\mu{}_\sigma &\Leftrightarrow\\ \phi^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}&\end{aligned}$$

Επομένως

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\,,\ |h^{\mu\nu}| \ll 1 \tag{3.18}$$

Τα σχετικά σύμβολα Christoffel γίνονται:

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{00} &= -\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda}\right)\partial_\lambda\left(\eta_{00} + h_{00}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda\eta_{00} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} + \frac{1}{2}h^{\mu\lambda}\partial_\lambda\eta_{00} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}h^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}}\\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}\end{aligned} \tag{3.19}$$

Αντικαθιστώντας στην γεωδαισιακή έχουμε:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = c^2\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = c^2\frac{1}{2}\partial_\mu h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{3.20}$$

Η $\mu = 0$ συνιστώσα δίνει:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \textit{σταθερό} \tag{3.21}$$

Αφού το χωροειδές κομμάτι της μετρικής είναι ο μοναδιαίος πίνακας 3×3 τότε η χωροειδής συνιστώσα μας δίνει:

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2} = c^2\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\partial_i h_{00} \Leftrightarrow \tag{3.22}$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = c^2\frac{1}{2}\nabla h_{00}\textbf{Νευτώνιο Όριο} \tag{3.23}$$

Όπου στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε το σύμβολο $\partial_i = \nabla$ και πολλαπλασιάσαμε με $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$. Έτσι η τελευταία μας θυμίζει την εξίσωση του Νεύτωνα για την βαρύτητα αν αντικαταστήσουμε $h_{00} = -2\frac{\Phi}{c^2}$ το βαρυτικό δυναμικό. Επομένως η συνιστώσα της μετρικής γράφεται:

$$g_{00} = -\left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) \tag{3.24}$$

ή λόγω του Νευτώνιου βαρυτικού πεδίου :

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \tag{3.25}$$

3.2.3 Εξίσωση Einstein

Η γενίκευση της εξίσωσης Poisson θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει στο ένα μέλος παραγώγους δεύτερης τάξης της μετρικής και στο αριστερό μέλος έναν τανυστή ο οποίος να περιγράφει την ύλη (Τανυστής Ενέργειας-Ορμής) . Επομένως:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \rightarrow \left[\nabla^2 g\right]_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{3.26}$$

όπου k μια αυθαίρετη σταθερά. Μια μαντεψιά θα ήτανε να δράσουμε με την d'Alembertian $\Box = \nabla^\mu\nabla_\mu$ πάνω στην μετρική $g_{\mu\nu}$, αλλά αυτό ισούται με μηδέν ταυτοτικά από την ιδιότητα metric compatibility. Υπάρχει μια ποσότητα που δεν είναι μηδέν και κατασκευάζεται από δεύτερες (και πρώτες) παραγώγους της μετρικής, αυτή είναι ο τανυστής καμπυλότητας Riemann $R^\rho{}_{\mu\sigma\nu}$. Όμως δεν έχει τους σωστούς δείκτες. Μπορούμε όμως να πάρουμε την συστολή που είναι ο τανυστής Ricci $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{3.27}$$

Όμως η ενέργεια διατηρείται επόμενως έχουμε :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.28}$$

Αλλά από την ταυτότητα Bianchi έχουμε ότι:

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) = 0 \tag{3.29}$$

επομένως

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{3.30}$$

Για να προσδιορίσουμε την σταθερά k θα πρέπει να πάρουμε την συστολή και στα δύο μέλη της εξίσωσης:

$$g^{\nu\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\nu\mu}g_{\mu\nu} = kg^{\nu\mu}T_{\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$R - 4\frac{1}{2}R = T$$

για 4 διαστάσεις έχουμε:$g^{\nu\mu}g_{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\nu} = 4$

$$R = -kT \tag{3.31}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση αυτή μπορούμε τότε να γράψουμε την **;;** ως:

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \tag{3.32}$$

Τώρα μένει να δούμε αν η παραπάνω εξίσωση προσδιορίζει την εξίσωση Poisson στο νευτώνιο όριο.

Θεωρούμε ένα ιδανικό ρευστό όπως η Γή ή ο Ήλιος. Τότε ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu} \tag{3.33}$$

Στο νευτώνιο όριο επίσης μπορούμε να απαλείψουμε την πίεση p διότι η πίεση ενός σώματος γίνεται σημαντική όταν τα σωμάτια που το απαρτίζουν ταξιδεύουν με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Άρα:

$$T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu}U_{\nu} \tag{3.34}$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας του ρευστού έχουμε για ένα στατικό σώμα:

$$U^{\mu} = \left(U^0, 0, 0, 0\right) \tag{3.35}$$

Από τις εξισώσεις **;;**,**;;** έχουμε ότι:

$$g_{00} = -1 + h_{00}$$
$$g^{00} = -1 - h^{00}$$

Όμως την χρονική συνιστώσα της τετραταχύτητας μπορούμε να την φτιάξουμε να είναι ίση σύμφωνα με τον νορμαλισμό των τετρανυσμάτων σε $4D$ χωρόχρονο ($g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = -1$):

$$g_{00}U^0U^0 = -1 \Leftrightarrow$$
$$\left(U^0\right)^2 = -\frac{1}{-1 + h_{00}} \Leftrightarrow$$
$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - h_{00}}} \simeq 1 + \frac{1}{2}h_{00} \Leftrightarrow$$
$$U_0 \equiv g_{00}U^0 = (-1 + h_{00})\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) = -1 - \frac{1}{2}h_{00} + h_{00} + \frac{1}{2}\left(h_{00}\right)^2 \simeq -1 + \frac{1}{2}h_{00}$$

Επειδή όμως θεωρούμε ότι η πυκνότητα ενέργειας θεωρείται μικρή (ο χωρόχρονος γίνεται επίπεδος καθώς το $\rho \to 0$) .Άρα τότε παίρνουμε ότι $h_{00} = 0$ άρα $U^0 \simeq 1$, $U_0 \simeq -1$ και τότε η χρονική συνιστώσα του τανυστή ενέργειας ορμής γίνεται:

$$T_{00} = \rho$$

και η συστολή του γίνεται:

$$T = g^{00}T_{00} = -\rho$$

Άρα τότε:

$$R_{00} = k\left(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}\right) = k\left[\rho - \frac{1}{2}\left(-\rho\right)\left(-1\right)\right] = k\frac{1}{2}\rho \tag{3.36}$$

Όμως σύμφωνα με την σχέση του τανυστή καμπυλότητας Riemann έχουμε :

$$R^i_{\ 0j0} = \partial_j\Gamma^i_{00} - \partial_0\Gamma^i_{j0} + \Gamma^i_{j\lambda}\Gamma^{\lambda}_{00} - \Gamma^i_{0\lambda}\Gamma^{\lambda}_{j0}$$

όμως για στατικά πεδία ισχύει ότι $\partial_0\Gamma^i_{j0} = 0$ και επειδή τα σύμβολα Christoffel είναι πρώτης τάξης ως προς την μετρική $(\Gamma)^2 \simeq 0$. Έτσι

$$R^i_{\ 0i0} = \partial_i\Gamma^i_{00} = \partial_i\left[\frac{1}{2}g^{i\lambda}\left(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_{\lambda}g_{00}\right)\right] = -\frac{1}{2}\partial_i g^{i\lambda}\partial_{\lambda}g_{00} = -\frac{1}{2}\delta^i_j\partial_i\partial_j h_{00}$$

$$R_{00} \equiv R^{i}{}_{0i0} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{3.37}$$

Επομένως

$$\nabla^2 h_{00} = -kc^2\rho \xrightarrow{h_{00}=-2\Phi} \nabla^2\Phi = -\frac{1}{2}k\rho \tag{3.38}$$

Η οποία δεν είναι άλλη από την εξίσωση Poisson για $k = 8\pi G$.

Επομένως η εξίσωση της **Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας, Εξίσωση Einstein** είναι η

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.39}$$

Λέμε ότι αποτελούν τις πεδιακές εξισώσεις Einstein όπου το πεδίο είναι η μετρική που διαδίδεται στον χωρόχρονο. Επίσης η εξίσωση Einstein μπορεί να γραφεί όπως δείξαμε και στην μορφή

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \Leftrightarrow$$
$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)$$

Στις περιοχές που δεν υπάρχει ύλη $T_{\mu\nu} = 0$ και έτσι η εξίσωση Einstein στο κενό είναι:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3.40}$$

Κεφάλαιο 4

Μελανές Οπές και Φαινόμενο Superradiance

4.1 Μελανές Οπές

Οι **Μελανές Οπές** ή αλλιώς **Μαύρες Τρύπες** αποτελούν τα θεμελιώδη ¨άτομα¨ της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Είναι γιγάντια σώματα της τάξεως των Αστέρων. Περιγράφονται από σημαντική συγκέντρωση μάζας σε μια πολύ μικρή περιοχή του χώρου (*singularity*) , ώστε η δύναμη της βαρύτητας να μην επιτρέπει σε οτιδήποτε να ξεφύγει από αυτήν, παρά μόνο μέσω κβαντικής συμπεριφοράς.

Όπως προβέπεται από την Γενική Σχετικότητα, η παρουσία μεγάλης μάζας παραμορφώνει τον χωρόχρονο κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα μονοπάτια που λαμβάνονται από τα σωματίδια να στρέφονται προς την μάζα.

Εφόσον οι μαύρες τρύπες δεν μπορούν να εκπέψουν κανενός είδους φως ή άλλο στοιχείο, η μελέτη τους βασίζεται στην μελέτη της κίνησης σωματιδίων έξω από αυτήν, παρά στο απροσπέλαστο εσωτερικό τους.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, στατικές, αυμπτωτικά επίπεδες μελανές όπες, που αποτελούν λύσεις της Γενικής Σχετικότητας σε συνδυασμό με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, χαρακτηρίζονται πλήρως από τις εξής παραμέτρους :μάζα M , ηλεκτρικό φορτίο Q , και τροχιακή στροφορμή L.

Ο θεμελιώδης ρόλος των μελανών οπών κάνει εξαίρετης σημασίας την μελέτη της φύσης της σταθερότητας τους. Τι σημαίνει όμως σταθερότητα ; Η απάντηση προκύπτει μέσα από ένα άλλο ερώτημα. Αν μια μαύρη τρύπα διαταραχθεί με κάποιο τρόπο, τότε η διαταραχή θα ¨πεθάνει¨ με τον χρόνο, ή θα αυξάνει εκθετικά μέχρις ότου να μην μπορούμε να θεωρήσουμε πλεόν την ύπαρξη της διαταραχής και έτσι να έχουμε μια ασταθή μαύρη τρύπα ; Στην πραγματικότητα αυτό σημαίνει ότι διαταρακτικά πεδία είτε θα ακτινοβοληθούν στο άπειρο, είτε θα τα ¨καταπιεί¨ η μαύρη τρύπα.

4.2 Φαινόμενο Superradiance

Εύλογα, μπορεί να προκύψει το ερώτημα :*Αν η βαρυτική δύναμη δεν επιτρέπει στα σωματίδια να ¨ξεφύγουν¨ από αυτήν τότε πως μπορούν να ακτινοβοληθούν στο άπειρο ;*

Διαδικασίες ενίσχυσης ακτινοβολίας έχουν μια μακράν ιστορία, ξεκινώντας από τις απαρχές της Κβαντομηχανικής ,όταν ο Klein έδειξε ότι η εξίσωση Dirac επιτρέπει στα ηλεκτρόνια να μεταδίδονται ακόμα και σε κλασσικά απαγορευμένες περιοχές. Το 1954, ο Dicke εισήγαγε την έννοια Superradiance, στεκόμενος σε μια συλλογή φαινομένων κατά τα οποία η ακτινοβολία ενισχύεται μετά από μια αλληλουχία εκπομπών. Το 1971, ο Zel' dovich έδειξε ότι, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, η σκέδαση ακτινοβολίας από περιστρεφόμενες απορροφητικές επιφάνειες έχει ως αποτέλεσμα κύματα με μεγαλύτερο πλάτος. Το φαινόμενο αυτό είναι πλέον ευρέως γνωστό ως Superradiance και απαιτεί μια αρχική ακτινοβολία, θεωρώντας την μονοχρωματική με συχνότητα ω, να ικανοποιεί την σχέση :

$$\omega < m\Omega \tag{4.1}$$

όπου m είναι ο αζιμουθιακός αριθμός σε σχέση με τον άξονα περιστροφής και Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος. Τέτοιου είδους φαινόμενα ανήκουν σε μια ευρεία κατηγορία κλασσικών προβλημάτων που εμφανίζουν διεγερμένες ή αυθόρμητες εκπομπές ενέργειας, όπως το φαινόμενο Vavilov-Cherenkov, το ανώμαλο φαινόμενο Doppler και άλλα παραδείγματα ϋπερφωτεινής¨ κίνησης. Όταν ενσωματώθηκαν τα κβαντικά αποτελέσματα, υποστηρίχθηκε ότι το φαινόμενο Superradiance αποτελεί μια αυθόρμητη διαδικασία με τα περιστρεφόμενα σώματα (συμπεριλαμβανομένων και των Μελανών Οπών) να υπόκεινται σε επιβράδυνση μέσω αυθόρμητης εκπομπής φωτονίων που ικανοποιούν την σχέση **;;**. Παράλληλα, επιτεύχθηκαν παρόμοια αποτελέσματα κατά την ανάλυση του φαινομένου Superradiance σε μια μαύρη τρύπα από θερμοδυναμική άποψη.

Μπορούμε κάπως έτσι να ισχυριστούμε ότι, το φαινόμενο Superradiance είναι θεμελιώδους σημασίας για να αποφασιστεί η σταθερότητα των μελανών οπών και έτσι η τύχη της βαρυτικής κατάρρευσης. Μια αναλυτικότερη μελέτη θα μας πείσει.

4.3 Οι Νόμοι των Μελανών Οπών

Κάθε νόμος της Θερμοδυναμικής αντιστοιχεί σ' έναν νόμο μηχανικής που υπακούει μια μαύρη τρύπα.Ένα σύστημα σε θερμική ισορροπία σήμαινει οτι έχει αποκατασταθεί σε μια σταθερή κατάσταση, η οποία αντιστοιχίζεται σε μια σταθερή μαύρη τρύπα.

1. Πρώτος Νόμος Θερμοδυναμικής
$$dE = TdS - pdV \tag{4.2}$$
Όπου ο τελευταίος όρος αποτελέι το έργο που κάνουμε στο σύστημα.
Αντιστοιχίζοντας τις ποσότητες
   (α') $E \leftrightarrow M$
   (β') $S \leftrightarrow A_H/4G$
   (γ') $T \leftrightarrow k/2\pi$

   όπου M είναι η μάζα της μαυρής τρύπας, A_H είναι η επιφάνεια του ορίζοντα και $k = 2\pi T_H$ ορίζεται ως η επιφανειακή βαρύτητα της μαύρης τρύπας.Έτσι η αντίστοιχη σχέση που θα ικανοποιούν οι διακυμάνσεις αυτών των ποσοτήτων σε μια μαύρη τρύπα είναι
$$\delta M = \frac{k}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \tag{4.3}$$

2. Μηδενικός Νόμος Θερμοδυναμικής
Όταν ένα σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία η θερμοκρασία παραμένει σταθερή. Ο ανάλογος νόμος της μηχανικής μιας μαύρης τρύπας είναι ότι μια σταθερή μαύρη τρύπα έχει σταθερή επιφανειακή βαρύτητα στον ορίζοντα.

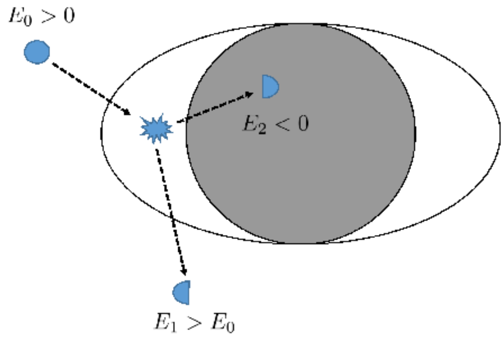
3. Δεύτερος Νόμος Θερμοδυναμικής
Η εντροπία ενός απομονωμένου συστήματος δεν μειώνεται ποτέ. Αντίστοιχα για μια μαύρη τρύπα ισχύει ότι η επιφάνεια του ορίζοντα δεν μειώνεται ποτέ.

4. Τρίτος Νόμος Θερμοδυναμικής
Είναι αδύνατον να επιτευχθεί $T = 0$ σε μια φυσική διαδικασία. Για τις μαύρες τρύπες αυτός ο νόμος δεν ισχύει αρκετά, αφού για $k = 0$ έχουμε την περίπτωση των extremal black holes.

4.4 Διαδικασία Penrose

Ο Bekenstein έδειξε ότι το φαινόμενο Superradiance σε μια Μελανή Οπή μπορεί να γίνει κατανοητό χρησιμοποιώντας κλασσικούς νόμους μηχανικής αυτών.

Κανένας νόμος δεν απαγορεύει την μείωση της ενέργειας μιας μαύρης τρύπας. Μια τυπική διαδικασία εξαγωγής ενέργειας αποτελεί η διαδικασία Penrose, κατά την οποία ένα σωματίδιο ενέργειας $E_0 > 0$ χωρίζεται στην εργόσφαιρα της μαύρης τρύπας σ' ένα σωματίδιο με ενέργεια $E_2 < 0$ το οποίο συλλαμβάνεται από την τρύπα, και σ' ένα δεύτερο με ενέργεια $E_1 = E_0 + |E_2|$ το οποίο διαφεύγει στο άπειρο. Η διαδικασία αυτή ξεκάθαρα οδηγεί στην εξαγωγή ενέργειας $|E_2|$ από την τρύπα.



Σχήμα 4.1: The Penrose process

Αρχικά ας θεωρήσουμε την πιο γενική περίπτωση μιας μαύρης τρύπας, μια φορτισμένη Kerr μάζας M , φορτίου Q και τροχιακής στροφορμής $\vec{L}$. Οι ορίζοντες βρίσκονται στις

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} \tag{4.4}$$

Όπου $\vec{a} = \vec{L}/M$.
Η επαγόμενη μετρική γ_{ij} στον εξωτερικό ορίζοντα (όπου τα i, j τρέχουν πάνω στα θ, ϕ) προσδιορίζεται άμεσα από την σχέση

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = ds^2\left(dt = 0, dr = 0, r = r_+\right) = \left(r_+^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2 + \left[\frac{(r_+^2 + a^2)^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right] d\phi^2 \tag{4.5}$$

Η ορίζουσα είναι

$$|\gamma| = (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2\theta \tag{4.6}$$

Έτσι η επιφάνεια του ορίζοντα είναι

$$A = \int \sqrt{|\gamma|} d\theta d\phi = 4\pi(r_+^2 + a^2) \tag{4.7}$$

Διαφορίζοντας την παραπαάνω σχέση μπορούμε να πάρουμε τις αλλαγές που υπόκεινται οι διάφορες ποσότητες

$$dA = 4A(r_+ - r_-)^{-1}(dM - \vec{\Omega} d\vec{L} - \Phi dQ) \tag{4.8}$$

Όπου $\vec{\Omega} = \vec{a}(r_+^2 + a^2)^{-1}$ και $\Phi = Q r_+ (r_+^2 + a^2)^{-1}$
Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο μηχανικής για τις μαύρες τρύπες η επιφάνεια του ορίζοντα δεν μπορεί να μειωθεί ποτέ, έτσι συνεπάγεται ότι πρέπει απαραιτήτως να ικανοποιείται η σχέση

$$dM > \vec{\Omega} d\vec{L} + \Phi dQ \tag{4.9}$$

Ενέργεια μπορεί εξίσου να εξαχθεί αν σκεδαστούν κύματα πάνω σε μια μαύρη τρύπα. Προαναφέραμε ότι μέσω κβαντικής συμπεριφοράς τέτοιου είδους φαινόμενα γίνονται κατανοητά. Έτσι, στο σημείο αυτό ας φανταστούμε ένα φορτισμένο κύμα να έρχεται από το άπειρο και να σκεδάζεται από μια φορτισμένη Kerr μαύρη τρύπα. Πολύ μακρύα από την μαύρη τρύπα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το κύμα απαρτίζεται από πολλά κβάντα. Είναι γνωστό ότι το κάθε ένα από αυτά θα έχει ενέργεια ίση με $\hbar\omega$ και τροχιακή στροφορμή ίση με $\hbar m$. Αν e είναι το φορτίο ανά κβάντο, τότε ο λόγος της καθαρής τροχιακής στροφορμής ϕ προς την ενέργεια που κουβαλάει το κύμα θα είναι m/ω και ο λόγος του καθαρού φορτίου προς την ενέργεια που

κουβαλάει το κύμα θα είναι $e/\hbar\omega$. Η παρουσία του $\hbar$ δεν χρειάζεται να μας ανησυχεί εφόσον στο κλασικό όριο (πολλά κβάντα) το φορτίο που κουβαλάει το κύμα γίνεται $\lambda = e/\hbar$.
Σύμφωνα με τους νόμους διατήρης της ενέργειας, της τροχιακής στροφορμής και του φορτίου συνεπάγονται οι σχέσεις

$$\vec{\Omega} d\vec{L} = \Omega dMm/\omega \tag{4.10}$$

$$dQ = \lambda dM/\omega \tag{4.11}$$

Έτσι η συνθήκη **;;** γίνεται

$$dM\left(1 - \frac{m\Omega}{\omega} - \frac{\lambda\Phi}{\omega}\right) > 0 \tag{4.12}$$

Άν φυσικά ισχυεί ότι

$$\omega < m\Omega + \lambda\Phi \tag{4.13}$$

Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι το σκεδαζόμενο κύμα κουβαλάει περισσότερη ενέργεια από το αρχικό κύμα, δηλαδή ενισχύεται εξάγοντας ενέργεια και φορτίο από την μαύρη τρύπα.

4.5 Φαινόμενο Superradiance σε Μελανές Οπές

Δείξαμε αλλιώς ότι αν ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο σκεδαστεί σε μια φορτισμένη μαύρη τρύπα ενισχύεται καθώς απομακρύνεται από αυτήν. Τώρα αν θεωρήσουμε ότι το αρχικό πεδίο έχει μη μηδενική μάζα ηρεμίας, τότε ο όρος της μάζας μπορεί να λειτουργήσει κατά κάποιο τρόπο σαν καθρέφτης εμποδίζοντας την εξαγόμενη ενέργεια της μαύρης τρύπας να διαφύγει στο άπειρο. Το φορτισμένο πεδίο ενισχύεται όλο και πιο πολύ παρουσιάζοντας το φαινόμενο Superradiance. Αν το φαινόμενο αυτό διαρκούσε για μεγάλο χρονικό διάστημα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η μαύρη τρύπα παύει πλέον να είναι σταθερή. Όμως η σταθερότητα για παράδειγμα της Reissner-Nordstrom σε βαρυτικές και ηλεκτρομαγνητικές διαταραχές έχει αποδειχθεί δεκάδες χρόνια πριν.

4.5.1 Σκέδαση Superrandiant Πεδίων σε Υπόβαθρο μιας Μελανής Οπής

Θεωρούμε ένα χωρόχρονο στατικό και αξονοσυμμετρικό. Σ' αυτήν την περίπτωση, οι διαταραχές, που διαδίδονται σε μια καθορισμένη μετρική, μπορούν να εκφραστούν σε όρους μιας κυματοσυνάρτησης Ψ. Η τελευταία ικανοποιεί μια εξίσωση τύπου Schroedinger

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + V_{eff}\Psi = 0 \tag{4.14}$$

Το δυναμικό V_{eff} περιέχει όλη την πληροφορία για την καμπυλότητα του χωρόχρονου καθώς και για τις ιδιότητες του πεδίου. Η συντεταγμένη ¨χελώνας¨ όπως καλείται αντιστοιχίζει την περιοχή $r \in [r_+, \infty]$ σε ολόκληρο τον πραγματικό άξονα $r_* \in [-\infty, +\infty]$.Ένας τρόπος για να κάνουμε ξεκάθαρο ότι το κύμα δεν μπορεί να φύγει στο άπειρο υποθέτουμε (όπως και για ευκολία) ασυμπτωτική επιπεδότητα και ότι το δυναμικό είναι σταθερό στα όρια(πηγάδι δυναμικού), τότε προκύπτει η ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\Psi = \begin{cases} T\exp^{-ik_H r_*} + O\exp^{ik_H r_*}, & \text{for } r_* \to -\infty \\ R\exp^{ik_\infty r_*} + I\exp^{-ik_\infty r_*}, & \text{for } r_* \to +\infty \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι r_+ είναι η ακτίνα του ορίζοντα, $k_H^2 = V_{eff}(r \to r_+)$ και $k_\infty^2 = V_{eff}(r \to \infty)$.
Αυτές οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχούν σ' ένα αρχικό κύμα πλάτους I , σ' ένα ανακλώμενο κύμα πλάτους R και σ' ένα διαδιδόμενο πλάτους T στον ορίζοντα. Ο όρος O περιγράφει μια υποθετική εξερχόμενη ροή κατα μήκος της επιφάνειας $r = r_+$ που στην περίτωση που έχουμε ορίζοντα μηδενίζεται.
Τώρα θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι πραγματικό. Τότε, εφόσον ο χωρόχρονος είναι στατικός, οι εξισώσεις των πεδίων θα είναι αναλοίωτες κάτω απο τους μετασχηματισμούς ούς $t \to -t$ και $\omega \to -\omega$. Τότε υπάρχει μια άλλη λύση $\bar{\Psi}$ η οποία θα ικανοποιεί τις συζηγής συνοριακές συνθήκες. Οι λύσεις Ψ και $\bar{\Psi}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και έτσι για την κάθε μια η Wronskian

$$W = \psi\frac{d}{dr*}\bar{\psi} - \bar{\psi}\frac{d}{dr*}\psi \tag{4.15}$$

είναι ανεξάρτητη της r_*. Επομένως η Wronskian υπολογισμένη στον ορίζοντα, $W = -2ik_H(|T|^2 - |O|^2)$, θα πρέπει να είναι ίση με αυτήν στο άπειρο $W = 2ik_\infty(|R|^2 - |I|^2)$

$$|R|^2 = |I|^2 - \frac{k_H}{k_\infty}\left(|T|^2 - |O|^2\right) \tag{4.16}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $k_H/k_\infty > 0$ τότε $|R|^2 < |I|^2$, ενώ όταν $k_H/k_\infty < 0$ τότε το κύμα ενισχύεται $|R|^2 > |I|^2$, όπως δείξαμε και παραπάνω.

Κεφάλαιο 5

Θεώρημα No-bomb για Φορτισμένη Μελανή Οπή Reissner-Nordstrom

Έχουμε ξεκαθαρίσει ότι υπάρχουν δύο συνθήκες ώστε μια μαύρη τρύπα να παρουσιάσει αστάθεια superradiant-bomb. Πρώτον θα πρέπει να υπάρχει ένα πηγάδι δυναμικού έξω από την μαύρη τρύπα και δεύτερον θα πρέπει το πεδίο που προσκρούει στην μαύρη τρύπα να πραγματοποιεί το φαινόμενο superradiance. Όπως προαναφέραμε η Reissner-Nordstrom είναι σταθερή σε ηλεκτρομαγνητικές διαταρραχές, έτσι σ' αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι για μια μαύρη τρύπα RN υπάρχει ένα όριο στο οποίο οι δύο συνθήκες δεν μπορούν να συμβαίνουν ταυτόχρονα.

5.1 Το Φυσικό Σύστημα

Μια μαύρη τρύπα RN με μάζα M και ηλεκτρικό φορτίο Q ορίζει τον χωρόχρονο σύμφωνα με την μετρική

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{5.1}$$

Όπου

$$f(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{5.2}$$

Οι δύο ορίζοντες βρίσκονται στις ακτίνες

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{5.3}$$

Το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό της BH είναι $A_\nu = -\delta_\nu^0 Q/r$.
Ένα βαθμωτό πεδίο Ψ με μάζα μ και φορτίο q συζεύγνυται με την RNBH. Η δυναμική του πεδίου Ψ στον χωρόχρονο RN διέπεται από την εξίσωση Klein-Gordon

$$\left[(\nabla^\nu - iqA^\nu)(\nabla_\nu - iqA_\nu) - \mu^2\right]\Psi = 0 \tag{5.4}$$

Μπορούμε να αναλύσουμε το πεδίο ως

$$\Psi_{lm}(t,r,\theta,\phi) = e^{im\phi}S_{lm}(\theta)R_{lm}(r)e^{-i\omega t} \tag{5.5}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση K-G και κάνουμε τις πράξεις αναλυτικά

$$\left[(\nabla^\nu - iqA^\nu)(\nabla_\nu - iqA_\nu) - \mu^2\right]\Psi = 0 \tag{5.6}$$

$$\nabla^\nu\nabla_\nu\Psi - iq\nabla^\nu(A_\nu\Psi) - iqA^\nu\nabla_\nu\Psi - q^2A^\nu A_\nu\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{5.7}$$

$$\partial^\nu\partial_\nu\Psi - \Gamma^{\mu\nu}_\nu\partial_\mu\Psi - iq\nabla^\nu A_\nu\Psi - iqA_\nu\nabla^\nu\Psi - iqA^\nu\partial_\nu\Psi - q^2g^{\nu\mu}A_\mu A_\nu\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{5.8}$$

$$g^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu\Psi - \Gamma^{\mu\nu}_\nu\partial_\mu\Psi - iq(\partial_\nu A^\nu + \Gamma^\nu_{\nu\sigma}A^\sigma)\Psi - 2iqg^{\nu\mu}A_\mu\partial_\nu\Psi - q^2g^{\nu\kappa}A_\kappa A_\nu\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{5.9}$$

Όπου $g_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$ και $g^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} -f^{-1}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{bmatrix}$

Και τα μη μηδενικά σύμβολά Christoffel είναι

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2}\frac{1}{f(r)}\frac{df(r)}{dr} \tag{5.10}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{1}{f(r)}\frac{df(r)}{dr} \tag{5.11}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \tag{5.12}$$

$$\Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \tag{5.13}$$

$$\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \tag{5.14}$$

Επίσης

$$\Gamma^{rt}_{t} = \frac{1}{2}g_{tt}g^{rr}\partial_r g^{tt} = -\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr} \tag{5.15}$$

$$\Gamma^{rr}_{r} = \frac{1}{2}g_{rr}g^{rr}\partial_r g^{rr} = -\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr} \tag{5.16}$$

$$\Gamma^{r\theta}_{\theta} = \frac{1}{2}g_{\theta\theta}g^{rr}\partial_r g^{\theta\theta} = -\frac{f(r)}{r} \tag{5.17}$$

$$\Gamma^{r\phi}_{\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi}g^{rr}\partial_r g^{\phi\phi} = -\frac{f(r)}{r} \tag{5.18}$$

$$\Gamma^{\theta\phi}_{\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi}g^{\theta\theta}\partial_\theta g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{5.19}$$

$$\tag{5.20}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο

$$\begin{aligned} g^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu\Psi &= g^{tt}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + g^{rr}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + g^{\theta\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + g^{\phi\phi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \\ &= \frac{\omega^2}{f(r)}\Psi + f(r)\frac{d^2R}{dr^2}e^{i\omega\phi}Se^{-i\omega t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Για τον δεύτερο τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} -\Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\partial_\mu\Psi &= -\Gamma^{rt}_{t}\partial_r\Psi - \Gamma^{rr}_{r}\partial_r\Psi - \Gamma^{r\theta}_{\theta}\partial_r\Psi - \Gamma^{r\phi}_{\phi}\partial_r\Psi - \Gamma^{\theta\phi}_{\phi}\partial_\theta\Psi \\ &= \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + 2\frac{f(r)}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Έπειτα

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \tag{5.23}$$

$$\Gamma^\nu_{\nu\sigma}A^\sigma = \Gamma^\nu_{\nu t}A^t = 0 \tag{5.24}$$

Ενώ για τους δύο τελευταίους όρους έχουμε

$$g^{\nu\mu}A_\mu\partial_\nu\Psi = g^{tt}A_t\partial_t\Psi = -i\omega\frac{Q}{rf(r)}\Psi \tag{5.25}$$

$$g^{\nu\kappa}A_\kappa A_\nu = g^{tt}A_tA_t = -\frac{1}{f(r)}\frac{Q^2}{r^2} \tag{5.26}$$

Με αντικατάσταση στην ;; προκύπτει

$$\frac{\omega^2}{f(r)}\Psi + f(r)\frac{d^2R}{dr^2}e^{i\omega\phi}Se^{-i\omega t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$
$$+\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + 2\frac{f(r)}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} - 2iq\left(-i\omega\frac{Q}{rf(r)}\Psi\right) - q^2\left(-\frac{1}{f(r)}\frac{Q^2}{r^2}\right)\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{5.27}$$

Ο τελεστής της στροφορμής είναι

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{5.28}$$

Δρώντας στην κυματοσυνάρτηση δίνει τις ιδιοτιμές $-l(l+1)$.
Έτσι αντικαθιστώντας στην εξίσωση και απαλοίφωντας τους όμοιους όρους καταλήγουμε στην

$$\frac{\omega^2}{f(r)}R + f(r)\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}R + \frac{2}{r}f(r)\frac{dR}{dr} + \frac{df(r)}{dr}\frac{dR}{dr} - 2q\omega\frac{Q}{rf(r)}R + q^2(\frac{1}{f(r)}\frac{Q^2}{r^2})R - \mu^2R = 0 \tag{5.29}$$

Στο σημείο αυτό ορίζοντας δύο νέες ποσότητες

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + Q^2 \tag{5.30}$$
$$U \equiv (\omega r^2 - qQr)^2 - \Delta[\mu^2r^2 + l(l+1)] \tag{5.31}$$

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου παίρνει την μορφή

$$\Delta^2\frac{d^2R}{dr^2} + \Delta r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{\Delta}{r^2}\right)\frac{dR}{dr} + 2\frac{\Delta^2}{r}\frac{dR}{dr} + \omega^2r^4R - 2q\omega Qr^3R + q^2Q^2r^2R - \mu^2r^2\Delta R - \Delta l(l+1)R = 0$$
$$\Delta^2\frac{d^2R}{dr^2} + \Delta\frac{d\Delta}{dr}\frac{dR}{dr} + UR = 0$$
$$\Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right) + UR = 0 \tag{5.32}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $\Psi \equiv \Delta^{1/2}R$ η εξίσωση κίνησης του πεδίου παίρνει την μορφή μιας εξίσωσης Schroedinger

$$\Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{d}{dr}\left(\Psi\Delta^{-1/2}\right)\right) + U\Psi\Delta^{-1/2} = 0 \tag{5.33}$$
$$\Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta^{1/2}\frac{d\Psi}{dr} - \frac{1}{2}\Delta^{-1/2}\frac{d\Delta}{dr}\Psi\right) + U\Psi\Delta^{-1/2} = 0 \tag{5.34}$$
$$\Delta^{3/2}\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{4}\Delta^{-1/2}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2\Psi - \frac{1}{2}\Delta^{1/2}\frac{d^2\Delta}{dr^2}\Psi + U\Psi\Delta^{-1/2} = 0 \tag{5.35}$$
$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{\Delta^2}(2r-2M)^2 - \frac{1}{\Delta} + \frac{U}{\Delta^2}\right)\Psi = 0 \tag{5.36}$$
$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{U + M^2 - Q^2}{\Delta^2}\Psi = 0 \tag{5.37}$$

Ξαναορίζοντας $\omega^2 - V = \dfrac{U + M^2 - Q^2}{\Delta^2}$ καταλήγουμε στην

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + (\omega^2 - V)\Psi = 0 \tag{5.38}$$

5.2 Συνοριακές Συνθήκες

Ενδιαφερόμαστε για εκείνες τις λύσεις της εξίσωσης ;; όπου θα έχουμε ένα καθαρά εισερχόμενο κύμα στον ορίζοντα, δηλαδή για $r = r_+$ και μια δέσμια κατάσταση για $r = \infty$. Όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συντεταγμένη ¨χελώνας¨ r_* με $dr_* = (r/\Delta)dr$, τότε η εξίσωσησ κίνησης του σωματιδίου παίρνει εξίσου την μορφή μιας εξίσωσης Schroedinger

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + \frac{U}{r^4}R = 0 \tag{5.39}$$

Υπολογίζουμε τις συχνότητες, όπως δείξαμε

$$k_H^2 = V_{eff}\left(r \to r_+\right) = \frac{(\omega r_+^2 - qQr_+)^2 - \Delta[\mu^2 r_+^2 + l(l+1)]}{r_+^4} = (\omega - qQ/r_+)^2 \tag{5.40}$$

Έπειτα

$$k_\infty^2 = V_{eff}\left(r \to r_\infty\right) = \lim_{r\to\infty} \frac{(\omega r_+^2 - qQr_+)^2 - \Delta[\mu^2 r_+^2 + l(l+1)]}{r_+^4} = \omega^2 - \mu^2 \tag{5.41}$$

Σημειώνουμε ότι έγινε χρήση του κανόνα De L' Hospital 4 φορές.
Έτσι η λύση για ένα καθαρώς εισερχόμενο κύμα στον ορίζοντα γεγονότων της μελανλης οπής είναι

$$R \sim \exp^{-i(\omega - qQ/r_+)r^*} \quad \textit{όταν} \;\; r \to r_+ \;(r^* \to -\infty) \tag{5.42}$$

Ενώ η λύση για ένα δέσμιο εκπεμπόμενο κύμα στο χωρικό άπειρο είναι

$$R \sim r^{*-iQ} \exp^{-\sqrt{\mu^2-\omega^2}r^*} \quad \textit{όταν} \;\; r \to \infty \;(r^* \to +\infty) \tag{5.43}$$

Σημειώνουμε ότι η δέσμια κατάσταση με την απαίτηση στο άπειρο να μηδενίζεται χαρακτηρίζεται από την ανισότητα

$$\omega^2 < \mu^2 \tag{5.44}$$

Η εξίσωση **;;** τότε γίνεται

$$|R|^2 = |I|^2 - \frac{(\omega - qQ/r_+)}{\sqrt{\mu^2 - \omega^2}}\left(|T|^2 - |O|^2\right) \tag{5.45}$$

Παρατηρούμε ότι, πέρα από την συνθήκη για να έχουμε ενίσχυση του σκεδαζόμενου κύματος

$$\omega < qQ/r_+ \tag{5.46}$$

οι λύσεις για να είναι δέσμιες θα πρέπει να μην διαδίδονται στο άπειρο και έτσι να υπακούουν την ανισότητα

$$\omega^2 < \mu^2 \tag{5.47}$$

5.3 Το Πηγάδι Δυναμικού

Ας γυρίσουμε τώρα στο δυναμικό της εξίσωσης κίνησης του πεδίου στις κανονικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}
&\omega^2 - V = \frac{U + M^2 - Q^2}{\Delta^2} \Rightarrow \\
&V = \omega^2 - \frac{U + M^2 - Q^2}{\Delta^2} \Rightarrow \\
&V = \frac{1}{\Delta^2}[\mu^2 r^4 + \left(-4M\omega^2 + 2qQ\omega - 2M\mu^2\right) r^3 + \left(4M^2\omega^2 + 2Q^2\omega^2 - q^2Q^2 + Q^2\mu^2 + l(l+1)\right) r^2 \\
&\qquad + \left(-4MQ^2\omega^2 - 2Ml(l+1)\right) r + \left(Q^2\omega^2 + l(l+1)Q^2 - M^2 + Q^2\right)]
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Όπως προαναφέραμε για να επιτευχθεί αστάθεια λόγω του φαινομένου superradiance απαιτείται η ύπαρξη ενός πηγαδιού δυναμικού έξω από την μαύρη τρύπα, όπως και τα σκεδαζόμενα πεδία να ενισχύονται. Θα δείξουμε ότι αυτές οι δύο συνθήκες δεν μπορούν να ικανοποιούνται ταυτόχρονα για μια φορτισμένη RN μαύρη τρύπα στο όριο $(Q/M)^2 \leq 8/9$. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε ότι δεν υφίσταται πηγάδι δυναμικού στο όριο της superradiance.
Ας αναλύσουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης του δυναμικού. Η παράγωγος της συνάρτησης του δυναμικού είναι

$$\begin{aligned}
V'(r; M, Q, \mu, q, \omega, l) = \frac{2}{\Delta^3}\Big\{&\left(M\mu^2 + Qq\omega - 2M\omega^2\right) r^4 + \left[-2M^2\mu^2 - Q^2\left(q^2 + \mu^2\right) + 2MQq\omega + 2Q^2\omega^2\right. \\
&\left.+ l(l+1)\right] r^3 + \left[3MQ^2\mu^2 - 3Q^3q\omega - 3Ml(l+1)\right] r^2 + \left[Q^4\left(q^2 - \mu^2\right) + 2\left(M^2 - Q^2\right)\right. \\
&\left.+ (2M^2 + Q^2)l(l+1)\right] r + \left(2M(M^2 - Q^2) - MQ^2 l(l+1)\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Για τους προφανείς λόγους είναι βολικό να ορίσουμε μια νέα μεταβλητή

$$z \equiv r - r_- \tag{5.50}$$

Η συνάρτηση τότε του δυναμικού γράφεται ως πολυώνυμο τετάρτου βαθμού

$$-\frac{2}{\Delta^3} V'(r; M, Q, \mu, q, \omega, l) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e \tag{5.51}$$

Όπου οι συντελεστές $\{a, b, c, d, e\}$ είναι

$$a = M\mu^2 + Qq\omega - 2M\omega^3 \tag{5.52}$$

$$b = \left(4Mr_- - 2M^2 - Q^2\right)\mu^2 + \left(-8Mr_- + 2Q^2\right)\omega^2 + 2Q(M + 2r_-)q\omega - Q^2q^2 + l(l+1) \tag{5.53}$$

$$c = -3r_-^2(r_+ - M)\mu^2 + 3r_-^3\left(\frac{qQ}{r_-} - \omega\right)\left(2\omega - \frac{qQ}{r_-}\right) - 3(r_+ - M)l(l+1) \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned} d = {} & 2r_-^2(M^2 - Q^2)\mu^2 + Q^2r_-(r_+ - 3r_-)q^2 + 2r_-^3(3r_+ - 4M)\omega^2 \\ & +2Qr_-^2(2r_- + 3M - 3r_+)q\omega + 2(M^2 - Q^2)[l(l+1) - 1] \end{aligned} \tag{5.55}$$

$$e = 2r_-^4(r_+ - M)(\omega - \frac{qQ}{r_-})^2 + 2(r_+ - M)^3 \tag{5.56}$$

Οι ρίζες τις συνάρτησης ικανοποιούν τις ιδιότητες

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\frac{b}{a} \tag{5.57}$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_4 = \frac{c}{a} \tag{5.58}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2 \cdot z_4 + z_1 \cdot z_3 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = -\frac{d}{a} \tag{5.59}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \frac{e}{a} \tag{5.60}$$

Οι περιορισμοί **;;** και **;;** γράφονται μαζί ως

$$0 \leq \omega < \min[qQ/r_+, \mu] \tag{5.61}$$

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι ο συντελεστης a **;;** είναι μια κυρτή παραβολική συνάρτηση ως προς την μεταβλητή ω, επομένως θα ελαχιστοποιείται στα όρια της **;;**.
Αντικαθιστώντας $\omega = 0$ στην **;;** προκύπτει

$$a = M\mu^2 > 0 \tag{5.62}$$

Αντικαθιστώντας $\omega \to qQ/r_+$ για $qQ/r_+ \leq \mu$ προκύπτει

$$a = M\mu^2 + \frac{q^2Q^2}{r_+} - 2M\frac{q^2Q^2}{r_+^2} = \frac{q^2Q^2}{r_+} + M\left(\mu^2 - 2\frac{q^2Q^2}{r_+^2}\right) \geq \frac{q^2Q^2}{r_+} + M\frac{q^2Q^2}{r_+^2} > 0 \tag{5.63}$$

Αντικαθιστώντας $\omega \to \mu$ για $\mu < qQ/r_+$ προκύπτει

$$a = M\mu^2 + Qq\mu - 2M\mu^2 = \mu(Qq - M\mu) > \mu^2(r_+ - M) > 0 \tag{5.64}$$

Και στις δύο περιπτώσεις για το ελάχιστο του ω σημειώνουμε ότι προκύπτει ότι $r_+ - M > 0$.
Είναι προφανές τώρα, ότι από τις **;;** , **;;** , **;;**

$$a > 0 \tag{5.65}$$

Έτσι από την **;;** συνεπάγεται ότι

$$V'(r \to \infty) \to 0^- \tag{5.66}$$

Ενώ ισχύουν οι σχέσεις

$$V(r \to r_+) \to -\infty \tag{5.67}$$

$$V(r \to r_-) \to -\infty \tag{5.68}$$

Με τα δεδομένα που έχουμε σε αυτό το σημείο ;;, ;; είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση του δυναμικού έχει τουλάχιστον ένα μέγιστο σημείο στην περιοχή $r > r_+$. Έστω λοιπόν

$$z_4 > 0 \tag{5.69}$$

Ενώ από τις ;;, ;; συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση του δυναμικού έχει τουλάχιστον ένα μέγιστο σημείο στην περιοχή $r_- < r < r_+$. Έστω

$$z_4 > z_3 > 0 \tag{5.70}$$

Εύκολα από την ;; καταλήγουμε στο ότι

$$e > 0 \tag{5.71}$$

Έτσι από τις ;; , ;;, ;; συνεπάγεται

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 > 0 \tag{5.72}$$

Στο σημείο αυτό θα επικεντρωθούμε στο όριο εκείνο όπου η μαύρη τρύπα RN ικανοποιεί την ανισότητα

$$\left(\frac{Q}{M}\right)^2 \leq \frac{8}{9} \tag{5.73}$$

Σε αυτήν την περίπτωση από την σχέση ;; προκύπτουν εύκολα οι ανισότητες

$$r_+ \geq \frac{4}{3}M \tag{5.74}$$

$$r_- \leq \frac{2}{3}M \Rightarrow 2r_- \leq \frac{4}{3}M \tag{5.75}$$

Από τις οποίες συνεπάγεται

$$r_+ \geq 2r_- \tag{5.76}$$

Επομένως $qQ/r_+ \leq qQ/2r_-$, που από την ;; συνεπάγεται $0 \leq \omega < qQ/2r_-$. Με αντικατάσταση της τελευταίας στην ;; καταλήγουμε στο ότι

$$c < 0 \tag{5.77}$$

Έτσι η ;; σύμφωνα με τις ;; και ;; γίνεται

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_4 < 0 \tag{5.78}$$

Είναι κατάφωρο πλέον από τις ;; και ;; ότι υπάρχουν δύο αρνητικές ρίζες (ας θεωρήσουμε τις z_1, z_2 όπου $z_1 \leq z_2 < 0$) και δύο θετικές ρίζες $(0 < z_3 < z_4)$ της παραγώγου του δυναμικού $V'(z)$.
Κατ' αυτόν τον τρόπο αποδείξαμε ότι, για δέσμιες καταστάσεις $(\omega < \mu)$ στο όριο superradiant $(\omega < qQ/r_+)$, υπάρχουν δύο αρνητικές και δύο θετικές ρίζες της $V'(z)$ σε όλο τον παραμετροποιημένο χώρο (ο οποίος χαρακτηρίζεται από έξι παραμέτρους $\left\{M, Q \leq \sqrt{8/9}M, \mu, q, \omega, l\right\}$). Οι αρνητικές ρίζες z_1 και z_2 αντιστοιχούν σε δύο ρίζες της $V'(r)$ στην μη-φυσική περιοχή $r < r_-$. Η θετική ρίζα z_3 αντιστοιχεί σε ένα (τοπικό) μέγιστο σημείο του $V(r)$ στην μη-φυσική περιοχή $r_- < r < r_+$. Η φυσική ρίζα $z_4 > 0$, ή ισοδύναμα $r_4 > r_+$, αντιστοιχεί σε ένα (τοπικό) μέγιστο σημείο του $V(r)$ έξω από τον ορίζοντα.

5.4 Συμπεράσματα

Εν κατακλείδι, δείξαμε ότι στο όριο του Superradiance το δυναμικό $V(r)$ έχει μόνο ένα μέγιστο (και κανένα ελάχιστο σημείο) έξω από τον ορίζοντα γεγονότων. Συνεπώς δεν υφίσταται πηγάδι δυναμικού στο εξωτερικό της μελανής οπής, το οποίο να την χωρίζει από τον ορίζοντα με ένα φράγμα δυναμικού. Άρα, δεν υφίστανται και μετασταθείς δέσμιες καταστάσεις φορτισμένων βαθμωτών πεδίων με μάζα στο επιθυμητό όριο της superradiance . Έτσι τα πεδία αυτά σε χωρόχρονο Reissner-Nordstrom με $Q/M \leq \sqrt{8/9}$ αναμένεται να είναι ευσταθή.

Παράρτημα Α΄

Χωρόχρονος McVittie και Φαινόμενο Superradiance

Μια άλλη λύση της εξίσωσης Einstein αποτελεί η McVittie. Σύμφωνα με τις τιμές των παραμέτρων , αυτός ο χωρόχρονος μπορεί να ερμηνευτεί ως μια Μελανή Οπή. Λύσεις που εκπροσωπούν χρονικά μεταβαλλόμενες μελανές οπές είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες για την μελέτη της επίδρασης της κοσμικής δυναμικής σ' ένα τοπικό σύστημα και η McVittie είναι η πρώτη λύση αυτού του είδους (1933) . Αυτή η μαύρη τρύπα ξεκάθαρα δεν είναι σταθερή. Όμως αναρωτιόμαστε: *Ποιά η συμπεριφορά ενός εισερχόμενου κύματος στον χωρόχρονο που ορίζει η McVittie ; Μπορεί να ενισχυθεί το κύμα μετά από μια αλληλουχία σκεδάσεων στην μελανή οπή McVittie;*

Α΄.1 Το Φυσικό Σύστημα

Η σφαιρικά συμμετρική, μη-στατική, φορτισμένη McVittie έχει στοιχείο γραμμής:

$$ds^2 = -\frac{\left[1 - \dfrac{(m^2 - Q^2)}{4a^2r^2}\right]^2}{\left[\left(1 + \dfrac{m}{2ar}\right)^2 - \dfrac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2} dt^2 + a^2(t)\left[\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2 \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \tag{Α΄.1}$$

Η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή Maxwell είναι:

$$F^{01} = \frac{Q}{a^3r^2\left[1 - \dfrac{(m^2 - Q^2)}{4a^2r^2}\right]\left[\left(1 + \dfrac{m}{2ar}\right)^2 - \dfrac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2} \tag{Α΄.2}$$

όπου r είναι η ισοτροπική ακτίνα , $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ είναι το στοιχείο γραμμής σε μια σφαίρα, οι σταθερές παράμετροι $m > 0$ και Q είναι η μάζα και το ηλεκτρικό φορτίο, αντίστοιχα, και $a(t)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας .
Έτσι οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή είναι

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -\frac{\left[1 - \dfrac{(m^2 - Q^2)}{4a^2r^2}\right]^2}{\left[\left(1 + \dfrac{m}{2ar}\right)^2 - \dfrac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2} \\
g_{rr} &= a^2(t)\left[\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2 \\
g_{\theta\theta} &= r^2 a^2(t)\left[\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2 \\
g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2\theta a^2(t)\left[\left(1 + \frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2
\end{aligned} \tag{Α΄.3}$$

ενώ οι συνιστώσες του αντιστρόφου μετρικού τανυστή είναι

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{(m-Q+2ar)^2(m+Q+2ar)^2}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2} \\ g^{rr} &= \frac{16r^4a^2}{(m-Q+2ar)^2(m+Q+2ar)^2} \\ g^{\theta\theta} &= \frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ar)^2(m+Q+2ar)^2} \\ g^{\phi\phi} &= \frac{16r^2a^2}{\sin^2\theta(m-Q+2ar)^2(m+Q+2ar)^2} \end{aligned} \tag{Α΄.4}$$

Αντικαθιστώντας τη μη μηδενική συνιστώσα του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή F^{01} στην εξίσωση του Einstein-Maxwell

$$F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu \tag{Α΄.5}$$

προκύπτει η μη μηδενική συνιστώσα του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού A_μ

$$\begin{aligned} A_0 = \int -F^{01} g_{00} g_{11} dr = \int \frac{Q\left[1-\dfrac{(m^2-Q^2)}{4a^2r^2}\right]}{ar^2\left[\left(1+\dfrac{m}{2ar}\right)^2-\dfrac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2} dr \Rightarrow \\ A_0 = -\frac{Q}{ar\left[\left(1+\dfrac{m}{2ar}\right)^2-\dfrac{Q^2}{4a^2r^2}\right]} \end{aligned} \tag{Α΄.6}$$

Έτσι

$$A_\mu = \left\{-\frac{Q}{ar\left[\left(1+\dfrac{m}{2ar}\right)^2-\dfrac{Q^2}{4a^2r^2}\right]}, 0, 0, 0\right\} \tag{Α΄.7}$$

Επίσης τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tt} &= \frac{4r\dot{a}(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)}{(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)(-m^2+Q^2+4r^2a^2)} \\ \Gamma^t_{tr} &= \frac{4a(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)}{(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)(-m^2+Q^2+4r^2a^2)} \\ \Gamma^r_{rt} &= \frac{\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{a(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)} \\ \Gamma^r_{rr} &= -\frac{2(m^2-Q^2+2mra)}{r(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)} \\ \Gamma^\theta_{\theta t} &= \frac{\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{a(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)} \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{-m^2+Q^2+4r^2a^2}{r(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)} \\ \Gamma^\phi_{\phi t} &= \frac{\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{a(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)} \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{-m^2+Q^2+4r^2a^2}{r(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)} \\ \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \tag{Α΄.8}$$

Και

$$\Gamma^{tt}_{t} = -\frac{4r\dot{a}(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)}{(-m^2+Q^2+4r^2a^2)^3}$$

$$\Gamma^{tr}_{r} = \frac{\dot{a}(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)}{a(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}$$

$$\Gamma^{t\theta}_{\theta} = \frac{\dot{a}(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)}{a(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}$$

$$\Gamma^{t\phi}_{\phi} = \frac{\dot{a}(m-Q+2ar)(m+Q+2ar)}{a(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}$$

$$\Gamma^{rt}_{t} = -\frac{64r^4a^3(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)}{(m-Q+2ar)^3(m+Q+2ar)^3(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}$$

$$\Gamma^{rr}_{r} = -\frac{32r^3a^2(m^2-Q^2+2mra)}{(m-Q+2ar)^3(m+Q+2ar)^3}$$

$$\Gamma^{r\theta}_{\theta} = -\frac{16r^3a^2(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{(m-Q+2ar)^3(m+Q+2ar)^3}$$

$$\Gamma^{r\phi}_{\phi} = -\frac{16r^3a^2(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{(m-Q+2ar)^3(m+Q+2ar)^3}$$

$$\Gamma^{\theta\phi}_{\phi} = -\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ar)^2(m+Q+2ar)^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{Α'.9}$$

Όπως πρίν, θεωρούμε ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο με μάζα να συζευγύεται με την φορτισμένη McVittie. Η δυναμική περιγράφεται από την εξίσωση Klein-Gordon

$$\left[(\nabla^{\nu}-iqA^{\nu})(\nabla_{\nu}-iqA_{\nu})-\mu^2\right]\Psi = 0 \tag{Α'.10}$$

Εδώ q και μ είναι το ηλεκτρικό φορτίο και η μάζα του πεδίου, αντίστοιχα.
Αναλύουμε το βαθμωτό πεδίο ως

$$\Psi_{lm}(t,r,\theta,\phi) = e^{im\phi}S_{lm}(\theta)R_{lm}(r)e^{-i\omega t} \tag{Α'.11}$$

όπου ω είναι η διατηρούμενη συχνότητα του κύματος, l είναι ο σφαιρκός αρμονικός δείκτης, και m είναι ο αζιμουθιακός αρμονικός δείκτης με $-l \leq m \leq l$.
Έτσι έχουμε

$$[(\nabla^{\nu}-iqA^{\nu})(\nabla_{\nu}-iqA_{\nu})-\mu^2]\Psi = 0 \tag{Α'.12}$$

$$\nabla^{\nu}\nabla_{\nu}\Psi - iq\nabla^{\nu}(A_{\nu}\Psi) - iqA^{\nu}\nabla_{\nu}\Psi - q^2A^{\nu}A_{\nu}\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{Α'.13}$$

$$\partial^{\nu}\partial_{\nu}\Psi - \Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\partial_{\mu}\Psi - iq\nabla^{\nu}A_{\nu}\Psi - iqA_{\nu}\nabla^{\nu}\Psi - iqA^{\nu}\partial_{\nu}\Psi - q^2g^{\nu\mu}A_{\mu}A_{\nu}\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{Α'.14}$$

$$g^{\nu\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\Psi - \Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\partial_{\mu}\Psi - iq(\partial_{\nu}A^{\nu}+\Gamma^{\nu}_{\nu\sigma}A^{\sigma})\Psi - 2iqg^{\nu\mu}A_{\mu}\partial_{\nu}\Psi - q^2g^{\nu\kappa}A_{\kappa}A_{\nu}\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{Α'.15}$$

Για λόγους ευκολίας υπολογίζουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά.
Ο πρώτος όρος είναι

$$g^{\nu\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\Psi = g^{tt}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + g^{rr}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + g^{\theta\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + g^{\phi\phi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \tag{Α'.16}$$

Ο δεύτερος όρος είναι

$$-\Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\partial_{\mu}\Psi = -\Big[\Gamma^{tt}_{t}\partial_t\Psi + \Gamma^{tr}_{r}\partial_t\Psi + \Gamma^{t\theta}_{\theta}\partial_t\Psi + \Gamma^{t\phi}_{\phi}\partial_t\Psi \tag{Α'.17}$$

$$\Gamma^{rt}_{t}\partial_r\Psi + \Gamma^{rr}_{r}\partial_r\Psi + \Gamma^{r\theta}_{\theta}\partial_r\Psi + \Gamma^{r\phi}_{\phi}\partial_r\Psi \tag{Α'.18}$$

$$\Gamma^{\theta\phi}_{\phi}\partial_{\theta}\Psi\Big] \tag{Α'.19}$$

Ο τρίτος όρος

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu A^\nu = \partial_t A^t = \partial_t \left(g^{tt} A_t \right) = \\
= -\frac{4Qr\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{(m^2-Q^2+4mra+4r^2a^2)^4} \big[(m^2-Q^2)^2 + 8mra(m^2-Q^2) \\
-40r^2a^2(m^2-Q^2) - 32mr^3a^3 + 16r^4a^4 \big]
\end{aligned} \tag{Α'.20}
$$

Ο τέταρτος

$$
\Gamma^\nu_{\nu\sigma} A^\sigma \Psi = \Gamma^t_{tt} A^t \Psi + \Gamma^r_{rt} A^t \Psi + \Gamma^\theta_{\theta t} A^t \Psi + \Gamma^\phi_{\phi t} A^t \Psi \tag{Α'.21}
$$

Ο πέμπτος

$$
g^{\nu\mu} A_\mu \partial_\nu \Psi = g^{tt} A_t \partial_t \Psi \tag{Α'.22}
$$

Και ο τελευταίος όρος είναι

$$
g_{\nu\kappa} A_\kappa A_\nu = g_{tt} A_t A_t \tag{Α'.23}
$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Klein-Gordon προκύπτει αναλυτικά

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2}(-\omega^2)\Psi+\frac{16r^4a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\frac{d^2\Psi}{dr^2}\\
&+\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\frac{d^2\Psi}{d\theta^2}+\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2}\\
&-\Big[-\frac{4r\dot{a}(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}{(-m^2+Q^2+4r^2a^2)^3}(-i\omega)\Psi\\
&+\frac{\dot{a}(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}{a(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}(-i\omega)\Psi\\
&+\frac{\dot{a}(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}{a(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}(-i\omega)\Psi\\
&+\frac{\dot{a}(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}{a(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}(-i\omega)\Psi\\
&-\frac{64r^4a^3(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)}{(m-Q+2ra)^3(m+Q+2ra)^3(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}\frac{d\Psi}{dr}\\
&-\frac{32r^3a^2(m^2-Q^2+2mra)}{(m-Q+2ra)^3(m+Q+2ra)^3}\frac{d\Psi}{dr}\\
&-\frac{16r^3a^2(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{(m-Q+2ra)^3(m+Q+2ra)^3}\frac{d\Psi}{dr}\\
&-\frac{16r^3a^2(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{(m-Q+2ra)^3(m+Q+2ra)^3}\frac{d\Psi}{dr}\\
&-\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Psi}{d\theta}\Big]\\
&-iq\frac{\left[1-\frac{(m^2-Q^2)}{4a^2r^2}\right]^2}{\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2}\frac{Q}{ar\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]}\Psi\Big[\frac{4r\dot{a}(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)}{(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}\\
&+\frac{\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{a(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}\\
&+\frac{\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{a(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}\\
&+\frac{\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{a(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}\Big]\\
&-iq\left(-\frac{4Qr\dot{a}(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{(m^2-Q^2+4mra+4r^2a^2)^4}\left[(m^2-Q^2)^2+8mra(m^2-Q^2)-40r^2a^2(m^2-Q^2)-32mr^3a^3+16r^4a^4\right]\right)\Psi\\
&-2iq\left[-\frac{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2}\right]\left(-\frac{Q}{ar\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]}\right)(-i\omega\Psi)\\
&-q^2\left[-\frac{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2}\right]\left(-\frac{Q}{ar\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]}\right)\left(-\frac{Q}{ar\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]}\right)\Psi\\
&-\mu^2\Psi=0
\end{aligned}
\tag{Α΄.24}
$$

Ο τελεστής στροφορμής είναι ως γνωστών

$$
\hat{L}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}
\tag{Α΄.25}
$$

και φαίνεται να εμφανίζεται σε 3 όρους της εξίσωσης Klein-Gordon.Έτσι αντικαθιστώντας την ιδιοτιμή του τελεστή $l(l+1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\frac{d^2\Psi}{d\theta^2}+\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2}+\\
&+\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Psi}{d\theta}=\\
&\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right\}\Psi=\\
&\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\left[-l(l+1)\right]\Psi
\end{aligned} \tag{Α΄.26}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μια εξίσωση με ένα πραγματικό κομμάτι και ένα φανταστικό. Θεωρώντας τον κάθε όρο ξεχωριστά να ισούται με μηδέν, προκύπτει η ακτινική εξίσωση Klein-Gordon

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{16r^4a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}\right]\frac{d^2R_{lm}}{dr^2}\\
&+\left[\frac{64r^4a^3(m^3-mQ^2+4m^2ra-4Q^2ra+4mr^2a^2)}{(m-Q+2ra)^3(m+Q+2ra)^3(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}+\frac{32r^3a^2(m^2-Q^2+2rma)}{(m-Q+2ra)^3(m+Q+2ra)^3}\right.\\
&\left.+\frac{32r^3a^2(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}{(m-Q+2ra)^3(m+Q+2ra)^3}\right]\frac{dR_{lm}}{dr}\\
&+\left[\omega^2\frac{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2}-\frac{16r^2a^2}{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}l(l+1)\right.\\
&-8q\omega Qar\frac{(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2}\\
&\left.+16a^2r^2q^2Q^2\frac{1}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2}-\mu^2\right]R_{lm}=0
\end{aligned} \tag{Α΄.27}$$

Μετά από λίγες μόνο πράξεις γίνεται

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2R_{lm}}{dr^2}+\left\{\frac{8a^2r}{(-m^2+Q^2+4r^2a^2)}\right\}\frac{dR_{lm}}{dr}+\\
&+\left\{\frac{(m-Q+2ra)^2(m+Q+2ra)^2}{(m^2-Q^2-4r^2a^2)^2}\frac{1}{r^2}\left[\omega\frac{(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}{4ra}-qQ\right]^2\right.\\
&\left.-\frac{1}{r^2}\left[\mu^2\left(\frac{(m-Q+2ra)(m+Q+2ra)}{4ra}\right)^2+l(l+1)\right]\right\}R_{lm}=0
\end{aligned} \tag{Α΄.28}$$

Αυτή η αρκετά περίπλοκη διαφορική εξίσωση δυσκολεύει την δουλεία μας από μαθηματικής άποψης. Θα είναι σίγουρα πιο εύκολο να δουλέψουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες απ΄ ότι σε ισοτροπικές. Το στοιχείο γραμμής μας σε ισοτροπικές συντεταγμένες υπενθυμίζουμε ότι ήταν

$$ds^2=-\frac{\left[1-\frac{(m^2-Q^2)}{4a^2r^2}\right]^2}{\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2}dt^2+a^2(t)\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2r^2}\right]^2\left(dr^2+r^2d\Omega^2\right) \tag{Α΄.29}$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες το στοιχείο γραμμής θα έχει την μορφή

$$ds^2=-A^2(t,R)dt^2+B^2(t,r)dR^2+R^2(t,r)d\Omega^2 \tag{Α΄.30}$$

Άμεσα συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η επιφανειακή ακτίνα θα είναι

$$\begin{aligned}
R(t,r)&=a(t)r\left[\left(1+\frac{m}{2a(t)r}\right)^2-\frac{Q^2}{4a^2(t)r^2}\right]\\
&=m+a(t)r+\frac{m^2-Q^2}{4a(t)r}
\end{aligned} \tag{Α΄.31}$$

Έτσι ακολουθούμε την εξής διαδικασία:
Υπολογίζουμε την ποσότητα dR

$$
\begin{aligned}
dR &= \frac{\partial R}{\partial t}\,dt + \frac{\partial R}{\partial r}\,dr \\
&= \left\{ \dot{a}r\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right] + ar\left[2\left(1+\frac{m}{2ar}\right)\left(-\frac{m}{2a^2r}\right)\dot{a} - (-2)\frac{Q^2}{4a^3r^2}\dot{a}\right]\right\} dt \\
&+ \left\{ a\left[\left(1+\frac{m}{2ar}\right)^2 - \frac{Q^2}{4a^2r^2}\right] + ar\left[2\left(1+\frac{m}{2ar}\right)\left(-\frac{m}{2ar^2}\right) - (-2)\frac{Q^2}{4a^2r^3}\right]\right\} dr \Leftrightarrow \\
dR &= aHr\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right] dt + a\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right] dr
\end{aligned}
\tag{Α΄.32}
$$

Όπου H είναι η παράμετρος Hubble $H(t) = \frac{\dot{a(t)}}{a(t)}$.
Έτσι

$$
dr = \frac{dR}{a}\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right] - Hrdt \tag{Α΄.33}
$$

Με αντικατάσταση στην **;;** προκύπτει

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &- \left[\frac{a^2r^2\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]^2}{R^2} - R^2H^2\right] dt^2 + \left[\frac{R^2}{a^2r^2\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]^2}\right] dR^2 \\
&+ \left[-\frac{2R^2H}{ar\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]}\right] dRdt + R^2\,d\Omega^2
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε τώρα

$$
ar\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right] = ar - \frac{m^2}{4ar} + \frac{Q^2}{4ar}
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
R &= m + ar + \frac{m^2-Q^2}{4ar} \Rightarrow \\
ar &= R - m - \frac{m^2-Q^2}{4ar} \Rightarrow \\
R - m &= ar\left[1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]
\end{aligned}
$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
ar\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right] &= R-m-\frac{m^2-Q^2}{4ar}-\frac{m^2-Q^2}{4ar}\\
&= R-m-\frac{m^2}{2ar}+\frac{Q^2}{2ar}\\
&= R-m\left(1+\frac{m}{2ar}\right)+\frac{Q^2}{2ar}\\
&= m+ar+\frac{m^2-Q^2}{4ar}-m\left(1+\frac{m}{2ar}\right)+\frac{Q^2}{2ar}\\
&= ar-\frac{m^2}{4ar}+\frac{Q^2}{4ar}\\
&= ar\left(1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)\\
&= ar\left(1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)\frac{\left(1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)}{\left(1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)}\\
&= (R-m)\left(\frac{1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}}{1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}}\right)
\end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
a^2r^2\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]^2 &= (R-m)^2\left(\frac{1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}}{1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}}\right)^2\\
&= (R-m)^2\frac{1+\left(\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)^2-2\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}+2\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}-2\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}}{\left(1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)^2}\\
&= (R-m)^2\frac{\left(1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)^2-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}}{\left(1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)^2}\\
&= (R-m)^2\left(1-\frac{m^2-Q^2}{a^2r^2\left(1+\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right)^2}\right)\\
&= (R-m)^2\left(1-\frac{m^2-Q^2}{(R-m)^2}\right)\\
a^2r^2\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]^2 &= R^2-2Rm+Q^2 \qquad \text{(Α΄.34)}
\end{aligned}$$

Και

$$\frac{1}{a^2r^2\left[1-\dfrac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]^2}=\frac{1}{R^2-2Rm+Q^2} \tag{Α΄.35}$$

$$\frac{1}{ar\left[1-\dfrac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]}=\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rm+Q^2}} \tag{Α΄.36}$$

$$ar\left[1-\frac{m^2-Q^2}{4a^2r^2}\right]=\sqrt{R^2-2Rm+Q^2} \tag{Α΄.37}$$

Με αντικατάσταση λοιπόν στην μετρική σε σφαιρικές συντεταγμένες προκύπτει

$$\begin{aligned} ds^2=&-\left(1-\frac{2m}{R}+\frac{Q^2}{R^2}-R^2H^2\right)dt^2+\frac{1}{1-\dfrac{2m}{R}+\dfrac{Q^2}{R^2}}\,dR^2\\ &-\frac{2RH}{\sqrt{\dfrac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\,dtdR+R^2\,d\Omega^2 \end{aligned} \tag{Α΄.38}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε εύκολα ότι, επειδή η μετρική είναι χρονοεξαρτώμενη η σχετική γενική ιδέα για την απόδοση του ορίζοντα γεγονότων θεωρώντας ακτινικες μηδενικές γεωδαισιακές δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Δηλαδή $ds^2=0$ με θ,ϕ σταθερές παραμέτρους προκύπτει

$$\begin{aligned} ds^2&=0\Rightarrow\\ -\left(1-\frac{2m}{R}+\frac{Q^2}{R^2}-R^2H^2\right)dt^2+\frac{1}{1-\dfrac{2m}{R}+\dfrac{Q^2}{R^2}}\,dR^2-\frac{2RH}{\sqrt{\dfrac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\,dtdR&=0\xRightarrow{\div dt^2}\\ \frac{1}{1-\dfrac{2m}{R}+\dfrac{Q^2}{R^2}}\,\frac{dR^2}{dt^2}-\frac{2RH}{\sqrt{\dfrac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\,\frac{dR}{dt}-\left(1-\frac{2m}{R}+\frac{Q^2}{R^2}-R^2H^2\right)&=0 \end{aligned}$$

Η λύση της εξίσωσης δίνει

$$\frac{dR}{dt}=\sqrt{1-\frac{2m}{R}+\frac{Q^2}{R^2}}\left(HR\pm\sqrt{1-\frac{2m}{R}+\frac{Q^2}{R^2}}\right) \tag{Α΄.39}$$

Η οποία δεν μπορεί να δώσει τους ορίζοντες γεγονότων που θέλουμε. Κάπως έτσι η έννοια του φαινόμενου ορίζοντα μοιάζει πιο κατάλληλη και χρήσιμη έννοια. Ο φαινόμενος ορίζοντας ορίζεται από την εξίσωση

$$\nabla^c R\nabla_c R=0 \tag{Α΄.40}$$

Αυτή είτε λυθεί στο ισοτροπικό είτε στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων προφανώς θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα. Επιλέγουμε το δεύτερο για να είναι απλοποιημένες οι πράξεις μας. Εφόσον η επιφανειακή ακτίνα $R(t,r)$ είναι βαθμωτό μέγεθος έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla^c R\nabla_c R&=0\Rightarrow\\ \partial^\mu R\partial_\mu R&=0\Rightarrow\\ g^{\mu\nu}\partial_\nu R\partial_\mu R&=0\Rightarrow\\ g^{tt}\partial_t R\partial_t R+g^{Rt}\partial_t R\partial_R R+g^{\theta t}\partial_t R\partial_\theta R+g^{\phi t}\partial_t R\partial_\phi R&=0\Rightarrow\\ g^{RR}&=0\Rightarrow\\ \frac{\left(Q^2-2mR+R^2\right)\left(-Q^2+2mR-R^2+R^4H^2\right)}{R^2\left(-Q^2+2mR-R^2+2R^4H^2\right)}&=0\Rightarrow\\ \frac{R^4H^2-R^2+2mR-Q^2}{R^2}&=0 \end{aligned} \tag{Α΄.41}$$

Το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό σε σφαιρικές συντεταγμένες παίρνει την μορφή

$$A_\mu = \left\{ -\frac{Q}{R}, 0, 0, 0 \right\} \tag{Α΄.42}$$

Και η ακτινική εξίσωση Klein-Gordon είναι

$$\begin{aligned} &\frac{Q^2 - 2mR + R^2 - R^4H^2}{R^2}\frac{d^2R_{lm}}{dR^2} - \left[\frac{2(m-R)}{R^2} + 4RH^2 + \frac{RH^{'}}{\sqrt{\frac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}} \right]\frac{dR_{lm}}{dR} \\ &- \frac{1}{R^2}\left[\mu^2R^2 + l(l+1)\right]R_{lm} + \frac{1}{Q^2-2mR+R^2}\left[\omega R - qQ\right]^2 R_{lm} = 0 \end{aligned} \tag{Α΄.43}$$

Παρατηρώντας την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την δυναμική του συστήματος σύμφωνα με την εξίσωση που ορίζει τους φαινόμενους ορίζοντες της μελανής οπής McVittie

$$\frac{Q^2 - 2mR + R^2 - R^4H^2}{R^2} = 0 \tag{Α΄.44}$$

θεωρούμε ότι

$$\Delta = Q^2 - 2mR + R^2 - R^4H^2 \tag{Α΄.45}$$

τότε

$$\frac{d\Delta}{dR} = -2m + 2R - 4R^3H^2 \tag{Α΄.46}$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = -R^4 2HH' \tag{Α΄.47}$$

έτσι η εξίσωση Klein-Gordon παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta}{R^2}\frac{d^2R_{lm}}{dR^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d\Delta}{dR}\frac{dR_{lm}}{dR} + \frac{d\Delta}{dt}\frac{1}{2R^3H\sqrt{\frac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\frac{dR_{lm}}{dR} \\ &+ \left[\frac{\left[\omega R - qQ\right]^2}{Q^2-2mR+R^2} - \frac{1}{R^2}\left[\mu^2R^2 + l(l+1)\right] \right] R_{lm} = 0 \Rightarrow \end{aligned} \tag{Α΄.48}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\frac{d}{dR}\left(\Delta\frac{dR_{lm}}{dR}\right) + \Delta\frac{d\Delta}{dt}\frac{1}{2RH\sqrt{\frac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\frac{dR_{lm}}{dR} \\ &+\Delta\left[\frac{\left[\omega R^2 - qQR\right]^2}{Q^2-2mR+R^2} - \left[\mu^2R^2 + l(l+1)\right] \right] R_{lm} = 0 \end{aligned} \tag{Α΄.49}$$

Ορίζοντας μια νέα ακτινική συντεταγμένη την συντεταγμένη ¨χελώνας¨ R^* ως

$$\frac{d}{dR^*} = \frac{Q^2 - 2mR + R^2 - R^4H^2}{R^2}\frac{d}{dR} \tag{Α΄.50}$$

τότε

$$\frac{d}{dR} = \frac{R^2}{Q^2 - 2mR + R^2 - R^4H^2}\frac{d}{dR^*} \tag{Α΄.51}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Klein-Gordon

$$\frac{d^2R_{lm}}{dR^{*2}} + \frac{d\Delta}{dt}\frac{1}{2R^3H\sqrt{\frac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\frac{dR_{lm}}{dR^*} + \frac{\Delta}{R^4}\left[\frac{\left[\omega R^2 - qQR\right]^2}{Q^2-2mR+R^2} - \left[\mu^2R^2 + l(l+1)\right] \right] R_{lm} = 0 \tag{Α΄.52}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις $2-$ας τάξης ;; και ;; περιγράφουν τη δυναμική του συστήματος όπου αρχικό κύμα εισέρχεται στον χωρόχρονο που ορίζει η McVittie.

Α΄.2 Συνοριακές Συνθήκες

Και πάλι για να πραγματοποιήσει το σωματίδιο το φαινόμενο superradiance θεωρούμε ένα καθαρά εισερχόμενο κύμα στον ορίζοντα της McVittie και μια δέσμια κατάσταση στο χωρικό άπειρο. Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου σε συντεταγμένες ¨χελώνας¨ **;;** παύει πλέον να μας θυμίζει την εξίσωση Schrodinger και έτσι η λύση της καθίσταται αδύνατη.

Στο σημείο αυτό αν θεωρήσουμε ότι ο παράγοντας κλίμακας $a(t)$ έχει την μορφή

$$a(t) = a_0 t^p \tag{Α΄.53}$$

Τότε για μεγάλους χρόνους $t \to \infty$ ο παράγοντας Hubble είναι

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\ &= \frac{a_0\, p\, t^{p-1}}{a_0\, t^p} \\ &= p\, t^{-1} \xrightarrow{t\to\infty} \\ H &\to 0 \end{aligned} \tag{Α΄.54}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση **;;** παίρνει την μορφή της εξίσωσης **;;** , η οποία είναι η εξίσωση που μας δίνει τους ορίζοντες της μελανής οπής Reissner-Nordstrom. Δηλαδη για $H \to 0$ αναπαράγεται η δομή των οριζόντων του στατικού χωρόχρονου Reissner-Nordstrom.

Σ΄ αυτήν την περίπτωση η **;;** παίρνει την μορφή μιας εξίσωσης Schrodinger

$$\frac{d^2 R_{lm}}{dR*^2} + U_{eff} R_{lm} \tag{Α΄.55}$$

και το δυναμικό που δημιουργείται έχει την μορφή

$$U_{eff} = \frac{\left[\omega R^2 - qQR\right]^2 - \left(Q^2 - 2mR + R^2\right)\left[\mu^2 R^2 + l(l+1)\right]}{R^4} \tag{Α΄.56}$$

το οποίο ταυτίζεται με εκείνο για την περίπτωση χωρόχρονου Reissner-Nordstrom. Είναι εμφανές πλέον ότι αν θεωρήσουμε τις συνοριακές συνθηκές έχουμε ένα δυναμικό στο άπειρο

$$U^{'}_{\infty} \sim \omega^2 - \mu^2 \tag{Α΄.57}$$

Ένα δυναμικό στον ορίζοντα

$$U^{'}_{R_H} \sim (\omega - qQ/R_H)^2 \tag{Α΄.58}$$

ενώ η Wronskian εν συνεχεία θα πάρει την μορφή

$$W(R \to R_H) = 2i\sigma|T|^2 \tag{Α΄.59}$$

$$W(R \to \infty) = -2i\left(|R|^2 - 1\right)\sqrt{\omega^2 - \mu^2} \tag{Α΄.60}$$

όπου έχουμε ορίσει

$$\sigma \equiv \omega - qQ/R_H \tag{Α΄.61}$$

και εξισώνοντας τις δύο ποσότητες

$$|R|^2 = 1 - \frac{\omega - qQ/R_H}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \tag{Α΄.62}$$

Καταλήγουμε στα γνώριμα αποτελέσματα, αν $\omega - qQ/R_H < 0$ το σωματίδιο ενισχύεται , $|R|^2 > 1$. Και έτσι αναπαράγεται η συνθήκη του Bekenstein , η οποία αποτελεί και συνθήκη για τον χωρόχρονο Reissner-Nordstrom.

$$\omega - qQ/R_H < 0 \tag{Α΄.63}$$

Στο όριο λοιπόν που $H \to 0$ αναπαράγεται το φυσικό σύστημα φορτισμένης μελανής οπής Reissner-Nordstrom.

A΄.3 Συμπεράσματα και Περαιτέρω Συζήτηση

Ο χωρόχρονος που ορίζει η McVittie δεν είναι στατικός. Η εξάρτηση από τον χρόνο κάνει δύσκολη την ανάλυση της συμπεριφοράς των οριζοντών. Η διαφορική εξίσωση της κίνησης ενός σωματιδίου δεν μπορεί να λυθεί με βάση τους γνωστούς και οικείους μας τρόπους. Κάπως έτσι η μελέτη της μελανής οπής και τους φαινομένου superradiance είναι δύσκολη. Δεν μπορούμε, για χρόνους που δεν τείνουν στο άπειρο, να αποφανθούμε για το αν ενισχύεται το εισερχόμενο κύμα μετά από αλλεπάλληλες σκεδάσεις. Μια ενδιαφέρουσα σκέψη για περαιτέρω συζήτηση θα μπορούσε να είναι η μελέτη του δυναμικού που δημιουργείται έξω από τον ορίζοντα της McVittie.

Όπως προαναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ύπαρξη ενός πηγαδιού δυναμικού είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την πραγματοποίηση του φαινομένου superradiance. Αν αποδεικνύαμε την ύπαρξη αυτού, χωρίς όμως να μπορούμε να έχουμε απόδειξη για ενίσχυση του σκεδαζόμενου κύματος δεν θα μπορούσαμε να αποφανθούμε για τίποτα. Αν όμως αποδεικνύαμε την απουσία αυτού τότε θα μπορούσαμε σίγουρα να καταλήξουμε στο ότι το σωματίδιο δεν θα μπορεί να πραγματοποιήσει αλλεπάλληλες σκεδάσεις. Και έτσι το φαινόμενο superradiance θα ήταν αδύνατο να πραγματοποιηθεί.Η εξίσωση **;;** έχει την μορφή

$$\ddot{x}(t) + A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = 0 \tag{A΄.64}$$

μέσω του μετασχηματισμού

$$x(t) = f(t)h(t) \tag{A΄.65}$$

θα μπορούσαμε να βρούμε μια καινούργια εξίσωση με την απαίτηση να εξαλοίφεται η πρώτη παράγωγος. Τότε εύκολα θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $f(t)$

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp^{-\frac{1}{2}\int A(t)\,dt} \\ \dot{f}(t) &= -\frac{A(t)}{2}f(t) \\ \ddot{f}(t) &= \left[-\frac{\dot{A}(t)}{2} + \frac{A^2(t)}{4}\right]f(t) \end{aligned} \tag{A΄.66}$$

Παρατηρούμε ότι τα $\dot{f}(t), \ddot{f}(t)$ είναι πολλαπλάσια του $f(t)$, οπότε το ίδιο το $f(t)$ δεν θα εμφανίζεται στην εξίσωση. Η εξίσωση τότε για το $h(t)$ θα είναι τότε της μορφής

$$\ddot{h}(t) + \left[B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4}\right]h(t) = 0 \tag{A΄.67}$$

Η τελευταία έχει την μορφή μιας εξίσωσης Schrodinger και το δυναμικό είναι

$$V_{eff} = B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4} \tag{A΄.68}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία για την διαφορική εξίσωση $2-$ας τάξης **;;** προκύπτει το δυναμικό

$$\begin{aligned} V\left(R,t,m,Q,\mu,q,\omega,l\right) = \omega^2 - \frac{R^2}{\Delta}&\left[-\frac{1}{R^2}\left[\mu^2R^2 + l(l+1)\right] + \frac{1}{Q^2-2mR+R^2}\left[\omega R - qQ\right]^2\right] \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{1}{\Delta}\left[2(m-R) + 4R^3H^2 + \frac{R^3\dot{H}}{\sqrt{\frac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\right]\right\} \\ &+ \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\Delta}\left[2(m-R) + 4R^3H^2 + \frac{R^3\dot{H}}{\sqrt{\frac{Q^2-2mR+R^2}{R^2}}}\right]\right]^2 \end{aligned} \tag{A΄.69}$$

Βιβλιογραφία

[1] Sean M. Carroll - *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity* San Fransisco Addison Wesley. 2004

[2] James B. Hartle - *Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity* San Fransisco Addison Wesley. 2003

[3] Richard Brito,Vitor Cardoso,Paolo Pani - *Superradiance* September 7, 2015

[4] G.C. McVittie, Mon. Not. R. Astr. Soc. **93**, 325 (1933).

[5] R. H. Price, *"In an expanding universe, what doesn't expand?,"* gr-qc/0508052.

[6] V. Faraoni and A. Jacques, *"Cosmological expansion and local physics,"* Phys. Rev. D **76**, 063510 (2007) [arXiv:0707.1350 [gr-qc]].

[7] J. D. Bekenstein, *"Extraction of energy and charge from a black hole,"* Phys. Rev. D **7**, 949 (1973).

[8] S. Hod, *"Stability of the extremal Reissner-Nordstroem black hole to charged scalar perturbations,"* Phys. Lett. B **713**, 505 (2012).

[9] S. Hod, *"No-bomb theorem for charged Reissner-Nordstroem black holes,"* Phys. Lett. B **718**, 1489 (2013).

[10] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, *"Quasinormal modes of stars and black holes,"* Living Rev. Rel. **2**, 2 (1999) [gr-qc/9909058].

[11] W. H. Press and S. A. Teukolsky, *"Perturbations of a Rotating Black Hole. II. Dynamical Stability of the Kerr Metric,"* Astrophys. J. **185**, 649 (1973).

[12] C. J. Gao and S. N. Zhang, *"Reissner-Nordstrom metric in the Friedman-Robertson-Walker universe,"* Phys. Lett. B **595**, 28 (2004) [gr-qc/0407045].

[13] V. Faraoni, A. F. Zambrano Moreno and A. Prain, *"The charged McVittie spacetime,"* Phys. Rev. D **89**, no. 10, 103514 (2014) [arXiv:1404.3929 [gr-qc]].

[14] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, *"Charged scalar field instability between the event and cosmological horizons,"* Phys. Rev. D **90**, no. 6, 064048 (2014) [arXiv:1406.0019 [hep-th]].

[15] T. Kolyvaris and E. Papantonopoulos, *"Superradiant Amplification of a Scalar Wave Coupled Kinematically to Curvature Scattered off a Reissner-Nordström Black Hole,"* arXiv:1702.04618 [gr-qc].

[16] V. Cardoso, M. Lemos and M. Marques, *"On the instability of Reissner-Nordstrom black holes in de Sitter backgrounds,"* Phys. Rev. D **80**, 127502 (2009), [arXiv:1001.0019 [gr-qc]].

[17] Z. Zhu, S. J. Zhang, C. E. Pellicer, B. Wang and E. Abdalla, *"Stability of Reissner-Nordström black hole in de Sitter background under charged scalar perturbation,"* Phys. Rev. D **90**, no. 4, 044042 (2014) Addendum: [Phys. Rev. D **90**, no. 4, 049904 (2014)], [arXiv:1405.4931 [hep-th]].