ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Σχετικιστική Κβαντική Πληροφορία

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της Κωνσταντίνας Κολιοπούλου

Ερευνητικός Επιβλέπων:	Ακαδημαϊκός Επιβλέπων:
Χάρης Αναστόπουλος Τμήμα Φυσικής Πανεπιστήμιο Πατρών	Γιώργος Κουτσούμπας Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος, 2019

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον ερευνητικό επιβλέποντα κ. Χάρη Αναστόπουλο, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα. Καθώς και για την καθοδήγηση, τη συνεχή επικοινωνία, την υπομονή του και τις συζητήσεις που κάναμε. Ευχαριστώ πολύ.
Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της τριμελής επιτροπής κ. Θεώδορο Γέραλη καθώς και τον ακαδημαϊκό επιβλέποντα κ. Γιώργο Κουτσούμπα, για την επίβλεψη της εργασίας καθώς επίσης και όλους τους καθηγητές μου στο Φ.Τ.Ε. τόσο για την ευκαιρία να συμμετέχω σε αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα, όσο και για τις γνώσεις που μου χάρισαν μέσα από τα μαθήματά τους.
Πάνω από όλα ευχαριστώ τον Θεό.

Σχετικιστική Κβαντική Πληροφορία

<u>Realism</u> is the idea that Nature exist independently of the human mind: that even if the result of possible measurment does not exist before the act of measuring it, that does not mean it is a creation of the mind of the observer.

—

Νάντια Κολιοπούλου

nadia.koliop@gmail.com

Αθήνα, 7 Οκτωβρίου 2019

Περιεχόμενα

1 Η ιστορία της πληροφορίας

Στην εργασία αυτή μελετούμε προβλήματα ***εντοπισμού*** κβαντικών συστημάτων σε σχετικιστικά περιβάλλοντα.
Μια εντοπισμένη κατάσταση 'ψ' (εντοπισμένο σωμάτιο), είναι μια κατάσταση, στον συγκεκριμένο χρόνο στον οποίο έγινε το "κλικ" από μια μετρητική συσκευή, μια συσκευή ανίχνευσης [1]. Ο εντοπισμός δηλαδή έχει να κάνει με την χρονική στιγμή κατά την οποία έφτασε με εμάς (μέσω του ανιχνευτή) η πληροφορία που "μεταφέρει" η κυματοσυνάρτηση ψ. Χωρίς την έννοια του εντοπισμού δεν μπορούμε να μιλήσουμε για διάδοση της πληροφορίας. Είναι λοιπόν αναγκαίο να ορίσουμε τι σημαίνει πληροφορία, πως εντοπίζεται, που βρίσκεται και πως μεταδίδεται (δηλαδή πόση χάνεται και γιατί).

1.1 Πληροφορία και ο ρόλος της Εντροπίας

(για το μέτρο αβεβαιότητας που κατέχει ένα σύστημα)
"Πρέπει να το ονομάσεις Εντροπία για δύο λόγους:
Πρώτον η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται ήδη στη Θερμοδυναμική με το ίδιο όνομα.
Δεύτερο και πιο σημαντικό, ο περισσότερος κόσμος δεν γνωρίζει τι πραγματικά είναι η Εντροπία και αν χρησιμοποιείς τον όρο Εντροπία σε ένα αντεπιχείρημα θα κερδίζεις πάντα."

John von Neumann αποδιδόμενο στον Shannon

Ορίζουμε τι ακριβώς εννοούμε με τον όρο *πληροφορία.* Η πληροφορία είναι μία διάταξη συνδυασμού διαφοροποιήσεων (ή μοναδική διαφοροποίηση) μέσα από εντροπικό πληροφοριακό εύρος (δυνητικές πληροφοριακές παραλλαγές).
Πως γίνεται όμως η διάδοση, πως μεταφέρεται η πληροφορία; Υπάρχει μια πηγή "δεδομενων" (πομπός), ένας δίαυλος επικοινωνίας, δηλαδή ένα κανάλι που μεταφέρει τα δεδομένα που παρήχθησαν από την πηγή, και τέλος ένας δέκτης (πχ. μια συσκευή ανίχνευσης). Η πληροφορία δεν είναι αναγκαστικά δεδομένο, ούτε απαιτεί γνώση (υπάρχει χωρίς να είναι γνωστή).
Γιατί όμως αναφερόμαστε σε "εντροπικό πληροφοριακό εύρος", και τι σχέση θα μπορούσε να έχει η εντροπία με την πληροφορία.

Για να καταλάβουμε τον τόσο σημαντικό της ρόλο στην μετάδοση της πληροφορίας, ας ξεκινήσουμε από τον βασικό της ορισμό... ο οποίος δεν υπάρχει!
Την εντροπία την αντιλαμβανόμαστε, θα λέγαμε, διαισθητικά και μάλλον κάπως πιο περιφραστικά. Στη Θερμοδυναμική, αντιπροσωπεύει την έννοια μέσω της οποίας μετράται η αταξία. Η μέγιστη τιμή της αταξίας αντικατοπτρίζει την πλήρη αποδιοργάνωση (ομογενοποίηση των πάντων) και ισοδυναμεί με την παύση της ζωής.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η μέγιστη πληροφορία απαιτεί μηδενική εντροπία. Λογικό, αφού όσο πιο "συγκροτημένο" είναι ένα σύστημα (μικρή ροπή προς την αταξία, δηλαδή μικρή εντροπία), με τόσο μεγαλύτερη "ασφάλεια" μπορεί να μεταφέρει την πληροφορία.
Η βασική μέτρηση της πληροφορίας είναι η εντροπία πληροφοριών, η οποία συνήθως εκφράζεται με το

[1] Μην ξεχνάμε, πως μια μέτρηση σε ένα σχετικιστικό σύστημα γίνεται συνήθως με ανιχνευτές, του οποίους περιγράφει η μη-σχετικιστική Κβαντομηχανική!

μέσο αριθμό των bits που χρειάζονται για να αποθηκευθεί ή να μεταβιβαστεί ένα σύμβολο σε ένα μήνυμα. Η εντροπία πληροφοριών ποσοτικοποιεί την αβεβαιότητα που εμπλέκεται στην πρόβλεψη της τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής.Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εντροπία Σάννον (noiseless coding theorem-Claude Shannon).
Ο Κλοντ Σάννον ανέπτυξε τη θεωρία πληροφορίας, η οποία είναι τμήμα των εφαρμοσμένων μαθηματικών και ασχολείται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας. Σκοπός είναι να βρεθούν τα θεμελιώδη όρια της επεξεργασίας σήματος σε εφαρμογές όπως η συμπίεση δεδομένων και η αξιόπιστη αποθήκευση και μεταφορά δεδομένων.[2]

Δεδομένου λοιπόν ότι αναφερόμαστε στη εντροπία ως αταξία ή αβεβαιότητα, ο ορισμός της στην Θεωρία πληροφορίας είναι ανάλογος με αυτόν που διατυπώθηκε παραπάνω.
Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο *"εντροπία πληροφορίας"*, εννοώντας τον μέσο αριθμό με τον οποίο οι πληροφορίες παράγονται από μια στοχαστική[3] πηγή δεδομένων.

Όταν η πηγή δεδομένων έχει χαμηλότερη τιμή πιθανότητας (συμβάντα χαμηλής πιθανότητας), τότε μεταφέρει περισσότερες πληροφορίες από ό,τι όταν τα δεδομένα προέλευσης έχουν υψηλότερη πιθανότητα. Η ποσότητα των πληροφοριών που μεταφέρονται από κάθε συμβάν που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο γίνεται μια τυχαία μεταβλητή της οποίας η εκφρασμένη αξία είναι η εντροπία της πληροφορίας.

1.1.1 Η πληροφορία στην Φυσική

Βλέπουμε λοιπόν ότι η Φυσική σχετίζει την πληροφορία με τις σημαντικές έννοιες της εντροπίας και της ενέργειας. Ένα διάσημο πείραμα που εξερευνά τη σχέση αυτή είναι ο δαίμονας του Μάξγουελ. Το νοητό αυτό πείραμα επινόησε ο Τζέιμς Κλερκ Μάξγουελ με σκοπό την καλύτερη κατανόηση και ενδεχομένως κατάρριψη του δεύτερου θερμοδυναμικού νόμου, ο οποίος απαγορεύει την παραγωγή ενέργειας εκ του μηδενός σε ένα κλειστό σύστημα.

Εκεί φαίνεται πως η πληροφορία σχετίζεται άμεσα με την εντροπία και οι διακυμάνσεις της συνοδεύονται πάντα από μεταβολή της ενέργειας. Πρακτικά, όταν καταστρέφεται πληροφορία, αυξάνεται η εντροπία του συστήματος και παράγεται θερμότητα. Ως εφαρμογή στις λογικές πύλες, μια λογική πύλη «AND» ελευθερώνει περισσότερη θερμική ενέργεια σε σχέση με μια πύλη «NOT», μετά από πράξη, καθώς στην πύλη AND έχουμε καταστροφή πληροφορίας ενώ στην NOT η πληροφορία απλά μετασχηματίζεται. Η φυσική πληροφορία παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των κβαντικών υπολογιστών.

Πιο αναλυτικά :

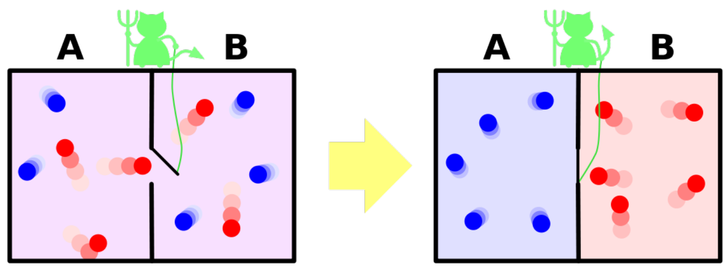
Στη διάταξη του πειράματος ένα ον με ικανότητα να γνωρίζει κάθε στιγμή την ταχύτητα και τη θέση του κάθε μορίου ενός αερίου σε ένα δοχείο, που χωρίζεται σε δύο μέρη, τραβά και ανοίγει μια πόρτα κατά βούληση και αφήνει να περνούν κατά προτίμηση προς τη μία μεριά τα «ψυχρά» (χαμηλής ταχύτητας) και προς την άλλη τα «θερμά» (υψηλής ταχύτητας) μόρια. Η πόρτα αφήνεται να κλείσει αμέσως μετά την επιλεκτική διέλευση του κάθε μορίου και το ελατήριο επιστρέφει πίσω στο δαίμονα την ενέργεια που δαπάνησε για να την ανοίξει. Στο τέλος, χωρίς να έχει δοθεί ενέργεια στο σύστημα, το οποίο θεωρείται απομονωμένο από το περιβάλλον, εμφανίζεται η μία μεριά του κουτιού με θερμό αέριο και η άλλη με ψυχρό και, πιθανόν, και διαφορετική πίεση στο ένα δοχείο από το άλλο. Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της ενέργειας του συστήματος, αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δύο δεξαμενές θερμότητας, αριστερή και δεξιά, που βρίσκονται σε διαφορετική θερμοκρασία, με μια θερμική μηχανή για να παραγάγουμε έργο.

Η ύπαρξη όμως ενός όντος με τέτοια χαρακτηριστικά, ώστε να κάνει όλη αυτή την επεξεργασία πληροφορίας χωρίς σπατάλη ενέργειας, τουλάχιστον τόσης, όσης παράγει με το διαχωρισμό του αερίου σε ζεστό και κρύο, αποδεικνύεται αδύνατη. Το να μπει ένα άτακτο σύστημα (ανακατεμένα μόρια) σε τάξη (τα μόρια οργανωμένα χωροταξικά σύμφωνα με τις ταχύτητές τους), να προκύψει δηλαδή πληροφορία, που περιγρά-

[2] Από τη θεμελίωση της έχει διευρυνθεί ώστε να βρει εφαρμογές σε πολλούς άλλους τομείς, όπως στην επαγωγική στατιστική, στην επεξεργασία φυσικής γλώσσας, στην κρυπτογραφία, στα δίκτυα εκτός των δικτύων επικοινωνίας - όπως και στη νευροβιολογία,στην εξέλιξη και τη λειτουργία μοριακών κωδικών στην οικολογία, στη θερμική φυσική, στους κβαντικούς υπολογιστές, στην ανίχνευση λογοκλοπής και σε άλλες μορφές ανάλυσης δεδομένων.

[3] Ο όρος "στοχαστικός" περιγράφει κάτι το οποίο έχει μετρηθεί/καθοριστεί τυχαία. Στα μαθηματικά, οι όροι στοχαστική διαδικασία και τυχαία διαδικασία θεωρούνται εναλλάξιμες.

φει πιο οργανωμένο σύστημα, από την επεξεργασία των δεδομένων του καθενός μορίου, χρειάζεται δαπάνη ενέργειας. Η αύξηση στην πληροφορία, που προκύπτει από την περιγραφή πιο οργανωμένου συστήματος, ισοδυναμεί με μείωση της εντροπίας, η οποία απαγορεύεται από το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο για κλειστό σύστημα.



Σχήμα 1.1: πηγη: https://el.wikipedia.org/wiki/

Ο δαίμονας θα πρέπει να σπαταλά ενέργεια για να παρακολουθεί και να καταγράφει όλα τα μόρια και τις ταχύτητές τους και να αποφασίζει ποιο είναι αργό και ποιο γρήγορο, καθώς αυτά ανταλλάσσουν συνεχώς ενέργεια μεταξύ τους. Χρειάζεται να στέλνει συνεχώς μηνύματα προς κάθε μόριο, ώστε να του επιστρέφεται κωδικοποιημένη η πληροφορία της θέσης και της ταχύτητάς τους. Την πληροφορία αυτή πρέπει να την αποθηκεύει και να την επεξεργάζεται, ώστε να αποφασίζει πότε να ανοιγοκλείνει την πόρτα, θα πρέπει για παράδειγμα να προσέχει να μην είναι κάποιο «γρήγορο» μόριο κοντά στην πόρτα και με κατεύθυνση προς το «ψυχρό» δοχείο την ώρα που την ανοίγει.

Μια από τις πιο διάσημες απαντήσεις στο πρόβλημα προτάθηκε το 1929 από τον Leó Szilárd και αργότερα από τον Léon Brillouin. Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή, αφού ο δαίμονας και το αέριο αλληλεπιδρούν, πρέπει να θεωρήσουμε πως η συνολική εντροπία του συστήματος είναι ο συνδυασμός της εντροπίας και των δύο. Η αύξηση της εντροπίας του δαίμονα από τη διαδικασία της μέτρησης θα ήταν τελικά μεγαλύτερη από την ελάττωση της εντροπίας του αερίου, οπότε η συνολική εντροπία θα αυξανόταν.

1.2 Η πληροφορία στην Κβαντική Θεωρία

Μέχρι στιγμής έχουμε αναλύσει το τι είναι και πως μεταδίδεται η πληροφορία στη Φυσική και ποιος είναι ο ρόλος της εντροπίας σε αυτό. Σκοπός μας είναι όπως έχει διατυπωθεί και παραπάνω να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε την πληροφορία και την μετάδοσή της σε ένα κβαντικό σχετικιστικό σύστημα. Γι' αυτό θα ήταν ήταν χρήσιμο σε αυτό το σημείο να υπενθυμίσουμε τις βασικές Αρχές τις Κβαντικής Θεωρίας.[2]

Αρχή 1 Σε κάθε φυσικό σύστημα αντιστοιχεί ένας χώρος Χίλμπερτ και μπορούμε να αντιστοιχίζουμε καταστάσεις του συστήματος με διανύσματα του χώρου Χίλμπερτ, *τα καταστατικά διανύσματα*

Αυτό σημαίνει ότι μια κυματοσυνάρτηση, περιέχει πληροφορία (πιθανότητες) για τα πιθανά ενδεχόμενα σε ένα φυσικό σύστημα μια δεδομένη χρονική στιγμή. (Εμπεριέχει την πληροφορία = δίνει την πιθανότητα)

Αρχή 2 Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $\hat{A}$ σε έναν χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}$ αντιστοιχεί σε μια μέτρηση του φυσικού συστήματος. Τα δυνατά αποτελέσματα της μέτρησης αυτής αντιστοιχούν στο φάσμα του $\hat{A}$ και σε κάθε σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων αντιστοιχεί ένας φασματικός προβολέας του $\hat{A}$.

Αρχή 3 Έστω ότι ένα φυσικό σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση που αντιστοιχεί στη μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}$ και γίνεται μέτρηση που αντιστοιχεί στον αυτοσυζυγή τελεστή $\hat{A}$. Τότε η πιθανότητα το αποτέλεσμα να πάρει τιμές εντός συνόλου $\mathcal{U}$ δίνεται από τη σχέση:

$$Prob(\mathcal{U}) = Tr(\hat{\rho}\hat{P}_{\mathcal{U}}).$$

Εισάγεται η μήτρα πυκνότητας ως το θεμελιώδες μαθηματικό αντικείμενο που περιγράφει την κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος, έχει διακριτό φάσμα

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n \hat{P}_n,$$

, κυρτοί συνδυασμοί μητρών πυκνότητας είναι:

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i \hat{\rho}_i$$

Επιπλέον, μια μήτρα μπορεί να είναι καθαρή (δηλαδή να περιέχει ακριβώς την πληροφορία ενός διανύσματος του Χώρου Χίλμπερτ) $\hat{\rho} = |\psi><\psi|$ ή μικτή.

Αρχή 4 Σε κλειστό φυσικό σύστημα και απουσία μετρήσεων, η κβαντική κατάσταση εξελίσσεται κάτω από τη δράση μιας οικογένειας μοναδιαίων τελεστών $e^{-i\hat{H}t}$ ως

$$|\psi(t)>= e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)>,$$

όπου t ο χρόνος και $\hat{H}$ αυτοσυζυγής τελεστής, που καλείται η Χαμιλτόνια του συστήματος.

Αρχή 5 Αν ένα σύστημα περιγράφεται από τη μήτρα πυκνότητας $\hat{\rho}$ και η μέτρηση του τελεστή $\hat{A}$ έδωσε τιμή α_n, μετά την μέτρηση το σύστημα περιγράφεται από την μήτρα πυκνότητας

$$\rho_{\hat{\alpha_n}} = \frac{\hat{P}_n \hat{\rho}_n \hat{P}_n}{Tr(\hat{\rho}\hat{P}_n)}$$

Είναι ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώνουμε την πληροφορία από την πρώτη μέτρηση στην κβαντική κατάσταση προκειμένου να περιγράψουμε τη δεύτερη.

Αρχή 6 Ένα σύνθετο σύστημα περιγράφεται από έναν χώρο Χίλμπερτ $\mathcal{H}$ που είναι το τανυστικό γινόμενο

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes .... \otimes \mathcal{H}_n$$

των χώρων Χίλμπερτ $\mathcal{H}_i$ των υποσυστημάτων του.

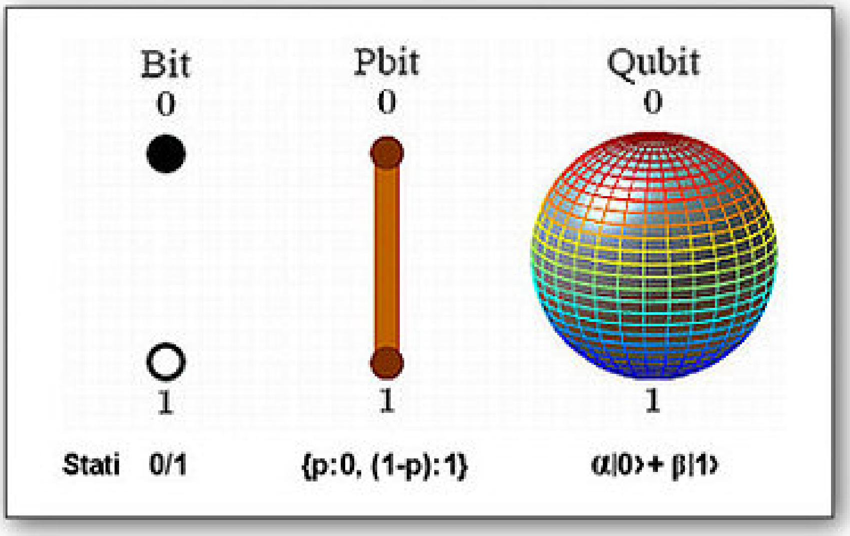
Οι **αρχές 3** και **5** είναι αυτές που μας ενδιαφέρουν περισσότερο στην μελέτη μας καθώς η έννοια της κατάστασης στην Κβαντική Θεωρία αναφέρεται είτε στον τρόπο που έχει προετοιμαστεί ένα σύστημα στο εργαστήριο ή στη φύση προτού γίνουν μετρήσεις σε αυτό. Η πληροφορία για την προετοιμασία, ενσωματώνεται σε ένα μαθηματικό αντικείμενο, τη μήτρα πυκνότητας, από το οποίο λαμβάνουμε προβλέψεις για τα αποτελέσματα των μετρήσεων που κάνουμε, υπό τη μορφή πιθανοτήτων.

Το μικρότερο κβαντικό σύστημα (δύο επιπέδων) το οποίο "φέρει" την πληροφορία στην Κβαντική Θεωρία είναι το qubit ή κβαντικό δυφίο και αποτελεί το κβαντικό ανάλογο της της έννοιας του μπιτ στη θεωρία πληροφορίας. Συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε τις δύο βασικές καταστάσεις $|0>, |1>$, κάθε γραμμικός συνδυασμός στο σώμα των μιγαδικών θα συνθέτει ένα qubit. Έστω a και b μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|a|^2 + |b|^2 = 1$ τότε : $|\psi>= a|0> +b|1>$.

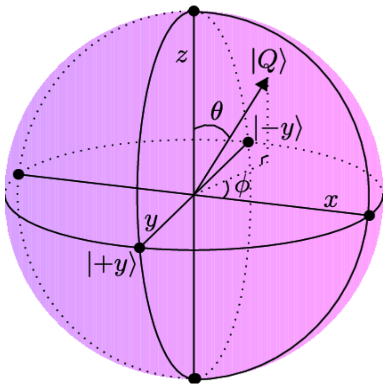
Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα qubit είναι η σφαίρα του Μπλοχ (F. Bloch). Ορίζεται από τις καθαρές καταστάσεις $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ εντός δεδομένου συνόρου. Οι καθαρές καταστάσεις αντιστοιχούν σε σημεία της σφαίρας ενώ οι μικτές σε σημεία του εσωτερικού. Στο κέντρο έχουμε καταστάσεις μέγιστης άγνοιας. Δύο αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχούν σε ορθογώνια καταστατικά διανύσματα.
Σε σφαιρικές συντεταγμένες, με $\theta \in [0.\pi]$ και $\varphi \in [0.2\pi]$ έχουμε:

$$|\psi>= sin\frac{\theta}{2}|0> +cos\frac{\theta}{2}|1> .$$

Φυσικά θα μπορούσαμε να έχουμε ένα ζεύγος (η παραπάνω) από συζευγμένα qubits $|00>, |01>, |10>, |11>$. Οι καταστάσεις αυτές λέγονται μέγιστου εναγκαλισμού καθώς προσδιορίζουν τις καταστάσεις μέγιστης μίξης(δηλαδή μεγαλύτερης άγνοιας) για μια ανηγμένη μήτρα πυκνότητας.



Σχήμα 1.2: πηγή : https://www.scienzenoetiche.it/synthesis



Σχήμα 1.3: πηγή: https://www.researchgate.net

Σε αναλογία με το απλό bit, το qubit παίρνει τιμές ″0″ και ″1″. Η βασική διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι το δεύτερο λαμβάνει μια τιμή πιθανοκρατικά, κατά την ανάγνωσή του. Δηλαδή οι τιμές 0 και 1 βρίσκονται σε κατάσταση επαλληλίας, και το ποιά θα πάρουμε εξαρτάται από την ″φύση″ της κυματοσυνάρτησης που εντοπίζουμε. Είναι δηλαδή μια απόφαση ″της τελευταίας στιγμής″. Καθώς θα γίνει η επιλογή της μιας από τις δύο ″καταστρέφεται″ η πιθανότητα για την άλλη τιμή. Σε ένα τέτοιο σύστημα η πληροφορία μεταδίδεται μέσω κβαντικών καναλιών, η ″μετάφρασή″ της από τον πομπό στον δέκτη γίνεται με την χρήση κάποιου κωδικού ″κλειδιού″, αφήνοντας σε εμάς άγνωστο το τι έγινε στο ενδιάμεσο. Δηλαδή πως ακριβώς εξελίχθηκε η μετάδοση της πληροφορίας. Τα παραπάνω αποτελούν αντικείμενο μελέτης στην Κβαντική Κρυπτογραφία.

Εντροπία στην Κβαντική

Όπως είδαμε και παραπάνω, είναι καθοριστικής σημασίας ο ρόλος της Εντροπίας στην μετάδοση της πληροφορίας. Το ίδιο συμβαίνει και σε ένα κβαντικό σύστημα. Είναι χρήσιμο να μπορούμε να προσδιορίσουμε πόσο ″μικτή″ είναι μια μήτρα πυκνότητας, δηλαδή πόσο ″ασφαλής φορέας″ της πληροφορίας είναι. Πάντα στο μέτρο της αταξίας ή αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει ένα σύστημα. Αφού λοιπόν η εντροπία είναι συνδεδεμένη με την πληροφορία και η πληροφορία εμπεριέχεται στην μήτρα πυκνότητας

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n |n >< n|$$

ορίζουμε ως εντροπία von Neumann:

$$S[\hat{\rho}] = -\sum_n w_n log w_n$$

ή ισοδύναμα

$$S[\hat{\rho}] = -Tr(\hat{\rho} log \hat{\rho})$$

Όπως και η εντροπία Shannon έτσι και η εντροπία von Neumann αυξάνει καθώς αυξάνει στατιστικά η μίξη. Μια καθαρή κατάσταση έχει μηδενική εντροπία. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε σε αυτό το σημείο ότι δεν ταυτίζονται με την εντροπία της Θερμοδυναμικής. Είναι ποσότητες που αφορούν την πληροφορία που περιέχεται ενός κβαντικών καταστάσεων και εν γένει δεν ικανοποιούν κάποιον κανόνα όπως ο $2^{ος}$ νόμος της Θερμοδυναμικής. Μόνο σε πολύ συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορεί η εντροπία von Neumann συγκεκριμένων κβαντικών καταστάσεων σε συστήματα με μεγάλο βαθμό ελευθερίας να ταυτιστεί με τη θερμοδυναμική ισορροπία.

1.3 Σχετικιστική Κβαντική Πληροφορία

Για να προχωρήσουμε στον συνδυασμό Σχετικότητας και Κβαντικής, έτσι ώστε να έχουμε μια Σχετικιστική Κβαντική Θεωρία, θα πρέπει οι αρχές που διέπουν τις δύο αυτές θεωρίες να πρέπει να συνυπάρχουν χωρίς να παραβιάζεται καμία από αυτές. Οι δύο βασικές Αρχές της Σχετικότητας, εδώ μιλάμε για Ειδική, αν συμπεριλάβουμε και την Βαρύτητα τα πράγματα θα γίνουν ακόμη πιο πολύπλοκα, είναι οι εξής:

1) **Συναλλοιωτότητα**. Θέλουμε τα συστήματα να μένουν αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς Λόρεντς. Δηλαδή καθώς το σύστημά μας αλλάζει οι φυσικές μας μετρήσεις θέλουμε να είναι ίδιες.

2) **Αιτιότητα**. Απαγορεύεται αξιωματικά να μεταδοθεί πληροφορία με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του φωτός.

Φαίνεται πως αυτή είναι μια πολύ δύσκολη δουλειά τελικά. Ας το δούμε αναλυτικά.

Παραβίαση Συναλλοιωτότητας

Στην Σχετικότητα η θεμελιώδης συμμετρία του χωροχρόνου (αγνοώντας τα βαρυτικά φαινόμενα) είναι η ομάδα Poincare. Την αναπαράσταση Poincare συνθέτουν μη-αναγώγιμες καταστάσεις και έχει τους εξής γεννήτορες:

- τρεις γεννήτορες K_i που αντιστοιχούν σε ωθήσεις (boost),
- τρεις γεννήτορες J_i που αντιστοιχούν σε περιστροφές στο χώρο (rotation),
- τρεις γεννήτορες P_i που αντιστοιχούν σε μετατόπιση στο χώρο,
- ένα γεννήτορα $\mathrm{H} = P_0$ που αντιστοιχεί σε μετατόπιση στο χρόνο.

Η συναλλοιωτότητα κατά τις ωθήσεις και περιστροφές σε ένα σχετικιστικό σύστημα επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μοναδιαίων και αντιμοναδιαίων τελεστών. Χρησιμοποιούμε αυτούς τους τελεστές, διότι είναι οι μόνοι που αφήνουν αναλλοίωτη τη δομή του εσωτερικού γινομένου.

- Έστω μοναδιαία αναπαράσταση $U\hat{(g)}$ μιας ομάδας G σε ένα χώρο Χίλμπερτ H. Η αναπαράσταση $U\hat{(g)}$ καλείται αναγώγιμη, αν

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$

και σε κάθε υπόχωρο $\mathcal{H}_{1,2}$ ορίζεται μια μοναδιαία αναπαράσταση της G.

Μια μη- αναγώγιμη μοναδιαία αναπαράσταση δεν μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερες και περιγράφει το μικρότερο δυνατό κβαντικό σύστημα που φέρει συμμετρία που αντιστοιχεί στην G, το άτομο συμμετρίας.

- Τελεστής Καζιμίρ (Casimir) μιας μοναδιαίας αναπαράστασης $U\hat{(g)}$ της ομάδας G καλείται κάθε αυτοσυζηγής τελεστής $\hat{\mathrm{K}}$ που ικανοποιεί τη σχέση $[\hat{A}, U\hat{(g)}] = 0$ για κάθε $g \in G$ και δεν είναι πολλαπλάσιο της μονάδας.

Αν η τιμή του Casimir μένει σταθερή έχουμε μη-αναγώγιμη αναπαράσταση. Οι μη- αναγώγιμες μοναδιαίες αναπαραστάσεις της ομάδας Poincare αντιστοιχούν σε σωματίδια με μάζα m και σπιν s.

Σε ένα σχετικιστικό σύστημα ορμή και σπιν είναι συζευγμένα. Σε αυτό το σημείο, όταν μπαίνει και η Κβαντική στο παιχνίδι έχουμε πρόβλημα. Αν εξετάσουμε ένα πιο σύνθετο κβαντικό σύστημα ή ακόμη ένα ηλεκτρόνιο ή μια δέσμη ηλεκτρονίων που υφίσταται ελαστική σκέδαση και η ανίχνευση του αποτελέσματος της σκέδασης γίνεται από έναν σχετικιστικό παρατηρητή, θα δούμε ότι ακόμα και αν η αρχική κατάσταση είναι ένα ευθύ άθροισμα μιας συνάρτησης της ορμής και μιας συνάρτησης του spin, η μετασχηματισμένη κατάσταση δεν είναι ευθύ άθροισμα. Το σπιν είναι ενδογενής ιδιότητα της ύλης και η σύζευξή του με την ορμή δεν είναι ο γνωστός τύπος κβαντικής σύζευξης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κβαντική επικοινωνία, ακριβώς επειδή και οι δύο βαθμοί ελευθερίας ανήκουν στο ίδιο σωμάτιο, και όχι σε ξεχωριστά συστήματα που θα μπορούσαν να διαχωριστούν ευρέως. Ακριβώς γι' αυτό είναι πολύ δύσκολο να διατηρηθεί αυτή η σύζευξη.
Οπότε, ανεξάρτητα από το αν εμείς κάναμε ”μαθηματικά” όλα τα βήματα σωστά (μοναδιαίοι τελεστές). Δεν γίνεται να διατηρηθεί η κβαντική δομή του εσωτερικού γινομένου.

Ένας αστέρας περιστρέφεται γύρω από την εαυτό του δίνοντας μάχη με την βαρύτητα προκειμένου να κρατηθεί στην ζωή. Όταν έχει κάψει και τα πιο βαριά στοιχεία του πια Fe, η βαρύτητα αρχίζει να κερδίζει. Αν παραλληλίσουμε με ένα άτομο και δεδομένου ότι το σπιν είναι ενδογενής ιδιότητα της ύλης ίσως τελικά να μην πρέπει να αγνοήσουμε την Βαρύτητα σε αυτήν την προσέγγιση. Αυτό όμως είναι κάτι με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

Στην θεωρία Κβαντικής Πληροφορίας, το σημαντικό ζήτημα δεν είναι στις ”ασυμπτωτικές ιδιότητες” αλλά στον τρόπο με τον οποίο οι διαφορετικοί παρατηρητές αντιλαμβάνονται την κβαντική σύζευξη(entaglement). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι εδώ χαλάει η γραμμικότητα της ”μετάδοσης της πληροφορίας” από το ένα σύστημα στο άλλο και έτσι δεν μπορούμε να μιλάμε για συναλλοίωτες αναπαραστάσεις. Παραβιάζεται η πρώτη αρχή.

Παραβίαση Αιτιότητας

Αιτιότητα είναι η χρονική πρόταξη του αιτίου σε σχέση με το αποτέλεσμα, κατά την εξέλιξη ενός φυσικού φαινόμενου.

Συγκεκριμένα μιλάμε για την αιτιότητα του Einstein (Einstein causality), σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει γνωστός τρόπος να περιγράψουμε αλληλεπιδράσεις σωματιδίων (σχετικιστικά), οι οποίες να μην οδηγούν σε υπερφωτεινά σήματα και χωρίς να χρησιμοποιήσουμε πεδίο.
Τα πεδία αυτά ορίζονται από μια Χαμιλτονιανή ή μια Λανγκρατζιανή:

$$H = \ d^3x\mathcal{H}$$

και

$$L = \ d^3x\mathcal{L}$$

αντίστοιχα. Όπου $\mathcal{H}$ και $\mathcal{L}$ είναι πυκνότητες συναρτησιακών πεδίων.

Εφόσον έχουμε πεδία απαιτείται η χρήση **μικροαιτιότητας**, η οποία είναι ουσιαστικά μια συνθήκη τοπικής μεταθεσιμότητας.
Στα μαθηματικά οι μεταθέτες και αντιμεταθέτες ανάμεσα σε παρατηρήσιμα μεγέθη υπολογίζουν την σχέση που έχουν μεταξύ τους αυτά τα μεγέθη (στην περίπτωσή μας πεδία). Οι μεταθέτες χρησιμοποιούνται για τα μποζόνια (πεδία μποζονίων), οριοθετούν την ενέργεια στην εξίσωση Klein-Gordon και ισχύει

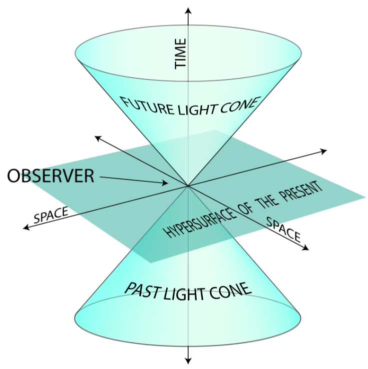
$$[\mathrm{A},\mathrm{B}] = 0 \Rightarrow \mathrm{AB} - \mathrm{BA} = 0.$$

Σε αντίθεση οι αντιμεταθέτες χρησιμοποιούνται στα φερμιόνια (φερμιονικά πεδία) και οριοθετούν την ενέργεια στην εξίσωση Dirac. Για αυτούς ισχύει:

$$\{\mathrm{A},\mathrm{B}\} = 0 \Rightarrow \mathrm{AB} + \mathrm{BA} = 0.$$

Πιο συγκεκριμένα, όταν οι μεταθέτες μετατίθενται, σημαίνει ότι διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα. Αν το δούμε με διαδρομές, παίρνοντας την απειροελάχιστη διαδρομή από το σημείο (όπου το ψ είναι μια εντοπισμένη κατάσταση) ψ στο σημείο $\mathrm{A}\psi$ και ύστερα στο σημείο $\mathrm{BA}\psi$ και τη διαδρομή από το ψ στο $\mathrm{B}\psi$ στο $\mathrm{AB}\psi$ τότε θα πρέπει οι τελεστές να μετατίθενται, τα δύο διαδρομή θα πρέπει να συναντηθούν στην ίδια τελική κατάσταση (σημείο). Αν όχι η τιμή της διαφοράς τους μας δείχνει πως αυτά σχετίζονται μεταξύ τους. Το ίδιο εξυπηρετεί και ο αντιμεταθέτης στα φερμιόνια.

Είμαστε εξοικειωμένοι με τον κώνο φωτός του χωροχρόνου Minkowski. Ως γνωστόν σε αυτό τον χώρο υπάρχουν οι συνήθεις τρεις χωρικές διαστάσεις οι οποίες συνδυάζονται με την διάσταση του χρόνου και σχηματίζουν μια τετραδιάστατη τοπολογική πολλαπλότητα για την αναπαράσταση του χωροχρόνου.



Σχήμα 1.4: πηγή: K. Aainsqatsi at en.wikipediaOriginal

Όπως βλέπουμε ότι κινείται πάνω στην γραμμή του κώνου κινείται με την ταχύτητα του φωτός (φωτοειδή σήματα- lightlike), εμείς βρισκόμαστε στο κέντρο (παρόν) ως παρατηρητές, και ότι εκτείνεται στον χώρο εκτός του κώνου ξεφεύγει από το πεδίο παρατήρησής μας δηλαδή είναι (χωροειδή σήματα- spacelike). Από το σχήμα είναι προφανής η δεύτερη αρχή κατά την οποία το φως αποτελεί τον φυσικό μας περιορισμό για οποιαδήποτε παρατήρηση πέραν αυτού.

Σε ένα σχετικιστικό σύστημα, ότι είναι εκτός του παρελθόντως κώνου φωτός του παρατηρητή, είναι άγνωστο σε αυτόν και δεν μπορεί να επηρεάσει το σύστημά του (κάνοντας κάποια μέτρηση σε αυτό). Είναι λογικό ένα σωμάτιο που εκπέμπεται από ένα εξωσύστημα, το οποίο βρίσκεται έξω από τον παρελθόντα κώνο να μην μπορεί να διεισδύσει στον μέλλοντα.

Όταν λοιπόν εξετάζουμε δύο συστήματα(δύο ξεχωριστοί κώνοι φωτός) χωροειδώς απομακρυσμένα η σειρά των γεγονότων αλλάζει σύμφωνα με το πιο σύστημα θεωρούμε πρώτο (σε ποιό κάνουμε πρώτα μέτρηση). Στο σημείο αυτό παραβιάζεται μόνο η συνθήκη συναλλοιωτότητας, καθώς αλλάζει η ιστορία της πληροφορίας αφού παραβιάζεται η 5^{η} αρχή της Κβαντοχημανικής , αφού οι μήτρες πυκνότητας δεν αποτελούν φυσικά μεγέθη, αλλά μαθηματικά εργαλεία στις πιθανότητες που εκφράζουν αυτά τα μεγέθη. Όπως επίσης και η αιτιότητα γιατί ανάλογα με το σύστημα ένα γενονός που θεωρείται ύστερο γίνεται πρώιμο ενώ αν αλλάξουμε σημείο αναφοράς (σύστημα) αυτό αλλάζει και μαζί με αυτό χάνεται η σχέση αιτίας-αιτιατού.

Η ροή της εξέλιξης ενός γεγονότος (δηλαδή η ιστορία της πληροφορίας) δεν θα πρέπει να αλλάζει από σύστημα, αν αυτό συμβαίνει παραβιάζονται και οι δύο αρχές της Σχετικότητας. Δεν θα ήταν λογικό να πάρουμε το αποτέλεσμα μιας μέτρησης πριν καν αυτή γίνει!

Σε κάθε περίπτωση είναι πολύ δύσκολο να προσδιορίσουμε την εξέλιξη των γεγονότων ή τι μεσολάβησε στην μετάδοση της πληροφορίας από το ένα σύστημα στο άλλο.
Για παράδειγμα στο EPR υπάρχει ένας μετασχηματισμός Lorentz που συνδέει τις αρχικές μήτρες ρ_0 και $\rho_0^{'}$ (μεταξύ τους) πριν μεσολαβήσει η μέτρηση, όπως και ένας μετασχηματισμός Lorentz κατά τα ίδια για τις τελικές ρ_f και $\rho_f^{'}$. Δεν υπάρχει όμως μετασχηματισμός που να συνδέει τις καταστάσεις σε ενδιάμεσους χρόνους. Ανάμεσα στις δύο μετρήσεις τίποτα δεν συμβαίνει στην πραγματικό κόσμο. Δηλαδή δεν μπορούμε να ξέρουμε πως έχει μεταδοθεί η πληροφορία από την αρχική κατάσταση (πηγή) στην τελική (ανίχνευση). Δεν μπορούμε να ξέρουμε πως μεταδίδεται η πληροφορία ενός κβαντικού συστήματος (σε σύζευξη) σχετικιστικά. Δημιουργούνται προβλήματα κβαντικής μη-τοπικότητας στα οποία η μόνη προφανή εξήγηση είναι η μετάδοση της πληροφορίας με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε δύο θεωρήματα που απαντούν λεπτομερώς στο ερώτημα αν υπάρχουν υπερφωτεινά σήματα. Το θεώρημα του Malament αφενός και το θεώρημα του Hegerfeldt αφετέρου. Σεβόμενοι τις αρχές και των δύο θεωριών, προσπαθούν να τις συμφιλιώσουν μελετώντας την συμπεριφορά ενός σωματιδίου που προσπαθεί να κινηθεί χωροειδώς. Η προσέγγιση αυτή καθιστά αναγκαία, για λόγους που θα μελετήσουμε παρακάτω, την χρήση Θεωρίας Πεδίου. Ακόμη και τότε όμως δημιουργούνται κενά, τα οποία σβήνουν κάθε διάθεση αμφιβολίας της πληρότητας της Κβαντικής όπως επίσης και κάθε διάθεση επαναπροσδιορισμού της Σχετικότητας.

2 Θεώρημα Malament

Στο θεώρημα του Malament φαίνεται ότι υπάρχει μια θεμελιώδης σύγκρουση των απαιτήσεων της σχετικιστικής αιτιότητας και των απαιτήσεων μια θεωρίας εντοπισμένων σωματιδίων. Δεν μπορεί να υπάρξει μια σχετικιστική και ταυτόχρονα κβαντομηχανική θεωρία εντοπισμένων σωματιδίων αλλά μπορούμε να συμφιλιώσουμε αυτές τις δυο θεωρίες αυστηρά και μόνο στα πλαίσια μιας θεωρίας πεδίου. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ένα σωματίδιο, κατά την εκτέλεση κάποιου πειράματος ανίχνευσης, δεν θα μπορούσε να ανιχνευτεί σε δύο διαφορετικά σημεία (ταυτόχρονα) , πόσο μάλλον όταν αυτά τα σημεία είναι ″χωροειδώς″ απομακρυσμένα. Ως εκ τούτου η μόνη σχετικιστική κβαντική θεωρία είναι μια θεωρία πεδίων. Η πεποίθηση αυτή έχει λάβει μεγάλη υποστήριξη τα τελευταία χρόνια με τη μορφή αυστηρών ″θεωρημάτων μη-ύπαρξης″ (no-go theorem) [1] συγκεκριμένα από τον Malament (1996)[3] και από τον Hegerfeldt (1998) [10].

Είναι προφανές πως είναι πολύ δύσκολο να παρακολουθήσουμε ένα θεώρημα μη-ύπαρξης από την σκοπιά της Σωματιδιακής Φυσικής. Προκειμένου λοιπόν να συμφιλιώσουμε αυτές τις δύο θεωρίες (Σχετικότητα και Κβαντική), θα πρέπει να έχουμε τα σωματίδια στο μυαλό μας ως τις ιδιότητες και τις αλληλεπιδράσεις των κβαντισμένων πεδίων. Ο μόνος τρόπος λοιπόν να εξηγήσουμε τη διάδοση των υπερφωτεινών σημάτων είναι στα πλαίσια πεδίου, καθώς το σωματίδιο όπως είπαμε και παραπάνω είναι αυστηρά εντοπισμένο και είναι αδύνατο να διαδοθεί ραγδαία. Η μετάδοση τέτοιων σημάτων, σε περίπτωση που συμβαίνει, θα πρέπει να αποδοθεί εξολοκλήρου στον κυματικό χαρακτήρα της ύλης. Τόσο το θεώρημα του Malament όσο και το θεώρημα του Hegerfeldt μας αποδεικνύουν το γιατί ακόμα και από την ″πεδιακή″ σκοπιά, μια τέτοια μετάδοση δεν είναι εφικτή.

2.1 Θεώρημα

Η θέση του Malament, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω είναι ξεκάθαρη και σαφής ως προς το ότι δεν μπορεί να υπάρξει συνδυασμός Σχετικότητας και Κβαντικής για ένα αυστηρά ***εντοπισμένο*** σωμάτιο. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε την διατύπωση του θεωρήματος Malament, και όλες τις τεχνικές λεπτομέρειες που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε την θέση αυτή.

Είναι πολύ σημαντικό να προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τον χώρο στον οποίο θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε το σωματίδιο. Έχουμε δύο επιλογές, ο ένας είναι ο χώρος Minkowski δηλαδή ο $\mathscr{R}^4$ χωροχρόνος. Ενώ η δεύτερη επιλογή μας (την οποία κανει ο Malament), είναι ένας υπόχωρος του Minkowski (π.χ. $\mathscr{R}^3$) σε σχέση με κάποιον αδρανειακό παρατηρητή. Η επιλογή αυτή γίνεται από τον ίδιο προκειμένου να είναι συνεπής τόσο σε σχετικιστικό όσο και σε κλασικό πλαίσιο. Αυτό το σημείο αποτελεί ανοιχτό θέμα, καθώς ανοίγει μια συζήτηση που αμφισβητεί το αποτέλεσμα του θεωρήματος (θα αναφερθούμε λεπτομερώς σε επόμενη ενότητα).

Έστω **M** για τον χωρόχρονο Minkowski και **S** μια οικογένεια παράλληλων χωροειδών υπερπεπίπεδων (hyperplane)[2] που καλύπτουν τον **M**. Θα εργαστούμε πάνω σε αυτήν την οικογένεια. Στο υπερεπίπεδο S θεωρούμε ένα διάστημα, πεπερασμένου όγκου και ανοιχτού συνόρου. (Είναι σημαντικό να περιορίσουμε την

[1]Στη Θεωρητική Φυσική ένα θεώρημα μη-ύπαρξης ισχυρίζεται ότι μια δεδομένη κατάσταση είναι ″φυσικά″ επιτρεπτή. Συγκεκριμένα ο όρος περιγαφει αποτελέσματα στην Κβντομηχανική όπως το θεώρημα Bell και το θεώρημα Kochen-Specker που περιορίζουν τους επιτρεπόμενος τύπους θεωριών κρυφών μεταβλητών, που προσπαθούν να εξηγήσουν την φαινόμενη τυχαιότητα της Κβαντικής Μηχανικής ως ένα ντετερμινιστικό μοντέλο με κρυφές καταστάσεις.

[2] Το χωροειδές υπερεπίπεδο είναι ένας τρισδιάστατος υπόχωρος του Minkowski, στον οποίο όλα τα σημεία είναι μεταξύ τους χωροειδώς απομακρυσμένα. Ένα τέτοιο επίπεδο ορίζεται από σημεία που συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή.

προσοχή μας σε ανοιχτά σύνολα, αρκετά μεγάλα.) [APENDIX A]

Για να είναι η αναπαράσταση ενός εντοπισμένου συστήματος-σωματιδίου πλήρης και συνεπής με τη Σχετικιστική και Κβαντική θεωρία, θα πρέπει να περιλαμβάνει τις εξής παραδοχές:

α′ Χρειάζεται ένας χώρος Χίλμπερτ $\mathcal{H}$, στον οποίο οι καθαρές καταστάσεις του κβαντομηχανικού συστήματος αναπαρίστανται ως ακτίνες.

β′ Σε κάθε υπόχωρο Δ (ο οποίος είναι ένα ανοιχτό σύνολο πεπερασμένου όγκου) του χώρου $\mathcal{H}$ θα πρέπει να αντιστοιχεί ένας προβολικός τελεστής P_Δ.

Ο P_Δ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα το σωματίδιο να εντοπιστεί στο Δ ή από πιο λειτουργική άποψη, αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ότι μια μέτρηση θέσης είναι βέβαιο ότι θα βρει το σωματίδιο εντός του Δ.

γ′ Θα πρέπει να υπάρχει μια ισχυρά συνεχής (strongly continuous)[3] μοναδιαία αναπαράσταση $\vec{a} \mapsto U(\vec{a})$ στον χώρο $\mathcal{H}$ μιας ομάδας μετατόπισης του **M**.

Ισχυρά συνεχής εδώ σημαίνει ότι για κάθε $\psi \in \mathcal{H}$, θα πρέπει $< \psi, U(\vec{a})\psi > \to \mathbb{1}$ αφού $\vec{a} \to 0$ και είναι ισοδύναμο από το θεώρημα του Stone[APPENDIX A] με την παραδοχή ότι υπάρχει για το σωματίδιο παρατηρήσιμη ενέργεια και ορμή.

> Αν ισχύουν οι παραδοχές αυτές τότε η τριπλέτα ($\mathcal{H}, \Delta \mapsto \mathrm{P}_\Delta, \vec{a} \mapsto U(\vec{a})$) αποτελεί ένα σύστημα εντοπισμού στον χώρο Minkowski.

Ωστόσο υπάρχουν τέσσερις σοβαροί περιορισμοί ή ακόμα καλύτερα συνθήκες που δεν θα έπρεπε να παραβιαστούν επ ουδενί σε ένα εντοπισμένο σύστημα (σχετικιστικό ή μη) το οποίο περιγράφει ένα συγκεκριμένο σωμάτιο.

1) **Συνθήκη Συναλλοιωτότητας Μετατόπισης (Translation Covariance Condition)**[4]

Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ στον M και κάθε διάστημα Δ θα ισχύει :

$$\mathrm{P}_{\Delta+\alpha} = U(\alpha)\mathrm{P}_\Delta U(-\alpha)$$

(όπου $\Delta + \alpha$ προκύπτει από τη μετάθεση που υφίσταται το Δ από το $\vec{\alpha}$)

Συγκεκριμένα το $\vec{\alpha}$ ως ένα χωροειδές διάνυσμα μεταθέτει το Δ πάνω σε συγκεκριμένη υπερεπιφάνεια (οπότε η μετατόπιση είναι κυρίως χωρική). Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:
Όπως έχουμε πει και παραπάνω ο P_Δ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα το σωματίδιο να ανιχνευτεί στο Δ (σε δεδομένο πείραμα). Επομένως ύστερα από τη "δράση" του $\vec{\alpha}$, μπορούμε να φανταστούμε την διεξαγωγή αυτού του πειράματος όχι στην αρχική τοποθεσία αλλά σε μια άλλη που έχει μετατοπιστεί από την πρώτη από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Είναι λοιπόν σαφές ότι ο προβολικός τελεστής $\mathrm{P}_{\Delta+\alpha}$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα (στο συγκεκριμένο πείραμα), το σωματίδιο να ανιχνευτεί στην περιοχή $\Delta + \alpha$. Η αναλλοιώτητα κατά την μετάθεση μας δίνει μια σχέση ανάμεσα στις συμμετρίες του χωροχρόνου Minkowski και του κβαντικού συστήματος.

Συγκεκριμένα, αν μετατοπίσουμε/μεταφέρουμε το σωματίδιο κατά $\vec{\alpha}$, η αρχική κυματοσυνάρτηση θα γίνει ψ_α. Θα πρέπει να ισχύει

$$< \psi, \mathrm{P}_\Delta \psi > = < \psi_\alpha, \mathrm{P}_{\Delta+\alpha}\psi_\alpha >$$

(αρχική και τελική κατάσταση ίδιες λόγω συναλλοιώτητας). Ωστόσο από το θεώρημα του Βίγκνερ η συμμετρία εξασφαλίζεται/υλοποιείται από κάποιο μοναδιαίο τελεστή $U(\vec{\alpha})$. Και ως εκ τούτου θα ισχύει,

$$U(\alpha)\psi = \psi_\alpha$$

[3]Ο όρος ισχυρά χρησιμοποιείται στη συναρτησιακή ανάλυση και είναι ο ίδιος με αυτόν της απλής συνέχειας, πχ $f(x) = x^2$.
[4]Θυμίζουμε ότι η συναλλοιώτητα σημαίνει ένα διάνυσμα να μετασχηματίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο κάτω από αλλαγές βάσης.

και

$$U(\alpha)\mathrm{P}_{\Delta}U(\alpha)^{*} = \mathrm{P}_{\Delta+\alpha}$$

Το θεώρημα του Βίγκνερ

Το θεώρημα καθορίζει πως οι φυσικές συμμετρίες όπως οι περιστροφές, οι μετασχηματισμοί και η CPT εκπροσωπούνται στο χώρο Hilbert των καταστάσεων. Σύμφωνα με το θεώρημα, οποιοσδήποτε μετασχηματισμός συμμετρίας του χώρου των ακτίνων αντιπροσωπεύεται από μια γραμμική και ενιαία ή αντιγραμμική και αντιμοναδιαία μεταμόρφωση του χώρου Hilbert. Η αντιπροσώπευση μιας ομάδας συμμετρίας στον χώρο Hilbert είναι είτε μια απλή αναπαράσταση είτε μια προβολική αναπαράσταση.

Θεώρημα: Έστω $\mathcal{H}$ μιγαδικός χώρος Χίλμπερτ με εσωτερικό γινόμενο $(\,,\,)$. Έστω $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ μια επί συνάρτηση που ικανοποιεί την σχέση

$$|(S(\varphi), S(\psi))| = |(\varphi, \psi)|$$

για κάθε $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Τότε η συνάρτηση S είναι της μορφής $S(\psi) = e^{i\varphi}\widehat{U}\psi$, όπου $e^{i\varphi}$ μια μιγαδική έκφραση και $\widehat{U}$ ένας μοναδιαίος ή αντιμοναδιαίος τελεστής.

Το αξιοσημείωτο είναι ότι δεν είναι ανάγκη να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση S είναι γραμμική ή αντιγραμμική, αλλά αυτό προκύπτει ως συνέπεια του θεωρήματος.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Βίγκνερ, δεν μπορούμε να συνδυάσουμε αποτελέσματα από διαφορετικά πειράματα στο επίπεδο των κατανομών πιθανοτήτων.

2) **Συνθήκη ενέργειας**

Για όλα τα μοναδιαία "χρονοειδή" (timelike) διανύσματα $\vec{\alpha}$ (με κατεύθυνση προς το μέλλον) του χωροχρόνου M, θα πρέπει να υπάρχει ένας μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Χαμιλτονιανής $\mathrm{H}(\vec{\alpha})$ τέτοιος ώστε:

$$U(t\vec{a}) = e^{-it\mathrm{H}(\vec{\alpha})}$$

το φάσμα του οποίου θα πρέπει να είναι φραγμένο από κάτω. Συγκεκριμένα θα πρέπει να υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $k(a)$ τέτοιος ώστε:

$$(\varphi, \mathrm{H}(\varphi)) \geqslant k(a)$$

για κάθε διάνυσμα φ στον χώρο που ορίζεται από το $\mathrm{H}(\vec{\alpha})$.

Η συνθήκη του κατώτατου ορίου ενέργειας, ισχυρίζεται ότι σε σχέση με κάποιον αδρανειακού παρατηρητή, το σωματίδιο θα πρέπει να έχει την χαμηλότερη δυνατή ενεργειακή κατάσταση. Αν αυτό δεν ίσχυε το σωματίδιο θα εξυπηρετούσε ως μια ανεξάντλητη πηγή ενέργειας επ' άπειρο, καθώς θα έπεφτε διαρκώς κάτω από κατώτερες και κατώτερες ενεργειακές καταστάσεις, χωρίς αυτό να σταματά ποτέ.

3) **Συνθήκη εντοπισμού (Ισχυρή Αιτιότητα)**

Έστω Δ_1 και Δ_2 είναι δύο περιοχές ξένες μεταξύ τους ή αλλιώς αμοιβαίως αποκλειόμενες (disjoint), δηλαδή περιοχές που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο (θα πρέπει να ισχύει με αυστηρότητα η ύπαρξη του ενός ή του άλλου). Και έστω ότι τα Δ_1, Δ_2 βρίσκονται στο ίδιο υπερεπίπεδο. Τότε :

$P_{\Delta_1}\mathrm{P}_{\Delta_2} = 0$, όπου το 0 είναι μηδενικός τελεστής στον χώρο $\mathcal{H}$.

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας επιβάλλει ένα πεπερασμένο ανώτερο όριο στην ταχύτητα με την οποία (ανιχνεύσιμες) φυσικές διαταραχές μπορούν να διαδοθούν μέσα σε αυτό το διάστημα. Η συνθήκη ισχυρής αιτιότητας αποκλείει την άπειρη ταχύτητα αλλά όχι μια οσοδήποτε μεγάλη αλλά πεπερασμένη ταχύτητα. Αφού τα Δ_1 και Δ_2 είναι ξένα μεταξύ τότε θα πρέπει να υπάρχει ένα κατώτερο όριο στο χρονικό διάστημα που θα χρειαστεί το εν λόγω σωμάτιο για να ταξιδέψει από το Δ_1 στο Δ_2. Σε αντίθεση με το σωματίδιο, ένα πεδίο μπορεί να εξαπλώνεται σε όλο το διάστημα και έτσι μπορεί, κατά μια έννοια, να βρίσκεται σε δύο (διαφορετικές) θέσεις ταυτόχρονα.

Έτσι για κάθε χρονοειδή μετάθεση $\vec{a}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε κατάσταση ψ, αν

$$< \psi, \mathrm{P}_{\Delta_1}\psi >= 1$$

τότε

$$< \psi, \mathrm{P}_{\Delta_2+\vec{a}}\psi >= 0$$

όταν $0 \leq t < \varepsilon$

Πιο αναλυτικά :

Αν Δ_1 και Δ_2 ξένες μεταξύ τους περιοχές ενός υπερεπιπέδου και αν η απόσταση μεταξύ αυτών είναι μη μηδενική, τότε για κάθε χρονοειδή μετάθεση $\vec{\alpha}$, υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\mathrm{P}_{\Delta_1}\mathrm{P}_{\Delta_2+\alpha t} = 0$$

όπου $0 \leq t < \varepsilon$

$4)$ **Συνθήκη τοπικότητας(Μικρό- αιτιότητα)** [5]

Αν Δ_1, Δ_2 είναι διαστήματα (όχι απαραίτητα στο ίδιο υπερεπίπεδο) χωροειδώς απομακρυσμένα τότε: $\mathrm{P}_{\Delta_1}\mathrm{P}_{\Delta_2} = \mathrm{P}_{\Delta_2}\mathrm{P}_{\Delta_1}$

Η προϋπόθεση να είναι χωροειδώς απομακρυσμένα και να μην ανήκουν απαραίτητα στο ίδιο υπερεπίπεδο απαιτεί οι προβολικοί τελεστές P_{Δ_1} και P_{Δ_2} να είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους (έτσι ικανοποιείται και η συνθήκη (3). Το γεγονός ότι η σχετικότητα μας απαγορεύει να ανιχνεύσουμε το σωματίδιο σε δύο διαφορετικά σημεία χωροειδώς απομακρυσμένα, καθιστά αναγκαία την μετάθεση των P_{Δ_1} και P_{Δ_2} (όταν δύο τελεστές μετατίθενται, σημαίνει ότι η μέτρηση που θα γίνει στον έναν δεν επηρεάζει την μέτρηση που θα γίνει στον άλλο). Δηλαδή

$$[\mathrm{P}_{\Delta_1}, \mathrm{P}_{\Delta_2}] = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{P}_{\Delta_1}\mathrm{P}_{\Delta_2} - \mathrm{P}_{\Delta_2}\mathrm{P}_{\Delta_1} = 0$$
$$\mathrm{P}_{\Delta_1}\mathrm{P}_{\Delta_2} = \mathrm{P}_{\Delta_2}\mathrm{P}_{\Delta_1}$$

Η συνθήκη αυτή υπονοεί πως είναι πιθανό το σωματίδιο να ανιχνευτεί και στα δύο σημεία. Ωστόσο είτε το πείραμα έγινε πρώτα στο Δ_1 είτε το αντίθετο,η πιθανότητα να ανιχνευτεί στο Δ_2 θα πρέπει να είναι στατιστικώς ανεξάρτητη. Δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το που έγινε το πείραμα αρχικά (στο Δ_1 ή στο Δ_2). (Δεν μπορούμε να ξέρουμε πιο είναι πρώτο, μας ενδιαφέρει ότι η ανίχνευση έγινε σε ένα από τα δύο).

Η παραπάνω παραδοχή αποδεικνύεται ως εξής:

- Έχουμε υποθέσει πως τα Δ_1 και Δ_2 είνα χωροειδώς απομακρυσμένα και ανήκουν σε διαφορετικά υπερεπίπεδα. Ας υποθέσουμε ότι το υπερεπίπεδο του Δ_1 είναι πιο πριν από το υπερεπίπεδο του Δ_2. Και ας υποθέσουμε επίσης ότι το σωματίδιο ξεκινάει σε μια κατάσταση η οποία χαρακτηρίζεται από έναν τελεστή πυκνότητας W. Αν κανένα πείραμα ανίχνευσης δεν γίνει στο Δ_1 τότε η πιθανότητα το σωματίδιο να ανιχνευτεί στο Δ_2 δίνεται από τι ίχνος $tr(WP_{\Delta_2})$. Όμως η πιθανότητα του μεταγενέστερου συμβάντος, υπό την προϋπόθεση ότι το πείραμα ανίχνευσης εκτελείται στο Δ_1 (και δεν εξαρτάται από το αποτέλεσμα), δίνεται από το $tr(W^{'}P_{\Delta_2})$ όπου

  $$W^{'} = P_{\Delta_1} + (1 - \mathrm{P}_{\Delta_1})W(1 - P_{\Delta 2})$$

  (σωματίδιο ανιχνεύεται στο Δ_1 **ΚΑΙ** σωματίδιο δεν ανιχνεύεται στο Δ_2, με τις αντίστοιχες πιθανότητες)

  Έχουμε υποθέσει πως το αποτέλεσμα του πρώτου πειράματος δεν μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα του δεύτερου πειράματος επομένως ισχύει :

  $$tr(WP_{\Delta_2}) = tr(W^{'}P_{\Delta_2})$$

[5](microcausality) Η μικροαιτιότητα απαιτεί η χωροειδώς απομακρυσμένες περιοχές να είναι "αιτιακώς" θωρακισμένες, δηλαδή απομονωμένες. Πράγμα που στην κβαντική μηχανική είναι πολύ δύσκολο μα επιτευχθεί.

και δεδομένου ότι οι προβολικοί τελεστές μετατίθενται θα ισχύει :

$$
\begin{aligned}
tr(W' P_{\Delta_2} &= tr(P_{\Delta_1} W P_{\Delta_1} \mathrm{P}_{\Delta_2}) + tr[(1-\mathrm{P}_{\Delta_1})W(1-\mathrm{P}_{\Delta_1})\mathrm{P}_{\Delta_2}] \\
&= tr(W P_{\Delta_1} \mathrm{P}_{\Delta_2} P_{\Delta_1}) + tr[W(1-\mathrm{P}_{\Delta_1})\mathrm{P}_{\Delta_2}(1-\mathrm{P}_{\Delta_1})] \\
&= tr(W \mathrm{P}_{\Delta_1} \mathrm{P}_{\Delta_2}) + tr[W(1-\mathrm{P}_{\Delta_1})\mathrm{P}_{\Delta 2}] \\
&= tr(W \mathrm{P}_{\Delta 2})
\end{aligned}
$$

Έτσι καταλήγουμε στην διατύπωση του θεωρήματος.

Πρόταση:
Αν η δομή $\mathcal{H}, \Delta \mapsto \mathrm{P}_\Delta, \vec{a} \mapsto U(\vec{a})$ είναι ένα σύστημα εντοπισμού στον χώρο Minkowski που ικανοποιεί τις συνθήκες από $(1)-(4)$ τότε ο $\mathrm{P}_\Delta = 0$ για κάθε Δ.

Η παραπάνω πρόταση είναι μια στοιχειώδης συνέπεια του τεχνικού λήμματος του Borchers (1967), ο οποίος ακολούθησε την λογική των αποδείξεων του Misra(1965) για την άλγεβρα όλων των ”τοπικών” παρατηρήσιμων μεγεθών. Επομένως για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να ακολουθήσουμε την τεχνική της απόδειξης του λήμματος. [APPENDIX B]

Λήμμα: Έστω $V(t) = e^{-itH}$ ισχυρώς συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα μοναδιαίων τελεστών του χώρου Χιλμπερτ, με γέννητορα H. Το φάσμα του γεννήτορα είναι φραγμένο από κάτω. Έστω P_1 και P_2 δύο προβολικοί τελεστές τέτοιοι ώστε:

- $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = 0$ κάθετοι υπόχωροι

- υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε t, αν $|t| < \varepsilon$

$$[\mathrm{P}_1, V(t)P_2V(-t)] = 0$$

(για επαρκώς μικρούς χρόνους εξακολουθεί να μετατίθεται).

Τότε $\mathrm{P}_1 V(t) P_2 V(-t) = 0$ για κάθε t
και ως εκ τούτου

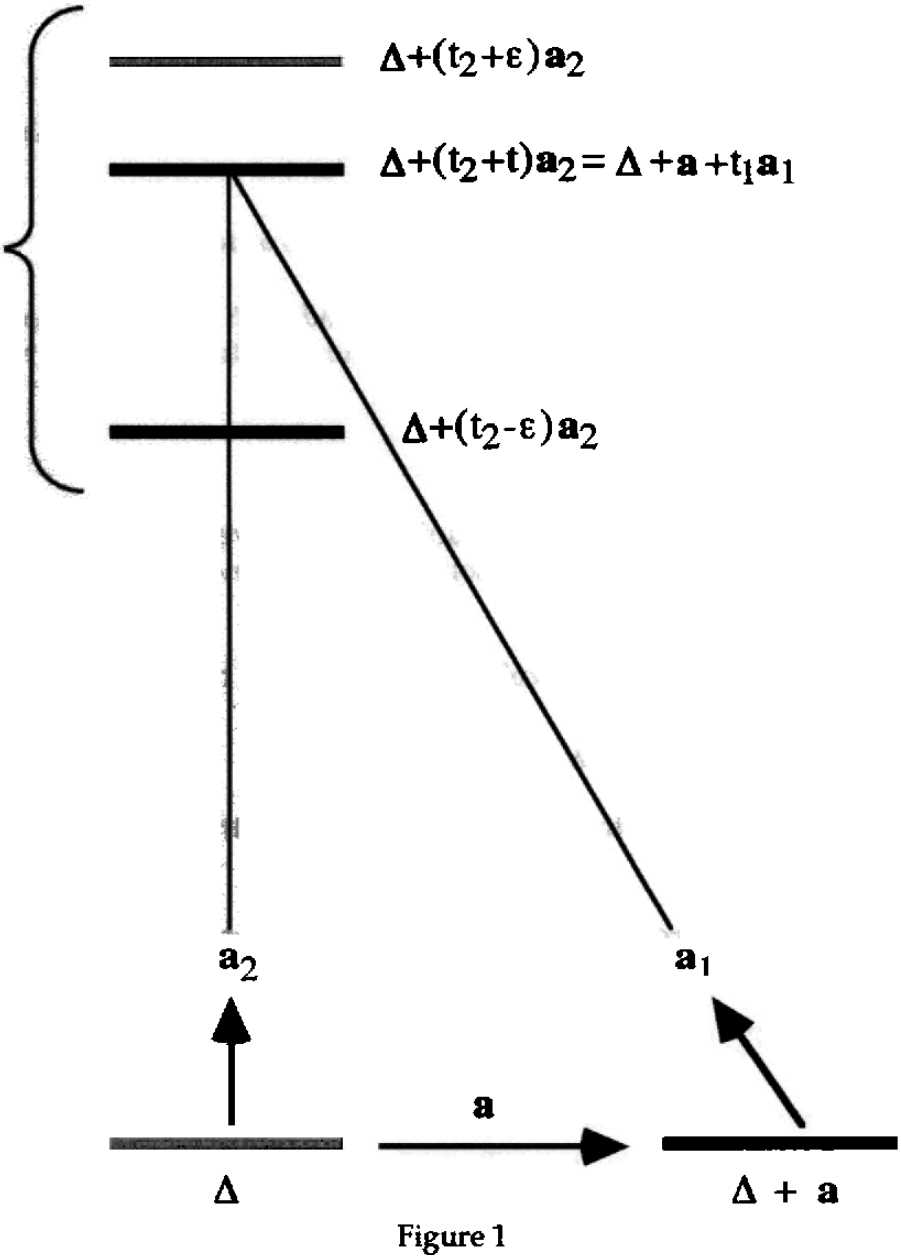
$$V(t)P_2V(-t)P_1 = 0$$

για κάθε t.

Μονοπαραμετρική ομάδα ή μονοπαραμετρική υποομάδα στα μαθηματικά, συνήθως εννοούμε μια συνεχή ομάδα ομομορφισμού $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{G}$. Μια αναπαράσταση δηλαδή από ένα σημείο του πραγματικού άξονα $\mathbb{R}$ σε κάποιο σημείο μιας τοπολογικής ομάδας $\mathcal{G}$.

Οι μονοπαραμετρικές ομάδες εισήχθησαν από τον Sophus Lie το 1893 προκειμένου να καθοριστούν απειροελάχιστες μετατοπίσεις/μεταθέσεις. Σύμφωνα με τον Lie μια απειροελάχιστη μετάθεση είναι μια απείρως μικρή (αμελητέα) μετάθεση μιας μονοπαραμετρικής ομάδας που αυτή παράγει. Αυτές τις μεταθέσεις χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε μια ομάδα Lie σε οποιαδήποτε διάσταση. Η δράση μιας μονοπαραμετρικής ομάδας είναι γνωστή ως *ροή*.

Ομομορφισμός μεταξύ δύο ομάδων G και H καλείται κάθε συνάρτηση $f : G \to H$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2)$, για κάθε $g_1, g_2 \in G$



Σχήμα 2.1: πηγή: David B. Malament, "In defence of Dogma: Why there cannot be a relativistiv quantum mechanics of localizable particles."

Απόδειξη θεωρήματος Malament

Έστω ότι οι υποθέσεις $(1) - (4)$ ισχύουν και Δ ένα διάστημα. Θα αποδείξουμε ότι ο $\mathrm{P}_2 = 0$. Επίσης θεωρούμε ότι το $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο στο υπερεπίπεδο του Δ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Δ και $\Delta + \alpha$ ξένες μεταξύ τους.

β) για κάθε χρονοειδή με κατεύθυνση προς το μέλλον μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha_1}$, και για κάθε επαρκώς μικρό χρόνο (κατ' απόλυτη τιμή), τα Δ και $\Delta_{+\alpha+t\alpha_1}$ θα πρέπει να είναι χωροειδώς απομακρυσμένα.

Αν αντιστοιχήσουμε του τους τελεστές του λήμματος με τους τελεστές του σχήματος θα έχουμε $V(t) = U(ta_1), P_1 = P_\Delta$ και $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_{\Delta+\alpha}$.

Συνδυάζοντας τις βασικές συνθήκες που θα πρέπει να διέπουν ένα πλήρες κβαντικό και σχετικιστικό συνάμα σύστημα, με τις υποθέσεις που προέκυψαν από το σχήμα, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα. Από τη συνθήκη τοπικότητας που έχουμε πάρει ως δεδομένη και την υπόθεση ότι τα Δ και $\Delta+\alpha$ είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες περιοχές, προκύπτει ότι

$$P_\Delta \mathrm{P}_{\Delta+\alpha} = \mathrm{P}_{\Delta+\alpha} P_\Delta = 0 \tag{2.1}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μέτρηση που θα γίνει στο Δ δεν επηρεάζει την μέτρηση που θα γίνει στο $\Delta + \alpha$ όπως επίσης ότι αν το σωματίδιο ανιχνευθεί στο Δ δεν γίνεται να ανιχνευθεί και στο $\Delta+\alpha$ σε επαρκώς πολύ μικρό χρόνο.

Αντίστοιχα, από την υπόθεση (β), τη συνθήκη συναλλοιωτότητας και τη συνθήκη τοπικότητας προκύπτει ότι θα πρέπει να ισχύει

$$[\mathrm{P}_\Delta, U(ta_1) P_{\Delta+\alpha} U(-ta_1)] = [P_\Delta, \mathrm{P}_{\Delta+\alpha+ta_1}] = 0 \tag{2.2}$$

Προκύπτει ότι για κάθε χρονοειδές διάνυσμα με κατεύθυνση προς το μέλλον $\vec{\alpha}$ σε κάθε χρονική στιγμή t θα ισχύει:

$$P_\Delta U(t\alpha_1) P_{\Delta+\alpha} U(-t\alpha_1) = U(ta_1) P_{\Delta+\alpha} U(-t\alpha_1) P_\Delta = 0$$

και ως εκ τούτου

$$\mathrm{P}_\Delta \mathrm{P}_{\Delta+\alpha+\alpha_1} = \mathrm{P}_{\Delta+\alpha+\alpha_1} \mathrm{P}_\Delta = 0 \tag{2.3}$$

Καταλήγουμε στο ότι δεν είναι δυνατό μια μέτρηση που γίνεται στο Δ να επηρεάσει μια μέτρηση που γίνεται στο $\Delta + \alpha + \alpha_1$, ούτε να πάρουμε ταυτόχρονες μετρήσεις στα δύο αυτά συστήματα. Δηλαδή δεν γίνεται να ανιχνεύσουμε το ίδιο σωμάτιο στο Δ και στο $\Delta + \alpha + \alpha_1$. Δεν υπάρχει καμία τέτοια ακαριαία μετάδοση της πληροφορίας από το ένα στο άλλο.

Τώρα έστω α_2 είναι χρονοειδές διάνυσμα που κατευθύνεται στο μέλλον και επαναλαμβάνοντας τις ίδιες διαδικασίες με πριν. Δηλαδή για κάθε επαρκώς μεγάλο $t_2 > 0$ το διάστημα $\Delta + t_2\alpha_2$ είναι το χρονοειδές μέλλον του $\Delta + \alpha$ (βλ. σχήμα). Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να υπάρχει $t_2 > 0$ και $\varepsilon > 0$. Έτσι αν $|t| < \varepsilon$ υπάρχει ένα χρονοειδές διάνυσμα α_1 και t_1 τέτοιο ώστε:

$$\Delta + (t_2 + t)\alpha_2 = \Delta + \alpha + t_1\alpha_1$$

από την σχέση (2.3) αν $|t| < \varepsilon$

$$\mathrm{P}_\Delta \mathrm{P}_{\Delta+(t_2+t)\alpha_2} = \mathrm{P}_{\Delta+(t_2+t)\alpha_2} \mathrm{P}_\Delta = 0$$

ή

$$\mathrm{P}_\Delta U(t\alpha_2)\mathrm{P}_{\Delta+t_2\alpha_2}U(-t\alpha_2) = U(t\alpha_2)\mathrm{P}_{\Delta+t_2\alpha_2}U(-t\alpha_2)\mathrm{P}_\Delta = 0$$

παίρνοντας όπου $V(t) = U(ta_2), P_1 = P_\Delta$ και $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_{\Delta+t_2\alpha_2}$ καταλήγουμε σε

$$\mathrm{P}_\Delta U(t\alpha_2)\mathrm{P}_{\Delta+t_2\alpha_2}U(-t\alpha_2) = 0$$

συμπεριλαμβάνοντας την συνθήκη συναλλοιώτητας έχουμε ότι

$$\mathrm{P}_\Delta U[(t+t_2)\alpha_2]\mathrm{P}_\Delta U[-(t+t_2)\alpha_2] = 0$$

για κάθε t

και αν πάρουμε όπου $t = -t_2$,

$$P_\Delta = P_\Delta P_\Delta = 0$$

Δηλαδή η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε το σωμάτιο εντός του διαστήματος Δ αποδεικνύεται ότι είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι αν εμείς το έχουμε ανιχνεύσει στο $\Delta + \alpha$ δεν υπάρχει κανένας τρόπος με τον οποίο αυτό το σωμάτιο θα μπορούσε να τρέξει με ταχύτητα ίση ή μεγαλύτερη από το φως και να ανιχνευτεί σε κάποιο χωροειδώς απομακρυσμένο διάστημα. Αν αυτό συμβεί πρακτικά και εμείς καταφέρουμε να το ανιχνεύσουμε με κάποιο τρόπο, τότε σίγουρα θα πρέπει να αλλάξουμε την μαθηματική θεμελίωση τόσο της Σχετικότητα όσο και της Κβαντικής.

2.2 συζήτηση

Το θεώρημα του Malament μας οδηγεί σε ένα φιλοσοφικό αδιέξοδο. Αν πιστέψουμε ότι οι υποθέσεις του ισχύουν για οποιαδήποτε θεωρία που περιγράφει τον κόσμο μας, τότε καταλήγουμε μοιραία ότι η Σωματιδιακή Θεωρία δεν επαρκεί για την πλήρη περιγραφή του. Αυτός είναι και ο λόγος που το συγκεκριμένο Θεώρημα άνοιξε έναν μεγάλο κύκλο συζητήσεων ,οι οποίες όμως αργά ή γρήγορα καταλήγουν στο ίδιο τέλμα.

Ενδεικτικά αναφέρω κάποιους όπως ο Dickson(1998) για παράδειγμα, ισχυρίστηκε ότι μια κβαντική θεωρία δεν χρειάζεται κάποιον ″τελεστή θέσης″ για να επιβεβαιώσει τον εντοπισμό κάποιου σωματιδίου. Οι Fleming & Butterfield (2000) διαφωνούν με την συνθήκη/περιορισμό που αφορά την τοπικότητα, ισχυρίζοντας ότι η συνθήκη αυτή δεν δικαιολογείται από την Ειδική Σχετικότητα.

Μεγάλο ενδιαφέρον έχει η άποψη των Halvorson και Clifton. Σε αυτό το σημείο θυμίζω, ότι στην αρχή της διατύπωσης των τεχνικών λεπτομερειών και της διατύπωσης του θεωρήματος, επιλέξαμε να περιοριστούμε σε έναν υπόχωρο του Minkowski (π.χ. τον $\mathscr{R}^3$), δηλαδή σε έναν αρκετά αυστηρά οριοθετημένο χώρο.

Συγκεκριμένα οι Halvorson και Clifton, πιστεύουν πως το ″λάθος″ έγκειται στο γεγονός ότι έχουμε εργαστεί πάνω σε μια συγκεκριμένη ″οικογένεια″, δεδομένου υπερεπιπέδου, οριοθετώντας έτσι αυστηρά τον χώρο και καθιστώντας αναγκαία την χρήση συστημάτων προβολών εντοπισμού (δηλαδή τελεστών θέσης). Ισχυρίζονται ότι δεν μπορούμε να είμαστε αυστηροί με τον εντοπισμό του σωματιδίου σε τόσο περιορισμένο χώρο, αφού στην πραγματικότητα χρειάζεται άπειρη ποσότητα ενέργειας προκειμένου να προετοιμάσουμε το σωματίδιο σε μια κατάσταση. Ωστόσο αποδεικνύουν ότι ακόμα και αν ″ανοίξουμε″ τα όρια, και αντί προβολικού τελεστή που παίρνει αυστηρά τις τιμές 0 ή 1, χρησιμοποιήσουμε έναν τελεστή A_Δ τέτοιο ώστε $< \psi, \mathrm{A}_\Delta \psi > \in [0.1]$ θα βγούμε πάλι στο ίδιο συμπέρασμα, ότι δηλαδή δεν μπορεί να υπάρξει σχετικιστική κβαντική θεωρία αλλά η μόνη συνεπής είναι η Θεωρία Πεδίου.

Καταλήγουμε στο ότι δεν μπορεί να υπάρξει (τεχνικά) άλλος τρόπος για να περιγράψουμε κβαντικά ένα εντοπισμένο σωματίδιο παρά μόνο μέσω κάποιου τελεστή θέσης. Ειδικά αν σκεφτούμε ότι ο οποιοδήποτε πειραματισμός που μπορεί διεξαχθεί, περιλαμβάνει παρατηρήσεις σωματιδίων και μπορούμε να κάνουμε αυτές τις παρατηρήσεις μόνο αν τα σωματίδια αυτά εντοπιστούν σε δεδομένο διάστημα. Το θεώρημα του Malament μας αποδεικνύει πως είναι αδύνατο η μέτρηση σε ένα σύστημα χωροειδώς απομακρυσμένο από κάποιο άλλο σύστημα να επηρεάσει την μέτρηση στο δεύτερο. Δεν μπορεί να υπάρξει σχέση ″δράσης- αποτελέσματος″ σε χωροειδώς απομακρυσμένες περιοχές, δηλαδή δεν μπορεί να υπάρξει κοινό έδαφος για την Σχετικότητα και την Κβαντική. Όπως λέει και ο ίδιος :

...Αυτό που φαίνεται σημαντικό είναι ότι υπάρχει ένα εμπειρικό ζήτημα με το αν η μητέρα φύση επιτρέπει ή όχι τέτοιου είδους συσχετισμούς. Αν και εφόσον έχουμε αποδείξει ότι το απαγορεύει, έχουμε αποδέιξει ότι θα πρέπει τελικά να δοθεί στα Κβαντομηχανικά Φαινόμενα μια θεωρητική ερμηνεία.

2.2.1 Τελεστής θέσης $\hat{x}$

Στην Κβαντική Μηχανική ο τελεστής θέσης (position operator) αντιστοιχεί στη θέση στην οποία παρατηρήθηκε κάποιο σωματίδιο. Οι ιδιοτιμές του τελεστή είναι οι πιθανοί ”φορείς” της θέσης του σωματιδίου. Δηλαδή, οι εντοπισμένες συναρτήσεις ανήκουν σε ένα συνεχές φάσμα κάποιου τελεστή, ο οποίος έχει αυτόματα την ιδιότητα να διατηρεί τον θετικό ενεργειακό χαρακτήρα της κυματοσυνάρτησης στην οποία δρα.

Σε μια διάσταση, αν με το σύμβολο $|x>$ εννοούμε το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή x, τότε το $|x>$ αντιπροσωπεύει την κατάσταση του σωματιδίου στο οποίο γνωρίζουμε με βεβαιότητα, ότι το σωματίδιο βρίσκεται.

Στην βιβλιογραφία μπορούμε να το συναντήσουμε με διάφορους συμβολισμούς, για παράδειγμα $\mathcal{X}$, $\mathcal{Q}$ στην Αναλυτική Μηχανική (λαγκραντζιανής), όπως και $\hat{x}$.
Οπότε, για κάθε πραγματική θέση θα ισχύει:

$$X|x>= x|x> .$$

Θα μπορούσαμε να αντιληφθούμε τη μοναδιαία κατάσταση με θέση x, με τη βοήθεια της κατανομής μιας συνάρτησης δ-Dirac, γύρω από ένα κεντρικό σημείο x, συμβολιζόμενο με δ_x. Στην Κβαντική η διατεταγμένη (συνεχής) οικογένεια όλων αυτών των κατανομών Dirac, γράφεται ως

$$\delta = (\delta_x)_{x\in\mathcal{R}}$$

και είναι η μοναδιαία βάση θέσης (σε μια διάσταση), διότι είναι μοναδιαία ιδιο-βάση του τελεστή θέσης X.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι υπάρχει μόνο ένας γραμμικός συνεχής ενδομορφισμός X τέτοιος ώστε:

$$X(\delta_x) = x\delta_x$$

για κάθε πραγματικό σημείο x ,

$$X(\psi) = x\psi$$

για κάθε πραγματική κατανομή ψ, όπου x δηλώνει τη συνάρτηση συντεταγμένων στον άξονα θέσης, που ορίζεται από τον πραγματικό άξονα, στο μιγαδικό επίπεδο

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto x.$$

Ένα γνωστό παράδειγμα είναι ο τελεστής $\hat{x}$ Newton- Wigner [4] . Ο τελεστής αυτός επινοήθηκε από τους ίδιους στην προσπάθεια να απαντήσουν το πως εντοπίζουμε ένα σύστημα από στοιχειώδη σωμάτια σε αντίθεση με ένα στοιχειώδες σωμάτιο, που είναι ”εύκολη” υπόθεση.[6]

Προκειμένου να απαντήσουν στο πρόβλημα που δημιουργείται κατά την προσέγγιση στοιχειώδους σωματιδίου ή ”συστήματος” έκαναν κάποιες υποθέσεις αναντιστοιχίας. Υπέθεσαν ότι αν οι καταστάσεις που αντιπροσωπεύουν ένα εντοπισμένο σύστημα σε χρόνο $t = 0, x = y = z = 0$ α) συνθέτουν ένα γραμμικό σύνολο S_0, έτσι ώστε η υπέρθεση δύο τέτοιων συνόλων να μπορεί να εντοπιστεί με τον ίδιο τρόπο, β) το S_0 να είναι αμετάβλητο στις στροφές, γ) αν μια κατάσταση ψ μπορεί να εντοπιστεί σύμφωνα με τα παραπάνω, μια χωρική μετατόπιση του ψ θα την καθιστά ορθογώνια σε όλες τις καταστάσεις του S_0 και τέλος δ) όλοι οι απειροελάχιστοι τελεστές της ομάδας Lorentz θα πρέπει να δρουν στις εντοπισμένες καταστάσεις.
Αν γνωρίζουμε τις κυματοσυναρτήσεις για $t = 0$ και $x = y = z = 0$ τότε μπορούμε να έχουμε γνώση για όλες τις εντοπισμένες καταστάσεις.

[6] Διαισθητικά θεωρούμε ένα σωμάτιο ”στοιχειώδες” αν δεν φαίνεται χρήσιμο να του αποδοθεί μια ορμή.

Αναμένεται οι καταστάσεις που εντοπίζονται στο ίδιο σημείο να έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις ενός συνεχούς φάσματος (δηλαδή να μην είναι απαραίτητα τετραγωνικά ολοκληρώσιμες αλλά όρια τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων). Ένα σύστημα δεν είναι εντοπισμένο αν δεν πληρεί τις παραπάνω προϋποθέσεις.

Ωστόσο κατά την προσέγγιση των Newton-Wigner δημιουργούνται τα εξής προβλήματα. Πρώτον, δεν είναι συναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Δεύτερον προβλέπεται διάδοση υπερφωτεινών σημάτων και τέλος αποτυχία στον εντοπισμό άμαζων σωματιδίων με σπιν$> 1/2$.

Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά.
Υπάρχει η ισχυρή απαίτηση, όλες οι καταστάσεις του συστήματος να μπορούν να περιληφθούν από σχετικιστικούς μετασχηματισμούς. Και αυτό σημαίνει ότι ένας σχετικιστικός μετασχηματισμός, δεν απαιτεί μόνο να μένει ένα σύστημα αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz αλλά και κάτω από περιστροφές και μεταθέσεις στον χώρο και τον χρόνο. Είναι λοιπόν προφανές ότι κάθε σύστημα που μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερα(στοιχειώδη) συστήματα δεν μπορεί να προσδιοριστεί με έναν σχετικιστικώς αμετάβλητο τρόπο, καθώς αυτά τα συστήματα περιέχουν μόνο συγκεκριμένες καταστάσεις.
Για παράδειγμα αλλιώς προσεγγίζουμε ένα π-μεσόνιο αλλιώς ένα σύστημα που περιέχει ένα π- μεσόνιο, ας πούμε έναν συνδυασμό με μ-μεσόνιο και νετρίνο. Άλλο ένα παράδειγμα είναι ένα ηλεκτρόνιο σε ελαστική σκέδαση (από κάποιο συγκεκριμένο στόχο), η κατάσταση του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση είναι μια υπέρθεση στην οποία βρίσκουμε ορμή προς όλες τις κατευθύνσεις. Εν ολίγοις αλλάζουν οι ιδιότητες επομένως η Κβαντική δείχνει να μην επαρκεί και δημιουργούνται προβλήματα στον προσδιορισμό ενέργειας - ορμής.

Έγκειται λοιπόν αναγκαία η χρήση ενός τελεστή θέσης ως μαθηματικού εργαλείου στη Θ. Σχετικότητας, ο οποίος θα προσδιορίζει τη θέση του σωματιδίου (όταν αναφερόμαστε σε σωματίδιο) και τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος αν η προσέγγιση έχει γίνει σε σύστημα.

Δεδομένου ότι στη Θεωρία Σχετικότητας η ομάδα αναπαράστασης είναι η Poincare, θα πρέπει από τους γεννήτορες της άλγεβρας, τερταορμή P, γωνιακή στροφορμή J και τους γεννήτορες ώθησης (boost) K, να μπορεί να υπάρξει μια μη-γραμμική αναπαράσταση για τρισδιάστατο $\hat{x}$ όπου μαζί με την ορμή (χωρικό μέρος) να έχει κανονικοποιημένους κανόνες μετάθεσης και ως εκ τούτου να μπορούν να αναχθούν σε άλγεβρα Heisenberg.

Επιπλέον προσδιορίζουμε τον τελεστή θέσης σε δεδομένο χρόνο. Μόλις καθοριστεί η χρονική συντεταγμένη ο τελεστής θέσης που κατασκευάστηκε είναι μοναδικός. Το γεγονός ότι η χρονική συντεταγμένη πρέπει να καθοριστεί σημαίνει ότι ό τελεστής θέσης εξαρτάται από τον παρατηρητή. Κάθε παρατηρητής χωρίζει/ταξινομεί τον χωροχρόνο ως προς τον προσωπικό του χρόνο (αυτόν που μετράει εκείνος) και ως προς τον προσωπικό του ($3D$) χώρο (δηλαδή προς την κατεύθυνση της ολικής του τετραορμής). Έτσι ο τελεστής θέσης σχετίζεται με τον τρισδιάστατο χώρο στον οποίο υπάρχει ο παρατηρητής. Από έναν μετασχηματισμό Lorentz, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την τετραορμή σε ένα διάνυσμα, το οποίο δημιουργεί την συνιστώσα του χρόνου x^0.

Οι υποθέσεις μας επιβεβαιώνονται μόνο για σωμάτια με $s = 0$ (Klein-Gordon σωμάτιο) ή $s = \frac{1}{2}$. Για μεγαλύτερες τιμές spin ($s = 1$ κοκ) πεπερασμένες και μη, δεν μπορούν να υπάρξουν εντοπισμένες καταστάσεις.

Ένας από τους λόγους για τους οποίους μπορεί να συμβαίνει αυτό, είναι γιατί οι εντοπισμένες καταστάσεις δεν είναι οι δ-συναρτήσεις που έχουμε συνηθίσει στο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε υποθέσει ότι όλες οι κυματοσυναρτήσεις αντιπροσωπεύουν καθαρές θετικές καταστάσεις. Δηλαδή, ότι ο τελεστής θέσης μεταθέτει/αντιστοιχίζει συναρτήσεις θετικής ενέργειας σε συναρτήσεις θετικής ενέργειας.

Μπορούμε να κάνουμε ακριβείς προσδιορισμούς για έμμαζες καταστάσεις. Σε άμαζα σωματίδια με $s > 1/2$ δεν επιτρέπονται από το σπιν όλοι οι τρόποι ελικότητας (π.χ. φωτόνια, τα οποία δεν προβλέπονται από τον τελεστή, ωστόσο το πείραμα τα ανιχνεύει), γεγονός που τα κάνει να *διαχέονται* και να μην είναι πλήρως εντοπισμένα. Για το τελευταίο θα μιλήσουμε λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα μιλήσουμε για το θεώρημα (Hegerfeldt).

Βλέπουμε λοιπόν ότι και ο τελεστής θέσης Newton-Wigner δεν επαρκεί να μας εξηγήσει πλήρως το πρόβλημα εντοπισμού σε συστήματα στοιχειωδών αποτυγχάνοντας να τηρήσει όλους τους νόμους της Φυσικής, καθιστώντας αναγκαία την Θεωρία Πεδίου.

Αποτελεί ανοιχτό ζήτημα ποια θα μπορούσε να είναι η αντιστοίχηση του $\hat{x}$ στην Θεωρία Πεδίου αφού η πρόβλεψη γίνεται για κάτι συνεχές και εκτεταμένο(πεδίο) εντέλει ανιχνεύουμε κάτι διακριτό και ασυνεχές (σωματίδιο).

Μια άποψη για τη λύση αυτού του προβλήματος θα ήταν να έχουμε μια πιο γενική θεώρηση της κβαντικής μέτρησης στα πλαίσια μιας σχετικιστικής θεωρίας πεδίου [6] . Η συγκεκριμένη περιγραφή εστιάζει κυρίως στον ρόλο του χρόνου στις μετρήσεις και η προσέγγιση του εντοπισμού γίνεται με την βοήθεια σχετικιστικών παρατηρήσιμων μεγεθών που αντιστοιχούν στον χρόνο ανίχνευσης **(time-of-arrival observables)**, χρησιμοποιώντας ειδικές πιθανότητες, τις Κβαντικές Πιθανότητες Χρόνου (Quantum Temporal Probabilities **QTP**) [7] . Η ιδέα είναι να υπάρξει σαφής διαχωρισμός στην παράμετρο του χρόνου στην εξίσωση του Schrödinger και στην μεταβλητή του χρόνου όπως τον εννοούμε στην ανίχνευση ενός σωματιδίου.

Τα συγκεκριμένα μεγέθη (time-of-arrival) ορίζονται ως χαρακτηριστικά που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση κβαντικών πεδίων και μετρητικής συσκευής. Και οι πιθανότητες που τα εκφράζουν εκφράζονται ως συναρτήσεις συσχετισμού στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου,οι οποίες συνάδουν με την σχετικιστική αιτιότητα. Η περιγραφή του σωματιδίου προκύπτει από την δομή αυτής της συνάρτησης συσχετισμού.
Η συσκευή αντίστοιχα, περιγράφεται από την QFT σε μικροσκοπικό επίπεδο, ωστόσο ανιχνεύει ”κλασικά” χωροειδείς συντεταγμένες X.

Τις μεθόδους αυτές μπορούμε να τις εφαρμόσουμε σε σωματίδια διαφόρων σπιν όπως, φωτόνια, γκραβιτόνια και νετρίνα όπως επίσης και για τον εντοπισμό σε αλληλεπιδρώσες θεωρίες (QCD).

3 θεώρημα Hegerfeldt

Έχουμε θεωρήσει ότι ο μοναδικός τρόπος να διαδοθεί πληροφορία σε ένα σχετικιστικό- κβαντικό σύστημα γίνεται μέσω πεδίου.
Στο θεώρημα του Hegerfeldt, με μόνη προϋπόθεση να έχουμε θετικές τιμές ενέργειας, αποδεικνύεται ότι αν σε ένα σύστημα αρχικά εντοπισμένο σε ένα διάστημα, υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα να ανιχνεύσουμε το σωμάτιο αυτό σε οσοδήποτε μεγάλη απόσταση από την αρχική του θέση, σε οσοδήποτε μικρό χρόνο, τότε εκείνο έχει κινηθεί με ταχύτητα τόσο μεγάλη, που μπορεί να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός. Αυτό ''μεταφράζεται'' με βίαιη πτώση γκαουσιανής 'ουράς' (infinite tail).

Αν αυτό συνέβαινε, δηλαδή αν υπήρχαν σήματα αυθαίρετα υψηλών ταχυτήτων, τότε θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι θα ήταν δυνατό να αποκτήσει τον απόλυτο συγχρονισμό του ρολογιού και την απόλυτη ταυτοχρονικότητα, εφιστώντας αναγκαία την αναθεώρηση της Ειδικής Σχετικότητας (αφού παραβιάζεται η Αρχή της Αιτιότητας).

Ας δούμε όμως λίγο πιο αναλυτικά το ζήτημα της ουράς.
Είναι γνωστό στην Κβαντική Μηχανική, πως όταν μια κυματοσυνάρτηση είναι **εντοπισμένη** σε πεπερασμένη περιοχή, αμέσως αναπτύσσει ουρές που τείνουν στο άπειρο.

Έστω σωμάτιο σε αρχική κατάσταση ακριβώς εντοπισμένη στην περιοχή $[0, \alpha]$ και έχει μηδενική μέση ορμή. Η κυματοσυνάρτηση θα δίνεται από την σχέση

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \chi_{[0,\alpha]}(x).$$

Συμπεριλαμβάνοντας τον διαδότη

$$G_t(x, x') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i t}} e^{i\frac{m(x-x')^2}{2t}}$$

βρίσκουμε την χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης

$$\psi_t(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \alpha^2 t}} \int_0^\alpha dx' e^{i\frac{m(x-x')^2}{2t}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i t}} \int_{\frac{x}{\alpha}}^{\frac{x}{\alpha}+1} dse^{-i\frac{m\alpha^2}{2t}ds}.$$

Στο τελευταίο βήμα ορίσαμε τη μεταβλητή $s = (x^{'} - x)/a$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των ολοκληρωμάτων Fresnel $C(x) = \int_0^x dscos(s^2)$ και $S(x) = \int_0^x dssin(s^2)$ βρίσκουμε

$$\psi_t(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2i}} \left[C\left(\frac{m}{t}(a+x)\right) - iS\left(\frac{m}{t}(a+x)\right) - C\left(\frac{m}{t}x\right) + iS\left(\frac{m}{t}x\right) \right]$$

εξετάζοντας για $x \gg \alpha$ και μικρούς χρόνους $t < m\alpha^2$ παίρνουμε

$$C(x) - iS(x) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1-i}{2} - i\frac{e^{-ix^2}}{x\sqrt{2\pi}} \right)$$

αν αντικαταστήσουμε στον παρονομαστή όπου $\alpha + x$ το x καθώς η πιο έντονη εξάρτηση βρίσκεται στον ταλαντώμενο όρο, έχουμε :

$$\psi_t(x) = \sqrt{\frac{it}{8m}} e^{-i\frac{m\alpha^2}{t}} \frac{e^{-i\frac{m\alpha}{t}x} - 1}{x}$$

με πυκνότητα πιθανότητας

$$|\psi_t(x)|^2 = \frac{t}{2m}\frac{sin^2(\frac{m\alpha}{2t}x)}{x^2}.$$

Αν κάποια δεδομένη χρονική στιγμή ανιχνεύσουμε το σωμάτιο γύρω από θέση $x = L >> \alpha$ με εύρος d και για επαρκώς μικρό t θα βρούμε την πιθανότητα

$$Prob(L,t) = \frac{td}{4mL^2},$$

η πιθανότητα πέφτει με το L σαν αντίστροφη δύναμη, αυτό συνεπάγεται μετάδοση υπερφωτεινού σήματος γιατί υπάρχει πιθανότητα, έστω και πολύ μικρή, να ανιχνευτεί το σωμάτιο σε κάποιο πολύ μακρινό από την $[0,\alpha]$, L. Αυτό συνεπάγεται μια 'ουρά' που μπορεί να πέφτει πάρα πολύ γρήγορα, τόσο, ώστε παίρνουμε πιθανότητα ταχύτητας μεγαλύτερης από αυτήν του φωτός.

Δεν έχει σημασία αν το εγχείρημα έχει γίνει σε μη σχετικιστική Κβαντομηχανική ή σε πλήρη σχετικιστική περιγραφή. Αποδεικνύεται πως είτε προσεγγίσουμε τον εντοπισμό με τη βοήθεια ενός τελεστή θέσης $\hat{x}$, είτε με προσέγγιση πεδίου είτε με κάποιον άλλο τρόπο[8][9], οι ουρές αυτές εμφανίζονται πάλι και μας είναι άγνωστο το γιατί συμβαίνει αυτό.

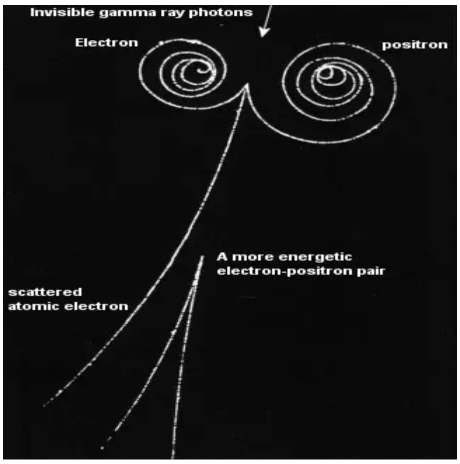
'Πεδιακά' αντιλαμβανόμαστε αυτήν την ουρά ως μια ραγδαία διασπορά του πεδίου στον χώρο, ενώ πρώτα με πιθανότητα 1 ήταν εντοπισμένο σε 'κλειστή' περιοχή. Το ζήτημα αυτό, έχει αποτελέσει αντικείμενο συζήτησης τόσο από τον ίδιο [14] [15] [16] όσο και από άλλους όπως οι Peres και Wilde [17].

Προσέγγιση σε μη σχετικιστικό σύστημα

Μια πολύ ενδιαφέρουσα άποψη είναι αυτή του Skagerstam[18] , ο οποίος προσέγγισε αρχικά και για ευκολία ένα μη σχετικιστικό σύστημα, συγκεκριμένα ένα θάλαμος φυσαλίδων, με σκοπό να γενικεύσει τα συμπεράσματά του σε σχετικιστικά συστήματα και κβαντική θεωρία πεδίου. Το "εύκολο" στη μη-σχετικιστική προσέγγιση είναι ότι μπορεί κανείς πάντα να συμπεριλάβει τον εντοπισμό στην βασική σχέση μετάθεσης

$$[x,p] \subset i\hbar.$$

Το βασικό ερώτημα που τον ταλαιπώρησε ήταν πως γίνεται ένα σωματίδιο με καθορισμένη τροχιά να δημιουργεί αν είναι φορτισμένο, αυτή την τροχιά φυσαλίδας (bubble) εντός του θαλάμου. Αυτό δεν είναι κάτι διαφορετικό από το γνωστό σε όλους ζήτημα ύλης αντιύλης εντός θαλάμου. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα ένα ηλετρόνιο έρχεται σε επαφή με ένα ποζιτρόνιο. Η μεγάλη σπείρα του ποζιτρονίου είναι υπεύθυνη για την μικρή ταχύτητα με την οποία θα κινηθεί στην πορεία το ποζιτρόνιο (). Ενώ αντίθετα το ηλεκτρόνιο φεύγει πολύ πιο γρήγορα με την τροχιά του να διαγράφει μια ελαφριά καμπύλη όπως διαγράφεται και στο σχήμα.
Τι μπορεί να συνέβη στον κενό χώρο έτσι ώστε να δημιουργηθούν εκ του μηδενός e^- και e^+ έτσι ώστε να ανιχνεύουμε τις νέες τροχιές; Είτε με κάποιον τρόπο που δεν μπορούμε να αντιληφθούμε μεταφέρθηκε κάπως πληροφορία και αναγεννήθηκαν, είτε υπάρχει κάτι στο κενό, αόρατο σε μας ικανό για αυτήν την αναγέννηση.



Για να μπορέσει να απαντήσει σε αυτό ο Skagerstam θεωρεί ότι η τροχιά της κίνησης του σωματιδίου εντός του θαλάμου φυσαλίδων, ακολουθεί μια μαρκοβιανή αλυσίδα. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Green (δεδομένου ότι έχουμε να λύσουμε ένα μη-ομογενές πρόβλημα.[1] λύνει την εξίσωση του Schrödinger

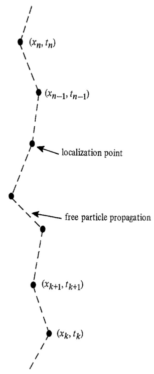
$$G(x,t;x_{m-1},t_{m-1}) = 0 t < t_{m-1}$$

και έχοντας θεωρήσει

$$x_k < x < x_{k+1}, t_k < t < t_{k+1} :$$

παίρνουμε

$$G(x,t;x_k,t_k) = \frac{1}{N} exp[i \frac{m}{2\hbar} \frac{(x-x_k)^2}{t-t_k}].$$



Η σχέση αυτή χρήζει επανακανονικοποίησης καθώς δεν είναι ολοκληρώσιμη για $[L^2(R)]$. Επιλέγουμε τις σταθερές κανονικοποίησης σύμφωνα με τα κριτήρια

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{\Delta t \to 0} G_\delta(x,t;x_k,t_k) = \delta(x - x_k)$$

όπου

$$\Delta t \equiv t - t_k.$$

Έτσι η

$$G_\delta(x,t;x_k,t_k) = \frac{1}{\mathrm{N}} exp[i \frac{m + i\delta}{2\hbar} \frac{(x-x_k)^2}{t-t_k}$$

αποτελεί λύση της εξίσωσης του Schrödinger για επαρκώς μικρούς χρόνους με $\delta \to 0$ έχουμε την αδιατάρακτη). Υπολογίζοντας κάποιος την ενέργεια:

$$\langle E \rangle_\delta = \int_{x_k}^{\infty} G^*_\delta(x,t;x_k,t_k)(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_\delta(x,t;x_k,t_k) dt / \int_{x_k}^{\infty} G^*_\delta(x,t;x_k,t_k) G_\delta(x,t;x_k,t_k) dx$$

παίρνουμε

$$\langle \mathrm{E} \rangle_\delta = (\hbar / 4\delta \Delta t)(m^2/\delta + \delta)$$

και καταλήγουμε σε

$$\langle \mathrm{E} \rangle_\delta \to \hbar m / 4 \delta \Delta t.$$

Είναι προφανές ότι για $\delta \to 0$ το κλάσμα απειρίζεται, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν θέλουμε να εντοπίσουμε ένα σωμάτιο σε αυστηρά όρια θα πρέπει προκειμένου να μην πάρουμε μη πεπερασμένη τιμή ενέργειας, να έχουμε μια ουρά που να σβήνει ”ομαλά” . Στο ίδιο τέλμα φτάνει και για ένα σχετικιστικό σύστημα, αλλά αυτό θα το μελετήσουμε λεπτομερώς στη συνέχεια.

[1] Μας αρκεί να ξέρουμε τη λύση του ή την απόκρισή του για μια σημειακή πηγή τοποθετημένη στο τυχόν σημείο του διαστήματος ορισμού

3.1 Το Θεώρημα

Για να ελέγξει την ταχύτητα του φωτός στην Κβαντική Ηλεκτροδυναμική ο Fermi [19], θεώρησε δύο άτομα, απουσία φωτονίων, σε απόσταση R μεταξύ τους (θα το δούμε με λεπτομέρεια στη συνέχεια). Το θεώρημα του Hegerfeldt είναι μια πιο γενική εκδοχή του προβλήματος των δύο ατόμων του Fermi. Η απόδειξη είναι βασισμένη στην αναλυτικότητα και σε θετικούς τελεστές. Η θετικότητα είναι πολύ μεγάλης σημασίας καθώς αυτό σημαίνει πως όλες οι μέσες τιμές αυτών θα παίρνουν μη-αρνητικές τιμές.

Αναλυτική είναι μια συνάρτηση που προσδιορίζεται τοπικά από συγκλίνουσες δυναμοσειρές, δηλαδή αν η σειρά Taylor συγκλίνει γύρω από το εκάστοτε σημείο x_0. Οι συναρτήσεις τέτοιου τύπου είναι απείρως διαφορίσιμες, γνωστές ως ομαλά διαφορίσιμες ή C^{∞}. Οι μιγαδικές αναλυτικές συναρτήσεις παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες που εν γένει δεν μπορούν να ισχύσουν σε πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις.

Η αναλυτικότητα της συνάρτησης είναι μεγάλης σημασίας, δεδομένου ότι μελετούμε διαδιδόμενα σήματα. Αφού η συνάρτηση είναι μια απεικόνιση της κυματοσυνάρτησης, το να είναι απείρως και ομαλά διαφορίσιμη θα μπορούσαμε να το μεταφράσουμε ως μια συνεχή στον χώρο και χρόνο, και ασφαλή(=ομαλή) διάδοση του σήματος, από μία αρχικά καλώς ορισμένη περιοχή (στην οποία εντοπίστηκε) σε μία άλλη.

Θεώρημα:

Έστω αυτοσυζυγής τελεστής H, θετικός και φραγμένος από κάτω, σε χώρο Χίλμπερτ $\mathscr{H}$. Για δεδομένο $\psi_0 \in \mathscr{H}$ και

$$\psi_t = e^{-iHt}\psi_0. \tag{3.1}$$

Έστω επίσης τελεστής A, παρομοίως θετικός στον $\mathscr{H}$. Το να είναι θετικός μόνο ο H δεν αρκεί, θα πρέπει να είναι και ο A ειδάλλως το θεώρημα δεν ευσταθεί.
Με $\mathrm{A} \geqslant 0$ και $p_A(t)$ (η οποία είναι συνεχής αφού ψ_t συνεχής) τέτοια ώστε

$$p_A(t) =< \psi_t, A\psi_t > \tag{3.2}$$

τότε

$$p_A(t) \neq 0 \tag{3.3}$$

για σχεδόν κάθε t, όπου το σύνολο των χρόνων είναι πυκνό και ανοιχτό και

$$p_A(t) \equiv 0 \tag{3.4}$$

για κάθε t.

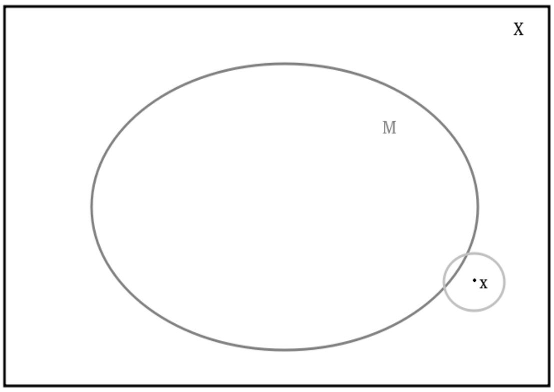
> Λέμε ότι το M είναι πυκνό στο X αν $\forall x \in X$ το x είναι οριακό σημείο του M. Δηλαδή οποιοδήποτε x και να πάρω κοντά το M, θα υπάρχει πάντα ένα μέρος του M σε αυτόν τον χώρο (και ας το πήρα εκτός του S). Αυτό σημαίνει ότι το S είναι πυκνό στο X.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε επιχειρήματα μιγαδικής ανάλυσης, και όπως είπαμε παραπάνω, θετικούς τελεστές.
Έχοντας θεωρήσει ότι ο H είναι φραγμένος από κάτω $\mathrm{H} \geq -c$, ορίζουμε $exp\{-iH(t+iy)\}$ για $y \leq 0$ και e^{-iHz} με $z = t + iy$ να είναι αναλυτικό στον z για $\mathcal{I}mz < 0$. Ως εκ τούτου η ψ_t μπορεί να συνεχίζεται αναλυτικά στο κάτω ημι-επίπεδο των αξόνων, έχοντας όμως συνεχής οριακές τιμές στον πραγματικό άξονα.

Η σχέση 3.2 γράφεται ισοδύναμα,

$$p_A =< \psi, e^{iHt}Ae^{-iHt} > \tag{3.5}$$

και αφού το $e^{i(H+iy)}$ είναι εν γένει μη φραγμένο για $y < 0$, κάνει την πιθανότητα να μην συνεχίζεται αναλυτικά στον πραγματικό άξονα.



Γι'αυτό αντικαθιστούμε στη σχέση 3.3 (από τη μιγαδική ανάλυση) την θετική ρίζα του A, όπου $A \mapsto A^{1/2}$. Έτσι έχουμε

$$p_A(t) =< A^{1/2}\psi_t, A^{1/2}\psi_t > \tag{3.6}$$

Ορίζουμε N_0 το σύνολο των χρονικών στιγμών στις οποίες η πιθανότητα $p_A(t) = 0$, όπου το N_0 κλειστό σύνολο, λόγω συνέχειας της πιθανότητας. Ομοίως ορίζουμε το συμπληρωματικό του N_0^c, το οποίο είναι ανοιχτό, δηλαδή το σύνολο για όλα εκείνα τα t στα οποία η $p_A(t) \neq 0$. Καταλήγουμε από την 3.6 ότι

$$A^{1/2}\psi_t = 0, t \in N_0. \tag{3.7}$$

Για ορισμένη $\varphi \in \mathscr{H}$ ορίζουμε συνάρτηση $F_\varphi(z)$ για $Imz \leq 0$ τέτοιο ώστε

$$F_\varphi(z) =< \varphi, \mathrm{A}^{1/2}e^{-iHz}\psi_0 > \tag{3.8}$$

Με δεδομένο ότι το εκθετικό της παραπάνω σχέσης είναι αναλυτικό στον z για $\mathrm{I}mz < 0$, η $F_\varphi(z)$ θα είναι μια συνεχής συνάρτηση και αυτή αναλυτική για $\mathrm{I}mz < 0$. Από την σχέση 3.7 καταλήγουμε στο ότι η

$$F_\varphi(t) = 0, t \in N_0. \tag{3.9}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι το συμπληρωματικό σύνολο N_0^c δεν είναι πυκνό. Δεδομένου ότι τα $\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_0^c$ επικοινωνούν χωρικά, το N_0 περιέχει ένα διάστημα I μη μηδενικού μήκους, έτσι ώστε η $F_\varphi(z)$ να εξαφανίζεται σε αυτό.

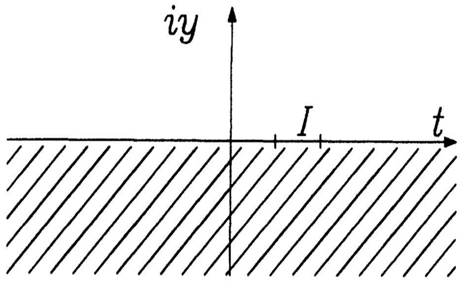
Ένα μη πυκνό σύνολο σε έναν τοπολογικό χώρο είναι ένα σύνολο του οποίου το κλείσιμο έχει κενό εσωτερικό. Δηλαδή τα σημεία του δεν είναι σφιχτά συγκεντρωμένα (όπως ορίζεται από την τοπολογία στον χώρο) οπουδήποτε. Ένα τέτοιο σύνολο δεν είναι πυκνό σε ένα σύνολο που δεν είναι ανοιχτό.

Κάνοντας χρήση του μαθηματικού αξιώματος (αντανάκλασης) του Schwarz, η εφαρμογή του οποίου είναι ένας τρόπος να επεκταθεί ο τομέας στον οποίο ορίζεται μια αναλυτική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής, η οποία ορίζεται στο άνω μισό επίπεδο και έχει καλώς ορισμένες οριακές τιμές στον πραγματικό άξονα, $F(\bar{z}) = \bar{F}(z)$.

Ως εκ τούτου $F_\varphi(t) = F_\varphi(z^*)^*$ για $\mathrm{I}mz > 0$.

Από την σχέση 3.7 καταλήγουμε στο ότι η $F_\varphi(t) = 0$ για $t \in N_0$. Αφού η $F_\varphi(t) = 0$ για $t \in I$ και έτσι είναι πραγματική για $t \in I$, θα συνεχίζει να είναι και για $z \in I$.

Έτσι αποδεικνύεται ότι $F_\varphi(z)$ είναι αναλυτική για $z \notin \Re\backslash I$ και ως εκ τούτου το διάστημα I συμπεριλαμβάνεται στον τομέα της αναλυτικότητας. Αφού η $F_\varphi(z)$ εξαφανίζεται στο I, θα πρέπει εξαιτίας αυτού, να εξαφανίζεται σε κάθε τομέα της αναλυτικότητας, δηλαδή για $z \notin \Re\backslash I$.



Αυτό σημαίνει ότι αφού η $F_\varphi(z)$ είναι συνεχής θα πρέπει να εξαφανίζεται παντού! Με φ τυχαίο, οδηγούμαστε σε $\mathrm{A}^{1/2}\psi_z = 0$ για κάθε t και ως εκ τούτου $\mathrm{A}\psi_t = 0$ για κάθε t, επομένως $p_A(t) \equiv 0$ αν το σύνολο N_0^c δεν είναι πυκνό.

Μένει να δείξουμε ότι το N_0 είναι ένα μηδενικό σύνολο αν η πιθανότητα $p_A(t) \neq 0 \forall t$. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, ως οριακή τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης $F_\varphi(t)$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\ln |F_\varphi(t)|}{1+t^2} > -\infty$$

αν δεν εξαφανιστεί ταυτοτικά.

Αν το N_0 είχε θετικό μέτρο το ολοκλήρωμα θα ήταν $-\infty$ και έτσι η $F_\varphi(t)$ θα εξαφανιζόταν πάλι για όλα τα t. Δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο στην περιοχή του τελεστή A μπορεί να είναι διάφορη του μηδενός, το διάστημα I (δηλαδή το διάστημα στο οποίο η πιθανότητα εξαφανίζεται) θα πρέπει να εμπεριέχεται σε ένα μηδενικό N_0. Και έτσι αποδεικνύεται το θεώρημα.

3.2 Εντοπισμός σωματιδίου

Έστω ότι εντοπίζουμε ένα σωματίδιο σε συγκεκριμένο χρόνο μέσα σε μια περιοχή όγκου V. Θα συμβολίσουμε , με $\mathrm{N}(V)$ την πιθανότητα, το σωματίδιο να βρεθεί στη συγκεκριμένη περιοχή. Ισχύει

$$0 \leq N(V) \leq 1 \tag{3.10}$$

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση ψ_0 σε $t = 0$ είναι αυστηρά εντοπισμένο μέσα στην περιοχή V_0, δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί εντός V_0 είναι 1. Έτσι παίρνουμε

$$< \psi_0, \mathrm{N}(V_0)\psi_0 >= 1 \tag{3.11}$$

ισοδύναμα θα ισχύει (για καθαρές καταστάσεις)

$$< \psi_0, (1 - N(V_0))\psi_0 >= 0 \tag{3.12}$$

όμως από την 3.10 θα ισχύει ότι $1 - N(V_0) \geq 0$ και έτσι

$$< \psi_t, N(V_0)\psi_t >\equiv 1 \tag{3.13}$$

για όλα τα t και

$$< \psi_t, N(V_0)\psi_t >< 1 \tag{3.14}$$

για σχεδόν όλα τα t.

Αν θελήσουμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω για μικτές καταστάσεις θα πρέπει να συμπεριλάβουμε στις παραπάνω σχέσεις την μήτρα πυκνότητας πιθανότητας

$$tr(\rho_0 \mathrm{N}(V_0)) \equiv 1$$

με $\rho_0 = \sum a_i |\psi_{i0} >< \psi_{i0}|$ και $\sum a_i = 1$ όπου συνεπάγεται ότι

$$\sum_i a_i < \psi_{i0}, N(V_0)\psi_{i0} >= 1 \tag{3.15}$$

όπου συνεπάγεται ότι

$$< \psi_{i0}, N(V_0)\psi_{i0} >= 1 \tag{3.16}$$

για όλα τα i.

Όπως και πριν θεωρούμε

$$tr(\rho_t N(V_0)) \equiv 1 \tag{3.17}$$

για όλα τα t και

$$tr(\rho_t N(V_0)) < 1 \tag{3.18}$$

για σχεδόν όλα τα t.

Οι σχέσεις της ισότητας $3.13, 3.17$ σημαίνουν ότι το σωματίδιο ή κβαντικό σύστημα που μελετούμε μένει εντός του V_0 σε κάθε χρονική στιγμή, όπως θα ίσχυε για μια δέσμια κατάσταση παρουσία κάποιου εξωτερικού δυναμικού.
Σε αυτό το σημείο καλό είναι να έχουμε ζωντανό στο μυαλό μας το σχήμα 3.1 για να καταλάβουμε την σημασία του να είναι το σύνολο στο οποίο γίνεται ο εντοπισμός πυκνό και ανοιχτό.

Αν το σωματίδιο είναι αυστηρά εντοπισμένο στον χώρο V_0 σε $t = 0$ θα είναι κατά συνέπεια το ίδιο αυστηρά εντοπισμένο και στην ευρύτερη περιοχή V, η οποία περικλείει τον V_0. Αν τα όρια αυτών των δύο περιοχών έχουν πεπερασμένη απόσταση, η ταχύτητα διάδοσης (του σήματος) θα πρέπει να είναι εξίσου πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι και η πιθανότητα να βρεθεί εντός του V θα είναι 1, για επαρκώς μικρούς χρόνους τύπου $0 \leq t \leq \varepsilon$.
Έτσι με $A \equiv 1 - N(V)$ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το σωματίδιο μένει στον V σε κάθε χρονική στιγμή.

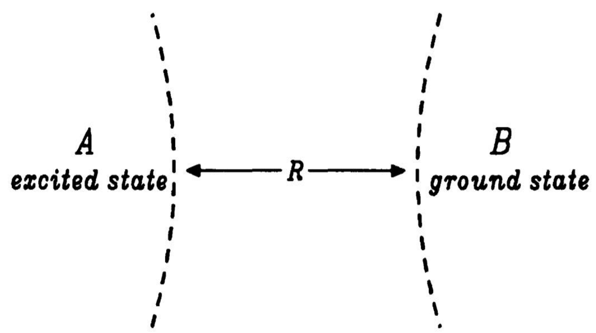
Αν μικρύνουμε τον V κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προσεγγίζει τον V_0, οδηγούμαστε στο ότι αν το σωμάτιο είναι αυστηρά εντοπισμένο εντός V_0 σε $t = 0$, τότε θα πρέπει να μένει εντός του V_0, σε κάθε χρονική στιγμή αφού η ταχύτητα διάδοσης είναι πεπερασμένη, επομένως αποκλείεται να μεταδοθεί προς το άπειρο.

Αν για $t = 0$ ένα σωμάτιο είναι αυστηρά εντοπισμένο σε μια οριοθετημένη περιοχή V_0 τότε, εκτός από την περίπτωση κατά την οποία παραμένει σε αυτήν περιοχή (πχ, παρουσία κάποιου εξωτερικού δυναμικού), δεν είναι δυνατόν να εντοπιστεί σε κάποια άλλη ομοίως οριοθετημένη περιοχή V, οσοδήποτε μεγάλη, για οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Αν αυτό συμβεί το σωματίδιο θα αναπτύξει ουρές που τείνουν στο άπειρο.

Η εξάπλωση (spreading), οφείλεται προφανώς στον κυματικό χαρακτήρα της ύλης (προσέγγιση πεδίου) και γίνεται πάνω σε όλο τον χώρο, εκτός από ενδεχόμενες «περιοχές-τρύπες»(βλ. διάστημα I),σαν λούπες θα λέγαμε, στις οποίες εξαφανίζεται απότομα. Καθώς αυτές εμπεριέχονται στις ευρύτερες περιοχές στις οποίες επιχειρήσαμε τον εντοπισμό, αν υπάρχουν, θα ισχύουν για όλους τους χρόνους , με τα ίδια επιχειρήματα όπως πριν. Εάν η θεωρία είναι αμετάβλητη κατά τη μεταφορά (translation invariance), τότε δεν μπορεί να υπάρχουν τρύπες, όπως φαίνεται σε κάποιο φυσιολογικό φάσμα.

3.2.1 Το πρόβλημα των δύο ατόμων του Fermi

Σε χρόνο $t = 0$ το άτομο A υποτίθεται ότι είναι σε διεγερμένη κατάσταση $|e_A >$ ενώ το B στη θεμελιώδη $|g_B >$,και σε απόσταση R μεταξύ τους. Το άτομο A σε κάποια φάση αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα φωτόνιο το οποίο απορροφά με τη σειρά του το άτομο B.



Το ερώτημα που θέτει ο Fermi είναι πότε ακριβώς θα αντιληφθεί το B την αποδιέγερση του A, έτσι ώστε να αρχίσει να θέλει να ″φύγει″ από τη θεμελιώδη. Σύμφωνα με την αιτιότητα του Einstein αυτό δεν μπορεί να συμβεί με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός. Σίγουρα μετά από $t = R/c$, όπως προέβλεψαν και οι υπολογισμοί του Fermi.

Ωστόσο αποδεικνύεται πως μάλλον είχε πολύ ισχυρή αιτιότητα στο μυαλό του. Τριάντα χρόνια μετά ο Shirokov [20] αποδεικνύει πως το αποτέλεσμα του Fermi, δεν είναι παρά μια προσέγγιση καθώς έχει ορίσει το ολοκλήρωμά του από $-\infty$ στο ∞. Αν συμπεριλάβουμε μόνο θετικές τιμές δεν θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Διάφορες συζητήσεις έγιναν επ' αυτού και όλες καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το ″τοπικό″ αποτέλεσμα που βγάζει ο Fermi αφενός μεν δεν είναι σωστό, αφετέρου δεν μπορούμε να το δεχτούμε ως επιχείρημα υπερφωτεινών σημάτων δεδομένου ότι οι μετρήσεις που θα κάνουμε στο A και στο B στην πραγματικότητα συμπεριλαμβάνουν φωτόνια.

Αυτό που πραγματικά χρειάζεται προκειμένου να δείξουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας από το A στο B είναι πεπερασμένη αρκεί να δείξουμε ότι η πιθανότητα να διεγερθεί το B είναι ανεξάρτητη από την κατάσταση του A και από παρουσία φωτονίων. Για να είναι σωστοί οι υπολογισμοί μας θα πρέπει να συμπεριλάβουμε τα φωτόνια και να θεωρήσουμε τις πιθανότητες ως αθροίσματα πάνω στις καταστάσεις.

Συγκεκριμένα θεωρούμε την πιθανότητα να βρεθεί το B σε διεγερμένη, το άθροισμα πάνω σε όλες τις καταστάσεις $|e_B >$ του B, αντίστοιχα για την διεγερμένη κατάσταση του A, άθροισμα πάνω σε όλες τις καταστάσεις $|i_A >$ του A και τέλος άθροισμα πάνω σε όλες των φωτονίων $|n >$ αντίστοιχα. Έτσι με αρχική κατάσταση $|\psi_0^{bare} >= |e_A > |g_B > |0_{ph} >$, να προκύψει ένας τελεστής που να αναπαριστά τις bare[2] διεγερμένες καταστάσεις:

$$\mathcal{O}_{e_B}^{bare} \equiv \mathbb{1}_A \times \sum_{e_B} |e_B >< e_B| \times \mathbb{1}_F.$$

Ωστόσο, ακόμη και αν δεν υπάρχει ούτε το άτομο A, ούτε φωτόνια, το άτομο B θα διεγερθεί από τις ταυτόχρονες αποδιεγέρσεις φωτονίων. Θα πρέπει να προσεγγίσουμε αυτήν την κατάσταση με θεωρία διαταραχών και επανακανονικοποίηση. Όπου η αρχική κατάσταση τώρα δεν θα είναι η ίδια με πριν,

$$|\psi_0 > \neq |e_A > |g_B > |\varphi_{ph} > .$$

Όπως επίσης και ο προβολικός τελεστής που μας δείχνει το αν είναι ή όχι (01) σε διεγερμένη δεν θα είναι το ίδιο (ανεξάρτητα με το ότι παίρνει τις ίδιες τιμές με πριν)

$$\mathcal{O}_{e_B} \neq \mathcal{O}_{e_B}^{bare}$$

[2] bare state= υπονοεί την σύζευξη με το κενό $|1 > \otimes |\Omega >$

με αναμενόμενη τιμή σε δεδομένο t

$$< \psi_t | \mathcal{O}_{e_B} | \psi_t > .$$

Είναι προφανές ότι μιλάμε για ένα πρόβλημα εντοπισμού συστημάτων Α και Β αρχικά αυστηρώς εντοπισμένων. Για την απόδειξη θα βασιστούμε και πάλι σε θετικές ενέργειες και αναλυτικότητα. Έχοντας θεωρήσει $P_B^e(t) = 0$ για $0 \leqslant t \leqslant R/c$ και ακολουθώντας τα ακριβώς ίδια βήματα με πριν, καταλήγουμε και πάλι στο ότι παραβιάζεται η αιτιότητα του Einstein αν θεωρήσουμε ότι μπορεί να μεταδοθεί η πληροφορία ανάμεσα σε μια ”πηγή” και έναν ”ανιχνευτή”, χωροειδώς απομακρυσμένα.

Το πρόβλημα των δύο ατόμων του Fermi παραμένει ανοιχτό και αποτελεί αντικείμενο έρευνας θεμελίωσης με σκοπό την πραγμάτωση πειραμάτων, προκειμένου να λυθούν προβλήματα μη τοπικότητας στην Κβαντική όπως και να απαντηθούν ερωτήματα τηλεμεταφοράς.

3.2.2 Πείραμα του Nimtz

Ένα παρόμοιο πρόβλημα προέκυψε πρόσφατα (1993) όταν ο G. Nimtz [12] με τους συνεργάτες του έκαναν το εξής πείραμα.

Δύο παλμοί μικροκυμάτων εισέρχονται στροβοσκοπικά σε δύο διαδρομές ενός παλμογράφου. Στην μια από τις δύο διαδρομές τοποθετείται φωτονικό φράγμα με σκοπό να εξασθενεί τον παλμό, ο οποίος φτάνοντας στο τέλος της διαδρομής ανακτά το αρχικό του πλάτος και επανατοποθετείται μαζί με τον άλλο παλμό κατά τον ίδιο τρόπο (στροβοσκοπικά) στον παλμογράφο. Φαίνεται πως ο παλμός που πέρασε από το φράγμα φτάνει νωρίτερα με ανησυχητικά μεγάλη ταχύτητα υπονοώντας ότι έχει κάνει κβαντικό άλμα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

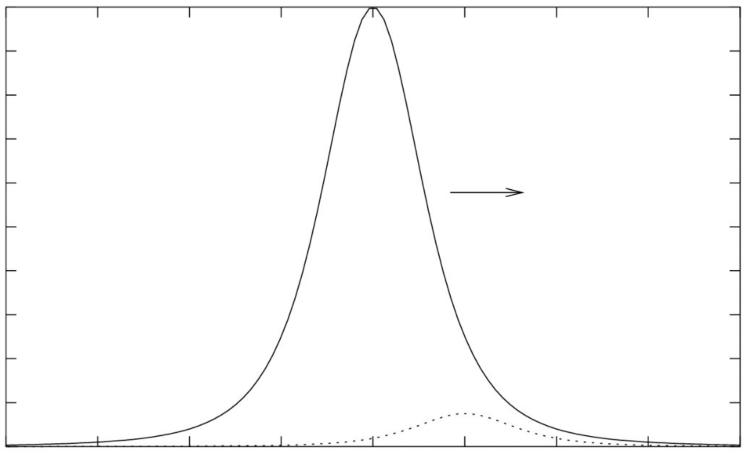


Figure 1: Typical behavior of airborne pulse (solid line) and tunneled pulse (dashed line), traveling from left to right (not to scale). In the experiments, the amplitude of the latter is always smaller than that of the non-tunneled pulse, although its maximum arrives at an earlier time.

Την εξήγηση αυτής της συμπεριφοράς έδωσαν πολλές ερμηνείες. Οι ίδιοι (Nimtz και οι συνάδελφοί του, απέδωσαν την γρηγοράδα του παλμού στο εξασθενημένο πλάτος του καθώς ένας παλμός με μικρότερο πλάτος είναι γρηγορότερος από έναν με μεγαλύτερο.

Ο Hegerfeldt [11] θεωρεί πως η βασική παρεξήγηση έγκειται στο πως εννοεί το όριο της ταχύτητας του φωτός ως όριο σήματος. Συγκεκριμένα, ο Einstein οριοθετεί όλα τα μεταδιδόμενα σήματα με την ταχύτητα του φωτός, θεωρώντας ότι ο αρχικός χρόνος όπου το πείρα μα τέθηκε σε λειτουργία, δηλαδή όταν ”πατήθηκε” το κουμπί. Η στιγμή της ανίχνευσης ορίζεται ως εκείνη της πρώτης υπόνοιας ανταπόκρισης της μετρητικής συσκευής. Εδώ γίνεται και ο βασικός διαχωρισμός. Πειραματικά, ο χρόνος που ανιχνεύθηκε το σήμα ορίζεται ως εκείνος που πήραμε την ένδειξη στην οθόνη, αυτή η διαφορά με τον πρώτο ορισμό αν και μικρή, δημιουργεί πολλές παρεξηγήσεις και είναι ικανή να μας οδηγήσει σε πολύ λάθος συμπεράσματα.

Στην προσπάθεια να απαντήσουν στο παράδοξο των υπερφωτεινών σημάτων εντός φραγμάτων δυναμικών, ο κ. Αναστόπουλος μαζί με τη συνεργάτιδά του κα. Σαββίδου [13] προτείνουν μια πολύ προσεκτική προσέγγιση του χρόνου εντός φράγματος και τον ρόλο αυτού στον διϋσμό σωματιδίου-πεδίου. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούν μια νέα μέθοδο κατασκευής πιθανοτήτων που σχετίζονται με την κβαντική μέτρηση του χρόνου, προμηθεύοντας έτσι μια σύνδεση ανάμεσα στα πεδία και τον χρόνο εντός φράγματος.

Υπολογίζουν ότι θα υπάρχει μια καθυστέρηση εντός η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$t_d(k) = \frac{1}{\upsilon_k} Im \frac{\partial log A_k}{\partial k}$$

όπου A_k το μιγαδικό πλάτος του σήματος στο οποίο εμπεριέχεται όλη η πληροφορία σχετικά με το φράγμα. Ωστόσο ο χρόνος αυτός δεν θα αποτελέσει παρατηρήσιμο μέγεθος στην Κβαντική αλλά μια παράμετρο της πιθανότητας $P(L,t)$ που είναι και το ζητούμενο. Για να δεχθούμε υπερφωτεινά σήματα εντός φράγματος θα πρέπει να σκεφτούμε πιο "κλασικά" στο διάστημα του t_d κάτι που αντιτίθεται στην Κβαντική μας περιγραφή. Θα μπορούσαμε να δεχτούμε ότι το παράδοξο αυτό οφείλεται στον διυσμό πεδίου-σωματιδίου μιας και οι ταχύτητες των κυματοπακέτων μπορούν να φανούν παραπλανητικά μεγαλύτερες από το επιτρεπόμενο όριο.

4 Επίλογος

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε λεπτομερώς το γιατί δεν μπορεί εύκολα να υπάρξει κοινό έδαφος για μια Σχετικιστική και μια Κβαντική Θεωρία. Μελετώντας την ιστορία της πληροφορίας, τον ρόλο της εντροπίας ως μέτρο ποσοτικοποίησης της αβεβαιότητας στην προσπάθεια του εντοπισμού ενός κβαντικού συστήματος, τις αρχές που διέπουν την κάθε θεωρία, καταλήγει κάποιος ότι είναι τωόντι δύσκολο εγχείρημα να συμφιλιωθούν αυτές οι θεωρίες. Χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η Σωματιδιακή Φυσική είναι ελλιπής, ότι η Κβαντική Θεωρία δεν έχει θεμελιωθεί ακόμα ή ότι η Σχετικότητα χρήζει επαναπροσδιορισμού.

Όσο και αν ποθούμε την ύπαρξη υπερφωτεινών σημάτων (το οποίο στην πραγματικότητα θα ήταν μεγάλος μπελάς καθώς θα έπρεπε να αλλάξει το μαθηματικό οικοδόμημα και στις δύο θεωρίες !!!), θεωρήματα σαν του Malament και σαν του Hegerfeldt να μας αποδεικνύουν το αντίθετο, ενισχύοντας μας την πεποίθηση ότι τόσο η Κβαντική είναι πλήρης όσο και η Σχετικότητα. Ωστόσο μένουν πολλά ερωτήματα να απαντηθούν, όπως το πρόβλημα του Fermi, τι ακριβώς συμβαίνει στο θάλαμο φυσαλίδας και δημιουργούνται εκ του μηδενός σωματίδια ύλης-αντιύλης, πως μεταδίδεται η πληροφορία ανάμεσα στον Bob και την Alice (EPR) που σημαίνει ότι υπάρχει πολύ δουλειά ακόμα να γίνει. Είναι απαραίτητο να απαντηθούν όλα αυτά προκειμένου να θεμελιωθεί μια θεωρία Κβαντικής Πληροφορίας με στόχο την ανάπτυξη και εξέλιξη της Κβαντικής Υπολογιστικής.

Για την επίτευξη του στόχου αυτού έχουν στηθεί πειράματα Κβαντικής Οπτικής από δορυφόρους της Nasa (ISS) προκειμένου να μελετηθούν σχετικιστικές ταχύτητες και αποστάσεις, για αρχή σε απόσταση Γης-Σελήνης. Η απάντηση στο τι μπορεί να συμβαίνει κατά την μετάδοση της πληροφορίας από το ένα κβαντικό σύστημα στο άλλο, καθώς και ο ακριβής προσδιορισμός της ταχύτητας με την οποία μεταφέρεται αυτή η πληροφορία, θα μας βοηθήσει να απαντήσουμε σε προβλήματα εναγκαλισμού στην Κβαντική Κρυπτογραφία Υπερεπιπέδων, Κβαντικής μη- τοπικότητας (EPR) όπως και υπέρπυκνης τηλεμεταφοράς, κάτι το οποίο θα αποτελέσει την βάση για την ανάπτυξη μιας θεωρίας Πληροφορικής σε Κβαντικούς Υπολογιστές.

Το ενθαρρυντικό είναι πως έχει ξεκινήσει προγραμματισμός για μελλοντικές έρευνες προς την Θεμελίωση όλων αυτών των ζητημάτων με σκοπό το στήσιμο πειραμάτων στο διάστημα. Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε κάποια από αυτά.

Name	Scale	Timeframe	Regime
Entanglement Tests			
•Long distance Bell-test	LEO and beyond	near-term	Standard QM
•Bell-test with human observers	Earth-Moon	long-term	QM and free-will
•Detectors in relative motion	LEO	mid-term	Standard SR
Amplified entanglement	LEO	near–mid-term	QM
Bimetric gravity	LEO	near-term	Test non-standard theory
Special and General Relativistic Effects			
•Lorentz transformed polarization	LEO and beyond	mid-term	QM + SR
Relativistic frame dragging	TBD	TBD	QM + GR
•Entanglement with curvature	TBD	visionary	QM + GR
•Fermi problem	Sunshielded satellites	long-term	QFT
Optical Colella-Overhauser-Werner experiment	LEO and beyond	near-term	QM + GR
Accelerating Detectors in Quantum Field Theory			
Acceleration induced fidelity loss	TBD	visionary	QFT + GR
Berry phase interferometry	LEO	mid-term	QFT + GR
Gravitationally induced entanglement decorrelation	LEO and beyond	near-term	Non-standard QFT + GR
•Spacelike entanglement extraction	TBD	visionary	QFT + GR
Quantum Gravity Experiments			
Diffusion of polarization	TBD, solar system?	visionary?	QG
Spacetime noncommutativity	TBD	unknown	QG
Relativity of locality	TBD, solar system?	unknown	QG
Quantum Communication and Cryptographic Schemes			
Quantum tagging	LEO–GEO	near-term	QM + SR
Quantum teleportation	LEO	near-term	Standard QM

jpl.nasa.gov

Σχήμα 4.1: Space Quantum Optics, Makan Mohageg, Jet Propulsion Laboratory Paul Kwiat, University of Illinois
Urbana-ChampaignMakan.Mohageg@jpl.nasa.gov(818)
Symposium on Future Quantum Research in SpaceNASA Fundamental Physics and Quantum Technology Workshop 201

A

A.1 Τοπολογία

Τοπολογία

Είναι η μελέτη των συνόλων στα οποία μπορεί να οριστεί μια έννοια ”κλειστότητας” έτσι ώστε να διακρίνεται η συνέχεια για οποιαδήποτε συνάρτηση που ορίζεται σε αυτά. Είναι συνεπώς ένα είδος γενικευμένης γεωμετρίας αφού θεωρούμε και εδώ σχήματα. Δεν μας ενδιαφέρει όμως η διάσταση ή μια γενικευμένη ανάλυση αφού εστιάζουμε στην συνέχεια ή μη κάποιων συναρτήσεων. Αντικείμενο μελέτης είναι ο Τοπολογικός Χώρος.

Η Τοπολογία βασίζεται ουσιαστικά στις έννοιες του τοπολογικού χώρου και του ομοιομορφισμού. Επίσης δηλώνεται η συλλογή ανοιχτών συνόλων που ορίζουν έναν τοπολογικό χώρο.

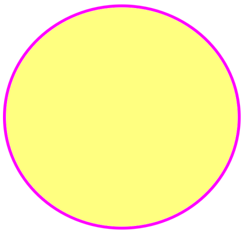
Για παράδειγμα, ένας στέρεος κύβος και μια στέρεη σφαίρα είναι ομοιόμορφα, μπορούμε δηλαδή να παραμορφώσουμε το ένα μέχρι να εξασφαλίσουμε το άλλο χωρίς να κολλήσουμε ή να σχίσουμε οτιδήποτε : δεν είναι όμως δυνατόν για παράδειγμα να παραμορφώσουμε μια σφαίρα σε έναν κύκλο με τον ίδιο τρόπο, επειδή *η διάσταση ενός αντικειμένου είναι μια τοπολογική ιδιότητα. που δεν αλλάζει με τις μεταμορφώσεις*. Υπό αυτήν την έννοια η τοπολογία ερευνά τις βαθύτερες ιδιότητες των γεωμετρικών σημάτων.

A.2 Ανοιχτό σύνολο

Ανοιχτό σύνολο

Τα ανοιχτά σύνολα ορίζουν έναν τοπολογικό χώρο. Στην Τοπολογία το ανοιχτό σύνολο, είναι μια αφηρημένη έννοια που γενικεύει την ιδέα ενός ανοιχτού διαστήματος στον πραγματικό άξονα. Το απλούστερο παράδειγμα είναι σε μετρικούς χώρους όπου ανοιχτά σύνολα μπορούν να οριστούν ως εκείνα τα σύνολα που περιέχουν μια σφαίρα γύρω από κάθε ένα από τα σημεία τους(ή ισοδύναμα, ένα σετ είναι ανοιχτό αν δεν περιέχει κανένα από τα όρια).(Βλέπε σχήμα Α.1)

Ωστόσο, ένα ανοιχτό σετ γενικά μπορεί να είναι πολύ αφηρημένο : κάθε συλλογή συνόλων μπορεί να ονομαστεί ανοιχτή, αρκεί να είναι ανοιχτή η ένωση ενός αυθαίρετου αριθμού ανοιχτών συνόλων , η διασταύρωση ενός πεπερασμένου αριθμού ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτή και ο ίδιος ο χώρος είναι ανοιχτός. Αυτές οι συνθήκες είναι πολύ χαλαρές και επιτρέπουν τεράστια ευελιξία στην επιλογή των ανοιχτών σετ. Στα δύο άκρα, κάθε σετ μπορεί να είναι ανοιχτό (διακριτική τοπολογία) ή κανένα σύνολο να είναι ανοιχτό αλλά να είναι ο ίδιος ο χώρος, πχ. το κενό σύνολο.



Εδώ ο μωβ κύκλος αντιπροσωπεύει ένα σύνολο που οριοθετεί και όλα τα σημεία του ικανοποιούν στην εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$. Ο κίτρινος κύκλος είναι ένα σύνολο του οποίου όλα τα σημεία ικανοποιούν την $x^2 + y^2 < R^2$. Ο συνδυασμός αυτών των δύο αποτελεί ένα κλειστό σύνολο.

Α.3 Θεώρημα Stone

Θεώρημα Stone

Έστω $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ μια ισχυρά συνεχής μονοπαραμετρική μοναδιαια ομάδα. Τότε υπάρχει μοναδιαίος (πολύ πιθανό μη φραγμένος) τελεστής

$$\mathrm{A} : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{H}$$

που είναι αυτοσυζυγής στον $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ έτσι ώστε:

$$\forall t : \mathbb{R} : U_t = e^{itA}$$

ο τομέας του A ορίζεται ως

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{\ \psi \in \mathcal{H} | \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-i}{\varepsilon}(U_\varepsilon(\psi) - \psi) exists\}$$

Στα μαθηματικά το θεώρημα του Stone μιας μονοπαραμετρικής μοναδιαίας ομάδας είναι ένα βασικό θεώρημα στη συναρτησιακή ανάλυση που εξασφαλίζει την ένα-προς-ένα αντιστοιχία ανάμεσα σε έναν αυτοσυζυγή τελεστή του χώρου Χίλμπερτ $\mathcal{H}$ και μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας ισχυρώς συνεχών μοναδιαίων τελεστών $U(t)_{t\in\mathcal{R}}$.

Δηλαδή

$$\forall t_0 \in \mathcal{R}, \psi \in \mathcal{H} : \lim_{t\to t_0} U_t(\psi) = U_{t_0}$$

και είναι ομομορφισμός δηλαδή:

$$\forall s, t \in \mathcal{R} : U_{s+t} = U_s U_t$$

B Λήμμα Borchers

Έστω ότι έχουμε συνεχή αναπαράσταση μονοπαραμετρικής ομάδας $U(t)$ με φάσμα ημι-φραγμένο από κάτω. Επίσης E και F δύο προβολικοί τελεστές τέτοιοι ώστε:

$$U(t)EU^{-1}(t)F = FU(t)EU^{-1}(t)$$

για

$$|t| < 1.$$

Αν $EF = 0$ τότε $U(t)EU^{-1}(t)F = 0$ για κάθε t.

απόδειξη

Ας κάνουμε μια πιο "ειδική" υπόθεση, ότι το φάσμα του $U(t)$ είναι φραγμένο. Έτσι έχει τη μορφή

$$U(t) = e^{itP}$$

όπου P φραγμένος αυτοσυζηγής τελεστής και ως εκ τούτου $\frac{d^n}{dt^n}U(t)EU^{-1}(t)$ επίσης φραγμένος και

$$\frac{d^n}{dt^n}U(t)EU^{-1}(t) = U(t)\{\frac{d^n}{d\tau^n}U(\tau)EU^{-1}(\tau)\}_{\tau=0}U^{-1}(t)$$

.

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί ώς

$$U(t)\{A_n^+ - A_n^-\}U^{-1}(t)$$

όπου A_n^+ και A_n^- είναι το θετικό και αρνητικό μέρος αντίστοιχα του $\frac{d^n}{d\tau^n}U(\tau)EU^{-1}(\tau)\}_{\tau=0}$ και είναι εξίσου φραγμένα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη αποδείξει ότι $F(A_n^+ - A_n^-) = 0$ για $n = 0, 1, ..., N$ θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει και για $n = N + 1$.

$F(A_N^+ - A_N^-) = 0 \Rightarrow FA_N^+ = FA_N^-$ όπου $FU(t)A_N^+U^{-1}(t)$ είναι ένας θετικός τελεστής για $|t| < 1$. Για κάθε τυχαίο $\psi \in \mathscr{H}$ η συνάρτηση

$$(\psi, FU(t)A_N^+U^{-1}(t)\psi)$$

είναι αναλυτική σε t, θετική για πραγματικό t με $|t| < 1$ και μηδέν για $t = 0$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι μηδενικού ή δεύτερου βαθμού και από την ανισότητα Schwartz προκύπτει:

$$|(\psi, FU(t)A_N^+U(-t)\psi)| \leq |t|^2||\psi||^2||A_N^+||e^{||P||}$$

και

$$|(\psi, FU(t)A_N^-U(-t)\psi)| \leq |t|^2||\psi||^2||A_N^-||e^{||P||}$$

για $|t| < 1$

Αυτό συνεπάγεται ότι $F\frac{d^N}{dt^N}U(t)EU^{-1}(t)$ είναι μηδέν ή δεύτερου βαθμού σε $t = 0$ και ως εκ τούτου $F\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}U(t)EU^{-1}(t)$ είναι μηδέν σε $t = 0$.

Αφού υποθέσαμε αρχικά ότι $FU(t)EU^{-1}(t)$ είναι μηδέν για $t = 0$ κατ' επαγωγή η $F\frac{d^N}{dt^N}U(t)EU^{-1}(t)$ για κάθε n μηδέν σε $t = 0$.

Εφόσον ο P είναι ένας φραγμένος τελεστής βλέπουμε ότι $FU(t)EU^{-1}(t)$ είναι αναλυτική συνάρτηση και ως εκ τούτου **ταυτοτικά μηδέν**.

Ομοίως αποδεικνύεται και σε μια γενικότερη περίπτωση, όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε υποθέσει ότι $U(t) = e^{itP}$ με P θετικό τελεστή. (βλέπε Borchers [5])

Βιβλιογραφία

[1] ″Quantum information and arelativity Theory.″ (2003)
Asher Peres, Deprtment of Physics, Technion-Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, Israel
Daniel R. Terno, Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo, Ontario, Canada N2J 2W9
arXiv:quant-ph/0212023v2

[2] ″Κβαντική Μηχανική, Πανεπιστήμιο Πατρών ″,
Χάρης Αναστόπουλος,
εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2019 7

[3] D. Malament, "In Defence of Dogma: Why There Can Not Be A Relativistic Quantum Mechanics of (Localizable) Particles", in ″Perspectives on Quantum Reality″,
ed. R. Clifton
(Kluwer Academic, Dordrecht 1996) 15

[4] Newton, T.D. and E. P. Wigner, 1949, Rev. Mod. Phys**21**, 400 ''Localized States For Elementary Systems'' 23

[5] Borchers, H. J. (1967), "A Remark on a Theorem of B. Misra", Communications in Mathematical Physics $4 : 315 - 323$. 41

[6] Charis Anastopoulos and Ntina Savvidou, ″ Time of arrival and localization of relativistic particles″
arXiv:1807.06533 25

[7] C. Anastopoulos and N. Savvidou, ''Time-of-arrival Probabilities for General Particle Detectors'', Phys. Rev. A86, 012111 (2012). 25

[8] G.N. Fleming, Phys. Rev. B**139**, 963(1965) 28

[9] S. Schlieder, in: ''Quanten und Felder'', ed. by H.P. Dürr (Vieweg, Braun- schweig, 1971), p. 145 28

[10] G. C. Hegerfeldt ''Causality, particle lacalization and positivity of the energy'' (1998)
arXiv:quant-ph/9806036v1 15

[11] G. C. Hegerfeldt ''Particle localization and the notion of Einstein Causality''
arXiv:quant-ph/0109044v1 35

[12] A. Enders and G. Nimtz, Phys. Rev. E**48** 632 (1993) 35

[13] Charis Anastopoulos and Ntina Savvidou, ''Quantum Temporal probabilities in tunneling systems: II.
No faster-than-light signals are possible in tunneling ''
arXiv: 1212.6508v1 36

[14] G.C. Hegerfeldt, Phys. Rev. D**10**, 3320 (1974) 28

[15] G.C. Hegerfeldt and S.N.M. Ruijsenaars, Phys. Rev. D**22**, 377 (1980) 28

[16] G.C. Hegerfeldt, Phys. Rev. Lett. **54**, 2395 (1985) 28

[17] J.F. Perez and I.F. Wilde, Phys. Rev. D**16**, 315 (1977) 28

[18] B. Skagerstam, Int. J. Theor. Phys. **15**, 213 (1976) 28

[19] G.C. Hegerfeldt, Phys. Rev. Lett. **72**, 596 (1994) 30

[20] M. I. Shirokov, Yad. Fiz. 4, 1077 (1966) [Sov. J. Nucl. Phys. 4, 774(1967) 34