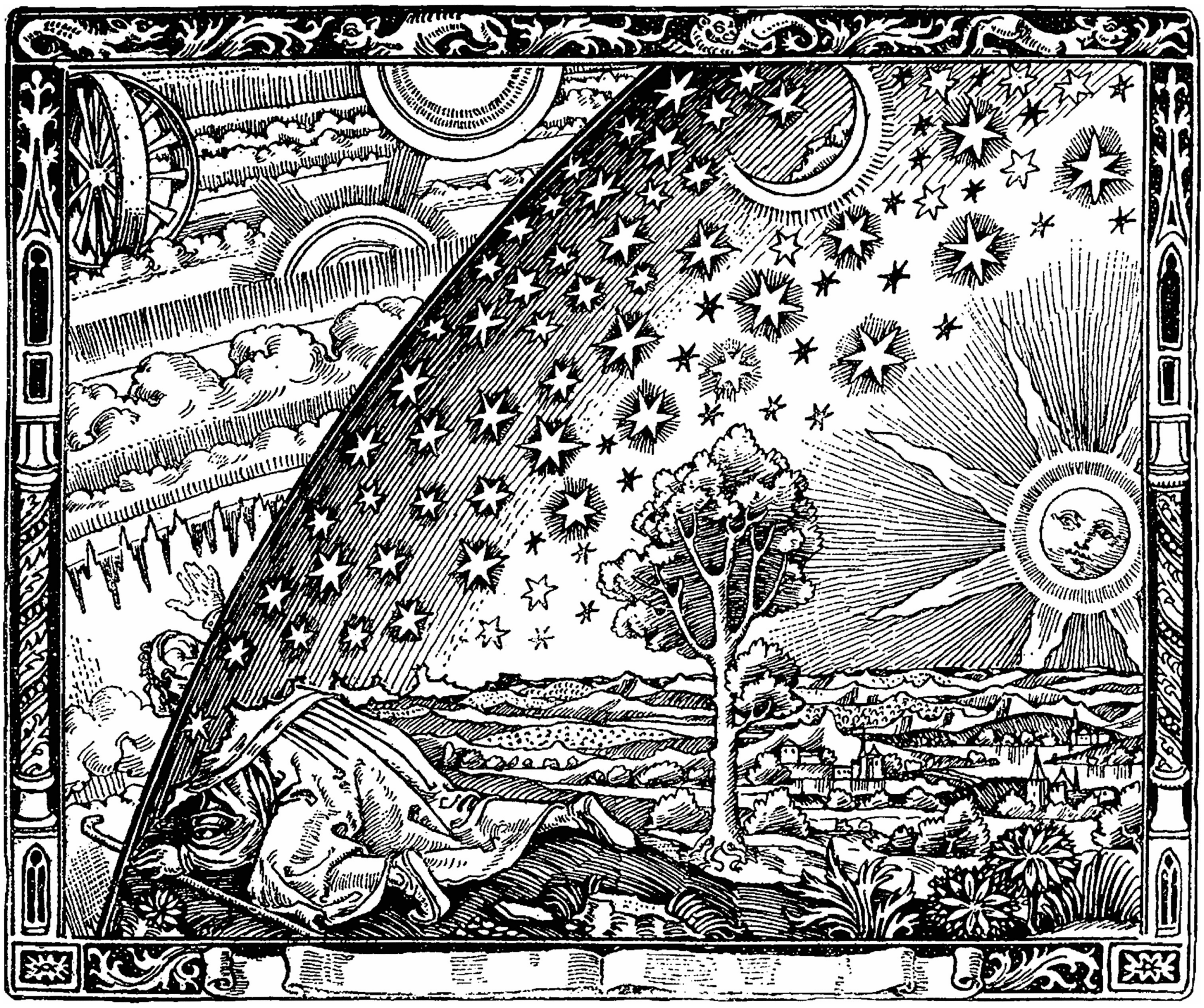
Ομοιογενείς Κοσμολογίες



Δημήτρης Π. Μάγγος

Διπλωματική Εργασία

Υπεύθυνος: Ιωάννης - Σωτήριος Μπάκας

Abstract

In this thesis a description of formalism *Hamiltonian*, ADM, for gravitational systems. Also a classification of three-dimensional homogeneous cosmological models in *Bianchi* and which has been applied the *Hamiltonian* formalism in one of the cosmological models, namely the model *Bianchi* IX, showing the chaotic behavior of this model, which is a relativistic effect. There was also a brief reference to generalized theories for gravity which give interesting results, such as a renormalizable theory, and the application of a specific model in *Bianchi* IX.

Περίληψη

Σε αυτήν την μεταπτυχιακή εργασία γίνεται περιγραφή του φορμαλισμού *Hamiltonian*, ADM, για τα βαρυτικά συστήματα. Επίσης έγινε ταξινόμηση των τριδιάστατων ομογενών κοσμολογικών μοντέλων κατά *Bianchi* όπου και έγινε εφαρμογή του *Hamiltonian* φορμαλισμού σε ένα από τα κοσμολογικά μοντέλα, συγκεκριμένα στο μοντέλο *Bianchi* IX, όπου εμφανίζεται η χαοτική συμπεριφορά αυτού του μοντέλου , η οποία αποτελεί ένα σχετικιστικό φαινόμενο. Επίσης έγινε μία σύντομη αναφορά σε γενικευμένες θεωρίες για την βαρύτητα οι οποίες δίνουν ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως μία επανακανονικοποιησιμή θεωρία, καθώς και η εφαρμογή ενός συγκεκριμένου μοντέλου στην *Bianchi* IX.

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλους πρέπει να ευχαριστίσω τους γονείς μου που με στήριζαν όλα αυτά τα χρόνια αλλά κυρίως κατά την εκπόνηση της εν λόγω εργασίας. Δεύτερον τον καθηγητή και υπεύθυνο μου, Ιωάννη Μπάκα, όπως επίσης και τους μεταδιδακτορικούς ερευνητές Ιωάννη Νταλιάνη και Φώτη Φαράκο για τις πολύτιμες συμβουλές τους. Τέλος ευχαριστώ τους φίλους μου για την υποστήριξή τους.

Στους φίλους μου!!!

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η μελέτη των φυσικών φαινομένων αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο ο οποίος έχει απασχολήσει την ανθρωπότητα για αιώνες τώρα (π.χ. σε διάφορους πολιτισμούς, όπως ο Ελληνικός, είχε γίνει η μελέτη της κίνησης των πλανητών και προσπαθούσαν να βρουν τους νόμους που τους διέπουν.). Συνεπώς η φυσική επιστήμη εξελισσόταν συνεχώς μαζί με αυτήν και τα μαθηματικά ύστερα από την εποχή του *Newton*, ο οποίος εισήγαγε έναν ενιαίο φορμαλισμό για τα φυσικά συστήματα, όπου και επήλθε η τεράστια ανάπτυξη της φυσικής επιστήμης μέχρι την εποχή μας που αναπτύχθηκε η κβαντομηχανική. Ύστερα από την σημαντική συνεισφορά του *Newton* ήρθαν διάφοροι επιστήμονες μεταξύ αυτών και οι *Lagrange*, *Hamilton* και επινόησαν τους αντίστοιχους φορμαλισμούς, *Lagrangian* & *Hamiltonian*, οι οποίοι γενικεύουν την ανάλυση κατά *Newton*, κι έχουν εφαρμογή σε όλα τα φυσικά συστήματα, καθώς μπορούν να περιγράψουν γενικότερα συστήματα, όπως αυτά τις ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Μαζί με την ανάπτυξη των φορμαλισμών εξελίχθηκαν και οι φυσικές θεωρίες από την *Newtonian* θεωρία για την βαρύτητα περάσαμε στην εποχή της σχετικότητας, ειδικής και γενικής, καθώς και από την κλασική στην κβαντική μηχανική. Καθώς η γενική θεωρία της σχετικότητας μελετάει την δυναμική του ίδιου του χωρόχρονου ως οι παραμορφώσεις της γεωμετρίας του. Από την ανάλυση κατά *Lagrange* της γενικής θεωρίας της σχετικότητας εξάγονται οι εξισώσεις πεδίου του *Einstein* ο αντίστοιχος *Hamiltonian* φορμαλισμός ήταν επινόηση των *Arnowitt*, *Desser*, *Misner* ο οποίος εισαχθεί με σκοπό την κβαντική περιγραφή της βαρυτικής αλληλεπίδρασης.

Η ανάπτυξη των διαφόρων φυσικών θεωριών έχει σκοπό την εξήγηση των διαφόρων φαινομένων που λαμβάνουν χώρα καθώς και την εξήγηση της εξέλιξης του σύμπαντος. Οι διάφοροι φορμαλισμοί που έχουν αναπτυχθεί, ανά τους αιώνες, έχουν σκοπό την ευκολότερη εξήγηση των φαινομένων καθώς και την εξήγηση νέων θεωριών. Η κβαντική εξήγηση των φαινομένων αποτελεί μία από της πιο επιτυχείς θεωρίες και είναι βασισμένη στους προηγούμενους φορμαλισμούς, τηρώντας βέβαια τους διάφορους κβαντικούς περιορισμούς που εισέρχονται στα συστήματά, μέσω της οποίας είναι επιθυμητή η ενοποίηση όλων των αλληλεπιδράσεων. Η βαρύτητα είναι μία από τις τέσσερις βασικές αλληλεπιδράσεις, οι άλλες τρεις είναι η ηλεκτρομαγνητική και οι ασθενής και ισχυρή πυρηνική, η οποία έχει τα περισσότερα προβλήματα όσων αφορά την κβαντική της περιγραφή και δεν υπάρχει, μέχρι στιγμής, κάποιος φορμαλισμός ο οποίος να είναι ικανός να την εξηγήσει Ο κλάδος της φυσικής ο οποίος ασχολείται με την εξέλιξη του σύμπαντος είναι αυτός της κοσμολογίας και επειδή η κυρίαρχη αλληλεπίδραση στο σύμπαν φαίνεται να είναι η βαρυτική έτσι μέσω αυτής της μακροσκοπικής προσέγγισης τείνουμε να εξηγήσουμε την κβαντική φύση αυτής της αλληλεπίδρασης.

Τέλος το μοντέλο για την βαρύτητα το οποίο αναπτύχθηκε από τον *Einstein* είναι βασισμένο στην εξέλιξη της γεωμετρίας του χωρόχρονου. Αυτό το μοντέλο είναι βασισμένο όπως είπαμε στην γεωμετρία, και η γεωμετρική ποσότητα η οποία μας δίνει τις εξισώσεις πεδίου είναι ο τανυστής *Riemann* και παράγωγα του. Η θεωρία του *Einstein* παρ όλες τις επιτυχίες, θεωρητικές και πειραματικές, δεν είναι δυνατή η κβαντική περιγραφή της βαρύτητας μέσω αυτής και ήδη από τα πρώτα χρόνια που εισήχθη έγινε προσπάθεια γενίκευσης της.

1

Φορμαλισμός Μηχανικών συστημάτων

Για την περιγραφή διαφόρων δυναμικών συστημάτων στην φυσική κάνουμε χρήση των εξισώσεων *Lagrange* και των εξισώσεων *Hamilton*. Οι εξισώσεις αυτές μας δίνουν έναν φορμαλισμό για την περιγραφή κλασικών και κβαντικών συστημάτων. Για τον προσδιορισμό αυτών των εξισώσεων χρησιμοποιείται η έννοια της μεταβολής (που μαθηματικώς ορίζεται μέσω του διαφορικού). Η κύριες ποσότητες που μας ενδιαφέρουν για την ανάπτυξη αυτού του φορμαλισμού είναι αυτές της δράσης και την *Lagrangian*. Αυτός ο φορμαλισμός μας δίνει την ευχέρεια να υπολογίσουμε τις δυναμικές ποσότητες (όπως π.χ. για την φυσική θέση, ταχύτητες, ορμές κ.α.) αλλά και διατηρήσιμες ποσότητες (όπως π.χ. για την φυσική η ενέργεια, η ορμή η στροφορμή κ.α.) γι' αυτό τον λόγο χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορα πεδία των επιστημών (φυσική, οικονομία, βιολογία κ.α.). Τέλος θα αναπτύξουμε την μέθοδο *Hamilton* για καμπυλωμένο χώρο όπου θα χρησιμοποιήσουμε και στις εφαρμογές μας στην Γενική θεωρία της Σχετικότητας.

1.1 Φορμαλισμός *Lagrange*

Για αρχή θα δούμε την *Lagrangian*, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(q, \dot{q}; t)$ η οποία είναι μία "φυσική" ποσότητα η οποία εξαρτάται από της μεταβλητές $q(t), \dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ οι οποίες είναι οι δυναμικές μεταβλητές του συστήματος (για την φυσική αυτές αναπαριστούν είτε τις θέσεις και τις ταχύτητες είτε πεδία και τις χρονικές παραγώγους αυτών, στην βιολογία π.χ. ο πληθυσμός ενός οργανισμού και η μεταβολή αυτού ως προς τον χρόνο). Για τον προσδιορισμό της *Lagrangian* θα κάνουμε χρήση της έννοιας της δράσης και των μεταβολών. Η δράση είναι ένα συναρτησιοειδες, συναρτησιοειδές είναι μία συνάρτηση της οποίας η μεταβλητή είναι συνάρτηση π.χ. το ολοκλήρωμα. Ο φορμαλισμός αυτός γενικεύει την *Newtonian* εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων (αλλά αποτελεί και γενικότερο φορμαλισμό για άλλα πεδία).

1.1.1 Μηχανικό σύστημα μεμονωμένων σωματιδίων

Για την περιγραφή ενός συστήματος το οποίο αποτελείται από μεμονωμένα σωματίδια, τα οποία έχουν θέσεις q_i και ταχύτητες $\dot{q}_i$, μέσω της δράσης, $\mathcal{S}[q]$ η οποία αποτελεί ένα συναρτησιοειδές (το ολοκλήρωμα της *Lagrangian*, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(q, \dot{q}; t)$) θα εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης αυτών [9].

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}[q] =& \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q,\dot{q};t)dt && (1.1)\\
\delta\mathcal{S}[q] =& \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q,\dot{q};t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathscr{L}(q,\dot{q};t)dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\delta q_i}{dt} \right) dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right\} - \delta q_i \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i} \right\} \right) dt \\
\overset{\delta q_i(t_j)=0}{\underset{j=1,2}{=}}& \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i} \right\} \right) \delta q_i dt + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i(t)\Big|_{t_1}^{t_2}} = 0 \\
\Rightarrow& \frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial \mathscr{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_i} \right\} = 0 && (1.2)
\end{aligned}
$$

Οι εξισώσεις που προέκυψαν είναι οι εξισώσεις κίνησης *Euler* − *Lagrange* και αναφέρονται σε κάθε σωματίδιο i του συστήματος.

1.1.2 Μηχανικό σύστημα Πεδίων

Για την περιγραφή των πεδίων έχουμε την *Lagrangian* πυκνότητα η οποία ορίζει την *Lagrangian* ολοκληρώνοντας την στον χώρο. Τα πεδία είναι συνεχείς ποσότητες (εν αντιθέση με τα σωματίδια τα οποία είναι διακριτά) και ορίζονται μέσω των συναρτήσεων q. Για την περιγραφή των πεδίων έχουμε τις μεταβλητές $q, \nabla_\alpha q$, όπου τα q μπορεί να είναι (Βαθμωτά, διανυσματικά, Spinor ακόμα και Τανυστικά πεδία), στην ανάλυση μας θα χρησιμοποιήσουμε βαθμωτά αλλά ανάλογα γενικεύεται και στα άλλα πεδία.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}[q] =& \int_V \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)\sqrt{-g}d^4x = \int_{V'}\int_T \mathscr{L}(q,\nabla_\alpha q;t)d^3x dt, \quad V = V' \cup T && (1.3)\\
\delta\mathcal{S}[q] =& \delta \int_V \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)\sqrt{-g}d^4x = \int_V \delta\mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)\sqrt{-g}d^4x \\
=& \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial(\nabla_\alpha q)}\delta\nabla_\alpha q \right) \sqrt{-g}d^4x \\
=& \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial(\nabla_\alpha q)}\nabla_\alpha\delta q \right) \sqrt{-g}d^4x \\
=& \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial q}\delta q + \nabla_\alpha\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial(\nabla_\alpha q)}\delta q \right\} - \delta q \nabla_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial(\nabla_\alpha q)} \right\} \right) \sqrt{-g}d^4x \\
\overset{\delta q|_{\partial V}=0}{=}& \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial q} - \nabla_\alpha\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial(\nabla_\alpha q)} \right\} \right) \delta q \sqrt{-g}d^4x + \cancelto{0}{\oint_{\partial V} \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial(\nabla_\alpha q)}\delta q(t)\sqrt{-g}d\Sigma_\alpha} \\
\Rightarrow& \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial q} - \nabla_\alpha\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q,\nabla_\alpha q;t)}{\partial(\nabla_\alpha q)} \right\} = 0 && (1.4)
\end{aligned}
$$

Οι εξισώσεις που προέκυψαν είναι οι εξισώσεις κίνησης *Euler* − *Lagrange* και αναφέρονται στα πεδία του συστήματος. Τα πεδία αυτά q μπορούν να είναι είτε βαθμωτά είτε διανυσματικά είτε Spinor είτε τανυστικά.

1.2 Κανονικές εξισώσεις του *Hamilton*

Οι κανονικές εξισώσεις προκύπτουν από τον *Langrangian* φορμαλισμό κάνοντας έναν μετασχηματισμό *Legendre*. Έχουμε από τον ορισμό των συζυγών ορμών

$$\begin{aligned} p^{\beta} &= \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_{\beta}} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_{\beta}} &= \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_{\beta}} \Rightarrow \dot{p}_{\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_{\beta}} \end{aligned}$$

Θέτουμε μία νέα *Langrangian* η οποία εξαρτάται από τις μεταβλητές $(q,p;t)$: $\hat{\mathcal{L}}(q,p;t) = \mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p;t);t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(q,p;t)}{\partial q_{\alpha}} &= \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q};t)}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q};t)}{\partial \dot{q}_{\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha}} + p^{\beta}\frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}}\left(\hat{\mathcal{L}}(q,p;t) - p^{\beta}\dot{q}_{\beta}\right) = \dot{p}^{\alpha} \\ \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(q,p;t)}{\partial p_{\alpha}} &= \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p;t);t)}{\partial p_{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p;t);t)}{\partial \dot{q}_{\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} = p_{\beta}\frac{\partial \dot{q}_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} \\ \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}(q,p;t)}{\partial p_{\alpha}} &= \frac{\partial (p^{\beta}\dot{q}_{\beta})}{\partial p_{\alpha}} - \dot{q}^{\alpha} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}}\left(\hat{\mathcal{L}}(q,p;t) - p^{\beta}\dot{q}_{\beta}\right) = -\dot{q}^{\alpha} \end{aligned}$$

Θέτουμε την συνάρτηση $p^{\beta}\dot{q}_{\beta} - \hat{\mathcal{L}}(q,p;t) = \mathcal{H}(q,p;t)$. Από όπου προκύπτουν οι κανονικές εξισώσεις εξισώσεις του *Hamilton*.

$$\begin{aligned} \dot{q}_{\alpha} &= +\tfrac{\partial \mathcal{H}(q,p;t)}{\partial p^{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} &= -\tfrac{\partial \mathcal{H}(q,p;t)}{\partial q^{\alpha}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2.1 *Poisson* & *Dirac* Brackets

Στον *Hamiltonian* φορμαλισμό μπορούμε να ορίσουμε τις αγκύλες *Poisson* οι οποίες προκύπτουν από τις κανονικές εξισώσεις του *Hamilton*. Από τον ορισμό της ολικής παραγώγου έχουμε.

$$\begin{aligned} \frac{df(q,p;t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}\frac{dq_{\alpha}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}\frac{dp_{\alpha}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}\frac{\partial \mathcal{H}(q,p;t)}{\partial p^{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}\left(-\frac{\partial \mathcal{H}(q,p;t)}{\partial q^{\alpha}}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{df(q,p;t)}{dt} &= \{f,\mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \{f,g\} &= \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial p^{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial q^{\alpha}} \\ \{f,g+h\} &= \{f,g\} + \{f,h\} \\ \{f,gh\} &= \{f,g\}h + g\{f,h\} \\ 0 &= \{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} \end{aligned}$$

Αν η θεωρία μας περιέχει και συνδέσμους, 1ης τάξης με εξίσωση $\phi_m = 0, m = 1,\dots,M$, μπορούμε να ορίσουμε την *Hamiltonian* λαμβάνοντας τους υπόψιν ορίζοντας κατάλληλους πολλαπλασιαστές *Langrange* [10].

$$\mathcal{H}_D = \mathcal{H} + u^{\beta}\phi_{\beta} \tag{1.6}$$

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^{\alpha}} + \frac{\partial u^{\beta}}{\partial p^{\alpha}}\cancelto{0}{\phi_{\beta}} + u^{\beta}\frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial p^{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^{\alpha}} + u^{\beta}\frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial p^{\alpha}} \tag{1.7}$$

$$\dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^{\alpha}} - \frac{\partial u^{\beta}}{\partial q^{\alpha}}\cancelto{0}{\phi_{\beta}} - u^{\beta}\frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^{\alpha}} - u^{\beta}\frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial q^{\alpha}}$$

$$\dot{g} = \{g,\mathcal{H}_D\} = \left\{g,\mathcal{H} + u^{\beta}\phi_{\beta}\right\} = \{g,\mathcal{H}\} + \left\{g,u^{\beta}\right\}\cancelto{0}{\phi_{\beta}} + u^{\beta}\{g,\phi_{\beta}\} = \{g,\mathcal{H}\} + u^{\beta}\{g,\phi_{\beta}\}$$

Για συνδέσμους 2ης τάξης έχουμε $\chi_s, s=1,\ldots,S$ ορίζουμε τον πίνακα

$$\begin{aligned} c_{ss'} &= \{\chi_s, \chi_{s'}\} = -c_{s's} : c_{ss'}\{\chi_{s'}, \chi_{s''}\} = \delta_{ss''} \\ \{f,g\}^* &= \{f,g\} - \{f,\chi_s\} c_{ss'} \{\chi_{s'}, g\} \\ \{f,\chi_{s''}\}^* &= \{f,\chi_{s''}\} - \{f,\chi_s\} c_{ss'} \{\chi_{s'}, \chi_{s''}\} = \{f,\chi_{s''}\} - \{f,\chi_s\}\delta_{ss''} = 0 \\ \{f, g+h\}^* &= \{f,g\}^* + \{f,h\}^* \\ \{f, gh\}^* &= \{f,g\}^* h + g\{f,h\}^* \\ 0 &= \left\{\{f,g\}^*, h\right\}^* + \left\{\{h,f\}^*, g\right\}^* + \left\{\{g,h\}^*, f\right\}^* \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.2.1.

$$\mathcal{L}(q, \nabla_\alpha q; t) = -\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi + m^2\Psi^2\right) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\Psi, \nabla_\alpha\Psi; t)}{\partial\Psi} = -m^2\Psi \;\&\; \frac{\partial\mathcal{L}(\Psi, \nabla_\alpha\Psi; t)}{\partial(\nabla_\alpha\Psi)} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{\mu\alpha}\nabla_\nu\Psi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{\nu\alpha}\nabla_\mu\Psi = -g^{\mu\alpha}\nabla_\mu\Psi$$

$$g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\mu\Psi - m^2\Psi = 0 \Rightarrow (\Box^2 - m^2)\Psi = 0 \tag{1.9}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την εξίσωση *Klein – Gordon* για καμπυλομένο χωρόχρονο. Της οποίας η κβάντωση των Ψ μας δίνει *Bosonic* πεδία μάζας m.

2

Εξισώσεις Κίνησης σε καμπυλωμένος χωρόχρονο

Για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης για ένα σωματίδιο ή πεδίο σε καμπυλωμένο χωρόχρονο εισάγουμε στο ολοκλήρωμα της δράσης την βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* ως την *Lagrangian* του συστήματος. Η επιλογή της εν λόγω *Lagrangian* βασίζεται στην απλότητα της και στην υπόθεση ότι η κίνηση των σωματιδίων θα υπακούει στις αλλαγές της γεωμετρίας. Παρακάτω θα δούμε διαφορετικές επιλογές για την *Lagrangian*, όπως μία συνάρτηση της βαθμωτής καμπυλότητα *Ricci*. Όπως είδαμε και πιο πάνω για τον υπολογισμό των εξισώσεων κίνησης θα πρέπει να κάνουμε την μεταβολή της δράσης.

Στην ανάλυση μας όμως αυτή τους επιφανειακούς όρους δεν τους εξαλείψουμε αντιθέτως θεωρούμε ότι συνεισφέρουν στην δυναμική του συστήματος [13].

2.1 Μεταβολή Δράσης *Hilbert − Einstein*

Έχοντας ορίσει το ολοκλήρωμα της δράσης θα κάνουμε την μεταβολή του ως προς την μετρική $g_{\mu\nu}$ για να βρούμε τις δυναμικές εξισώσεις.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathcal{H}} &= \int_V \mathbf{R}\sqrt{-g}d^4x = \int_V \mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \qquad (2.1)\\
\delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}} &= \int_V \delta\mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int_V \mathbf{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int_V \mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}d^4x
\end{aligned}$$

Για την μεταβολή των συμβόλων *Christoffel* θα πάρουμε μόνο γραμμικούς όρους για την ανάλυση της μεταβολής της δράσης. Οπότε όπου προκύπτουν τετραγωνικοί όροι ως προς τα σύμβολα *Christoffel* θα θεωρούνται αμελητέοι και θα απαλείφονται Οπότε και για την μεταβολή του τανυστή *Ricci* θα κρατήσουμε μόνο τους γραμμικούς όρους ως προς τα σύμβολα *Christoffel* συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} =& \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\\
\mathbf{R}_{\mu\nu} =& \partial_\alpha\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} \overset{\delta}{\Rightarrow}\\
\delta\mathbf{R}_{\mu\nu} =& \partial_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha} - \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}\\
\delta\mathbf{R}_{\mu\nu} =& \partial_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\tau\mu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\nu\rho} - (\partial_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\alpha}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho})\\
\nabla_\rho\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} =& \partial_\rho\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\tau}{}_{\rho\xi}\delta\Gamma^{\xi}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\xi}{}_{\rho\mu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\nu\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\xi} \qquad (2.2)\\
\delta\mathbf{R}_{\mu\nu} =& \nabla_\alpha\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha}
\end{aligned}$$

Για την μεταβολή της ρίζας της μετρικής έχουμε τον παρακάτω τύπο στον οποίο εξ' υποθέσεως κρατάμε μόνο γραμμικούς όρους.

$$\left.\begin{aligned} \ln(\det A) = Tr(\ln A) \overset{\delta}{\Rightarrow} \tfrac{\delta(\det A)}{\det A} = Tr(A^{-1}\delta A) \\ g = \det(g_{\mu\nu}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \tfrac{1}{g}\delta g = Tr(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\ g^{\mu\nu}g_{\mu\tau} = \delta^{\nu}_{\tau} \Rightarrow \delta g_{\rho\nu} = -g_{\mu\nu}g_{\rho\tau}\delta g^{\mu\tau} \end{aligned}\right\}$$

$$\delta g = -\, g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.3}$$

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\delta(-g)}{2\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.4}$$

Συνεπώς έχουμε ότι η μεταβολή των συμβόλων *Christoffel* δίνεται από τους παρακάτω τύπους.

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} =& \delta(g^{\rho\tau}\Gamma_{\tau\mu\nu}) = \delta g^{\rho\tau}\Gamma_{\tau\mu\nu} + g^{\rho\tau}\delta\Gamma_{\tau\mu\nu} = -g^{\rho\alpha}g^{\tau\beta}\delta g_{\alpha\beta}\Gamma_{\tau\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\rho\kappa}(\partial_\mu\delta g_{\kappa\nu} + \partial_\nu\delta g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa\delta g_{\mu\nu}) \Rightarrow \\ =& \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\mu\delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu\delta g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\delta g_{\mu\nu} - 2\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\lambda}) && (2.5) \\ =& \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\mu\delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu\delta g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\delta g_{\mu\nu} - (\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu})\delta g_{\beta\lambda} - (\Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\lambda\nu})\delta g_{\beta\mu} + (\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\lambda\mu})\delta g_{\beta\nu}) \\ =& \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}((\partial_\mu(\delta g_{\nu\lambda}) - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu}\delta g_{\beta\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}\delta g_{\beta\nu}) + (\partial_\nu(\delta g_{\lambda\mu}) - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}\delta g_{\beta\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda}\delta g_{\beta\mu}) - \\ & - (\partial_\lambda(\delta g_{\mu\nu}) - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}\delta g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda}\delta g_{\beta\mu})) \Rightarrow \\ \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} =& \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) + \nabla_\mu(\delta g_{\lambda\nu}) - \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu})) && (2.5) \\ \delta\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu} =& \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(\nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) + \nabla_\mu(\delta g_{\lambda\nu}) - \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu})) && (2.6) \end{aligned}$$

Εισάγοντας τις σχέσεις 2.5 & 2.6 στον επιφανειακό όρο θα καταλήξουμε σε μία γραμμική σχέση της μεταβολής της μετρικής όπως φαίνεται και παρακάτω.

$$\begin{aligned} Z^{\tau} =& g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\tau}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} \\ =& \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}(\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}) - g^{\mu\tau}g^{\rho\lambda}(\nabla_\mu\delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\rho\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho})) \\ =& \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} + g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\nu\delta g_{\mu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\tau}g^{\lambda\rho}\nabla_\mu\delta g_{\lambda\rho} - g^{\mu\tau}g^{\rho\lambda}\nabla_\rho\delta g_{\lambda\mu} + g^{\mu\tau}g^{\lambda\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho}) \\ =& \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} + g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\nu\delta g_{\mu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} - g^{\tau\rho}g^{\mu\nu}\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} - g^{\tau\rho}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta g_{\mu\rho} + g^{\tau\rho}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu}) \\ =& g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} - g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}(\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}) \\ \nabla_\tau Z^{\tau} =& g^{\mu\nu}g^{\tau\rho}(\nabla_\tau\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} - \nabla_\tau\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}) = -\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box^2\delta g^{\mu\nu} && (2.7) \end{aligned}$$

Η σχέση 2.7 μας δίνει ουσιαστικά έναν τελεστή ο οποίος δρα στην μεταβολή της μετρικής, και εν γένει σε οποιαδήποτε συνάρτηση υπάρχει μέσα στην δράση. Αυτός ο τελεστής θα μας φανεί πολύ χρήσιμος σε ανάλυση που θα γίνει παρακάτω, διότι δεν θα εξαλείψουμε τους επιφανειακοούς όρους ίσα ίσα που θα τους χρησιμοποιήσουμε για την ανάπτυξή της θεωρίας μας. Παρακάτω αφού προσθέσουμε τις ποσότητες που έχουμε κάνει μεταβολή θα προκύψει η μεταβολή της δράσης *Einstein* − *Hilbert* που μας δίνει την εξίσωση του βαρυτικού πεδίου χωρίς να έχουμε εξαλείψει τους επιφανειακούς όρους. Από την οποία αν θεωρήσουμε μηδενικούς τους επιφανειακούς όρους θα καταλήξουμε στην εξίσωση *Einstein* για τον κενό χώρο και χωρίς να έχουμε επιρροή από τους όρους στο σύνορο.

Η μεταβολή του τανυστή *Ricci* είναι αυτή η οποία μας δίνει τους επιφανειακούς όρους στο ολοκλήρωμα όπως φαίνεται και παρακάτω.

$$\begin{aligned}\int_V \delta\mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x &= \int_V (\nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int_V (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int_V (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \nabla^\mu\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x = \int_V (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - g^{\nu\mu}\nabla_\nu\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int_V \nabla_\tau(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\tau{}_{\mu\nu} - g^{\tau\mu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d^4x = \int_{\partial V}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\tau{}_{\mu\nu} - g^{\tau\mu}\delta\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha})\sqrt{-g}d\Sigma_\tau \\ &= \int_{\partial V} Z^\tau\sqrt{-g}d\Sigma_\tau\end{aligned}$$

Τέλος εισάγοντας μέσα στο ολοκλήρωμα τις σχέσεις που έχουμε υπολογίσει παραπάνω θα πάρουμε την μεταβολή της δράσης *Einstein − Hilbert*.

$$\begin{aligned}\int_V \mathbf{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}d^4x &= \int_V \mathbf{R}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)d^4x = -\frac{1}{2}\int_V \mathbf{R}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \\ \delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}} &= \int_V\left(\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int_{\partial V} Z^\tau\sqrt{-g}d\Sigma_\tau = 0 \\ \delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}} &= \int_V \mathfrak{G}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int_{\partial V} Z^\tau\sqrt{-g}d\Sigma_\tau = 0\end{aligned}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε και μηδενισμό των επιφανειακών όρων θα πάρουμε την εξίσωση του *Einstein* για τον κενό χώρο. Δηλαδή θα πάρουμε μία εξίσωση ενός άμαζου σωματιδίου που η κίνηση του υπόκειται στην γεωμετρία του χώρου.

$$\frac{\delta\mathcal{S}_{\mathcal{H}}}{\delta g^{\mu\nu}} \overset{Z^\tau=0}{=} \mathfrak{G}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.8}$$

2.2 Δράση σε όρους εξωτερικής γεωμετρίας

Για την ανάλυση της δράσης *Hilbert − Einstein* στα πλαίσια του φορμαλισμού *Hamilton* θα χρησιμοποιήσουμε την βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* ως την *Lagrangian* πυκνότητα η οποία θα εκφραστεί σε όρους εξωτερικής γεωμετρίας. Στο φορμαλισμό *Hamilton* της γενικής θεωρίας της σχετικότητας κάνουμε την υπόθεση ότι ο χρόνος κινείται σε μία καμπύλη και ο τρισδιάστατος χώρος χωρίζεται σε φύλλα, έτσι θα ορίσουμε την επαγώμενη μετρική η οποία θα περιγράφει την γεωμετρία του χώρου. Για τον ορισμό της δράσης χρειαζόμαστε τις περιοχές στις οποίες ορίζεται οπότε θα ορίσουμε τα εφαπτόμενα και τα κάθετα διανύσματα στο χωρίο καθώς και στο σύνορο του χώρου. Ορίζουμε τα εφαπτόμενα r^μ και κάθετα n^μ διανύσματα τις τετραδιάστατης γεωμετρίας μέσω των διαφορικών μορφών της τρισδιάστατης γεωμετρίας $e^\mu{}_m$ [13].

$$r^\mu = r^m e^\mu{}_m \ \& \ n_\mu = -N\partial_\mu t \overset{n_\mu n^\mu=-1}{\Rightarrow} n^\mu = N^{-1}\partial_t x^\mu \ \& \ r^\mu r_\mu = 1 \ \& \ r^\mu n_\mu = 0 \tag{2.9}$$

$$e^\mu_A = e^\mu{}_m e^m{}_A = \frac{\partial x^\mu}{\partial\theta^A}, \ \sigma_{AB} = g_{\mu\nu}e^\mu{}_A e^\nu{}_B \tag{2.10}$$

$$g^{\mu\nu} = -n^\mu n^\nu + r^\mu r^\nu + \sigma^{AB}e^\mu{}_A e^\nu{}_B \tag{2.11}$$

Όπου κάναμε διάσπαση της τετραδιάστατης μετρικής $g_{\mu\nu}$ σε όρους της τρισδιάστατης σ_{AB} και των κάθετων n^μ και εφαπτόμενων διανυσμάτων r^μ.

$$k_{AB} = (D_m r_n)e^m{}_A e^n{}_B = (\nabla_\mu r_\nu)e^\mu{}_A e^\nu{}_B \ \& \ k = \sigma^{AB}k_{AB} \tag{2.12}$$

Από την ανάλυση προκύπτει η εξωτερική καμπυλότητα *Gauss* για τρισδιάστατη γεωμετρία.

$$g_{ij} = g_{\mu\nu}e^\mu{}_i e^\nu{}_j, \ e^\mu{}_i \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial z^i} \Rightarrow g^{\mu\nu} = r^\mu r^\nu g^{ij}e^\mu{}_i e^\nu{}_j \tag{2.13}$$

Τέλος ορίζουμε μία τρισδιάστατη μετρική η οποία έχει εφαρμογή στο σύνορο του τετραδιάστατου χώρου και μας δίνει μία δική της εξωτερική καμπυλότητα *Gauss*.

$$
\begin{aligned}
dx^\mu =& \frac{\partial x^\mu}{\partial t} dt + \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta^A} d\theta^A = N n^\mu dt + e^\mu{}_A d\theta^A && (2.14)\\
ds^2_{\mathscr{B}} =& g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(N n^\mu dt + e^\mu{}_A d\theta^A)(N n^\nu dt + e^\nu{}_B d\theta^B)\\
=& N^2 n_\mu n^\mu dt^2 + n_\mu e^\mu{}_A dt d\theta^A + n_\nu e^\nu{}_B dt d\theta^B + g_{\mu\nu} e^\nu{}_B e^\mu{}_A d\theta^A d\theta^B\\
=& -N^2 dt^2 + \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B \Rightarrow \sqrt{-g_{ij}} = N\sqrt{\sigma^{AB}} && (2.15)\\
\mathscr{K}_{ij} =& (\nabla_\mu r_\nu) e^\mu{}_i e^\nu{}_j && (2.16)\\
16\pi \mathcal{S}_G =& \int_{\mathscr{V}} \mathbf{R}\sqrt{-g} d^4x + 2\oint_{\partial\mathscr{V}} \epsilon K \sqrt{h_{ln}} d^3y,\ \partial\mathscr{V} = \Sigma_{t_1} \cup (-\Sigma_{t_2}) \cup \mathscr{B}\\
=& \int_{\mathscr{V}} \mathbf{R}\sqrt{-g} d^4x - 2\oint_{\Sigma_{t_1}} \epsilon K \sqrt{h_{ln}} d^3y + 2\oint_{\Sigma_{t_2}} \epsilon K \sqrt{h_{ln}} d^3y + 2\oint_{\mathscr{B}} \epsilon \mathscr{K} \sqrt{g_{ij}} d^3z\\
\int_{\mathscr{V}} \mathbf{R}\sqrt{-g} d^4x =& \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (\mathbf{R}^{(3)} + K^{mn}K_{mn} - H^2) N \sqrt{h_{ln}} d^3y - 2\oint_{\partial V} ((\nabla_\nu n^\mu) n^\nu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu) d\Sigma_\mu
\end{aligned}
$$

Ο τελευταίος όρος δίνει διαφορετικές συνεισφορές για το σύνορο ($\mathscr{B}$) και για τους χώρους ($\Sigma_{t_{1,2}}$) οπότε θα εξετάσουμε τις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Συνεπώς για τα τρία χωρία έχουμε

$$
\begin{aligned}
((\nabla_\nu n^\mu) n^\nu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu) n_\mu \sqrt{h_{ln}} dy^3 =& (\cancelto{0}{n_\mu(\nabla_\nu n^\mu)} n^\nu - \cancelto{-1}{n^\mu n_\mu} \nabla_\nu n^\nu)\sqrt{h_{ln}} dy^3 = \nabla_\nu n^\nu \sqrt{h_{ln}} dy^3 = K\sqrt{h_{ln}} dy^3\\
((\nabla_\nu n^\mu) n^\nu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu) r_\mu \sqrt{g_{ij}} dz^3 =& (r_\mu (\nabla_\nu n^\mu) n^\nu - \cancelto{0}{n^\mu r_\mu} \nabla_\nu n^\nu)\sqrt{g_{ij}} dy^3 = 2(\nabla_\nu n^\mu) r_\mu n^\nu \sqrt{g_{ij}} dy^3\\
=& (2\nabla_\nu (\cancelto{0}{n^\mu r_\mu} n^\nu) - 2(\nabla_\nu r_\mu) n^\mu n^\nu)\sqrt{g_{ij}} dy^3 = -2(\nabla_\nu r_\mu) n^\mu n^\nu \sqrt{g_{ij}} dy^3
\end{aligned}
$$

Τελικά αφού προσθέσουμε όλες τις ποσότητες για όλες τις περιοχές προκύπτει η δράση του βαρυτικού πεδίου να δίνεται από την παρακάτω σχέση 2.17 στην οποία προστέθηκε ένα επιπλέον αριθμητικός παράγοντας ο οποίος δεν εξαρτάται από την μετρική και δίνει αριθμητικές διορθώσεις για τις οριακές τιμές στο σύνορο.

$$
\begin{aligned}
16\pi \mathcal{S}_G =& \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} (\mathbf{R}^{(3)} + K^{mn}K_{mn} - H^2) N \sqrt{h_{ln}} d^3y + 2\oint_{\mathscr{B}} (\mathscr{K} + n^\mu n^\nu \nabla_\nu r_\mu)\sqrt{-g_{ij}} d^3z\\
(\mathscr{K} + n^\mu n^\nu \nabla_\nu r_\mu) =& g^{ij}\mathscr{K}_{ij} + n^\mu n^\nu \nabla_\nu r_\mu = g^{ij} e^\mu{}_i e^\nu{}_j \nabla_\nu r_\mu + n^\mu n^\nu \nabla_\nu r_\mu = \nabla_\nu r_\mu (g^{\mu\nu} - r^\mu r^\nu + n^\mu n^\nu)\\
=& (\nabla_\nu r_\mu)\sigma^{AB} e^\mu{}_A e^\nu{}_B = \sigma^{AB}(\nabla_\nu r_\mu) e^\mu{}_A e^\nu{}_B = \sigma^{AB} k_{AB} = k\\
16\pi \mathcal{S}_G =& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Sigma_t} (\mathbf{R}^{(3)} + K^{mn}K_{mn} - H^2) N\sqrt{h} d^3y + 2\oint_{S_t} (k - k_0) N\sqrt{\sigma} d^2\theta \right\} dt && (2.17)
\end{aligned}
$$

2.3 Φορμαλισμός *Hamilton*

Για τον προσδιορισμό των εξισώσεων του *Hamilton* θα χρειαστούμε να ορίσουμε την συζυγή ορμή η οποία ορίζεται από την παραγώγιση της *Lagrangian* ως προς τις συζυγείς μεταβλητές $\dot{q}$ (η χρονική παράγωγος μπορεί να είναι γενική παράγωγος και για τανυστές). Όπως επίσης τον προσδιορισμό της *Hamiltonian* η οποία αποτελεί τον μετασχηματισμό *Legendre* της *Lagrangian* ως προς τις συζυγείς μεταβλητές της [13].

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_{mn} =& \mathfrak{L}_t h_{mn} = \mathfrak{L}_t(g_{\mu\nu}e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n}) = \mathfrak{L}_t(g_{\mu\nu})e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n} = (\nabla_{\mu}t_{\nu} + \nabla_{\nu}t_{\mu})e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n} \\
=& (\nabla_{\mu}(Nn_{\nu} + N_{\nu}) + \nabla_{\nu}(Nn_{\mu} + N_{\mu}))e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n} \\
=& (n_{\nu}\partial_{\mu}N + N\nabla_{\nu}n_{\mu} + \nabla_{\mu}N_{\nu} + n_{\mu}\partial_{\nu}N + N\nabla_{\mu}n_{\nu} + \nabla_{\nu}N_{\mu})e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n} \\
& \overset{K_{mn}=e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n}\nabla_{\mu}n_{\nu}}{\underset{\substack{e^{\mu}{}_{m}n_{\mu}=0 \\ K_{mn}=K_{nm}}}{=}} (2NK_{mn} + (\nabla_{\nu}N_{\mu})e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n} + (\nabla_{\mu}N_{\nu})e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n}) \\
(\nabla_{\nu}N^{\mu})e^{\nu}{}_{n}e_{\mu m} =& ((D_nN^l)e^{\mu}{}_{l} - \epsilon N^m((\nabla_{\nu}n_{\mu})e^{\mu}{}_{m}e^{\nu}{}_{n})n^{\mu})e_{\mu m} \overset{n^{\mu}e_{\mu m}=0}{=} D_nN_m \\
\dot{h}_{mn} =& (2NK_{mn} + D_nN_m + D_mN_n) \Rightarrow K_{mn} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{mn} - D_nN_m - D_mN_n) \qquad (2.18) \\
16\pi\sqrt{-g}\mathscr{L}_G =& (\mathbf{R}^{(3)} + (h^{ml}h^{pn} - h^{mn}h^{lp})K_{mn}K_{lp}) \qquad (2.19) \\
16\pi p^{mn} =& \frac{\partial(16\pi\sqrt{-g}\mathscr{L}_G)}{\partial\dot{h}_{mn}} = \frac{\partial K_{kq}}{\partial\dot{h}_{mn}}\frac{\partial(16\pi\sqrt{-g}\mathscr{L}_G)}{\partial K_{kq}} \overset{\partial_{\dot{h}}DN=0}{=} \\
=& \frac{1}{2N}\delta_{mk}\delta_{qn}((h^{ml}h^{pn} - h^{mn}h^{lp})\delta_{km}\delta_{qn}K_{lp} + (h^{ml}h^{pn} - h^{mn}h^{lp})\delta_{kl}\delta_{qp}K_{mn})\sqrt{-g} \\
=& \frac{1}{2N}\delta_{mk}\delta_{qn}(K^{kq} - Hh^{kq} + K^{kq} - Hh^{kq})N\sqrt{h} = (K^{mn} - Hh^{mn})\sqrt{h} \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Όπου προέκυψαν οι συζυγείς ορμές να είναι συναρτήσει τις εξωτερικής καμπυλώτητας. Αφού υπολογίστηκαν οι ορμές εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό *Legendre* παίρνουμε την *Hamiltonian* του συστήματος μας.

$$
\begin{aligned}
16\pi\mathscr{H}_G =& p^{mn}\dot{h}_{mn} - \sqrt{-g}\mathscr{L}_G(h_{mn}, p_{mn}; t) \\
=& (K^{mn} - Hh^{mn})\sqrt{h}(2NK_{mn} + D_nN_m + D_mN_n) - \cancelto{N\sqrt{h}}{\sqrt{-g}}(\mathbf{R}^{(3)} + (K^{mn}K_{mn} - H^2)) \\
=& N(K^{mn}K_{mn} - H^2 - \mathbf{R}^{(3)}) + (K^{mn} - Hh^{mn})(D_nN_m + D_mN_n) \\
& \overset{K_{mn}=K_{nm}}{=} N(K^{mn}K_{mn} - H^2 - \mathbf{R}^{(3)}) + 2(K^{mn} - Hh^{mn})D_nN_m \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης του συστήματος θα πάρουμε την μεταβολή της δράσης για τον υπολογισμό αυτόν θα εκφράσουμε την *Lagrangian* συναρτήσει της *Hamiltonian* 2.22 οπότε θα κάνουμε την διαφόριση. Για την μεταβολή θα υποθέσουμε ότι τα πεδία N, N_m, h_{mn} εξαλλείφονται στο σύνορο S_t δηλαδή η μεταβολή αυτών είναι μηδενική. Συνεπώς θα προκύψουν οι εξισώσεις *Hamilton* για το βαρυτικό πεδίο απουσία εξωτερικών πεδίων.

$$
\begin{aligned}
16\pi\mathcal{H}_G =& \int_{\Sigma_t} 16\pi\mathscr{H}_G d^3y - 2\oint_{S_t}(k - k_0)d^2\theta \\
=& \int_{\Sigma_t}(N(K^{mn}K_{mn} - H^2 - \mathbf{R}^{(3)}) + 2(D_n((K^{mn} - Hh^{mn})N_m) - \\
& N_mD_n(K^{mn} - Hh^{mn})))\sqrt{h}d^3y - 2\oint_{S_t}N(k - k_0)\sqrt{\sigma}d^2\theta \\
=& \int_{\Sigma_t}(N(K^{mn}K_{mn} - H^2 - \mathbf{R}^{(3)}) - 2N_mD_n(K^{mn} - Hh^{mn})))\sqrt{h}d^3y - \\
& 2\oint_{S_t}(k - k_0)d^2\theta - (K^{mn} - Hh^{mn})N_m\cancelto{r_n\sqrt{\sigma_{AB}}d^2\theta}{dS_n} \\
=& \int_{\Sigma_t}(N(K^{mn}K_{mn} - H^2 - \mathbf{R}^{(3)}) - 2N_mD_n(K^{mn} - Hh^{mn})))d^3y - \\
& 2\oint_{S_t}\{(k - k_0) - (K^{mn} - Hh^{mn})N_mr_n\sqrt{\sigma_{AB}}\}d^2\theta \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Γράφοντας τις καμπυλότητες συναρτήσει των συζυγών ορμών έχουμε.

$$\begin{aligned}
16\pi p_{mn} =& K^{mn} - Hh^{mn} \Rightarrow 16\pi p_{mn}h_{mn} = K^{mn}h_{mn} - Hh^{mn}h_{mn} = H - H3 = -2H = 16\pi p \\
\sqrt{h}K^{mn} =& 16\pi\left(p^{mn} - \frac{1}{2}ph^{mn}\right) \overset{-H\sqrt{h}=8\pi p}{\Rightarrow} \sqrt{h}(K^{mn} - Hh^{mn}) = 16\pi p^{mn} \qquad (2.23)\\
K^{mn}K_{mn} - H^2 =& (16\pi)^2h^{-1}\left\{\left(p^{mn} - \frac{1}{2}ph^{mn}\right)\left(p_{mn} - \frac{1}{2}ph_{mn}\right) - \frac{1}{4}p^2\right\} \\
=& (16\pi)^2h^{-1}\left\{p^{mn}p_{mn} - \frac{1}{2}p\cancelto{p}{p^{mn}h_{mn}} - \frac{1}{2}p\cancelto{p}{p_{mn}h^{mn}} + \frac{1}{4}p^2\cancelto{3}{h_{mn}h^{mn}} - \frac{1}{4}p^2\right\} \\
=& (16\pi)^2h^{-1}\left\{p^{mn}p_{mn} - \frac{1}{2}p^2\right\} \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Τέλος αντικαθιστώντας τις καμπυλότητες στην *Hamiltonian* καταλήγουμε στην εξής σχέση.

$$\begin{aligned}
16\pi\mathcal{H}_G =& 16\pi\mathcal{H}_{\Sigma_t} + 16\pi\mathcal{H}_{S_t} \Rightarrow \overline{\mathcal{H}}_G = \overline{\mathcal{H}}_{\Sigma_t} + \overline{\mathcal{H}}_{S_t} \\
\overline{\mathcal{H}}_G =& \int_{\Sigma_t}\left(N(h^{-\frac{1}{2}}\left(\overline{p}^{mn}\overline{p}_{mn} - \frac{1}{2}\overline{p}^2\right) - \sqrt{h}\mathbf{R}^{(3)}) - 2N_m\sqrt{h}D_n(h^{-\frac{1}{2}}\overline{p}^{mn})\right)d^3y - \\
& 2\oint_{S_t}\{N(k - k_0) - h^{-\frac{1}{2}}\overline{p}^{mn}N_mr_n\sqrt{\sigma_{AB}}\}d^2\theta \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Εν συνεχεία διαφορίζουμε την *Hamiltonian* ως προς όλες τις δυνατές μεταβολές. Πρώτα ως προς τα N εν συνεχεία ως προς τις ορμές p και τέλος ως προς την τρισδιάστατη μετρική h_{mn} και συνθέτοντας όλα μαζί προκύπτει η μεταβολή της δράσης και οι εξισώσεις του *Hamilton*. Έχοντας γράψει την δράση ως γινόμενο των N με τις υπόλοιπες ποσότητες που είναι ανεξάρτητες από αυτά γίνεται εύκολος ο υπολογισμός των διαφορικών.

$$\begin{aligned}
\delta_N\overline{\mathcal{H}}_G =& \int_{\Sigma_t}\left(\delta N(h^{-\frac{1}{2}}\left(\overline{p}^{mn}\overline{p}_{mn} - \frac{1}{2}\overline{p}^2\right) - \sqrt{h}\mathbf{R}^{(3)}) - 2\delta N_m\sqrt{h}D_n(h^{-\frac{1}{2}}\overline{p}^{mn})\right)d^3y - \\
& 2\oint_{S_t}\{\cancelto{0}{\delta N(k - k_0)} - h^{-\frac{1}{2}}\overline{p}^{mn}\delta N_mr_n\sqrt{\sigma_{AB}}\}d^2\theta \\
=& \int_{\Sigma_t}\left(-\overline{C}\delta N - 2\overline{C}^m\delta N_m\right)d^3y + 2\oint_{S_t}\{h^{-\frac{1}{2}}\overline{p}^{mn}\delta N_mr_n\sqrt{\sigma_{AB}}\}d^2\theta \\
\delta_p\overline{\mathcal{H}}_G =& \int_{\Sigma_t}\left\{Nh^{-\frac{1}{2}}\delta_p\left(\overline{p}^{mn}\overline{p}_{mn} - \frac{1}{2}\overline{p}^2 - \sqrt{h}\mathbf{R}^{(3)}\right) - 2\delta_p(\sqrt{h}D_n(N_mh^{-\frac{1}{2}}\overline{p}^{mn})\right. \\
& \left. - (D_nN_m)\overline{p}^{mn})\right\}d^3y + 2\oint_{S_t}\{h^{-\frac{1}{2}}\delta_p\overline{p}^{mn}N_mr_n\sqrt{\sigma_{AB}}\}d^2\theta
\end{aligned}$$

Για την μεταβολή ως προς τις ορμές p γράφουμε την δράση σε όρους ορμών και κάνουμε την διαφόριση, επίσης έχουμε ότι η βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* δεν εξαρτάται από τις ορμές οπότε η μεταβολή της είναι μηδενική. Αρχικά υπολογίζουμε την μεταβολή των κινητικών όρων που αποτελούν τετραγωνική μορφή των ορμών

$$
\begin{aligned}
\delta_p\left(h_{km}h_{ln}\overline{p}^{kl}\overline{p}^{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p}^{kl}h_{mn}h_{kl}\right)=&\frac{\partial}{\partial\overline{p}^{qp}}\left(h_{km}h_{ln}\overline{p}^{kl}\overline{p}^{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}^{mn}+\overline{p}^{kl}h_{mn}h_{kl}\right)\delta\overline{p}^{qp}\\
=&\Big(h_{km}h_{ln}\delta_{kq}\delta_{lp}\overline{p}^{mn}+h_{km}h_{ln}\delta_{pm}\delta_{qn}\overline{p}^{kl}-\frac{1}{2}(\delta_{qm}\delta_{pn}\overline{p}^{kl}h_{mn}h_{kl}\\
&+\delta_{qk}\delta_{pl}\overline{p}^{mn}h_{mn}h_{kl})\Big)\delta\overline{p}^{qp}\\
=&\left(h_{qm}h_{pn}\overline{p}^{mn}+h_{kp}h_{lq}\overline{p}^{kl}-\frac{1}{2}(\overline{p}^{kl}h_{qp}h_{kl}+\overline{p}^{mn}h_{mn}h_{qp})\right)\delta\overline{p}^{qp}\\
=&2\left(\overline{p}_{mn}-\frac{1}{2}ph_{mn}\right)\delta\overline{p}^{mn}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_p\overline{\mathcal{H}}_G=&\int_{\Sigma_t}\left(Nh^{-\frac{1}{2}}\delta_p\left(\overline{p}^{mn}\overline{p}_{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}^2\right)+2(D_nN_m)\delta\overline{p}^{mn})\right)d^3y+\\
&2\oint_{S_t}-N_mh^{-\frac{1}{2}}\delta\overline{p}^{mn}\overset{r_n\sqrt{\sigma_{AB}}d^2\theta}{\cancel{d\Sigma_n}}+\{h^{-\frac{1}{2}}\delta_p\overline{p}^{mn}N_mr_n\sqrt{\sigma_{AB}}\}d^2\theta\\
\delta_p\overline{\mathcal{H}}_G=&\int_{\Sigma_t}\left(2Nh^{-\frac{1}{2}}\left(\overline{p}_{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}h_{mn}\right)+2(D_nN_m)\right)\delta\overline{p}^{mn}d^3y=\int_{\Sigma_t}H_{mn}\delta\overline{p}^{mn}d^3y
\end{aligned}
$$

Τέλος έχουμε ότι η μεταβολή ως προς τις ορμές δίνεται από την τελευταία σχέση επίσης παρατηρούμε ότι οι συνοριακοί όροι αλληλοαναιρούνται. Για να ολοκληρώσουμε την ανάλυση της μεταβολής της δράσης παίρνουμε την μεταβολή ως προς την επαγώμενη μετρική h.

$$
\begin{aligned}
\delta_h\overline{\mathcal{H}}_G=&\int_{\Sigma_t}\Bigg\{N\Big[\left(\overline{p}^{kl}\overline{p}_{kl}-\frac{1}{2}\overline{p}^2\right)\overset{-\frac{1}{2}h^{-\frac{3}{2}}h^{mn}\delta h_{mn}}{\cancel{\delta h^{-\frac{1}{2}}}}+h^{-\frac{1}{2}}\delta_h\left(\overline{p}^{mn}\overline{p}_{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}^2\right)-\delta_h(\sqrt{h}\mathbf{R}^{(3)})\Big]\\
&+\delta_h(D_nN_m)\overline{p}^{mn}\Bigg\}d^3y-2\delta_h\oint(\sqrt{h}N_mh^{-\frac{3}{2}}\overline{p}^{mn}+N(k-k_0)-\sqrt{h}N_mh^{-\frac{1}{2}}\overline{p}^{mn})\sqrt{\sigma_{AB}}d^2\theta
\end{aligned}
$$

Για την μεταβολή των κινητικών όρων, οι οποίοι αποτελούνται από τετραγωνικούς όρους, ως προς την μετρική θα τους γράψουμε συναρτήσει της μετρικής αυτής και θα κάνουμε την μεταβολή.

$$
\begin{aligned}
\delta_h\left(h_{km}h_{ln}\overline{p}^{kl}\overline{p}^{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p}^{kl}h_{mn}h_{kl}\right)=&\frac{\partial}{\partial h_{qp}}\left(h_{km}h_{ln}\overline{p}^{kl}\overline{p}^{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p}^{kl}h_{mn}h_{kl}\right)\delta h_{qp}\\
=&\Big(\delta_{qk}\delta_{pm}h_{ln}\overline{p}^{kl}\overline{p}^{mn}+\delta_{ql}\delta_{pn}h_{km}\overline{p}^{kl}\overline{p}^{mn}-\frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p}^{kl}\delta_{qm}\delta_{pn}h_{kl}\\
&-\frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p}^{kl}h_{mn}\delta_{qk}\delta_{pl}\Big)\delta h_{qp}\\
=&\Big(\overline{p}^{q}{}_{n}\overline{p}^{pn}+\overline{p}^{kp}\overline{p}^{q}{}_{k}-\frac{1}{2}\overline{p}^{pq}\overline{p}-\frac{1}{2}\overline{p}^{qp}\overline{p}\Big)\delta h_{qp}\\
=&2\left(\overline{p}^{q}{}_{n}\overline{p}^{pn}-\frac{1}{2}\overline{p}^{pq}\overline{p}\right)\delta h_{qp}
\end{aligned}
$$

Η μεταβολή ως προς την μετρική h είναι γνωστή από τα προηγούμενα οπότε παίρνουμε έτοιμες τις εξισώσεις. Όπως επίσης και η μεταβολή των επιφανειακών όρων Z^μ είναι γνωστή από προηγούμενους υπολογισμούς και παραθέτουμε παρακάτω τις εξισώσεις.

$$
\begin{aligned}
\delta_h(\sqrt{h}\mathbf{R}^{(3)})=&-\mathfrak{G}^{mn}\delta h_{mn}+\sqrt{h}D_kZ^k\\
\delta_hD_mN_n=&(D_nN^k)\delta h_{mk}+h_{mk}N^l\delta\Gamma^k{}_{nl}\\
\mathfrak{G}^{mn}=&\mathbf{R}^{mn}-\frac{1}{2}\mathbf{R}h^{mn}\\
Z^k=&h^{mn}\delta\Gamma^k{}_{mn}-h^{mk}\delta\Gamma^n{}_{mn}=h^{mn}h^{kr}D_m\delta h_{rn}-h^{mn}h^{kr}D_r\delta h_{mn}\\
D_kZ^k=&(h_{mn}\Box_D^2-D_mD_n)\delta h^{mn}
\end{aligned}
$$

$$\delta_h \overline{\mathcal{H}}_G = \int\limits_{\Sigma_t} \Bigg\{ -\frac{1}{2} N h^{-\frac{3}{2}} \left(\overline{p}^{kl}\overline{p}_{kl} - \frac{1}{2}\overline{p}^2 \right) h^{mn} + 2N h^{-\frac{1}{2}} \left(\overline{p}^{m}{}_{k}\overline{p}^{nk} - \frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p} \right) - N\sqrt{h}\mathfrak{G}^{mn} +$$
$$+ \overline{p}^{km} D_k N^n \Bigg\} \delta h_{mn} d^3y - \int\limits_{\Sigma_t} (-N\sqrt{h} D_m Z^m + 2\overline{p}^{mn} h_{mk} N^l \delta\Gamma^k{}_{nl}) d^3y$$

Για τον υπολογισμό των επιφανειακών όρων θα χωρίσουμε τους όρους σε συμμετρικούς και αντι-συμμετρικούς ούτως ώστε να κάνουμε εύκολα τους υπολογισμούς. Οπότε μηδενίζοντας τους όρους που αποτελούν γινόμενα συμμετρικών αντισυμμετρικών καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις τέλος με χρήση του κανόνα *Leibniz* παίρνουμε έναν όρο ολικού διαφορικού και έναν που έχει το διαφορικό της μετρικής.

$$\begin{aligned}
Z^k =& \frac{1}{2}(h^{mn}h^{kl} - h^{mk}h^{nl})(\overbrace{D_n\delta h_{lm} + D_m\delta h_{ln}}^{Y_{nml}} - \overbrace{D_l\delta h_{nm}}^{W_{lnm}}) \\
(D_kN)Z^k =& \frac{1}{2}(h^{mn}D^lN - h^{ln}D^mN)(Y_{nlm} - W_{lnm}) = X^{mnl}(Y_{nlm} - W_{lnm}) \overset{X^{mnl}=-X^{lnm}}{=} -X^{nlm}W_{lmn} \\
=& -(h^{mn}D^lN - h^{ln}D^mN)D_l\delta h_{nm} \\
=& -D_l((h^{mn}D^lN - h^{ln}D^mN)\delta h_{nm}) + D_l(h^{mn}D^lN - h^{ln}D^mN)\delta h_{nm}
\end{aligned}$$

Ακολουθώντας την ίδια τακτική με των χωρισμό σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος καθώς και την χρήση του κανόνα *Leibniz* παίρνουμε τον δεύτερο όρο.

$$\begin{aligned}
2\overline{p}^n{}_k N^l \delta\Gamma^k{}_{nl} =& 2\overline{p}^{pn} N^l h^{kp}(D_n\delta h_{lp} + D_l\delta h_{np} - D_p\delta h_{nl}) = \overline{p}^{pn}N^l(\overbrace{D_l\delta h_{np}}^{W_{lnp}} + \overbrace{D_n\delta h_{lp} - D_p\delta h_{nl}}^{Y_{nlp}}) \\
& \underset{\substack{Y_{nlp}=-Y_{npl} \\ \overline{p}^{pn}=\overline{p}^{np}}}{\overset{W_{lnp}=W_{lpn}}{=}} \overline{p}^{pn}N^l D_l\delta h_{np} = D_l(\overline{p}^{pn}N^l\delta h_{np}) - D_l(\overline{p}^{pn}N^l)\delta h_{np} \\
\delta_h \overline{\mathcal{H}}_G =& \int\limits_{\Sigma_t} \Bigg\{ -\frac{1}{2} N h^{-\frac{1}{2}} \left(\overline{p}^{kl}\overline{p}_{kl} - \frac{1}{2}\overline{p}^2 \right) h^{mn} + 2N h^{-\frac{1}{2}} \left(\overline{p}^{m}{}_{k}\overline{p}^{nk} - \frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p} \right) + N\sqrt{h}\mathfrak{G}^{mn} + \\
& \overline{p}^{km}D_kN^n - D_l(\overline{p}^{mn}N^l) + D_l(h^{mn}D^lN - h^{ln}D^mN) \Big\} \delta h_{mn} d^3y - \\
& \int\limits_{S_t} \frac{1}{2}\left\{ \overline{p}^{mn}N^l - (h^{mn}D^lN - h^{ln}D^mN) \right\} \cancelto{0}{\delta h_{mn}}\, d\Sigma_l \\
=& \int\limits_{\Sigma_t} \overline{\mathfrak{p}}^{mn}\delta h_{mn} d^3y \\
\overline{\mathfrak{p}}^{mn} =& N\sqrt{h}\mathfrak{G}^{mn} - \frac{1}{2}\left(\overline{p}^{kl}\overline{p}_{kl} - \frac{1}{2}\overline{p}^2 \right) h^{mn} + 2N h^{-\frac{3}{2}} \left(\overline{p}^{m}{}_{k}\overline{p}^{nk} - \frac{1}{2}\overline{p}^{mn}\overline{p} \right) + \overline{p}^{km}D_kN^n \\
& - D_l(\overline{p}^{mn}N^l) + (h^{mn}D_lD^lN - D^nD^mN)
\end{aligned}$$

Όπου τελικώς έχουμε γράψει όλους τους όρους της *Hamiltonian* σύμφωνα με τις μεταβολές τους.

$$\begin{aligned}
\delta\overline{\mathcal{H}}_G =& \int_{\Sigma_t} (\overline{\mathfrak{p}}^{mn}\delta h_{mn} + H_{mn}\delta\overline{p}^{mn} - \overline{C}\delta N - 2\overline{C}^m\delta N_m) d^3y \\
\delta\mathcal{H}_G =& \int_{\Sigma_t} (\mathfrak{p}^{mn}\delta h_{mn} + H_{mn}\delta p^{mn} - C\delta N - 2C^m\delta N_m) d^3y
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Ορίζουμε την *Lagrangian* μέσω της *Hamiltonian* και του μετασχηματισμού *Legendre* και έτσι εφόσον έχουμε υπολογίσει την μεταβολή της *Hamiltonian* προκύπτουν οι εξισώσεις ADM, *Arnowitt*, *Misner*, *Wheeler*.

$$\mathcal{S}_G = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_t} \mathcal{L}_G(h_{mn}, p_{mn}; t) d^3y dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_t} \left\{ p^{mn}\dot{h}_{mn} - \mathcal{H}_G \right\} d^3y dt$$

Όπου καταλήγουμε στην μεταβολή της δράσης να δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις.

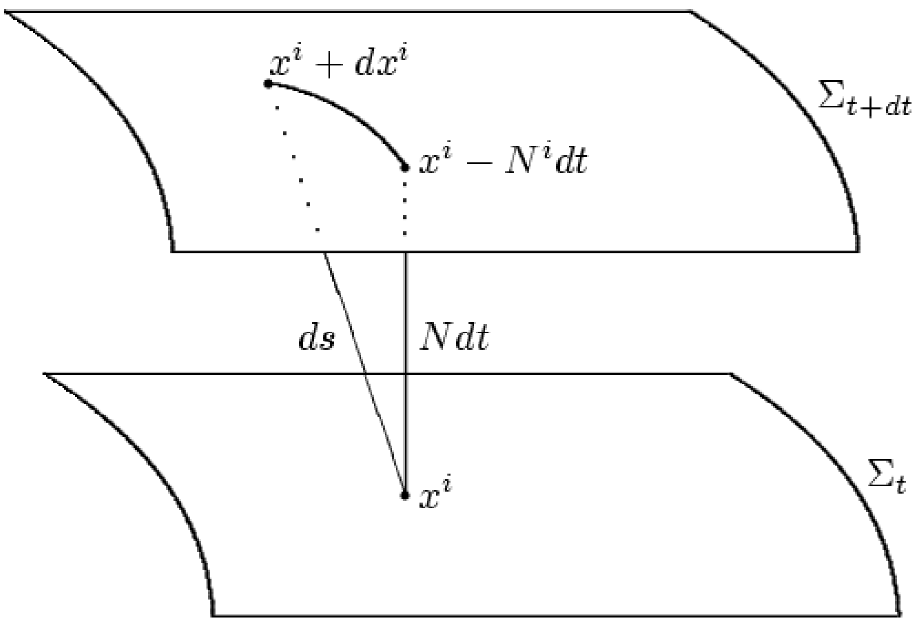
$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_G =& \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_t}\{(\delta p^{mn})\dot{h}_{mn} + p^{mn}\delta\dot{h}_{mn} - \delta\mathcal{H}_G\}dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_t}(\dot{h}_{mn} - H_{mn})\delta p^{mn} - (\dot{p}^{mn} + \mathfrak{p}^{mn})\delta h_{mn} + C\delta N + 2C_m\delta N^m\}d^3y dt \Rightarrow \\
\dot{h}_{mn} =& H_{mn} \\
\dot{p}^{mn} =& -\mathfrak{p}^{mn} \\
C =& \sqrt{h}(K^{mn}K_{mn} - H^2 - \mathbf{R}^{(3)}) = 0 \equiv \mathrm{H} \qquad (2.27)\\
C^m =& -2D_n(K^{mn} - Hh^{mn}) = -2D_n p^{nm} = 0 \equiv \mathrm{H}^m \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

προέκυψαν οι εξισώσεις ADM τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου [1]. Οι σχέσεις 2.27, 2.28 αποτελούν τις εξισώσεις των συνδέσμων και είναι η *Hamiltonian* και οι εξισώσεις συνδέσμων για τις ορμές που αντιστοιχούν στους πολλαπλασιαστές *Langrange* N & N_m. Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις η *Hamiltonian* εξαρτάται από τις κύριες καμπυλότητες αλλά και από την βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* της επαγώμενης μετρικής.

$$C = \sqrt{h}\left((16\pi)^2 h^{-1}\left(p^{mn}p_{mn} - \frac{1}{2}p^2\right) - \mathbf{R}^{(3)}\right) \qquad (2.27)$$

$$\sqrt{h}C = \left((16\pi)^2\left(p^{mn}p_{mn} - \frac{1}{2}p^2\right) - h\mathbf{R}^{(3)}\right) \qquad (2.27)$$

Από την τελευταία σχέση, 2.27, εκφράζοντας τις μέσες και κύριες καμπυλότητες ως προς τις αντίστοιχες ορμές παρατηρούμε ότι η *Hamiltonian* έχει τετραγωνική μορφή ως προς τις ορμές και συνεπώς η καμπυλότητα *Ricci* θα αποτελεί κάποιου είδους δυναμικής συνάρτησης του συστήματος.



Σχήμα 2.1: Geometrodynamics

[1] Space tells matter how to move; matter tells space how to curve. John Archibald Wheeler

3

9 *Bianchi's* Cosmologies

Από τον ορισμό της *Riemanian* μετρικής έχουμε για χώρο n διαστάσεων ότι υπάρχουν και αντίστοιχες n ανεξάρτητες συντεταγμένες x_n. Συνεπώς έχουμε έναν χώρο S_n για τον οποίο υπάρχει η έννοια της μετρικής $g_{\mu\nu}$ και τα απειροστά τόξα για τα οποία έχουμε dx_μ να ικανοποιείται το Πυθαγόρειο θεώρημα. Έχει ενδιαφέρον να ορίσουμε έναν χώρο S_n' για τον οποίο οι μετασχηματισμοί αφήνουν τα μήκη αναλλοίωτα δηλαδή οι δύο μετρικοί χώροι S_n & S_n' να έχουν την ίδια μετρική εξίσωση τότε αυτοί οι χώροι ονομάζονται ισομετρικοί, τέτοιοι χώροι είναι χρήσιμοι στην φυσική διότι τα συστήματα που περιγράφονται από *Lagrangian* ή *Hamiltonian* θα ικανοποιούν το θεώρημα της *Noether* το οποίο μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες [7].

Τις ισομετρίες του χώρου S_n θα τις αποκαλούμε κινήσεις του χώρου, διότι είναι σαν να μετακινούμαστε στον χώρο χωρίς όμως να μεταβάλλεται ο ίδιος ο χώρος. Το ενδιαφέρον μας θα επικεντρωθεί σε συνεχείς κινήσεις στον χώρο οι οποίες όλες μαζί αποτελούν μία ομάδα, έχουν όλες τις αλγεβρικές ιδιότητες της ομάδας, λόγω γεωμετρικών υποθέσεων ο αριθμός των παραμέτρων της ομάδας πρέπει να είναι πεπερασμένος. Αν υποθέσουμε ότι οι παράμετροι τις ομάδας είναι r το πλήθος, το οποίο είναι πεπερασμένο, θα αποτελούν μία ομάδα *Lie* που παράγεται από r συνεχείς μετασχηματισμούς $G_r: \ \{X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f\}$. Το πρόβλημα του προσδιορισμού αυτών των μετασχηματισμών έγκειται στο ποιες μετρικές επιτρέπουν τέτοιου είδους συνεχείς μετασχηματισμούς και με αυτό το πρόβλημα θα ασχοληθούμε σε αυτήν την ενότητα ειδικότερα στην περίπτωση των τρισδιάστατων χώρων [7, 19].

Κατ' αρχάς να επισημάνουμε την διαφορά των διδιάστατων και των τρισδιάστατων γεωμετριών, θυμόμαστε ότι διδιάστατοι χώροι που επιτρέπουν τις μεταφορές είναι αυτοί οι οποίοι έχουν σταθερή καμπυλότητα, δηλαδή αν ένα σημείο μπορεί να μεταφερθεί σε κάθε σημείο, θα μπορεί να περιστραφεί και ως προς κάθε σημείο. Από την άλλη υπάρχουν χώροι τριών διαστάσεων οι οποίοι παρόλο που δεν έχουν σταθερή καμπυλότητα επιτρέπουν τέτοιες μεταφορές τέτοιοι χώροι επιδέχονται ομάδες μετασχηματισμών 3 ή και 4 παραμέτρων. Χώροι που επιδέχονται μόνο ομάδα μετασχηματισμών 3 παραμέτρων τότε σταθεροποιώντας ένα σημείο αυτών συνεπάγεται να σταθεροποιηθεί και ολόκληρος ο χώρος. Από την άλλη χώροι 4 παραμέτρων υπάρχει περίπτωση να υπάρχει ομάδα στροφών G_1 η οποία να επιτρέπει τις στροφές γύρω από ένα σημείο. Ωστόσο μαζί με αυτό το σημείο και όλα τα σημεία της γεωδεσιακής που περνάνε από αυτό παραμένουν σταθερά οπότε αυτή η ομάδα αποτελεί μέρος της άλγεβρας *Lie*. Ο χώρος που είναι επενδυμένος με διπλή απειρία αυτών των γεωδετικών αξόνων που συμπληρώνουν τον χώρο, παρά των μετασχηματισμών (μετακινήσεων) που επιτρέπουν την μετακίνηση ενός σημείου σε οποιοδήποτε μέρος, εξακολουθούν να υπάρχουν αυθαίρετες στροφές οι οποίες μπορεί να γίνουν σε οποιοδήποτε σημείο αυτών των αξόνων. Επιπλέον χώροι που ικανοποιούν μία ομάδα G_3 και αυτοί που ικανοποιούν μία ομάδα G_4 είναι διακεκριμένες σε διαφορετικούς μη αναγώγιμους τύπους όπως θα δούμε παρακάτω [4, 7, 19].

3.1 Εξίσωση *Killing* και ισομετρίες

Από τον μετασχηματισμό της μετρικής προκύπτουν οι εξισώσεις *Killing* οι οποίες εξάγονται παρακάτω και μας δίνουν ισομετρίες τις μετρικής.

$$\begin{aligned}
ds^2 =& g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\
Xf =& \xi_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \qquad (3.1)\\
X[ds^2] =& X[g_{\mu\nu}]dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}X[dx^\mu]dx^\nu + g_{\mu\nu}dx^\mu X[dx^\nu] = \xi_r \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_r}dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}d\xi^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}dx^\mu d\xi^\nu \\
=& \xi_\kappa \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda}dx^\lambda dx^\nu + g_{\mu\nu}dx^\mu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\lambda}dx^\lambda = \left(\xi_\kappa \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + g_{\lambda\nu}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}\right)dx^\mu dx^\nu
\end{aligned}$$

Η ορίζουσα της παραπάνω σχέσης είναι διάφορη του μηδενός συνεπώς οι εξισώσεις είναι γραμμικός ανεξάρτητες οπότε προκύπτει η παρακάτω σχέση. Επιπλέον η σχέση αυτή είναι συμμετρική οπότε οι ανεξάρτητες λύσεις τις για τις n διαστάσεις είναι $\frac{1}{2}n(n+1)$

$$0 = \xi_\kappa \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + g_{\lambda\nu}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu} \qquad (3.2)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς τ.

$$\begin{aligned}
0 =& \xi^\tau \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\tau} + \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\mu} + \cancel{g_{\tau\nu}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\nu} + \cancel{g_{\mu\tau}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}} \\
0 =& \xi^\tau \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\tau} + \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\nu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\mu} + g_{\tau\lambda}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda} + \cancel{g_{\mu\tau}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}} \\
0 =& \xi^\tau \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} + \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\mu}\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda} + \cancel{g_{\tau\nu}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\tau}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\nu} + g_{\lambda\tau}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\mu}
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις αφαιρώντας την πρώτη σχέση από το άθροισμα των δύο τελευταίων παίρνουμε

$$\begin{aligned}
0 =& \xi^\tau \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\tau} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\tau}\right) + \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\tau}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}\right) + \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\tau} - \frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\lambda}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\lambda\tau}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\lambda}\right)\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\nu} + 2g_{\lambda\tau}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \\
=& g_{\lambda\tau}\frac{\partial^2 \xi^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \xi^\tau \partial_\tau \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda}\Gamma_{\mu\nu\tau} + \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu}\Gamma_{\tau\nu\lambda} + \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\nu}\Gamma_{\mu\tau\lambda} \\
=& \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + g^{\rho\lambda}\xi^\tau \partial_\tau \Gamma_{\mu\nu\lambda} + g^{\rho\lambda}\frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda}\Gamma_{\mu\nu\tau} + \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu}\Gamma^\rho{}_{\tau\nu} + \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\nu}\Gamma^\rho{}_{\mu\tau} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση περιέχει τον μέγιστο αριθμό ανεξαρτήτων αυθαίρετων σταθερών οι οποίες για τις n διαστάσεις είναι $n(n+1)$ άρα ο μέγιστος αριθμός ανεξαρτήτων αυθαίρετων σταθερών της εξίσωσης 3.2

$$r = n(n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Αν ο μέγιστος αριθμός ξεπεραστεί θα έχουμε την περίπτωση της πλήρους ολοκληρωσιμότητας και ο χώρος S_n θα έχει σταθερή καμπυλότητα. Σε κάθε περίπτωση ο αριθμός των ανεξαρτήτων πεπερασμένων μετασχηματισμών της μετρικής ικανοποιεί την σχέση $r \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, και αυτοί οι r μετασχηματιμοί θα γεννούν την ομάδα συνεχή ομάδα των κινήσεων, $G_r = \{X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f\}$, του χώρου S_n. Ένα βασικό σημείο είναι ότι αν ισχύει η 3.2 συνεπάγεται ότι δύο πεπερασμένοι μετασχηματισμοί του S_n δεν μπορεί να έχουν κοινές τροχιές χωρίς να συμπίπτουν οι μετασχηματισμοί αυτό αποδεικνύεται παρακάτω. Έστω ότι έχουμε $\xi_n = \lambda(x)\xi_n$

$$\begin{aligned}
0 =& \lambda(x)\xi_\kappa \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + g_{\lambda\nu}\frac{\partial(\lambda(x)\xi^\lambda)}{\partial x^\mu} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial(\lambda(x)\xi^\lambda)}{\partial x^\nu} \\
0 =& \lambda(x)\cancelto{0}{\Big(\xi_\kappa \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + g_{\lambda\nu}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} + g_{\mu\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}\Big)} + \xi^\lambda g_{\lambda\nu}\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x^\mu} + \xi^\lambda g_{\mu\lambda}\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x^\nu} \overset{\frac{\partial\lambda}{\partial x^\nu}\neq 0}{\underset{\mu=\nu}{\Rightarrow}} \\
0 =& g_{\mu\lambda}\xi^\lambda \frac{\partial\lambda(x)}{\partial x^\mu} \overset{det g_{\mu\nu}\neq 0}{\Rightarrow} g_{\mu\lambda}\xi^\lambda = 0 \Rightarrow \xi_\mu = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Από την υπόθεση ότι $\lambda = \lambda(x)$ καταλήγουμε στο ότι δεν θα υπήρχαν μετασχηματισμοί άρα $\lambda = constant$

3.1.1 Χώροι με ομάδα μετασχηματισμών G_1

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε τον μοναδικό μετασχηματισμό $\xi_1 = 1 = \eta_1$ που προκύπτουν από την μεταθετική σχέση.

$$[X_1, X_2] = 0$$

Οπότε η εξίσωση 3.2 θα παίρνει την μορφή.

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} = 0 \tag{3.5}$$

Άρα η μετρική του χώρου είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή x_1

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \tag{3.6}$$

Στην απλούστερη περίπτωση ομάδα μετασχηματισμών,η οποία είναι η G_1, παρατηρούμε ότι ο χώρος είναι επίπεδος.

3.1.2 Επιφάνειες με ομάδα μετασχηματισμών G_2

Θα ασχοληθούμε με τις επιφάνειες δύο και τριών διαστάσεων που ικανοποιούν την ομάδα μετασχηματισμών G_2. Για αρχή έχουμε ότι οι πεπερασμένοι μετασχηματιμοί θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2]f =& \begin{cases} 0 & (a) \\ X_1 f & (b) \end{cases} \\
X_1 =& \xi\frac{\partial}{\partial x^1} \;\&\; X_2 = \eta\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Όπου από τις μεταθετικές σχέσεις της άλγεβρας *Lie* έχουμε.

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2]f =& \begin{cases} \Big(\xi\frac{\partial\eta}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial\xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\Big)f = 0 & (a) \\ \Big(\xi\frac{\partial\eta}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial\xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\Big)f = \xi\frac{\partial}{\partial x^1}f & (b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial x^1} = 0 \;\&\; \frac{\partial\xi}{\partial x^2} = 0 & (a) \\ \frac{\partial\eta}{\partial x^1} = 0 \;\&\; \eta\frac{\partial\xi}{\partial x^2} = -\xi & (b) \end{cases} \\
=& \begin{cases} \xi = \eta = 1 \text{ ή } \xi = 1, \eta = 0 \text{ ή } \xi = 0, \eta = 1 & (a) \\ \eta = 1 \;\&\; \frac{1}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x^2} = -1 \Rightarrow \xi = e^{-x_2} & (b) \end{cases}
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τα διανύσματα *Killing* δίνονται παρακάτω

$$X = \begin{cases} X_\mu = \begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, & X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, & X_2 = 0 \\ X_1 = 0, & X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \end{cases} & (a) \\ X_\mu = \begin{cases} X_1 = e^{-x_2}\frac{\partial}{\partial x^1}, & X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \end{cases} & (b) \end{cases} \tag{3.7}$$

Από την εξίσωση *Killing*, 3.2, θα βρούμε την μορφή της μετρικής για διδιάστατες επιφάνειες.

$$3.2 = \begin{cases} \cancelto{1}{\xi_1}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{\xi_2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + g_{\kappa\nu}0 + g_{\mu\kappa}0 = 0 & \\ \cancelto{1}{\xi_1}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{\xi_2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + g_{\kappa\nu}0 + g_{\mu\kappa}0 = 0 & (a) \\ \cancelto{0}{\xi_1}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{\xi_2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + g_{\kappa\nu}0 + g_{\mu\kappa}0 = 0 & \\ \cancelto{e^{-x_2}}{\xi_1}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{\xi_2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + g_{\kappa\nu}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\mu} + g_{\mu\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\nu} = 0 & (b) \\ \cancelto{0}{\eta_1}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \cancelto{1}{\eta_2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \cancelto{0}{g_{\kappa\nu}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^\mu}} + \cancelto{0}{g_{\mu\kappa}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^\nu}} = 0 & \end{cases} \tag{3.8}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow g_{11} = g_{11}(x_2) & (a) \\ e^{-x_2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + g_{1\nu}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^\mu} + g_{\mu 1}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^\nu} = 0 & (b) \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_1) & \end{cases} \tag{3.9}$$

$$= \begin{cases} e^{-x_2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{2g_{11}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}} = 0 \\ e^{-x_2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + 2g_{12}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = 0 \\ e^{-x_2}\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + g_{21}\cancelto{0}{\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}} + g_{11}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{dg_{11}}{dx^1} = 0 \\ \frac{dg_{22}}{dx^2} = 2g_{12} \\ \frac{dg_{12}}{dx^1} = g_{11} \end{cases} = \begin{cases} g_{11} = a \\ g_{12} = ax_1 + b \\ g_{22} = ax_1^2 + 2bx_1 + c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &\overset{\substack{a=1 \\ b=0}}{\underset{c=R^2}{\equiv}} dx_1^2 + 2x_1 dx_1 dx_2 + (x_1^2 + R^2)dx_2^2 \\ x_1 &= -\,ve^{-\frac{u}{R}} \;\&\; x_2 = \frac{u}{R} \Rightarrow dx_1 = -e^{-\frac{u}{R}}\Big(dv - v\frac{du}{R}\Big) \;\&\; dx_2 = \frac{du}{R} \\ ds^2 &= e^{-\frac{2u}{R}}\Big(dv^2 + v^2\frac{du^2}{R^2} - 2v\frac{dvdu}{R}\Big) + 2ve^{-\frac{u}{R}}\frac{du}{R}e^{-\frac{u}{R}}\Big(dv - v\frac{du}{R}\Big) + \frac{du^2}{R^2}\Big(v^2e^{-2\frac{u}{R}} + R^2\Big) \\ &= e^{-\frac{2u}{R}}dv^2 + du^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.1.3 Επιφάνειες με ομάδα μετασχηματισμών G_3

Για την περίπτωση της G_3 σε επιφάνειες έχουμε για τους πεπερασμένους μετασχηματισμούς να δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \;\&\; X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} \;\&\; X_3 = x_2\frac{\partial}{\partial x^1} - x_1\frac{\partial}{\partial x^2}$$

η άλγεβρα που ικανοποιούν οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις.

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i = 1, j = 2 \\ X_1 & i = 2, j = 3 \\ X_2 & i = 3, j = 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

3.1.4 Χώροι με ομάδα μετασχηματισμών G_2

Τώρα θα μελετήσουμε χώρους τριών διαστάσεων με ομάδα μετασχηματισμών G_2. Οι τροχιές των διδιάστατων πεπερασμένων γεννητόρων της ομάδας G_2 μελετήθηκαν παραπάνω, και είδαμε πως κάθε σημείο του χώρου θα μετακινείται σε μία επιφάνεια σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς της G_2. Θα έχουμε μία άπειρη οικογένεια επιφανειών που θα αναπαράγει την ομάδα κάτι που ο *Lie* αποκαλεί ελάχιστες αναλλοίωτες ποικιλίες. Για έναν δοσμένο μετασχηματισμό της G_2, κάθε μία από τις επιφάνειες μπορεί να μετασχηματίζεται στον εαυτό της καθώς και κάθε επιφάνεια γεωδαιτικά παράλληλη στην επιφάνεια αυτή. Συμπεραίνουμε ότι κάθε μία από τις άπειρες αυτές τις επιφάνειες είναι γεωδαιτικά παράλληλη, επιπλέον κάθε μία από αυτές ικανοποιούν μία ομάδα μετασχηματισμών G_2, θα είναι με θετική αρνητική ή μηδενική καμπυλότητα. Αν επιλέξουμε τις επιφάνειες συντεταγμένες επιφάνειες για $x_1 = contant$, συνεπώς $\xi_1 = 0$, και τις ορθογώνιες τροχιές στην x_1 μπορούμε να γράψουμε την μετρική στην μορφή.

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + g_{33}dx_3^2 \\
X_1 =& \xi_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \cancelto{0}{\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1}} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\
X_2 =& \eta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1}} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}
$$

Κατ' αρχάς από την εξίσωση *Killing*, 3.2, θα βρούμε την μορφή για την πρώτη συνιστώσα της μετρικής, g_{11}. Στην συνέχεια θα βρούμε την μορφή που πρέπει να έχουν οι υπόλοιπες συνιστώσες της μετρικής ικανοποιώντας κάποιες συνθήκες, την συνθήκη σταθερής καμπυλότητας.

$$
\begin{aligned}
3.2 =& \begin{cases} \cancelto{0}{\xi_1 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1}} + \xi_2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3} + g_{\kappa\nu}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\mu} + g_{\mu\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\nu} = 0 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1}} + \eta_2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \eta_3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3} + g_{\kappa\nu}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^\mu} + g_{\mu\kappa}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^\nu} = 0 \end{cases} \\
=& \begin{cases} \xi_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + 2g_{\kappa 1}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^1} = 0 \quad \mu = \nu = 1 \\ \eta_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \eta_3 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + 2g_{\kappa 1}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1} = 0 \quad \mu = \nu = 1 \end{cases} \\
=& \begin{cases} \xi_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + 2g_{11}\cancelto{0}{\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}} + 2\cancelto{0}{g_{21}\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}} + 2\cancelto{0}{g_{31}\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1}} = 0 \quad \mu = \nu = 1 \\ \eta_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \eta_3 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + 2g_{11}\cancelto{0}{\frac{\partial \eta^1}{\partial x^1}} + 2\cancelto{0}{g_{21}\frac{\partial \eta^2}{\partial x^1}} + 2\cancelto{0}{g_{31}\frac{\partial \eta^3}{\partial x^1}} = 0 \quad \mu = \nu = 1 \end{cases} \\
=& \begin{cases} \xi_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \xi_3 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0 \\ \eta_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \eta_3 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} \neq 0
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η εξίσωση 3.2 για την g_{11} μας δίνει ότι η g_{11} είναι ανεξάρτητη των x_2, x_3 συνεπώς μπορούμε να την επιλέξουμε σταθερή και μέσω μετασχηματισμού της x_1 να την απορροφήσουμε στις μεταβλητές μας.

$$ds^2 = dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + g_{33}dx_3^2 \tag{3.13}$$

$$[X_1, X_2]f = \begin{cases} 0 & (a) \\ X_2 f & (b) \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} X_1 = \xi \frac{\partial}{\partial x^2} \ \& \ X_2 = \eta \frac{\partial}{\partial x^3} & (a) \\ X_1 = \xi \frac{\partial}{\partial x^3} \ \& \ X_2 = \eta \frac{\partial}{\partial x^2} & (b) \end{cases} \tag{3.14}$$

Όπου από τις μεταθετικές σχέσεις της άλγεβρας *Lie* έχουμε.

$$[X_1, X_2]f = \begin{cases} \left(\xi\frac{\partial \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3} - \eta\frac{\partial \xi}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^2}\right)f = 0 & (a) \\ \left(\xi\frac{\partial \eta}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\right)f = \eta\frac{\partial}{\partial x^2}f & (b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x^2} = 0 \ \& \ \frac{\partial \xi}{\partial x^3} = 0 & (a) \\ \frac{\partial \xi}{\partial x^2} = 0 \ \& \ \xi\frac{\partial \eta}{\partial x^3} = \eta & (b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \xi = \eta = 1 \text{ ή } \xi = 1, \eta = 0 \text{ ή } \xi = 0, \eta = 1 & (a) \\ \xi = 1 \ \& \ \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x^3} = 1 \Rightarrow \eta = e^{x_3} & (b) \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x^2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3} & \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x^2}, X_2 = 0 & (a) \\ X_1 = 0, X_2 = \frac{\partial}{\partial x^3} & \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x^3}, X_2 = e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x^2} & (b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cancelto{0}{\xi_2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}} + \cancelto{1}{\xi_3}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3} + g_{\kappa\nu}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\mu} + g_{\mu\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\nu} = 0 \\ \cancelto{x_3}{\eta_2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \cancelto{0}{\eta_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}} + g_{\kappa\nu}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^\mu} + g_{\mu\kappa}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^\nu} = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3}} + \cancelto{0}{g_{\kappa 2}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{g_{1\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^2}} = 0 \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} + \cancelto{0}{g_{\kappa 2}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{g_{2\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^2}} = 0 \Rightarrow g_{22} = g_{22}(x_1, x_2) \\ \cancelto{0}{\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}} + \cancelto{0}{g_{\kappa 3}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{g_{1\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^3}} = 0 \\ \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \cancelto{0}{g_{\kappa 3}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{g_{2\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^3}} = 0 \Rightarrow g_{23} = g_{23}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \cancelto{0}{g_{\kappa 3}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^3}} + \cancelto{0}{g_{3\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^3}} = 0 \Rightarrow g_{33} = g_{33}(x_1, x_2) \\ \cancelto{0}{e^{x_3}\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{g_{\kappa 2}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{g_{1\kappa}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2}} = 0 \\ e^{x_3}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \cancelto{0}{g_{\kappa 2}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{g_{2\kappa}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2}} = 0 \Rightarrow g_{22} = g_{22}(x_1) \\ \cancelto{0}{e^{x_3}\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{g_{\kappa 3}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{g_{11}\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3}} + \cancelto{0}{g_{12}\frac{\partial \eta^2}{\partial x^3}} + \cancelto{0}{g_{13}\frac{\partial \eta^3}{\partial x^3}} = 0 \\ e^{x_3}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \cancelto{0}{g_{\kappa 3}\frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{g_{21}\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3}} + g_{22}\frac{\partial \eta^2}{\partial x^3} + \cancelto{0}{g_{23}\frac{\partial \eta^3}{\partial x^3}} = 0 \\ e^{x_3}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + 2\cancelto{0}{g_{31}\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3}} + 2g_{32}\frac{\partial \eta^2}{\partial x^3} + 2\cancelto{0}{g_{33}\frac{\partial \eta^3}{\partial x^3}} = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} = -g_{22} \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -2g_{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{23} = -g_{22}(x_1)x_2 + b(x_1) = -a(x_1)x_2 + b(x_1) \\ g_{33} = -g_{22}(x_1)\frac{{x^2}_2}{2} + b(x_1)x_2 + c(x_1) = {x^2}_2 a(x_1) - 2b(x_1)x_2 + c(x_1) \end{cases}$$

$$ds^2 = dx_1^2 + a dx_2^2 + 2(-a(x_1)x_2 + b(x_1))dx_2 dx_3 + ({x^2}_2 a(x_1) - 2b(x_1)x_2 + c(x_1))dx_3^2 \tag{3.15}$$

3.1.5 Χώροι με μια αμετάβατη ομάδα μετασχηματισμών $G_r, r \geq 3$

Τώρα θα ασχοληθούμε με τον τρισδιάστατο χώρο που επιδέχεται χώρο μετασχηματισμών με παραπάνω από 2 παραμέτρους, ξεκινώντας από την αμετάβατη ομάδα μετασχηματισμών. Από τις υποθέσεις για την G_2 οι ελάχιστες αναλλοίωτες ποικιλίες της ομάδας μετασχηματισμών αποτελούν γεωδαιτικές επιφάνειες, και λόγω αυτής της ιδιότητας πρέπει να ικανοποιείται και για $G_r, r \geq 3$, αυτό ισχύει διότι αν όλα τα σημεία μίας επιφάνειας ήταν σταθερά τότε η επιφάνεια θα έπρεπε να είναι ακινητοποιημένη.

$$ds^2 = dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{23}dx_3^2 \tag{3.13}$$

και οι γεωδαιτικά παράλληλες επιφάνειες $x_1 = constant$ θα έχουν σταθερή καμπυλότητα. Επιλέγοντας αυθαίρετα την τιμή του $x_1 = 0$ αυτές οι επιφάνειες θα μπορούν να χαρακτηριστούν από τρεις καμπυλότητες $K = 0, 1, -1$. Έτσι για τις τρεις καμπυλότητες μπορούμε να επιλέξουμε $x_1 = constant$ και από την εξίσωση *Killing*, 3.2, θα εξαγάγουμε την μορφή της μετρικής όπου αργότερα θα γενικεύσουμε για $x_1 \neq constant$.

$$
X=\begin{cases}
X_\mu^K=\begin{cases}X_1=\frac{\partial}{\partial x^2}\\ X_2=\frac{\partial}{\partial x^3}\\ X_3=x_3\frac{\partial}{\partial x^2}-x_2\frac{\partial}{\partial x^3}\end{cases} & K=0\\
X_\mu^K=\begin{cases}X_1=\frac{\partial}{\partial x^3}\\ X_2=\sin x_3\frac{\partial}{\partial x^2}+\cot x_2\cos x_3\frac{\partial}{\partial x^3}\\ X_3=\cos x_3\frac{\partial}{\partial x^2}-\cot x_2\sin x_3\frac{\partial}{\partial x^3}\end{cases} & K=1\\
X_\mu^K=\begin{cases}X_1=\frac{\partial}{\partial x^3}\\ X_2=\frac{\partial}{\partial x^2}-x_3\frac{\partial}{\partial x^3}\\ X_3=x_3\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{1}{2}(e^{-2x_3}-x_2^2)\frac{\partial}{\partial x^3}\end{cases} & K=-1
\end{cases}
$$

$$
3.2=\begin{cases}
\xi_\tau\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\nu}=0\\
\eta_\tau\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\nu}=0\\
\theta_\tau\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\nu}=0
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
\begin{cases}
\xi_2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+\cancelto{0}{g_{\kappa\nu}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\mu}}+\cancelto{0}{g_{\mu\kappa}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\nu}}=0\Rightarrow g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x_1,x_3)\\
\eta_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}+\cancelto{0}{g_{\kappa\nu}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\mu}}+\cancelto{0}{g_{\mu\kappa}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\nu}}=0\Rightarrow g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x_1)\\
\cancelto{0}{\theta_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}}+\cancelto{0}{\theta_2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\nu}=0
\end{cases} & K=0\\
\begin{cases}
\xi_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}+\cancelto{0}{g_{\kappa\nu}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\mu}}+\cancelto{0}{g_{\mu\kappa}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\nu}}=0\Rightarrow g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x_1,x_2)\\
\eta_2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+\cancelto{0}{\eta_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\nu}=0\\
\theta_2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+\cancelto{0}{\theta_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\nu}=0
\end{cases} & K=1\\
\begin{cases}
\xi_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}+\cancelto{0}{g_{\kappa\nu}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\mu}}+\cancelto{0}{g_{\mu\kappa}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\nu}}=0\Rightarrow g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x_1,x_2)\\
\eta_2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+\cancelto{0}{\eta_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\nu}=0\\
\theta_2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+\cancelto{0}{\theta_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\nu}=0
\end{cases} & K=-1
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
\begin{cases}
g_{2\nu}\cancelto{\delta_{3\mu}}{\frac{\partial x_3}{\partial x^\mu}}+g_{3\nu}\cancelto{-\delta_{2\mu}}{\frac{\partial(-x_2)}{\partial x^\mu}}+g_{\mu2}\cancelto{\delta_{3\nu}}{\frac{\partial x_3}{\partial x^\nu}}+g_{\mu3}\cancelto{-\delta_{2\nu}}{\frac{\partial(-x_2)}{\partial x^\nu}}=0\\
g_{2\nu}\delta_{3\mu}-g_{3\nu}\delta_{2\mu}+g_{\mu2}\delta_{\nu3}-g_{\mu3}\delta_{\nu2}=0\Rightarrow g_{23}=0
\end{cases} & K=0\\
\begin{cases}
\xi_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}+\cancelto{0}{g_{\kappa\nu}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\mu}}+\cancelto{0}{g_{\mu\kappa}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\nu}}=0\Rightarrow g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x_1,x_2)\\
\sin x_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\nu}=0\\
\cos x_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\nu}=0\\
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+g_{\kappa\nu}(\sin x_3\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\mu}+\cos x_3\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\mu})+g_{\mu\kappa}(\sin x_3\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\nu}+\cos x_3\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\nu})=0\\
\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+g_{32}(\sin x_3\cancelto{-\frac{\cos x_3}{\cos^2 x_2}}{\frac{\partial\eta^3}{\partial x^2}}+\cos x_3\cancelto{-\frac{\sin x_3}{\cos^2 x_2}}{\frac{\partial\theta^3}{\partial x^2}})=0\Rightarrow\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=0\Rightarrow g_{22}=g_{22}(x_1)\\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}+2g_{32}(\sin x_3\cancelto{-\frac{\cos x_3}{\cos^2 x_2}}{\frac{\partial\eta^3}{\partial x^2}}+\cos x_3\cancelto{-\frac{\sin x_3}{\cos^2 x_2}}{\frac{\partial\theta^3}{\partial x^2}})+2g_{33}(\sin x_3\cancelto{-\sin x_3\cot x_2}{\frac{\partial\theta^3}{\partial x^3}}+\cos x_3\cancelto{-\cos x_3\cot x_2}{\frac{\partial\theta^3}{\partial x^3}})=0\\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=2\cot x_2 g_{33}\Rightarrow g_{33}=\sin^2 x_2
\end{cases} & K=1\\
\begin{cases}
\xi_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}+\cancelto{0}{g_{\kappa\nu}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\mu}}+\cancelto{0}{g_{\mu\kappa}\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\nu}}=0\Rightarrow g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x_1,x_2)\\
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\nu}=0\Rightarrow\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+g_{\kappa2}\cancelto{0}{\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^2}}=0\Rightarrow g_{22}=g_{22}(x_1)\\
\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}+2g_{\kappa3}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^3}=0\Rightarrow\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}+2g_{33}\frac{\partial(-x_3)}{\partial x^3}=0\Rightarrow g_{33}=e^{2x_2}\\
\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}+\cancelto{0}{2g_{\kappa3}\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^2}}=0\Rightarrow g_{23}=g_{23}(x_1)\\
x_3\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}+g_{\kappa\nu}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\mu}+g_{\mu\kappa}\frac{\partial\theta^\kappa}{\partial x^\nu}=0
\end{cases} & K=-1
\end{cases}\tag{3.16}
$$

Αφού έχουμε κάνει όλους τους υπολογισμούς για να βρούμε την μορφή των συνιστωσών της μετρικής και έχουμε επιλέξει σταθερό το x_1 παίρνουμε την μετρική.

$$ds^2 = \begin{cases} dx_2^2 + dx_3^2 & K = 0 \\ dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2 & K = 1 \\ dx_2^2 + e^{2x_2} dx_3^2 & K = -1 \end{cases}$$

Αφού είδαμε ποια θα είναι η μορφή των εξισώσεων για $x_1 = constant$ είναι ώρα να γενικεύσουμε και για $x_1 \neq constant$ όπου η μορφή της μετρικής θα είναι η εξής.

$$ds^2 = \begin{cases} dx_1^2 + \phi(x_1)^2(dx_2^2 + dx_3^2) & K = 0 \\ dx_1^2 + \phi(x_1)^2(dx_2^2 + \sin x_2 dx_3^2) & K = 1 \\ dx_1^2 + \phi(x_1)^2(dx_2^2 + e^{2x_2} dx_3^2) & K = -1 \end{cases} \tag{3.17}$$

Όπου οι υπολογισμοί έχουν γίνει παραπάνω, 3.16, και για τις τρεις περιπτώσεις της σταθερής καμπυλότητας, $K = 0, 1, -1$. Η συνάρτηση $\phi(x_1)$ εισάγεται ως σύμμορφος παράγων χωρίς να επηρεάζει την διαφορική εξίσωση, 3.2, απλός στην προηγούμενη περίπτωση ήταν σταθερή, $x_1 = constant$, οπότε το απορροφούσαν οι μεταβλητές x_2, x_3. Στην συνέχεια θα δούμε τις πλήρεις εξισώσεις για την συγκεκριμένη μετρική. Όπου και θα ολοκληρωθεί η ταξινόμηση των ομογενών τριδιάστατων μετρικών. Έχουμε το διάνυσμα *Killing* για το οποίο θα βρούμε την τελική μορφή της μετρικής

$$X = \eta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Η μορφή της μετρικής που έχουμε είναι η εξής και μέσω των εξισώσεων, 3.2, θα προσδιορίσουμε την πλήρη μορφή που πρέπει να έχει για να είναι συμβατή με την άλγεβρα μας.

$$3.2 = \begin{cases} \eta_1 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{\eta_3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}} + g_{\kappa\nu} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\mu} + g_{\mu\kappa} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\nu} = 0 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^1} + 2 g_{\mu\kappa} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\mu} = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}} + 2 g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \mu = \nu = 1 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + 2 g_{\kappa 2} \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \eta_1 2\phi\phi' + 2\phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} = 0 & \mu = \nu = 2 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + 2 g_{\kappa 3} \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \eta_1 2\phi\phi' + 2\phi^2 \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = 0 & \mu = \nu = 3 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}} + g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2} + g_{2\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} + \phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} = 0 & \mu = 1, \nu = 2 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}} + g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^3} + g_{3\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} + \phi^2 \frac{\partial \eta^3}{\partial x^1} = 0 & \mu = 1, \nu = 3 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}} + g_{\kappa 2} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^3} + g_{3\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^3} + \phi^2 \frac{\partial \eta^3}{\partial x^2} = 0 & \mu = 2, \nu = 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\phi^2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} \ \& \ \frac{\partial \eta^3}{\partial x_1} = -\frac{1}{\phi^2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(\phi''\phi - \phi'^2)}{\phi^2} \eta^1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2^2} = (\phi''\phi - \phi'^2)\eta^1 \\ \frac{\partial^2 \eta^3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{(\phi''\phi - \phi'^2)}{\phi^2} \eta^1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} = (\phi''\phi - \phi'^2)\eta^1 \end{cases}$$

Εφόσον έχουμε ότι το η^1 είναι ανεξάρτητο του x_1 θα πρέπει να ισχύει ότι, $\phi''\phi - \phi'^2 = constant$ γιατί αλλιώς θα είχε εξάρτηση από αυτό οπότε βρίσκουμε.

$$= \begin{cases} \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2^2} = c\eta^1 \\ \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} = c\eta^1 \\ \eta^2 = -\frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \psi(x_2, x_3) \\ \eta^3 = -\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \zeta(x_2, x_3) \\ -2 \frac{\partial \eta^1}{\partial x^3 \partial x^2} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \frac{\partial \zeta(x_2, x_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x_2, x_3)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει το $\eta_1 = constant$ διότι από την τελευταία σχέση έχουμε ότι ο συντελεστής του ολοκληρώματος, $\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3 \partial x^2}$, πρέπει να είναι μηδέν αλλιώς τα ψ, ζ θα εξαρτώνται από την μεταβλητή x_1 οπότε έχουμε $\eta_1 = constant$ άρα $\eta_2 = \psi$ & $\eta_3 = \zeta$. Οπότε έχουμε από τις εξισώσεις αυτές να προκύπτει είτε ο Ευκλείδειος χώρος, αν υποθέσουμε $c = 0$, είτε χώρος σταθερής καμπυλότητας, αν επιλέξουμε $c = k, c \in \mathbb{C}$ (καμπυλότητα $K = -k^2$). Σε κάθε περίπτωση προκύπτει πλήρης ομάδα μετασχηματισμών που έχει έξι παραμέτρους. Τώρα θα ασχοληθούμε με την περίπτωση θετικής σταθερής καμπυλότητας όπου πάλι μέσω των εξισώσεων *Killing*, 3.2, θα προσδιορίσουμε την πλήρη μορφή της μετρικής

$$3.2 = \begin{cases} \eta_1 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \eta_2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \cancelto{0}{\eta_3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}} + g_{\kappa\nu} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\mu} + g_{\mu\kappa} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\nu} = 0 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^1} + \eta_2 \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^2} + 2 g_{\mu\kappa} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\mu} = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}} + 2 g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0 & \mu = \nu = 1 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}} + 2 g_{\kappa 2} \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \eta_1 2\phi\phi' + 2\phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} = 0 & \mu = \nu = 2 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \eta_2 \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + 2 g_{\kappa 3} \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow & \\ \eta_1 2\phi\phi' \sin^2 x_2 + 2\phi^2 \sin x_2 \cos x_2 \eta_2 + 2\phi^2 \sin^2 x_2 \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = 0 & \mu = \nu = 3 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}} + g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2} + g_{2\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} + \phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} = 0 & \mu = 1, \nu = 2 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}} + g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^3} + g_{3\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} + \phi^2 \sin^2 x_2 \frac{\partial \eta^3}{\partial x^1} = 0 & \mu = 1, \nu = 3 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}} + g_{\kappa 2} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^3} + g_{3\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^3} + \phi^2 \sin^2 x_2 \frac{\partial \eta^3}{\partial x^2} = 0 & \mu = 2, \nu = 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\phi^2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} \ \& \ \frac{\partial \eta^3}{\partial x_1} = -\frac{1}{\sin^2 x_2 \phi^2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(\phi''\phi - \phi'^2)}{\phi^2} \eta^1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2^2} = (\phi''\phi - \phi'^2) \eta^1 \\ \frac{\partial^2 \eta^3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{(\phi''\phi - \phi'^2)}{\phi^2} \eta^1 + \frac{\cot x_2}{\phi^2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} = (\phi''\phi - \phi'^2) \sin^2 x_2 \eta^1 - \sin x_2 \cos x_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \end{cases}$$

Εφόσον έχουμε ότι το η^1 είναι ανεξάρτητο του x_1 θα πρέπει να ισχύει ότι, $\phi''\phi - \phi'^2 = constant$ γιατί αλλιώς θα είχε εξάρτηση από αυτό οπότε βρίσκουμε.

$$= \begin{cases} \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2^2} = c\eta^1 \\ \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} = c\eta^1 \sin^2 x_2 \eta_1 - \sin x_2 \cos x_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \\ \eta^2 = -\frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \psi(x_2, x_3) \\ \frac{\partial \eta^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3 \partial x^2} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \frac{\partial \psi(x_2, x_3)}{\partial x^3} \\ \eta^3 = -\frac{1}{\sin^2 x_2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \zeta(x_2, x_3) \\ \frac{\partial \eta^3}{\partial x^2} = \frac{2 \sin x_2 \cos x_2}{\sin^4 x_2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} - \frac{1}{\sin^2 x_2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x^3 \partial x^2} \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \frac{\partial \zeta(x_2, x_3)}{\partial x^2} \\ -2\left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3 \partial x^2} - \cot x_2 \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \right) \int \frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \sin^2 x_2 \frac{\partial \zeta(x_2, x_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x_2, x_3)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει το $\eta_1 = constant$ διότι από την τελευταία σχέση έχουμε ότι ο συντελεστής του ολοκληρώματος, $\left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3 \partial x^2} - \cot x_2 \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3}\right)$, πρέπει να είναι μηδέν αλλιώς τα ψ, ζ θα εξαρτώνται από την μεταβλητή x_1 οπότε έχουμε $\eta_1 = constant$ άρα $\eta_2 = \psi$ & $\eta_3 = \zeta$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3 \partial x^2} &= \cot x_2 \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \\
\frac{\partial^3 \eta^1}{\partial x^3 \partial x_2^2} &= -\frac{1}{\sin^2 x_2}\frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} + \cot x_2 \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3 \partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial c \eta^1}{\partial x^3} = -\frac{1}{\sin^2 x_2}\frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} + \cot^2 x_2 \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \\
c\frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} &= -\frac{-1+\cos^2 x_2}{\sin^2 x_2}\frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \Rightarrow (c+1)\frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = -1 & (a) \\ \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} = 0 & (b) \end{cases} \\
(a) \Rightarrow & \phi''\phi - \phi'^2 = -1 \Rightarrow \phi'''\phi + \phi''\phi' - 2\phi'\phi'' = 0 \Rightarrow \frac{\phi'''}{\phi''} = \frac{\phi'}{\phi} \Rightarrow \ln \phi'' = \ln(k\phi) \Rightarrow \phi'' = k\phi \\
\phi'^2 = & 1 + k\phi^2 = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 1+\frac{\phi^2}{R^2} & k>0 \\ 1-\frac{\phi^2}{R^2} & k<0 \end{cases} \Rightarrow \phi = \begin{cases} x_1 & k=0 \\ R\sin\frac{x_1}{R} & k>0 \\ R\sinh^2\frac{x_1}{R} & k<0 \end{cases} \\
ds^2 &= \begin{cases} dx_1^2 + x_1^2(dx_2 + dx_3^2) & k=0 \\ dx_1^2 + R^2\sin^2\frac{x_1}{R}(dx_2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) & k>0 \\ dx_1^2 + R^2\sinh^2\frac{x_1}{R}(dx_2 + e^{2x_2}dx_3^2) & k<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Η πρώτη σχέση ανήκει στον Ευκλείδειο χώρο σε πολικές συντεταγμένες και οι δεύτερη και η σχέση σε χώρους με θετική και αρνητική καμπυλότητα αντίστοιχα. Οι χώροι αυτοί ικανοποιούν την ομάδα μετασχηματισμών G_6.

$$
\begin{aligned}
(b) \Rightarrow & \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = c\eta_1 \;\&\; \cancelto{0}{\frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2}} = c\eta^1 \sin^2 x_2 \eta_1 - \sin x_2 \cos x_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} = c\tan x_2 \eta_1 \\
\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_2^2} = & c\tan x_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{c}{\cos^2 x_2}\eta_1 \Rightarrow c\eta_1 = c\Big(\tan^2 x_2 + \frac{1}{\cos^2 x_2}\Big)\eta_1 \Rightarrow c\Big(1 - \frac{1}{\cos^2 x_2}\Big) = c^2\frac{\sin^2 x_2}{\cos^2 x_2} \\
c(c+1) = & 0
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Από τις δύο περιπτώσεις που προέκυψαν για το c την περίπτωση $c = -1$ την έχουμε μελετήσει οπότε μας μένει η περίπτωση $c = 0$ συνεπώς θα έχουμε $\eta_1 = constant = a$.

$$
(b) = \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + a\frac{\phi'}{\phi} = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} + a\frac{\phi'}{\phi} + \cot x_2 \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \sin^2 x_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{3.21}
$$

Για να ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις πρέπει να ισχύει $\frac{\phi'}{\phi} = b$ συνεπώς θα έχουμε.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= -ab \Rightarrow \psi(x_2, x_3) = -abx_2 + \theta(x_3) \\
\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} &= -\frac{\theta'}{\sin^2 x_2} \;\&\; \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} = -ab - \cot x_2(-abx_2 + \theta(x_3)) \Rightarrow \\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2 \partial x_3} &= -\frac{\theta''}{\sin^2 x_2} \;\&\; \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{(-abx_2 + \theta(x_3))}{\sin^2 x_2} + \cot x_2 ab \Rightarrow \\
\theta'' + \theta &= -ab(x_2 - \sin x_2 \cos x_2)
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Όπου από την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας πρέπει το δεξί μέλος να είναι μηδέν ο μόνος τρόπος να ισχύει αυτό ταυτοτικά είναι το γινόμενο ab να είναι μηδέν αλλά επειδή δεχτήκαμε ότι το $\eta_1 = a \neq 0$ θα ισχύει ότι $b = 0$ άρα.

$$\begin{aligned} \theta'' + \theta =& 0 \Rightarrow \theta(x_3) = m \sin x_3 + n \cos x_3 \\ \zeta =& \cot x_2 (m \cos x_3 - n \sin x_3) + l \\ \eta^\mu =& \begin{cases} a & \mu = 1 \\ m \sin x_3 + n \cos x_3 & \mu = 2 \\ \cot x_2 (m \cos x_3 - n \sin x_3) + l & \mu = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Όπου έχουμε a, m, l, n αυθαίρετες σταθερές τις οποίες από την άλγεβρα μπορούμε να τις υπολογίσουμε. Συνεπώς η ομάδα G_4 μας δίνει τελικά.

$$X^\mu = \begin{cases} X^1 = \frac{\partial}{\partial x_3} & \mu = 1 \\ X^2 = \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cot x_2 \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} & \mu = 2 \\ X^3 = \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \cot x_2 \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} & \mu = 3 \\ X^4 = \frac{\partial}{\partial x_1} & \mu = 4 \end{cases} \tag{3.23}$$

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} X_3 & i = 1, j = 2 \\ X_2 & i = 3, j = 1 \\ X_1 & i = 2, j = 3 \\ 0 & i = 1, 2, 3, j = 4 \end{cases} \tag{3.24}$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2 \tag{3.25}$$

Η μορφή της μετρικής ήδη καθιστά ήδη εκ των προτέρων ενδείξεις ότι, εκτός από τις άπειρες κινήσεις που αντιστοιχούν στην ολίσθηση στις σταθερές επιφάνειες, x_1, στον εαυτό τους, υπάρχει μία ομάδα G_1 που επιτρέπει $x_1' = x_1 + constant, x_2' = x_2, x_3' = x_3$. Αλλά από τους υπολογισμούς μας βλέπουμε ότι η ομάδα G_4 είναι επίσης η πλήρης ομάδα μετασχηματισμών. Μία τέτοια ομάδα όπως η G_4 είναι καθαρά μεταβατική. Επιπλέον αποτελεί ομάδα *Lie* διότι οι κινήσεις που αφήνουν ένα σημείο του χώρου αναλλοίωτο αφήνουν και όλα τα σημεία μίας γεωδαιτικής, x_1, από τα οποία περνάει διαμέσο αυτής. Άρα αυτές οι γεωδαιτικές είναι οι ποικιλίες που συνθέτουν την ομάδα. Όλος ο χώρος μπορεί να περιστραφεί γύρω από κάθε μία από αυτές, αλλά καμία άλλη περιστροφή δεν είναι επιτρεπτή.

$$3.2 = \begin{cases} \eta_1 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} + \eta_2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \cancelto{0}{\eta_3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^3}} + g_{\kappa\nu} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\mu} + g_{\mu\kappa} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\nu} = 0 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^1} + \eta_2 \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^2} + 2 g_{\mu\kappa} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_\mu} = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}} + 2 g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta_\kappa}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = 0 & \mu = \nu = 1 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}} + 2 g_{\kappa 2} \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \eta_1 2 \phi \phi' + 2 \phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} = 0 & \mu = \nu = 2 \\ \eta_1 \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \eta_2 \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + 2 g_{\kappa 3} \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \eta_1 2 \phi \phi' e^{2x_2} + 2 \phi^2 e^{2x_2} \eta_2 + 2 \phi^2 e^{2x_2} \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = 0 & \mu = \nu = 3 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}} + g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2} + g_{2\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} + \phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} = 0 & \mu = 1, \nu = 2 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2}} + g_{\kappa 1} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^3} + g_{3\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta^1}{\partial x^3} + \phi^2 e^{2x_2} \frac{\partial \eta^3}{\partial x^1} = 0 & \mu = 1, \nu = 3 \\ \cancelto{0}{\eta_1 \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\eta_2 \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2}} + g_{\kappa 2} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^3} + g_{3\kappa} \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \phi^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^3} + \phi^2 e^{2x_2} \frac{\partial \eta^3}{\partial x^2} = 0 & \mu = 2, \nu = 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\phi^2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_2} \ \& \ \frac{\partial \eta^3}{\partial x_1} = -\frac{e^{-2x_2}}{\phi^2} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(\phi'' \phi - \phi'^2)}{\phi^2} \eta^1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_2^2} = (\phi'' \phi - \phi'^2) \eta^1 \\ \frac{\partial^2 \eta^3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{(\phi'' \phi - \phi'^2)}{\phi^2} \eta^1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} = (\phi'' \phi - \phi'^2) \eta^1 - e^{-2x_2} \phi^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} = e^{2x_2} (\phi'' \phi - \phi'^2) \eta^1 - e^{2x_2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

Εφόσον έχουμε ότι το η^1 είναι ανεξάρτητο του x_1 θα πρέπει να ισχύει ότι, $\phi''\phi - \phi'^2 = constant$ γιατί αλλιώς θα είχε εξάρτηση από αυτό οπότε βρίσκουμε.

$$= \begin{cases} \frac{\partial^2\eta^1}{\partial x_2^2} = c\eta^1 \\ \frac{\partial^2\eta^1}{\partial x_3^2} = e^{2x_2}\Big(c\eta^1 - \frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}\Big) \\ \eta^2 = -\frac{\partial\eta^1}{\partial x^2}\int\frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \psi(x_2,x_3) \\ \frac{\partial\eta^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3\partial x^2}\int\frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \frac{\partial\psi(x_2,x_3)}{\partial x^3} \\ \eta^3 = -e^{-2x_2}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3}\int\frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \zeta(x_2,x_3) \\ \frac{\partial\eta^3}{\partial x^2} = 2e^{-2x_2}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3}\int\frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} - e^{-2x_2}\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3\partial x^2}\int\frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + \frac{\partial\zeta(x_2,x_3)}{\partial x^2} \\ -2\Big(\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3\partial x^2} - \frac{\partial\eta^1}{\partial x_3}\Big)\int\frac{dx_1}{\phi^2(x_1)} + e^{2x_2}\frac{\partial\zeta(x_2,x_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi(x_2,x_3)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει το $\eta_1 = constant$ διότι από την τελευταία σχέση έχουμε ότι ο συντελεστής του ολοκληρώματος, $\Big(\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3\partial x^2} - \frac{\partial\eta^1}{\partial x_3}\Big)$, πρέπει να είναι μηδέν αλλιώς τα ψ, ζ θα εξαρτώνται από την μεταβλητή x_1 οπότε έχουμε $\eta_1 = constant$ άρα $\eta_2 = \psi$ & $\eta_3 = \zeta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta^1}{\partial x^3\partial x^2} =& \frac{\partial\eta^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^3\eta^1}{\partial x^3\partial x_2^2} =& \frac{\partial^2\eta^1}{\partial x_3\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial c\eta^1}{\partial x^3} = \frac{\partial\eta^1}{\partial x_3} \Rightarrow (c-1)\frac{\partial\eta^1}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 1 & (a) \\ \frac{\partial\eta^1}{\partial x_3} = 0 & (b) \end{cases} \\ (a) \Rightarrow& \phi''\phi - \phi'^2 = 1 \Rightarrow \phi'''\phi + \phi''\phi' - 2\phi'\phi'' = 0 \Rightarrow \frac{\phi'''}{\phi''} = \frac{\phi'}{\phi} \Rightarrow \ln\phi'' = \ln(k\phi) \Rightarrow \phi'' = k\phi \end{aligned} \tag{3.27}$$

Η σταθερά k πρέπει να είναι υποχρεωτικά θετική αλλιώς το ϕ θα ήταν μιγαδικό. Οπότε θέτουμε $k = \frac{1}{R^2}$ και έχουμε.

$$\begin{aligned} \phi(x_1) =& R\cosh\frac{x_1}{R} \\ ds^2 =& dx_1^2 + R^2\cosh^2\frac{x_1}{R}(dx_2^2 + e^{2x_2}dx_3^2) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Από τις δύο περιπτώσεις που προέκυψαν για το c την περίπτωση $c = -1$ την έχουμε μελετήσει οπότε μας μένει η περίπτωση $c = 0$ συνεπώς θα έχουμε $\eta_1 = constant = a$.

$$(b) = \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + a\frac{\phi'}{\phi} = 0 \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x_3} + a\frac{\phi'}{\phi} + \psi = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_3} + e^{2x_2}\frac{\partial\zeta}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Για να ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις πρέπει να ισχύει $\frac{\phi'}{\phi} = b$ συνεπώς θα έχουμε.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} =& -ab \Rightarrow \psi(x_2,x_3) = -abx_2 + \theta(x_3) \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x_2} =& -e^{-2x_2}\theta' \;\&\; \frac{\partial\zeta}{\partial x_3} = -ab - (-abx_2 + \theta(x_3)) \Rightarrow \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2\partial x_3} =& -e^{-2x_2}\theta'' \;\&\; \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_3\partial x_2} = ab \Rightarrow \\ \theta'' =& -abe^{2x_2} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Όπου από την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας πρέπει το δεξί μέλος να είναι μηδέν ο μόνος τρόπος να ισχύει αυτό ταυτοτικά είναι το γινόμενο ab να είναι μηδέν αλλά επειδή δεχτήκαμε ότι το $\eta_1 = a \neq 0$ θα ισχύει ότι $b = 0$ άρα.

$$\begin{aligned} \theta'' =&0 \Rightarrow \theta(x_3) = mx_3 + n \\ \zeta =& -\frac{1}{2}(mx_3^2 + 2nx_3) \\ \eta^\mu =& \begin{cases} a & \mu = 1 \\ mx_3 + n \\ \frac{m}{2}(e^{-2x_2} - x_3^2) - lx_3 + d \end{cases} \end{aligned}$$

Όπου έχουμε a, m, l, n αυθαίρετες σταθερές τις οποίες από την άλγεβρα μπορούμε να τις υπολογίσουμε. Συνεπώς η ομάδα G_4 μας δίνει τελικά.

$$X^\mu = \begin{cases} X^1 = \frac{\partial}{\partial x_3} & \mu = 1 \\ X^2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} & \mu = 2 \\ X^3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2}(e^{-2x_2} - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_3} & \mu = 3 \\ X^4 = \frac{\partial}{\partial x_1} & \mu = 4 \end{cases} \tag{3.31}$$

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} X_1 & i = 1, j = 2 \\ X_3 & i = 2, j = 3 \\ X_2 & i = 3, j = 1 \\ 0 & i = 1, 2, 3, j = 4 \end{cases} \tag{3.32}$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2 \tag{3.33}$$

Η άλγεβρα που προέκυψε είναι ίδια με την προηγούμενη ανάλυση που έγινε παρόλα αυτά μιλάμε για δύο διαφορετικού τύπου χώρους που ικανοποιούν, γεγονός που καθορίζεται από την παρατήρηση ώστε οι δύο επιφάνειες είναι ορθογώνιες με τις γεωδαιτικές, x_1 επιφάνειες θετικής σταθερής καμπυλότητας ενώ για τον εν λόγο χώρο είναι για σταθερή αρνητική καμπυλότητα.

Συνοψίζοντας έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

***Θεώρημα* 3.1.1.** *Αν ένας τρισδιάστατος χώρος ικανοποιεί αμετάβατη ομάδα μετασχηματισμού G_3, η μετρική σχέση μπορεί να αναχθεί σε έναν από τους τρεις τύπους.*

$$ds^2 = \begin{cases} dx_1^2 + \phi(x_1)(dx_2^2 + dx_3^2) \\ dx_1^2 + \phi(x_1)(dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) \\ dx_1^2 + \phi(x_1)(dx_2^2 + e^{2x_2} dx_3^2) \end{cases} \tag{3.34}$$

και γενικά ολόκληρη η ομάδα των κινήσεων είναι ακριβός ομάδα τριων παραμέτρων. Την μόνη εξαίρεσή αποτελούν οι δύο παρακάτω χώροι.

$$ds^2 = \begin{cases} dx_1^2 + dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2 \\ dx_1^2 + dx_2^2 + e^{2x_2} dx_3^2 \end{cases} \tag{3.35}$$

που ο καθένας είναι ομάδα τεσσάρων παραμέτρων, και οι χώροι με σταθερή καμπυλότητα που ικανοποιούν ομάδα έξι παραμέτρων.

3.1.6 Χώροι με μια μεταβατική ομάδα μετασχηματισμών G_3

Αφού έχουμε μελετήσει τους χώρους με αμετάβατη ομάδα μετασχηματισμών ήρθε η ώρα να κάνουμε το ίδιο με τους χώρους με μεταβατική ομάδα μετασχηματισμών. Θα υποθέσουμε ότι η μετρική του χώρου μας δίνεται από την παρακάτω σχέση, η οποία ορίζεται μέσω πρώτων μορφών, και θα εξαγάγουμε τα διανύσματα *Killing* και θα βρούμε ποια άλγεβρα ικανοποιούν και πως μπορούμε να τις ταξινομήσουμε

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε μεταβατικές ομάδες G_3 στις τρεις μεταβλητές, x_1, x_2, x_3, για χώρους που επιδέχονται τέτοιους μετασχηματισμούς.

$$\begin{aligned}
ds^2 =& h_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta = h_{\alpha\beta}(x')dx'^\alpha dx'^\beta \\
dx'^\alpha =& \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}dx^\delta \\
ds^2 \overset{e^{(a)}_{\ \alpha}dx^\alpha}{=}& \eta_{ab}e^{(a)}_{\ \alpha}dx^\alpha e^{(b)}_{\ \beta}dx^\beta \\
e^{(a)}_{\ \alpha}(x)e^\beta_{\ (a)}(x) =& \delta^\beta_{\ \alpha} \ \& \ \ e^{(a)}_{\ \alpha}(x)e^\alpha_{\ (b)}(x) = \delta^a_{\ b} \qquad (3.36) \\
e^{(a)}_{\ \alpha}(x)dx^\alpha =& e^{(a)}_{\ \alpha}(x')dx'^\alpha \overset{e^\beta_{\ (a)}(x')}{\Rightarrow} e^\beta_{\ (a)}(x')e^{(a)}_{\ \alpha}(x)dx^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta}dx^\delta \cancelto{\delta^\beta_{\ \alpha}}{e^\beta_{\ (a)}(x')e^{(a)}_{\ \beta}(x')} \\
\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} =& e^\beta_{\ (a)}(x')e^{(a)}_{\ \alpha}(x) \\
\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} =& \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x^\gamma}e^{(a)}_{\ \alpha}(x) + e^\beta_{\ (a)}(x')\frac{\partial e^{(a)}_{\ \alpha}(x)}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma}e^{(a)}_{\ \alpha}(x) + e^\beta_{\ (a)}(x')\frac{\partial e^{(a)}_{\ \alpha}(x)}{\partial x^\gamma} \\
=& \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (b)}(x')e^{(b)}_{\ \gamma}(x)e^{(a)}_{\ \alpha}(x) + e^\beta_{\ (a)}(x')\frac{\partial e^{(a)}_{\ \alpha}(x)}{\partial x^\gamma} \\
\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} =& \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x^\alpha}e^{(a)}_{\ \gamma}(x) + e^\beta_{\ (a)}(x')\frac{\partial e^{(a)}_{\ \gamma}(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\alpha}e^{(a)}_{\ \gamma}(x) + e^\beta_{\ (a)}(x')\frac{\partial e^{(a)}_{\ \gamma}(x)}{\partial x^\alpha} \\
=& \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (b)}(x')e^{(b)}_{\ \alpha}(x)e^{(a)}_{\ \gamma}(x) + e^\beta_{\ (a)}(x')\frac{\partial e^{(a)}_{\ \gamma}(x)}{\partial x^\alpha}
\end{aligned}$$

Για να είναι ολοκληρώσιμο το σύστημα θα πρέπει να ισχύει η εξής συνθήκη ολοκληρωσιμότητας.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} =& \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \\
e^\beta_{\ (a)}(x')\Big(\frac{\partial e^{(a)}_{\ \gamma}(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial e^{(a)}_{\ \alpha}(x)}{\partial x^\gamma}\Big) =& \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (b)}(x')e^{(b)}_{\ \gamma}(x)e^{(a)}_{\ \alpha}(x) - \frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (b)}(x')e^{(b)}_{\ \alpha}(x)e^{(a)}_{\ \gamma}(x) \\
e^\beta_{\ (a)}(x')\Big(\frac{\partial e^{(a)}_{\ \gamma}(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial e^{(a)}_{\ \alpha}(x)}{\partial x^\gamma}\Big) =& \left(\frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (b)}(x') - \frac{\partial e^\beta_{\ (b)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (a)}(x')\right)e^{(b)}_{\ \gamma}(x)e^{(a)}_{\ \alpha}(x)
\end{aligned}$$

Για να μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα από το κριτήριο αυτό θα πρέπει οι εξισώσεις να μην έχουν πλεγμένες τις συντεταγμένες x, x' έτσι θα πολλαπλασιάσουμε το δεξί μέρος της εν λόγω εξίσωσης με τον αντίστροφο $e^{(b)}_{\ \beta}(x')$ καθώς και το αριστερό μέλος με το γινόμενο των αντίστροφων $e^\beta_{\ (b)}(x)e^\gamma_{\ (a)}(x)$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 3.36 θα τις αποσυζεύξουμε.

$$\begin{aligned}
e^{(b)}_{\ \gamma}(x)e^{(a)}_{\ \alpha}(x)e^\delta_{\ (b)}(x)e^\epsilon_{\ (a)}(x)e^{(f)}_{\ \beta}(x') =& \delta^\delta_{\ \gamma}\delta^\epsilon_{\ \alpha}e^{(f)}_{\ \beta}(x') \\
e^\delta_{\ (b)}(x)e^\epsilon_{\ (a)}(x)e^{(f)}_{\ \beta}(x')e^\beta_{\ (a)}(x') =& \delta^f_{\ a}e^\delta_{\ (b)}(x)e^\epsilon_{\ (a)}(x)
\end{aligned}$$

Όπου παραπάνω υπολογίσαμε το γινόμενο των αντίστροφων και καταλήξαμε στις δύο σχέσεις τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω και θα βρούμε τελικά ότι η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας καταλήγει στην παρακάτω σχέση.

$$e^\alpha_{\ (d)}(x)e^\gamma_{\ (c)}(x)\Big(\frac{\partial e^{(f)}_{\ \gamma}(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial e^{(f)}_{\ \alpha}(x)}{\partial x^\gamma}\Big) = \left(\frac{\partial e^\beta_{\ (a)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (c)}(x') - \frac{\partial e^\beta_{\ (c)}(x')}{\partial x'^\delta}e^\delta_{\ (b)}(x')\right)e^{(f)}_{\ \beta}(x)$$

Όμως η τελευταία εξίσωση πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα και για x αλλά και για x' άρα θα πρέπει και τα δύο μέλη να εξισώνονται με σταθερές συνεπώς έχουμε.

$$C^f{}_{dc} = e^\alpha{}_{(d)}(x) e^\gamma{}_{(c)}(x)\Big(\frac{\partial e^{(f)}_\gamma(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial e^{(f)}_\alpha(x)}{\partial x^\gamma}\Big) \tag{3.37}$$

$$-C^f{}_{cd} \equiv e^\gamma{}_{(d)}(x) e^\alpha{}_{(c)}(x)\Big(\frac{\partial e^{(f)}_\alpha(x)}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial e^{(f)}_\gamma(x)}{\partial x^\alpha}\Big) \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
e^\alpha{}_{(a)} e^{(a)}_\beta &= \delta^\alpha{}_\beta \Rightarrow \frac{\partial e^{(c)}_\alpha}{\partial x^\beta} = -e^{(c)}_\delta e^{(d)}_\alpha \frac{\partial e^\delta{}_{(d)}}{\partial x^\beta} \\
C^c{}_{ab} e^\gamma{}_{(c)} &= e^\gamma{}_{(c)} e^\alpha{}_{(a)} e^\beta{}_{(b)} \Big(- e^{(c)}_\delta e^{(d)}_\alpha \frac{\partial e^\delta{}_{(d)}}{\partial x^\beta} + e^{(d)}_\beta e^{(c)}_\delta \frac{\partial e^\delta{}_{(d)}}{\partial x^\alpha}\Big) \\
&= - \delta^\gamma{}_\delta \delta^d{}_a e^\beta{}_{(b)} \frac{\partial e^\delta{}_{(d)}}{\partial x^\beta} + \delta^\gamma{}_\delta \delta^d{}_b e^\alpha{}_{(a)} \frac{\partial e^\delta{}_{(d)}}{\partial x^\alpha} \\
C^c{}_{ab} e^\gamma{}_{(c)} &= - e^\beta{}_{(b)} \frac{\partial e^\gamma{}_{(a)}}{\partial x^\beta} + e^\alpha{}_{(a)} \frac{\partial e^\gamma{}_{(b)}}{\partial x^\alpha} \\
C^c{}_{ab} e^\gamma{}_{(c)} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} &= - e^\beta{}_{(b)} \frac{\partial e^\gamma{}_{(a)}}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} + e^\alpha{}_{(a)} \frac{\partial e^\gamma{}_{(b)}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma}
\end{aligned}$$

Τέλος θέτοντας $X_a \equiv e^\alpha{}_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ τους γεννήτορες της άλγεβρας των μετασχηματισμών προκύπτει η μεταθετική σχέση αυτών.

$$C^c{}_{ab} X_c = - e^\beta{}_{(b)} \frac{\partial X_a}{\partial x^\beta} + e^\beta{}_{(b)} e^\gamma{}_{(a)} \cancelto{\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}}{\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}} + e^\alpha{}_{(a)} \frac{\partial X_b}{\partial x^\alpha} - e^\alpha{}_{(a)} e^\gamma{}_{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}$$

$$C^c{}_{ab} X_c = - X_b X_a + X_a X_b \equiv [X_a, X_b] \tag{3.38}$$

Τέλος εφόσον έχουμε της σταθερές δομής της άλγεβρας $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ οι οποίες ικανοποιούν την ταυτότητα του *Jacobi* όπως φαίνεται και παρακάτω.

$$0 = [[X_a, X_b], X_c]] + [[X_c, X_a], X_b]] + [[X_b, X_c], X_a]] \tag{3.39}$$

Η οποία με χρήση των μεταθετικών σχέσεων 3.38 μπορεί να πάρει την εξής μορφή.

$$0 = C^e{}_{ab} C^d{}_{ec} + C^e{}_{bc} C^d{}_{ea} + C^e{}_{ca} C^d{}_{eb} \tag{3.39}$$

Χρησιμοποιώντας το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο των *Levi − Civita* θα επαναορίσουμε τις σταθερές δομής με την χρήση του συμβόλου και ποσοτήτων με δύο δείκτες μέσω ενός δυικού μετασχηματισμού όπως φαίνεται παρακάτω.

$$C^a{}_{bc} = \epsilon_{bcd} C^{dc}$$

Ύστερα από τον δυικό μετασχηματισμό έχουμε τις μεταθετικές σχέσεις των σταθερών ως εξής.

$$\begin{aligned}
\epsilon^{abc} X_b X_c &= \frac{1}{2}(\cancelto{0}{\epsilon^{abc}(X_b X_c + X_c X_b)} + \epsilon^{abc}(X_b X_c - X_c X_b)) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{abc}(X_b X_c - X_c X_b) = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}[X_b, X_c] = \frac{1}{2}\epsilon^{abc} C^d{}_{bc} X_d \\
\epsilon^{abc} X_b X_c &= \frac{1}{2}(\epsilon^{abc} C^d{}_{bc} - \epsilon^{abc} C^d{}_{cb}) X_d = \frac{1}{2}(\epsilon^{abc} C^d{}_{bc} + \epsilon^{abc} C^d{}_{bc}) X_d \\
\epsilon^{abc} X_b X_c &\equiv C^{ad} X_d
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Από την Ταυτότητα του *Jacobi* 3.39 πολλαπλασιασμένη με το σύμβολο *Levi – Civita* και τον δυικό μετασχηματισμό των σταθερών δομής έχουμε.

$$\begin{aligned}
0 =& \epsilon^{abc}([[X_a, X_b], X_c]] + [[X_c, X_a], X_b]] + [[X_b, X_c], X_a]]) \\
=& \epsilon^{abc}[[X_a, X_b], X_c]] + \epsilon^{abc}[[X_c, X_a], X_b]] + \epsilon^{abc}[[X_b, X_c], X_a]] \\
=& \epsilon^{abc}[[X_a, X_b], X_c]] + \epsilon^{cab}[[X_c, X_a], X_b]] + \epsilon^{bca}[[X_b, X_c], X_a]] \\
=& 3\epsilon^{abc}[[X_a, X_b], X_c]] = 3\epsilon^{abc}[C^d{}_{ab}X_d, X_c] = 3\epsilon^{abc}C^d{}_{ab}C^e{}_{dc}X_e \\
=& 3\epsilon^{abc}\epsilon_{abl}C^{ld}\epsilon_{dck}C^{ke}X_e = 18\delta^c{}_l\epsilon_{dck}C^{ld}C^{ke}X_e = 0 \\
\epsilon_{abc}C^{bc}C^{ad} =& 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Της σταθερές δομής C^{ab} μπορούμε να τις γράψουμε ως προς το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό τους μέρος οπότε έχουμε.

$$C^{ab} = S^{ab} + A^{ab}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι έναν δυικό μετασχηματισμό μπορούμε να γράψουμε το αντισυμμετρικό μέρος αυτού ως προς ένα δυικό διάνυσμα.

$$C^{ab} = S^{ab} + \epsilon^{abc}a_c \tag{3.42}$$

Από την σχέση που προέκυψε από την ταυτότητα του *Jacobi* έχουμε.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{abc}C^{bc}C^{ad} =& \epsilon_{abc}(S^{bc} + \epsilon^{bce}a_e)C^{ad} = (\cancelto{0}{\epsilon_{abc}S^{bc}} + \cancelto{6\delta^e_a}{\epsilon_{abc}\epsilon^{bce}}a_d)C^{ad} \\
=& 6a_aC^{ad} = 6a_a(S^{ad} + \epsilon^{ade}a_e) = 6a_aS^{ae} + 6\cancelto{0}{\epsilon^{ade}a_a a_e} = 0 \\
a_aS^{ad} =& 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

3.2 Ταξινόμηση διαφόρων τύπων για ομάδα G_3

Με τις γενικές παρατηρήσεις που έχουμε κάνει νωρίτερα μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι σε κάθε μεταβατική ομάδα G_3 με πάνω από 3 μεταβλητές αντιστοιχούν πάντα χώρους τριών διαστάσεων που γίνεται δεκτό ως ομάδα κινήσεων. Ωστόσο δεν είναι αληθές και σωστό σε όλες τις περιπτώσεις, ότι η πλήρης ομάδα των κινήσεων του χώρου που λαμβάνεται είναι όντως η δοσμένη G_3. Θα δούμε ότι μπορεί υπό ορισμένες συνθήκες της G_3 η οποία συνεπάγεται κατ 'ανάγκην την ύπαρξη μεγαλύτερης ομάδας κινήσεων. Επιπλέον, θέλουμε να δημιουργήσουμε για για κάθε πιθανό τύπο της G_3 μια αντίστοιχη κανονική μορφή για τη μετρική, εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση την οποία έχουμε δει σε προηγούμενη ανάλυση ως βάση των υπολογισμών μας, παίρνουμε την ταξινόμηση που δίνεται από των *Lie* των πιθανών συνθέσεων των ομάδων τριών παραμέτρων. Εδώ μία ουσιαστική προειδοποίηση είναι απαραίτητη για εμάς. Στην ταξινόμηση του *Lie* δεν υπάρχει κανένας τρόπος για να γίνει διάκριση μεταξύ πραγματικής και μιγαδικής ομάδας, ενώ στην παρούσα μελέτη θέλουμε να αναφερθούμε μόνο σε πραγματικές ομάδες και τις πραγματικές τους υποομάδες έτσι θα πρέπει, συνεπώς, να υποδιαιρέσουμε σε περισσότερους τύπους ορισμένα είδη τα οποία αποτελούν ένα ενιαίο τύπο από τη γενική άποψη της *Lie*. Υποθέτοντας τις ολοκληρώσιμες ομάδες από τους έξι τύπους που έχουν ταξινομηθεί από τον *Lie* που προκύπτουν από τις ακόλουθες σχέσεις.

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ 0 & i=2, j=3 \\ 0 & i=1, j=3 \end{cases} & \text{Type I} \\ \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ X_1 & i=2, j=3 \\ 0 & i=3, j=1 \end{cases} & \text{Type II} \\ \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ 0 & i=2, j=3 \\ X_1 & i=1, j=3 \end{cases} & \text{Type III} \\ \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ X_1+X_2 & i=2, j=3 \\ X_1 & i=1, j=3 \end{cases} & \text{Type IV} \\ \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ X_1+X_2 & i=2, j=3 \\ X_1 & i=1, j=3 \end{cases} & \text{Type V} \\ \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ hX_2, h \neq 0,1 & i=2, j=3 \\ X_1 & i=1, j=3 \end{cases} & \text{Type VI} \\ \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ -X_1+hX_2 0 \leq h \leq 2 & i=2, j=3 \\ X_2 & i=1, j=3 \end{cases} & \text{Type VII} \end{cases} \tag{3.44}$$

Ο VII τύπος είναι πραγματικός και προστέθηκε διότι δεν έχει καμία πραγματική υποομάδα, ενώ οι υπόλοιποι έξι τύποι έχουν τουλάχιστον μία πραγματική υποομάδα G_1. Επιπλέον πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στον τύπο VII η σταθερά h είναι ουσιώδους σημασίας διότι είναι αδύνατον να υπάρξει μία άλλη ομάδα με ίδιες αλγεβρικές σχέσεις η οποία να είναι ισομορφική με αυτήν και αυτό αποδεικνύεται παρακάτω. Έστω ότι υπάρχει μία τέτοια.

$$[Y_i, Y_j] = \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ -Y_1 + kY_3, 0 \leq k \leq 2 & i=2, j=3 \\ Y_2 & i=1, j=3 \end{cases} \tag{3.45}$$

Αν $k \neq h$ τότε οι δύο ομάδες δεν είναι δυνατόν να θεωρηθούν ότι έχουν ισομορφική ισοδυναμία. Πράγματι, αν αυτό συμβεί θα υποδείξουμε τα $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ τους πεπερασμένους μετασχηματισμούς της πρώτης ομάδας που αντιστοιχούν στα Y_1, Y_2, Y_3 στο δεύτερο, τότε τα $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ πρέπει να αποτελούνται μόνο από τα X_1, X_2 δεδομένου ότι και τα δύο ζεύγη των μετασχηματισμών ανήκουν στην ομάδα από την οποία προέρχονται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ισχύει.

$$
\begin{aligned}
\bar{X_1} =& \alpha X_1 + \beta X_2 \ \& \ \bar{X_2} = \gamma X_1 + \delta X_2 \ \& \ \bar{X_3} = a X_1 + b X_2 + c X_3 \\
[\bar{X}_i, \bar{X}_j] =& \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ \bar{X}_2 & i=1, j=3 \\ -\bar{X}_1 + k\bar{X}_2 & i=2, j=3 \end{cases} \\
[\bar{X}_1, \bar{X}_2] =& 0 \Rightarrow [\alpha X_1 + \beta X_2, \gamma X_1 + \delta X_2] = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\
[\bar{X}_1, \bar{X}_3] =& \bar{X}_2 \Rightarrow [\alpha X_1 + \beta X_2, a X_1 + b X_2 + c X_3] = \gamma X_1 + \delta X_2 \Rightarrow \\
\alpha c X_2 - \beta c (X_1 - h X_2) =& \gamma X_1 + \delta X_2 \Rightarrow \alpha c + h\beta c - \gamma \ \& \ -\beta c - \gamma = 0 \\
[\bar{X}_2, \bar{X}_3] =& -\bar{X}_1 + k\bar{X}_2 \Rightarrow [\gamma X_1 + \delta X_2, a X_1 + b X_2 + c X_3] = -(\alpha X_1 + \beta X_2) + k(\gamma X_1 + \delta X_2) \\
\gamma c X_2 - \delta c (X_1 - h X_2) =& -(\alpha - k\gamma) X_1 - (\beta - \delta k) X_2 \Rightarrow \gamma c + hc = -(\beta - \delta k) \ \& \ -\delta c = -(\alpha - k\gamma) \\
\alpha =& c(\delta - k\beta) \ \& \ \gamma = -\beta c, \begin{cases} \beta(1 - c^2) + (hc - k)\delta = 0 \\ \beta c (h - kc) + (c^2 - 1)\delta = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι για να λύνεται το σύστημα και να μην είναι τετριμένο ότι η ορίζουσα των β, δ να είναι διάφορη του μηδενός συνεπώς έχουμε.

$$
0 = c^4 - hkc^3 + (h^2 + k^2 - 2)c^2 - hkc + 1 \tag{3.46}
$$

Αλλά η ορίζουσα $\alpha\delta - \beta\gamma$ πρέπει να είναι μηδέν εφόσον ισχύουν $c^1 \neq 1$ & $k \neq \pm h$ αλλά αυτό καταλήγει σε άτοπο οπότε αποδείχθηκε ότι δεν είναι ισομορφικές οι δύο ομάδες.

Τέλος το αφού έχουμε αναλύσει τα ολοκληρώσιμα συστήματα, για την G_3, το μόνο που μένει είναι να δούμε αυτά που δεν επιδέχονται ολοκλήρωση. Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω δύο τύποι.

$$
[X_i, X_j] = \begin{cases} \begin{cases} X_1 & i=1, j=2 \\ 2X_2 & i=2, j=3 \\ X_3 & i=1, j=3 \end{cases} & \text{Type VIII} \\ \begin{cases} X_3 & i=1, j=2 \\ X_1 & i=2, j=3 \\ X_2 & i=3, j=1 \end{cases} & \text{Type IX} \end{cases} \tag{3.47}
$$

Στην όλη ανάλυση δεν έγινε καμία αναφορά στην ομάδα G_5 ο λόγος είναι ότι δεν υπάρχει αυτή η ομάδα μετασχηματισμών. Από αυτό συνεπάγεται αν ένας χώρος είχε μία υποομάδα G_5, θα είχε επίσης και G_6, η οποία θα ήταν σταθερής καμπυλότητας. Αλλά μπορούμε να πάμε παραπέρα και να δείξουμε ότι η ομάδα G_6 των κινήσεων του χώρου με σταθερή καμπυλότητα δεν έχει πραγματικές υποομάδες πέντε παραμέτρων, Ονομαστικά δεν υπάρχουν τρισδιάστατοι χώροι των οποίων οι ομάδα μετασχηματισμού να περιέχει υποομάδα πέντε παραμέτρων. Υποθέτοντας την ύπαρξη μίας τέτοιας ομάδας κινήσεων, G_5, κάθε υποομάδα, G_2, που αφήνει οποιοδήποτε σημείο του χώρου σταθερό περιέχεται σε αυτήν σε μία πραγματική ομάδα G_3. Αυτή η ομάδα G_3 πρέπει απαραίτητα να είναι μεταβατική διότι διαφορετικά με τις κινήσεις της G_3 θα μπορούσαμε να μετακινήσουμε ένα σημείο οπουδήποτε αλλά κάθε σημείο πρέπει να μένει σταθερό κάτω από διπλή πεπερασμένη κίνηση της ομάδας G_3 το οποίο συνεπάγεται σε άτοπο. Η ομάδα G_3 είναι αμετάβατη, όπου μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις των μετρικών για την εν λόγω ομάδα για τις οποίες ισχύει ότι έχουν σταθερή καμπυλότητα.

$$ds^2 = \begin{cases} dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 & K = 0 \\ dx_1^2 + e^{2x_1}(dx_2^2 + dx_3^2) & K = -1 \\ dx_1^2 + x_1^2(dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) & K = 1 \\ dx_1^2 + \sin^2 x_1(dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) & K = 0 \\ dx_1^2 + \sinh^2 x_1(dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) & K = -1 \\ dx_1^2 + \cosh^2 x_1(dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) & K = -1 \end{cases}$$

Τα οποία είναι προσαρμοσμένα στην υποομάδα της G_3 των περιστροφών γύρω από ένα σημείο [1]. Για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να προσδιορίσουμε, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις *Killing*, 3.2, η μορφή της πλήρους ομάδας G_6 των κινήσεων και θα δούμε αν υπάρχει υποομάδα G_5 της G_6 που να περιέχει την G_3. Η απάντηση παραμένει αρνητική, η δηλωθείσα ιδιότητα θα επαληθευτεί Θα επιβεβαιώσουμε για μία τυχαία μετρική, από τις έξι,(η οποία περιγράφει παραβολοειδές) και θα δεχτούμε ότι ισχύει και για τις άλλες.

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1}(dx_2^2 + dx_2^2)$$

Οπότε ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις *Killing*, 3.2, βρίσκουμε ότι έχει πλήρη ομάδα κινήσεων G_6 η οποία γεννάται από τους έξι πεπερασμένους μετασχηματισμούς.

$$X_i = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_2} & i = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & i = 2 \\ x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} & i = 3 \\ x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(e^{-2x_1} + x_3^2 - x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_3} & i = 4 \\ x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(e^{-2x_1} + x_3^2 - x_2^2\right)\frac{\partial}{\partial x_3} & i = 5 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} & i = 6 \end{cases}$$

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i = 1, j = 2 \\ -X_2 & i = 1, j = 3 \\ X_6 & i = 1, j = 4 \\ -X_3 & i = 1, j = 5 \\ -X_1 & i = 1, j = 6 \\ X_1 & i = 2, j = 3 \\ X_3 & i = 2, j = 4 \\ X_6 & i = 2, j = 5 \\ -X_2 & i = 2, j = 6 \\ X_5 & i = 3, j = 4 \\ -X_4 & i = 3, j = 5 \\ 0 & i = 3, j = 6 \\ & i = 4, j = 5 \\ X_4 & i = 4, j = 6 \\ X_5 & i = 5, j = 6 \end{cases}$$

[1] όπως έχουμε δει, χώροι με σταθερή καμπυλότητα (Ευκλείδειες), έχουμε δύο διαφορετικές μορφές της μετρικής, η πρώτη αντιστοιχεί στο κέντρο περιστροφής στο άπειρο και η δεύτερη με κέντρο περιστροφής σε μία πεπερασμένη απόσταση. Για την περίπτωση των ψευδοσπερικών χώρων ($K = -1$) έχουμε τρεις διακριτές μορφές, σύμφωνα με το που είναι το κέντρο περιστροφής στο άπειρο ή σε πεπερασμένη απόσταση, ή ιδανικά, και τελικά για χώρους *Riemann* ($K = 1$) μόνο μία μορφή. Οι γεωμετρικές περιπτώσεις είναι γνωστές από την θεωρία για χώρους με σταθερή καμπυλότητα.

θα μας δείξει ότι δεν υπάρχει στην G_6 καμία πραγματική υποομάδα της G_5 η οποία να περιέχει την $G_3 = \{X_1, X_2, X_3\}$. Στην πραγματικότητα ας πάρουμε Y να είναι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί της G_5 η οποία δεν ανήκει στην G_3 μπορούμε να θέσουμε $Y = aX_4 + bX_5 + cX_6,\ a, b, c \in \mathbb{R}$. Στην G_5 θα υπάρχουν οι τρεις πεπερασμένοι μετασχηματισμοί

$$[X_i, Y] = \begin{cases} aX_6 - bX_3 - cX_1 & i = 1 \\ aX_3 + bX_6 + cX_2 & i = 2 \\ aX_5 - cX_4 & i = 1 \end{cases} \tag{3.48}$$

Και επίσης aX_6, bX_6 και λοιπόν και κάθε περίπτωση αφού αν $a = b = 0$ Y καταλήγει στην X_6. Τώρα οι τέσσερις μετασχηματισμοί X_1, X_2, X_3, X_6 της G_5 στην πραγματικότητα γενούν την G_4 αν με την $Z = aX_4 + bX_5$ αν υποδείξουμε τον τελευταίο πεπερασμένο μετασχηματισμό, τότε $[X_3, Z] = aX_5 - bX_4$ θα πρέπει να είναι ένας συνδυασμός των X_1, X_2, X_3, X_6, Z άρα θα διαφέρει από τον Z κατά έναν σταθερό παράγοντα ρ.΄Ετσι μπορούμε να έχουμε $a = \rho b$ και $b = -\rho a$ από όπου προκύπτει $\rho^2 + 1 = 0$ άρα λοιπόν $Z = X_4 + iX_5$, το οποίο δίνει μία μιγαδική ομάδα G_5. Μπορεί να επιβεβαιωθεί και για τις υπόλοιπες μετρικές με ανάλογο τρόπο.

3.2.1 Συγκεντρωτικός πίνακας μετρικών με πλήρεις ομάδες μετασχηματισμών

Είναι χρήσιμο να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα συγκεντρώνοντας όλους τους τύπους των που προέκυψαν για όλους τους χώρους που επιδέχονται συνεχείς ομάδες κινήσεων. Θα χωρίσουμε τους χώρους σε έξι κατηγορίες ανάλογα με τους τύπους των πλήρων ομάδων των κινήσεων. θα ορίσουμε ως χώρο τύπου A αν η ομάδα μετασχηματισμού που επιδέχεται είναι τύπου G_1, B αν η ομάδα είναι G_2, C αν η ομάδα είναι αμετάβατη G_3. Οι άλλες δύο οι D,E περιέχει τους χώρους που η ομάδα είναι μεταβατική, D για την G_3 και E για την G_4. Τέλος ως F ορίζονται οι χώροι με σταθερή καμπυλότητα και ομάδα μετασχηματισμού G_6.

- Κατηγορία A

  Ομάδα G_1 με συντελεστές g_{ij} ανεξάρτητες από την συντεταγμένη x_1 και πεπερασμένο μετασχηματισμό $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$

- Κατηγορία B

  Ομάδα G_2

  $ds^2 = dx_1^2 + \alpha(x_1)dx_2^2 + \beta(x_1)dx_2dx_3 + \gamma(x_1)dx_3^2$

  και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}$

  Με άλγεβρα

  $[X_1, X_2] = 0$

  $ds^2 = dx_1^2 + \alpha(x_1)dx_2^2 + \beta(x_1)dx_2dx_3 + (\alpha(x_1)x_2^2 - 2\beta(x_1)x_2 + \gamma(x_1))dx_3^2$

  και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}$

  Με άλγεβρα

  $[X_1, X_2] = X_2$

- Κατηγορία C

  $ds^2 = dx_1^2 + \phi(x_1)(dx_2^2 + dx_3^2)$

  και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_2 = x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}$

  Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i = 1, j = 2 \\ X_1 & i = 2, j = 3 \\ X_2 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

$ds^2 = dx_1^2 + \phi(x_1)(dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2)$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_2 = \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cot x_2 \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - \cot x_2 \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} X_3 & i = 1, j = 2 \\ X_1 & i = 2, j = 3 \\ X_2 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

$ds^2 = dx_1^2 + \phi(x_1)(dx_2^2 + e^{2x_2} dx_3^2)$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, X_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(e^{-2x_2} - x_3^2\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} -X_1 & i = 1, j = 2 \\ -X_3 & i = 2, j = 3 \\ -X_2 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

- Κατηγορία D

Type IV

$ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1}(dx_2^2 + 2x_1 dx_2 dx_3 + (x_1^2 + R^2)dx_3^2)$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = 2\frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_3 = -2\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 + 2x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i = 1, j = 2 \\ X_1 + X_2 & i = 2, j = 3 \\ -X_1 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

Type VI

$ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2 + 2he^{(h+1)x_1} dx_2 dx_3 + e^{2hx_1} dx_3^2$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = 2\frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + hx_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i = 1, j = 2 \\ hX_2 & i = 2, j = 3 \\ -X_1 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

Type VII

$ds^2 = dx_1^2 + e^{hx_1}\Big((n + \cos ux_1)dx_2^2 + (h \cos ux_1 + u \sin ux_1 + hn)dx_2 dx_3 + \Big(\frac{2-u^2}{2} \cos ux_1 + \frac{hu}{2} + n\Big) dx_3^2$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = 2\frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 + hx_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i = 1, j = 2 \\ -X_1 + hX_2 & i = 2, j = 3 \\ -X_2 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

Type VIII

$ds^2 = \frac{Q^{(4)}(x_1)}{4!}dx_1^2 + Q(x_1)dx_2^2 + \Big(Q(x_1)x_2^2 - \frac{Q'(x_1)}{2}x_2 + \frac{Q''(x_1)}{2} - \frac{h}{2}\Big)dx_3^2 2\Big(\frac{Q''(x_1)}{12} + h\Big)dx_1dx_2 + 2\Big\{\frac{Q'''(x_1)}{24} - \Big(\frac{Q''(x_1)}{12} + h\Big)x_2\Big\}dx_2dx_3 + 2\Big(\frac{Q'(x_1)}{4} - Q(x_1)x_2\Big)dx_1dx_3$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_2e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} X_1 & i = 1, j = 2 \\ X_3 + hX_2 & i = 2, j = 3 \\ -2X_2 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

Type IX

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 2e\cos(2x_3) + 2f\sin(2x_3) + \frac{a^2+d}{2} & \mu = \nu = 1 \\ \cos x_1(b\cos x_3 + c\sin x_3) + 2\sin x_1(e\sin(2x_3) - f\cos(2x_3)) & \mu = 1, \nu = 2 \\ b\cos x_3 + c\sin x_3 & \mu = 1, \nu = 3 \\ \sin(2x_1)(b\sin x_3 - c\cos x_3) - g_{11}\sin^2 x_1 + a^2 + d\sin^2 x_1 & \mu = \nu = 2 \\ a^2\cos x_1 + \sin x_1(b\sin x_3 - c\cos x_3) & \mu = 2, \nu = 3 \\ a^2 & \mu = \nu = 3 \end{cases}$$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \cos x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - \cot x_1 \sin x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\sin x_2}{\sin x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}$

$X_3 = -\sin x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - \cot x_1\cos x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\cos x_2}{\sin x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} X_3 & i = 1, j = 2 \\ X_1 & i = 2, j = 3 \\ X_2 & i = 3, j = 1 \end{cases}$$

- Κατηγορία Ε

Type II

$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2x_1dx_2dx_3 + (x_1^2 + 1)dx_3^2$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2}, X_4 = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i = 1, j = 2 \\ X_1 & i = 2, j = 3 \\ 0 & i = 3, j = 1 \\ 0 & i = 1, j = 4 \\ -X_3 & i = 2, j = 4 \\ X_2 & i = 3, j = 4 \end{cases}$$

Types [III,VIII]

$ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1}dx_2^2 + 2ne^{2x_1}dx_2dx_3 + dx_3^2$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, X_4 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-2x_1}}{1-n^2} - x_2^2\Big)\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{e^{-2x_1}}{1-n^2}\frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & i=1, j=2 \\ 0 & i=2, j=3 \\ {}_1 & i=3, j=1 \\ {}_3 & i=1, j=4 \\ 0 & i=2, j=4 \\ -X_4 & i=3, j=4 \end{cases}$$

Types IX

$ds^2 = dx_1^2 + (\sin^2 x_1 + n^2 \cos^2 x_1)dx_2^2 + 2n \cos x_1 dx_2 dx_3 + dx_3^2$

και πεπερασμένους μετασχηματισμούς

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cot x_1 \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n \sin x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}$

$X_3 = \sin x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cot x_1 \cos x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n \cos x_2}{\sin x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}, X_4 = \frac{\partial}{\partial x_3}$

Με άλγεβρα

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} X_3 & i=1, j=2 \\ X_1 & i=2, j=3 \\ {}_2 & i=3, j=1 \\ 0 & i=1, j=4 \\ 0 & i=2, j=4 \\ 0 & i=3, j=4 \end{cases}$$

- Κατηγορία E

  Όλοι οι χώροι με σταθερή καμπυλότητα.

Έχοντας ταξινομίσει όλους τους πιθανούς χώρους που επιδέχονται συνεχείς ομάδες κινήσεων, απομένει μόνο να λέμε πως, δίνοντας μας την μετρική εξίσωση του χώρου μπορεί κανείς να διαπιστώσει κατά πόσον η ίδια παραδέχεται ένα χώρο με συνεχείς ομάδες κινήσεων, και αν ναι, πώς μπορούν να βρεθούν οι εξισώσεις που οδηγούν την μετρική εξίσωση να έχει μία από τις μορφές που έχουμε ταξινομίσει στον παραπάνω πίνακα. Για αυτόν τον σκοπό είναι αρκετό να ανακαλέσουμε τις εξισώσεις *Killing*, 3.2, ως "εξισώσεις ορισμού" της ομάδας. Με μόνο αλγεβρικές πράξεις και διαφορήσεις μπορεί κανείς να αξιολογήσει τον αριθμό των παραμέτρων της ομάδας και να αποφασίσει για την μεταβατικότητα ή μη αυτής, ούτως ώστε να βλέπει κανείς άμεσα σε ποια από τις δοσμένες κατηγορίες ανήκει ο χώρος. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων 3.2 τότε μας δίνει την ακριβή μορφή των πεπερασμένων μετασχηματισμών της ομάδας και αυτό κάνει εμφανή την άλγεβρα σε εμάς, αφού κανείς αποφασίσει άμεσα σε ποιόν τύπο στην κατηγορία που ο χώρος ανήκει δεδομένου μπορεί εύκολα να βρει στον πίνακα μία και μόνο μία ομάδα η οποία προσφέρει την ίδια ή ισοδύναμη άλγεβρα. Τότε κανείς προσπαθεί να ταυτοποιήσει τις δύο ομάδες δηλαδή να εκχωρήσει τις τιμές των σταθερών οι οποίες εισέρχονται στην ομάδα της κανονικής μορφής και να υπολογίσει τις εξισώσεις των μετασχηματισμών. Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η τύπου IX μετρική υπακούσει σε άλγεβρα $SO(3)$ η οποία είναι χρήσιμη στην φυσική. Λόγω αυτής της ιδιότητας η εν λόγω μετρική παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον και θα γίνει ανάπτυξη αυτής σε ADM φορμαλισμό και όπως θα γίνει παρακάτω γνωστό διάφορα ενδιαφέροντα φαινόμενα λαμβάνουν χώρα για αυτή.

3.2.2 9^η Κοσμολογία του *Bianchi*

Η 9^η Κοσμολογία του *Bianchi* προκύπτει από την παρακάτω μετρική η οποία είναι γραμμένη σε όρους πρώτων μορφών, σε σφαιρικές συντεταγμένες, και έχει διανύσματα *Killing* που προκύπτουν από τις παρακάτω σχέσεις.

$$g_{\mu\nu} =\delta_{\mu\nu}\sigma^{\mu}\sigma^{\nu} \text{ Με } \sigma^{\mu} = \begin{cases} -\sin\psi d\theta + \sin\theta\cos\psi d\phi \\ +\cos\psi d\theta + \sin\theta\sin\psi d\phi \\ +\cos\theta d\phi + d\psi \end{cases} \tag{3.49}$$

$$ds^2 = -dt^2 + d\theta^2 + d\phi^2 + d\psi^2 + 2\cos\theta d\phi d\psi \tag{3.50}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} =\frac{1}{2}g^{\rho\tau}(\partial_\mu g_{\nu\tau} + \partial_\nu g_{\tau\mu} - \partial_\tau g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\rho\tau}(\partial_\mu h_{\nu\tau} + \partial_\nu h_{\tau\mu} - \partial_\tau h_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \rho = t, \forall\mu,\nu, \rho=\theta, \mu,\nu \neq \phi,\psi, \rho\phi, \mu,\nu \neq \theta,\phi;\theta,\psi, \rho=\psi,\mu,\nu\neq\theta,\phi;\theta,\psi \\ +\frac{1}{2}\sin\theta & \rho=\theta,\mu,\nu=\theta,\psi, \rho=\phi,\mu,\nu=\theta,\psi,\rho=\psi,\mu,\nu=\theta,\psi \\ -\frac{1}{2}\sin\theta & \rho=\psi,\mu,\nu=\theta,\phi \\ +\frac{1}{2}\cot\theta & \rho=\phi,\mu,\nu=\theta,\phi \end{cases}$$

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} =\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - 2\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}\xi_\tau = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_i\xi_i = 0 & i=\theta,\phi,\psi \\ \partial_\theta\xi_\phi + \partial_\phi\xi_\theta - \cot\theta\xi_\phi + \sin\theta\xi_\psi = 0 & \mu=\theta,\nu=\phi \\ \partial_\theta\xi_\psi + \partial_\psi\xi_\theta - \sin\theta\xi_\phi - \sin\theta\xi_\psi = 0 & \mu=\theta,\nu=\psi \\ \partial_\phi\xi_\psi + \partial_\psi\xi_\phi - \sin\theta\xi_\theta = 0 & \mu=\phi,\nu=\psi \end{cases}$$

$$\xi_\theta =\partial_\phi \;\&\; \xi_\phi = \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi \;\&\; \xi_\psi = -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi$$

Αφού βρήκαμε τα διανύσμτα *Killing* θα εξαγάγουμε την άλγεβρα που ικανοποιούν μέσω τον μεταθετικών σχέσεων που δίνονται παρακάτω.

$$\begin{aligned} [\xi_\theta,\xi_\phi] &= \left[\partial_\phi, \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right] \\ &=[\partial_\phi,\cos\phi\partial_\theta] - [\partial_\phi,\cot\theta\sin\phi\partial_\phi] + \left[\partial_\phi, \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right] \\ &=\partial_\phi(\cos\phi\partial_\theta) - \cos\phi\partial_\theta\partial_\phi - \partial_\phi(\cot\theta\sin\phi\partial_\phi) + \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\partial_\phi + \partial_\phi\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\partial_\phi \\ &= -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi = \xi_\psi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\xi_\phi, \xi_\psi] =& \left[\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right] \\
=& -[\cos\phi\partial_\theta, \sin\phi\partial_\theta] - [\cos\phi\partial_\theta, \cot\theta\cos\phi\partial_\phi] + \left[\cos\phi\partial_\theta, \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right] \\
&+ [\cot\theta\sin\phi\partial_\phi, \sin\phi\partial_\theta] + [\cot\theta\sin\phi\partial_\phi, \cot\theta\cos\phi\partial_\phi] - \left[\cot\theta\sin\phi\partial_\phi, \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right] \\
&- \left[\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, \sin\phi\partial_\theta\right] - \left[\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right] + \left[\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right] \\
=& -\cos\phi\partial_\theta(\cot\theta\cos\phi\partial_\phi) + \cot\theta\cos\phi\partial_\phi(\cos\phi\partial_\theta) + \cos\phi\partial_\theta\left(\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(\cos\phi\partial_\theta) \\
&+ \cot\theta\sin\phi\partial_\phi(\sin\phi\partial_\theta) - \sin\phi\partial_\theta(\cot\theta\sin\phi\partial_\phi) + \cot\theta\sin\phi\partial_\phi(\cot\theta\cos\phi\partial_\phi) \\
&- \cot\theta\cos\phi\partial_\phi(\cot\theta\sin\phi\partial_\phi) - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\left(\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\left(\cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right) \\
&- \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\left(\sin\phi\partial_\theta\right) + \sin\phi\partial_\theta\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) - \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(\cot\theta\cos\phi\partial_\phi) + \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) \\
=& \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\theta}\partial_\phi - \cot\theta\cos\phi\sin\phi\partial_\theta + \cot\theta\frac{\sin^2\phi}{\sin\theta}\partial_\psi - \cos^2\phi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\psi + \cot\theta\sin\phi\cos\phi\partial_\theta \\
&+ \frac{\sin^2\phi}{\sin^\phi\theta}\partial_\phi - \cot^2\theta\sin^2\phi\partial_\phi - \cot^2\theta\cos^2\phi\partial_\phi - \sin^2\phi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\psi + \cot\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\theta}\partial_\psi \\
=& \left(\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\phi}{\sin^2\theta} - \cot^2\theta\sin^2\phi - \cot^2\theta\cos^2\phi\right)\partial_\phi \\
&+ \left(-\cos^2\phi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \sin^2\phi\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \cot\theta\frac{\sin^2\phi}{\sin\theta} + \cot\theta\frac{\cos^2\phi}{\sin\theta}\right)\partial_\psi = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\partial_\phi = \partial_\phi = \xi_\theta \\
[\xi_\psi, \xi_\theta] =& \left[-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, \partial_\phi\right] = -[\sin\phi\partial_\theta, \partial_\phi] - [\cot\theta\cos\phi\partial_\phi, \partial_\phi] + \left[\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, \partial_\phi\right] \\
=& -\sin\phi\partial_\theta\partial_\phi + \partial_\phi(\sin\phi\partial_\theta) - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\partial_\phi + \partial_\phi(\cot\theta\cos\phi\partial_\phi) + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\partial_\phi - \partial_\phi\left(\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) \\
=& \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi = \xi_\phi \\
[\xi_i, \xi_j] =& \epsilon_{ijk}\xi_k, \xi \in SO(3)
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

Τα διανύσματα *Killing* ικανοποιούν την άλγεβρα των στροφών στον τρισδιάστατο χώρο, αυτός ήταν και ο λόγος επιλογής αυτής της γεωμετρίας. Η περιγραφή μίας πολλαπλότητας M με ομάδα συμμετρίας G γίνεται απλούστερη όταν χρησιμοποιήσουμε μία αναλλοίωτη βάση. Τα στοιχεία αυτής της βάσης είναι διανυσματικά πεδία X_μ, το καθένα είναι αναλλοίωτο κάτω από την δράση της G. Οπότε αυτά τα διανυσματικά πεδία ικανοποιούν την εξίσωση *Killing* για κάθε ένα από τα διανύσματα *Killing* έτσι έχουμε.

$$[\xi_i, X_\mu] = 0$$

Η αναλλοίωτη βάση είναι χρήσιμη διότι έχει πολλά πλεονεκτήματα τα οποία παραθέτω παρακάτω. Η μετρική ορίζεται μέσω των διανυσμάτων βάσης οπότε συνολικά η μετρική μένει αναλλοίωτη κάτω από την δράση της ομάδας G, αφού κάθε ένα από αυτά παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι λοιπόν η μετρική είναι σταθερή σε κάθε ομοιογενή υπόχωρο ο οποίος παράγεται από την συγκεκριμένη ομάδα. Οι συντελεστές δομής είναι σταθερές για κάθε ομοιογενή υπερεπιφάνεια και ορίζονται από τις σχέσεις $[X_\mu, X_\nu] = D^\rho{}_{\mu\nu}X_\rho$.

Δεν μπορεί κάθε αυθαίρετη ομάδα να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει κάθε $n-$διάστατη πολλαπλότητα. Ωστόσο αν G είναι μία ομάδα συμμετρίας για την πολλαπλότητα M μπορούμε να πούμε ότι μία αναλλοίωτη βάση μπορεί να βρεθεί

Τώρα από τις σχέσεις μετάθεσης θα προσδιορίσουμε τα διανύσματα της αναλλοίωτης βάσης.

$$
\begin{aligned}
[\xi_1, X_1] =& [\partial_\phi, a^1\partial_\theta + b^1\partial_\phi + c^1\partial_\psi] = 0 \Rightarrow \\
=& \partial_\phi(a^1\partial_\theta) + \partial_\phi(b^1\partial_\phi) + \partial_\phi(c^1\partial_\psi) - a^1\partial_\theta\partial_\phi - b^1\partial_\phi\partial_\phi - c^1\partial_\psi\partial_\phi \\
=& (\partial_\phi a^1)\partial_\theta + (\partial_\phi b^1)\partial_\phi + (\partial_\phi c^1)\partial_\psi \\
[\xi_1, X_2] =& [\partial_\phi, a^2\partial_\theta + b^2\partial_\phi + c^2\partial_\psi] = 0 \Rightarrow \\
=& \partial_\phi(a^2\partial_\theta) + \partial_\phi(b^2\partial_\phi) + \partial_\phi(c^2\partial_\psi) - a^2\partial_\theta\partial_\phi - b^2\partial_\phi\partial_\phi - c^2\partial_\psi\partial_\phi \\
=& (\partial_\phi a^2)\partial_\theta + (\partial_\phi b^2)\partial_\phi + (\partial_\phi c^2)\partial_\psi \\
[\xi_1, X_3] =& [\partial_\phi, a^3\partial_\theta + b^3\partial_\phi + c^3\partial_\psi] = 0 \Rightarrow \\
=& \partial_\phi(a^3\partial_\theta) + \partial_\phi(b^3\partial_\phi) + \partial_\phi(c^3\partial_\psi) - a^3\partial_\theta\partial_\phi - b^3\partial_\phi\partial_\phi - c^3\partial_\psi\partial_\phi \\
=& (\partial_\phi a^3)\partial_\theta + (\partial_\phi b^3)\partial_\phi + (\partial_\phi c^3)\partial_\psi \\
a^i =& f_i(\theta,\psi), b^i = g_i(\theta,\psi), c^i = h_i(\theta,\psi) \\
[\xi_2, X_i] =& [\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, a^i\partial_\theta + b^i\partial_\phi + c^i\partial_\psi] = 0 \Rightarrow \\
=& \cos\phi\partial_\theta(a^i\partial_\theta) + \cos\phi\partial_\theta(b^i\partial_\phi) + \cos\phi\partial_\theta(b^i\partial_\phi) - \cot\theta\sin\phi a^i\partial_\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi b^i\partial_\phi\partial_\phi \\
& - \cot\theta\sin\phi c^i\partial_\phi\partial_\psi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(a^i\partial_\theta) + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(b^i\partial_\phi) + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(c^i\partial_\psi) \\
& - a^i\cos\phi\partial_\theta\partial_\theta + \sin\phi a^i\partial_\theta(\cot\theta\partial_\phi) - a^i\partial_\theta\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) - b^i\partial_\phi(\cos\phi\partial_\theta) + b^i\cot\theta\partial_\phi(\sin\phi\partial_\phi) \\
& + b^i\partial_\phi\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) - \cos\phi\partial_\psi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\psi\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\partial_\psi \\
=& \cos\phi(\partial_\theta a^i)\partial_\theta + \cos\phi(\partial_\theta b^i)\partial_\phi + \cos\phi(\partial_\theta c^i)\partial_\psi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi a^i)\partial_\theta + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi b^i)\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi c^i)\partial_\psi \\
& - a^i\frac{\sin\phi}{\sin^i x}\partial_\phi - b^i\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi + b^i\sin\phi\partial_\theta + b^i\cot\theta\cos\phi\partial_\phi + b^i\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi = 0 \\
[\xi_3, X_i] =& [-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, a^i\partial_\theta + b^i\partial_\phi + c^i\partial_\psi] = 0 \Rightarrow \\
=& -\sin\phi\partial_\theta(a^i\partial_\theta) - \sin\phi\partial_\theta(b^i\partial_\phi) - \sin\phi\partial_\theta(b^i\partial_\phi) - \cot\theta\cos\phi a^i\partial_\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi b^i\partial_\phi\partial_\phi \\
& - \cot\theta\cos\phi c^i\partial_\phi\partial_\psi + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(a^i\partial_\theta) + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(b^i\partial_\phi) + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi(c^i\partial_\psi) \\
& - a^i\cos\phi\partial_\theta\partial_\theta + \sin\phi a^i\partial_\theta(\cot\theta\partial_\phi) - a^i\partial_\theta\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) - b^i\partial_\phi(\cos\phi\partial_\theta) + b^i\cot\theta\partial_\phi(\sin\phi\partial_\phi) \\
& + b^i\partial_\phi\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\right) - \cos\phi\partial_\psi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\psi\partial_\phi + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi\partial_\psi \\
=& -\sin\phi(\partial_\theta a^i)\partial_\theta - \sin\phi(\partial_\theta b^i)\partial_\phi - \sin\phi(\partial_\theta c^i)\partial_\psi - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi a^i)\partial_\theta - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi b^i)\partial_\phi - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi c^i)\partial_\psi \\
& - a^i\frac{\cos\phi}{\sin^i x}\partial_\phi - b^i\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi + b^i\sin\phi\partial_\theta + b^i\cot\theta\cos\phi\partial_\phi + b^i\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi = 0 \\
=& \begin{cases} \cos\phi(\partial_\theta a^i) + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi a^i) + b^i\sin\phi = 0 \\ \cos\phi(\partial_\theta b^i) + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi b^i) - a^i\frac{\sin\phi}{\sin\theta} + b^i\frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta} = 0 \\ \cos\phi(\partial_\theta c^i) + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}(\partial_\psi c^i) - a^i\frac{\cos\phi}{\sin\theta} + b^i\frac{\cos\phi}{\sin\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
=& \begin{cases} a^1 = -\sin\psi & a^2 = \cos\psi & a^3 = 0 \\ b^1 = \frac{\cos\psi}{\sin\theta} & b^2 = \frac{\sin\psi}{\sin\theta} & b^3 = 0 \\ c^1 = -\cot\theta\cos\psi & c^2 = -\cot\theta\sin\psi & c^3 = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
X_\mu = \begin{cases} -\sin\psi\partial_\theta + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\partial_\phi - \cot\theta\cos\psi\partial_\psi & \mu = 1 \\ -\cos\psi\partial_\theta + \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\partial_\phi - \cot\theta\sin\psi\partial_\psi & \mu = 2 \\ \partial_\psi & \mu = 3 \end{cases} \tag{3.52}
$$

3.3 *Hamiltonian* Φορμαλισμός ομογενών κοσμολογιών

Η δράση που έχουμε για τον προσδιορισμό των εξισώσεων κίνησης είναι, 3.53. Στην δράση αυτή αναπαραμετρικοποιούμε τον χρόνο με τον όγκο του συστήματος ο οποίος θεωρούμε ότι μεταβάλλεται με τον χρόνο συνεχώς. Η επιλογή μας αυτή για τον όγκο, $\Omega(t)$, είναι λογική εκ' υποθέσεως ότι το σύμπαν διαστέλλεται συνεχώς [4, 14, 17]. Συνεπώς για να προσδιορίσουμε τις εξισώσεις πρέπει να κάνουμε την διαφόριση της δράσης όπου θα προκύψουν οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} =& \frac{1}{16\pi}\int p^{mn}\dot{h}_{mn}d^4x \qquad (3.53)\\
\sigma^0 =& dt \;\&\; \sigma^i = b_{ij}\omega^j \Rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu = -(\sigma^0)^2+(\sigma^1)^2+(\sigma^2)^2+(\sigma^3)^2 \Rightarrow h_{ij} = b_{ik}b_{kj} = \mathbb{B}\mathbb{B}^T\\
\Omega =& -\frac{1}{6}\ln\det h_{ij} = -\frac{1}{6}\ln\det\left(b_{ik}b_{kj}\right) = -\frac{1}{6}\ln\left(\det b_{kj}\right)^2 = -\frac{1}{3}\ln\det b_{ij} \Rightarrow \det b_{ij} = e^{-3\Omega}\\
e^{\Omega(t)}\mathbb{B} =& e^{\beta_{ij}(t)} \Rightarrow \det\left(e^{\Omega(t)}\mathbb{B}\right) = e^{3\Omega}\det b_{ij} = e^{3\Omega}e^{-3\Omega} = \det e^{\beta_{ij}(t)} = e^{Tr\{\beta_{ij}\}} = 1 \Rightarrow Tr\{\beta_{ij}\} = 0\\
b_{ij}(t) =& e^{-\Omega(t)}e^{\beta_{ij}(t)} \Rightarrow d\sigma^i = \frac{db_{ij}}{dt}dt\wedge\omega^j + b_{ij}d\omega^j = \left(-\dot{\Omega}e^{-\Omega}e^{\beta_{ij}} + e^{-\Omega}\frac{de^{\beta_{ij}}}{dt}\right)dt\wedge\omega^j + b_{ij}d\omega^j \Rightarrow
\end{aligned}$$

Όπου έχουμε χωρίσει την μετρική σε δύο εκθετικές συναρτήσεις, οι έξι ανεξάρτητες παράμετροι δίνονται από τις συναρτήσεις b_{ij} (πέντε παράμετροι διότι ισχύει $b_{ii} = 0$) και μία η παράμετρος του όγκου (Ω), οι οποίες είναι εύκολες στην μεταχείρισή τους.

$$\begin{aligned}
ds^2 =& -dt^2 + R_0^2e^{-2\Omega(t)}e^{2\beta_{ij}(t)}\omega_i\omega_j = -(N^2+N_mN^m)d\Omega^2 + 2N^jd\Omega\omega_j + R_0^2e^{-2\Omega}e^{2\beta_{ij}(\Omega)}\omega_i\omega_j\\
dg_{\mu\nu} =& d(-1) + dh_{ij} + 2dh_{0i} = dh_{ij} = d\left(R_0^2e^{-2\Omega}e^{\beta_{ik}}e^{\beta_{kj}}\right) = -2d\Omega h_{ij} + R_0^2e^{-2\Omega}\left(de^{\beta_{ik}}e^{\beta_{kj}} + e^{\beta_{ik}}de^{\beta_{kj}}\right)\\
=& -2d\Omega h_{ij} + \left(de^{\beta_{im}}e^{-\beta_{mt}}e^{\beta_{tk}}e^{\beta_{kj}}R_0^2e^{-2\Omega} + R_0^2e^{-2\Omega}e^{\beta_{ik}}e^{\beta_{km}}e^{-\beta_{tm}}de^{\beta_{tj}}\right)\\
=& -2d\Omega h_{ij} + \left(de^{\beta_{ik}}e^{-\beta_{kt}}h_{jt} + h_{it}e^{-\beta_{tk}}de^{\beta_{kj}}\right) = 2\left(-d\Omega h_{ij} + h_{jt}\frac{1}{2}\left(de^{\beta_{ik}}e^{-\beta_{kt}} + e^{-\beta_{tk}}de^{\beta_{ki}}\right)\right)\\
dh_{ij} =& 2\left(-d\Omega h_{ij} + h_{jt}\frac{1}{2}\{de^\beta, e^{-\beta}\}^{it}\right) = 2\left(-d\Omega h_{ij} + h_{jt}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{it}}\right)\\
p^{ij}dh_{ij} =& 2(-d\Omega p^i{}_i + p^i{}_jd_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}}) = 2(-d\Omega p + \delta_{ir}p^r{}_k\delta_{jk}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}})\\
p^{ij}dh_{ij} =& 2(-d\Omega p + e^{\beta_{ik}}p^r{}_ke^{-\beta_{rj}}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}})\\
\mathcal{S} =& \frac{1}{16\pi}\int p^{mn}\dot{h}_{mn}d^3xdt = \frac{1}{16\pi}\int p^{mn}dh_{mn}d^3x = \frac{1}{16\pi}\int 2(e^{\beta_{ik}}p^r{}_ke^{-\beta_{rj}}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}} - pd\Omega)d^3x
\end{aligned}$$

Για διευκόλυνση των πράξεων μπορούμε να θέσουμε τον traceless τανυστή ορμής.

$$\begin{aligned}
\Pi^i{}_j =& 2\pi\left(e^{\beta_{it}}p^t{}_re^{-\beta_{rj}} - \frac{\delta^i{}_j}{3}p^l{}_l\right) = 2\pi\left(h^{it}p_{tj} - \frac{\delta^i{}_j}{3}p^l{}_l\right) = 2\pi\left(h^{it}p_{tj} - \frac{\delta^i{}_j}{6\pi}\mathrm{H}\right)\\
\Pi^i{}_i =& 2\pi\left(h^{it}p_{ti} - \frac{\delta^i{}_i}{6\pi}\mathrm{H}\right) = 2\pi\left(p^i{}_i - \frac{3}{6\pi}\mathrm{H}\right) = 0\\
\Pi_{ij}\Pi^{ij} =& (2\pi)^2\left(p_{ij} - \frac{h_{ij}}{6\pi}\mathrm{H}\right)\left(p^{ij} - \frac{h^{ij}}{6\pi}\mathrm{H}\right)\\
=& (2\pi)^2\left(p_{ij}p^{ij} - \frac{\mathrm{H}}{6\pi}h^{ij}p_{ij} - \frac{\mathrm{H}}{6\pi}h_{ij}p^{ij} + \frac{h_{ij}h^{ij}}{(6\pi)^2}\mathrm{H}^2\right)\\
=& (2\pi)^2\left(p_{ij}p^{ij} - \frac{\mathrm{H}}{6\pi^2}\mathrm{H} + \frac{3}{(6\pi)^2}\mathrm{H}^2\right)\\
\Pi_{ij}\Pi^{ij} =& 4\pi^2\left(p_{ij}p^{ij} - \frac{1}{12\pi^2}\mathrm{H}^2\right)
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση συνδέσμων, 2.27, για την *Hamiltonian* έχουμε.

$$
\begin{aligned}
4\pi^2 p_{ij}p^{ij} =& \Pi_{ij}\Pi^{ij} + \frac{1}{3}\mathrm{H}^2 \\
\mathrm{H}^2 =& -8\pi^2 h\mathbf{R}^{(3)} + 8\pi^2 p_{ij}p^{ij} \\
\mathrm{H}^2 =& -8\pi^2 h\mathbf{R}^{(3)} + 2\left(\Pi_{ij}\Pi^{ij} + \frac{1}{3}\mathrm{H}^2\right) \Rightarrow \mathrm{H}^2 = 6\Pi_{ij}\Pi^{ij} - 24\pi^2 h\mathbf{R}^{(3)}
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Για την διαγωνοποίηση του πίνακα των θέσεων κάνουμε στροφή *Euler* [16], προς τον ένα άξονα, όπως βλέπουμε παρακάτω. Από αυτήν την διαγωνοποίηση θα βρούμε την σχέση διαφορικών ως προς τις θέσεις, β^2, και έτσι θα είμαστε θέση να τις εισάγουμε στο ολοκλήρωμα δράσης.

$$
\begin{aligned}
de^{\beta} =& d(e^{-\phi k_3}e^{\beta_D}e^{\phi k_3}) = d(e^{-\phi k_3}e^{\beta_D})e^{\phi k_3}) + e^{-\phi k_3}(de^{\beta_D})e^{\phi k_3} + e^{-\phi k_3}e^{\beta_D}(de^{\phi k_3}) \\
=& -e^{-\phi k_3}k_3 e^{\beta_D}e^{\phi k_3}\phi + e^{-\phi k_3}(de^{\beta_D})e^{\phi k_3} + e^{-\phi k_3}e^{\beta_D}k_3 e^{\phi k_3}d\phi \\
=& e^{-\phi k_3}[e^{\beta_D}, k_3]e^{\phi k_3} + e^{-\phi k_3}(de^{\beta_D})e^{\phi k_3}
\end{aligned}
$$

Θέτουμε η e^{β_D} να παίρνει την παρακάτω διαγώνια μορφή καθώς επίσης παραμετρίζουμε τα β^2 με έναν βολικό τρόπο που θα μας βοηθείσει παρακάτω να παραμετρίσουμε και τις συζυγείς ορμές με παρόμοιο τρόπο. Σαφώς η διαγώνια μορφή του πίνακα b πρέπει να υπακούει την συνθήκη $b_{ii} = 0$ όπως και γίνεται.

$$
\begin{aligned}
e^{\beta_D} =& \begin{pmatrix} e^{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\beta_+} \end{pmatrix}, k_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[e^{\beta_D}, k_3] =& \begin{pmatrix} e^{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta_{33}} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 0 & e^{\beta_{11}} & 0 \\ -e^{\beta_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & e^{\beta_{22}} & 0 \\ -e^{\beta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{\beta_+}2\sinh(\sqrt{3}\beta_-) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[e^{\beta_D}, k_3]e^{-\beta_D} =& e^{\beta_+}2\sinh(\sqrt{3}\beta_-) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\beta_+} \end{pmatrix} \\
=& e^{\beta_+}2\sinh(\sqrt{3}\beta_-) \begin{pmatrix} 0 & e^{-\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-} & 0 \\ e^{-\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^{-\beta_D}[e^{\beta_D}, k_3] =& e^{\beta_+}2\sinh(\sqrt{3}\beta_-) \begin{pmatrix} e^{-\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\beta_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
=& e^{\beta_+}2\sinh(\sqrt{3}\beta_-) \begin{pmatrix} 0 & e^{-\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-} & 0 \\ e^{-\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Αφού προσθέσουμε τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει το πρώτο μέρος του διαφορικού ως προς β^2, τώρα μένει να υπολογίσουμε το διαφορικό του διαγώνιου κομματιού της e^{β} ούτως ώστε προσθέτοντας τα να έχουμε όλο το διαφορικό.

$$
\begin{aligned}
&=2\sinh(\sqrt{3}\beta_-)\begin{pmatrix} 0 & e^{\sqrt{3}\beta_-}+e^{-\sqrt{3}\beta_-} & 0\\ e^{-\sqrt{3}\beta_-}+e^{\sqrt{3}\beta_-} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&=4\sinh(\sqrt{3}\beta_-)\cosh(\sqrt{3}\beta_-)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)\mathbb{T}_2\\
de^{\beta_D}e^{-\beta_D} &=\left(\frac{\partial e^{\beta_D}}{\partial\beta_+}d\beta_+ + \frac{\partial e^{\beta_D}}{\partial\beta_-}d\beta_-\right)e^{-\beta_D} = \left(\frac{\partial\beta_D}{\partial\beta_+}e^{\beta_D}d\beta_+ + \frac{\partial\beta_D}{\partial\beta_-}e^{\beta_D}d\beta_-\right)e^{-\beta_D}\\
&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}d\beta_+ + \begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&-\sqrt{3}&0\\0&0&0\end{pmatrix}d\beta_-\\
e^{-\beta_D}de^{\beta_D} &=e^{-\beta_D}\left(\frac{\partial e^{\beta_D}}{\partial\beta_+}d\beta_+ + \frac{\partial e^{\beta_D}}{\partial\beta_-}d\beta_-\right) = e^{-\beta_D}\left(e^{\beta_D}\frac{\partial\beta_D}{\partial\beta_+}d\beta_+ + e^{\beta_D}\frac{\partial\beta_D}{\partial\beta_-}d\beta_-\right)\\
&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}d\beta_+ + \begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&-\sqrt{3}&0\\0&0&0\end{pmatrix}d\beta_-\\
d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}} &=\frac{1}{2}\left(de^{\beta_{ik}}e^{-\beta_{kt}}+e^{-\beta_{tk}}de^{\beta_{ki}}\right)\\
&=\frac{e^{-\psi k_3}}{2}\left([e^{\beta_D},k_3]e^{\beta_D}+de^{\beta_D}e^{-\beta_D}+e^{\beta_D}[e^{\beta_D},k_3]+e^{-\beta_D}de^{\beta_D}\right)e^{\psi k_3}\\
&=\frac{e^{-\psi k_3}}{2}\left(2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}d\beta_+ + 2\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&-\sqrt{3}&0\\0&0&0\end{pmatrix}d\beta_- + 2\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)\mathbb{T}_2\right)e^{\psi k_3}\\
d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}} &=e^{-\phi k_3}\begin{pmatrix} d\beta_+ + \sqrt{3}d\beta_- & \sinh(2\sqrt{3}\beta_-)d\phi & 0\\ \sinh(2\sqrt{3}\beta_-)d\phi & d\beta_+ - \sqrt{3}d\beta_- & 0\\ 0 & 0 & -2d\beta_+\end{pmatrix}e^{\phi k_3}
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

Αφού έχουμε υπολογίσει το διαφορικό $d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}}$ θα γράψουμε το ολοκλήρωμα της δράσης παραμετρίζοντας τις συζυγείς ορμές ώστε να αντιστοιχούν στις συζυγείς θέσεις, β^2.

$$
\begin{aligned}
\Pi^{ij}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{ij}} &=\Pi^{11}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{11}}+\Pi^{12}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{12}}+\cancelto{0}{\Pi^{13}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{13}}}+\Pi^{21}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{21}}+\Pi^{22}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{22}}+\\
&\quad\cancelto{0}{\Pi^{23}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{23}}}+\cancelto{0}{\Pi^{31}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{31}}}+\cancelto{0}{\Pi^{32}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{32}}}+\Pi^{33}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{33}}\\
&=\Pi^{11}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{11}}+2\Pi^{12}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{12}}+\Pi^{22}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{22}}+\Pi^{33}d_{\{e^\beta,e^{-\beta}\}^{33}}\\
&=\Pi^{11}(d\beta_+-\sqrt{3}d\beta_-)+2\Pi^{12}\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)d\phi+\Pi^{22}(d\beta_++\sqrt{3}d\beta_-)-2\Pi^{33}d\beta_+\\
&\equiv\Pi_+d\beta_+ + \Pi_-d\beta_- + \Pi_\phi d\phi \Rightarrow\\
\Pi_+ &=\Pi^{11}+\Pi^{22}-2\Pi^{33},\ \Pi_-=\sqrt{3}\left(\Pi^{22}-\Pi^{11}\right),\ \Pi_\phi=2\Pi^{12}\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)\\
\Pi^{ii} &=0\Rightarrow\Pi^{11}+\Pi^{22}+\Pi^{33}=0
\end{aligned}
$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ο τανυστής των ορμών.

$$6\Pi^{ij} = e^{-\phi k_3} \begin{pmatrix} \Pi_+ - \sqrt{3}\Pi_- & \frac{3\Pi_\phi}{\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)} & 0 \\ \frac{3\Pi_\phi}{\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)} & \Pi_+ + \sqrt{3}\Pi_- & 0 \\ 0 & 0 & -2\Pi_+ \end{pmatrix} e^{\phi k_3} \tag{3.56}$$

$$\Pi^{ij}\Pi_{ij} = \frac{\Pi^{11}\Pi_{11} + \Pi^{12}\Pi_{12} + \cancelto{0}{\Pi^{13}\Pi_{13}} + \Pi^{21}\Pi_{21} + \Pi^{22}\Pi_{22} + \cancelto{0}{\Pi^{23}\Pi_{23}} + \cancelto{0}{\Pi^{31}\Pi_{31}} + \cancelto{0}{\Pi^{32}\Pi_{32}} + \Pi^{33}\Pi_{33}}{36}$$

$$= \frac{(\Pi_+ - \sqrt{3}\Pi_-)^2 + 2\frac{3^2\Pi_\phi^2}{\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-)} + (\Pi_+ + \sqrt{3}\Pi_-)^2 + 4\Pi_+^2}{36} = \frac{\Pi_+^2 + \Pi_-^2 + \frac{3\Pi_\phi^2}{\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-)}}{6}$$

$$\mathrm{H}^2 = \Pi_+^2 + \Pi_-^2 + \frac{3\Pi_\phi^2}{\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-)} - 24\pi^2 h\mathbf{R}^{(3)}$$

Τελικά καταλήγουμε σε μία σχέση για την *Hamiltonian* όπου έχουμε ότι η βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* της τριδιάστατης γεωμετρίας ορίζει το δυναμικό [17].

$$\mathrm{H}^2 = \Pi_+^2 + \Pi_-^2 + \frac{3\Pi_\phi^2}{\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-)} + e^{-4\Omega}(V(\beta_+, \beta_-) - 1)$$

Πιο συγκεκριμένα για την IX Κοσμολογία του *Bianchi* έχουμε ΄οτι η *Hamiltonian* να δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$\mathrm{H}^2 = \Pi_+^2 + \Pi_-^2 + \frac{3\Pi_\phi^2}{\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-)} + \frac{e^{-4\Omega}}{3}\left(2e^{4\beta_+}(\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1) - 4e^{-2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-) + e^{-8\beta_+}\right)$$

Για την περιγραφή της κίνησης στον χώρο θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης του *Hamilton* χωρίς συνδέσμους όπου έχουμε.

$$\dot{\beta}_\pm = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \Pi_\pm} = \frac{\Pi_\pm}{\mathrm{H}} \tag{3.57}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \Pi_\phi} = \frac{\frac{3\Pi_\phi}{\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-)}}{\mathrm{H}} = \frac{\Pi'_\phi(\beta_-)}{\mathrm{H}} \tag{3.58}$$

$$\dot{\Pi}_\phi = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \Pi_\phi = constant \tag{3.59}$$

$$\dot{\Pi}_{i=\pm} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \beta_\pm} = -\frac{\delta_{i-}\frac{\partial \Pi'^2_\phi}{\partial \beta_-} + e^{-4\Omega}\frac{\partial V}{\partial \beta_\pm}}{2\mathrm{H}} = -\frac{\delta_{i-}}{2\mathrm{H}}\frac{\partial \Pi'^2_\phi}{\partial \beta_-} - \frac{e^{-4\Omega}}{2\mathrm{H}}\frac{\partial V}{\partial \beta_\pm} \tag{3.60}$$

$$\mathrm{H}^2 = \Pi^2 + e^{-4\Omega}(V-1) = \mathrm{H}^2\dot{\beta}^2 + e^{-4\Omega}(V-1) \Rightarrow \mathrm{H}^2 = \frac{e^{-4\Omega}(V-1)}{1-\dot{\beta}^2}$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{H}^2}{\partial \Omega} = \frac{\partial(-4\Omega + \ln(V-1) - \ln(1-\dot{\beta}^2))}{\partial \Omega} = -4 + \frac{1}{V-1}\frac{\partial V}{\partial \Omega} + \frac{2\dot{\beta}\ddot{\beta}}{1-\dot{\beta}^2}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{2(\dot{\beta}_+\ddot{\beta}_+ + \dot{\beta}_-\ddot{\beta}_- + \dot{\phi}\ddot{\phi})}{2\dot{\beta}} = \frac{\dot{\beta}_i\ddot{\beta}_i}{\dot{\beta}} \Rightarrow \dot{\beta}\ddot{\beta} = \dot{\beta}_i\ddot{\beta}_i$$

$$\ddot{\beta}_i = \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \Omega} = \frac{\partial}{\partial \Omega}\left(\frac{\Pi_i}{\mathrm{H}}\right) = \frac{\dot{\Pi}_i\mathrm{H} - \Pi_i\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \Omega}}{\mathrm{H}^2} = \frac{\dot{\Pi}_i}{\mathrm{H}} - \dot{\beta}_i\frac{\partial \ln \mathrm{H}}{\partial \Omega}$$

$$\dot{\beta}\ddot{\beta} = \frac{\dot{\beta}_i\dot{\Pi}_i}{\mathrm{H}} - \dot{\beta}_i\dot{\beta}_i\frac{\partial \ln \mathrm{H}}{\partial \Omega} = \frac{\dot{\beta}_i\dot{\Pi}_i}{\mathrm{H}} - \dot{\beta}^2\frac{\partial \ln \mathrm{H}}{\partial \Omega} = \frac{\dot{\Pi}_i\Pi_i}{\mathrm{H}^2} - \dot{\beta}^2\frac{\partial \ln \mathrm{H}}{\partial \Omega}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln \mathrm{H}^2}{\partial \Omega} =& -4 + \frac{1}{V-1}\frac{\partial V}{\partial \Omega} + \frac{2\frac{\dot{\Pi}_i \Pi_i}{\mathrm{H}^2} - \dot{\beta}^2 \frac{\partial \ln \mathrm{H}^2}{\partial \Omega}}{1-\dot{\beta}^2} \Rightarrow \\
\frac{\partial V}{\partial \Omega} =& \frac{\partial V}{\partial \beta_+}\frac{\partial \beta_+}{\partial \Omega} + \frac{\partial V}{\partial \beta_-}\frac{\partial \beta_-}{\partial \Omega} = -2\mathrm{H}e^{4\Omega}\dot{\Pi}_+\dot{\beta}_+ - 2\mathrm{H}e^{4\Omega}\left(\dot{\Pi}_- + \frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial \Pi_\phi'^2}{\partial \beta_-}\right)\dot{\beta}_- \\
=& -2\mathrm{H}e^{4\Omega}\left(\dot{\Pi}_+\frac{\Pi_+}{\mathrm{H}} + \dot{\Pi}_-\frac{\Pi_-}{\mathrm{H}} + \frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial \Pi_\phi'^2}{\partial \Omega}\right) = -e^{4\Omega}\frac{\partial(\Pi_+^2 + \Pi_-^2 + \Pi_\phi'^2)}{\partial \Omega} = -\frac{1}{e^{-4\Omega}}\frac{\partial \Pi^2}{\partial \Omega} \\
\frac{\partial \ln \mathrm{H}^2}{\partial \Omega} =& -4(1-\dot{\beta}^2) + \Big(-\underbrace{\frac{1-\dot{\beta}^2}{e^{-4\Omega}(V-1)}}_{\mathrm{H}^2(1-\dot{\beta}^2)} + \frac{1}{\mathrm{H}^2}\Big)\frac{\partial \Pi^2}{\partial \Omega} = 4(\dot{\beta}^2 - 1) \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

για να έχουμε διατήρησή της ενέργειας πρέπει να υποθέσουμε ότι η 3.61 είναι ίση με μηδέν. Επίσης έχουμε για την κίνηση των τοιχωμάτων του δυναμικού να προκύπτει από την *Hamiltonian* η εξής προσεγγιστική σχέση από την οποία προκύπτει η ταχύτητα κίνησης των τοιχωμάτων, εφόσον ισχύει και η διατήρηση της ενέργειας, από την εν λόγω σχέση [17].

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}^2 =& \Pi^2 + e^{-4\Omega}(V-1) \overset{\beta_+ \to -\infty}{\Rightarrow} \cancelto{0}{\frac{\Pi^2}{\mathrm{H}^2}} + \mathrm{H}^{-2}e^{-4\Omega}\cancelto{\frac{1}{3}e^{-8\beta_+}}{(V-1)} \simeq 1 \Rightarrow \\
\beta_+ \simeq \beta_{Wall} =& -\frac{\Omega}{2} - \frac{1}{8}\ln(3\mathrm{H}^2) \Rightarrow \dot{\beta}_{Wall} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\frac{\partial \ln(\mathrm{H}^2)}{\partial \Omega} = -\frac{1}{2}\dot{\beta}^2 = -\frac{1}{2} \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι αφού η $\Pi_\phi = constant$ και $\Pi_\phi' = \Pi_\phi'(\beta_-)$ έχουμε ένα επιπλέον κεντρικό δυναμικό έτσι θεωρώντας ϕ σταθερό, απαλείφουμε την ανομοιογένειά ως προς ϕ που δημιουργούσε το επιπλέον κεντρικό δυναμικό, και $\beta_- \to \infty$ έχουμε.

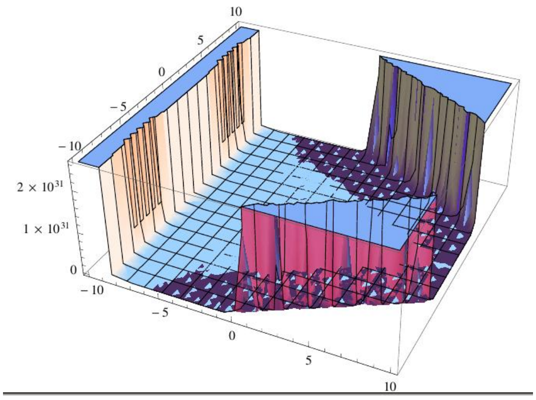
$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_- \overset{\beta_- \to \infty}{=}& -\frac{e^{-4\Omega}}{2\mathrm{H}}\frac{\partial V}{\partial \beta_-} = -\frac{e^{-4\Omega}}{6\mathrm{H}}\frac{\partial e^{-8\beta_+}}{\partial \beta_-} = 0 \Rightarrow \Pi_- = constant \\
\dot{\Pi}_+ \overset{\beta_- \to \infty}{=}& -\frac{e^{-4\Omega}}{2\mathrm{H}}\frac{\partial V}{\partial \beta_+} = -\frac{e^{-4\Omega}}{6\mathrm{H}}\frac{\partial e^{-8\beta_+}}{\partial \beta_+} = \frac{4}{3\mathrm{H}}e^{-8\beta_+ - 4\Omega} \\
\dot{\mathrm{H}} =& \pm\frac{\partial}{\partial \Omega}\sqrt{\Pi^2 + e^{-4\Omega}(V-1)} = \pm\frac{1}{2\sqrt{\Pi^2 + e^{-4\Omega}(V-1)}}\frac{\partial(\Pi^2 + e^{-4\Omega}(V-1))}{\partial \Omega} \\
=& \frac{1}{2\mathrm{H}}\left(\cancelto{-e^{-4\Omega}\frac{\partial V}{\partial \Omega}}{\frac{\partial \Pi^2}{\partial \Omega}} + (V-1)\frac{\partial e^{-4\Omega}}{\partial \Omega} + e^{-4\Omega}\frac{\partial V}{\partial \Omega}\right) = -\frac{e^{-4\Omega}}{2\mathrm{H}}4(V-1) \\
\overset{\beta_- \to \infty}{=}& \frac{e^{-4\Omega}}{2\mathrm{H}}\left(-\frac{4}{3}e^{-8\beta_+}\right) = -\frac{2}{3\mathrm{H}}e^{-8\beta_+ - 4\Omega} \\
J =& \frac{1}{2}\Pi_+ + H = constant \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

όπου έχουμε δύο διατηρήσιμες ποσότητες, J & Π_- άρα από την σχέση 3.61 ισχύει.

$$
\Pi^2 = \mathrm{H}^2 \Rightarrow \left.\frac{\Pi_-}{\mathrm{H}}\right|_i = \sin\theta_i \ \& \ \left.\frac{\Pi_+}{\mathrm{H}}\right|_i = -\cos\theta_i \ \& \ \left.\frac{\Pi_-}{\mathrm{H}}\right|_f = \sin\theta_f \ \& \ \left.\frac{\Pi_+}{\mathrm{H}}\right|_f = \cos\theta_f
$$

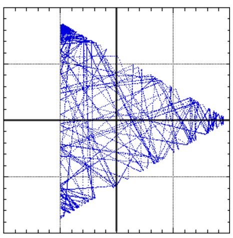
όπου από τις συνθήκες διατήρησης θα πάρουμε τους νόμους ανάκλασης.

$$
\begin{aligned}
\Pi_-|_i &= \Pi_-|_f \Rightarrow \mathrm{H}_i \sin\theta_i = \mathrm{H}_f \sin\theta_f \\
J_i &= J_f \Rightarrow -\frac{1}{2}\mathrm{H}_i \cos\theta_i + \mathrm{H}_i = \frac{1}{2}\mathrm{H}_f \cos\theta_f + \mathrm{H}_f \\
\frac{\sin\theta_f}{\sin\theta_i} &= \frac{1+\frac{1}{2}\cos\theta_f}{1-\frac{1}{2}\cos\theta_i} = \frac{2+\cos\theta_f}{2-\cos\theta_i} \Rightarrow \sin\theta_f - \frac{1}{2}\cos\theta_i \sin\theta_f = \sin\theta_i + \frac{1}{2}\cos\theta_f \sin\theta_i \Rightarrow \\
2(\sin\theta_f - \sin\theta_i) &= \cos\theta_f \sin\theta_i + \cos\theta_i \sin\theta_f = \sin(\theta_i+\theta_f) \underset{\psi=\theta_i-\theta_f}{\overset{\phi=\theta_i+\theta_f}{\Rightarrow}} \frac{\sin\phi}{2} = \sin\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right) \\
\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \Rightarrow \\
\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) &= -2\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\theta_i+\theta_f}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_i-\theta_f}{2}\right)} = -2 \Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_f}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_f}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_f}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)} = -2 \Rightarrow \\
\tan\left(\frac{\theta_f}{2}\right) &= 3\tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{1-\cos\theta_f}{1+\cos\theta_f}} = 3\sqrt{\frac{1-\cos\theta_i}{1+\cos\theta_i}} \Rightarrow \cos\theta_f = \frac{-4+5\cos\theta_i}{5-4\cos\theta_i} \\
\frac{\sin\theta_f}{\sin\theta_i} &= \frac{2+\frac{-4+5\cos\theta_i}{5-4\cos\theta_i}}{2-\cos\theta_i} \Rightarrow \sin\theta_f = \frac{(6-3\cos\theta_i)\sin\theta_i}{(5-4\cos\theta_i)(2-\cos\theta_i)} = \frac{3\sin\theta_i}{5-4\cos\theta_i}
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$



Σχήμα 3.1: Δυναμικό $V(\beta_+, \beta_-)$

Όπου καταλήγουμε στην σχέση 3.64 η οποία αποτελεί τον νόμο ανάκλασης στα τοιχώματα του δυναμικού. Όπως φαίνεται και από την 3.1 το δυναμικό είναι τριγωνικό και ένα σωματίδιο που υπόκειται σε αυτό είναι αναγκασμένο να προσκρούει στα τοιχώματα και να κάνει ανακλάσεις. Το πρόβλημα όμως αυτού του δυναμικού είναι ότι συνεχώς αυξάνει το μέγεθος του διότι τα τοιχώματα απομακρύνονται συνεχώς οπότε το σύστημα καταλήγει να έχει χαοτική συμπεριφορά όπως θα δούμε και παρακάτω.



Σχήμα 3.2: Mixmaster Chaos

3.3.1 Χαοτική συμπεριφορά Mixmaster μοντέλων

Η χαοτική συμπεριφορά στα δυναμικά συστήματα γίνεται πιο εύκολα κατανοητή σε *Hamiltonian* συστήματα. Για τέτοια συστήματα μία πρωταρχική μέθοδος ελέγχου αν παρουσιάζεται χαοτική συμπεριφορά είναι οι εκθέτες *Lyapunov*. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι ο χωρόχρονος όπου σύμφωνα με την γενική θεωρία της σχετικότητας αποτελεί ένα δυναμικό σύστημα από μόνος του. Όταν η εξέλιξη του σύμπαντος περιγράφεται με τον φορμαλισμό ADM τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί ένα *Hamiltonian* σύστημα.

Ανάμεσα στα διάφορα κοσμολογικά μοντέλα που έχουν μελετηθεί το IX κοσμολογικό μοντέλο του *Bianchi*, ή αλλιώς Mixmaster, είναι ένα από τα επικρατέστερα να παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά. Ωστόσο οι εκθέτες *Lyapunov* παρουσιάζουν διαφορετικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα το ότι η φαινόμενη εξάρτηση από τις συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του χωρόχρονου. Τέτοιου είδους εξαρτήσεις, αν όντως υπάρχουν, προκαλούν έκπληξη διότι η χρονική συντεταγμένη του χωρόχρονου δεν σχετίζεται με την παραμετροποίηση του χώρου των φάσεων. Επιπλέον τέτοιου είδους εξαρτήσεις μπορεί να παραπέμψει το χάος ως κακή επιλογή συντεταγμένων και όχι μία δυναμική ιδιότητα του συστήματος. Το πρόβλημα με τους εκθέτες *Lyapunov* έγκειται στις ασάφειες που παραμένουν στον ορισμό του ολοκληρώματος δράσης ADM. Η τρέχουσα ερμηνεία περιλαμβάνει έναν πολλαπλασιαστή *Lagrange* ως την αναγκαία αναλλοίωτα των συντεταγμένων του χωρόχρονου. Ένας πολλαπλασιαστής αποδεικνύεται ότι δεν είναι αναγκαίος για την αναλλοιώτητα των συντεταγμένων, επιπροσθέτως καταστρέφει την συμπλεκτική μορφή δομή του χώρου των φάσεων. Στην πραγματικότητα, η γεωμετρία επιλέγει την παραμετρικοποίηση του χώρου των φάσεων, καθώς και κάθε μεταβολή στα αποτελέσματα παραμέτρων σε ένα μεταβαλλόμενο *Hamiltonian* σύστημα

Πρέπει να τονιστεί ότι ο καθορισμός των παραμέτρων του χώρου των φάσεων δεν επιβάλει την επιλογή συντεταγμένων στο χωρόχρονο. Οι παράμετροι επιλέγονται από την συμπλεκτική δομή του χώρου των φάσεων και η πλήρης αναλλοιώτητα των παραμέτρων του χωρόχρονου παραμένει άθικτη. Αφού οι απαιτήσεις των δύο γεωμετριών, του χώρου των φάσεων και του χωρόχρονου, ικανοποιούνται, οι εκθέτες *Lyapunov* καθίστανται ανεξάρτητοι από την επιλογή των παραμέτρων που επιβάλλονται για τον χωρόχρονο. Επιπλέον η διόρθωση της δομής του χώρου των φάσεων οδηγεί σε μία πιο γενική *Hamiltonian* [14, 20].

IX *Bianchi* κοσμολογικό μοντέλο ως χαοτικό σύστημα

Έχουν γίνει διάφορες συζητήσεις για το αν η IX Κοσμολογία του *Bianchi* αποτελέι ένα χαοτικό σύστημα. Μία πειστική περιγραφή για το αν είναι χαοτικό αυτό το σύστημα είναι ο φορμαλισμός ADM, για τον οποίο έχουμε κριτήρια για την ανίχνευση της χαοτικής συμπεριφοράς. Ένα κριτήριο από αυτά είναι, η εκθετική απόκλιση των τροχιών, το οποίο είναι πολύ δύσκολα εφαρμόσιμο σε αυτό το μοντέλο κοσμολογίας, στο IX. Ένα εύκολα εφαρμόσιμο κριτήριο είναι οι εκθέτες *Lyapunov* ως ένα χρονοεξαρτόμενο μέτρο διαχωρισμού των τροχιών. Όμως αυτή η πρόταση είναι μη αληθής λόγω της μη κατανόησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο γεωμετριών, του χωρόχρονου και του χώρου των φάσεων, που λαμβάνουν χώρα για την περιγραφή της κοσμολογίας ως δυναμικό σύστημα.

Οι εκθέτες *Lyapunov* μετρούν τον διαχωρισμό των τροχιών σε σχέση με την παραμετροποίηση των τροχιών στον χώρο των φάσεων. Σε ένα γενικό *Hamiltonian* σύστημα, η παράμετρος αυτή είναι η συζυγής συντεταγμένη του χώρου φάσεων ως προς την *Hamiltonian* και δεν σχετίζεται με καμία από τις παραμέτρους του χωρόχρονου. Στον φορμαλισμό ADM η IX Κοσμολογία του *Bianchi* περιγράφει ένα σύμπαν με μετρική η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από την δράση της $SO(3)$. Αν οι εκθέτες *Lyapunov* εξαρτώνται από χωροχρονικές συντεταγμένες τότε δεν είναι ικανοί να μας δώσουν στοιχεία για το αν το σύστημα είναι χαοτικό ή όχι. Ουσιαστικά πρόκειται για κακή επιλογή συντεταγμένων παρά για μία φυσική ιδιότητα του συστήματος. Η αποτυχία αυτή δεν αποτελεί αποτυχία μόνο για την πρόβλεψη του χάους αλλά και της κατάρρευσης της συμπλεκτικής δομής του χώρου των φάσεων. Αυτά τα προβλήματα εντοπίζονται λόγω της χρήσης ενός πολλαπλασιαστή *Lagrange* στο ολοκλήρωμα δράσης στον επεκταμένο χώρο των φάσεων. Η αυθαιρεσία των πολλαπλασιαστών καταστρέφει και την συμπλεκτική δομή του χώρου των φάσεων αλλά και την αναλλοιώτητα των εκθετών *Lyapunov*. Στον *Hamiltonian* φορμαλισμό, ADM, έχουμε ότι ο χώρος των φάσεων είναι ένας επεκταμένος χώρος των φάσεων. Μία μέθοδος είναι η επιλογή ενός αυθαίρετου πολλαπλασιαστή *Lagrange* στον αυθαίρετο χώρο των φάσεων η οποία μας επιτρέπει να έχουμε μία ανεξάρτητη *Hamiltonian*, μία εναλλακτική μέθοδος είναι αυτή της συμπλεκτικής γεωμετρίας, οι προβλεπόμενες λύσεις είναι οι ίδιες και για τις δύο μεθόδους. Οι διαφορές στις δύο προσεγγίσεις είναι ότι σε αυτήν με τον αυθαίρετο πολλαπλασιαστή *Lagrange* οι λύσεις δεν προσδιορίζεται πως θα είναι αντιστρέψιμες, αλλά η συμπλεκτική γεωμετρία του χώρου των φάσεων διορθώνει την παράμετρο όταν επιλεγεί η *Hamiltonian*. Αυτές τις δύο σκοπιές μπορούμε να τις κάνουμε να συμφωνούν μόνο αν ο πολλαπλασιαστής πάψει να είναι αυθαίρετος. Η συγκεκριμένη τιμή του πολλαπλασιαστή μπορεί να επιλεγεί απαιτώντας η *Hamiltonian* και η παράμετρος να είναι συζυγείς μεταβλητές, αυτή η μέθοδος συνηθίζεται σε προβλήματα με συνδέσμους.

Εφόσον ο αυθαίρετος πολλαπλασιαστής *Lagrange* δεν είναι επιτρεπτός ούτως ώστε να διατηρείται η συμπλεκτική δομή του χώρου των φάσεων, η τρέχουσα διατύπωση της ADM *Hamiltonian* πρέπει να αναθεωρηθεί. Χωρίς την ικανότητα να απορροφούντε ορισμένοι παράγοντες σε ένα αυθαίρετο πολλαπλασιαστή, ο προσδιορισμός της παραμέτρου και της *Hamiltonian* γίνεται πιο δύσκολη. Ο τελευταίος όρος στη δράση πρέπει να διαχωριστεί σε *Hamiltonian* και στην συζυγή παράμετρο. Μόλις επιλεγεί ένα από αυτά τα δύο, η άλλη καθορίζεται από τη γεωμετρία. Όταν η γεωμετρική άποψη ακολουθείται, θα διαπιστώσει ότι μια έγκυρη επιλογή για την παράμετρο στο χώρο των φάσεων είναι ο τετραόγκος της εξελισσόμενης κοσμολογίας. Ο χωροχρονικός όγκος είναι ένα γεωμετρικά αναλλοίωτο μέγεθος και έτσι παρέχει ένα γεωμετρικά αναλλοίωτο ορισμό των εκθετών *Lyapunov*. Αν η παράμετρος επιλεγεί τότε η *Hamiltonian* προκύπτει από την γεωμετρία του χώρου των φάσεων, για ομογενείς κοσμολογίες η *Hamiltonian* είναι ένα γεωμετρικά αναλλοίωτο μέγεθος. Η *Hamiltonian* και η συζυγής παράμετρος, πρέπει μαζί να αποτελούν τον τελευταίο όρο στην δράση, και κάτω από μεταβολές, πρέπει να παράγουν κατάλληλες βαρυτικές εξισώσεις

Για τον προσδιορισμό λοιπόν της συμπεριφοράς του υπό μελέτη συστήματος θα ορίσουμε μία νέα επεκταμένη *Hamiltonian* της οποία συζυγής μεταβλητή θα είναι ο χωροχρονικός όγκος, Ω, όπου ορίζει την διαφορική σχέση $d\tau = \frac{d\Omega}{H}$. Συνεπώς οι νέες κανονικές θα είναι

$$\begin{aligned} \mathscr{H} =& \frac{1}{2}\{\Pi_+^2 + \Pi_-^2 - \Pi_\Omega^2 + e^{-4\Omega}(V-1)\} \\ \frac{d\beta_\pm}{d\tau} =& \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_\pm} \Rightarrow \frac{d\beta_\pm}{d\Omega}\cancelto{H}{\frac{d\Omega}{d\tau}} = \Pi_\pm \Rightarrow \dot{\beta}_\pm = \frac{\Pi_\pm}{H} \end{aligned} \tag{3.65}$$

Επειδή θέλουμε ο όγκος του σύμπαντος συνεχώς να αυξάνει, δηλαδή $\frac{d\Omega}{d\tau} > 0$, και έχουμε

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_\Omega} = -\Pi_\Omega \tag{3.66}$$

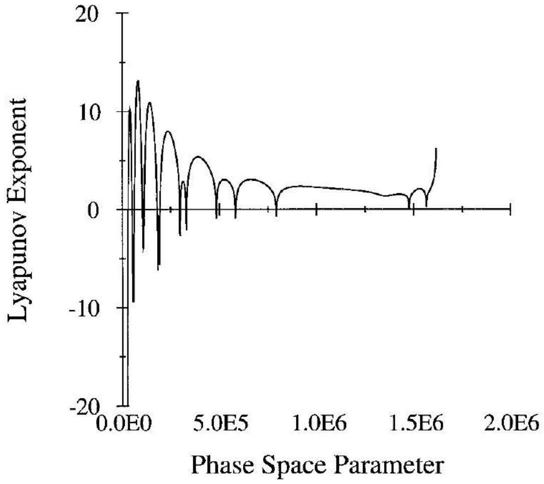
Θα επιλέξουμε $\Pi_\Omega < 0$ όπου έχουμε ότι $\Pi_\Omega = \pm\sqrt{\Pi_+^2 + \Pi_-^2 + e^{-4\Omega}(V-1)}$

$$\dot{\beta}_\pm = -\frac{\Pi_\pm}{\Pi_\Omega} \tag{3.67}$$

Από την ανάλυση των εξισώσεων των συνδέσμων έχουμε ότι $\mathscr{H} = 0$. Για τον έλεγχο της συμπεριφοράς του συστήματος γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις γράφοντας τις στην παρακάτω μορφή και βρίσκουμε τους εκθέτες *Lyapunov* με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποφανθούμε για το αν η συμπεριφορά είναι χαοτική ή όχι.

$$\begin{aligned} \dot{z}^i =& g(z) \Rightarrow \dot{z}^i = \left.\frac{\partial g^i(z)}{\partial z^k}\right|_{z=0} z^k + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 g^i(z)}{\partial z^k \partial z^l}\right|_{z=0} \cancelto{0}{z^l z^k} + \ldots \\ \dot{z}^i =& A_k^i z^k \Rightarrow z = e^{\mathbb{A}t} z_0 \Rightarrow z^i = e^{\lambda_i t} z_0 \\ \lambda_i =& \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\frac{z(t)}{z(0)} \end{aligned} \tag{3.68}$$

όπου $z(t)$ είναι η γραμμικοποιημένη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Όπως έχουμε σχολιάσει παραπάνω το πρόβλημα με τις εξισώσεις του μοντέλου Mixmaster που έχουμε να μελετήσουμε είναι



Σχήμα 3.3: Largest Lyapunov Exponents (short time) for the Mixmaster cosmology calculated with Minkowski metric

ότι οι εκθέτες *Lyapunov* φαίνεται να μην είναι αναλλοίωτοι κάτω από αλλαγές συντεταγμένων κάτι το οποίο δημιουργεί την σύγχυση σχετικά με το αν είναι ή όχι χαοτικό το σύστημα. Μία διαφορετική προσέγγιση είναι μέσω της εντροπίας *Kolmogorov* που γίνεται από τον *Barrow* [20]

Από την ανάλυση που έγινε [14] προκύπτει το παρακάτω γράφημα των εκθετών *Lyapunov* όπου αποκαλύπτεται η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος. Είδαμε ότι το IX, καθώς και το $VIII$, ομοιογενή κοσμολογικά μοντέλα του *Bianchi* έχουν χαοτική συμπεριφορά. Τα εν λόγω μοντέλα είναι τα μόνα που δεν έχουν κλασσικό ανάλογο, από σκοπιάς *Newtonian* δυναμικής, συνεπώς η χαοτική συμπεριφορά είναι εγγενώς σχετικιστικό φαινόμενο. Το Mixmaster μοντέλο αντιπροσωπεύει την εξέλιξη των βαρυτικών κυμάτων με επαρκείς βαθμούς ελευθερίας ώστε να δημιουργούνται ανισοτροπίες στην τριδιάστατη καμπυλότητα. Τα βαρυτικά κύματα δημιουργούν τις ανισοτροπίες στην τριδιάστατη καμπυλότητα με την κίνηση τους και οι ανισοτροπίες δημιουργούν μία αντίδραση στην κίνηση τους. Η μη γραμμικότητα της ανισότροπης καμπυλότητας είναι η άμεση αιτία της μη μηδενικής μετρικής εντροπίας, που αποτελεί κριτήριο για το αν ένα σύστημα είναι ή όχι χαοτικό. Θα περίμενε κανείς ότι τα σχετικιστικά συστήματα θα έχουν πιο θεαματική χαοτική συμπεριφορά σε σχέση με τα κλασικά αυτό λόγω της μοναδικότητας των αυτο-αλληλεπιδρώντων, και της μη γραμμικότητας της θεωρίας του *Einstein*. Ενώ όλες οι άλλες φυσικές θεωρίες απλώς παρέχουν τις εξισώσεις που περιγράφουν τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων ή των πεδίων σε κάποια σταθερό και προκαθορισμένο γεωμετρικό υπόβαθρο, οι εξισώσεις του *Einstein* είναι διαφορετικές. Οι εξισώσεις του χωρόχρονου περιγράφουν την ίδια την γεωμετρία και την εξέλιξη της καθώς και την αλληλεπίδραση των σωματιδίων ή των πεδίων με την ίδια την γεωμετρία. Όλα αυτά μαζί είναι υπεύθυνα για την χαοτική συμπεριφορά αυτών των συστημάτων.

Απεικόνιση *Poincare*

Μία διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος της χαοτικής συμπεριφοράς του μοντέλου Mixmaster είναι να θεωρήσουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις τις οποίες καλούμαστε να λύσουμε είναι τις μορφής $\dot{x} = F(x)$ και να υποθέσουμε απεικονίσεις οι οποίες δίνονται από την παρακάτω σχέση.

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

Από την παραπάνω απεικόνιση έχουμε για τις λύσεις του x_n αν για ένα αρκετά μεγάλο πλήθος επαναλήψεων αν το σύστημα συγκλίνει τότε η συμπεριφορά είναι ομαλή ειδάλως το σύστημα έχει χαοτική συμπεριφορά. Θα υποθέσουμε μία απεικόνιση η οποία ύστερα από συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων θα καταλήγει σε μία στάσιμη κατάσταση η οποία δεν θα εξαρτάται από τον αριθμό των επαναλήψεων π.χ.

$$y = T(x) = \frac{1}{2}(x - x^{-1})$$

Επίσης θα θεωρήσουμε την ποσότητα $\mu(y)$ ως το σχετικό πλήθος των επαναλήψεων $\{x_i\}$ οι οποίες λαμβάνουν χώρα στο διάστημα $\{y, \delta y\}$. Αν η ποσότητα $\mu(y)$ υπάρχει θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από την απεικόνιση T και το πλήθος των επαναλήψεων στο οποίο το σύστημα καταλήγει να έχει στάσιμες λύσεις.

$$\begin{aligned} x^2 - 2yx - 1 =& 0 \Rightarrow x_\pm = y \pm \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x_\pm^2 = 2y^2 \pm 2y\sqrt{y^2+1} + 1 \\ dx_\pm =& dy \pm \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{\sqrt{y^2+1} \pm y}{\sqrt{y^2+1}} = \pm \frac{x_\pm}{\sqrt{y^2+1}} dy \end{aligned}$$

Η ποσότητα $\mu(y)$ έχει δύο σκέλη και δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$\begin{aligned} \mu(y)dy =& \mu(x_+)dx_+ + \mu(x_-)dx_- = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}(x_+\mu(x_+) - x_-\mu(x_-))dy \\ \mu(y)(y^2+1) =& \sqrt{y^2+1}(x_+\mu(x_+) - x_-\mu(x_-)) \overset{\sqrt{y^2+1}x_\pm = \pm\frac{x_\pm^2+1}{2}}{\Rightarrow} \frac{1}{2}(x_+^2+1)\mu(x_+) + \frac{1}{2}(x_-^2+1)\mu(x_-) \\ 2f(y) =& f(x_+) + f(x_-),\ f(x) = (x^2+1)\mu(x) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $f(x)$ θέλουμε να είναι γραμμική οπότε έχουμε.

$$\mu(y) = \frac{a_0 + a_1 y}{y^2+1} \tag{3.69}$$

Καθώς θέλουμε η συνάρτηση $\mu(y)$ να είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα και να μην αποκλείνει η σταθερά $a_1 = 0$ και η σταθερά $a_0 = \pi^{-1}$.

$$\mu(y) = \frac{1}{\pi(y^2+1)} \tag{3.70}$$

Αυτή αποτελεί μία μη γραμμική απεικόνιση και μπορεί να περιγράφει το σύστημα μας. Θα εφαρμόσουμε μία τέτοια απεικόνιση στο Mixmaster μοντέλο και θα δούμε ότι είναι ένα σύστημα που εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά.Κατ'αρχας θεωρούμε την μετρική *Kasner* η οποία περιγράφει το μοντέλο Mixmaster και αναλύουμε τις εξισώσείς ως ένα σύστημα ταλαντωτών. Για το σύστημα αυτό έχουμε ότι κοντά στην αρχική ιδιομορφία περιγράφεται όπως και στην *Hamiltonian* ανάλυση, δηλαδή ένα δυναμικό στο οποίο προσκρούει ένα σωματίδιο και ακολουθεί συγκεκριμένους νόμους ανάκλασης καθώς στο εσωτερικό του δυναμικού δηλαδή μακριά από τα τοιχώματα συμπεριφέρεται σαν *Kasner* μοντέλο διότι σχεδόν εξαφανίζεται το δυναμικό.

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_i} dx_i^2$$

Από την ανάλυση από της μετρικής *Kasner* και των εξισώσεων πεδίου έχουμε ότι οι εκθέτες p_i ότι πρέπει να ικανοποιούν τις εξής σχέσεις.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} p_i =& \sum_{i=1}^{3} p_i^2 = 1 \\ \begin{pmatrix} p_1(u) \\ p_2(u) \\ p_3(u) \end{pmatrix} =& \frac{1}{1+u+u^2} \begin{pmatrix} -u \\ 1+u \\ u+u^2 \end{pmatrix}, p_i(u^{-1}) = p_i(u) \end{aligned} \tag{3.71}$$

Επίσης από τις εξισώσεις πεδίου $\mathbf{R}^m_m = 0, m = 1,2,3$ προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

$$\frac{d^2\ln(\alpha^2)}{d\Omega^2} =(\beta^2-\gamma^2)^2-\alpha^4 \tag{3.72α΄}$$

$$\frac{d^2\ln(\beta^2)}{d\Omega^2} =(\alpha^2-\gamma^2)^2-\beta^4 \tag{3.72β΄}$$

$$\frac{d^2\ln(\gamma^2)}{d\Omega^2} =(\beta^2-\alpha^2)^2-\gamma^4 \tag{3.72γ΄}$$

$$\frac{d^2\ln(\alpha^2\beta^2\gamma^2)}{d\Omega^2} =\frac{d\ln(\alpha^2)}{d\Omega}\frac{d\ln(\beta^2)}{d\Omega}+\frac{d\ln(\beta^2)}{d\Omega}\frac{d\ln(\gamma^2)}{d\Omega}+\frac{d\ln(\gamma^2)}{d\Omega}\frac{d\ln(\alpha^2)}{d\Omega} \tag{3.73}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν την κίνηση ενός σωματιδίου εντός ενός χρονοεξαρτόμενου δυναμικού. Οι όροι στην δεξιά πλευρά των εξισώσεων αυτών προσδιορίζει το δυναμικό. Όταν οι όροι στην δεξιά πλευρά τίθενται ίση με μηδέν οι εξισώσεις πεδίου καταλήγουν σε εξισώσεις που περιγράφουν την Κοσμολογία *Bianchi I* ή *Kasner*.

Οι παρακάτω λύσεις περιέχουν τέσσερις αυθαίρετες σταθερές A, B, C, u οι B, C προσδιορίζουν τα πλάτη της ταλάντωσης των α^2, β^2 όπου τα πλάτη προσδιορίζονται από το μέγιστο του α^2, μακριά από τα σημεία καμπής οι λύσεις έχουν ίδια συμπεριφορά με τις λύσεις για εποχή *Kasner*, ενώ η λύση για το γ^2 δίνει απόσβεση του συστήματος, καθώς $\tau \to -\infty$.

$$\alpha^2 =Ausech\theta \Rightarrow \frac{d\ln(\alpha^2)}{d\Omega} = -A\tanh\theta \tag{3.74α΄}$$

$$\beta^2 =\frac{Au}{B}csh\theta e^{-\frac{\theta}{u}} \Rightarrow \frac{d\ln(\beta^2)}{d\Omega} = A(\tanh\theta-1) \tag{3.74β΄}$$

$$\gamma^2 =\frac{Au}{C}csh\theta e^{-\frac{\theta}{u}} \Rightarrow \frac{d\ln(\gamma^2)}{d\Omega} = A(\tanh\theta-u^2) \tag{3.74γ΄}$$

$$\theta =Au(\Omega-\Omega_0), B = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{\dot{\alpha}=0} C = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_{\dot{\alpha}=0}$$

$$u_{n+1} =u_n-1; u_n>1$$

$$B_{n+1} =\frac{1}{4}\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)\left[4B_n\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)\right]^{\frac{u_n}{u_n-1}}$$

$$C_{n+1} =C_n\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)\left[4B_n\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)\right]^{u_n}$$

$$A_{n+1} =A_n$$

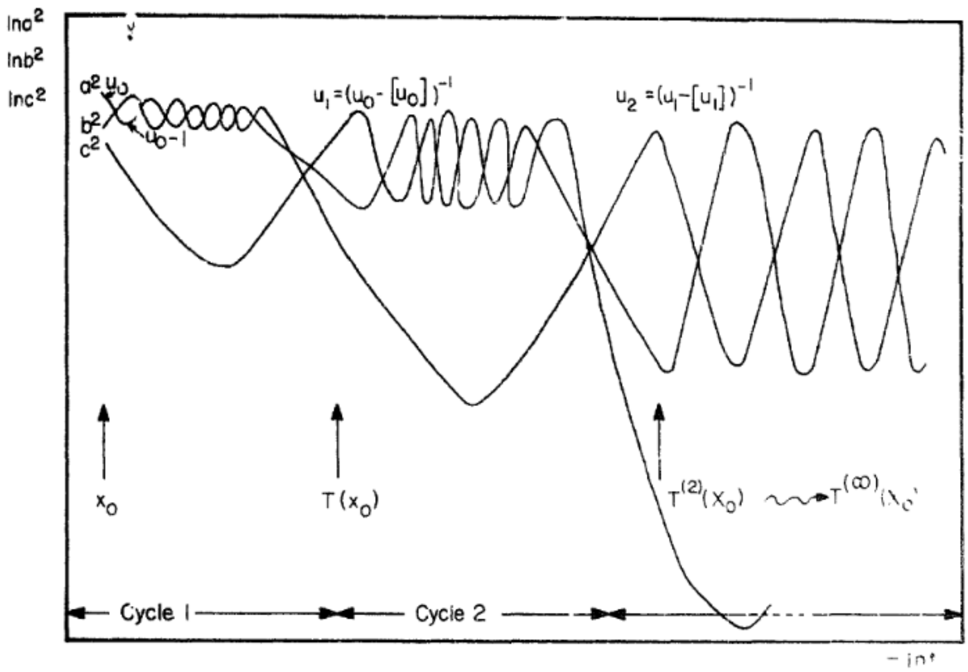
Η προσέγγιση *Kasner* των παραπάνω εξισώσεων μακριά από τα σημεία καμπής των α^2, β^2 περιγράφεται από την παράμετρο u.

Μία σειρά από μικρές ταλαντώσεις από την μία *Kasner* στην άλλη *Kasner* συμπεριφορά συμβαίνει όταν η τιμή της σταθεράς u_n πέφτει κάτω από την μονάδα. Στην περίπτωση αυτή η αναλλοίωτες ιδιότητες $p_i(u)$ στο μοντέλο *Kasner* δείχνουν να ξεκινάει νέος κύκλος ταλαντώσεων όπου.

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, u_n<1 \tag{3.75}$$

Τελικά καταλήγουμε ότι η εξέλιξη του σύμπαντος αν πάμε πίσω προς την αρχική ιδιομορφία, Big Bang, περνάει μέσα από μία σειρά από πεπερασμένες ταλαντώσεις των παραμέτρων κλίμακας $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ σε ένα χρονικό διάστημα $(0, T)$. Από φυσικής απόψεως μιλώντας είναι η εξέλιξη μίας μπάλας ενέργειας βαρυτικών κυμάτων καθώς καταρρέει σε μηδενικό όγκο. Η κατάρρευση ακολουθεί μια σειρά κύκλων, κατά την οποία δύο από τους παράγοντες κλίμακας ("ακτίνες") εκτελούν μικρές ταλαντώσεις, ενώ το τρίτο καταρρέει μονοτονικά. Η αλλαγή της συμπεριφοράς που υποδεικνύει την έναρξη ενός νέου κύκλου είναι η επίτευξη ενός τοπικού ελάχιστου από τη συνάρτηση η οποία πέφτει μονοτονικά. Κατά τη διάρκεια του νέου κύκλου, η μονότονη κλίμακα του παλιού κύκλου εκτελεί μικρές ταλαντώσεις, ενώ ο παράγοντας κλίμακας που την αντικατέστησε αναλαμβάνει τώρα μονοτονική συμπεριφορά μέχρις ότου ο επόμενος κύκλος αρχίζει. Κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε χρονικού διαστήματος στο οποίο κανένας από τους $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ δεν έχουν τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα η επέκταση περιγράφεται σε μια καλή προσέγγιση με το μοντέλο *Kasner*. Αν υποθέσουμε ως ένα *Hamiltonian* σύστημα το αριστερό μέλος των εξισώσεων περιγράφει τους κινητικούς ρους ενώ το δεξί τους δυναμικούς όπως έχουμε ήδη αναλύσει σε προηγούμενα κεφάλαια. Οπότε το σωματίδιο βρίσκεται μακριά από τα τοιχώματα περιγράφεται επαρκώς από το μοντέλο *Kasner* αυτό συμβαίνει και όταν προσκρούει στα τοιχώματα και απομακρύνεται πάλι τείνει να περιγραφεί από το ίδιο μοντέλο οπότε η σταθερά u_0 αν ξεκινήσει με τιμή μεγαλύτερη της μονάδας σε κάθε μία πρόσκρουση θα παίρνει την τιμή $u_0 - 1$ στο επόμενο $u_0 - 2$ και ούτω καθεξής. Συνεπώς η σταθερά u περιγράφει την προσέγγιση *Kasner* στην αρχή κάθε κύκλου μικρών ταλαντώσεων και δίνεται από τον τύπο.

$$u_1 = \frac{1}{u_0 - [u_0]}, [u_0] \text{ Ακέραιο μέρος της } u_0 \tag{3.76}$$



Σχήμα 3.4: Η ταλαντούμενη εξέλιξη των παραγόντων κλίμακας $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ καθώς προσεγγίζουμε την αρχική ιδιομορφία $t \to 0$ η εξέλιξη περιγράφεται από μία σειρά από κύκλους στους οποίους οι δύο παράμετροι ταλαντώνονται ενώ ο τρίτος πέφτει μονοτονικά στην κλίμακα του "χρόνου" e^{Ω}.

4

Επεκταμένες θεωρίες βαρύτητας

Η Γενική θεωρία της σχετικότητας από όταν πρωτοεισήχθει προέβλεπε με αρκετά μεγάλη ακρίβεια διάφορα παρατηρησιακά δεδομένα κάτι το οποίο την έκανε και μία από τις βασικές φυσικές θεωρίες. Η γενική θεωρία της σχετικότητας αποτελεί μία καθαρά γεωμετρική θεωρία για την οποία οποιαδήποτε εξέλιξη στον χωρόχρονο ερμηνεύεται ως βαρυτικό φαινόμενο, όπως μία μελανή οπή η οποία συνδέεται με την στρέβλωση του χωρόχρονου. Παρ όλες τις επιτυχίες της σύντομα ο επιστημονικός κόσμος ήθελε να βρει άλλες θεωρίες οι οποίες πιθανόν να είναι γενικότερες και ορθότερες. Αυτή η ανησυχία για την επέκταση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας οδηγείσαι σε διάφορες επεκταμένες θεωρίες, όπως η θεωρία $f(\mathbf{R})$ καθώς και η θεωρία *Brans − Dicke* στις οποίες θα αναφερθούμε παρακάτω. Η ανάπτυξη αυτών των νέων θεωριών βασίστηκε πάνω στην γενική θεωρία της σχετικότητας δηλαδή όλες οι θεωρίες που προέκυψαν λόγω της σχετικότητας αποτελούσαν γεωμετρικής φύσης θεωρίες, κάτι τέτοιο έδωσε έναυσμα για την ανάπτυξη αυτού του τομέα των μαθηματικών. Βασική απαίτηση των καιρών μας για να είναι μία φυσική θεωρία πλήρης πρέπει να έχουμε και την κβαντική περιγραφή αυτής κάτι το οποίο δεν έχει γίνει, ακόμα, εφικτό για την βαρύτητα και αυτό αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους λόγους των επεκτάσεων της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Όμως η γενική θεωρία της σχετικότητας σε συνδυασμό με την κβαντική θεωρία, ημικλασική προσέγγιση, δίνει διάφορα ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως η ακτινοβολία *Hawking* και το φαινόμενο *Unruh*, τα οποία υποδεικνύουν ότι είναι πιθανή η κβάντωση του βαρυτικού πεδίου. Όμως πέραν των κβαντικών προβλημάτων τα οποία έχουμε να αντιμετωπίσουμε υπάρχουν και κλασικά προβλήματα τα οποία η γενική θεωρία της σχετικότητας αδυνατεί να τα εξηγήσει και απαιτεί μία επέκταση της, όπως το πρόβλημα του ορίζοντα όπου απομακρυσμένα σημεία του σύμπαντος δεν θα έπρεπε να έχουν αλληλεπίδραση μεταξύ τους παρόλα αυτά εμφανίζουν κοινά παρατηρησιακά χαρακτηριστικό όπως η θερμοκρασία υποβάθρου. Συνεπώς παρακάτω θα αναφερθούμε σε δύο πιθανά μοντέλα επέκτασης της γενικής σχετικότητας αυτά είναι η $f(\mathbf{R})$ θεωρίες βαρύτητας καθώς και η θεωρία *Brans − Dicke*, οι οποίες αποδεικνύεται ότι είναι δύο ισοδύναμες θεωρίες.

4.1 Θεωρία *Brans − Dicke*

Η θεωρία *Brans − Dicke* αποτελεί μία από τις επεκταμένες θεωρίες βαρύτητας είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα βαθμωτής-τανυστικής θεωρίας για την βαρύτητα, βαρυτικές θεωρίες στις οποίες η βαρύτητα προκαλείται λόγω ενός βαθμωτού πεδίου και των πεδίων της κλασικής θεωρίας της γενικής σχετικότητας. Στην συγκεκριμένη βαρυτική θεωρία, σύμφωνα με τις ιδέες του *Dirac*, η παγκόσμια βαρυτική σταθερά παύει πλέον να είναι σταθερά και αντικαθήσταται με ένα πεδίο, ϕ, το οποίο εξαρτάται από τα σημεία του χωρόχρονου. Οι εξισώσεις πεδίου της θεωρίας *Brans − Dicke* περιέχουν μια παράμετρο, που ονομάζεται η σταθερά σύζευξης *Brans − Dicke*. Αυτή είναι μια πραγματική αδιάστατη σταθερά που μπορεί να επιλεγεί ούτως ώστε να ταιριάζει τις παρατηρήσεις. Τέτοιου είδους παράμετροι αποκαλούνται tuneable παράμετροι διότι προσαρμόζουν την θεωρία στα πειραματικά δεδομένα. Η θεωρία *Brans − Dicke* δίνει κυματικές εξισώσεις από τις οποίες προκύπτουν βαρυτικά κύματα τα οποία είναι πιθανόν ανιχνεύσιμα.

4.1.1 δράση *Brans − Dicke*

Για την θεωρία *Brans − Dicke* έχουμε την παρακάτω δράση για την οποία έχουμε ένα δυναμικό το οποίο εξαρτάται ρητά από τα πεδία ϕ και τους κινητικούς όρους των πεδίων ϕ.

$$\mathcal{S}_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int\left(\phi\mathbf{R} - \frac{\omega}{\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi)\right)\sqrt{-g}d^4x + \mathcal{S}_M \tag{4.1}$$

Μπορούμε να γράψουμε σε ισοδύναμη με την προηγούμενη μορφή την δράση όπου πλέον γίνεται εμφανής η αλλαγή της σταθεράς παγκόσμιας έλξης με το πεδίο ϕ.

$$\mathcal{S}_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int\phi\left(\mathbf{R} - \omega\nabla_\mu\ln\phi\nabla^\mu\ln\phi - U(\phi)\right)\sqrt{-g}d^4x + \mathcal{S}_M \tag{4.1}$$

Αν κάνουμε την μεταβολή της δράσης, ως προς την μετρική $g_{\mu\nu}$, θα πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης από τις οποίες προκύπτει μία γενικευμένη τανυστική εξίσωση. Επιπλέον αν κάνουμε την μεταβολή, ως προς τα πεδία ϕ, θα προκύψουν οι κυματικές εξισώσεις.

$$\begin{aligned}
\delta_g\mathcal{S}_{BD} =& \frac{1}{16\pi}\int\delta_g\left(\phi\mathbf{R} - \frac{\omega}{\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi)\right)\sqrt{-g}d^4x + \delta\mathcal{S}_M \overset{\delta(\sqrt{-g}\mathbf{R})=(\mathfrak{G}_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu+g_{\mu\nu}\Box^2)\delta g^{\mu\nu}}{\underset{\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}{\Rightarrow}} \\
=& \frac{1}{16\pi}\int\left(\phi(\mathfrak{G}_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu + g_{\mu\nu}\Box^2) - \frac{\omega}{\phi}(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\tau\phi\nabla^\tau\phi)\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \delta\mathcal{S}_M \\
=& \frac{1}{16\pi}\int\left(\phi\mathfrak{G}_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box^2\phi) - \frac{\omega}{\phi}(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\tau\phi\nabla^\tau\phi) + \frac{V}{2\phi}g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \\
& \frac{\delta\mathcal{S}_M}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + - \oint(\delta^\tau{}_\nu\nabla_\mu - g_{\mu\nu}\nabla^\tau)(\phi\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g}\eta_\tau d^3x \\
\mathfrak{G}_{\mu\nu} =& \frac{1}{\phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box^2\phi) + \frac{\omega}{\phi^2}(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\tau\phi\nabla^\tau\phi) + \frac{8\pi}{\phi}\mathfrak{T}_{\mu\nu} - \frac{V}{2\phi}g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι ο όρος στην δράση που μας δίνει την αλληλεπίδραση της γεωμετρίας με την ύλη δεν εξαρτάται από τα πεδία ϕ.

$$\begin{aligned}
\delta_\phi\mathcal{S}_{BD} =& \frac{1}{16\pi}\int\delta_\phi\left(\phi\mathbf{R} - \frac{\omega}{\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - V(\phi)\right)\sqrt{-g}d^4x + \cancelto{0}{\delta_\phi\mathcal{S}_M} \\
=& \frac{1}{16\pi}\int\left(\delta\phi\mathbf{R} + \frac{\omega}{\phi^2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi\delta\phi - \frac{\omega}{\phi}2\nabla_\mu\delta\phi\nabla^\mu\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi}\delta\phi\right)\sqrt{-g}d^4x \\
=& \frac{1}{16\pi}\int\left(\delta\phi\mathbf{R} + \frac{\omega}{\phi^2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi\delta\phi - 2\omega\left(\nabla_\mu\left(\frac{\delta\phi}{\phi}\nabla^\mu\phi\right) - \delta\phi\nabla_\mu\left(\frac{1}{\phi}\nabla^\mu\phi\right)\right) - \frac{dV(\phi)}{d\phi}\delta\phi\right)\sqrt{-g}d^4x \\
=& \frac{1}{16\pi}\int\left(\mathbf{R} - \frac{\omega}{\phi^2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + \frac{2\omega\Box^2\phi}{\phi} - \frac{dV(\phi)}{d\phi}\right)\delta\phi\sqrt{-g}d^4x + \oint 2\omega\left(\frac{\delta\phi}{\phi}\nabla^\mu\phi\right)\eta^\mu\sqrt{-g}d^3x \\
\mathbf{R} =& \frac{\omega}{\phi^2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{2\omega\Box^2\phi}{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} \\
\mathbf{R} =& -\frac{1}{\phi}(\Box^2\phi - 4\Box^2\phi) - \frac{\omega}{\phi^2}(\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - 2\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi) - \frac{8\pi}{\phi}\mathfrak{T} + \frac{2V}{\phi} \Rightarrow \\
\Box^2\phi =& \frac{1}{2\omega+3}\left(8\pi\mathfrak{T} + \phi\frac{dV(\phi)}{d\phi} - 2V(\phi)\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Παρακάτω θα δούμε μία άλλη βαθμωτή-τανυστική θεωρία η οποία όπως θα αποδεικνύεται καταλήγει να είναι ισοδύναμη με μία θεωρία *Brans − Dicke*.

4.2 $f(\mathrm{R})$ θεωρίες βαρύτητας

Οι πρώτες προσπάθειες για την επέκταση της θεωρίας του *Einstein*, πέραν της επιστημονικής περιέργιας, δεν είχαν κάποιο θεωρητικό ή πειραματικό ενδιαφέρον γιαυτό και μέχρις ότου εμφανίστηκαν κάποιες ενδείξεις δεν είχε γίνει καμία πρόοδος. Οι ενδείξεις αυτές υπεισέρχονται στο γεγονός ότι η γενική θεωρία της σχετικότητας δεν επιδεχόταν επανακανονικοποίηση ενώ για μεγαλύτερης τάξης θεωρίες, θεωρίες με *Lagrangian* πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου της μονάδας της καμπυλότητάς *Ricci*, αποδεικνύεται ότι είναι εφικτή η επανακανονικοποίηση, για βρόχους πρώτης τάξης, πρωταρχικά η απόδειξη αυτή έγινε από τους *Utiyama* και *DeWitt* [21] η οποία μελετήθηκε εκτενέστερα από τον *Stelle* [22] ο οποίος έδειξε ότι ναι μεν είναι επανακανονικοποίηση αλλά όχι μοναδιακή θεωρία. Τέτοιου είδους υποθέσεις οδηγούν το επιστημονικό ενδιαφέρον σε μεγαλύτερης τάξης θεωρίες βαρύτητας. Ωστόσο, η σημασία αυτών των όρων στη δράση αυτή θεωρείται ότι περιορίζεται σε πολύ ισχυρά συστήματα βαρύτητας και αναμένεται να καταστέλλεται σημαντικά από μικρές συζεύξεις, όπως θα περίμενε κανείς, όταν λαμβάνονται υπόψη οι απλές εκτιμήσεις της θεωρίας πεδίου. Επομένως διορθώσεις στην γενική θεωρία της σχετικότητας θα θεωρούνται σημαντικές για κλίμακες συγκρίσιμες με την κλίμακα του *Planck*, συνεπώς, αυτό θα συμβαίνει στο πρώιμο σύμπαν ή κοντά σε μελανές οπές και μάλιστα υπάρχουν σχετικές μελέτες, όπως το γνωστό σενάριο πληθωρισμού με γνώμονα την καμπυλότητα που μελετήθηκε από τον *Starobinsky* [23]. Ωστόσο, δεν αναμένεται ότι τέτοιες διορθώσεις θα μπορούσαν να επηρεάσουν τη βαρυτική φαινομενολογία σε χαμηλές ενέργειες, και, κατά συνέπεια, μεγάλες κλίμακες, όπως, για παράδειγμα, το σημερινό σύμπαν.

4.2.1 Κίνητρα επέκτασης της γενικής θεωρίας της σχετικότητας

Πιο πρόσφατα, τα νέα στοιχεία που προέρχονται από την αστροφυσική και την κοσμολογία έχουν αποκαλύψει μια εντελώς απρόσμενη εικόνα του σύμπαντος. Τελευταία σύνολα δεδομένων που προέρχονται από διαφορετικές πηγές, όπως είναι η μικρο κυματική ακτινοβολία υποβάθρου (CMBR) και έρευνες από υπερκαινοφανής (Supernovæ), φαίνεται να υποδηλώνουν ότι η προϋπολογιζόμενη ενέργεια του σύμπαντος είναι η ακόλουθη: 4% συνηθισμένη βαρυονική ύλη, 20% σκοτεινή ύλη και 76% σκοτεινή ενέργεια [72, 25, 77, 27]. Ο όρος σκοτεινή ύλη αναφέρεται σε ύλη, άγνωστης προς το παρόν μορφής, η οποία έχει την ιδιότητα να δημιουργεί συμπλέγματα ύλης όπως η συνήθης ύλη αλλά δεν είναι προς το παρόν ανιχνεύσιμη. Ο όρος σκοτεινή ενέργεια προορίζεται για μία άγνωστη μορφή ενέργειας που όχι μόνο δεν έχει ανιχνευθεί άμεσα, αλλά επίσης δεν έχει την ιδιότητα της συνηθισμένης ύλης που δημιουργεί συμπλέγματα. Πιο αυστηρά, θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τις διάφορες συνθήκες ενέργειας του *Wald* [28] οι οποίες διακρίνουν τη σκοτεινή ύλη και τη σκοτεινή ενέργεια: Για την συνήθη και τη σκοτεινή ύλη ικανοποιείται η ισχυρή συνθήκη για την ενέργεια, ενώ για την σκοτεινή ενέργεια δεν ικανοποιείται. Επιπλέον, η σκοτεινή ενέργεια φαίνεται να μοιάζει σε μεγάλη λεπτομέρεια με την κοσμολογική σταθερά. Λόγω της δεσπόζουσας θέσης της ύλης, πέρα από το θέμα (συνήθης και σκοτεινή) στην σημερινή εποχή, η διαστολή του σύμπαντος φαίνεται να είναι επιταχυνόμενη, σε αντίθεση με τις παρελθοντικές προσδοκίες που έχουμε από τις υπάρχουσες θεωρίες και τα πειραματικά δεδομένα.

Σημειώνουμε ότι η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος που παρατηρείται τις μέρες μας προστίθεται στην πρώιμη εποχή επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος που προβλέπεται από την πληθωριστική θεωρία [29, 30, 31]. Η θεωρία του πληθωρισμού είναι αναγκαία για την αντιμετώπιση τριών κύριων προβλημάτων της κοσμολογίας, του προβλήματος του ορίζοντα της επιπεδότητας του σύμπαντος καθώς και το πρόβλημα των μαγνητικών μονοπόλων [30, 31, 17, 33], καθώς και για να παρέχουν το μηχανισμό που δημιουργεί αρχέγονες ανομοιογένειες που ενεργούν ως σπόροι για το σχηματισμό των δομών μεγάλης κλίμακας [34]. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι, μεταξύ αυτών των δύο περιόδων της επιτάχυνσης, θα πρέπει να υπάρχει μια περίοδος επιβραδυντικής διαστολής, έτσι ώστε η πιο συμβατικές κοσμολογικές εποχές της κυριαρχίας της ακτινοβολίας και της κυριαρχίας της ύλης να μπορούν να λάβουν χώρα. Πράγματι, υπάρχουν αυστηρά παρατήρησιακά όρια για τις αφθονίες των ελαφρών στοιχείων, όπως το δευτέριο, το ήλιο και το λίθιο, οι οποίες απαιτούν την θεωρία της Νουκλεοσύνθεσης της μεγάλης έκρηξης (Big Bang Nucleosynthesis, BBN), η παραγωγή των πυρήνων βαρύτερων από το υδρογόνο, λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της εποχής που κυριαρχούσε η ακτινοβολία [35, 36]. Από την άλλη πλευρά, μια εποχή κυριαρχίας της ύλης απαιτείται για να λάβει χώρα ο σχηματισμός δομών, όπως οι γαλαξίες. Παρατηρήσεις οι οποίες προβληματίζουν έρχονται συνεχώς από διάφορους τομείς. Η σκοτεινή ύλη δεν κάνει όχι μόνο την εμφάνισή της σε κοσμολογικά δεδομένα, αλλά και σε αστροφυσικές παρατηρήσεις. Το ερώτημα της "ελλείπουσας μάζα" είχε ήδη τεθεί ήδη για τα σμήνη των γαλαξιών [37] και για μεμονωμένους γαλαξίες [38] και μια ικανοποιητική τελική απάντηση βρίσκεται σε εκκρεμότητα [39, 40, 41, 42, 43, 44]. Ένα, λοιπόν, πρέπει να παραδεχτούμε ότι η ισχύουσα εικόνα της εξέλιξης και το ποσοστό ενέργειας/μάζας του σύμπαντος είναι τουλάχιστον εντυπωσιακή και χρειάζεται μία εξήγηση.

Το απλούστερο μοντέλο που ταιριάζει επαρκώς τα δεδομένα που δημιουργούν αυτή την εικόνα είναι το λεγόμενο μοντέλο αντιστοιχίας ή ΛCDM (Λ-Cold Dark Matter), συμπληρώνεται από κάποιο πληθωριστικό σενάριο, συνήθως με βάση κάποιο βαθμωτό πεδίο που ονομάζεται inflaton. Άλλωστε δεν εξηγεί την προέλευση του inflaton ή τη φύση της σκοτεινής ύλης από μόνη της, το μοντέλο ΛCDM επιβαρύνεται με τα γνωστά προβλήματα της κοσμολογικής σταθεράς [45, 46]: το πρόβλημα του μεγέθους της κοσμολογικής σταθεράς, σύμφωνα με την οποία η παρατηρούμενη τιμή της είναι εξαιρετικά μικρή για να αποδοθεί στην ενέργεια του κενού των πεδίων ύλης, και το πρόβλημα της σύμπτωσης, η οποία μπορεί να συνοψιστεί στο ερώτημα: αφού υπάρχει μόνο ένα εξαιρετικά σύντομο χρονικό διάστημα στην εξέλιξη του σύμπαντος στο οποίο η ενέργεια πυκνότητα της κοσμολογικής σταθεράς είναι συγκρίσιμες με αυτή της ύλης, γιατί είναι αυτό που συμβαίνει σήμερα τώρα που είμαστε παρόντες για να το παρατηρήσουμε; Τα προβλήματα αυτά καθιστούν το μοντέλο ΛCDM περισσότερα από μία εμπειρική προσαρμογή στα δεδομένα των οποίων το θεωρητικό κίνητρο μπορεί να θεωρηθεί ως πολύ κακό. Κατά συνέπεια, έχουν υπάρξει πολλές προσπάθειες είτε άμεσα να παρακινήσει την παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς ή να προτείνει εναλλακτικές λύσεις δυναμικών στη σκοτεινή ενέργεια. Δυστυχώς, καμία από αυτές τις προσπάθειες είναι χωρίς προβλήματα. Για παράδειγμα, η λεγόμενη ανθρωπική αιτιολογία για το μέγεθος του Λ [47, 48], ακόμα και όταν τοποθετείται σε σταθερότερα θεμέλια μέσα από την ιδέα της «ανθρωπικής ή το τοπίο των (υπερ)χορδών" [49], κάνει ακόμα πολλούς φυσικούς να αισθάνονται άβολα λόγω πιθανολογική φύση της. Από την άλλη πλευρά, απλά σενάρια για δυναμική σκοτεινή ενέργεια, όπως η πεμπτουσία [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57] δεν φαίνεται να είναι, καθώς και θεωρητικά κίνητρα όπως θα επιθυμούν. Μια άλλη προοπτική για την επίλυση των ζητημάτων που περιγράφονται ανωτέρω, η οποία μπορεί να φανεί ως πιο ριζοσπαστική σε κάποιους, είναι η εξής: η βαρύτητα είναι μακράν η κυρίαρχη αλληλεπίδραση σε κοσμολογικές κλίμακες και, ως εκ τούτου, είναι η δύναμη που διέπει την εξέλιξη του σύμπαντος. Θα μπορούσε να είναι ότι η περιγραφή μας της βαρυτικής αλληλεπίδρασης στις σχετικές κλίμακες δεν είναι αρκετά επαρκής και βρίσκεται στη ρίζα όλων ή ορισμένων από αυτά τα προβλήματα. Θα πρέπει να εξετάσει το ενδεχόμενο τροποποίησης της θεωρία της βαρύτητας μας και αν ναι, θα βοηθήσει αυτό στην αποφυγή σκοτεινών όρων και απαντώντας στους γρίφους της κοσμολογίας και της αστροφυσικής. Επιπλέον οι τροποποιημένες θεωρίες σε συνδυασμό με τα πειραματικά δεδομένα που προέρχονται από το πείραμα BICEP2 [58, 59] ανοίγουν τον δρόμο για την επιβεβαίωση της θεωρίας του πληθωρισμού καθώς και τις κβάντωσης του βαρυτικού πεδίου, τα βαρυτικά κύματα θεωρούνται υπαίτια για τις ανομοιογένειες του σύμπαντος καθώς και κατάλοιπο των κβαντικών διακυμάνσεων του πρώιμου θερμού σύμπαντος, η οποία θα φέρει τους επιστήμονες ένα βήμα πιο κοντά στην ενοποίηση των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων

Είναι μάλλον άσκοπο να αμφισβητηθεί αν μια τέτοια προοπτική θα είναι καλύτερη ή χειρότερη από ό,τι οποιαδήποτε από τις άλλες λύσεις που έχουν ήδη προταθεί. Είναι σίγουρα ένας διαφορετικός τρόπος για να αντιμετωπίσει τα ίδια προβλήματα και, εφ'όσον αυτά τα προβλήματα δεν μπορούν να βρουν μια εύλογη, καλά αποδεκτή και απλή, λύση, αξίζει να επιδιώκουν όλες τις εναλλακτικές λύσεις. Επιπλέον, αμφισβητώντας την ίδια τη θεωρία της βαρύτητας έχει σίγουρα πλεονεκτήματα της: μας βοηθά να αποκτήσουμε μια βαθύτερη κατανόηση των σχετικών θεμάτων και της βαρυτικής αλληλεπίδρασης, έχει υψηλές πιθανότητες να οδηγήσει σε μια νέα φυσική και έχει λειτουργήσει στο παρελθόν. Υπενθυμίζεται ότι η μετάπτωση της τροχιάς του Ερμή είχε αρχικά αποδοθεί σε κάποια απαρατήρητο («σκοτεινό») πλανήτη σε τροχιά εντός της τροχιάς του Ερμή, αλλά στην πραγματικότητα αποτέλεσε το πέρασμα από τη *Newtonian* βαρύτητα στην γενική θεωρία της σχετικότητας ούτως ώστε να εξηγηθεί.

4.2.2 Generalized *Einstein – Hilbert* action

Μία γενίκευση της δράσης *Einstein – Hilbert* είναι να θεωρήσουμε ότι η *Lagrangian* δεν είναι η βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* αλλά μία συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση αυτής. Η επιλογή αυτή έχει πλεονεκτήματα διότι πρόκειται για εύκολα διαχειρίσιμη επέκταση, θα μπορούσαμε να πάρουμε για *Lagrangian* βαθμωτές ποσότητες όπως η $\mathbf{R}_{\mu\nu}\mathbf{R}^{\mu\nu}$ ή $\mathbf{R}_{\mu\nu\xi\rho}\mathbf{R}^{\mu\nu\xi\rho}$ οι οποίες είναι σαφώς δυσκολότερες στον χειρισμό τους, η οποία δίνει θεωρητικές προβλέψεις για την φυσική υψηλών ενεργειών, επανακανονικοποιήσιμα *Feynman*, όπου είναι ένα ισχυρό κίνητρο για τέτοιου είδους επεκτάσεις Άρα χωρίς να θεωρούμε μία τέτοια επέκταση είτε λανθασμένη είτε ορθή θα εργαστούμε ούτως ώστε να την επιβεβαιώσουμε ή να την απορρίψουμε άλλωστε αποτελεί μία εύλογη επιλογή ως toy model.

$$\mathcal{S}_{E-H} = \frac{1}{2k^2}\int \mathbf{R}\sqrt{-g}d^4x$$

Από την απλή δράση *Einstein – Hilbert* αντικαθιστούμε την βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* με την συνάρτηση $f(\mathbf{R})$ αυτής και έτσι έχουμε.

$$\mathcal{S}_{GE-H} = \frac{1}{2k^2}\int f(\mathbf{R})\sqrt{-g}d^4x$$

Μεταβολή γενικευμένης δράσης

Συνεπώς θα εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης για την εν λόγω δράση κάνοντας την μεταβολή όπως ακριβώς και στην δράση *Einstein – Hilbert*. Από τον ορισμό της δράσης έχουμε την παρακάτω σχέση από την οποία μεταβάλλοντας την θα προκύψει μία γενικευμένη εξίσωση βαρύτητας η οποία λόγω της συναρτησιακής σχέσης της $\mathbf{R}$ θα προσθέτει επιπλέον όρους στην γνωστή εξίσωση του *Einstein*. Ουσιαστικά προκύπτει μία εξίσωση η οποία έχει ένα δυναμικό που εξαρτάται από την f και τις παραγώγους της.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{GE-H} =& \frac{1}{2k^2}\int f(\mathbf{R})\sqrt{-g}d^4x \\
\delta\mathcal{S}_{GE-H} =& \frac{1}{2k^2}\int \delta(f(\mathbf{R})\sqrt{-g})d^4x = \int \left\{(\delta f(\mathbf{R}))\sqrt{-g}) + f(\mathbf{R})(\delta\sqrt{-g})\right\} d^4x \\
=& \frac{1}{2k^2}\int \left\{\frac{df}{d\mathbf{R}}\delta\mathbf{R} - f\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right\}\sqrt{-g}d^4x \\
=& \frac{1}{2k^2}\int \left(f'(\mathbf{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu Z^\mu) - \frac{f}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x \\
\overset{2.7}{=}& \frac{1}{2k^2}\int \left(f'(\mathbf{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box^2\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}) - \frac{f}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x \\
=& \frac{1}{2k^2}\int (f'\mathbf{R}_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu)f' - \frac{f}{2}g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \Rightarrow \\
\frac{\delta\mathcal{S}_{GE-H}}{\partial\delta g^{\mu\nu}} =& f'\mathbf{R}_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box^2)f' - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f \\
=& f'\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f'\mathbf{R}g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}f'\mathbf{R}g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box^2)f' - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f \\
=& f'\mathfrak{G}_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box^2)f' + \frac{1}{2}(f'\mathbf{R} - f)g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Όπου προέκυψε η μία γενικευμένη εξίσωση *Einstein* για κενό χώρο από την γενικευμένη δράση που χρησιμοποιήσαμε. Εν συνεχεία θα προσθέσουμε μία δράση που περιέχει τους όρους ύλης και θα εξαγάγουμε μία γενικευμένη εξίσωση βαρύτητας για χώρο με ύλη.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} =&\mathcal{S}_{GE-H} + \mathcal{S}_{Matt} = \frac{1}{2k^2}\int f(\mathbf{R})\sqrt{-g}d^4x + \int \mathcal{L}_{Matt}(g_{\mu\nu},\Psi)\sqrt{-g}d^4x \Rightarrow \\
\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} =&\frac{\delta\mathcal{S}_{GE-H}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta\mathcal{S}_{Matt}}{\delta g^{\mu\nu}} \Rightarrow f'\mathfrak{G}_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box^2)f' + \frac{1}{2}(f'\mathbf{R} - f)g_{\mu\nu} = k^2\mathfrak{T}_{\mu\nu} \\
k^2 g^{\mu\nu}\mathfrak{T}_{\mu\nu} =&f'g^{\mu\nu}\mathfrak{G}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box^2)f' + \frac{1}{2}(f'\mathbf{R} - f)g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \Rightarrow k^2\mathfrak{T} = (\mathbf{R} + 3\Box^2)f' - 2f \\
\mathfrak{G}_{\mu\nu} =&\frac{1}{f'}\left((\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box^2)f' - \frac{1}{2}(f'\mathbf{R} - f)g_{\mu\nu} + k^2\mathfrak{T}_{\mu\nu}\right) \\
=&\frac{1}{f'}((\nabla_\mu\nabla_\nu f' - g_{\mu\nu}\frac{1}{3}(k^2\mathfrak{T} - \mathbf{R}f' + 2f) - \frac{1}{2}(f'\mathbf{R} - f)g_{\mu\nu} + k^2\mathfrak{T}_{\mu\nu}) \\
=&\frac{1}{f'}((\nabla_\mu\nabla_\nu f') - \frac{1}{6}(f'\mathbf{R} + f)g_{\mu\nu} + k^2(\mathfrak{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}\mathfrak{T})) \\
=&\frac{k^2}{f'}(\mathfrak{T}_{\mu\nu} + \mathfrak{T}^{eff}_{\mu\nu}) = G_{eff}(\mathfrak{T}_{\mu\nu} + \mathfrak{T}^{eff}_{\mu\nu}) \\
\mathfrak{T}^{eff}_{\mu\nu} \equiv&\frac{1}{k^2}\left((\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box^2)f' - \frac{1}{2}(f'\mathbf{R} - f)g_{\mu\nu}\right) \\
G_{eff} \equiv&\frac{k^2}{f'}
\end{aligned}
$$

Η εξίσωση που προέκυψε μας δίνει την εξίσωση *Einstein* με ένα ενεργό τανυστή ενέργειας ορμής ο οποίος οφείλεται στις παραγώγους της συνάρτησης f, η συνάρτηση που εισήχθη για *Langrangian* στην δράση, όπως παρατηρούμε ο τανυστής αυτός δεν έχει την συνήθη μορφή, δηλαδή δεν αποτελείται από τετραγωνικούς όρους του πεδίου f' αλλά περιέχει και γραμμικούς όρους ως προς τις δεύτερες παραγώγους του πεδίου. Επίσης προέκυψε G_{eff} η οποία απότελεί ενεργό ζεύξη με το βαρυτικό πεδίο.

Ισοδυναμία $f(\mathbf{R})$ με την θεωρία *Brans – Dicke*

Με τον ίδιο τρόπο που μπορεί κανείς να κάνει επαναπροσδιορισμούς των μεταβλητών στην κλασική μηχανική, προκειμένου να φέρει μια εξίσωση που περιγράφει ένα σύστημα σε μία πιο ελκυστική, ή εύκολο να το χειριστεί, μορφή (με παρόμοιο τρόπο με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων), μπορεί κανείς να εκτελέσει επαναπροσδιορισμούς των πεδίων σε μια θεωρία πεδίου, προκειμένου να ξαναγράψει την δράση ή τις εξισώσεις πεδίου. Δεν υπάρχει μοναδική συνταγή για τον επανακαθορισμό των πεδίων μιας θεωρίας. Κάποιος μπορεί να εισαγάγει βοηθητικά πεδία,να εκτελέσει επανακανονικοποιήσεις ή σύμμορφους μετασχηματισμούς, ή ακόμα και απλά να επαναπροσδιορίσει τα πεδία του. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι, τουλάχιστον σε μια κλασική προοπτική, όπως εκείνη που ακολουθείται εδώ, οι δύο θεωρίες θεωρούνται δυναμικά ισοδύναμες, εφόσον, σύμφωνα με ένα κατάλληλο επαναπροσδιορισμό των βαρυτικών και των υλικών πεδίων, μπορεί κανείς να κάνει εξισώσεις πεδίου τους να συμπίπτουν. Η ίδια κατάσταση μπορεί να γίνει στο επίπεδο της δράσης. Δυναμικά ισοδύναμες θεωρίες δίνουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα όταν περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα, το οποίο εμπίπτει στο πεδίο εφαρμογής αυτών των θεωριών. Υπάρχουν σαφή πλεονεκτήματα για την εξερεύνηση της δυναμικής ισοδυναμίας μεταξύ των θεωριών: μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που έχουν ήδη προκύψει για μία θεωρία για τη μελέτη της σε άλλη, ισοδύναμη, θεωρία.Ο όρος "δυναμική ισοδυναμία" μπορεί να θεωρηθεί παραπλανητικός στην κλασική βαρύτητα. Μέσα σε μια κλασική προοπτική, μια θεωρία περιγράφεται πλήρως από ένα σύνολο εξισώσεων πεδίου. Όταν αναφερόμαστε σε θεωρίες της βαρύτητας, οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τη δυναμική των συστημάτων που έλκονται. Ως εκ τούτου, οι δύο δυναμικά ισοδύναμες θεωρίες είναι πραγματικά ακριβώς διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας θεωρίας (που καθιστά σαφές ότι όλα επιτρέπονται, οι αναπαραστάσεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν επί ίσοις όροις.). Το ζήτημα της διάκρισης μεταξύ δύο πραγματικά διαφορετικών θεωριών και διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας θεωρίας (ή δυναμικά ισοδύναμων θεωριών) είναι μια αρκετά περίπλοκη διαδικασία. Θα έχει σοβαρές επιπτώσεις και υπήρξε η αιτία πολλών παρανοήσεων στο παρελθόν, ειδικά όταν οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται προκειμένου να επαναπροσδιοριστούν τα πεδία, π.χ. στα πλαίσια *Einstein* και *Jordan* που εφαρμόζονται σε βαθμωτές-τανυστικές θεωρίες [60], δεδομένου ότι αντιμετωπίζονται με προσοχή, επαναπροσδιορισμοί των πεδίων και για διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας θεωρίας είναι απολύτως νόμιμοι και αποτελούν πολύ χρήσιμα εργαλεία για την κατανόηση των βαρυτικών θεωριών Συνεπώς ξεκινώντας από την γενικευμένη δράση και κάνοντας ανάπτυξη κατά *Taylor* της συνάρτησης f, ως και πρώτης τάξης, παίρνουμε τα παρακάτω.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{GE-H} =& \frac{1}{2k^2}\int f(\mathbf{R})\sqrt{-g}d^4x + \mathcal{S}_{Matt}(g_{\mu\nu},\Psi)\\
\approx& \frac{1}{2k^2}\int (f(\chi)+f_\chi(\mathbf{R}-\chi))\sqrt{-g}d^4x + \mathcal{S}_{Matt}(g_{\mu\nu},\Psi) \underset{f_{\mathbf{RR}}\neq 0}{\overset{\delta\mathcal{S}_{GE-H}=0}{\Rightarrow}}\\
\delta\mathcal{S}_{GE-H} =& \frac{1}{2k^2}\int (f_\chi\delta\chi + f_{\chi\chi}(\mathbf{R}-\chi)\delta\chi - f_\chi\delta\chi)\sqrt{-g}d^4x + \delta\mathcal{S}_{Matt}(g_{\mu\nu},\Psi) \Rightarrow \chi = \mathbf{R}\\
\mathcal{S}_{GE-H} \overset{\Phi=f_\chi}{=}& \frac{1}{2k^2}\int (\Phi\mathbf{R} - V(\Phi))\sqrt{-g}d^4x + \mathcal{S}_{Matt}(g_{\mu\nu},\Psi),\ V(\Phi) = \chi f_\chi - f(\chi)
\end{aligned}$$

Όπου προέκυψε μία δράση παρόμοια με την *Brans − Dicke*. Αυτή είναι η αναπαράσταση της δράσης στο πλαίσιο *Jordan* μιας θεωρίας *Brans − Dicke* με *Brans − Dicke* παράμετρο $\omega_0 = 0$. Ένα $\omega_0 = 0$ θεωρία *Brans − Dicke* [μερικές φορές ονομάζεται "μαζική βαρύτητα dilaton" [61] η οποία είχε αρχικά προταθεί από τον O'Hanlon [62] προκειμένου να δημιουργήσει έναν όρο *Yukawa* στο *Newtonian* όριο και έχει κατά καιρούς εξεταστεί στην βιβλιογραφία [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70]. Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο βαθμωτός βαθμός ελευθερίας $\phi = f'(\chi)$ είναι αρκετά διαφορετική από ένα υλικό πεδίο, για παράδειγμα, όπως και όλα τα μη ελάχιστα συζευγμένα βαθμωτά πεδία, μπορεί να παραβιάσει όλες τις προϋποθέσεις ενέργειας [18]. Οι εξισώσεις πεδίο που αντιστοιχούν στην προκύπτουσα δράση *Brans − Dicke* είναι.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{\mu\nu} =& \frac{1}{\phi}((\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box^2\phi) - \frac{1}{2\phi}V(\phi)g_{\mu\nu} + \frac{k^2}{\phi}\mathfrak{T}_{\mu\nu}\\
\frac{k^2}{\phi}\mathfrak{T} =& 3\Box^2\phi + 2V(\phi) - \phi\frac{dV(\phi)}{d\phi}
\end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει η δυναμική του συστήματος για δοσμένα υλικά πεδία. Τέλος, ας αναφέρουμε ότι, ως συνήθως, σε θεωρία *Brans − Dicke* και πιο γενικές βαθμωτές-τανυστικές θεωρίες, μπορεί κανείς να εκτελέσει ένα σύμμορφο μετασχηματισμό και να ξαναγράψει τη δράση *Brans − Dicke* σε αυτό που ονομάζεται πλαίσιο *Einstein*, σε αντίθεση με το πλαίσιο *Jordan*. Συγκεκριμένα, εκτελώντας τον σύμμορφο μετασχηματισμό έχουμε.

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} \to& \tilde{g}_{\mu\nu} = f'(\mathbf{R})g_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}\\
d\tilde{\phi} =& \sqrt{\frac{2+3\omega_0}{2k^2}}\frac{d\phi}{\phi}
\end{aligned}$$

με μια βαθμωτή-τανυστική θεωρία να αντιστοιχίζεται μέσα στο πλαίσιο *Einstein* στο οποίο το "νέο" βαθμωτό πεδίο ϕ συζευγνύεται ελάχιστα με την καμπυλότητα *Ricci* και έχει κανονική κινητική ενέργεια, όπως περιγράφεται από τη βαρυτική δράση. Για την ολική δράση προσθέτουμε επιπλέον τα υλικά πεδία

$$\mathcal{S} = \int \Big(\frac{\tilde{\mathbf{R}}}{2k^2} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\tilde{\phi}\nabla^\mu\tilde{\phi} - U(\tilde{\phi})\Big)\sqrt{\tilde{g}}d^4x \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\phi \overset{\omega_0=0}{\equiv}& f'(\mathbf{R}) = e^{\sqrt{\frac{2k^2}{3}}\tilde{\phi}}\\
U(\tilde{\phi}) =& \frac{\mathbf{R}f'(\mathbf{R}) - f(\mathbf{R})}{2k^2(f'(\mathbf{R}))^2}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \int \Big(\frac{\tilde{\mathbf{R}}}{2k^2} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\tilde{\phi}\nabla^\mu\tilde{\phi} - U(\tilde{\phi})\Big)\sqrt{\tilde{g}}d^4x + \mathcal{S}_{Matt}(e^{-\sqrt{\frac{2k^2}{3}}\tilde{\phi}}\tilde{g}_{\mu\nu},\Psi) \tag{4.4}$$

Κοσμολογικές εποχές

Όπως αναφέρεται στην εισαγωγή, η πρόσφατη πυρετώδης θεωρητική δραστηριότητα στα $f(\mathbf{R})$ μοντέλα απορρέει από την ανάγκη μας να εξηγήσουμε τη σημερινή επιτάχυνση του σύμπαντος που ανακαλύφθηκε από τους υπερκαινοφανής τύπου Ia [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79]. Είναι ήδη γνωστό από τα $\mathbf{R}^2$-πληθωριστικά σενάρια του πρώιμου σύμπαντος ότι είναι δυνατή η κοσμική επιτάχυνση, κι έτσι είμαστε πράγματι μάρτυρες μιας ανάστασης αυτής της θεωρητική δυνατότητας σε μοντέλα του πρόσφατου σύμπαντος- αυτό είναι παράλληλη με την χρήση των βαθμωτών πεδίων να οδηγούν στου αρχικού σταδίου πληθωρισμό ή πρόσφατη επιτάχυνση των μοντέλων της πεμπτουσίας. Υπάρχουν, επίσης, προσπάθειές για την ενοποίησή του πρώιμου πληθωρισμού και στην πρόσφατη επιτάχυνση του σύμπαντος σε θεωρίες τροποποιημένης βαρύτητας [80, 81]. Ωστόσο, οποιοδήποτε μοντέλο προσπαθεί να εξηγήσει την κοσμική επιτάχυνση σε μεταγενέστερους χρόνους δεν θα πρέπει να χαλάσει τις επιτυχίες του καθιερωμένου κοσμολογικού μοντέλου που απαιτεί μια συγκεκριμένη ακολουθία των εποχών που δίδεται παρακάτω.

1. Πρώιμος πληθωρισμός
2. Εποχή ακτινοβολίας κατά την οποία λαμβάνει χώρα η πυρηνοσυνθεση της μεγάλης έκρηξης, Big Bang Nucleosynthesis (BBN).
3. Εποχή ύλης
4. Παροντική επιτάχυνση του σύμπαντος
5. Μελλοντική εποχή

έτσι τα διάφορα μοντέλα βαρύτητας πρέπει να τηρούν αυτήν την σειρά των εποχών ούτως ώστε να θεωρούνται αξιόπιστα.

4.3 Ένα παράδειγμα της R^2 θεωρίας βαρύτητας σε Mixmaster κοσμολογικό μοντέλο.

Μια εφαρμογή της $f(\mathbf{R})$ θεωρίας για την βαρύτητα είναι να θεωρήσουμε την τετραγωνική μορφή της βαθμωτής καμπυλότητας *Ricci* και να την εφαρμόσουμε σε συγκεκριμένο μοντέλο αυτό του Mixmaster. Για αρχή παίρνουμε την μετρική του χώρου για το εν λόγω μοντέλο.

$$\begin{aligned} ds^2 =& -dt^2 + h_{mn}\omega_m\omega_n,\ h_{mn} = diag(\alpha^2(t), \beta^2(t), \gamma^2(t)) \\ \det h =& \alpha^2(t)\beta^2(t)\gamma^2(t) = S^6 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Από τις εξισώσεις πεδίου για τον κενό χωρόχρονο εφαρμοσμένες στο μοντέλο Mixmaster έχουμε τις παρακάτω σχέσεις.

$$3\Box^2 2\mathbf{R} = -\mathbf{R}2\mathbf{R} + 2\mathbf{R}^2 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{h}}\partial_\mu(\sqrt{h}\partial^\mu \mathbf{R}) = 0 \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)}{=} \partial_0(S^3\partial^0\mathbf{R}) = 0 \Rightarrow 3\frac{\dot{S}}{S}\dot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{R}} = 0 \\ \frac{\partial \ln \dot{\mathbf{R}}}{\partial t} =& -3\frac{\partial \ln S}{\partial t} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{S^3} \\ \frac{d\tau}{dt} =& \frac{1}{S^3} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{S^3} \Rightarrow \mathbf{R} = \tau \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\mu\nu} =& \frac{1}{2\mathbf{R}}\left(2\nabla_\mu\nabla_\nu\mathbf{R} - \frac{1}{2}(2\mathbf{R}^2\mathbf{R} - \mathbf{R}^2)g_{\mu\nu}\right) \\ =& \nabla_\mu\nabla_\nu \ln\mathbf{R} + \nabla_\mu \ln\mathbf{R}\nabla_\nu \ln\mathbf{R} - \frac{1}{4}\mathbf{R}g_{\mu\nu} \\ \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathbf{R}g_{\mu\nu} =& \nabla_\mu\nabla_\nu \ln\mathbf{R} + \nabla_\mu \ln\mathbf{R}\nabla_\nu \ln\mathbf{R} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Λύσεις τις παραπάνω εξίσωσης δίνονται από την εξίσωση $\mathbf{R}_{\mu\nu} = 0$ συνεπώς προκύπτουν οι εξισώσεις 3.72. Κάτω από αναπαραμετρικοποίηση των α, β, γ σύμφωνα με τις σχέσεις $\alpha = e^a, \beta = e^b, \gamma = e^c, d = a + b + c$

$$\tau\ddot{a} + \dot{a} - \frac{\tau}{2}((e^{2b} - e^{2c})^2 - e^{4a}) + \frac{\tau^2}{4}e^{2d} = 0 \tag{4.9α'}$$

$$\tau\ddot{b} + \dot{b} - \frac{\tau}{2}((e^{2a} - e^{2c})^2 - e^{4b}) + \frac{\tau^2}{4}e^{2d} = 0 \tag{4.9β'}$$

$$\tau\ddot{c} + \dot{c} - \frac{\tau}{2}((e^{2b} - e^{2a})^2 - e^{4c}) + \frac{\tau^2}{4}e^{2d} = 0 \tag{4.9γ'}$$

$$\ddot{d} - 2(\dot{a}\dot{b} + \dot{a}\dot{c} + \dot{b}\dot{c}) + \frac{\tau}{4}e^{d} = 0 \tag{4.9δ'}$$

Οι εξισώσεις που προκύπτουν αν θεωρήσουμε την οριακή κατάσταση $\tau \to 0$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις οι οποίες αποτελούν τις εξισώσεις για το *Bianchi I* κοσμολογικό μοντέλο για $\mathbf{R}^2$ θεωρία βαρύτητας [82].

$$\tau\ddot{a} + \dot{a} + \frac{\tau^2}{4}e^{2d} = 0 \tag{4.9ε'}$$

$$\tau\ddot{b} + \dot{b} + \frac{\tau^2}{4}e^{2d} = 0 \tag{4.9ϛ'}$$

$$\tau\ddot{c} + \dot{c} + \frac{\tau^2}{4}e^{2d} = 0 \tag{4.9ζ'}$$

$$\ddot{d} - 2(\dot{a}\dot{b} + \dot{a}\dot{c} + \dot{b}\dot{c}) + \frac{\tau}{4}e^{d} = 0 \tag{4.9η'}$$

όπου οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων δίνονται.

$$e^{-d} = \sqrt{\frac{3}{4n}}\tau^{\frac{3}{2}}(C\tau^n + C^{-1}\tau^{-n}) \tag{4.10}$$

$$\{a, b, c\} = e^{\frac{d}{3}}\{\tau^{\nu_1}, \tau^{\nu_2}, \tau^{\nu_3}\} \tag{4.11}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι οι λύσεις για το κενό της $\mathbf{R}^2$ θεωρίας για την βαρύτητα είναι οι ίδιες με αυτές για την απλή, $\mathbf{R}$, θεωρία του *Einstein*. Συγκεκριμένα αυτό συνεπάγεται ότι η χαοτική συμπεριφορά του μοντέλου Mixmaster θα υπάρχει και στο συγκεκριμένο μοντέλο. Όπως έχει δειχθεί ότι η λύση είναι ασταθής στην προσθήκη υψηλότερης τάξης παραγώγων που εμφανίζονται στις εξισώσεις πεδίου στην θεωρία του *Einstein*. Οι όροι αυτοί δημιουργούν επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας για τις εξισώσεις. Η πιο γενική λύση των εξισώσεων του *Einstein* σε ένα σύγχρονο σύστημα συντεταγμένων απαιτεί τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις για τις τρεις χωρικές μεταβλητές που πρέπει να ορίζονται σε μία επιφάνεια *Cauchy* σταθερού χρόνου. Το πιο γενικό χαοτικό μοντέλο Mixmaster, για τον κενό χώρο, μπορεί να προσδιοριστεί από τέσσερις αυθαίρετες σταθερές διότι είναι χωρικά ομοιογενές.

Οι επιπλέον βαθμοί ελευθερίας που στη θεωρία του $\mathbf{R}^2$ καθιστούν τη συγκεκριμένη χαοτική λύση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας σσταθή σε μονοτονική συμπεριφορά τύπου *Kasner*. Από την σκοπιά της *Hamiltonian* ανάλυσης για το μοντέλο Mixmaster ως η κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα συστολικό, ουσιαστικά κλειστό, δυναμικό καθώς ο χρόνος τείνει στο μηδέν $t \to 0$, η επίδραση του όρου $\mathbf{R}^2$ είναι να επιβραδύνει την κίνηση του σωματιδίου σχετικά με τα τοιχώματα του δυναμικού οπότε τείνει ποτέ να μην φθάνει σε αυτά. Συνεπώς δεν λαμβάνουν χώρα ταλαντώσεις και έτσι η εξέλιξη του συστήματος παραμένει να είναι η χαρακτηριστική τύπου *Kasner*, δηλαδή μοντέλο χωρίς δυναμικό.

Επίλογος

Τελειώνοντας την εν λόγω εργασία έχω αποκομίσει πολλά εργαλεία για τις διάφορες βαρυτικές θεωρίες καθώς και εμπειρία επάνω σε θέματα που αφορούν την σύγχρονη επιστήμη της φυσικής. Παρουσιάζεται μεγάλο ενδιαφέρον στην εξέλιξη του σύμπαντος ειδικότερα τον τελευταίο καιρό που τα πειράματα, *Planck* και BICEP-2, τροφοδοτούν συνεχώς με νέα δεδομένα τα οποία επιβεβαιώνουν, ή απορρίπτουν, θεωρίες για την εξέλιξη του σύμπαντος κάτι το οποίο υποχρεώνει την εύρεση νέων θεωριών ή την ενίσχυση των ήδη υπαρχουσών.

Συγκεκριμένα η ταξινόμηση των κοσμολογιών κατά *Bianchi* και η μελέτη αυτών μέσω του ADM φορμαλισμού αποκαλύπτει την χαοτική συμπεριφορά δύο εξ αυτών η οποία φαινομενικά θα ήταν απροσδόκητη επίσης μας δίνει έναν αξιόπιστο φορμαλισμό για την μελέτη και άλλων φαινομένων, κλασικών ή κβαντικών. Η χαοτική συμπεριφορά αυτών των μοντέλων καταλήγουμε ότι δίνει μία πιο βαθιά εικόνα για τα συγκεκριμένα μοντέλα τα οποία είναι εγγενώς δύο σχετικιστηκά μοντέλα και οφείλουν την εν λόγω συμπεριφορά στις ανισοτροπίες των δύο μοντέλων.

Τέλος η μελέτη εκτεταμένων θεωριών βαρύτητας όπως *Brans* − *Dicke* ή $f(\mathbf{R})$ δίνουν νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της επιστήμης. Αυτές οι δύο θεωρίες αποτελούν τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος και δίνουν ενδιαφέροντα, τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά, αποτελέσματα είναι δύο θεωρίες οι οποίες επιτρέπουν την περαιτέρω μελέτη της βαρύτητας ακόμα και σε κβαντικό επίπεδο. Επίσης μοντέλα της $f(\mathbf{R})$ αποφεύγουν την θεωρία της μεγάλης έκρηξης και εξηγούν με εναλλακτικό τρόπο την γέννηση αυτού. Επίσης βασικό πλεονέκτημα που προσφέρουν τέτοιου είδους θεωρίες είναι ότι μας δίνουν αποτελέσματα για το σύμπαν όπως είναι η σκοτεινή ενέργεια η οποία αποτελεί ένα ανεξερεύνητο κομμάτι του σύμπαντος και είναι πρόβλημα για πολλά χρόνια στον κλάδο της κοσμολογίας.

Μελλοντικά μπορούν τα αυτά μοντέλα να περιγράψουν μία θεωρία για την κοσμολογία, και γιατί όχι μία κβαντική θεωρία για την βαρύτητα,η οποία να συμφωνεί με τα πειράματα και να προβλέπει την αρχή και την εξέλιξη του σύμπαντος. Επίσης μπορεί επεκταμένες θεωρίες όπως αυτές να δίνουν ακριβή περιγραφή και για την σκοτεινή ύλη που κατακλύζει το σύμπαν.

Appendix A

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε τις εξισώσεις *Gauss − Codazzi* μέσω των οποίων θα ορίσουμε την βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* σε όρους της εξωτερικής γεωμετρίας. κατ'αρχάς ορίζουμε τα εφαπτόμενα και τα κάθετα διανύσματα μέσω των οποίων προκύπτουν οι εξισώσεις *Gauss − Codazzi*. Στην συνέχεια θα εκφράσουμε την βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* των τεσσάρων διαστάσεων μέσω της βαθμωτής καμπυλότητας *Ricci* των τριών διαστάσεων και κάποιων επιπλέον όρων.

Εξωτερική Γεωμετρία

Για την εξωτερική γεωμετρία πρέπει να ορίσουμε τα εφαπτόμενα ($e^{\mu}{}_{m}$) και τα καθετα διανύσματα (n^{μ}) καθώς και την συναλλοίωτη παράγωγο (D_m) μέσω των οποίων ορίζονται οι κύριες καμπυλότητες (K_{mn}). Συνεπώς έχουμε

$$x^{\alpha} = (\tau, y^{\alpha}) \;\&\; u^{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau} \;\&\; e^{\mu}{}_{m} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{m}} \tag{12}$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{m}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{n}} dy^{m} dy^{n} = h_{mn} dy^{m} dy^{n}, \;\; h_{mn} \equiv g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{m}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{n}} \tag{13}$$

$$\begin{cases} u_{\alpha} u^{\alpha} = -1 \;\&\; u^{\beta} \nabla_{\beta} u^{\alpha} = 0 \;\&\; \xi^{\beta} \nabla_{\beta} u^{\alpha} = u^{\beta} \nabla_{\beta} \xi^{\alpha} \;\&\; u_{\alpha} \xi^{\alpha} = 0 & \text{Χρονοειδής Γεωδαισιακή} \\ k_{\alpha} k^{\alpha} = -1 \;\&\; k^{\beta} \nabla_{\beta} k^{\alpha} = 0 \;\&\; \xi^{\beta} \nabla_{\beta} k^{\alpha} = k^{\beta} \nabla_{\beta} \xi^{\alpha} \;\&\; k_{\alpha} \xi^{\alpha} = 0 & \text{Φωτοειδής Γεωδαισιακή} \end{cases} \tag{14}$$

$$n^{\alpha} n_{\alpha} = \epsilon = \begin{cases} -1 & \Sigma \text{ Χωροειδής} \\ +1 & \Sigma \text{ Χρονοειδής} \end{cases} \tag{15}$$

$$y^{m} = (\lambda, \theta^{A}) \;\&\; e^{\mu}{}_{A} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \theta^{A}} \;\&\; k_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \lambda} \;\&\; k_{\alpha} N^{\alpha} = -1 \;\&\; N_{\alpha} e^{\alpha}{}_{A} = 0$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta^{A}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \theta^{B}} d\theta^{A} d\theta^{B} = \sigma_{AB} d\theta^{A} d\theta^{B}, \;\; \sigma_{AB} \equiv g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta^{A}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \theta^{B}} \tag{16}$$

$$g^{\alpha\beta} = -k^{\alpha} N^{\beta} - k^{\beta} N^{\alpha} + \sigma^{AB} e^{\alpha}{}_{A} e^{\beta}{}_{B} \tag{17}$$

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + k_{\alpha} N_{\beta} + k_{\beta} N_{\alpha} \tag{18}$$

$$A^{\alpha} = A^{m} e^{\alpha}{}_{m} \;\&\; A^{\alpha} n_{\alpha} = 0 \;\&\; A_{m} = A_{\alpha} e^{\alpha}{}_{m} \tag{19}$$

$$D_m A_n = (\nabla_{\beta} A_{\alpha}) e^{\alpha}{}_{m} e^{\beta}{}_{n} \Rightarrow \nabla_{\beta} (A_{\alpha} e^{\alpha}{}_{m}) e^{\beta}{}_{n} - A_{\alpha} (\nabla_{\beta} e^{\alpha}{}_{m}) e^{\beta}{}_{n} = (\partial_{\beta} A_{m}) e^{\beta}{}_{n} - (\nabla_{\beta} e_{m\gamma}) e^{\beta}{}_{n} A^{l} e^{\gamma}{}_{l} \Rightarrow$$

$$D_m A_n = (\nabla_{\beta} A_{\alpha}) e^{\alpha}{}_{m} e^{\beta}{}_{n} = \partial_{\beta} A_{m} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{n}} - (\nabla_{\beta} e_{m\gamma}) e^{\beta}{}_{n} A^{l} e^{\gamma}{}_{l} = \partial_{n} A_{m} - \Gamma_{lmn} A^{l} = \partial_{n} A_{m} - \Gamma^{l}{}_{mn} A_{l}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{lmn} &\equiv (\nabla_\beta e_{m\gamma}) e^{\beta}{}_{n} e^{\gamma}{}_{l} && (20)\\
\nabla_\gamma h_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_{m} e^{\beta}{}_{n} e^{\gamma}{}_{l} &= \nabla_\gamma (g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta) e^{\alpha}{}_{m} e^{\beta}{}_{n} e^{\gamma}{}_{l} = -\epsilon((\nabla_\gamma n_\alpha) n_\beta + n_\alpha (\nabla_\gamma n_\beta)) e^{\alpha}{}_{m} e^{\beta}{}_{n} e^{\gamma}{}_{l} \Rightarrow \\
\nabla_\gamma h_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_{m} e^{\beta}{}_{n} e^{\gamma}{}_{l} &= -\epsilon((\nabla_\gamma n_\alpha) e^{\alpha}{}_{m} \cancelto{0}{n_\beta e^{\beta}{}_{n}} + (\nabla_\gamma n_\beta) e^{\beta}{}_{n} \cancelto{0}{n_\alpha e^{\alpha}{}_{m}}) e^{\gamma}{}_{l} = 0 \Rightarrow \\
\Gamma^{l}{}_{mn} &= \frac{1}{2} h^{lp} (\partial_m h_{pn} + \partial_n h_{mp} - \partial_p h_{mn}) && (20)\\
(\nabla_\beta A^\alpha) e^{\beta}{}_{n} &= g^{\alpha}{}_{\mu} (\nabla_\beta A^\mu) e^{\beta}{}_{n} = (\epsilon n^\alpha n_\mu + h^{mn} e^{\alpha}{}_{m} e_{n\mu}) (\nabla_\beta A^\mu) e^{\beta}{}_{n} \Rightarrow \\
(\nabla_\beta A^\alpha) e^{\beta}{}_{n} &= \epsilon n^\alpha (n_\mu (\nabla_\beta A^\mu) e^{\beta}{}_{n}) + h^{mn} e^{\alpha}{}_{m} ((\nabla_\beta A^\mu) g_{\mu\nu} e^{\nu}{}_{m} e^{\beta}{}_{n}) \\
(\nabla_\beta A^\alpha) e^{\beta}{}_{n} &= \epsilon n^\alpha (\nabla_\beta (\cancelto{0}{n_\mu A^\mu}) e^{\beta}{}_{n} - (\nabla_\beta n_\mu) A^\mu e^{\beta}{}_{n}) + h^{mn} e^{\alpha}{}_{m} ((\nabla_\beta A_\mu) e^{\mu}{}_{m} e^{\beta}{}_{n}) \Rightarrow \\
(\nabla_\beta A^\alpha) e^{\beta}{}_{n} &= (D_n A^m) e^{\alpha}{}_{m} - \epsilon A^m ((\nabla_\beta n_\mu) e^{\mu}{}_{m} e^{\beta}{}_{n}) n^\alpha = (D_n A^m) e^{\alpha}{}_{m} - \epsilon K_{mn} A^m n^\alpha && (21)\\
K_{mn} &\equiv ((\nabla_\beta n_\mu) e^{\mu}{}_{m} e^{\beta}{}_{n}) \overset{\substack{(\nabla_\beta e^{\mu}{}_{m}) e^{\beta}{}_{n} = \\ e^{\mu}{}_{m} (\nabla_\beta e^{\beta}{}_{n})}}{\underset{n_\alpha e^{\alpha}{}_{m} = 0}{=}} (\nabla_\beta (n_\mu e^{\mu}{}_{m}) e^{\beta}{}_{n}) - (n_\mu (\nabla_\beta e^{\mu}{}_{m}) e^{\beta}{}_{n}) = -(n_\mu (\nabla_\beta e^{\beta}{}_{n}) e^{\mu}{}_{m}) \\
&= -(\nabla_\beta (\cancelto{0}{n_\mu e^{\mu}{}_{m}}) e^{\beta}{}_{n}) + ((\nabla_\beta n_\mu) e^{\beta}{}_{n} e^{\mu}{}_{m}) = K_{nm} && (22)\\
K_{nm} &= \frac{1}{2} (\nabla_\beta n_\mu) e^{\beta}{}_{n} e^{\mu}{}_{m} + \frac{1}{2} (\nabla_\mu n_\beta) e^{\mu}{}_{n} e^{\beta}{}_{m} = \frac{1}{2} ((\nabla_\beta n_\mu) + (\nabla_\mu n_\beta)) e^{\beta}{}_{n} e^{\mu}{}_{m} = \frac{1}{2} (\mathfrak{L}_n g_{\beta\mu}) e^{\beta}{}_{n} e^{\mu}{}_{m} && (23)\\
H &= h^{mn} K_{mn} && (24)
\end{aligned}
$$

Εξισώσεις *Gauss − Codazzi*

Από τον ορισμό του τανυστή *Riemann* ως ο μεταθέτης των συναλλοίωτων παραγώγων (D_m). 'Εχουμε ό,τι προκύπτει ο τανυστής *Riemann* της μετρικής ($g_{\mu\nu}$) συναρτήσει του τανυστή *Riemann* της επαγώμενης μετρικής (h_{mn}). Τελικά οι εξισώσεις *Gauss − Codazzi* προκύπτουν προβάλοντας τους εν λόγω τανυστές στα κάθετα και εφαπτόμενα διανύσματα αντίστοιχα

$$
\begin{aligned}
[D_m, D_n] A^c &= -\mathcal{R}^{c}{}_{lmn} A^l,\ \mathcal{R}^{c}{}_{lmn} = \partial_m \Gamma^{c}{}_{nl} - \partial_n \Gamma^{c}{}_{lm} + \Gamma^{c}{}_{pm} \Gamma^{p}{}_{nl} - \Gamma^{c}{}_{pn} \Gamma^{p}{}_{lm} && (25)\\
(\nabla_\lambda ((\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n})) e^{\lambda}{}_{l} &= (\nabla_\lambda (\Gamma^{k}{}_{mn} e^{\mu}{}_{k} - \epsilon K_{mn} n^\mu)) e^{\lambda}{}_{l} \\
&= (\partial_\lambda \Gamma^{k}{}_{mn}) e^{\lambda}{}_{l} e^{\mu}{}_{k} - \epsilon (\partial_\lambda K_{mn}) e^{\lambda}{}_{l} n^\mu + \Gamma^{k}{}_{mn} (\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{k}) e^{\lambda}{}_{l} - \epsilon K_{mn} (\nabla_\lambda n^\mu) e^{\lambda}{}_{l} \\
&= (\partial_l \Gamma^{k}{}_{mn}) e^{\mu}{}_{k} - \epsilon (\partial_l K_{mn}) n^\mu + \Gamma^{k}{}_{mn} (\Gamma^{p}{}_{kl} e^{\mu}{}_{p} - \epsilon K_{kl} n^\mu) - \epsilon K_{mn} (\nabla_\lambda n^\mu) e^{\lambda}{}_{l} \\
(\nabla_\lambda ((\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n})) e^{\lambda}{}_{l} &= (\nabla_\lambda \nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n} e^{\lambda}{}_{l} + (\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) (\nabla_\lambda e^{\nu}{}_{n}) e^{\lambda}{}_{l} \\
&= (\nabla_\lambda \nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n} e^{\lambda}{}_{l} + (\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) (\Gamma^{k}{}_{nl} e^{\nu}{}_{k} - \epsilon K_{nl} n^\nu) \\
&= (\nabla_\lambda \nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n} e^{\lambda}{}_{l} + (\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) \Gamma^{k}{}_{nl} e^{\nu}{}_{k} - \epsilon K_{nl} n^\nu (\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) \\
&= (\nabla_\lambda \nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n} e^{\lambda}{}_{l} + \Gamma^{k}{}_{nl} (\Gamma^{p}{}_{mk} e^{\mu}{}_{p} - \epsilon K_{mk} n^\mu) - \epsilon K_{nl} n^\nu (\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) \\
(\nabla_\lambda \nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n} e^{\lambda}{}_{l} &= (\partial_l \Gamma^{k}{}_{mn}) e^{\mu}{}_{k} - \epsilon (\partial_l K_{mn}) n^\mu + \Gamma^{k}{}_{mn} (\Gamma^{p}{}_{kl} e^{\mu}{}_{p} - \epsilon K_{kl} n^\mu) - \epsilon K_{mn} (\nabla_\lambda n^\mu) e^{\lambda}{}_{l} - \\
&\quad \Gamma^{k}{}_{nl} (\Gamma^{p}{}_{mk} e^{\mu}{}_{p} - \epsilon K_{mk} n^\mu) + \epsilon K_{nl} n^\nu (\nabla_\nu e^{\mu}{}_{m}) \\
(\nabla_\nu ((\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) e^{\lambda}{}_{l})) e^{\nu}{}_{n} &= (\nabla_\nu (\Gamma^{k}{}_{ml} e^{\mu}{}_{k} - \epsilon K_{ml} n^\mu)) e^{\nu}{}_{n} \\
&= (\partial_\nu \Gamma^{k}{}_{ml}) e^{\nu}{}_{n} e^{\mu}{}_{k} - \epsilon (\partial_\nu K_{ml}) e^{\nu}{}_{n} n^\mu + \Gamma^{k}{}_{ml} (\nabla_\nu e^{\mu}{}_{k}) e^{\nu}{}_{n} - \epsilon K_{ml} (\nabla_\nu n^\mu) e^{\nu}{}_{n} \\
&= (\partial_n \Gamma^{k}{}_{ml}) e^{\mu}{}_{k} - \epsilon (\partial_n K_{ml}) n^\mu + \Gamma^{k}{}_{ml} (\Gamma^{p}{}_{kn} e^{\mu}{}_{p} - \epsilon K_{kn} n^\mu) - \epsilon K_{ml} (\nabla_\nu n^\mu) e^{\nu}{}_{n} \\
(\nabla_\nu ((\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) e^{\lambda}{}_{l})) e^{\nu}{}_{n} &= (\nabla_\nu \nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) e^{\lambda}{}_{l} e^{\nu}{}_{n} + (\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) (\nabla_\nu e^{\lambda}{}_{l}) e^{\nu}{}_{n} \\
&= (\nabla_\nu \nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) e^{\nu}{}_{n} e^{\lambda}{}_{l} + (\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) (\Gamma^{k}{}_{ln} e^{\lambda}{}_{k} - \epsilon K_{nl} n^\lambda) \\
&= (\nabla_\nu \nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) e^{\lambda}{}_{l} e^{\nu}{}_{n} + (\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) \Gamma^{k}{}_{nl} e^{\lambda}{}_{k} - \epsilon K_{nl} n^\lambda (\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) \\
&= (\nabla_\nu \nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m}) e^{\lambda}{}_{n} e^{\nu}{}_{l} + \Gamma^{k}{}_{nl} (\Gamma^{p}{}_{mk} e^{\mu}{}_{p} - \epsilon K_{mk} n^\mu) - \epsilon K_{nl} n^\lambda (\nabla_\lambda e^{\mu}{}_{m})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla_\nu\nabla_\lambda e^\mu{}_m)e^\lambda{}_l e^\nu{}_n &= (\partial_n\Gamma^k{}_{ml})e^\mu{}_k - \epsilon(\partial_n K_{ml})n^\mu + \Gamma^k{}_{ml}(\Gamma^p{}_{kn}e^\mu{}_p - \epsilon K_{kn}n^\mu) - \epsilon K_{ml}(\nabla_\nu n^\mu)e^\nu{}_n - \\
&\quad \Gamma^k{}_{nl}(\Gamma^p{}_{mk}e^\mu{}_p - \epsilon K_{mk}n^\mu) + \epsilon K_{nl}n^\lambda(\nabla_\lambda e^\mu{}_m) \\
e^\nu{}_n e^\lambda{}_l[\nabla_\nu,\nabla_\lambda]e^\mu{}_m &= (\nabla_\nu\nabla_\lambda e^\mu{}_m)e^\lambda{}_n e^\nu{}_l - (\nabla_\lambda\nabla_\nu e^\mu{}_m)e^\lambda{}_n e^\nu{}_l \\
&= (\partial_n\Gamma^k{}_{ml})e^\mu{}_k - \epsilon(\partial_n K_{ml})n^\mu + \Gamma^k{}_{ml}(\Gamma^p{}_{kn}e^\mu{}_p - \epsilon K_{kn}n^\mu) - \epsilon K_{ml}(\nabla_\nu n^\mu)e^\nu{}_n - \\
&\quad \Gamma^k{}_{nl}(\Gamma^p{}_{mk}e^\mu{}_p - \epsilon K_{mk}n^\mu) + \epsilon K_{nl}n^\lambda(\nabla_\lambda e^\mu{}_m) - (\partial_l\Gamma^k{}_{mn})e^\mu{}_k + \epsilon(\partial_l K_{mn})n^\mu - \\
&\quad \Gamma^k{}_{mn}(\Gamma^p{}_{kl}e^\mu{}_p + \epsilon K_{kl}n^\mu) + \epsilon K_{mn}(\nabla_\lambda n^\mu)e^\lambda{}_l + \Gamma^k{}_{nl}(\Gamma^p{}_{mk}e^\mu{}_p - \epsilon K_{mk}n^\mu) - \epsilon K_{nl}n^\nu(\nabla_\nu e^\mu{}_m) \\
&= (\partial_n\Gamma^k{}_{ml})e^\mu{}_k - (\partial_l\Gamma^k{}_{mn})e^\mu{}_k + (\Gamma^k{}_{ml}\Gamma^p{}_{kn} - \Gamma^k{}_{nl}\Gamma^p{}_{mk})e^\mu{}_p - \epsilon(\partial_n K_{ml} - \partial_l K_{mn})n^\mu \\
&\quad - \epsilon(\Gamma^k{}_{ml}K_{kn} - \Gamma^k{}_{nl}K_{mk})n^\mu - \epsilon(K_{ml}(\nabla_\nu n^\mu)e^\nu{}_n - K_{mn}(\nabla_\lambda n^\mu)e^\lambda{}_l) \\
&\quad + \epsilon(K_{nl}n^\lambda(\nabla_\lambda e^\mu{}_m) - K_{nl}n^\nu(\nabla_\nu e^\mu{}_m)) \\
&= \mathcal{R}^k{}_{mnl}e^\mu{}_k - \epsilon(\partial_n K_{ml} - \Gamma^k{}_{nl}K_{mk} - \Gamma^k{}_{ml}K_{nk} - \partial_l K_{mn} + \Gamma^k{}_{ml}K_{kn} + \Gamma^k{}_{mn}K_{lk})n^\mu \\
&\quad - \epsilon(K_{ml}(\nabla_\nu n^\mu)e^\nu{}_n - K_{mn}(\nabla_\lambda n^\mu)e^\lambda{}_l) \\
\mathcal{R}^\mu{}_{\kappa\lambda\nu}e^\kappa{}_k e^\lambda{}_l e^\nu{}_n &= \mathcal{R}^k{}_{mnl}e^\mu{}_k - \epsilon(D_n K_{ml} - D_l K_{mn})n^\mu - \epsilon(K_{ml}(\nabla_\nu n^\mu)e^\nu{}_n - K_{mn}(\nabla_\lambda n^\mu)e^\lambda{}_l) \\
\mathcal{R}_{\mu\kappa\lambda\nu}e^\kappa{}_k e^\lambda{}_l e^\nu{}_n e^\mu{}_m &= \mathcal{R}^k{}_{mnl}e_{\mu p}e^\mu{}_k - \epsilon(D_n K_{ml} - D_l K_{mn})\cancelto{0}{e_{\mu p}n^\mu} - \epsilon(K_{ml}(\nabla_\nu n^\mu)e^\nu{}_n - K_{mn}(\nabla_\lambda n^\mu)e^\lambda{}_l)e_{\mu p} \\
&= \mathcal{R}_{kmnl} - \epsilon(K_{ml}K_{nk} - K_{mn}K_{lk}) \qquad (26) \\
\mathcal{R}_{\mu\kappa\lambda\nu}n^\mu e^\kappa{}_k e^\lambda{}_l e^\nu{}_n &= \mathcal{R}_{kmnl}n^\mu e^k{}_\mu - \epsilon(D_n K_{ml} - D_l K_{mn})n^\mu n_\mu - \epsilon n^\mu(K_{ml}(\nabla_\nu n_\mu)e^\nu{}_n - K_{mn}(\nabla_\lambda n_\mu)e^\lambda{}_l) \\
&= \epsilon(D_n K_{ml} - D_l K_{mn}) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Βαθμωτό *Ricci*

Θα υπολογίσουμε την βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci* της τετραδιάστατης γεωμετρίας συναρτήσει της τριδίαστατης και κάποιων όρων εξωτερικής γεωμετρίας.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\kappa\lambda} &= g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda} \\
&= (\epsilon n^\mu n^\nu + h^{mn}e^\mu{}_m e^\nu{}_n)\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda} \\
&= \epsilon\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}n^\mu n^\nu + h^{mn}\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}e^\mu{}_m e^\nu{}_n \qquad (28) \\
\mathbf{R} &= g^{\kappa\lambda}\mathbf{R}_{\kappa\lambda} \\
&= (\epsilon n^\kappa n^\lambda + h^{kl}e^\kappa{}_k e^\lambda{}_l)(\epsilon\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}n^\mu n^\nu + h^{mn}\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}e^\mu{}_m e^\nu{}_n) \\
&= \cancelto{0}{\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}n^\mu n^\nu n^\kappa n^\lambda} + \epsilon h^{kl}\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}n^\mu n^\nu e^\kappa{}_k e^\lambda{}_l + \epsilon h^{mn}\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}n^\kappa n^\lambda e^\mu{}_m e^\nu{}_n + \mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}h^{mn}h^{kl}e^\kappa{}_k e^\lambda{}_l e^\mu{}_m e^\nu{}_n \\
&= 2\epsilon h^{mn}\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}n^\kappa n^\lambda e^\mu{}_m e^\nu{}_n + h^{mn}h^{kl}\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}e^\kappa{}_k e^\lambda{}_l e^\mu{}_m e^\nu{}_n \\
&= 2\epsilon\mathcal{R}_{\mu\kappa\nu\lambda}n^\kappa n^\lambda(g^{\mu\nu} - \epsilon n^\mu n^\nu) + h^{mn}h^{kl}(\mathcal{R}_{kmnl} - \epsilon(K_{ml}K_{nk} - K_{mn}K_{lk})) \\
&= 2\epsilon\mathcal{R}_{\kappa\lambda}n^\kappa n^\lambda + \mathbf{R}^{(3)} + \epsilon(K^{mn}K_{mn} - H^2) \\
(\nabla_\mu n^\nu)(\nabla_\nu n^\mu) &= g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}(\nabla_\mu n_\lambda)(\nabla_\nu n_\kappa) \\
&= (\epsilon n^\kappa n^\mu + h^{\kappa\mu})(\epsilon n^\lambda n^\nu + h^{\nu\lambda})(\nabla_\mu n_\lambda)(\nabla_\nu n_\kappa) \overset{n^\mu\nabla_\nu n_\mu = 0}{\Rightarrow} \\
&= h^{\kappa\mu}h^{\lambda\nu}(\nabla_\mu n_\lambda)(\nabla_\nu n_\kappa) = h^{km}h^{ln}(\nabla_\mu n_\lambda)e^\mu{}_m e^\lambda{}_l(\nabla_\nu n_\kappa)e^\nu{}_n e^\kappa{}_k \\
&= h^{km}h^{ln}K_{mn}K_{lk} = K_{mn}K^{mn} \qquad (29) \\
n^\nu[\nabla_\mu,\nabla_\nu]n^\mu &= \mathcal{R}^\mu{}_{\lambda\mu\nu}n^\lambda n^\nu = \mathcal{R}_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \Rightarrow n^\nu[\nabla^\mu,\nabla_\nu]n^\mu = n^\nu\nabla_\mu(\nabla_\nu n^\mu) - n^\mu\nabla_\mu(\nabla_\mu n^\mu) \\
\mathbf{R} &= 2\epsilon(H^2 - K^{mn}K_{mn} + \nabla_\mu(n^\nu\nabla_\nu n^\mu - n^\mu\nabla_\nu n^\nu)) + \mathbf{R}^3 + \epsilon(K^{mn}K_{mn} - H^2) \\
\mathbf{R} &= \mathbf{R}^3 + \epsilon(H^2 - K^{mn}K_{mn} + \nabla_\mu(n^\nu\nabla_\nu n^\mu - n^\mu\nabla_\nu n^\nu)) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Όπου καταλήγουμε σε μία σχέση που συνδέει τις δύο καμπυλότητες της εξωτερικής και εσωτερικής γεωμετρίας.

Appendix B

Στην ενότητα αυτή θα δούμε την γεωμετρία από την σκοπιά των μορφών όπου θα γίνει χρήση των εξισώσεων *Cartan*.

Γεωμετρία σε όρους μορφών

$$\begin{aligned}
d\sigma^\mu &= -\frac{1}{2}C^\mu{}_{\alpha\beta}\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta && 1^\eta \text{ εξίσωση } \textit{Cartan} && (31)\\
g &= g_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu \\
\nabla_\mu\sigma &= \nabla_\mu(a_\nu\sigma^\nu) = (\partial_\mu a_\nu - \Gamma^\tau{}_{\nu\mu}a_\tau)\sigma^\nu && && (32)\\
\nabla_\tau g &= \nabla_\tau(g_{\mu\nu}\sigma^\mu\sigma^\nu) = (\partial_\tau g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\tau}g_{\mu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\rho\mu}g_{\nu\rho})\sigma^\mu\sigma^\nu = 0 \Rightarrow \\
\partial_\tau g_{\mu\nu}\sigma^\tau &= (\Gamma^\rho{}_{\nu\tau}g_{\mu\rho} + \Gamma^\rho{}_{\rho\mu}g_{\nu\rho})\sigma^\tau \underset{dg_{\mu\nu}=\partial_\tau g_{\mu\nu}\sigma^\tau}{\overset{\sigma^\mu{}_\nu=\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\sigma^\sigma}{\Rightarrow}} dg_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\nu\mu} && && (33)\\
d\sigma^\mu &\overset{C^\mu{}_{\alpha\beta}=\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}}{=} -\frac{1}{2}C^\mu{}_{\alpha\beta}\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta = -\frac{1}{2}(\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta})\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta = -\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta \\
\Gamma^\tau{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\tau\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(-C^\tau{}_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma}g^{\rho\lambda}C^\sigma{}_{\lambda\nu} + g_{\sigma\nu}g^{\tau\rho}C^\sigma{}_{\rho\mu}) \\
\theta^\mu{}_\nu &= d\sigma^\mu{}_\nu + \sigma^\mu{}_\tau \wedge \sigma^\tau{}_\nu && 2^\eta \text{ εξίσωση } \textit{Cartan} && (34)\\
&= d(\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\sigma^\sigma) + \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}\sigma^\sigma \wedge \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\sigma^\rho = d\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\sigma^\sigma + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}d\sigma^\sigma + \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\sigma^\sigma \wedge \sigma^\rho \\
&= \partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\sigma^\rho \wedge \sigma^\sigma - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\kappa}\sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda + \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\sigma^\sigma \wedge \sigma^\rho \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}(\sigma^\rho \wedge \sigma^\sigma - \sigma^\sigma \wedge \sigma^\rho) - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\kappa}(\sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda - \sigma^\lambda \wedge \sigma^\kappa) + \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}(\sigma^\sigma \wedge \sigma^\rho - \sigma^\rho \wedge \sigma^\sigma)) \\
&= \frac{1}{2}((\partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\mu{}_{\nu\rho})\sigma^\rho \wedge \sigma^\sigma - (\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\kappa} - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda})\sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda + (\Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma})\sigma^\sigma \wedge \sigma^\rho) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}(\Gamma^\kappa{}_{\rho\sigma} - \Gamma^\kappa{}_{\sigma\rho}) - (\Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}))\sigma^\rho \wedge \sigma^\sigma = \frac{1}{2}\mathcal{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\sigma^\rho \wedge \sigma^\sigma \\
\sigma^\mu{}_\nu &= \Gamma^\mu{}_{\nu\tau}\sigma^\tau \Rightarrow \sigma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\tau}\sigma^\tau{}_\nu \overset{dg_{\mu\nu}=0}{\Rightarrow} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\nu\mu} = 0 \Rightarrow \eta^{0\tau}(\sigma_{\tau 0} + \sigma_{0\tau}) = 0 \Rightarrow \sigma^0{}_0 + \sigma^0{}_0 = 0 \\
\sigma^\mu{}_\nu + \sigma^\nu{}_\mu &= 0 \Rightarrow \sigma^0{}_0 + \sigma^i{}_j + \sigma^0{}_0 + \sigma^j{}_i = 0 \Rightarrow \sigma^i{}_j = -\sigma^j{}_i \Rightarrow \Gamma^i{}_{j\tau}\sigma^\tau = -\Gamma^j{}_{i\tau}\sigma^\tau \Rightarrow \Gamma^i{}_{j\tau} = -\Gamma^j{}_{i\tau} \\
\sigma^0{}_i &= \eta^{0\tau}\sigma_{\tau i} = -\delta^{00}\sigma_{0i} + \delta^{0j}\sigma_{ji} = -\delta^{00}\sigma_{0i} = \sigma_{i0} \;\&\; \sigma^i{}_0 = \eta^{i\tau}\sigma_{\tau 0} = \delta^{ij}\sigma_{j0} + \delta^{i0}\sigma_{i0} = \sigma_{i0} = \sigma^0{}_i \Rightarrow \\
\Gamma^i{}_{0\tau}\sigma^\tau &= \Gamma^0{}_{i\tau}\sigma^\tau \Rightarrow \Gamma^i{}_{0\tau} = \Gamma^0{}_{i\tau} \;\&\; \sigma^0{}_0 = 0 \Rightarrow \Gamma^0{}_{0\tau} = 0 \Rightarrow \Gamma^0{}_{0j} = 0 \Rightarrow \Gamma^i{}_{00} = \Gamma^0{}_{i0} = 0 \Rightarrow \Gamma^i{}_{0j} = \Gamma^0{}_{ij}
\end{aligned}$$

Από την 1η εξίσωση *Cartan* προκύπτουν οι συντελεστές σύνδεσης Γ ενώ από την 2η ο τανυστής καμπυλότητας.

$$d\sigma^i = \left(-\dot{\Omega} b_{ij} + \frac{de^{\beta_{it}}}{dt} e^{-\Omega} \underbrace{e^{-\beta_{tl}} e^{\beta_{lj}}}_{\delta_{jt}} \right) dt \wedge \omega^j + b_{ij} d\omega^j = \left(-\dot{\Omega} b_{ij} + \frac{de^{\beta_{it}}}{dt} e^{-\beta_{tl}} b_{jl} \right) dt \wedge \omega^j + b_{ij} d\omega^j$$

$$d\sigma^i = \left(-\dot{\Omega} \delta_{il} + \frac{de^{\beta_{it}}}{dt} e^{-\beta_{tl}} \right) b_{jl} dt \wedge \omega^j + b_{ij} d\omega^j = \left(-\dot{\Omega} \delta_{il} + \frac{de^{\beta_{it}}}{dt} e^{-\beta_{tl}} \right) dt \wedge \sigma^l + \frac{1}{2} b_{ij} C^j{}_{kl} \omega^k \wedge \omega^l$$

$$d\sigma^i = \left(-\dot{\Omega} \delta_{ij} + \frac{de^{\beta_{ik}}}{dt} e^{-\beta_{jk}} \right) dt \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} b_{ij} C^j{}_{kl} \left(e^{\Omega} e^{-\beta_{pk}} \sigma^p \right) \wedge \left(e^{\Omega} e^{-\beta_{lr}} \sigma^r \right)$$

$$d\sigma^i = \left(-\dot{\Omega} \delta_{ij} + \frac{de^{\beta_{ik}}}{dt} e^{-\beta_{jk}} \right) dt \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} C^j{}_{kl} e^{\Omega} e^{\beta_{ij}} e^{-\beta_{pk}} e^{-\beta_{lr}} \sigma^p \wedge \sigma^r$$

$$d\sigma^i = k_{ij} dt \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} d^i{}_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k \ \ \& \ \ d\sigma^\mu = \Gamma^\mu{}_{\kappa\lambda} \sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda$$

$$d\sigma^0 = d(dt) = 0 = \Gamma^0{}_{\kappa\lambda} \sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda \Rightarrow \Gamma^0{}_{\kappa\lambda} \sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda = 0 \Rightarrow \Gamma^0{}_{\kappa\lambda} \frac{1}{2} (\sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda - \sigma^\lambda \wedge \sigma^\kappa) = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma^0{}_{\kappa\lambda} \sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda - \Gamma^0{}_{\lambda\kappa} \sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda = 0 \Rightarrow \Gamma^0{}_{\kappa\lambda} - \Gamma^0{}_{\lambda\kappa} = 0$$

$$d\sigma^i = k_{ij} \sigma^0 \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} d^i{}_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k = \Gamma^i{}_{\kappa\lambda} \sigma^\kappa \wedge \sigma^\lambda$$

$$= k_{ij} \sigma^0 \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} d^i{}_{jk} \sigma^j \wedge \sigma^k = \Gamma^i{}_{0j} \sigma^0 \wedge \sigma^j + \Gamma^i{}_{j0} \sigma^j \wedge \sigma^0 + \frac{1}{2} \Gamma^i{}_{jk} (\sigma^j \wedge \sigma^k - \sigma^k \wedge \sigma^j)$$

$$= (k_{ij} - \Gamma^i{}_{0j} + \Gamma^i{}_{j0}) \sigma^0 \wedge \sigma^j = \frac{1}{2} \left(-d^i{}_{jk} + \Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj} \right) \sigma^j \wedge \sigma^k \Rightarrow$$

$$k_{ij} = \Gamma^i{}_{0j} - \Gamma^i{}_{j0} \ \ \& \ \ d^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj} \Rightarrow k_{ij} + k_{ji} = \Gamma^i{}_{0j} - \Gamma^i{}_{j0} + \Gamma^j{}_{0i} - \Gamma^j{}_{i0} \Rightarrow$$

$$k_{ij} + k_{ji} = \Gamma^i{}_{0j} + \Gamma^j{}_{0i} - (\Gamma^i{}_{j0} + \Gamma^j{}_{i0}) = 2\Gamma^0{}_{ij} - 0 \Rightarrow \Gamma^0{}_{ij} = \frac{1}{2} (k_{ij} + k_{ji}) = l_{ij}$$

$$k_{ij} - k_{ji} = \Gamma^i{}_{0j} - \Gamma^i{}_{j0} - \Gamma^j{}_{0i} + \Gamma^j{}_{i0} \Rightarrow k_{ij} - k_{ji} = \Gamma^i{}_{0j} - \Gamma^j{}_{0i} - (\Gamma^i{}_{j0} - \Gamma^j{}_{i0}) = 0 - 2\Gamma^i{}_{j0} \Rightarrow$$

$$\Gamma^i{}_{j0} = -\frac{1}{2} (k_{ij} - k_{ji}) = -m_{ij} \ \ \& \ \ \Gamma^i{}_{st} = \frac{1}{2} (d^i{}_{st} - d^t{}_{is} - d^s{}_{it})$$

$$\theta^\mu{}_\nu = \mathcal{R}^\mu{}_{\nu\tau\rho} \sigma^\tau \wedge \sigma^\rho = d\sigma^\mu{}_\nu + \sigma^\mu{}_\tau \wedge \sigma^\tau{}_\nu$$

$$\theta^0{}_i = \mathcal{R}^0{}_{i\tau\rho} \sigma^\tau \wedge \sigma^\rho = \cancelto{0}{\mathcal{R}^0{}_{i\tau\tau} \sigma^\tau \wedge \sigma^\tau} + \mathcal{R}^0{}_{i0j} \sigma^0 \wedge \sigma^j + \mathcal{R}^0{}_{ijk} \sigma^j \wedge \sigma^k$$

$$\theta^0{}_i = d\sigma^0{}_i + \sigma^0{}_\tau \wedge \sigma^\tau{}_i = d(l_{ij} \sigma^j) + \cancelto{0}{\sigma^0{}_0 \wedge \sigma^0{}_i} + \sigma^0{}_j \wedge \sigma^j{}_i = \dot{l}_{ij} \sigma^0 \wedge \sigma^j + l_{ij} d\sigma^j + l_{jk} \sigma^k \wedge \Gamma^j{}_{i\tau} \sigma^\tau$$

$$= \dot{l}_{ij} \sigma^0 \wedge \sigma^j + l_{ij} \left(k_{jk} \sigma^0 \wedge \sigma^k + \frac{1}{2} d^j{}_{st} \sigma^s \wedge \sigma^t \right) + l_{jk} (\Gamma^j{}_{i0} \sigma^k \wedge \sigma^0 + \Gamma^j{}_{il} \sigma^k \wedge \sigma^l)$$

$$= (\dot{l}_{ij} + l_{ik} k_{kj} - l_{kj} \Gamma^k{}_{i0}) \sigma^0 \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} \left(l_{ij} d^j{}_{st} + l_{js} (d^j{}_{it} - d^t{}_{ji} - d^i{}_{jt} \right) \sigma^s \wedge \sigma^t$$

$$= (\dot{l}_{ij} + l_{ik} k_{kj} - l_{kj} m_{ik}) \sigma^0 \wedge \sigma^j + \frac{1}{2} \left(l_{ij} d^j{}_{st} + l_{js} (d^j{}_{it} - d^t{}_{ji} - d^i{}_{jt}) \right) \sigma^s \wedge \sigma^t$$

$$\theta^i{}_0 = \mathcal{R}^i{}_{0\mu\nu} \sigma^\mu \wedge \sigma^\nu = \cancelto{0}{\mathcal{R}^i{}_{0\mu\mu} \sigma^\mu \wedge \sigma^\mu} + \mathcal{R}^i{}_{00j} \sigma^0 \wedge \sigma^j + \mathcal{R}^i{}_{0kl} \sigma^k \wedge \sigma^l$$

$$= d\sigma^i{}_0 + \sigma^i{}_\tau \wedge \sigma^\tau{}_0 = d\sigma^0{}_i + \cancelto{0}{\sigma^i{}_0 \wedge \sigma^0{}_0} + \sigma^i{}_j \wedge \sigma^j{}_0 = d(l_{ij} \sigma^j) + \Gamma^i{}_{j\tau} \sigma^\tau \wedge l_{jk} \sigma^k$$

$$= \dot{l}_{ij} \sigma^0 \wedge \sigma^j + l_{ij} d\sigma^j + l_{jk} (\Gamma^i{}_{j0} \sigma^0 + \Gamma^i{}_{js} \sigma^s) \wedge \sigma^k$$

$$= \dot{l}_{ij} \sigma^0 \wedge \sigma^j + l_{ij} \left(k_{jt} \sigma^0 \wedge \sigma^t + \frac{1}{2} d^j{}_{kl} \sigma^k \wedge \sigma^l \right) + l_{jk} (-m_{ij} \sigma^0 + \Gamma^i{}_{js} \sigma^s) \wedge \sigma^k$$

$$= (\dot{l}_{ij} + l_{ik} k_{kj} + l_{kj} m_{ik}) \sigma^0 \wedge \sigma^j + \left(\frac{1}{2} l_{ij} d^j{}_{kl} + l_{jl} \Gamma^i{}_{jk} \right) \sigma^k \wedge \sigma^l$$

$$\theta^i{}_j = \mathcal{R}^i{}_{j\mu\nu} \sigma^\mu \wedge \sigma^\nu = \cancelto{0}{\mathcal{R}^i{}_{j\mu\mu} \sigma^\mu \wedge \sigma^\mu} + \mathcal{R}^i{}_{j0k} \sigma^0 \wedge \sigma^k + \mathcal{R}^i{}_{jkl} \sigma^k \wedge \sigma^l$$

$$= d\sigma^i{}_j + \sigma^i{}_\tau \wedge \sigma^\tau{}_j = d\sigma^i{}_j + \sigma^i{}_0 \wedge \sigma^0{}_j + \sigma^i{}_k \wedge \sigma^k{}_j = d\sigma^i{}_j + \sigma^0{}_i \wedge \sigma^0{}_j + \sigma^k{}_i \wedge \sigma^k{}_j$$

$$= d(\Gamma^i{}_{j\mu} \sigma^\mu) + l_{il} \sigma^l \wedge l_{jk} \sigma^k + \Gamma^k{}_{i\mu} \sigma^\mu \wedge \Gamma^k{}_{j\nu} \sigma^\nu = d(\Gamma^i{}_{j0} \sigma^0 + \Gamma^i{}_{jk} \sigma^k) + l_{il} l_{jk} \sigma^l \wedge \sigma^k + \Gamma^k{}_{i\mu} \sigma^\mu \wedge \Gamma^k{}_{j\nu} \sigma^\nu$$

$$= \dot{\Gamma}^i{}_{jk} \sigma^0 \wedge \sigma^k + l_{il} l_{jk} \sigma^l \wedge \sigma^k + (\Gamma^k{}_{i0} \sigma^0 + \Gamma^k{}_{il} \sigma^l) \wedge (\Gamma^k{}_{j0} \sigma^0 + \Gamma^k{}_{jm} \sigma^m)$$

$$= \dot{\Gamma}^i{}_{jk} \sigma^0 \wedge \sigma^k + l_{il} l_{jk} \sigma^l \wedge \sigma^k + \Gamma^k{}_{i0} \Gamma^k{}_{jm} \sigma^0 \wedge \sigma^m + \Gamma^k{}_{il} \Gamma^k{}_{j0} \sigma^l \wedge \sigma^0 + \Gamma^k{}_{jm} \Gamma^k{}_{il} \sigma^m \wedge \sigma^l$$

$$= (\dot{\Gamma}^i{}_{jk} + \Gamma^l{}_{i0} \Gamma^l{}_{jk} - \Gamma^l{}_{ik} \Gamma^l{}_{j0}) \sigma^0 \wedge \sigma^k + (l_{ik} l_{jl} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^m_{il}) \sigma^l \wedge \sigma^k$$

Βιβλιογραφία

[1] Hidekazu Nariai - *Hamiltonian Approach to the Dynamics of Expanding Homogeneous Universes in the Brans-Dicke Cosmology*)*

[2] Charles Misner - *Quantum Cosmology.*

[3] Mikio Nakahara - *Geometry, Topology and Physics, First Edition (Graduate Student Series in Physics)*, Institute of Physics Publishing (1990)

[4] Shepley L. C., Ryan M. - *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton University Press (1975)

[5] Sean Carroll - *Spacetime and Geometry:An Introduction to General Relativity*,B.Cummings

[6] Norbert Straumann - *General relativity and applications to astrophysics*, Springer (1985)

[7] Lev. Landau, Evgeny Lifshitz - *The classical theory of fields (fourth reivised english edition, courses of theoretical physics vol.2* , Butterworth,Heinemann (2010)

[8] Lev. Landau, Evgeny Lifshitz - *Mechanics (third edition, courses of theoretical physics vol.1* , Butterworth,Heinemann (2010)

[9] Jorge V. José, Eugene J. Saletan

[10] Paul A.M. Dirac - *Lectures on quantum mechanics*

[11] Matthias Blau - *Lecture Notes General Relativity, Albert Einstein Center Fundamental Phys*

[12] P.K. Townsend - *General Relativity And Quantum Cosmology - Black Holes. arXiv:1205.3184*

[13] Eric Poisson - *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black Hole Mechanics, Cambridge*

[14] R. Dwayne Ramey and N. L. Balazs - *Hamiltonian Chaos in Homogeneous ADM Cosmologies?*

[15] Michael P. Ryan, Jr. and Sergio M. Waller - *On the Hamiltonian formulation of Class B Bianchi cosmological models*

[16] Michael P. Ryan, Jr. - *Qualitative Cosmology: Diagrammatic Solutions for Bianchi Type IX Universes with Expansion, Rotation, and Shear. I. The Symmetric Case*

[17] Charles W. Misner - *Quantum Cosmology. Pt.I*

[18] Valerio Faraoni - *Cosmology in a scalar tensor gravity*

[19] Luigi Bianchi - *On the Three-dimensional Spaces Which Admit a Continuous Group of Motions*[1,2] *Essay by member Luigi Bianchi*

[20] John D. Barrow - *Chaotic Behavior in General Relativity*

[21] Utiyama, R., and B. S. DeWitt - *1962, J. Math. Phys. 3, 608.*

[22] Stelle, K. S. - *1977, Phys. Rev. D16, 953.*

[23] Starobinsky, A. A. - *1980, Phys. Lett. B91, 99.*

[24] Astier, P., et al. (The SNLS) - *2006, Astron. Astrophys. 447,31.*

[25] Eisenstein, D. J., et al. (SDSS) - *2005, Astrophys. J. 633, 560.*

[26] Riess, A. G., et al. (Supernova Search Team) - *2004, Astro-phys. J. 607, 665.*

[27] Spergel, D. N., et al. (WMAP) - *2007, Astrophys. J. Suppl.170, 377.*

[28] Wald, R. M. - *1984, General Relativity (University of Chicago Press, United States of America).*

[29] Guth, A. H. - *1981, Phys. Rev. D23, 347.*

[30] Kolb, E. W., and M. S. Turner - *1992, The Early Universe (Addison-Wesley, California).*

[31] Linde, A. - *1990, Particle Physics and Inflationary Cosmology (Harwood Academic Publishers, Switzerland).*

[32] Misner, C. W. - *1968, Astrophys. J. 151, 431.*

[33] Weinberg, S. - *1972, Gravitation and Cosmology (John Wiley and Sons, United States of America).*

[34] Mukhanov, V. F. - *2003, eprint astro-ph/0303077.*

[35] Burles, S., K. M. Nollett, and M. S. Turner - *2001, Astrophys. J. 552, L1.*

[36] Carroll, S. M., and M. Kaplinghat - *2002, Phys. Rev. D65, 063507.*

[37] Zwicky, F. - *1933, Helv. Phys. Acta 6, 110.*

[38] Kahn, F. D., and L. Woltjer - *1959, Astrophys. J. 130, 705.*

[39] Bosma, A. - *1978, The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types, Ph.D. thesis, Rejksuniversiteit Groningen.*

[40] Ellis, J. R. - *2002, eprint astro-ph/0204059.*

[41] Moore, B. - *2001, eprint astro-ph/0103100.*

[42] Persic, M., P. Salucci, and F. Stel - *1996, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 281, 27.*

[43] Rubin, V. - *and W. K. J. Ford, 1970, Astrophys. J. 159, 379.*

[44] Rubin, V. C., N. Thonnard, and W. K. J. Ford - *1980, Astro-phys. J. 238, 471. Ruggiero, M. L. (n), 2007, eprint 0712.3218.*

[45] Carroll, S. M. - *2001a, Living Rev. Rel. 4, 1.*

[46] Weinberg, S. - *1989, Rev. Mod. Phys. 61, 1.*

[47] Barrow, J. D., and F. J. Tipler, - *1986, The Anthropic Cosmological Principle (Clarendon Press, Oxford).*

[48] Carter, B. - *1974, in International Astronomical Union Symposium 63: Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data, edited by M. S. Longair (Dordrecht, Reidel).*

[49] Susskind, L. - *2003, eprint hep-th/0302219.*

[50] Bahcall, N. A., J. P. Ostriker, S. Perlmutter, and P. J. Steinhardt, - *1999, Science 284, 1481.*

[51] Caldwell, R. R., R. Dave, and P. J. Steinhardt - *1998, Phys. Rev. Lett. 80, 1582.*

[52] Carroll, S. M., - *1998, Phys. Rev. Lett. 81, 3067.*

[53] Ostriker, J. P., and P. J. Steinhardt - *1995, Nature 377, 600.*

[54] Peebles, P. J. E., and B. Ratra - *1988, Astrophys. J. 325, L17.*

[55] Ratra, B., and P. J. E. Peebles, - *1988, Phys. Rev. D37, 3406.*

[56] Wang, L.-M., R. R. Caldwell, J. P. Ostriker, and P. J. Steinhardt, - *2000, Astrophys. J. 530, 17.*

[57] Wetterich, C. - *1988, Nucl. Phys. B302, 668.*

[58] P. A. R Ade BICEP2 Collaboration - *BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales, arXiv:1403.3985*

[59] P. A. R Ade BICEP2 Collaboration - *BICEP2 II: Experiment and Three-Year Data Set, arXiv:1403.4302*

[60] Sotiriou, T. P. - *2007b, Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology, Ph.D. thesis, SISSA, eprint 0710.4438.*

[61] Wands, D - *1994, Class. Quant. Grav. 11, 269.*

[62] O'Hanlon, J. - *1972b, Phys. Rev. Lett. 29, 137.*

[63] Anderson, J. L. - *1971, Phys. Rev. D3, 1689.*

[64] Barber, G. A. - *2003, eprint gr-qc/0302088.*

[65] Dabrowski, M. P., T. Denkiewicz, and D. Blaschke - *2007, Annalen Phys. 16, 237.*

[66] Davidson, A. - *2005, Class. Quant. Grav. 22, 1119.*

[67] Deser, S. - *Deser, S., 1970, Ann. Phys. (NY) 59, 248.*

[68] Fujii, Y. - *1982, Phys. Rev. D26, 2580.*

[69] O'Hanlon, J. - *1972a, J. Phys. A 5, 803.*

[70] O'Hanlon, J., and B. Tupper - *1972, Nuovo Cimento B 7, 305.*

[71] Evans, J. D., L. M. H. Hall, and P. Caillol - *2007, eprint 0711.3695.*

[72] Astier, P., et al. (The SNLS) - *2006, Astron. Astrophys. 447, 31.*

[73] Barris, B. J., et al. - *2004, Astrophys. J. 602, 571.*

[74] Filippenko, A. V., and A. G. Riess - *1998, Phys. Rept. 307, 31.*

[75] Knop, R. A., et al. (Supernova Cosmology Project) - *2003, Astrophys. J. 598, 102.*

[76] Perlmutter, S., et al. (Supernova Cosmology Project) - *1998, Nature 391, 51.*

[77] Riess, A. G., et al. (Supernova Search Team) - *1998, Astron. J. 116, 1009.*

[78] Schmidt, B. P., et al. (Supernova Search Team), - *1998, Astro- phys. J. 507, 46.*

[79] Tonry, J. L., et al. (Supernova Search Team) - *2003, Astro- phys. J. 594, 1.*

[80] Bamba, K., and S. D. Odintsov - *2008, JCAP 0804, 024.*

[81] Nojiri, S., and S. D. Odintsov - *2007d, Phys. Lett. B657, 238.*

[82] H. A. Buchdahl, J. - *Phys. A 11, 871 (1978).*