



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

**«Κβαντομηχανικοί μετασχηματισμοί με κβαντικά
κυκλώματα»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΠΜΣ, «ΦΥΣΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ», ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ

Δημήτριος Γ. Μαλτέζος

Επιβλέποντες : Θεόδωρος Αλεξόπουλος

Καθηγητής, ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΕΙΡΑΜΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

**«Κβαντομηχανικοί μετασχηματισμοί με κβαντικά
κυκλώματα»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Γ. Μαλτέζος

Επιβλέποντες :Θεόδωρος Αλεξόπουλος

Καθηγητής, ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 26^η Οκτωβρίου 2011. Αθήνα,

.....

Αλεξόπουλος Θεόδωρος

Καθηγητής

.....

Τσιπολίτης Γεώργιος

Αναπληρωτής Καθηγητής

.....

Κόκκορης Μιχάλης

Επίκουρος Καθηγητής

.....
Δημήτριος Γ. Μαλτέζος

Πτυχιούχος Φυσικών Επιστημών Ε.Α.Π.

Copyright © Δημήτριος Γ. Μαλτέζος, 2011.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Εισαγωγή

Η Κβαντομηχανική, και όχι μόνο αυτή, βρίσκει την τέλεια εφαρμογή της σε ένα σχετικά νέο κλάδο έρευνας, τους κβαντικούς υπολογιστές, τόσο σε επίπεδο υλικού όσο και σε επίπεδο λογισμικού. Σκοπός της διπλωματικής εργασίας αυτής είναι η εφαρμογή της Κβαντομηχανικής σε επίπεδο λογισμικού. Η εις βάθος κατανόηση των εφαρμογών της στους Κβαντικούς υπολογιστές απαιτεί γνώσεις από την επιστήμη των υπολογιστών, από τη θεωρία πληροφορίας και από την επιστήμη της Κρυπτογραφίας.

Όπως όλοι γνωρίζουμε ζούμε σε έναν κλασικό τρισδιάστατο κόσμο. Αυτό δεν σημαίνει ότι η ζωή μας, δεν εξηγείται από την Κβαντομηχανική. Αντιθέτως ο κόσμος μας είναι κβαντομηχανικός αλλά η μακροσκοπική έκφασή του δεν απαιτεί τίποτα περισσότερο από την κλασική Φυσική για να εξηγηθεί. Όμως το συνεχώς ελαττούμενο μέγεθος των συσκευών που μας περιβάλλουν και η εποχή της νανοτεχνολογίας που βρισκόμαστε κάνουν αναπόφευκτη και φυσιολογική την είσοδο της Κβαντομηχανικής στην τεχνολογία και στην έρευνα και κατ' επέκταση στη ζωή μας.

Σε επίπεδο υλικού υπολογιστών, που όπως είπαμε, δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω, προχωρούμε σε νέες τεχνικές σχεδιασμού και υλοποίησης κυκλωμάτων. Σε επίπεδο λογισμικού πρέπει να «κλείσουμε» την κλασική μας διαίσθηση και να σχεδιάσουμε αλγόριθμους, τώρα κβαντικούς αλγόριθμους, φυσικά αποδοτικότερους από τους κλασικούς. Ο συνδυασμός, της κατασκευής ευρέως ενδιαφέροντος αλγορίθμων που είναι αποδοτικότεροι (ταχύτεροι και ακριβέστεροι) από τους κλασικούς, κάνει την κατασκευή κβαντικών αλγορίθμων ενδιαφέρουσα και προκλητική.

Κβαντικά Ψηφία (quantum bits ή qubits)

Γνωρίζουμε ότι η θεμελιώδης μονάδα πληροφορίας στους υπολογιστές και στις τηλεπικοινωνίες είναι το bit (binary digit). Δηλαδή μια ψηφιακή συσκευή μπορεί να αποθηκεύει ποσότητα πληροφορίας που μπορεί να βρεθεί σε δυο διακριτές καταστάσεις. Μπορεί ως εναλλακτική προσέγγιση να θεωρηθεί ως μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει δυο πιθανές τιμές 0 και 1.

Οι κβαντικοί υπολογιστές και η κβαντική πληροφορία χτίζονται πάνω σε μια ανάλογη ιδέα αυτή των κβαντικών ψηφίων (quantum bits). Μπορούμε να φανταστούμε τα

qubits είτε ως μαθηματικά αντικείμενα είτε ως πραγματικά φυσικά συστήματα. Η διαφορά των bits με τα qubits έγκειται στο ότι τα bits μπορούν να βρεθούν σε μια κατάσταση ή την 0 ή την 1 ενώ τα qubits μπορούν να βρεθούν σε καταστάσεις διαφορετικές από τις καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Η μαθηματική περιγραφή των qubits βρίσκει την τέλεια έκφρασή της στον συμβολισμό Dirac με την χρήση των brackets. Συνοψίζοντας, το qubit μπορεί να περιγραφεί ως μια κβαντική κατάσταση σε ένα δύο καταστάσεων κβαντομηχανικό σύστημα. Αυτή η περιγραφή είναι ισοδύναμη με έναν δισδιάστατο διανυσματικό χώρο πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C}^2 . Άρα είναι δυνατόν ένα qubit να βρίσκεται σε μια κατάσταση έστω $|\psi\rangle$, που προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων $|0\rangle, |1\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Γνωρίζουμε ότι προσπαθώντας με μια μετρητική συσκευή να δούμε σε ποια κατάσταση βρίσκεται ένα κβαντομηχανικό σύστημα, επηρεάζουμε την κατάσταση του συστήματος οδηγώντας το σε μια νέα κατάσταση εντελώς διαφορετική από αυτήν που βρισκόταν πριν τη μέτρηση. Φυσικά δεν μπορεί να συμβαίνει κάτι διαφορετικό στην προσπάθειά μας να βρούμε την κατάσταση που βρίσκεται ένα qubit. Αν προχωρήσουμε σε μέτρηση θα βρούμε είτε ότι βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$ είτε στην κατάσταση $|1\rangle$. Το μόνο λοιπόν που μπορούμε να γνωρίζουμε είναι η πιθανότητα το qubit να βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$ ή στην κατάσταση $|1\rangle$. Αυτές οι δύο πιθανότητες δίνονται από τους αριθμούς $|\alpha|^2, |\beta|^2$ αντίστοιχα με $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Δηλαδή μια κατάσταση ενός qubit είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε δισδιάστατο διανυσματικό χώρο πάνω στο σώμα των μιγαδικών \mathbb{C}^2 (χώρος Hilbert). Παρόλη αυτήν την περιέργεια τα qubits είναι όντως πραγματικά και όχι απλώς ένα μαθηματικό κατασκεύασμα, καθώς η ύπαρξή τους και η συμπεριφορά τους έχει εκτενώς επιβεβαιωθεί με πειράματα.

Αναφέρθηκε νωρίτερα ότι το qubit μπορεί να περιγραφεί ως μια κβαντική κατάσταση σε ένα δύο καταστάσεων κβαντομηχανικό σύστημα. Ποιο θα μπορούσε να είναι ένα τέτοιο σύστημα; Θα μπορούσε να είναι ένα σύστημα δύο διακριτών ενεργειακών επιπέδων E_1 και E_2 σε ένα άτομο, ή ένα φωτόνιο των δύο διαφορετικών διευθύνσεων πόλωσης (οριζόντια πόλωση $\rightarrow |0\rangle$, κάθετη πόλωση $\rightarrow |1\rangle$), ή ένα σύστημα δύο ιόντων που ταλαντώνεται σε μια παγίδα ιόντων, ή τέλος ένα σωματίδιο με spin $\pm 1/2$ (spin $+1/2 : | +1/2 \rangle \rightarrow |0\rangle$, spin $-1/2 : | -1/2 \rangle \rightarrow |1\rangle$)

Σφαίρα Bloch

Η σφαίρα Bloch είναι η σχηματική αναπαράσταση των qubits, η οποία απεικονίζει σχεδόν όλα τα χαρακτηριστικά του.

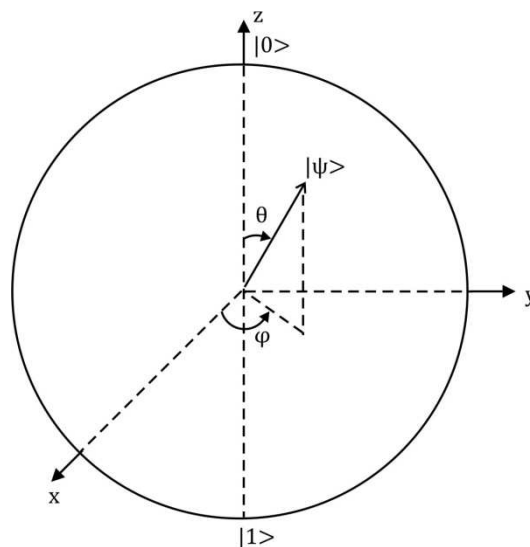
Είδαμε ότι η κατάσταση ενός qubit μπορεί να δοθεί από τη σχέση $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και $|0\rangle, |1\rangle$ διανύσματα βάσης. Μπορούμε λοιπόν να την ξαναγράψουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας στη μορφή:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \text{ με } \gamma, \varphi, \theta \in \mathbb{R}$$

Όσο αυθαίρετο και να φαίνεται ο όρος $e^{i\gamma}$ μπορεί να παραλειφθεί γιατί δεν έχει παρατηρήσιμα αποτελέσματα. (Δεν πρόκειται για αυθαιρεσία αλλά αποδεικνύεται. Η απόδειξη δεν είναι ο σκοπός αυτής της εργασίας). Συνεπώς $|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$.

Οι τιμές των φ και θ καθορίζουν τη θέση ενός σημείου σε μια μοναδιαία σφαίρα (την σφαίρα Bloch). Ένα λεπτό σημείο που πρέπει να προσεχθεί για να αποφευχθούν οι παρανοήσεις είναι οι γωνίες θ, φ μοιάζουν με αυτές στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων. Και στη σφαίρα Bloch και στις σφαιρικές συντεταγμένες $\varphi \in [0, 2\pi)$ και $\theta \in [0, \pi]$.

Όπως ακριβώς σε μια σφαίρα υπάρχουν στην επιφάνειά της άπειρα σημεία, έτσι ακριβώς και η σφαίρα Bloch μπορεί να αναπαραστήσει άπειρες καταστάσεις για το ένα qubit.



Αναπαράσταση των καταστατικών διανυσμάτων με μήτρες

Ο συμβολισμός Dirac είναι άμεσα συνδεδεμένος με την αναπαράσταση των καταστάσεων με μήτρες. Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του δισδιάστατου χώρου Hilbert \mathbb{C}^2 και του διανυσματικού χώρου των μήτρων διαστάσεων 2×1 .

Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε ένα N -διάστατο διανυσματικό χώρο με $|n_1\rangle, |n_2\rangle, \dots, |n_N\rangle$ ορθοκανονικά διανύσματα βάσης τότε η κατάσταση $|\psi\rangle$ ενός συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |n_1\rangle + \alpha_2 |n_2\rangle + \dots + \alpha_N |n_N\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |n_i\rangle \text{ με } \langle n_i | n_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$\alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Για την εύρεση των α_i πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με $\langle n_j |$,

$$\langle n_j | \psi \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle n_j | n_i \rangle \Leftrightarrow \boxed{\alpha_j = \langle n_j | \psi \rangle}$$

Συνεπώς:

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \langle n_i | \psi \rangle |n_i\rangle}$$

Παρατηρώντας την προηγούμενη σχέση η κατάσταση $|\psi\rangle$ θα μπορούσε να γραφεί ως πίνακας στήλη $N \times 1$, ως εξής:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle n_1 | \psi \rangle \\ \langle n_2 | \psi \rangle \\ \vdots \\ \langle n_N | \psi \rangle \end{pmatrix}$$

Φυσικά ανάλογα με την βάση που χρησιμοποιούμε έχουμε και άλλη αναπαράσταση της τυχαίας κατάστασης $|\psi\rangle$ του συστήματός μας.

Ποια θα είναι τώρα η αναπαράσταση με μήτρες του ket $\langle \psi |$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \psi | = \sum_{j=1}^N \langle n_j | \langle n_j | \psi \rangle^* = \sum_{j=1}^N \langle n_j | \langle \psi | n_j \rangle \\ \text{και } |\psi \rangle = \sum_{i=1}^N \langle n_i | \psi \rangle |n_i \rangle \end{array} \right\}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \langle n_j | \psi \rangle^* \langle n_i | \psi \rangle \langle n_j | n_i \rangle = \sum_{i=1}^N |\langle n_i | \psi \rangle|^2$$

Όμως επειδή ο κάθε προσθετέος $|\langle n_i | \psi \rangle|^2$ εκφράζει την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $|n_i \rangle$, το άθροισμα αυτών των πιθανοτήτων ισούται με 1.

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i=1}^N |\langle n_i | \psi \rangle|^2 = 1 \quad (\text{συνθήκη κανονικοποίησης})$$

Για να μπορούμε να εκφράζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \psi | \psi \rangle$ με μήτρες ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη κανονικοποίησης θα πρέπει να γράψουμε το $\langle \psi |$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \langle \psi | &= (\langle n_1 | \psi \rangle^*, \langle n_2 | \psi \rangle^*, \dots, \langle n_N | \psi \rangle^*) = \\ &= (\langle \psi | n_1 \rangle, \langle \psi | n_2 \rangle, \dots, \langle \psi | n_N \rangle) \end{aligned}$$

δηλαδή ως πίνακα γραμμή $1 \times N$ με στοιχεία τα μιγαδικά συζυγή των στοιχείων $\langle n_i | \psi \rangle$ του πίνακα αναπαράστασης της κατάστασης $|\psi \rangle$.

Το δικό μας σύστημα τώρα, είναι ένα κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων με $|0 \rangle$ και $|1 \rangle$ τα ορθοκανονικά διανύσματα βάσης του χώρου Hilbert (2 διαστάσεων) (\mathbb{C}^2).

Συνεπώς εφαρμόζοντας τα παραπάνω:

$$\langle 0 | 0 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle = 1 \quad \text{και} \quad \langle 0 | 1 \rangle = \langle 1 | 0 \rangle = 0$$

$$|\psi \rangle = \alpha |0 \rangle + \beta |1 \rangle. \quad \text{Άρα:}$$

$$\langle 0 | \psi \rangle = \alpha \langle 0 | 0 \rangle + \beta \langle 0 | 1 \rangle \Leftrightarrow \alpha = \langle 0 | \psi \rangle$$

Με παρόμοιο τρόπο: $\beta = \langle 1 | \psi \rangle$

Η κατάσταση, λοιπόν, του ενός qubit αναπαρίσταται με μήτρα ως εξής:

$$|\psi \rangle = \begin{pmatrix} \langle 0 | \psi \rangle \\ \langle 1 | \psi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω αναπαράσταση έχουμε για τα διανύσματα βάσης $|0\rangle$ και $|1\rangle$:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} \langle 0|0\rangle \\ \langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} \langle 0|1\rangle \\ \langle 1|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε μιλήσει για τις καταστάσεις ενός qubit. Πριν προχωρήσουμε σε «καταχωρητή» περισσότερων του ενός qubits είναι χρήσιμο να δοθούν οι ορισμοί του εξωτερικού και του τανυστικού γινομένου πινάκων και συγκεκριμένα των πινάκων διαστάσεων 2×1 που μας ενδιαφέρουν.

Έστω δύο πίνακες A, B διαστάσεων 2×1 και 1×2 αντιστοίχως.

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = (c \ d)$$

Ορίζεται το εξωτερικό γινόμενο των πινάκων A, B ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (c \ d) = \begin{pmatrix} a \otimes c \\ b \otimes d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \quad (\text{Πίνακας } 2 \times 2)$$

Μπορούμε να δούμε τη χρησιμότητα του εξωτερικού γινομένου πινάκων στο εξωτερικό γινόμενο δύο καταστάσεων $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$, όπου το εξωτερικό γινόμενο είναι το γινόμενο του ket της πρώτης επί το bra της δεύτερης. Δηλαδή αν:

$$|\psi_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad \text{και} \quad |\psi_2\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle \quad \text{τότε:}$$

$$|\psi_1\rangle \langle \psi_2| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (c^* \ d^*) = \begin{pmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{pmatrix}$$

Έστω δύο πίνακες A, B διαστάσεων 2×1 με:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Ορίζεται το τανυστικό γινόμενο των πινάκων $A \otimes B$ ως εξής:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c \\ a \cdot d \\ b \cdot c \\ b \cdot d \end{pmatrix} \quad (\text{Πίνακας } 2^2 \times 1)$$

Εν γένει το τανυστικό γινόμενο n πινάκων, διαστάσεων 2×1 ο καθένας, είναι ένας πίνακας διαστάσεως $2^n \times 1$.

Υπενθύμιση: Ένας τελεστής \hat{A} ονομάζεται μοναδιακός αν ο συζυγοανάστροφός του είναι ίδιος με τον αντίστροφό του. Δηλαδή:

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$$

Πολλαπλά qubits

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι αντί για ένα qubit έχουμε δύο qubits στις καταστάσεις $|q_0\rangle$ και $|q_1\rangle$. Ποια θα είναι η κατάσταση και πως θα συμβολίζεται, του κβαντικού αυτού «καταχωρητή» των δύο qubits (two qubit register);

$$\begin{array}{cc} \boxed{|q_1\rangle} & \boxed{|q_1\rangle} \\ 2^\circ\text{qubit} & 1^\circ\text{qubit} \end{array}$$

Πρέπει να προσέξουμε ότι η αρίθμηση των qubits αρχίζει από δεξιά προς τα αριστερά. Η κατάσταση του κβαντικού «καταχωρητή» θα δίνεται από το τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων των δύο qubits. Δηλαδή:

$$|q_R\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle \equiv |q_1\rangle |q_0\rangle \equiv |q_1 q_0\rangle$$

Ας γράψουμε την κατάσταση του καθενός qubit ως:

$$|q_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad \text{και} \quad |q_0\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$$

τότε:

$$\begin{aligned} |q_1 q_0\rangle &= |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = \\ &= (ac)|0\rangle \otimes |0\rangle + (ad)|0\rangle \otimes |1\rangle + (bc)|1\rangle \otimes |0\rangle + (bd)|1\rangle \otimes |1\rangle = \\ &= \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \end{aligned}$$

με $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11} \in \mathbb{C}$

$$\text{και } |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$$

Παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός των δύο αυτών qubits οδηγεί σε ένα σύστημα τεσσάρων βασικών καταστάσεων των $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ και $|11\rangle$ που αποτελούν και μια βάση του τετραδιάστατου χώρου Hilbert (ορθοκανονική βάση)

Υπό μορφή μητρών:

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{και } \langle 00|01\rangle = \langle 00|10\rangle = \langle 00|11\rangle = \langle 01|10\rangle = \langle 01|11\rangle = \langle 10|11\rangle = 0 \\ \langle 00|00\rangle = \langle 01|01\rangle = \langle 10|10\rangle = \langle 11|11\rangle = 1$$

Αυτό που πρέπει να έχουμε υπόψη μας και είναι μεγάλης σημασίας είναι ότι σε ένα σύστημα δύο qubits που βρίσκεται σε υπέρθεση των βασικών καταστάσεων μπορεί να αποθηκεύσει και τους τέσσερις δυαδικούς 00,01,10,11, σε αντίθεση με το κλασικό σύστημα των δύο bits. Το τελευταίο μπορεί να αποθηκεύσει μόνο έναν από τους δυαδικούς, ή τον 00, ή τον 01, ή τον 10, ή τον 11. Αυτή η δυνατότητα να μπορούν να κρατηθούν ταυτόχρονα και οι τέσσερις δυαδικοί αποτελεί την βάση της κβαντικής παραλληλίας για την οποία θα μιλήσουμε αργότερα.

Γενικότερα για n qubits:

$$|q_R\rangle = |q_{n-1}\rangle \otimes |q_{n-2}\rangle \otimes \dots \otimes |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle \equiv |q_{n-1}q_{n-2}\dots q_1q_0\rangle$$

με τις βασικές καταστάσεις (ορθοκανονική βάση του n-διάστατου χώρου Hilbert) να είναι οι:

$$|0\dots 00\rangle, |0\dots 01\rangle, |0\dots 10\rangle, |0\dots 11\rangle, \dots, |11\dots 11\rangle$$

Αν αντί για δυαδικό σύστημα χρησιμοποιηθεί το δεκαδικό τότε:

$|0\rangle_n, |1\rangle_n, |2\rangle_n, \dots, |2^n - 1\rangle_n$ οι βασικές καταστάσεις.

Ο δείκτης n συμβολίζει ότι πρόκειται για «καταχωρητή» των n qubits.

Δηλαδή: $\langle l|k\rangle_n = \delta_{lk}$ με $l, k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$

$$|q_R\rangle = \alpha_0|0\rangle_n + \alpha_1|1\rangle_n + \dots + \alpha_{2^n-1}|2^n - 1\rangle_n$$

Το σύστημα αυτό των δύο qubits κρατά ταυτόχρονα 2^n αριθμούς τους: $0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$.

Παρατήρηση: Αν f_1, f_2 , δύο διανύσματα ενός χώρου Hilbert και \hat{A}_1, \hat{A}_2 δύο γραμμικοί τελεστές στον χώρο αυτόν ορίζουμε τον τελεστή $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ στον χώρο $H \otimes H$ από τη σχέση:

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)(f_1 \otimes f_2) = (\hat{A}_1 f_1) \otimes (\hat{A}_2 f_2)$$

Επανερχόμενοι στο κβαντικό σύστημα των 2-qubits το καταστατικό διάνυσμα του καταχωρητή αυτού γνωρίζουμε ότι γράφεται ως εξής:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

με $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11} \in \mathbb{C}$

Μετρώντας το δεύτερο qubit παίρνουμε την τιμή 0 με πιθανότητα $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$. Η μετά τη μέτρηση κατάσταση θα είναι τώρα η $|\psi'\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle$. Όμως δεν είναι κανονικοποιημένη.

Συνεπώς: $|\psi'\rangle = N(\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle)$

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = 1 \Leftrightarrow |N|^2 (\langle 00 | \alpha_{00}^* + \langle 01 | \alpha_{01}^*) (\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |N|^2 (|\alpha_{00}|^2 \langle 00|00\rangle + \alpha_{00}^* \alpha_{01} \langle 00|01\rangle + \alpha_{01}^* \alpha_{00} \langle 01|00\rangle + |\alpha_{01}|^2 \langle 01|01\rangle) = 1$$

$$\text{Συνεπώς: } |N|^2 (|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2) = 1 \Leftrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

$$\text{Η κανονικοποιημένη κατάσταση είναι τώρα η } |\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

Αν τώρα στην ειδική περίπτωση $\alpha_{00} = \alpha_{01} = 1$ τότε παίρνουμε τη λεγόμενη κατάσταση Bell ή ζεύγος EPR (Einstein – Podolski – Rosen) που είναι:

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Αυτή η κατάσταση είναι υπεύθυνη για πολλές εκπλήξεις στη θεωρία των κβαντικών υπολογισμών και της κβαντικής πληροφορίας.

Η κατάσταση Bell έχει την ιδιότητα ότι μετρώντας το δεύτερο qubit παίρνουμε δύο πιθανά αποτελέσματα: 0 με πιθανότητα $1/2$, αφήνοντας την κατάσταση μετά τη μέτρηση να είναι η $|00\rangle$ και 1 με πιθανότητα $1/2$, αφήνοντας την κατάσταση μετά τη μέτρηση να είναι η $|11\rangle$. Συμπερασματικά, μια μέτρηση του πρώτου qubit δίνει το

ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της μέτρησης του δεύτερου qubit. Δηλαδή, τα εξαγόμενα της μέτρησης είναι συσχετισμένα.

Είδαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου ότι αν έχουμε 2 qubits το ένα στην $|q_1\rangle = \alpha|0\rangle + b|1\rangle$ και το άλλο στην $|q_0\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$ τότε η κατάσταση $|\psi\rangle$ του ζευγαριού μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο των ξεχωριστών αυτών καταστάσεων.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = (\alpha|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \\ &= (\alpha c)|00\rangle + (\alpha d)|01\rangle + (bc)|10\rangle + (bd)|11\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \alpha c \\ \alpha d \\ bc \\ bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει $|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix} \text{ με } |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$$

Η γενική 2-qubit κατάσταση $\begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}$ ταυτίζεται με την ειδική μορφή $\begin{pmatrix} \alpha c \\ \alpha d \\ bc \\ bd \end{pmatrix}$ αν και μόνο αν $\alpha_{00}\alpha_{11} = \alpha_{01}\alpha_{10}$.

Όμως μια τέτοια σχέση εν γένει δεν μπορεί να ισχύει γιατί η μόνη δεσμευτική σχέση μεταξύ των πλατών είναι η συνθήκη κανονικοποίησης και καμία άλλη. Συνεπώς, η κατάσταση του ζεύγους των 2-qubit δεν γράφεται ως γινόμενο καταστάσεων του 1-qubit. Αυτό γενικεύεται για τις καταστάσεις των n-qubits. Τέτοιες καταστάσεις που δεν προκύπτουν από γινόμενα καταστάσεων 2 ή περισσότερων qubits ονομάζονται κβαντικά διαπλεκόμενες καταστάσεις (entangled states). Για το φαινόμενο της κβαντικής διεμπλοκής (ή διαπλοκής) (quantum entanglement) θα μιλήσουμε αναλυτικότερα αργότερα.

Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή κβαντικών κυκλωμάτων χρησιμοποιώντας τώρα κβαντικές πύλες (σε αντιστοιχία με τις κλασικές πύλες αλλά εντελώς διαφορετικές από αυτές) είναι χρήσιμο να δοθούν κάποια παραδείγματα με τη μορφή

ερωταπαντήσεων που τα αποτελέσματα κάποιων εξ' αυτών θα χρησιμοποιηθούν σε επόμενες παραγράφους.

Παράδειγμα 1

Ο τελεστής NOT (X) εναλλάσσει τις δύο καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ ως εξής: $\hat{X}: |X\rangle \rightarrow |\bar{X}\rangle$, όπου $X \in \{0,1\}$ ($|X\rangle$: κατάσταση ενός κλασικού bit)

- i) Η δράση του NOT είναι αντιστρεπτή
- ii) Βρείτε την αναπαράσταση με μήτρα του X στην βάση $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
- iii) Ποιού άλλου τελεστή η δράση σε ένα κλασικό bit είναι αντιστρεπτή;

i) $\hat{X}^2|\bar{X}\rangle = |\bar{\bar{X}}\rangle$. Δρώντας άλλη μια φορά με τον \hat{X} παίρνουμε $\hat{X}^2|X\rangle = \hat{X}|\bar{X}\rangle = |\bar{\bar{X}}\rangle = |X\rangle$

Δηλαδή $(\hat{X}^2 - \hat{I})|X\rangle = 0$

Άρα $\hat{X}^2 = \hat{I}$ (\hat{I} : ταυτόχρονος τελεστής)

Συνεπώς επειδή ο \hat{X} έχει αντίστροφο η δράση του NOT είναι αντιστρεπτή.

- ii) Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{X} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- iii) Επειδή $\hat{X}^2 = \hat{I}$ και ο \hat{I} έχει αντίστροφο συνεπώς η δράση του ταυτοτικού τελεστή είναι αντιστρεπτή. Δεν υπάρχει κανείς άλλος τελεστής, εκτός των \hat{X} και \hat{I} , του οποίου η δράση να είναι αντιστρεπτή όταν δρα στις καταστάσεις $|0\rangle, |1\rangle$ ενός κλασικού bit.

Παράδειγμα 2

Σε σύστημα των n Qbits ορίζουμε τον τελεστή εναλλαγής (swap operator) \hat{S}_{ij} ως εξής:

$$\hat{S}_{ij}|x_{n-1} \dots x_j \dots x_i \dots x_1 x_0\rangle = |x_{n-1} \dots x_i \dots x_j \dots x_1 x_0\rangle$$

Ο τελεστής αυτός εναλλάσσει τις καταστάσεις $|x_i \rangle, |x_j \rangle$ των Cbits (κλασικών bits) i και j .

Για ένα ζεύγος Cbits: $\hat{S}_{10}|xy \rangle = |yx \rangle$ με $x, y \in \{0,1\}$

- i) Είναι αυτός ο μετασχηματισμός αντιστρέψιμος;
- ii) Βρείτε την αναπαράσταση του \hat{S}_{10} με τη μορφή μήτρας

i) $\hat{S}_{10}^2|xy \rangle = \hat{S}_{10}(\hat{S}_{10}|xy \rangle) = \hat{S}_{10}|yx \rangle = |xy \rangle$

Συνεπώς $\hat{S}_{10}^2 = \hat{I}$. Άρα ο \hat{S}_{10} είναι αναστρέψιμος.

ii) $\hat{S}_{10} = |00 \rangle \langle 00| + |01 \rangle \langle 10| + |10 \rangle \langle 01| + |11 \rangle \langle 11|$

Άρα:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{10} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) + \\ &\qquad\qquad\qquad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 0 \ 1) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Η δράση του τελεστή \hat{C}_{ij} (ελεγχόμενο-OXI, Controlled not) ορίζεται ως εξής:

$$\hat{C}_{ij}|x_{n-1}, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_1, x_0 \rangle = |x_{n-1}, \dots, x_j \oplus x_i, \dots, x_i, \dots, x_1, x_0 \rangle$$

Ο δείκτης i αναφέρεται στο Cbit ελέγχου (control Cbit i) και ο δείκτης j αναφέρεται στο Cbit στόχο (target Cbit j).

- i) Δώστε τον ορισμό του τελεστή αυτού για σύστημα των 2 Qbits.
- ii) Η δράση του τελεστή αυτού είναι αντιστρέψιμη;

iii) Ποια η αναπαράσταση αυτού του τελεστή με τη μορφή μήτρας;

iv) Αποδείξτε ότι $\hat{S}_{ij} = \hat{C}_{ij}\hat{C}_{ji}\hat{C}_{ij}$

i) $\hat{C}_{10}|xy\rangle = |x, y\oplus x\rangle$, $\hat{C}_{01} = |x\oplus y, y\rangle$

όπου $x\oplus y = (x + y)\text{mod}2$ (ή αλλιώς αποκλειστικό Ή – exclusive OR)

ii) $\hat{C}_{10}^2|xy\rangle = \hat{C}_{10}(\hat{C}_{10}|xy\rangle) = \hat{C}_{10}|x, y\oplus x\rangle = |x, y\oplus x\oplus x\rangle \equiv |x, y\oplus 0\rangle = |xy\rangle$

Άρα $\hat{C}_{10}^2 = \hat{I}$, $\hat{C}_{10}^{-1} = \hat{C}_{10}$ (Ομοίως $\hat{C}_{10}^2 = \hat{I}$)

iii) $\hat{C}_{10} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 0\ 0\ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ 0\ 1\ 0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $\hat{C}_{10} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 01| =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $\hat{C}_{10}\hat{C}_{01}(\hat{C}_{10}|xy\rangle) = \hat{C}_{10}(\hat{C}_{01}|x, y\oplus x\rangle) = \hat{C}_{10}|x\oplus y\oplus x, y\oplus x\rangle =$

$$= \hat{C}_{10}|y, y\oplus x\rangle = |y, y\oplus x\oplus y\rangle = |yx\rangle = \hat{S}_{10}|xy\rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_{01}\hat{C}_{10}(\hat{C}_{01}|xy\rangle) &= \hat{C}_{01}(\hat{C}_{10}|x\oplus y, y\rangle) = \hat{C}_{01}|x\oplus y, y\oplus x\oplus y\rangle = \\ &= \hat{C}_{01}|x\oplus y, x\rangle = |x\oplus y\oplus x, x\rangle = |yx\rangle = \hat{S}_{01}|xy\rangle\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Ο τελεστής 1-Cbit είναι απλά ο τελεστής προβολής \hat{n} στην κατάσταση $|1\rangle$

$\hat{n}|x\rangle = x|x\rangle$ με $x = 0$ ή 1

Ορίζοντας τον συμπληρωματικό τελεστή $\hat{\bar{n}} = 1 - \hat{n}$

- i) Βρείτε την αναπαράστασή τους υπό τη μορφή μητρών
- ii) Αποδείξτε ότι: $\hat{n}^2 = \hat{n}$, $\hat{\bar{n}}^2 = \hat{\bar{n}}$, $\hat{n}\hat{\bar{n}} = \hat{\bar{n}}\hat{n} = 0$, $\hat{n} + \hat{\bar{n}} = \hat{I}$
- iii) Αποδείξτε ότι: $\hat{n}\hat{X} = \hat{X}\hat{\bar{n}}$, $\hat{\bar{n}}\hat{X} = \hat{X}\hat{n}$

$$i) \quad \hat{n}|0\rangle = 0 \cdot |0\rangle \quad \text{και} \quad \hat{n}|1\rangle = 1 \cdot |1\rangle = |1\rangle$$

$$\hat{\bar{n}}|x\rangle \equiv (1 - \hat{n})|x\rangle = |x\rangle - \hat{n}|x\rangle = |x\rangle - x|x\rangle = (1 - x)|x\rangle = \bar{x}|x\rangle$$

$$\hat{\bar{n}}|0\rangle = 1 \cdot |0\rangle = |0\rangle \quad \text{και} \quad \hat{\bar{n}}|1\rangle = 0 \cdot |1\rangle$$

$$\text{Αρα: } \hat{n} = |1\rangle\langle 1| \quad \text{και} \quad \hat{\bar{n}} = |0\rangle\langle 0|$$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\bar{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ii) \quad \hat{n}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{n}, \quad \hat{\bar{n}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\bar{n}}$$

$$(\hat{n}\hat{\bar{n}})|x\rangle = \hat{n}(\hat{\bar{n}}|x\rangle) = \hat{n}(\bar{x}|x\rangle) = \bar{x}(\hat{n}|\bar{x}\rangle) = \bar{x}x|x\rangle = 0 \cdot |x\rangle = \hat{0}|x\rangle$$

$$(\hat{\bar{n}}\hat{n})|x\rangle = \hat{\bar{n}}(\hat{n}|x\rangle) = \hat{\bar{n}}(x|x\rangle) = x(\hat{\bar{n}}|x\rangle) = x\bar{x}|x\rangle = 0 \cdot |x\rangle = \hat{0}|x\rangle$$

$$\text{Συνεπώς: } \hat{n}\hat{\bar{n}} = \hat{\bar{n}}\hat{n} = 0$$

$$(\hat{n} + \hat{\bar{n}})|x\rangle = \hat{n}|x\rangle + \hat{\bar{n}}|x\rangle = x|x\rangle + \bar{x}|x\rangle = (x + \bar{x})|x\rangle = 1 \cdot |x\rangle = |x\rangle = \hat{I}|x\rangle$$

$$\text{Αρα: } \hat{n} + \hat{\bar{n}} = \hat{I}$$

$$iii) \quad \left. \begin{aligned} (\hat{n}\hat{X})|x\rangle &= \hat{n}(\hat{X}|x\rangle) = \hat{n}|\bar{x}\rangle = \bar{x}|\bar{x}\rangle \\ (\hat{X}\hat{\bar{n}})|x\rangle &= \hat{X}(\hat{\bar{n}}|x\rangle) = \hat{X}(\bar{x}|x\rangle) = \bar{x}(\hat{X}|x\rangle) = \bar{x}|\bar{x}\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{n}\hat{X} = \hat{X}\hat{\bar{n}}$$

$$\left. \begin{aligned} (\hat{n}\hat{X})|x\rangle &= \hat{n}(\hat{X}|x\rangle) = \hat{n}|\bar{x}\rangle = \bar{x}|\bar{x}\rangle = x|\bar{x}\rangle \\ (\hat{X}\hat{n})|x\rangle &= \hat{X}(\hat{n}|x\rangle) = \hat{X}(x|x\rangle) = x(\hat{X}|x\rangle) = x|\bar{x}\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{n}\hat{X} = \hat{X}\hat{n}$$

Παράδειγμα 5

Δίνεται ότι ο τελεστής εναλλαγής \hat{S}_{ij} μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{S}_{ij} = \hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j + (\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j)$$

όπου οι δείκτες i, j αναφέρονται στα Cbits i, j αντίστοιχα.

Δείξτε ότι η δράση του \hat{S}_{ij} είναι αντιστρεπτή χρησιμοποιώντας μόνο τις σχέσεις του παραδείγματος 4 και το γεγονός ότι τελεστές που δρουν σε διαφορετικά Cbits μετατίθενται.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ij}^2 &= \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j(\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j) + \\ &+ \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j(\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j) + \\ &+ (\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j)\hat{n}_i\hat{n}_j + (\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j)\hat{n}_i\hat{n}_j + \\ &+ (\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j)(\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j) \end{aligned}$$

$$\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j = \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j = \hat{n}_i^2\hat{n}_j^2 = \hat{n}_i\hat{n}_j$$

$$\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j = \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j = 0$$

$$\hat{n}_i\hat{n}_j(\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j) = \hat{n}_i\hat{n}_j(\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_i\hat{n}_j) = \hat{n}_i\hat{n}_j(\hat{X}_i\hat{n}_i\hat{X}_j\hat{n}_j + \hat{X}_i\hat{n}_i\hat{X}_j\hat{n}_j) =$$

$$= \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{X}_i\hat{n}_i\hat{X}_j\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{X}_i\hat{n}_i\hat{X}_j\hat{n}_j = \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_j = 0$$

$$\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j = \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j = 0$$

$$\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j = \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j = \hat{n}_i\hat{n}_j = (1 - \hat{n}_i)(1 - \hat{n}_j) = 1 - \hat{n}_j - \hat{n}_i + \hat{n}_i\hat{n}_j$$

$$\hat{n}_i\hat{n}_j(\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j) = \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_i\hat{n}_j =$$

$$= \hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_i + \hat{n}_j\hat{X}_i\hat{X}_j\hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j = 0$$

$$(\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j) = (\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j) = 0$$

$$(\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j) = (\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{n}_i\hat{n}_j\hat{n}_j) = 0$$

$$\begin{aligned}
& (\hat{X}_i \hat{X}_j)(\hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i \hat{n}_j)(\hat{X}_i \hat{X}_j)(\hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i \hat{n}_j) = (\hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j)(\hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j) = \\
& = 0 + \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j + 0 = \\
& = \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_j + \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_j \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i = \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{n}_j \hat{n}_i = \\
& = \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{n}_j \hat{n}_i = (1 - \hat{n}_i) \hat{n}_j + (1 - \hat{n}_j) \hat{n}_i = \hat{n}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i - \hat{n}_j \hat{n}_i
\end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \hat{S}_{ij}^2 = \hat{n}_i \hat{n}_j + 1 - \hat{n}_j - \hat{n}_i + \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{n}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i - \hat{n}_j \hat{n}_i = 1$$

$$\text{Άρα: } \hat{S}_{ij}^2 = 1$$

Συνεπώς η δράση του \hat{S}_{ij} είναι αντιστρεπτή.

Παράδειγμα 6

Ο τελεστής \hat{C}_{ij} (Controlled not) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{C}_{ij} = \hat{n}_i + \hat{X}_j \hat{n}_i$$

Αποδείξτε τη σχέση αυτή σε σύστημα των 2 Qbits

Δηλαδή πρέπει να αποδειχθεί ότι:

$$\hat{C}_{10} = \hat{n}_1 + \hat{X}_0 \hat{n}_1 \quad \text{και} \quad \hat{C}_{01} = \hat{n}_0 + \hat{X}_1 \hat{n}_0$$

Έστω $|xy\rangle$ τυχαίο διάνυσμα βάσης με $x, y \in \{0, 1\}$

Τότε: $\hat{C}_{10}|xy\rangle = |x, y \oplus x\rangle$

$$\begin{aligned}
(\hat{n}_1 + \hat{X}_0 \hat{n}_1)|xy\rangle &= \hat{n}_1|xy\rangle + \hat{X}_0 \hat{n}_1|xy\rangle = \bar{x}|xy\rangle + x\hat{X}_0|xy\rangle = \\
&= \bar{x}|xy\rangle + x|x\bar{y}\rangle = \\
&= \bar{x}|x\rangle|y\rangle + x|x\rangle|\bar{y}\rangle = \\
&= |x\rangle \otimes (\bar{x}|y\rangle + x|\bar{y}\rangle) = |x, y \oplus x\rangle
\end{aligned}$$

Ομοίως: $\hat{C}_{01}|xy\rangle = |x \oplus y, y\rangle$

$$\begin{aligned}
(\hat{n}_0 + \hat{X}_1 \hat{n}_0)|xy\rangle &= \hat{n}_0|xy\rangle + \hat{X}_1 \hat{n}_0|xy\rangle = \bar{y}|xy\rangle + y\hat{X}_1|xy\rangle = \\
&= \bar{y}|xy\rangle + y|\bar{x}y\rangle = (\bar{y}|x\rangle + y|\bar{x}\rangle) \otimes |y\rangle = |x \oplus y, y\rangle
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7

Ορίζοντας τον τελεστή $\hat{Z} = \hat{n} - \hat{n}$ απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- i) Σε ποιο χώρο Hilbert δρα αυτός ο τελεστής;
- ii) Ποια η αναπαράστασή του με μήτρα; Πως δρα στα διανύσματα βάσης;
- iii) Αποδείξτε ότι ο Z αντιμετατίθεται με τον X .
- iv) Ποιες σχέσεις συνδέουν τους \hat{n} και \hat{n} με τον \hat{Z} ;
- v) Αποδείξτε ότι: $\hat{C}_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathcal{Q}}_i) + \frac{1}{2}\hat{X}_j(1 - \hat{\mathcal{Q}}_i) =$

$$= \frac{1}{2}(1 + \hat{X}_j) + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{Q}}_i(1 - \hat{X}_j)$$
- vi) Πως γράφεται ο \hat{C}_{ji} ;

i) Ο τελεστής \hat{Z} δρα στο χώρο Hilbert διάστασης δύο.

$$\text{ii) } \hat{\mathcal{Q}} = \hat{n} - \hat{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{Q}}|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$\hat{\mathcal{Q}}|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle$$

$$\text{Συνεπώς: } \hat{\mathcal{Q}}|x\rangle = (-1)^x|x\rangle \text{ με } x \in \{0,1\}$$

iii) Πρέπει να αποδειχθεί ότι: $\{\hat{X}, \hat{\mathcal{Q}}\} = 0 = \hat{X}\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{Q}}\hat{X}$

$$\begin{aligned} (\hat{X}\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{Q}}\hat{X})|x\rangle &= \hat{X}(\hat{\mathcal{Q}}|x\rangle) + \hat{\mathcal{Q}}(\hat{X}|x\rangle) = (-1)^x(\hat{X}|x\rangle) + \hat{\mathcal{Q}}|x\rangle = \\ &= (-1)^x|\bar{x}\rangle + (-1)^{\bar{x}}|\bar{x}\rangle = [(-1)^x + (-1)^{1-x}]|\bar{x}\rangle = 0|\bar{x}\rangle \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \hat{X}\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{Q}}\hat{X} = \{\hat{X}, \hat{\mathcal{Q}}\} = 0$$

$$\text{iv) } \left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}} &= \hat{n} - \hat{n} \\ \hat{n} + \hat{n} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{\mathcal{Q}} = 1 - \hat{n} - \hat{n} \Leftrightarrow \hat{n} = \frac{1}{2}(1 - \hat{\mathcal{Q}})$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}} &= \hat{n} - \hat{n} \\ \hat{n} &= 1 - \hat{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{\mathcal{Q}} = \hat{n} - 1 + \hat{n} \Leftrightarrow \hat{n} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathcal{Q}})$$

$$\text{v) } \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathcal{Q}}_i) + \frac{1}{2}\hat{X}_j(1 - \hat{\mathcal{Q}}_i) = \frac{1}{2}(1 + \hat{n}_i - \hat{n}_i) + \frac{1}{2}\hat{X}_j(1 - \hat{n}_i + \hat{n}_i) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \hat{n}_i - \hat{n}_i + \hat{X}_j - \hat{X}_j \hat{n}_i + \hat{X}_j \hat{n}_i) = \frac{1}{2}(\hat{n}_i + \hat{n}_i + \hat{X}_j \hat{n}_i + \hat{X}_j \hat{n}_i) = \hat{n}_i + \hat{X}_j \hat{n}_i =$$

$$= \hat{C}_{ij}$$

Συνεπώς: $\hat{C}_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \hat{Z}_i) + \frac{1}{2}\hat{X}_j(1 - \hat{Q}_i)$

$$\hat{C}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\hat{Q}_i + \frac{1}{2}\hat{X}_j - \frac{1}{2}\hat{X}_j\hat{Q}_i =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\hat{X}_j + \frac{1}{2}\hat{Q}_i - \frac{1}{2}\hat{X}_j\hat{Q}_i = \frac{1}{2}(1 + \hat{X}_j) + \frac{1}{2}\hat{Q}_i - \frac{1}{2}\hat{Q}_i\hat{X}_j =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \hat{X}_j) + \frac{1}{2}\hat{Q}_i(1 - \hat{X}_j)$$

vi) Ο \hat{C}_{ji} θα γράφεται ως εξής:

$$\hat{C}_{ji} = \frac{1}{2}(1 + \hat{Z}_j) + \frac{1}{2}\hat{X}_i(1 - \hat{Q}_j) = \frac{1}{2}(1 + \hat{X}_i) + \frac{1}{2}\hat{Q}_j(1 - \hat{X}_i)$$

Βλέπουμε ότι εναλλάσσοντας τους τελεστές \hat{X} και \hat{Z} παίρνουμε ως αποτέλεσμα την εναλλαγή των Cbit ελέγχου και στόχου, δηλαδή από \hat{C}_{ij} σε \hat{C}_{ji} .

Παράδειγμα 8

Δίνεται ο μετασχηματισμός Walsh-Hadamard $\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + \hat{Q})$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- i) Είναι ο μετασχηματισμός αντιστρέψιμος;
- ii) Δώστε τη μορφή του με μήτρα. Ποια η δράση του στα διανύσματα βάσης;
- iii) Αποδείξτε ότι: $\hat{H}\hat{X}\hat{H} = \hat{Z}$ και $\hat{H}\hat{Z}\hat{H} = \hat{X}$
- iv) Αποδείξτε ότι: $\hat{C}_{ji} = (\hat{H}_i\hat{H}_j)\hat{C}_{ij}(\hat{H}_i\hat{H}_j)$
- i) Χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις $\hat{X}^2 = \hat{Q}^2 = 1$, $\hat{X}\hat{Q} = -\hat{Q}\hat{X}$ έχουμε:

$$\hat{H}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + \hat{Z})\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + \hat{Z}) = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{X}\hat{Z} + \hat{Z}\hat{X} + \hat{Z}^2) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

Άρα είναι αντιστρέψιμος με $\hat{H}^{-1} = \hat{H}$

$$\text{ii) } \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + \hat{Q}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\text{iii) } \hat{H}\hat{X}\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + \hat{Z}) \hat{X} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + \hat{Z}) = \frac{1}{2} (\hat{X} + \hat{Z}) (\hat{X}^2 + \hat{X}\hat{Z}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{X} + \hat{Z}) (1 + \hat{X}\hat{Z}) = \frac{1}{2} (\hat{X} + \hat{X}^2\hat{Z} + \hat{Z} + \hat{Z}\hat{X}\hat{Z}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{X} + \hat{Z} + \hat{Z} - \hat{Z}^2\hat{X}) = \frac{1}{2} (\hat{X} + 2\hat{Z} - \hat{X}) = \hat{Z}$$

$$\hat{H}\hat{Z}\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{X} + \hat{Z}) \hat{Z} (\hat{X} + \hat{Z}) = \frac{1}{2} (\hat{X} + \hat{Z}) (\hat{Z}\hat{X} + 1) = \frac{1}{2} (\hat{X}\hat{Z}\hat{X} + \hat{X} + \hat{Z}^2\hat{X} + \hat{Z}) =$$

$$= \frac{1}{2} (-\hat{X}^2\hat{Z} + 2\hat{X} + \hat{Z}) = \frac{1}{2} (-\hat{Z} + \hat{Z} + 2\hat{X}) = \hat{X}$$

$$\text{iv) } (\hat{H}_i\hat{H}_j)\hat{C}_{ij}(\hat{H}_i\hat{H}_j) = (\hat{H}_i\hat{H}_j) \left[\frac{1}{2}(1+\hat{Z}_i) + \frac{1}{2}\hat{X}_j(1-\hat{Z}_i) \right] (\hat{H}_i\hat{H}_j) =$$

$$= \frac{1}{2} \hat{H}_i\hat{H}_j(1+\hat{Z}_i)\hat{H}_i\hat{H}_j + \frac{1}{2} \hat{H}_i\hat{H}_j\hat{X}_j(1-\hat{Z}_i)\hat{H}_i\hat{H}_j =$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{H}_i\hat{H}_j\hat{H}_i\hat{H}_j + \hat{H}_i\hat{H}_j\hat{Z}_i\hat{H}_i\hat{H}_j) + \frac{1}{2} (\hat{H}_i\hat{H}_j\hat{X}_j\hat{H}_i\hat{H}_j - \hat{H}_i\hat{H}_j\hat{X}_j\hat{Z}_i\hat{H}_i\hat{H}_j) =$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{H}_i^2\hat{H}_j^2 + \hat{H}_j\hat{H}_i\hat{Z}_i\hat{H}_i\hat{H}_j) + \frac{1}{2} (\hat{H}_i\hat{H}_j\hat{X}_j\hat{H}_i\hat{H}_j - \hat{H}_i\hat{H}_j\hat{X}_j\hat{H}_j\hat{Z}_i\hat{H}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \hat{H}_j\hat{X}_i\hat{H}_j) + \frac{1}{2} (\hat{H}_i\hat{Z}_j\hat{H}_i - \hat{H}_i\hat{Z}_j\hat{Z}_i\hat{H}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \hat{H}_j^2\hat{X}_i) + \frac{1}{2} (\hat{H}_j^2\hat{Z}_j - \hat{Z}_j\hat{H}_i\hat{Z}_i\hat{H}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \hat{X}_i) + \frac{1}{2} (\hat{Z}_j - \hat{Z}_j\hat{X}_i) = \frac{1}{2} (1 + \hat{X}_i) + \frac{1}{2} \hat{Z}_j (1 - \hat{X}_i) = \hat{C}_{ji}$$

Παράδειγμα 9

Μπορούμε να ορίσουμε μια ελεγχόμενη $-Z$ δράση \hat{C}_{ij}^z , η οποία αφήνει ανεπηρέαστη την κατάσταση του Cbit στόχου j εάν η κατάσταση του Cbit ελέγχου είναι $|0\rangle$, ενώ δρα με τον τελεστή \hat{Z} στο Cbit στόχο αν η κατάσταση του Cbit ελέγχου είναι $|1\rangle$. Αποδείξτε ότι σε ένα σύστημα των 2-Cbits ισχύουν οι σχέσεις:

$$i) \quad \hat{H}_j \hat{C}_{ij}^z \hat{H}_j = \hat{C}_{ij}^z \quad \text{και} \quad \hat{H}_i \hat{C}_{ji}^z \hat{H}_i = \hat{C}_{ji}^z$$

$$ii) \quad \hat{H}_j \hat{C}_{ij}^z \hat{H}_j = \hat{H}_i \hat{C}_{ji}^z \hat{H}_i \quad \text{δηλαδή} \quad \hat{C}_{ij}^z = \hat{C}_{ji}^z$$

Οι σχέσεις αυτές γενικεύονται σε συστήματα των n -Cbits;

i) Στο σύστημα των 2 Cbits:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{10}^z &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |11\rangle\langle 11| = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1000) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0100) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0010) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0001) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Q}}_0|00\rangle &= (\hat{I} \otimes \hat{\mathbb{Q}}_0)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hat{I}|0\rangle \otimes \hat{\mathbb{Q}}_0|0\rangle = |0\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle) \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbb{Q}}_0|01\rangle = |0\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle)$$

$$\hat{\mathbb{Q}}_0|10\rangle = |1\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$$

$$\hat{\mathbb{Q}}_0|11\rangle = |1\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle)$$

$$\text{Άρα: } \hat{\mathbb{Q}}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)\langle 00| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle)\langle 01| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)\langle 10| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle)\langle 11|$$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{Αρα: } \hat{H}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1000) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0100) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (0010) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (0001) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αρα: } \hat{H}_0 \hat{C}_{10} \hat{\mathbb{Q}}_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{C}_{10}^z \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι: $\hat{H}_1 \hat{C}_{01} \hat{\mathbb{Q}}_1 = \hat{C}_{01}^z$

ii) Είδαμε στο παράδειγμα 8 ότι: $\hat{C}_{ji} = (\hat{\mathbb{Q}}_i \hat{\mathbb{Q}}_j) \hat{C}_{ij} (\hat{\mathbb{Q}}_i \hat{\mathbb{Q}}_j)$

Συνεπώς: $\hat{\mathbb{Q}}_i \hat{C}_{ji} \hat{\mathbb{Q}}_i = \hat{\mathbb{Q}}_i \hat{\mathbb{Q}}_i \hat{\mathbb{Q}}_j \hat{C}_{ij} \hat{\mathbb{Q}}_i \hat{\mathbb{Q}}_j \hat{\mathbb{Q}}_i$

Επειδή $[\hat{\mathbb{Q}}_i, \hat{\mathbb{Q}}_j] = 0$ και $\hat{H}_i^2 = 1$ έχουμε:

$$\hat{\mathbb{Q}}_i \hat{C}_{ji} \hat{\mathbb{Q}}_i = \hat{H}_i^2 \hat{\mathbb{Q}}_j \hat{C}_{ij} \hat{\mathbb{Q}}_j \hat{H}_i^2 = \hat{\mathbb{Q}}_j \hat{C}_{ji} \hat{\mathbb{Q}}_j$$

Οι σχέσεις αυτές εφαρμόζονται και σε συστήματα των n-Cbits.

Παράδειγμα 10

Ορίζοντας τον τελεστή $\hat{Y} = i\hat{X}\hat{Z}$ απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- i) Βρείτε την αναπαράσταση του \hat{Y} υπό μορφή μήτρας
- ii) Βρείτε μια σχέση για τον \hat{S}_{ij} συναρτήσει μόνο των \hat{X} και \hat{Z}
- iii) Αποδείξτε ότι:

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \hat{X}_i\hat{X}_j + \hat{Y}_i\hat{Y}_j + \hat{Z}_i\hat{Z}_j) = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}^{(i)}\vec{\sigma}^{(j)})$$

όπου $\vec{\sigma}$ είναι ένα «τρισεδιάστατο διάνυσμα» του οποίου οι συνιστώσες είναι 2x2 πίνακες (οι πίνακες του Pauli)

$$\hat{\sigma}_x \equiv \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y \equiv \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z \equiv \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \hat{Y} = i\hat{X}\hat{Z} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) Γνωρίζουμε ότι: } \hat{S}_{ij} = \hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{\pi}_i\hat{\pi}_j + (\hat{X}_i\hat{X}_j)(\hat{n}_i\hat{n}_j + \hat{\pi}_i\hat{\pi}_j)$$

$$\text{και } \hat{n} = \frac{1}{2}(1 - \hat{Z}), \quad \hat{\pi} = \frac{1}{2}(1 + \hat{Z})$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ij} &= \frac{1}{4}(1 - \hat{Z}_i)(1 - \hat{Z}_j) + \frac{1}{4}(1 + \hat{Z}_i)(1 + \hat{Z}_j) + (\hat{X}_i\hat{X}_j) \left[\frac{1}{4}(1 - \hat{Z}_i)(1 + \hat{Z}_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}(1 + \hat{Z}_i)(1 - \hat{Z}_j) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(1 - \hat{Z}_j - \hat{Z}_i + \hat{Z}_i\hat{Z}_j) + \frac{1}{4}(1 + \hat{Z}_j + \hat{Z}_i + \hat{Z}_i\hat{Z}_j) + \frac{1}{4}(\hat{X}_i\hat{X}_j)(1 + \hat{Z}_j - \hat{Z}_i - \\ &\quad - \hat{Z}_i\hat{Z}_j + 1 - \hat{Z}_j + \hat{Z}_i - \hat{Z}_i\hat{Z}_j) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(2\hat{1} + 2\hat{Z}_i\hat{Z}_j) + \frac{1}{4}(\hat{X}_i\hat{X}_j)(2\hat{1} - 2\hat{Z}_i\hat{Z}_j) = \frac{1}{2}(\hat{X}_i\hat{X}_j)(1 - \hat{Z}_i\hat{Z}_j) + \frac{1}{2}(1 + \hat{Z}_i\hat{Z}_j)$$

$$\text{Συνεπώς: } \hat{S}_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \hat{Z}_i\hat{Z}_j) + \frac{1}{2}(\hat{X}_i\hat{X}_j)(1 - \hat{Z}_i\hat{Z}_j)$$

$$\text{iii) } \hat{S}_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \hat{Z}_i \hat{Z}_j) + \frac{1}{2} \hat{X}_i \hat{X}_j - \frac{1}{2} \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{Z}_i \hat{Z}_j \quad \text{Ομως: } \hat{X}_j \hat{Z}_i = \hat{Z}_i \hat{X}_j$$

$$\text{και } \hat{X}_i \hat{Z}_i = -i \hat{Y}_i$$

$$\hat{X}_j \hat{Z}_j = -i \hat{Y}_j$$

$$\text{Αρα: } \hat{S}_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \hat{Z}_i \hat{Z}_j) + \frac{1}{2} \hat{X}_i \hat{X}_j - \frac{1}{2} \hat{X}_i \hat{Z}_i \hat{X}_j \hat{Z}_j =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \hat{Z}_i \hat{Z}_j) + \frac{1}{2} \left(\hat{X}_i \hat{X}_j - \frac{1}{2} (-i \hat{Y}_i) (-i \hat{Y}_j) \right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \hat{X}_i \hat{X}_j + \hat{Z}_i \hat{Z}_j) + \frac{1}{2} \hat{Y}_i \hat{Y}_j = \frac{1}{2}(1 + \hat{X}_i \hat{X}_j + \hat{Y}_i \hat{Y}_j + \hat{Z}_i \hat{Z}_j)$$

$$\text{Δηλαδή: } \hat{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(1 + \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)} + \sigma_y^{(i)} \sigma_y^{(j)} + \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)} \right) = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}^{(i)} \vec{\sigma}^{(j)})$$

Παράδειγμα 11

Το ζεύγος -EPR (κατάσταση Bell) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο καταστάσεων του ενός qubit;

Έστω ότι μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο. Δηλαδή:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (b_0|0\rangle + b_1|1\rangle)$$

$$\text{με } |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$$

$$\text{Αρα: } \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = (\alpha_0 b_0)|00\rangle + (\alpha_0 b_1)|01\rangle + (\alpha_1 b_0)|10\rangle + (\alpha_1 b_1)|11\rangle$$

Θα πρέπει, αφού $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ μια βάση του χώρου Hilbert 4-διαστάσεων, να είναι:

$$\alpha_0 b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_0 b_1 = \alpha_1 b_0 = 0, \quad \alpha_1 b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Όμως αν $\alpha_0 b_1 = 0$ τότε $\alpha_0 = 0$ ή $b_1 = 0$ πράγμα αδύνατο. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο και το EPR ζεύγος δεν μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο (είναι δηλαδή διαπλεκόμενο - entangled)

Παράδειγμα 12

Θα μπορούσε ο τελεστής \hat{C}_{10} (C-not) να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο τελεστών; Θεωρήστε ότι δρα στο χώρο Hilbert 4 διαστάσεων.

Έστω ότι μπορεί να γραφεί. Συνεπώς: $\hat{C}_{10} = \hat{A} \otimes \hat{B}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$$

Θα πρέπει: $ae=ah=df=dg=1$ και

$$af=be=bf=ag=dg=bh=ce=cf=de=cg=ch=dh=0$$

Παίρνοντας την $af=0$ θα είναι $a=0$ ή $f=0$, πράγμα αδύνατο. Συνεπώς ο \hat{C}_{10} δεν μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο τελεστών.

ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ – ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Οι κλασικοί υπολογιστές αποτελούνται από αγωγούς και λογικές πύλες οι οποίες συγκροτούν κυκλώματα. Μεταφέρεται πληροφορία με τη μορφή τάσης ή ρεύματος, μέσω των αγωγών, από πύλη σε πύλη και αυτές επεξεργάζονται την πληροφορία που έρχεται στην είσοδό τους, σύμφωνα με τον πίνακα αληθείας τους. Οι λογικές πύλες στους κλασικούς υπολογιστές είναι φυσικά συστήματα (από πυρίτιο) και η πληροφορία διέρχεται από μέσα τους.

Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει στους κβαντικούς υπολογιστές. Οι κβαντικές πύλες δεν είναι φυσικά συστήματα αλλά ΔΡΑΣΕΙΣ που ενεργούν πάνω στα qubits ή σε κβαντικούς καταχωρητές. Αυτή είναι η πρώτη διαφορά κλασικών – κβαντικών λογικών πυλών. Μια δεύτερη εξίσου μεγάλη διαφορά είναι ότι η πληροφορία δεν διέρχεται μέσα από τις κβαντικές πύλες αλλά παραμένει αποθηκευμένη στα qubits και στους κβαντικούς καταχωρητές. Οι κβαντικές πύλες (που αναπαρίστανται με μήτρες) δρουν η μια μετά την άλλη στα qubits αλλάζοντας την κατάστασή τους.

Ένα φυσικό σύστημα αλλάζει με το χρόνο, έτσι το καταστατικό διάνυσμα του συστήματος είναι μια συνάρτηση του χρόνου $|\psi(t)\rangle$. Η κβαντική θεωρία αξιώνει ότι η

κατάσταση ενός κλειστού συστήματος εξελίσσεται στον χρόνο **γραμμικά**. Με άλλα λόγια αν γνωρίζαμε ότι κάποιος συγκεκριμένος μετασχηματισμός απεικονίζει την $|\psi_i\rangle$ στην $\hat{U}|\psi_i\rangle$ κατάσταση τότε:

$$\hat{U}\left(\sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle\right) = \sum_i \alpha_i \hat{U}|\psi_i\rangle, \quad \sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

Επειδή και στην νέα αυτή κατάσταση, $\sum_i \alpha_i \hat{U}|\psi_i\rangle$, θα πρέπει η νόρμα (norm) του διανύσματος (κατάσταση)ⁱ να είναι ίση με 1 (δηλαδή να διατηρείται), οι μόνοι **ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ** τελεστές που διατηρούν τέτοιες νόρμες είναι οι **ΜΟΝΑΔΙΑΚΟΙ** τελεστές ($\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ ή $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$).

Η απόδειξη αυτού του γεγονότος είναι αρκετά απλή: Έστω $|\psi\rangle$ η κατάσταση ενός κλειστού συστήματος και \hat{U} ένας μοναδιακός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε: $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ όπου $|\psi'\rangle$ η κατάσταση του συστήματος μετά την δράση του \hat{U} .

$$\|\psi'\| = \sqrt{\langle \psi' | \psi' \rangle}$$

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi \rangle \quad \text{γιατί} \quad \langle \psi' | = \langle \psi | \hat{U}^\dagger$$

$$\text{Όμως ο } \hat{U} \text{ είναι μοναδιακός συνεπώς } \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$$

$$\text{Άρα: } \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{I} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

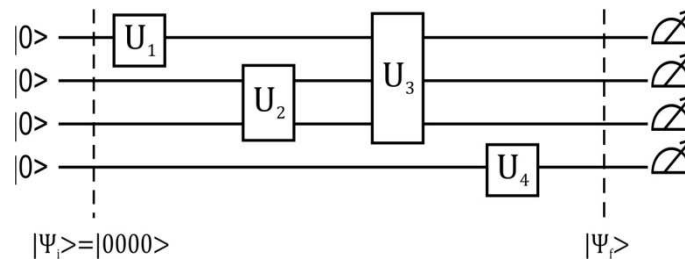
$$\text{Συνεπώς: } \|\psi'\| = \sqrt{\langle \psi' | \psi' \rangle} = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} = \|\psi\|$$

Όσον αφορά την απαίτηση της γραμμικότητας (κβαντομηχανικό αξίωμα) η μη ύπαρξή της θα οδηγούσε σε διάφορα παράδοξα όπως ταξίδι στο χρόνο, επικοινωνία με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός και παραβιάσεις του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής. Στους κβαντικούς υπολογιστές αναφερόμαστε στους μοναδιακούς τελεστές που δρουν πάνω σε ένα qubit ως 1-qubit πύλες (1-qubit gates). Ανάλογες πύλες υπάρχουν και για περισσότερα του ενός qubits (n-qubit gates).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απαίτηση της δράσης μοναδιακών τελεστών οδηγεί στην **αντιστρεπτότητα**. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται από το ότι κάθε μοναδιακός μετασχηματισμός έχει έναν επίσης μοναδιακό αντίστροφο μετασχηματισμό.

Συνοψίζοντας, οι κβαντικές πύλες είναι μοναδιακοί τελεστές που δρουν στα qubits και η δράση τους είναι αντιστρεπτή.

Είδαμε ότι οι κβαντικοί υπολογισμοί είναι δράσεις τελεστών που έχουν ως αποτέλεσμα την περιστροφή διανυσμάτων στο χώρο Hilbert. Πως θα σχηματίσουμε μια εικόνα στο μυαλό μας; Το πιο επιτυχημένο μοντέλο που χρησιμοποιείται σήμερα είναι το κυκλωματικό μοντέλο. Κάθε κβαντικός υπολογισμός μπορεί να παρασταθεί με ένα κύκλωμα (κβαντικό κύκλωμα) που αποτελείται από qubits και κβαντικές πύλες. Ένα παράδειγμα κβαντικού κυκλώματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



U_1, U_2, U_3, U_4 : κβαντικές πύλες \otimes : μέτρηση στην κλασική βάση $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

Τα κβαντικά κυκλώματα αναπαριστούν τη χρονική σειρά και τον τρόπο με τον οποίο δρουν οι κβαντικές πύλες στους κβαντικούς καταχωρητές. Η τελική κατάσταση $|\Psi_f\rangle$ στα δεξιά θα είναι σχεδόν πάντα διαπλεκόμενη (entangled).

1-Qubit πύλες

Κάθε μοναδιακός τελεστής που δρα σε ένα δισδιάστατο κβαντικό σύστημα (ένα qubit) καλείται 1-qubit κβαντική πύλη. Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι η κβαντική πύλη NOT (Pauli X πύλη). Στη σφαίρα Bloch κάθε κατάσταση του qubit είναι και ένα σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας ή ισοδύναμα ένα μοναδιαίο διάνυσμα του οποίου το σημείο εφαρμογής βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας Bloch. Μια πύλη του 1-qubit μετασχηματίζει μια κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle$ σε μια άλλη κβαντική κατάσταση $\hat{U}|\psi\rangle$. Η δράση του/της \hat{U} στην $|\psi\rangle$ οδηγεί σε μια στροφή του διανύσματος, στη σφαίρα Bloch.

Αντίθετα με τις κλασικές πύλες, όπου μόνο μια πύλη του ενός bit υπάρχει (η πύλη NOT) υπάρχουν πολλές κβαντικές πύλες του ενός qubit. Θα επικεντρωθούμε στις κυριότερες από αυτές.

Η κβαντική πύλη NOT (X)

$ q\rangle_{αρχ.}$	$ q\rangle_{τελ.}$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
$α 0\rangle + β 1\rangle$	$β 0\rangle + α 1\rangle$

$$\hat{X} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \quad \text{με}$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή: $\hat{X}|x\rangle = |\bar{x}\rangle$ με $x \in \{0,1\}$

$$\text{Αρα: } \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Δηλαδή } \hat{X} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\hat{X}^+ = \hat{X}^{-1}$ συνεπώς είναι μοναδιακός ο μετασχηματισμός (πράγμα αναμενόμενο).

$$\hat{X}|0\rangle = \hat{X} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) = |1\rangle = \cos \frac{\pi}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\pi}{2} |1\rangle$$

Βλέπουμε ότι η δράση της κβαντικής πύλης NOT στην κατάσταση $|0\rangle$ οδηγεί το σύστημα στην κατάσταση $|1\rangle$ που στη σφαίρα Bloch είναι ένα διάνυσμα συμμετρικό εκείνου της $|0\rangle$, ως προς το επίπεδο x-y.

Ομοίως:

$$\hat{X}|1\rangle = \hat{X} \left(\cos \frac{\pi}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\pi}{2} |1\rangle \right) = |0\rangle = \cos \frac{0}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{0}{2} |1\rangle$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{\hat{X}} \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

Η κβαντική πύλη Z

$$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad \text{Αρα: } \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (1 \ 0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$ q\rangle_{\text{αρχ.}}$	$ q\rangle_{\text{τελ.}}$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$- 1\rangle$
$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$

$\hat{Z}^+ = \hat{Z}^{-1}$ συνεπώς ο μετασχηματισμός είναι μοναδιακός.

Δηλαδή: $\hat{Z}|x\rangle = (-1)^x|x\rangle$ με $x \in \{0,1\}$

Παράδειγμα 13

Αν ένα qubit βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ και δράσουμε πάνω του με την κβαντική πύλη NOT ποια θα είναι η τελική κατάσταση του qubit και ποια η σχετική θέση του διανύσματος της τελικής κατάστασης ως προς αυτή της αρχικής στη σφαίρα Bloch;

$$\begin{aligned} \hat{X}|\psi\rangle &= \hat{X}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\hat{X}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{X}|1\rangle = \\ &= \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle = |\psi'\rangle \end{aligned}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle = \cos\frac{\pi/3}{2}|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi/3}{2}|1\rangle$$

Συνεπώς στη σφαίρα Bloch: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ και $\varphi=0$

$$|\psi'\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle = \cos\frac{\pi/3}{2}|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi/3}{2}|1\rangle$$

Δηλαδή: $\theta' = \frac{\pi}{3}$ και $\varphi' = 0$

Συνεπώς τα δύο διανύσματα στη σφαίρα Bloch θα είναι συμμετρικά ως προς το επίπεδο x-y.

Παράδειγμα 14

Επαναλάβετε το προηγούμενο παράδειγμα αλλά δράστε με την κβαντική πύλη Z αντί της NOT.

$$\begin{aligned}\hat{Z}|\psi\rangle &= \hat{Z}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}\hat{Z}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{Z}|1\rangle = \\ &= \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle = |\psi'\rangle\end{aligned}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle = \cos\frac{2\pi}{3}|0\rangle + e^{i\pi}\sin\frac{2\pi}{3}|1\rangle, \quad \theta' = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi' = \pi$$

Συνεπώς τα δύο διανύσματα στη σφαίρα Bloch θα είναι συμμετρικά ως προς το επίπεδο y-z.

Η κβαντική πύλη H (Hadamard)

Μερικές φορές η πύλη αυτή ονομάζεται «τετραγωνική ρίζα της πύλης NOT». Ορίζεται ως εξής:

$$\hat{H}|x\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^x|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \mu\epsilon \quad x \in \{0,1\}$$

$$\text{Δηλαδή: } \hat{H}|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \hat{H}|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Συνεπώς: } \hat{H} = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \langle 0| + \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \langle 1|, \mu\epsilon \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα: } \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{υπό μορφή μήτρας}$$

Η δράση της Hadamard οδηγεί στο καταστατικό διάνυσμα του ενός qubit στη σφαίρα Bloch σε στροφή περί τον άξονα y κατά 90° ακολουθούμενη από μια ανάκλιση στο επίπεδο x-y.

Δρώντας μια δεύτερη φορά με την Hadamard έχουμε:

$$\hat{H}(\hat{H}|x\rangle) = \hat{H} \left[\frac{|0\rangle + (-1)^x |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] = \frac{\hat{H}|0\rangle + (-1)^x \hat{H}|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

(εκμεταλλευόμενοι την γραμμικότητα)

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } \hat{H}^2|x\rangle &= \frac{\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + (-1)^x \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle + (-1)^x |0\rangle + |1\rangle + (-1)^{x+1} |1\rangle}{2} = \\ &= \frac{[1 + (-1)^x] |0\rangle + [1 + (-1)^{x+1}] |1\rangle}{2} \quad \text{με } x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$$\text{Αν } x=0 \text{ τότε: } \hat{H}^2|x\rangle = \hat{H}^2|0\rangle = \frac{2|0\rangle}{2} = |0\rangle$$

$$\text{Αν } x=1 \text{ τότε: } \hat{H}^2|x\rangle = \hat{H}^2|1\rangle = \frac{2|1\rangle}{2} = |1\rangle$$

Δηλαδή $\hat{H}^2|x\rangle = |x\rangle, x \in \{0,1\}$ συνεπώς $\hat{H}^2 = \hat{I}$ (Δηλαδή $\hat{H} = \hat{H}^{-1}$)

$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ συνεπώς $\hat{H}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \hat{H}$ και ο μετασχηματισμός είναι και μοναδιακός: $\hat{H}^+ = \hat{H}^{-1}$

Κβαντικές πύλες στροφής

Πριν προχωρήσουμε στις κβαντικές πύλες στροφής θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και A είναι πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 = -I$. Θα δειχθεί ότι $e^{iAx} = \cos x \cdot I + i \sin x \cdot A$.

Αναπτύσσουμε ως προς Taylor την e^{iAx} .

$$\begin{aligned} e^{iAx} &= I + \frac{1}{1!} iAx + \frac{1}{2!} i^2 A^2 x^2 + \frac{1}{3!} i^3 A^3 x^3 + \frac{1}{4!} i^4 A^4 x^4 + \dots = \\ &= I + iAx - \frac{1}{2} Ax^2 - \frac{1}{6} iAx^3 + \frac{1}{24} Ax^4 + \dots \end{aligned}$$

Ομοίως αναπτύσσουμε ως προς Taylor τις $\sin x, \cos x$:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots$$

$$\text{Άρα: } \cos x \cdot I + i \sin x \cdot A = I - \frac{1}{2}Ix^2 + \frac{1}{24}Ix^4 - \dots + iAx - \frac{1}{6}iAx^3 + \dots$$

$$= I + iAx - \frac{1}{2}Ix^2 - \frac{1}{6}iAx^3 + \frac{1}{24}Ix^4 + \dots = e^{iAx}$$

Έχοντας αποδείξει την σχέση αυτή μπορούμε να ορίσουμε τις κβαντικές πύλες στροφής ως εξής:

$$R_x(\theta) = e^{-\frac{i\theta x}{2}}, \quad R_y(\theta) = e^{-\frac{i\theta y}{2}}, \quad R_z(\theta) = e^{-\frac{i\theta z}{2}}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι: $X^2 = Y^2 = Z^2 = I$ (και για τους τρεις πίνακες του Pauli).

Συνεπώς:

$$R_x(\theta) = e^{-\frac{i\theta x}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot X$$

$$R_y(\theta) = e^{-\frac{i\theta y}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot Y$$

$$R_z(\theta) = e^{-\frac{i\theta z}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot Z$$

Υπό μορφή μητρών οι πύλες αυτές παίρνουν τη μορφή:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i \sin\frac{\theta}{2} \\ -i \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 15

Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $R_z(\theta)$ οδηγεί σε στροφή κατά μια γωνία θ περί τον άξονα z στη σφαίρα Bloch.

Θεωρούμε μια τυχαία κατάσταση του 1-qubit γραμμένη με όρους που περιέχουν γωνίες της σφαίρας Bloch.

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)|0\rangle + e^{i\tau} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)|1\rangle$$

Χρησιμοποιώντας τη βάση $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ γράφουμε υπό μορφή μήτρας

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\sigma}{2} \\ e^{i\tau} \sin\frac{\sigma}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_z(\theta)|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\sigma}{2} \\ e^{i\tau} \sin\frac{\sigma}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\sigma}{2} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\tau} \sin\frac{\sigma}{2} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\sigma}{2} \\ e^{i\theta} e^{i\tau} \sin\frac{\sigma}{2} \end{pmatrix} = \\ &= e^{-i\frac{\theta}{2}} \left[\cos\frac{\sigma}{2}|0\rangle + e^{i(\tau+\theta)} \sin\frac{\sigma}{2}|1\rangle \right] \end{aligned}$$

Ο παράγοντας φάσης είναι ασήμαντος συνεπώς η νέα κατάσταση μετά τη δράση $R_z(\theta)$ είναι η :

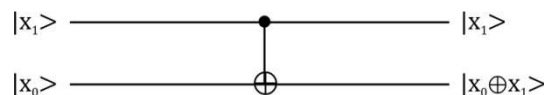
$$|\psi'\rangle = \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)|0\rangle + e^{i(\tau+\theta)} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)|1\rangle$$

Βλέπουμε ότι υπάρχει μια αλλαγή στη γωνία από τ σε $\tau+\theta$ που αντιστοιχεί σε μια στροφή του καταστατικού διανύσματος κατά γωνία θ περί τον άξονα z .

Σημείωση: Οι μετασχηματισμοί $R_x(\theta), R_y(\theta)$ οδηγούν σε στροφές κατά γωνία θ περί τους άξονες x, y αντίστοιχα στη σφαίρα Bloch. (Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι αρκετά μακροσκελής και γι' αυτό το λόγο παρατίθεται στο Παράρτημα Β στο τέλος της παρούσας εργασίας).

Κβαντικές πύλες πολλαπλών qubit

Η βασικότερη κβαντική πύλη πολλαπλών qubit είναι η ελεγχόμενη-NOT (ή CNOT). Αυτή έχει δύο qubits εισόδου, γνωστά ως qubit ελέγχου (control qubit) και qubit στόχου (target qubit). Η κυκλωματική αναπαράσταση της CNOT φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



$|x_1\rangle$: Κατάσταση του qubit ελέγχου.

$|x_0\rangle$: Κατάσταση του qubit στόχου.

$$x_0 \oplus x_1 = (x_0 + x_1) \bmod 2$$

$$|\psi_{\text{input}}\rangle = |x_1 x_0\rangle, |\psi_{\text{output}}\rangle = \hat{C}_{10} |\psi_{\text{input}}\rangle$$

Άρα $|\psi_{\text{output}}\rangle = |x_1, x_0 \oplus x_1\rangle$ με $x_0, x_1 \in \{0,1\}$

Αν το control qubit είναι 0 τότε το qubit στόχου παραμένει ανέπαφο ενώ αν το qubit ελέγχου είναι 1 το qubit στόχου αντιστρέφεται.

Δηλαδή: $\hat{C}_{10}|00\rangle = |00\rangle, \hat{C}_{10}|01\rangle = |01\rangle, \hat{C}_{10}|10\rangle = |11\rangle, \hat{C}_{10}|11\rangle = |10\rangle$

Συνεπώς: $\hat{C}_{10} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10|$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Δείτε παράδειγμα 3})$$

Θα μπορούσε να εναλλαχτεί η θέση των qubit ελέγχου και στόχου ως εξής:

$$\hat{C}_{01} = |x_1 x_0\rangle = |x_1 \oplus x_0, x_0\rangle \quad \text{με } x_0, x_1 \in \{0,1\}$$

$$\hat{C}_{01} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 11| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 01| =$$

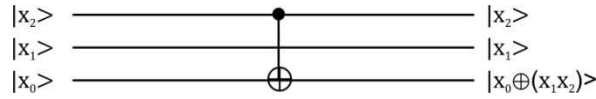
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Άρα: } \hat{C}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ υπό μορφή μήτρας}$$

Μια δεύτερη πολύ χρήσιμη κβαντική πύλη είναι η Toffoli. Η κυκλωματική της αναπαράσταση είναι η ακόλουθη:



Δηλαδή: $\hat{T}|x_2x_1x_0\rangle = |x_2, x_1, x_0 \oplus (x_1x_2)\rangle$ με $x_0, x_1, x_2 \in \{0,1\}$

Η Toffoli πύλη έχει τρία qubits εισόδου και τρία qubits εξόδου. Δύο από τα qubits αυτά είναι τα qubits ελέγχου που παραμένουν ανέπαφα από τη δράση της Toffoli. Το τρίτο qubit είναι το qubit στόχος που αντιστρέφεται αν τα control qubits είναι συγχρόνως στην κατάσταση $|1\rangle$, διαφορετικά παραμένει και αυτό ανέπαφο. Μπορεί να ονοματιστεί και ως διπλά – ελεγχόμενη NOT πύλη. Δρώντας δύο φορές με την Toffoli έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{T}^2|x_2x_1x_0\rangle &= \hat{\mathbb{I}}(\hat{\mathbb{I}}|x_2x_1x_0\rangle) = \hat{\mathbb{I}}|x_2, x_1, x_0 \oplus (x_1x_2)\rangle = \\ &= |x_2, x_1, x_0 \oplus (x_1x_2) \oplus (x_1x_2)\rangle = |x_2x_1x_0\rangle \end{aligned}$$

Δηλαδή $\hat{T}^2 = \hat{\mathbb{I}}$. Συνεπώς η Toffoli είναι μια αντιστρέψιμη πύλη αφού έχει αντίστροφη τον εαυτό της ($\hat{T} = \hat{T}^{-1}$)

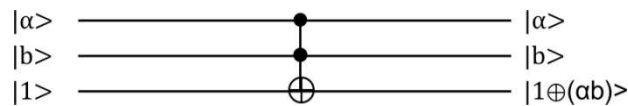
$$\begin{aligned} \hat{T} &= |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + \\ &+ |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 110| = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (10000000) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (01000000) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (00100000) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (00010000) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (00001000) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (00000100) + \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (000000001) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (000000010) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\hat{T}^+ = T^{-1}(= \hat{T})$ συνεπώς ο μετασχηματισμός \hat{T} είναι και μοναδιακός.

Ας εξετάσουμε τώρα δύο ειδικές περιπτώσεις. Στην πρώτη ας προετοιμάσουμε το πρώτο qubit ώστε να βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$.

$$\text{Τότε: } \hat{T}|\alpha\rangle|b\rangle|1\rangle = \hat{\mathbb{Z}}|\alpha b 1\rangle = |\alpha, b, 1 \oplus (\alpha b)\rangle = |\alpha, b, (\overline{\alpha b})\rangle$$



με $\alpha, b \in \{0,1\}$

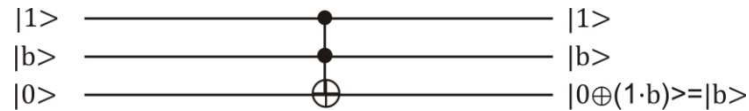
$$\begin{aligned} \text{Όμως γνωρίζουμε ότι } 1 \oplus (\alpha b) &= \bar{1} \cdot (\alpha b) + 1 \cdot (\overline{\alpha b}) = \\ &= 0 \cdot (\alpha b) + 1 \cdot (\overline{\alpha b}) = \\ &= 0 + (\overline{\alpha b}) = (\overline{\alpha b}) = \neg(\alpha b) \end{aligned}$$

όπου: $\neg(\alpha b) = \text{NOT}(\alpha \text{ and } b)$

Παρατηρούμε ότι η κβαντική Toffoli πύλη μπορεί να προσομοιώσει μη αντιστρεπτές λογικές πύλες, εδώ την NAND κλασική λογική πύλη. Αφού η NAND λογική πύλη είναι το στοιχείο το οποίο μπορεί να κατασκευάσει όλα ανεξαρτήτως τα λογικά κλασικά κυκλώματα εξασφαλίζεται ότι οι κβαντικοί υπολογισμοί είναι ικανοί να εκτελέσουν κάθε υπολογισμό που θα μπορούσε να κάνει και ένας κλασικός υπολογιστής.

Στη δεύτερη ειδική περίπτωση ας προετοιμάσουμε το ένα από τα δύο qubits ελέγχου ώστε να βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$ και το qubit στόχο να βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε: } \hat{T}|1\rangle|b\rangle|0\rangle &= \hat{\mathbb{Z}}|1b0\rangle = |1, b, 0 \oplus (1 \cdot b)\rangle = \\ &= |1, b, 0 \oplus b\rangle = |1, b, b\rangle = |1\rangle|b\rangle|b\rangle \end{aligned}$$



με $b \in \{0,1\}$

Αυτό που έχουμε καταφέρει είναι να αντιγράψουμε την κατάσταση $|b\rangle$ με $b \in \{0,1\}$. ΠΡΟΣΟΧΗ!!! αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε τυχαία κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle$ μπορεί να αντιγραφεί. Σε αυτήν τη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάσαμε μπορούμε να το ισχυριστούμε. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι είναι αδύνατον να κάνουμε ένα αντίγραφο μιας άγνωστης κβαντικής κατάστασης (no-cloning theorem).

Παράδειγμα 16 (Πύλες αλλαγής φάσης – phase shift gates)

Θεωρείστε τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\hat{R}_\theta |x\rangle = e^{i\theta x} |x\rangle \quad \text{με } x \in \{0,1\}$$

- i) Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός είναι μοναδιακός αφού πρώτα βρείτε την αναπαράστασή του με μήτρα.

$$\hat{R}_\theta |0\rangle = e^{i\theta \cdot 0} |0\rangle = e^0 |0\rangle = |0\rangle$$

$$\hat{R}_\theta |1\rangle = e^{i\theta \cdot 1} |1\rangle = e^{i\theta} |1\rangle$$

Συνεπώς: $\hat{R}_\theta = |0\rangle\langle 0| + e^{i\theta} |1\rangle\langle 1|$

$$\text{Αρα: } \hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{i\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{i\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς: $\hat{R}_\theta^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

$$\hat{R}_\theta^{-1} = \frac{1}{1 \cdot e^{i\theta} - 0 \cdot 0} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{i\theta}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Αρα: $\hat{R}_\theta^\dagger = \hat{R}_\theta^{-1}$ και ο μετασχηματισμός είναι μοναδιακός.

ii) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός \widehat{R}_θ μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\widehat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Συνεπώς: } \widehat{R}_\theta |x\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} (e^{i\theta/2} |x\rangle)$$

Ο παράγοντας φάσης δεν έχει κανένα παρατηρήσιμο αποτέλεσμα, συνεπώς η ισοδύναμη μορφή του \widehat{R}_θ είναι η:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Μερικά χρήσιμα παραδείγματα είναι ή $\frac{\pi}{8}$ πύλη όπου $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ονομάζεται και πύλη T)

$$\widehat{R}_{\pi/4} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/8} \end{pmatrix}, \text{ ή ισοδύναμα } \widehat{R}_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

η πύλη φάσης όπου $\theta = \pi/2$ (ονομάζεται και πύλη S)

$$\widehat{R}_{\pi/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}, \text{ ή ισοδύναμα } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

και η πύλη όπου $\theta = \pi$ (η γνωστή μας πύλη Z του Pauli)

$$\widehat{R}_\pi = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix}, \text{ ή ισοδύναμα } \widehat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 17 (Fredkin gate ή CSWAP πύλη)

Δίνεται η πύλη των 3-qubit εκ των οποίων το ένα από τα τρία qubits είναι το qubit ελέγχου και τα άλλα δύο είναι τα qubits στόχοι. Εάν το qubit ελέγχου είναι ίσο με 1, τότε εναλλάσσονται οι τιμές των qubit στόχων, διαφορετικά αν το qubit ελέγχου είναι ίσο με 0 οι τιμές των qubit στόχων παραμένουν ανέπαφες.

- i) Γράψτε τον πίνακα αλήθειας της πύλης αυτής.
- ii) Βρείτε τη μορφή του μετασχηματισμού αυτού.
- iii) Ποια η αναπαράστασή του με τη μορφή μήτρας;
- iv) Ποια η κυκλωματική αναπαράσταση του μετασχηματισμού αυτού;

i) Έστω $|x_2x_1x_0\rangle$ η κατάσταση εισόδου με $x_0, x_1, x_2 \in \{0,1\}$ και $|x'_2x'_1x'_0\rangle$ η κατάσταση εξόδου με $x'_0, x'_1, x'_2 \in \{0,1\}$. Θεωρώ την $|x'_2\rangle$ ως την κατάσταση του qubit ελέγχου.

Είσοδος			Έξοδος		
x_2	x_1	x_0	x'_2	x'_1	x'_0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 x'_2 &= x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1\bar{x}_0 + x_2x_1x_0 = \\
 &= x_2\bar{x}_1(\bar{x}_0 + x_0) + x_2x_1(\bar{x}_0 + x_0) = \\
 &= x_2\bar{x}_1 + x_2x_1 = \\
 &= x_2(\bar{x}_1 + x_1) = \\
 &= x_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= \bar{x}_2x_1\bar{x}_0 + \bar{x}_2x_1x_0 + x_2\bar{x}_1x_0 + x_2x_1x_0 = \bar{x}_2x_1(\bar{x}_0 + x_0) + x_2x_0(\bar{x}_1 + x_1) = \\
 &= \bar{x}_2x_1 + x_2x_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x'_0 &= \bar{x}_2\bar{x}_1x_0 + \bar{x}_2x_1x_0 + x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 + x_2x_1x_0 = \bar{x}_2x_0(\bar{x}_1 + x_1) + x_2x_1(\bar{x}_0 + x_0) = \\
 &= \bar{x}_2x_0 + x_2x_1
 \end{aligned}$$

ii) Συνεπώς: $\hat{F}|x_2x_1x_0\rangle = |x_2, \bar{x}_2x_1 + x_2x_0, \bar{x}_2x_0 + x_2x_1\rangle$

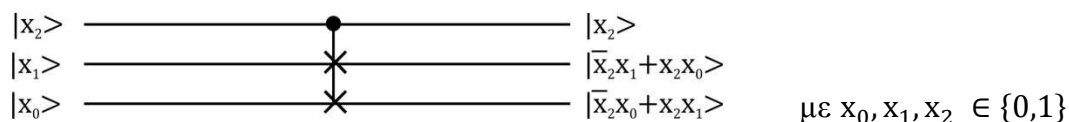
iii) $\hat{F} = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| +$

$$+|100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 111| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (10000000) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (01000000) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (00100000) +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{Άρα: } \hat{F} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

iv)



ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Μπορούν τα κβαντικά κυκλώματα να προσομοιώσουν τα κλασικά λογικά κυκλώματα; Φυσικά και ναι. Οποιαδήποτε άλλη απάντηση θα ήταν μεγάλη έκπληξη γιατί καθετί γύρω μας, συμπεριλαμβανομένων και των κλασικών κυκλωμάτων, μπορεί να εξηγηθεί χρησιμοποιώντας την κβαντομηχανική. Όμως αν αυτή ήταν το μοναδικό που μπορούσαν να κάνουν οι κβαντικοί υπολογιστές τότε δεν υπάρχει λόγος να μπούμε σε τόσο κόπο να εξερευνήσουμε τα κβαντικά αποτελέσματα. Το πλεονέκτημα των κβαντικών υπολογιστών είναι ότι μπορούν να εκτελέσουν πολύ πιο πολύπλοκους αλγόριθμους από ότι οι κλασικοί υπολογιστές. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa ο οποίος μπορεί να λυθεί πολύ γρηγορότερα από έναν κβαντικό υπολογιστή από ότι με έναν κλασικό υπολογιστή.

Κβαντικός παραλληλισμός

Ο κβαντικός παραλληλισμός είναι ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό πολλών κβαντικών αλγορίθμων. Ένας υπερ-απλουστευμένος ορισμός του κβαντικού παραλληλισμού θα μπορούσε να είναι ο εξής:

Ο κβαντικός παραλληλισμός επιτρέπει στους κβαντικούς υπολογιστές να υπολογίσουν την αριθμητική τιμή μιας συνάρτησης f , με τύπο $f(x)$, για πολλές διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x , ταυτόχρονα.

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σημειοσύνολο $\{0,1\}$ και πεδίο τιμών το ίδιο αυτό σύνολο, με τύπο $f(x)$.

Δηλαδή: $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

Ένας βολικός τρόπος να υπολογίσουμε αυτή τη συνάρτηση σε έναν κβαντικό υπολογιστή, θεωρώντας έναν κβαντικό υπολογιστή των δύο qubit ο οποίος δέχεται ως είσοδο στην κατάσταση $|xy\rangle$. Με μια κατάλληλη σειρά λογικών πυλών είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί η κατάσταση $|xy\rangle$ στην $|x, y \oplus f(x)\rangle$

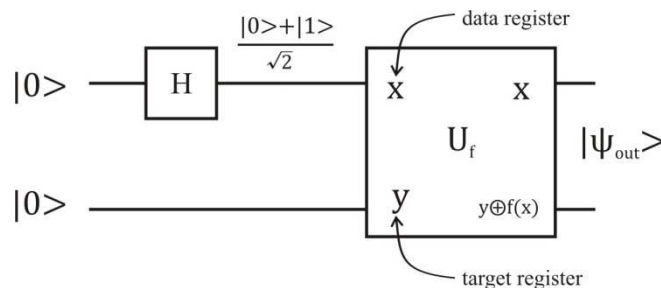
Δηλαδή: $\hat{U}_f |xy\rangle = |x, y \oplus f(x)\rangle$

$$(\hat{U}_f |xy\rangle)^+ = (|x, y \oplus f(x)\rangle)^+, \text{ άρα } \langle xy | \hat{U}_f^+ = \langle x, y \oplus f(x) |$$

$$\langle xy | \hat{U}_f^+ \hat{U}_f |xy\rangle = \langle x, y \oplus f(x) | x, y \oplus f(x)\rangle = 1$$

Συνεπώς $\hat{U}_f^+ \hat{U}_f = I$. Άρα ο μετασχηματισμός είναι μοναδιακός.

Αν $y=0$ τότε: $\hat{U}_f |x0\rangle = |x, 0 \oplus f(x)\rangle = |x, f(x)\rangle$



$$|\psi_{in}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$$

$$(\hat{H} \otimes \hat{I}) |00\rangle = (\hat{H} \otimes \hat{I}) (|0\rangle \otimes |0\rangle) = (\hat{H}|0\rangle) \otimes (\hat{I}|0\rangle) = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle =$$

$$= \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{U}_f \left(\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\hat{U}_f|00\rangle + \hat{U}_f|10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle}{\sqrt{2}}$$

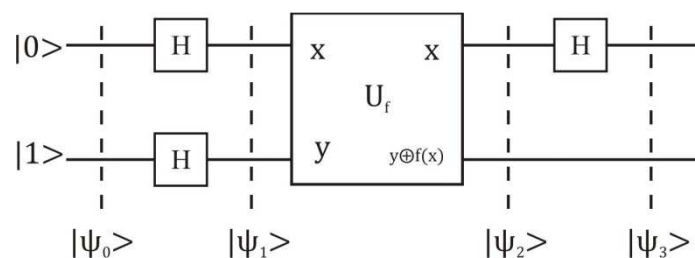
Δηλαδή: $|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle}{\sqrt{2}}$

Η κατάσταση εξόδου περιέχει δύο διαφορετικούς όρους που περιέχουν πληροφορία ταυτόχρονα για το $f(0)$ και το $f(1)$. Είναι σαν να έχουμε υπολογίσει τις αριθμητικές τιμές της $f(x)$ για τις δύο τιμές της μεταβλητής x , για $x=0$ και για $x=1$. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι γνωστό ως κβαντικός παραλληλισμός, σε αντίθεση με τον κλασικό παραλληλισμό όπου πολλαπλά κυκλώματα (το καθένα φτιαγμένο να υπολογίζει την αριθμητική τιμή $f(x)$ για μια μόνο τιμή της x) εκτελούνται ταυτόχρονα. Όμως αυτός ο κβαντικός παραλληλισμός δεν είναι άμεσα χρήσιμος. Μέτρηση της κατάστασης δίνει είτε $|0, f(0)\rangle$ είτε $|1, f(1)\rangle$. Συνεπώς απαιτείται κάτι παραπάνω από τον κβαντικό παραλληλισμό για να έχουμε κάτι χρήσιμο στα χέρια μας. Απαιτείται η ικανότητα να εξάγουμε πληροφορία για παραπάνω από μια τιμή της $f(x)$ από υπέρθεση καταστάσεων της μορφής:

$$\sum_x |x, f(x)\rangle$$

Αλγόριθμος του Deutsch

Ο Αλγόριθμος του Deutsch συνδυάζει τον κβαντικό παραλληλισμό με μια ιδιότητα της κβαντικής μηχανικής γνωστή ως υπέρθεση. Απαιτείται μια μικρή τροποποίηση στο προηγούμενο κύκλωμα που τώρα είναι το ακόλουθο:



$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_0\rangle = |01\rangle$$

$$\begin{aligned} \alpha) \quad H^{\otimes 2}|01\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{H})(|0\rangle \otimes |1\rangle) = (\hat{H}|0\rangle) \otimes (\hat{H}|1\rangle) = \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{(\sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } |\psi_1\rangle = \frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{(\sqrt{2})^2}$$

$$\beta) \quad \hat{U}_f|\psi_1\rangle = \frac{\hat{U}_f|00\rangle - \hat{U}_f|01\rangle + \hat{U}_f|10\rangle - \hat{U}_f|11\rangle}{(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{|0, f(0)\rangle - |0, \overline{f(0)}\rangle + |1, f(1)\rangle - |1, \overline{f(1)}\rangle}{2}$$

$$\text{Αν } f(0) = f(1) = 0 : |\psi_2\rangle = \hat{U}_f|\psi_1\rangle = \frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } f(0) = f(1) = 1 : |\psi_2\rangle &= \frac{|01\rangle - |00\rangle + |11\rangle - |10\rangle}{2} = \\ &= - \frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα γενικά αν } f(0)=f(1) \text{ τότε: } |\psi_2\rangle = \pm \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Αν } f(0) = 0 \text{ και } f(1) = 1 \text{ τότε: } |\psi_2\rangle = \frac{|00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle}{2} =$$

$$= \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Αν } f(0) = 1 \text{ και } f(1) = 0 \text{ τότε: } |\psi_2\rangle = \frac{|01\rangle - |00\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2} =$$

$$= - \frac{|00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle}{2} =$$

$$= - \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Άρα γενικά αν } f(0) \neq f(1) \text{ τότε: } |\psi_2\rangle = \pm \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

γ) Αν $f(0)=f(1)$ τότε:

$$(\hat{H} \otimes \hat{I}) \left[\pm \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] = \pm \left(\hat{H} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \pm |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Δηλαδή: } |\psi_3\rangle = \pm |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

Αν $f(0) \neq f(1)$ τότε:

$$(\hat{H} \otimes \hat{I}) \left[\pm \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] = \pm \left(\hat{H} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \pm |1\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Δηλαδή: } |\psi_3\rangle = \pm |1\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{Συνοψίζοντας: } |\psi_3\rangle = \begin{cases} \pm |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \text{ αν } f(0) = f(1) \\ \pm |1\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \text{ αν } f(0) \neq f(1) \end{cases}$$

Όμως αν $f(0)=f(1)$ τότε: $f(0) \oplus f(1)=0$ ενώ αν $f(0) \neq f(1)$ τότε: $f(0) \oplus f(1)=1$.

$$\text{Συνεπώς: } |\psi_3\rangle = \pm |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

Μετρώντας, λοιπόν, το πρώτο qubit καθορίζουμε το $f(0) \oplus f(1)$. Το κβαντικό κύκλωμα αυτό μας έδωσε τη δυνατότητα να καθορίσουμε μια «συνολική» ιδιότητα της $f(x)$, την $f(0) \oplus f(1)$, χρησιμοποιώντας μια μόνο εκτίμηση της $f(x)$. Αυτό είναι γρηγορότερο από ότι θα ήταν σε μια κλασική συσκευή η οποία θα απαιτούσε τουλάχιστον δύο εκτιμήσεις.

Η ουσία του σχεδιασμού πολλών κβαντικών αλγορίθμων είναι ότι με την έξυπνη επιλογή της συνάρτησης και του τελικού μετασχηματισμού, μπορούμε να έχουμε έναν αποτελεσματικό καθορισμό χρήσιμης «ολικής» πληροφορίας για την συνάρτηση η οποία δεν μπορεί να αποκτηθεί γρήγορα σε κλασικό υπολογιστή.

Ο αλγόριθμος του Deutsch είναι μια απλή περίπτωση ενός γενικού κβαντικού αλγορίθμου γνωστού ως αλγόριθμος Deutsch-Jozsa ο οποίος δείχνει ότι ένας

κβαντικός υπολογιστής μπορεί να λύσει το πρόβλημα του Deutsch με έναν υπολογισμό της συνάρτησης f συγκρινόμενος με την κλασική απαίτηση για $\frac{2^n}{2} + 1$ υπολογισμούς (n : ο αριθμός των data registers στους οποίους δρα ο μετασχηματισμός $H^{\otimes n}$). Μολονότι αποδείχθηκε η ταχύτερη και αποδοτικότερη λειτουργία των κβαντικών υπολογισμών έναντι των κλασικών σε ορισμένα εξειδικευμένα προβλήματα, όπως αυτό που προηγουμένως αναπτύχθηκε, τα προβλήματα που λύνονται είναι μικρού πρακτικού ενδιαφέροντος. Υπάρχουν όμως περισσότερο ενδιαφέροντα προβλήματα των οποίων η λύση μπορεί να βρεθεί αποτελεσματικότερα χρησιμοποιώντας κβαντικούς αλγορίθμους;

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες κβαντικών αλγορίθμων που πλεονεκτούν έναντι των κλασικών. Η πρώτη κατηγορία κβαντικών αλγορίθμων βασίζεται στον κβαντικό μετασχηματισμό Fourier (παραδείγματα τέτοιων αλγορίθμων είναι ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa και ο αλγόριθμος του Shor). Η δεύτερη κατηγορία είναι οι κβαντικοί αλγόριθμοι αναζήτησης (αλγόριθμοι Grover). Η τρίτη κατηγορία αλγορίθμων είναι οι σχετικοί με την κβαντική προσομοίωση όπου ένας κβαντικός υπολογιστής χρησιμοποιείται για να προσομοιώσει ένα κβαντικό σύστημα.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την κβαντική έκδοση του μετασχηματισμού Fourier, ο οποίος, όπως γνωρίζουμε, είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται ευρέως στους κλασικούς αλγόριθμους.

Κβαντικοί αλγόριθμοι βασισμένοι στον μετασχηματισμό Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μετασχηματίζει ένα σύνολο N μιγαδικών αριθμών $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ σε ένα σύνολο πάλι N μιγαδικών αριθμών $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ ως εξής:

$$y_k \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i j k}{N}} x_j$$

Αυτός ο μετασχηματισμός έχει τεράστιο αριθμό εφαρμογών σε πολλούς κλάδους της επιστήμης γιατί η μετασχηματισμένη, με Fourier, έκδοση του προβλήματος είναι συχνά ευκολότερη στην επίλυση απ' ό,τι η αρχική μη μετασχηματισμένη έκδοση.

Έστω, τώρα, ότι ορίζουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό \hat{U} σε n qubits από τη δράση του στα θεμελιώδη διανύσματα βάσης $|j\rangle$ ως εξής:

$$\hat{U}|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{\frac{2\pi i j k}{2^n}} |k\rangle \quad \mu\epsilon \quad 0 \leq j \leq 2^n - 1$$

$$(\hat{U}|j\rangle)^+ = \langle j|\hat{U}^+ = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{l=0}^{2^n-1} \langle l|e^{-\frac{2\pi i j l}{2^n}}$$

$$\text{Άρα: } \langle j|\hat{U}^+\hat{U}|j\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{\frac{2\pi i j (k-l)}{2^n}} \langle l|k\rangle$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{\frac{2\pi i j (k-l)}{2^n}} \cdot \delta_{lk} = \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 1$$

Συνεπώς $\hat{U}^+\hat{U} = \hat{I}$ και ο μετασχηματισμός είναι μοναδιακός άρα μπορεί να πραγματοποιείται από ένα κβαντικό κύκλωμα. Δρώντας με τον \hat{U} σε υπέρθεση καταστάσεων έχουμε:

$$\hat{U} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} x_j |j\rangle \right) = \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j (\hat{U}|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} e^{\frac{2\pi i j k}{2^n}} x_j \right) |k\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k |k\rangle$$

$$\mu\epsilon \quad y_k = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{\frac{2\pi i j k}{2^n}} x_j$$

Εφαρμογή (Παράδειγμα 18)

Εφαρμόστε τον κβαντικό μετασχηματισμό Fourier στην κατάσταση

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^7 \cos\left(\frac{2\pi j}{8}\right) |j\rangle$$

του χώρου Hilbert \mathbb{C}^8 .

Ο κβαντικός μετασχηματισμός Fourier δίνεται από:

$$\hat{U}_{\text{QFT}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=0}^7 \sum_{k=0}^7 e^{-i\frac{2\pi k j}{8}} |k\rangle \langle j|$$

Χρησιμοποιούμε $\{|j\rangle : j = 0, 1, \dots, 7\}$ τα ορθοκανονικά διανύσματα βάσης του χώρου Hilbert \mathbb{C}^8 όπου $|7\rangle = |111\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$

$$\hat{U}_{\text{QFT}} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^7 \cos\left(\frac{2\pi j}{8}\right) |j\rangle \right] = \frac{1}{2\sqrt{8}} \sum_{k=0}^7 \hat{x}(k) |k\rangle \quad \text{με} \quad \hat{x}(k) = \sum_{j=0}^7 e^{-i\frac{2\pi kj}{8}} \cos\left(\frac{2\pi j}{8}\right)$$

$$\text{Ομοίως: } \cos\left(\frac{2\pi j}{8}\right) = \frac{e^{i\frac{2\pi j}{8}} + e^{-i\frac{2\pi j}{8}}}{2}$$

$$\text{Άρα: } \hat{x}(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^7 \left[e^{i\frac{2\pi j}{8}(1-k)} + e^{-i\frac{2\pi j}{8}(1+k)} \right]$$

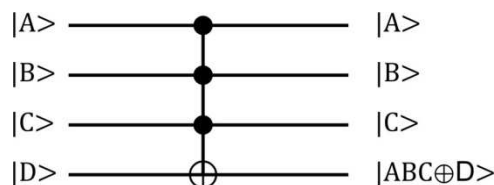
$$\text{Γνωρίζουμε ότι} \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi k(n-m)}{N}} = N \cdot \delta_{nm}$$

$$\text{Άρα: } \hat{x}(k) = \frac{1}{2} (8\delta_{k1} + 8\delta_{k7}) = 4(\delta_{k1} + \delta_{k7})$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } \frac{1}{2\sqrt{8}} \sum_{k=0}^7 \hat{x}(k) |k\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{8}} \sum_{k=0}^7 4(\delta_{k1} + \delta_{k7}) |k\rangle = \\ &= \frac{2}{\sqrt{8}} \left(\sum_{k=0}^7 \delta_{k1} |k\rangle + \sum_{k=0}^7 \delta_{k7} |k\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |7\rangle) \end{aligned}$$

Προχωρώντας την εργασία αυτή και αφού έχει γίνει εκτενής αναφορά στα βασικά θέματα των κβαντικών υπολογιστών, των κβαντικών πυλών και των κβαντικών κυκλωμάτων, θα ασχοληθούμε με πιο εξειδικευμένα κυκλώματα. Αφορμή για αυτήν την εξειδίκευση ήταν το άρθρο των Phuc Q. Le, Abdullahi M. Piyasu, Fanaguan Dong και Kaoru Hivota με τίτλο “Fast Geometric Transformation on Quantum Images” και το οποίο θα σχολιαστεί στο τέλος αυτής της εργασίας.

Κβαντική πύλη Toffoli με τρία qubits ελέγχου



Ορίζεται ως εξής: $\hat{T}_{of}|ABCD \rangle = |A, B, C, ABC \oplus D \rangle$ με $A, B, C, D \in \{0, 1\}$

Η γενικευμένη αυτή πύλη Toffoli έχει τέσσερα qubits εισόδου και τέσσερα qubits εξόδου. Τρία από τα qubits αυτά είναι τα qubits ελέγχου που παραμένουν ανέπαφα από τη δράση της Toffoli. Το τέταρτο qubit είναι το qubit στόχος που αντιστρέφεται αν τα qubits ελέγχου είναι συγχρόνως στην κατάσταση $|1\rangle$, διαφορετικά παραμένει και αυτό ανέπαφο. Είναι μια πύλη που δρα σε χώρο Hilbert διάστασης δεκαέξι.

$$\begin{aligned} \Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta: \hat{\mathcal{Q}}_{of} = & |0000 \rangle \langle 0000| + |0001 \rangle \langle 0001| + |0010 \rangle \langle 0010| + \\ & + |0011 \rangle \langle 0011| + |0100 \rangle \langle 0100| + |0101 \rangle \langle 0101| + \\ & + |0110 \rangle \langle 0110| + |0111 \rangle \langle 0111| + |1000 \rangle \langle 1000| + \\ & + |1001 \rangle \langle 1001| + |1010 \rangle \langle 1010| + |1011 \rangle \langle 1011| + \\ & + |1100 \rangle \langle 1100| + |1101 \rangle \langle 1101| + |1110 \rangle \langle 1110| + \\ & + |1111 \rangle \langle 1110| \end{aligned}$$

Η μορφή του με μήτρα είναι η ακόλουθη:

$$\hat{\mathcal{Q}}_{of} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι: $\hat{\mathcal{Q}}_{of}^2 = \hat{I}$

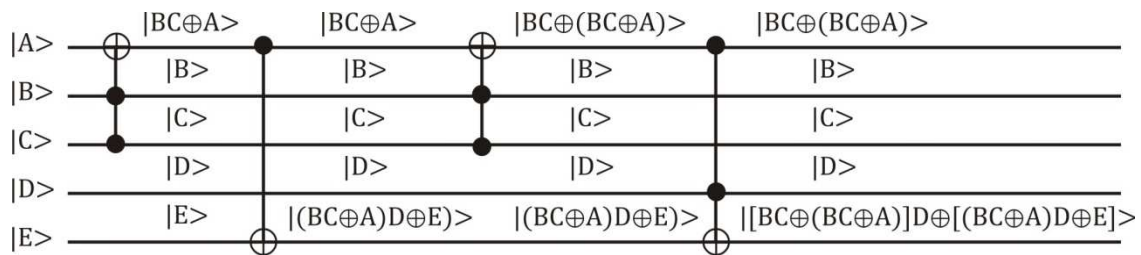
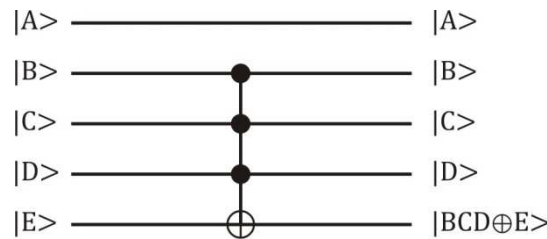
$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}_{of}^2|ABCD \rangle &= \hat{\mathcal{Q}}_{of}(\hat{\mathcal{Q}}_{of}|ABCD \rangle) = \hat{\mathcal{Q}}_{of}(|A, B, C, ABC \oplus D \rangle) = \\ &= |A, B, C, ABC \oplus ABC \oplus D \rangle = |ABCD \rangle \end{aligned}$$

Συνεπώς είναι αντιστρέψιμη πύλη με $\hat{\mathcal{Q}}_{of}^{-1} = \hat{\mathcal{Q}}_{of}$. Επίσης παρατηρούμε ότι $\hat{\mathcal{Q}}_{of}^+ = \hat{\mathcal{Q}}$.

Συνεπώς $\hat{\mathcal{Q}}_{of}^+ = \hat{\mathcal{Q}}_{of}^{-1}$ άρα ο μετασχηματισμός $\hat{\mathcal{Q}}_{of}$ είναι και μοναδιακός.

Έστω $C^{m-2}(\sigma_x)$ το σύνολο των γενικευμένων cNOT πυλών όπου ο εκθέτης $m-2$ συμβολίζει τον αριθμό των «συρμάτων» ελέγχου των πυλών και ο αριθμός m τον αριθμό των qubits του κυκλώματος.

Θα αποδείξουμε ότι καθεμιά από τις $C^3(\sigma_x)$ γενικευμένες cNOT πύλες (δηλαδή Toffoli των τριών control qubits) μπορεί να αναλυθεί σε τέσσερις Toffolies των δύο qubits ελέγχου. Τα δύο ισοδύναμα κυκλώματα δίνονται παρακάτω:



Γνωρίζουμε ότι ισχύει η προσεταιριστικότητα στη λογική πράξη «αποκλειστικό Η» (XOR). Συνεπώς:

$$BC \oplus (BC \oplus A) = (BC \oplus BC) \oplus A = 0 \oplus A = A$$

Το μόνο που απομένει είναι να αποδειχθεί η ισότητα:

$$BCD \oplus E = AD \oplus [(BC \oplus A)D \oplus E]$$

Ο ευκολότερος τρόπος απόδειξης είναι με πίνακες αληθείας.

A>	B>	C>	D>	E>	BCD>	BCD⊕E>
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1

0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0

και

$ BC\rangle$	$ BC\oplus A\rangle$	$ AD\rangle$	$ [(BC\oplus A)D]\rangle$	$ [(BC\oplus A)D\oplus E]\rangle$	$ AD\oplus[(BC\oplus A)D\oplus E]\rangle$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1

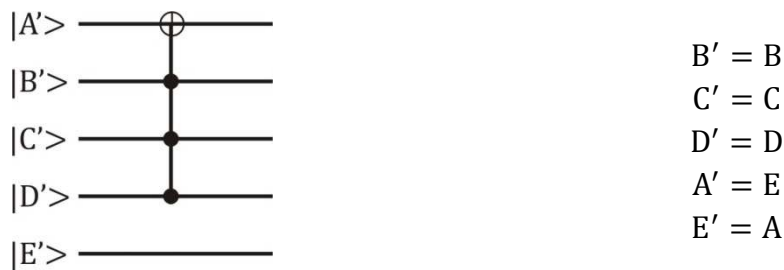
1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0

Παρατηρούμε από τους δύο πίνακες και τις δύο τελευταίες στήλες τους ότι όντως ισχύει:

$$BCD \oplus E = AD \oplus [(BC \oplus A)D \oplus E]$$

Συνεπώς τα δύο κυκλώματα είναι ισοδύναμα.

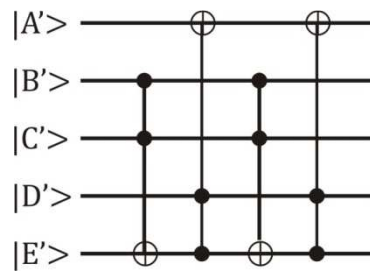
Έχοντας τώρα την πρώτη ισοδυναμία κυκλωμάτων μπορούμε εύκολα να βρούμε τις υπόλοιπες ισοδυναμίες. Για παράδειγμα:



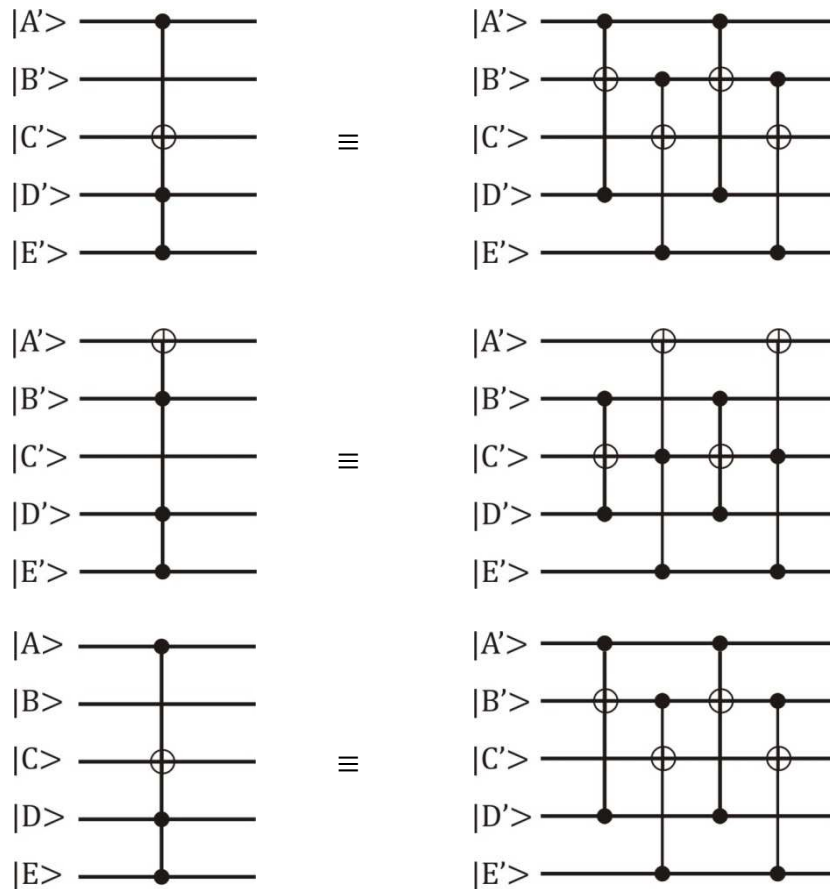
Συνεπώς οι τέσσερις έξοδοι από τις τέσσερις Toffoli πύλες θα είναι οι:

- $|\overline{B'}C' \oplus E' \rangle$
- $|(\overline{B'}C' \oplus E')D' \oplus A' \rangle$
- $|\overline{B'}C' \oplus (\overline{B'}C' \oplus E') \rangle$
- $|[\overline{B'}C' \oplus (\overline{B'}C' \oplus E')] D' \oplus [(\overline{B'}C' \oplus E')D' \oplus A'] \rangle$

Άρα το ισοδύναμο κύκλωμα είναι το ακόλουθο:

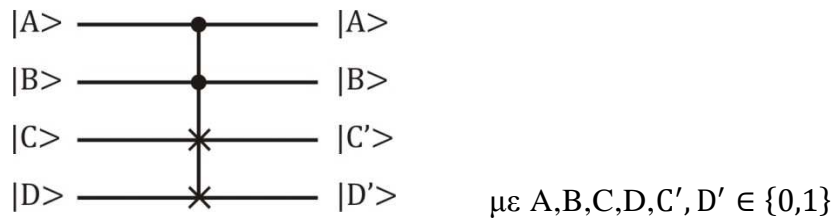


Ομοίως:



Κβαντική πύλη ελεγχόμενης εναλλαγής (Controlled Swap – CSWAP) με δύο qubits ελέγχου

Η κυκλωματική αναπαράσταση της κβαντικής πύλης αυτής είναι η ακόλουθη:



Η κβαντική πύλη CSWAP έχει δύο qubits ελέγχου και δύο qubits στόχους. Αν και τα δύο από τα qubits ελέγχου είναι ταυτόχρονα στην κατάσταση $|1\rangle$ τότε εναλλάσσονται μεταξύ τους οι καταστάσεις των δύο qubits στόχων

$$\begin{aligned} \Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta: CSWAP = & |0000\rangle\langle 0000| + |0001\rangle\langle 0001| + |0011\rangle\langle 0011| + |0100\rangle\langle 0100| + \\ & + |0110\rangle\langle 0110| + |0111\rangle\langle 0111| + |1000\rangle\langle 1000| + |1001\rangle\langle 1001| + \\ & + |1010\rangle\langle 1010| + |1011\rangle\langle 1011| + |1100\rangle\langle 1100| + |1101\rangle\langle 1110| + \\ & + |1110\rangle\langle 1101| + |1111\rangle\langle 1111| \end{aligned}$$

ΕΙΣΟΔΟΣ				ΕΞΟΔΟΣ			
A	B	C	D	A'	B'	C'	D'
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

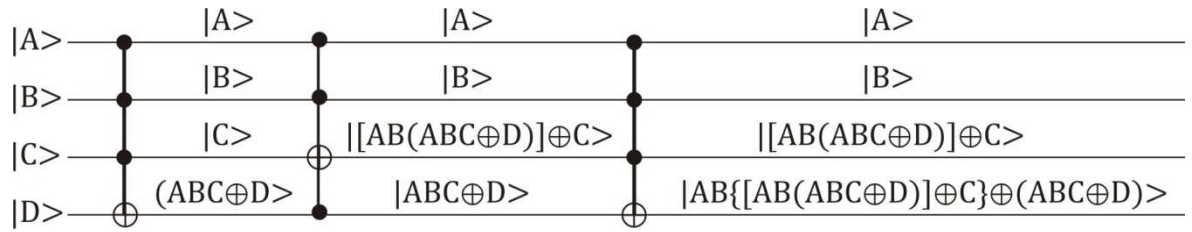
Από τον προηγούμενο πίνακα αληθείας βλέπουμε ότι:

$$A' = A, \quad B' = B$$

$$\begin{aligned}
C' &= \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + AB\overline{C}\overline{D} + ABCD = \\
&= \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABD = \overline{A}C + \overline{A}B\overline{C} + ABD = C(\overline{A} + A\overline{B}) + ABD = \\
&= C(\overline{A} + \overline{B}) + ABD = \overline{A}C + \overline{B}C + ABD
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D' &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD = \\
&= \overline{A}\overline{B}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}\overline{B}C + ABC = \overline{A}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D + ABC = D(\overline{A} + A\overline{B}) + ABC = \\
&= D(\overline{A} + \overline{B}) + ABC = \overline{A}D + \overline{B}D + ABC
\end{aligned}$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα με αυτό της CSWAP είναι το ακόλουθο:



Πρέπει να αποδειχθεί ότι:

$$[AB(ABC\oplus D)]\oplus C = \overline{A}C + \overline{B}C + ABD \quad \text{και}$$

$$AB\{[AB(ABC\oplus D)]\oplus C\}\oplus(ABC\oplus D) = \overline{A}C + \overline{B}C + ABC$$

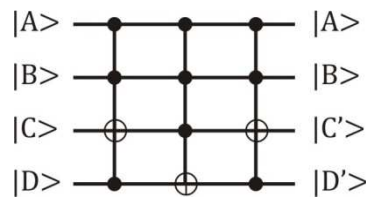
$$\begin{aligned}
ABC\oplus D &= \overline{A}\overline{B}C \cdot D + ABC\overline{D} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})D + ABC\overline{D} = \\
&= \overline{A}D + \overline{B}D + \overline{C}D + ABC\overline{D}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AB(ABC\oplus D) &= AB(\overline{A}D + \overline{B}D + \overline{C}D + ABC\overline{D}) = AB\overline{C}D + ABC\overline{D} = \\
&= AB(\overline{C}D + C\overline{D}) = AB(C\oplus D)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[AB(ABC\oplus D)]\oplus C &= [AB(C\oplus D)]\oplus C = ABC\oplus ABD\oplus C = \\
&= ABC\oplus C\oplus ABD = (AB\oplus 1)C\oplus ABD = \\
&= \overline{A}\overline{B}C\oplus ABD = [(\overline{A} + \overline{B})C]\oplus ABD = \\
&= (\overline{A}C + \overline{B}C)\oplus ABD = \overline{A}C + \overline{B}C \cdot ABD + (\overline{A}C + \overline{B}C)\overline{A}B\overline{D} = \\
&= ABD + AB\overline{C}D + AB\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + \overline{A}C + \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}C\overline{D} + \\
&+ \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{B}C + \overline{B}C\overline{D} = \overline{A}C + \overline{B}C + ABD = C'
\end{aligned}$$

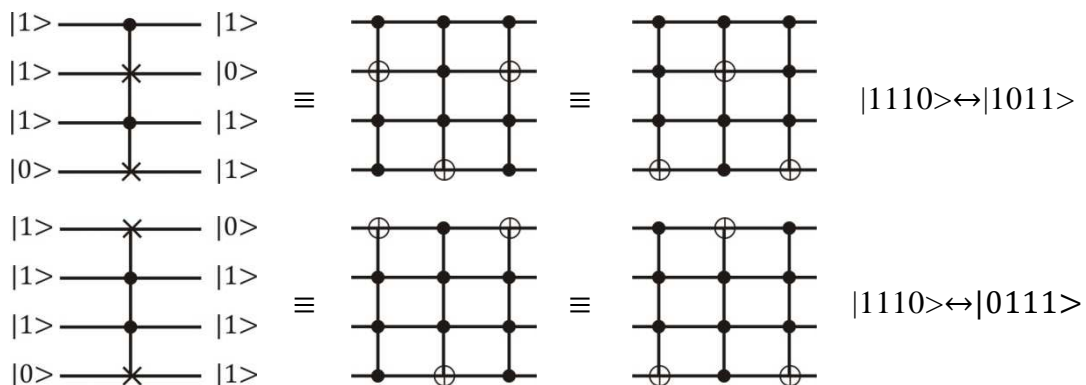
$$\begin{aligned}
& AB\{[AB(ABC\oplus D)]\oplus C\}\oplus(ABC\oplus D) = [AB(\bar{A}C + \bar{B}C + ABD)]\oplus(ABC\oplus D) = \\
& = ABD\oplus(ABC\oplus D) = (ABD\oplus D)\oplus ABC = (AB\oplus 1)D\oplus ABC = \\
& = \bar{A}\bar{B}D\oplus ABC = (\bar{A} + \bar{B})D\oplus ABC = (\bar{A}D + \bar{B}D)\oplus ABC = \\
& = \overline{\bar{A}D + \bar{B}D} \cdot ABC + (\bar{A}D + \bar{B}D)\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \\
& = (A + D)(B + D)ABC + (\bar{A}D + \bar{B}D)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = \\
& = (AB + A\bar{D} + B\bar{D} + \bar{D})ABC + \bar{A}D + \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}D + \bar{B}D + \bar{B}\bar{C}D = \\
& = ABC + ABC\bar{D} + ABC\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}D + \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}D + \bar{B}D + \bar{B}\bar{C}D = \\
& = ABC(1 + \bar{D}) + \bar{A}D(1 + \bar{B}) + \bar{A}\bar{C}D + \bar{B}D(1 + \bar{C}) = \\
& = ABC + \bar{A}D + \bar{A}\bar{C}D + \bar{B}D = \\
& = ABC + \bar{A}D(1 + \bar{C}) + \bar{B}D = \\
& = ABC + \bar{A}D + \bar{B}D = D'
\end{aligned}$$

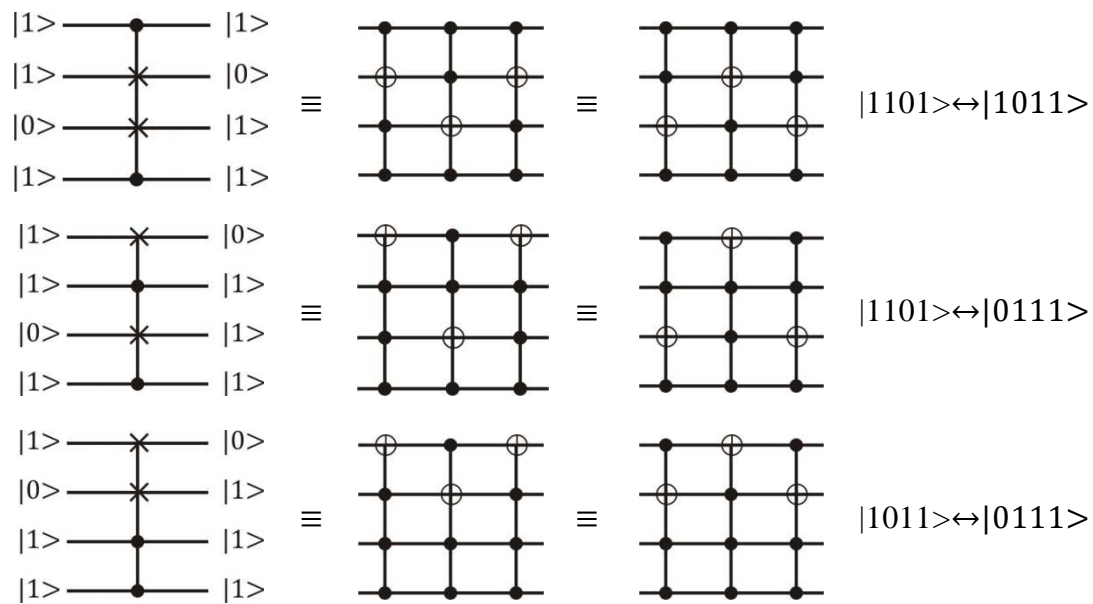
Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα δύο αυτά κυκλώματα είναι ισοδύναμα με το ακόλουθο:



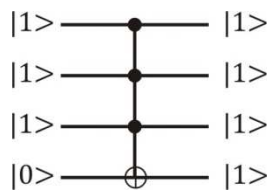
Παρατηρούμε ότι τα τρία αυτά ισοδύναμα κυκλώματα επιτυγχάνουν τη μετάβαση από το θεμελιώδες διάνυσμα $|1101\rangle$ του χώρου Hilbert (διάστασης δεκαέξι) στο θεμελιώδες διάνυσμα $|1110\rangle$, του ίδιου χώρου, και αντιστρόφως. Δηλαδή $|1101\rangle \leftrightarrow |1110\rangle$. Τα υπόλοιπα δεκατέσσερα διανύσματα δεν υφίστανται καμία αλλαγή αν δοθούν στην είσοδο.

Με όμοιο λοιπόν τρόπο αποδεικνύονται οι ακόλουθες ισοδυναμίες κυκλωμάτων:



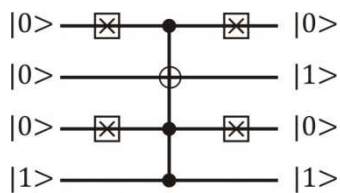


Βέβαια τα έξι αυτά κυκλώματα, με τη χρήση της πύλης CSWAP, δεν είναι και τα μοναδικά που επιτυγχάνουν μοναδικές εναλλαγές μεταξύ των θεμελιωδών διανυσμάτων που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα θα μπορούσαν να είναι τα ακόλουθα:



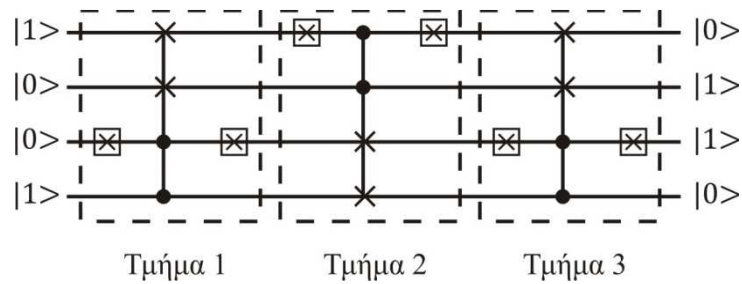
Δηλαδή: $|1110\rangle \leftrightarrow |1111\rangle$

και



Δηλαδή: $|0001\rangle \leftrightarrow |0101\rangle$

Ο πλήρης κατάλογος των εκατόν είκοσι κυκλωμάτων, που επιτυγχάνουν μοναδικές εναλλαγές μεταξύ των θεμελιωδών διανυσμάτων του δεκαεξαδιάστατου χώρου Hilbert, βρίσκεται στο τέλος της εργασίας αυτής (Παράρτημα Α). Παρατηρείται μια συμμετρία στην κατασκευή αυτών των κυκλωμάτων. Για παράδειγμα το κύκλωμα που επιτυγχάνει την εναλλαγή $|1001\rangle \leftrightarrow |0110\rangle$ είναι το ακόλουθο:



Αν δοθεί ως είσοδος η κατάσταση $|1001\rangle$ τότε:

Το τμήμα 1 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|1001\rangle \leftrightarrow |0101\rangle$

Το τμήμα 2 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|0101\rangle \leftrightarrow |0110\rangle$

Το τμήμα 3 δεν πραγματοποιεί καμία εναλλαγή.

Αν όμως δοθεί ως είσοδος η κατάσταση $|0110\rangle$ τότε:

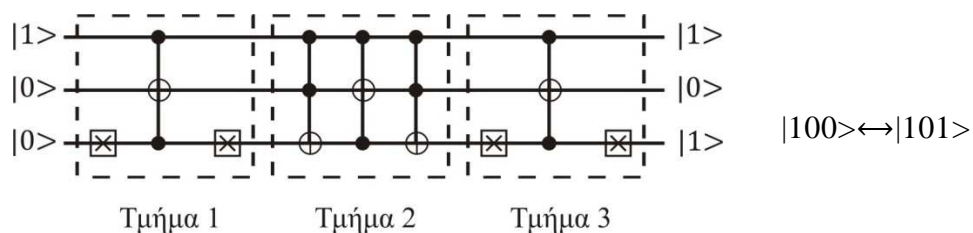
Το τμήμα 1 δεν πραγματοποιεί καμία εναλλαγή.

Το τμήμα 2 πραγματοποιεί την εναλλαγή $|0110\rangle \leftrightarrow |0101\rangle$

Το τμήμα 3 πραγματοποιεί την εναλλαγή $|0101\rangle \leftrightarrow |1001\rangle$

Σε καθένα από αυτά τα εκατόν είκοσι κυκλώματα υπάρχει κάποιο τμήμα που δεν επιτελεί καμία εναλλαγή. Είναι όμως αναγκαία η ύπαρξή του γιατί στην αντίστροφη διαδικασία δεν παραμένει και πάλι ανενεργό. Μπορεί να ειπωθεί ότι η ύπαρξη του ανενεργού τμήματος λειτουργεί «αποτρεπτικά» στο ενδεχόμενο μη επιθυμητής εναλλαγής. Αυτός φαίνεται να είναι και ο λόγος αυτής της συμμετρίας στην κατασκευή κυκλωμάτων.

Αυτή η συμμετρικότητα στην κατασκευή κυκλωμάτων δεν είναι αποκλειστικό προνόμιο των κυκλωμάτων που δρουν σε καταστάσεις του δεκαεξαδιάστατου χώρου Hilbert. Μπορεί να εφαρμοστεί και σε χώρους Hilbert μικρότερης ή μεγαλύτερης διάστασης με την ίδια επιτυχία. Για παράδειγμα το ακόλουθο κύκλωμα που δρα σε καταστάσεις του οχταδιάστατου χώρου Hilbert.



Ως είσοδος τοποθετείται η κατάσταση $|100\rangle$

Το τμήμα 1 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|100\rangle \leftrightarrow |110\rangle$

Το τμήμα 2 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|110\rangle \leftrightarrow |101\rangle$

Το τμήμα 3 δεν πραγματοποιεί καμιά εναλλαγή.

Αν ως είσοδος τοποθετηθεί η κατάσταση $|101\rangle$ τότε:

Το τμήμα 1 δεν πραγματοποιεί καμιά εναλλαγή.

Το τμήμα 2 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|101\rangle \leftrightarrow |110\rangle$

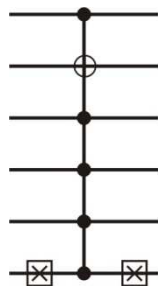
Το τμήμα 3 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|110\rangle \leftrightarrow |100\rangle$

Μπορεί επίσης να δοθεί ένα παράδειγμα κυκλώματος που δρα στα θεμελιώδη διανύσματα του διανυσματικού χώρου Hilbert διάστασης εξήντα τέσσερα.



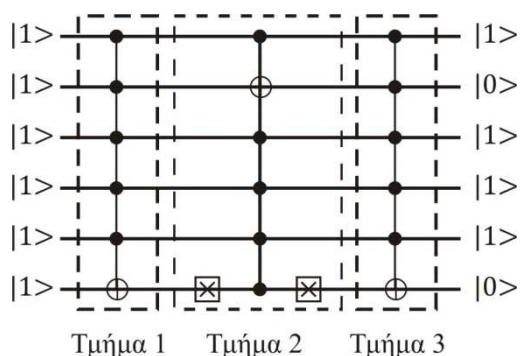
Το διπλανό κύκλωμα πραγματοποιεί την μοναδική εναλλαγή: $|111111\rangle \leftrightarrow |111110\rangle$

ενώ



το διπλανό κύκλωμα πραγματοποιεί την μοναδική εναλλαγή: $|111110\rangle \leftrightarrow |101110\rangle$

Συνεπώς το ακόλουθο κύκλωμα επιτυγχάνει την μοναδική αλλαγή $|111111\rangle \leftrightarrow |101110\rangle$



Η απόδειξη του είναι πολύ εύκολη και γίνεται με τη βοήθεια πίνακα αληθείας.

Αν ως είσοδος τοποθετηθεί η κατάσταση $|111111\rangle$ τότε:

Το τμήμα 1 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|111111\rangle \leftrightarrow |111110\rangle$

Το τμήμα 2 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|111110\rangle \leftrightarrow |101110\rangle$

Το τμήμα 3 δεν πραγματοποιεί καμία εναλλαγή.

ενώ

αν ως είσοδος τοποθετηθεί η κατάσταση $|101110\rangle$ τότε:

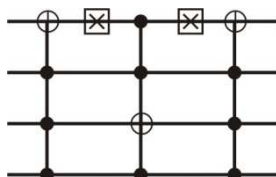
Το τμήμα 1 δεν πραγματοποιεί καμία εναλλαγή.

Το τμήμα 2 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|101110\rangle \leftrightarrow |111110\rangle$

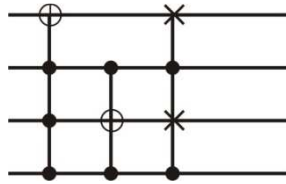
Το τμήμα 3 πραγματοποιεί την εναλλαγή: $|111110\rangle \leftrightarrow |111111\rangle$

Αυτός ο συμμετρικός και σχετικά εύκολος τρόπος σχεδίασης κβαντικών κυκλωμάτων σε χώρους Hilbert έχει αποδειχθεί ότι ισχύει για αριθμό qubits τρία ή και τέσσερα αλλά όχι για μεγαλύτερο αριθμό qubits. Η επαγωγική αυτή απόδειξη δεν περιλαμβάνεται σε αυτήν την εργασία αλλά είναι αντικείμενο της συνεχιζόμενης έρευνάς μας.

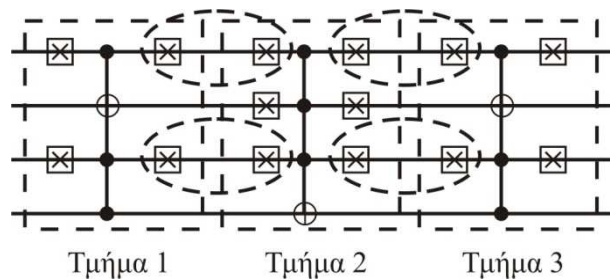
Τα κυκλώματα που σχεδιάσαμε και πραγματοποιούν αυτές τις μοναδικές εναλλαγές **δεν** είναι και τα μοναδικά που μπορούν να σχεδιαστούν. Για παράδειγμα η εναλλαγή $|1111\rangle \leftrightarrow |0101\rangle$ είδαμε ότι επιτυγχάνεται από το κύκλωμα:



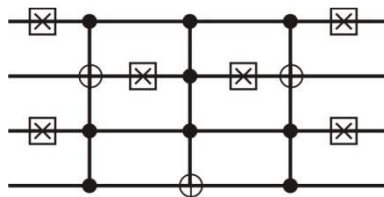
Ένας εναλλακτικός τρόπος σχεδίασης είναι ο ακόλουθος:



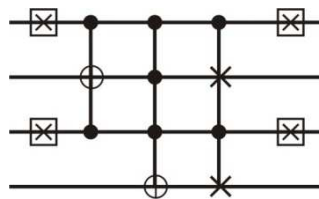
Ένα άλλο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι το κύκλωμα της εναλλαγής $|0101\rangle \leftrightarrow |0000\rangle$. Είδαμε ότι το κύκλωμα που την επιτυγχάνει είναι το:



Οι αρνήσεις που βρίσκονται μέσα στις ελλείψεις αλληλοαναιρούνται και το κύκλωμα γίνεται ως εξής:



Ένας εναλλακτικός τρόπος σχεδίασης είναι ο ακόλουθος:



Fast Geometric Transformations on Quantum Images

(Γρήγοροι Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί σε Κβαντικές Εικόνες)

Είδαμε και στην αρχή της εργασίας αυτής ότι κβαντικοί υπολογισμοί εμφανίζονται σε διάφορες περιοχές της επιστήμης των υπολογιστών όπως στη θεωρία πληροφορίας, στην κρυπτογραφία, στην επεξεργασία εικόνας κ.λπ. Και αυτό γιατί υπάρχουν μη

αποτελεσματικά θέματα στους κλασικούς υπολογιστές που αντιμετωπίζονται πολύ πιο αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας τη δύναμη των κβαντικών υπολογιστών. Στους κβαντικούς υπολογιστές, η επεξεργασία εικόνων αντιμετωπίζει βασικές δυσκολίες διότι το πεδίο αυτό είναι ακόμα στα σπάργανά του.

Τι ονομάζεται όμως κβαντική εικόνα; Είναι ένας δισδιάστατος πίνακας qubits που βρίσκεται συνολικά σε κάποια κβαντική κατάσταση έστω $|I(\theta)\rangle$.

Εμπνευσμένοι από την αναπαράσταση με pixels των εικόνων στους συμβατικούς υπολογιστές, προτάθηκε, από τους Phuc Q. Le, Fangyon Dong και Kaoru Hirota, μια αναπαράσταση εικόνων στους κβαντικούς υπολογιστές που ενσωματώνει πληροφορίες σχετικές με χρώματα και τις αντίστοιχες θέσεις τους. Η αναπαράσταση αυτή έχει το όνομα “Flexible Representation of Quantum Images” (Ευέλικτη αναπαράσταση κβαντικών εικόνων) (FRQI)

$$|I(\theta)\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} |C_k\rangle \otimes |k\rangle \quad \text{όπου:}$$

$$|C_k\rangle = \cos \theta_k |0\rangle + \sin \theta_k |1\rangle, \quad \theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad k = 0, 1, \dots, 2^{2n} - 1$$

Δηλαδή $|k\rangle$ τα θεμελιώδη διανύσματα ενός χώρου Hilbert διάστασης 2^{2n} και $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2^{2n}-1})$ το διάνυσμα γωνιών που κωδικοποιούν χρώματα. Υπάρχουν δύο τμήματα σε μια FRQI, αναπαράσταση. Το τμήμα $\cos \theta_k |0\rangle + \sin \theta_k |1\rangle$ που κωδικοποιεί πληροφορία για τα χρώματα και το τμήμα $|k\rangle$ που κωδικοποιεί τις αντίστοιχες θέσεις στην εικόνα. Η κατάσταση της εικόνας είναι κανονικοποιημένη γιατί:

$$\begin{aligned} \| |I(\theta)\rangle \| &= \sqrt{\langle I(\theta) | I(\theta) \rangle} = \left[\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \sum_{l=0}^{2^{2n}-1} (\langle 0, l | \cos \theta_l + \langle 1, l | \sin \theta_l) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \theta_k |0, k\rangle + \sin \theta_k |1, k\rangle \right]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2^n} \left[\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} (\cos^2 \theta_k + \sin^2 \theta_k) \right]^{1/2} = \frac{1}{2^n} (2^{2n})^{1/2} = 1 \end{aligned}$$

Για τις δισδιάστατες εικόνες η πληροφορία για τη θέση $|k\rangle$ περιλαμβάνει δύο τμήματα, τις κατακόρυφες και τις οριζόντιες συντεταγμένες. Συνεπώς:

$$|k\rangle = |y\rangle |x\rangle = |y_{n-1}y_{n-2} \dots y_0\rangle |x_{n-1}x_{n-2} \dots x_0\rangle$$

$$\text{με } x_i, y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Τα πρώτα n -qubits κωδικοποιούν την κατακόρυφη θέση και τα επόμενα n -qubits κωδικοποιούν την οριζόντια θέση.

Μια 6-qubit εικόνα (δηλαδή $2n=6 \Leftrightarrow n=3$) ($2^{2 \cdot 3} = 64$) είναι η ακόλουθη:

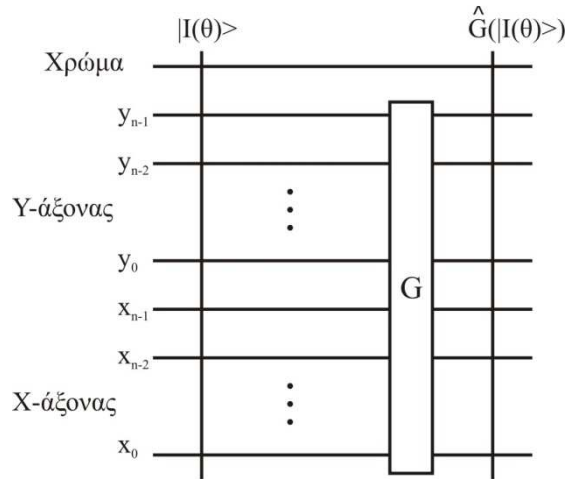
	111	110	101	100	011	010	001	000
111								
110								
101		■	■					
100		■	■					
011		■	■	■	■	■		
010		■	■	■	■	■		
001								
000								

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί είναι οι δράσεις που εκτελούνται στις γεωμετρικές πληροφορίες $|k\rangle$ των εικόνων. Αυτοί οι μετασχηματισμοί G_I ορίζονται ως εξής:

$$\widehat{G}_I(|I(\theta)\rangle) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} |C_k\rangle \otimes \widehat{G}(|k\rangle) \quad \text{όπου:}$$

$G(|k\rangle)$ για $k=0,1,\dots,2^{2n}-1$ είναι οι μοναδιακοί μετασχηματισμοί που επιτελούν γεωμετρικές εναλλαγές που βασίζονται στις κατακόρυφες και τις οριζόντιες θέσεις.

Η γενική δομή των κυκλωμάτων των γεωμετρικών μετασχηματισμών στις FRQI εικόνες είναι η ακόλουθη:

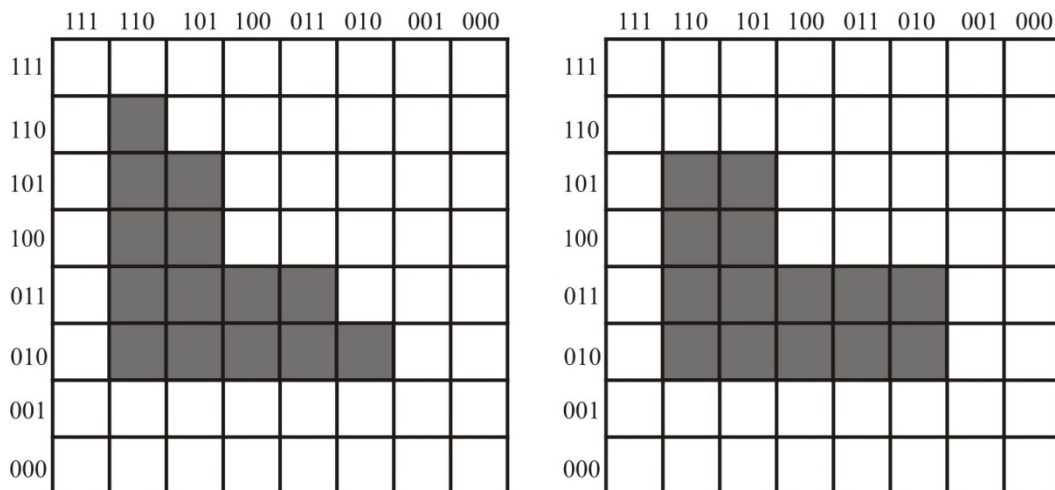


Μια ειδική περίπτωση γεωμετρικού μετασχηματισμού είναι η εναλλαγή δύο σημείων (two-point swapping) σε μια FRQI εικόνα. Η εναλλαγή δύο θέσεων i, j είναι η δράση του τελεστή \hat{S}_I στην κατάσταση $|I(\theta)\rangle$

$$\hat{S}_I(|I(\theta)\rangle) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} |C_k\rangle \otimes \hat{S}(|k\rangle) \text{ με}$$

$$\hat{S} = |i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i| + \sum_{k \neq i,j} |k\rangle\langle k|$$

Για παράδειγμα τα παρακάτω δύο σχήματα δείχνουν την εναλλαγή μεταξύ των σημείων $|110\rangle|110\rangle$ και $|011\rangle|010\rangle$

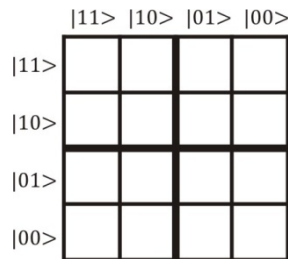


Στο άρθρο αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά ότι η δράση εναλλαγής δύο σημείων i, j (δράση \hat{S} μπορεί να περιγραφεί με NOT, CNOT και Toffoli πύλες.

Δεν θα αποδειχθεί στην παρούσα εργασία ο προηγούμενος ισχυρισμός αλλά με τη βοήθεια ενός παραδείγματος θα σκιαγραφήσουμε τα σημεία που στηρίζεται η απόδειξη.

Για $n=2$, οι εικόνες FRQI περιέχουν 16 σημεία τα:

$|00\rangle|00\rangle$, $|00\rangle|01\rangle$, $|00\rangle|10\rangle$, $|00\rangle|11\rangle$, $|01\rangle|00\rangle$, $|01\rangle|01\rangle$, $|01\rangle|10\rangle$, $|01\rangle|11\rangle$,
 $|10\rangle|00\rangle$, $|10\rangle|01\rangle$, $|10\rangle|10\rangle$, $|10\rangle|11\rangle$, $|11\rangle|00\rangle$, $|11\rangle|01\rangle$, $|11\rangle|10\rangle$, $|11\rangle|11\rangle$



Αυτά τα σημεία διαιρούνται σε 4 τμήματα της μορφής $|0y_00x_0\rangle$, $|0y_01x_0\rangle$, $|1y_00x_0\rangle$, $|1y_01x_0\rangle$. Το καθένα από αυτά τα τμήματα περιλαμβάνει τέσσερα σημεία.

Αν τα σημεία στις θέσεις που κωδικοποιούνται με $|i\rangle = |y_1^i y_0^i x_1^i x_0^i\rangle$,

$|j\rangle = |y_1^j y_0^j x_1^j x_0^j\rangle$ είναι στο ίδιο block (τμήμα), πράγμα που σημαίνει ότι $y_1^i = y_0^j$ και $x_1^i = x_0^j$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα κυκλώματα της προηγούμενης περίπτωσης ($n=1$) για τα qubits y_0 και x_0 με τις δύο ελεγχόμενες συνθήκες στα qubits y_1 και x_1 .

Αν τα σημεία δεν είναι στο ίδιο block, εναλλάσσουμε πρώτα τη θέση $|j\rangle = |y_1^j y_0^j x_1^j x_0^j\rangle$ με ένα σημείο $|p\rangle = |y_1^i y_0^i x_1^i x_0^i\rangle$ που βρίσκεται στο ίδιο block με το σημείο στη θέση $|i\rangle = |y_1^i y_0^i x_1^i x_0^i\rangle$ χρησιμοποιώντας πάλι τα κυκλώματα της περίπτωσης $n=1$ για τα qubits y_1 και x_1 κάτω από τις ελεγχόμενες συνθήκες των qubits y_0 και x_0 . Στη συνέχεια εκτελούμε εναλλαγή δύο σημείων για τα $|i\rangle$ και $|j\rangle$ αφού τώρα βρίσκονται στο ίδιο block. Στο τέλος εναλλάσσουμε τα σημεία $|j\rangle$ και $|p\rangle$.

Για $n>2$ εφαρμόζεται η προηγούμενη διαδικασία.

Συμπερασματικά για κάθε τιμή του n ($n\geq 2$) η εναλλαγή δύο σημείων πραγματοποιείται με τη βοήθεια κυκλωμάτων που αποτελούνται από πύλες NOT, CNOT, και Toffoli.

Άλλοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

- **Ορθογώνια περιστροφή σε FRQI κβαντικές εικόνες ($R_I^{90}, R_I^{180}, R_I^{270}$)**

$$R_I^\alpha(|I(\theta)\rangle) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} (\cos \theta_k |0\rangle + \sin \theta_k |1\rangle) \otimes R^\alpha(|k\rangle)$$

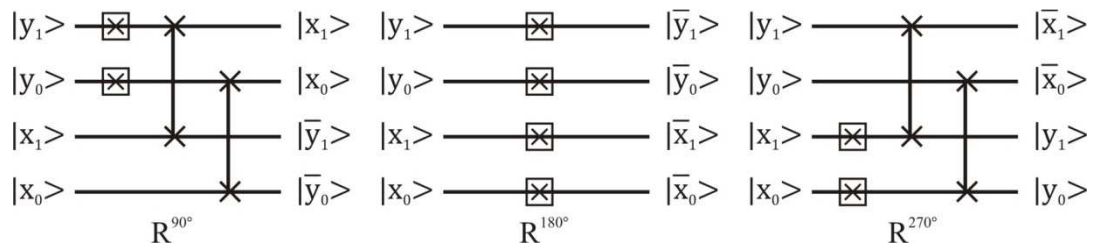
όπου $\alpha \in \{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$, $|k\rangle = |yx\rangle$ και

$$R^{90}(|yx\rangle) = |x\bar{y}\rangle$$

$$R^{180}(|yx\rangle) = |\bar{y}\bar{x}\rangle \quad \mu\epsilon \quad |x\rangle = |x_{n-1}x_{n-2} \dots x_0\rangle$$

$$R^{270}(|yx\rangle) = |\bar{x}y\rangle \quad \mu\epsilon \quad |y\rangle = |y_{n-1}y_{n-2} \dots y_0\rangle$$

Για παράδειγμα: (σε χώρο Hilbert διάστασης 16)



- **Συμμετρικοί μετασχηματισμοί περί τον x-άξονα (F_I^x) και περί τον y-άξονα (F_I^y) (Flipping Operations)**

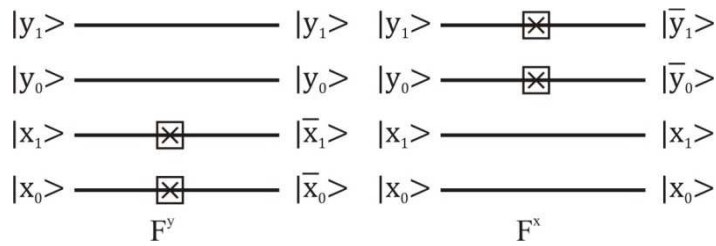
$$F_I^x(|I(\theta)\rangle) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} |C_k\rangle \otimes F^x(|k\rangle)$$

$$F_I^y(|I(\theta)\rangle) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} |C_k\rangle \otimes F^y(|k\rangle)$$

με $|k\rangle = |y\rangle|x\rangle$ και: $F^x(|y\rangle|x\rangle) = |\bar{y}\rangle|x\rangle$

$$F^y(|y\rangle|x\rangle) = |y\rangle|\bar{x}\rangle$$

Για παράδειγμα:

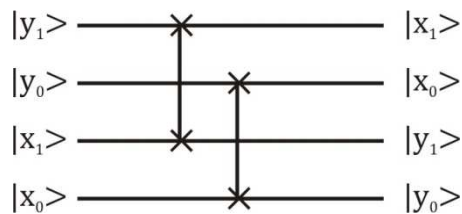


- **Μετασχηματισμοί εναλλαγής συντεταγμένων (C_I) (co-ordinate swapping operations)**

$$C_I(|I(\theta)\rangle) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} |C_k\rangle \otimes C(|k\rangle) \quad \text{όπου } |k\rangle = |yx\rangle$$

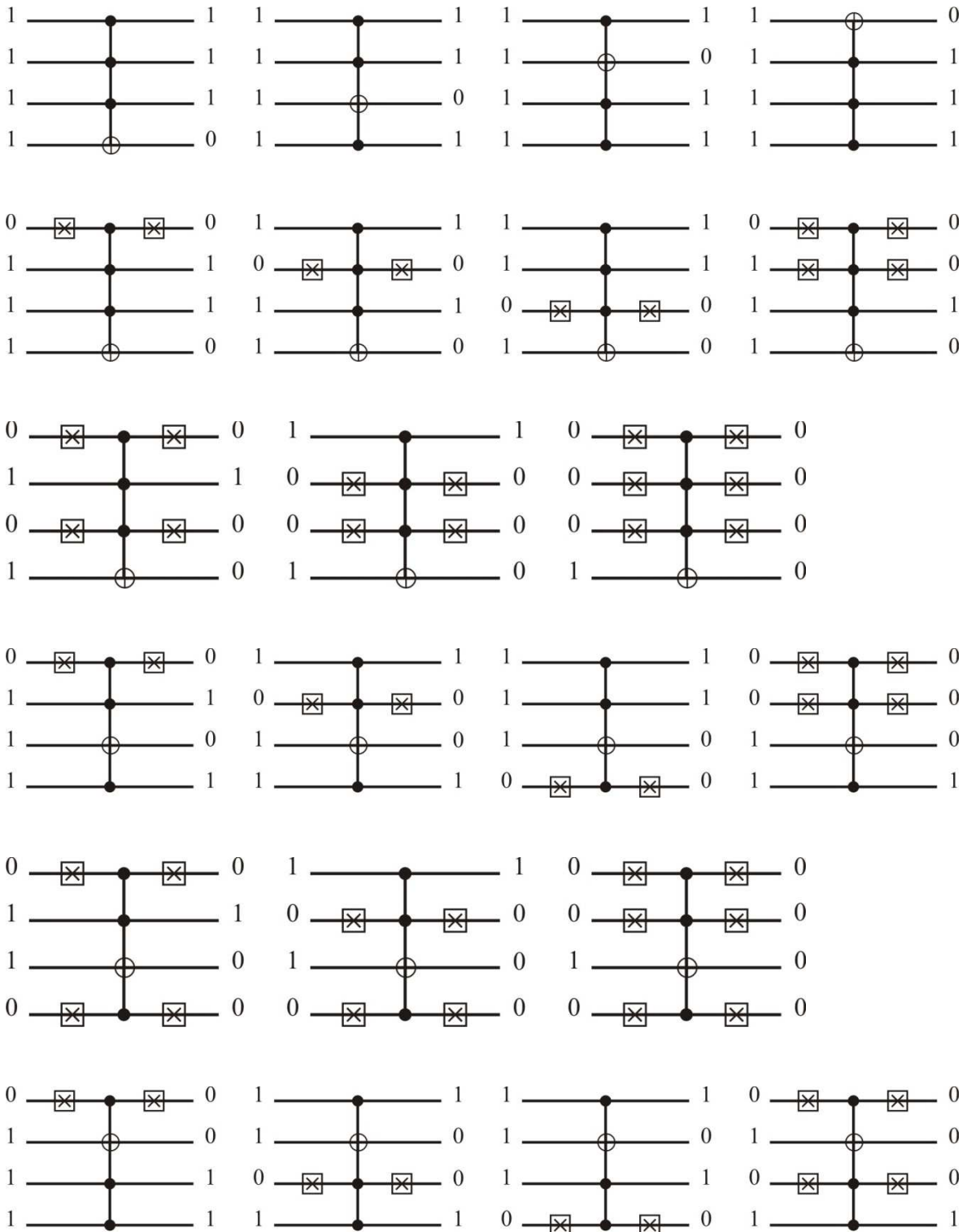
με $C(|yx\rangle) = |xy\rangle$

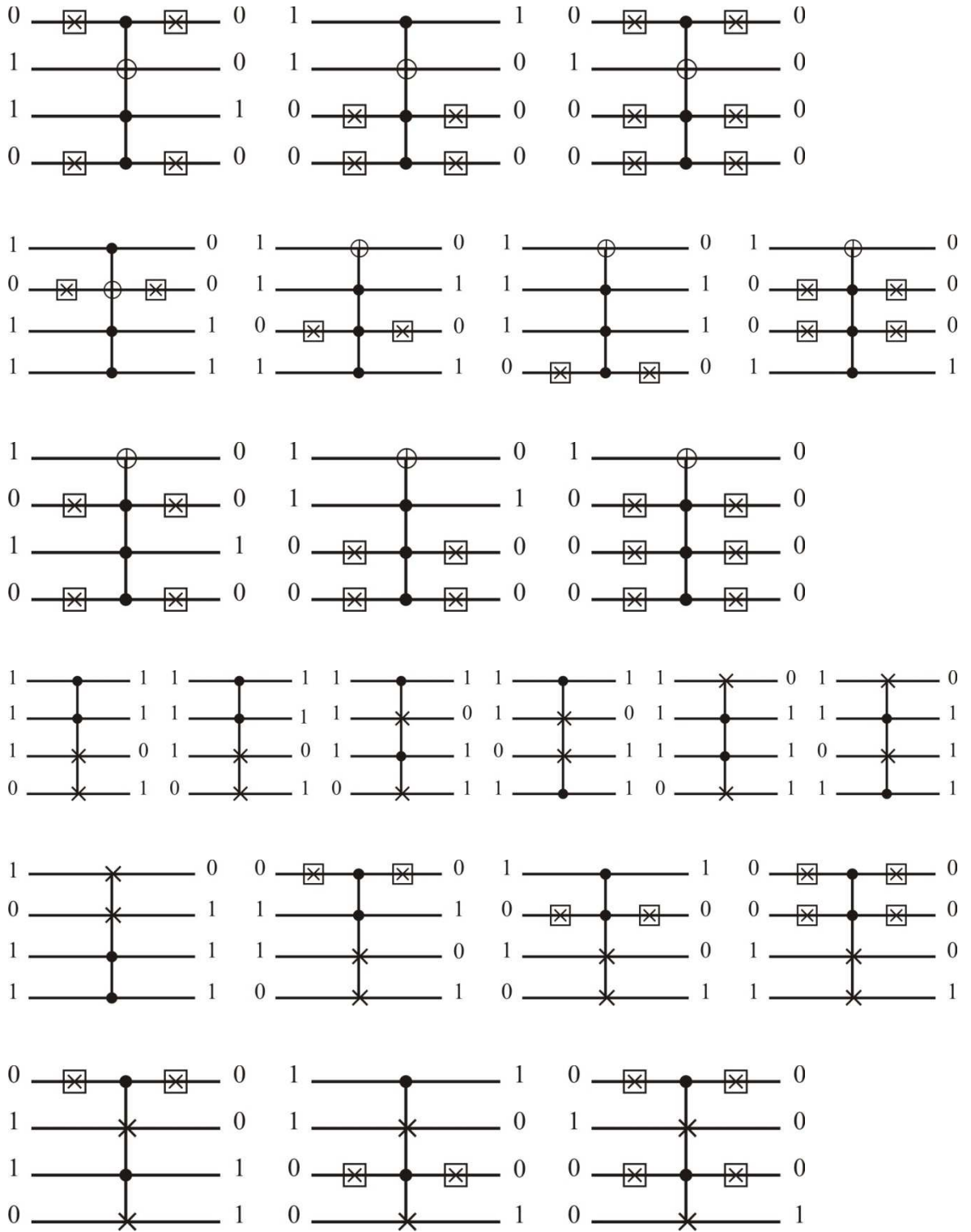
Για παράδειγμα:

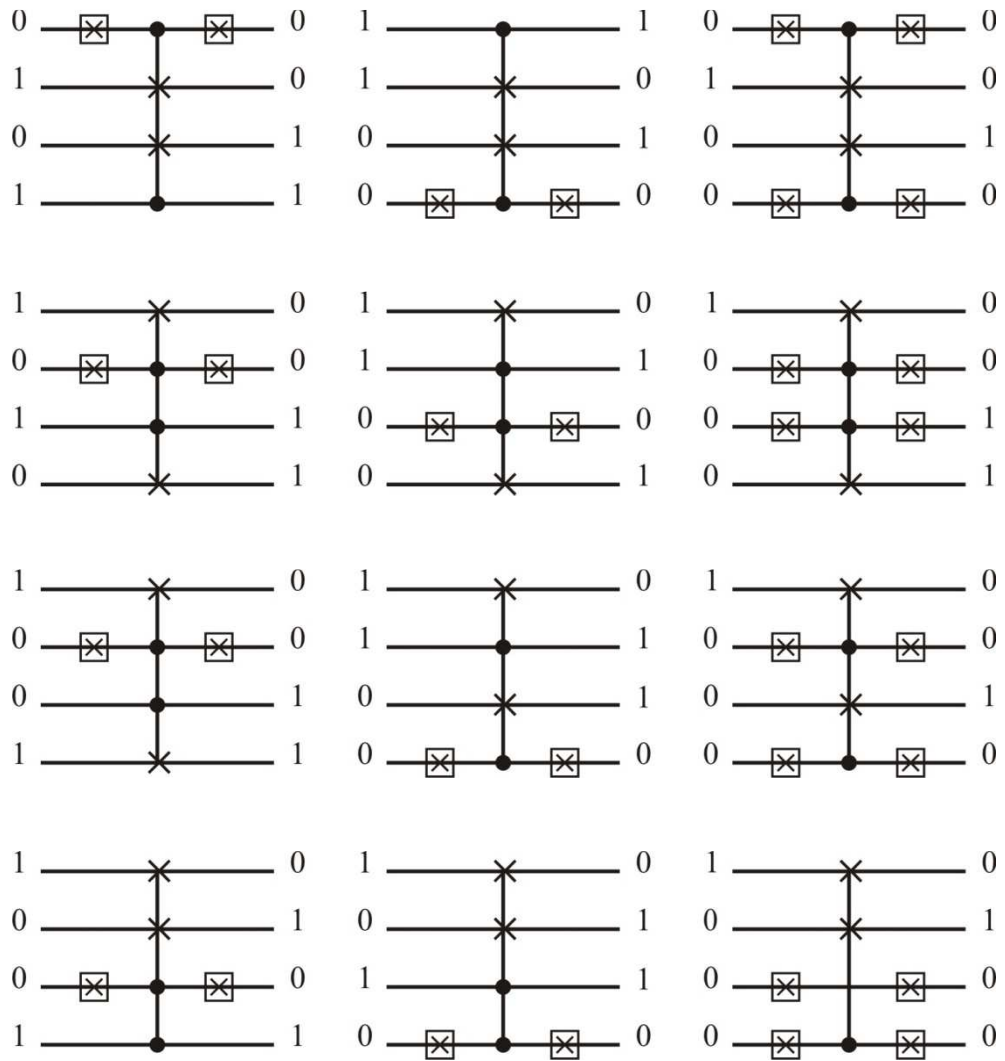


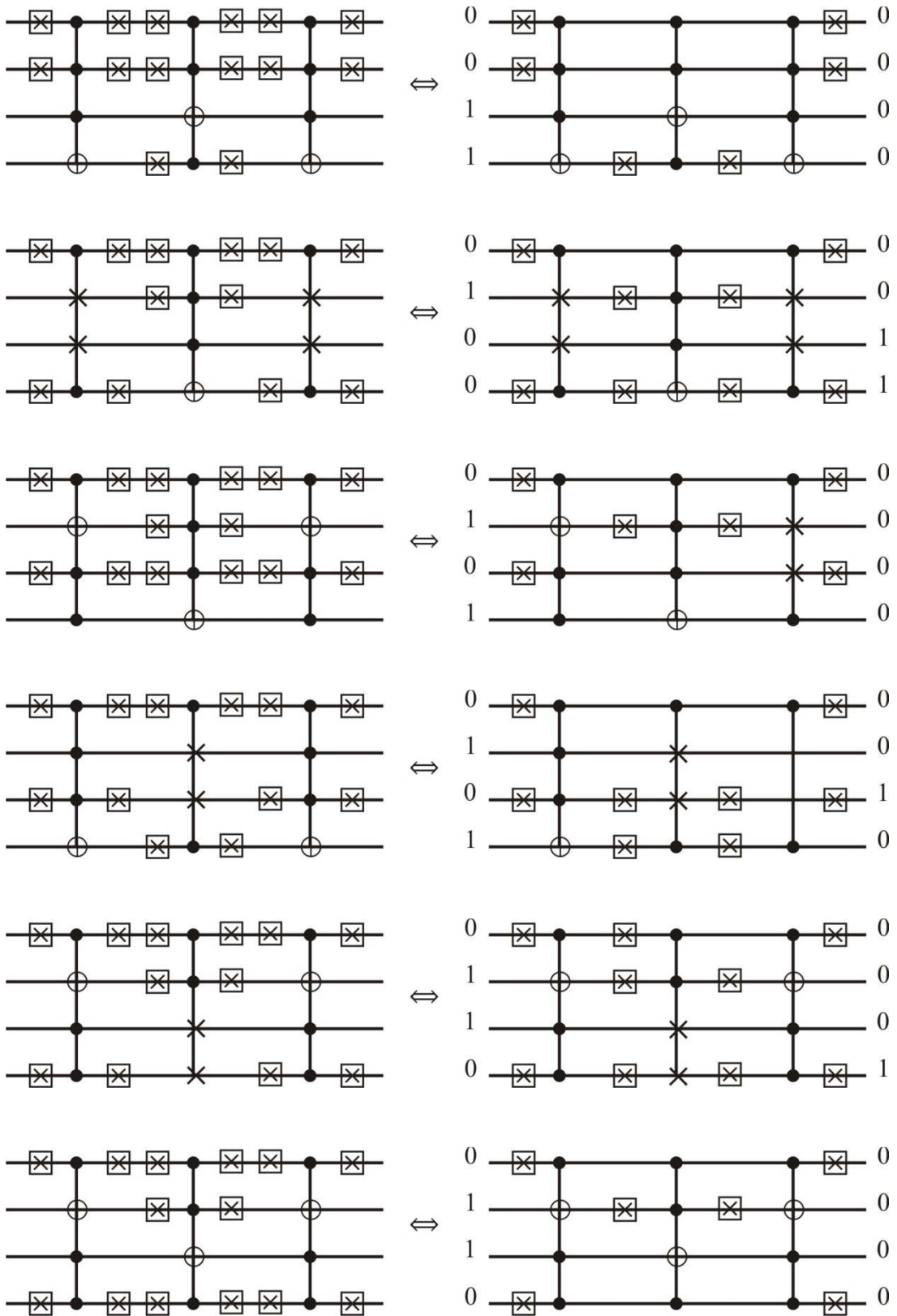
Κλείνοντας αυτήν την εργασία πρέπει να αναφερθεί ότι η μελέτη μας στην παρούσα στιγμή εστιάζεται στη μαθηματική (επαγωγική) απόδειξη της σχεδίασης κυκλωμάτων μοναδικών εναλλαγών μεταξύ θεμελιωδών διανυσμάτων σε χώρους Hilbert διαστάσεων μεγαλύτερων του δεκαέξι. Επίσης μελετάται και αναζητάται ποια θα μπορούσε να είναι η εξίσωση Schrödinger εκείνη της οποίας οι λύσεις είναι τα θεμελιώδη διανύσματα των χώρων Hilbert (διαφόρων διαστάσεων). Βέβαια αυτή η δύσκολη αναζήτηση οφείλεται στο γεγονός ότι το σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί κάνει εδώ την εμφάνισή του. Είναι προφανές, λοιπόν, ότι από αυτό το σημείο και έπειτα υπάρχει συσχέτιση μεταξύ υλικού και λογισμικού.

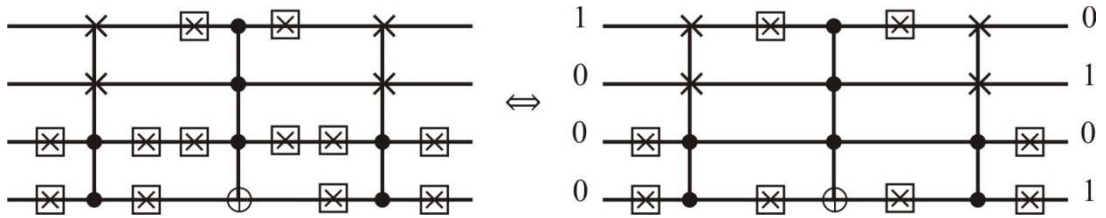
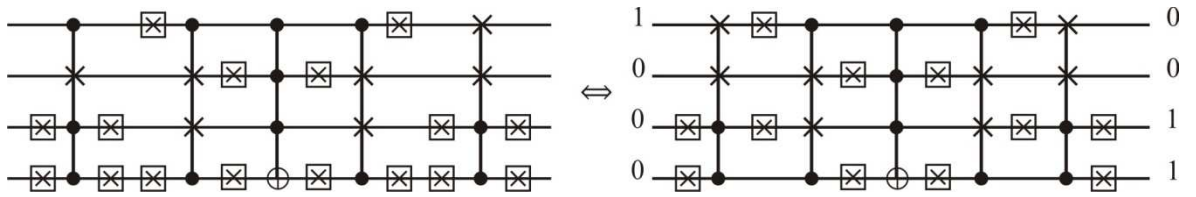
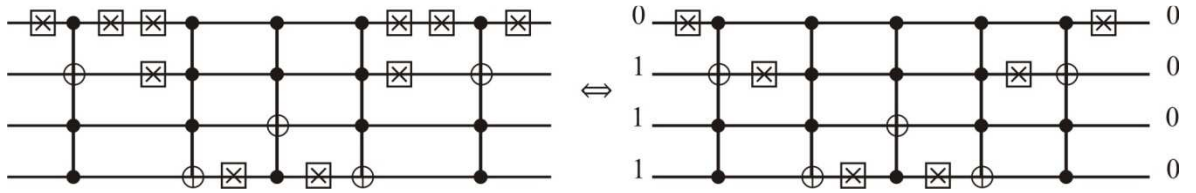
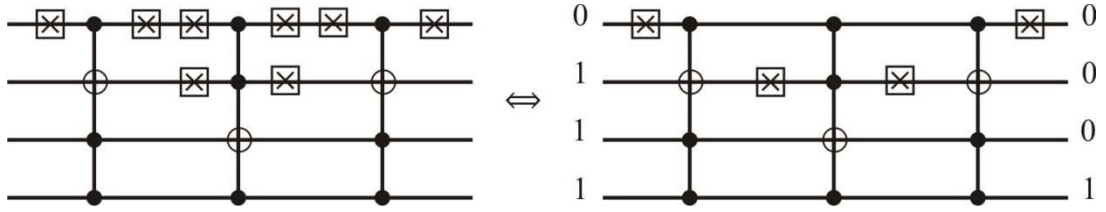
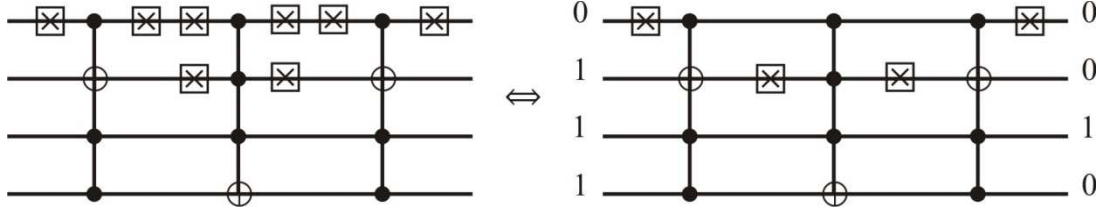
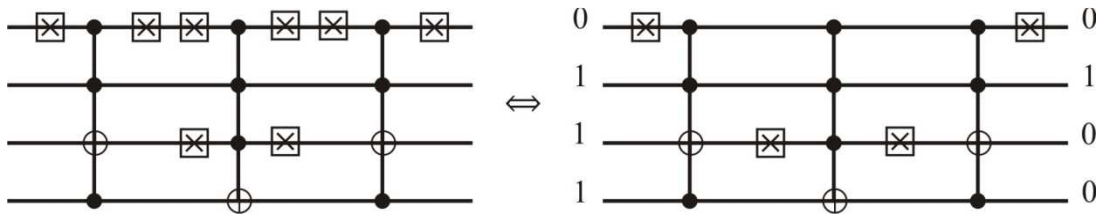
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

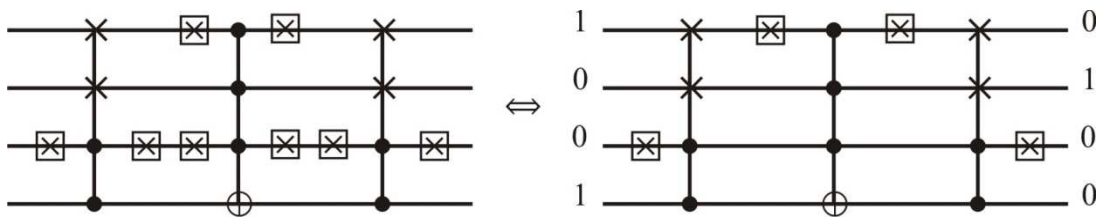
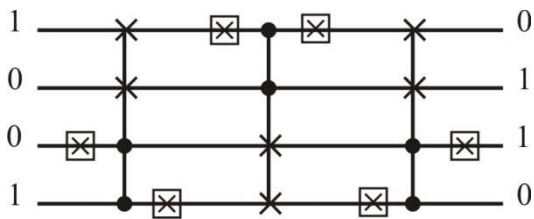
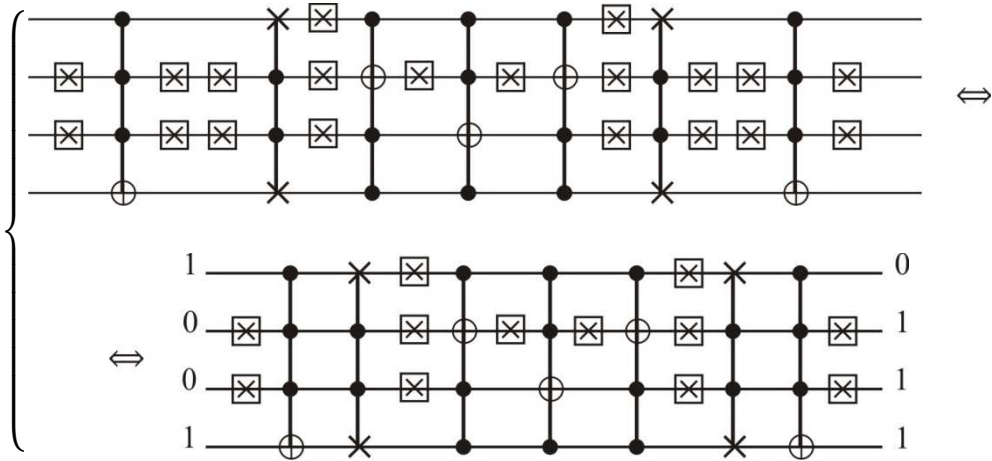
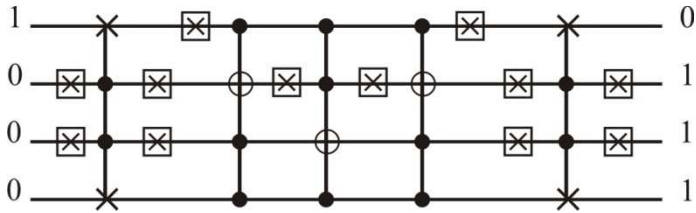
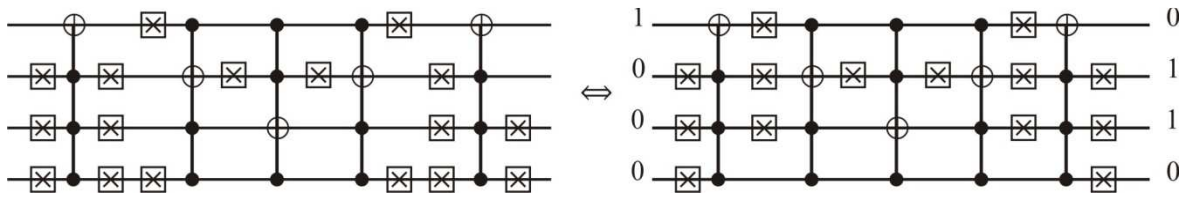


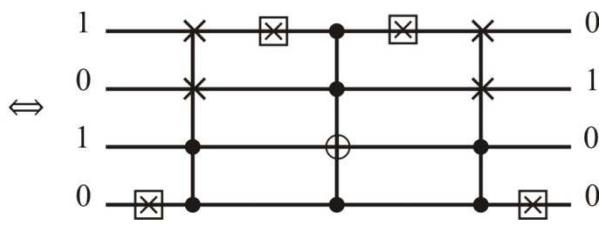
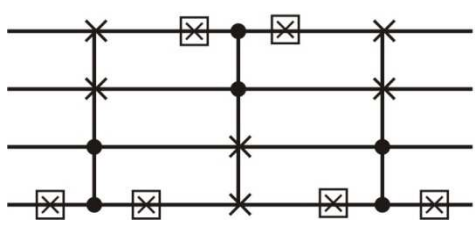
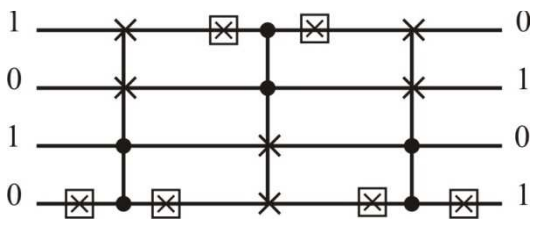
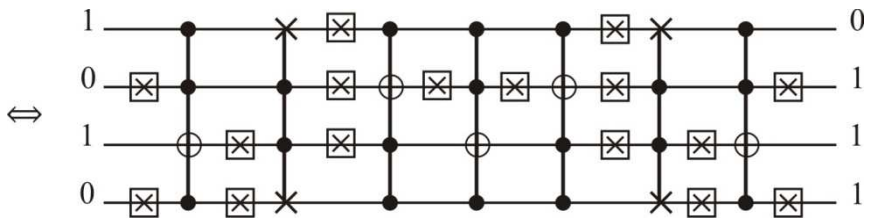
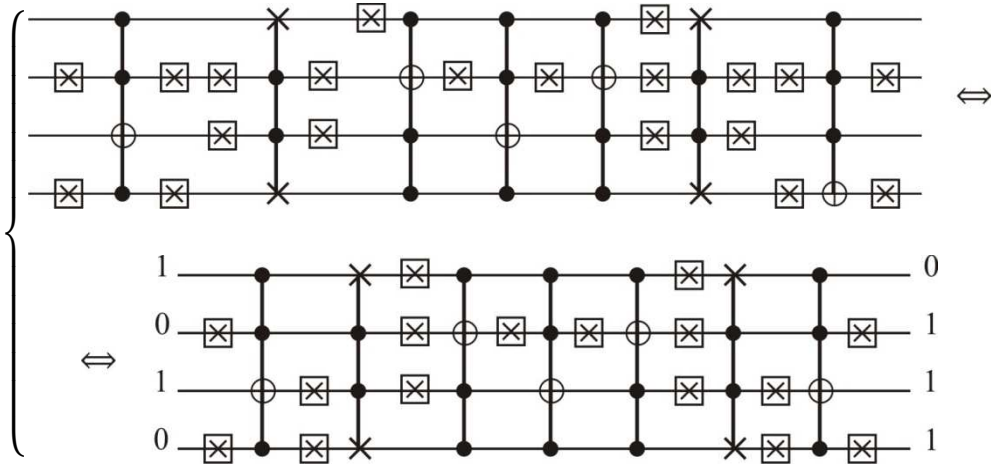
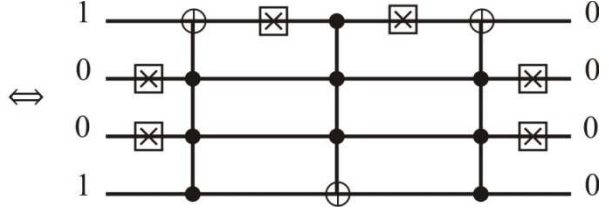
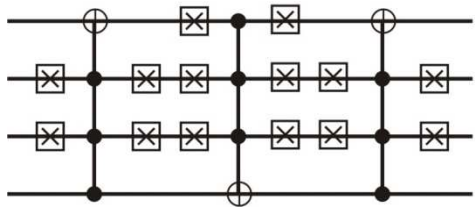
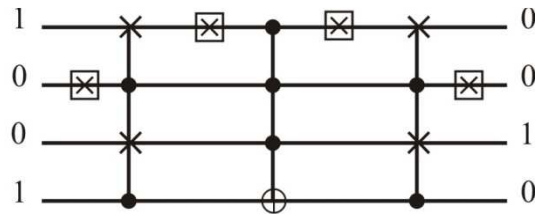
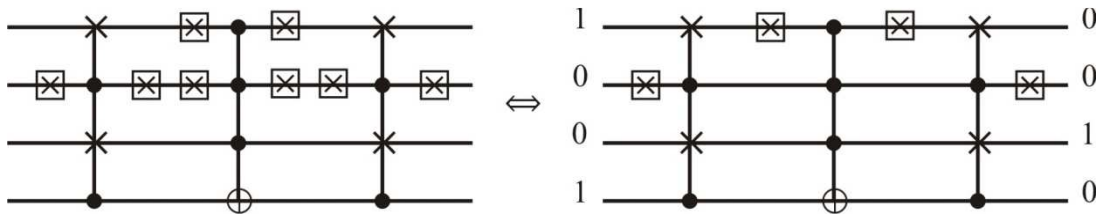


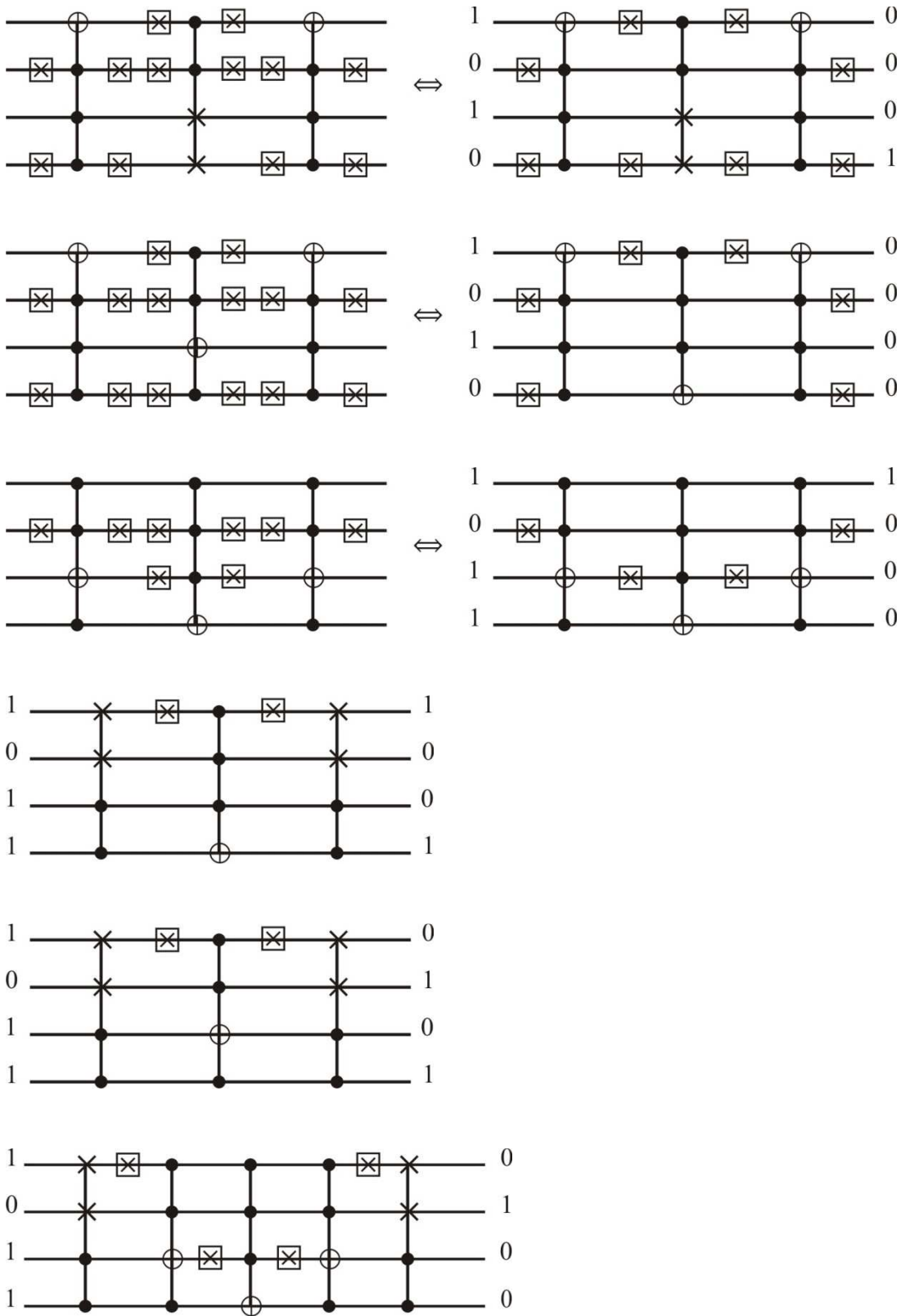


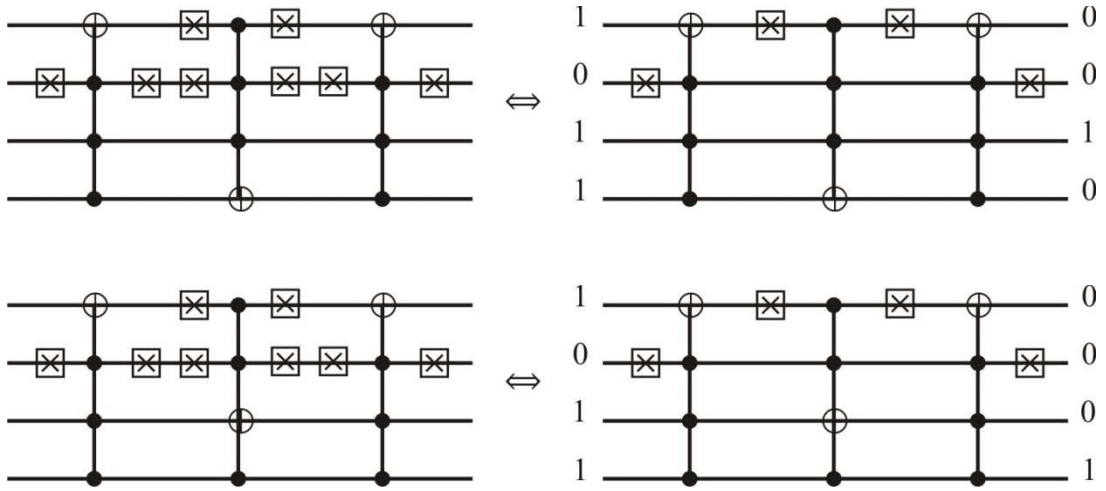


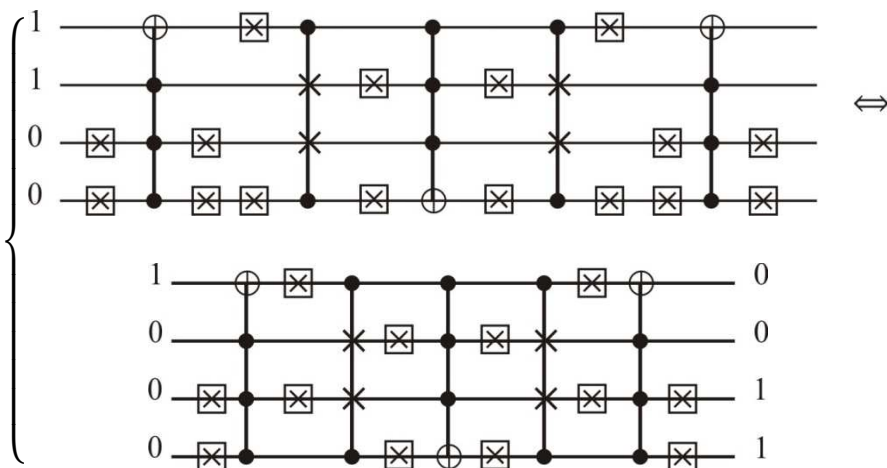
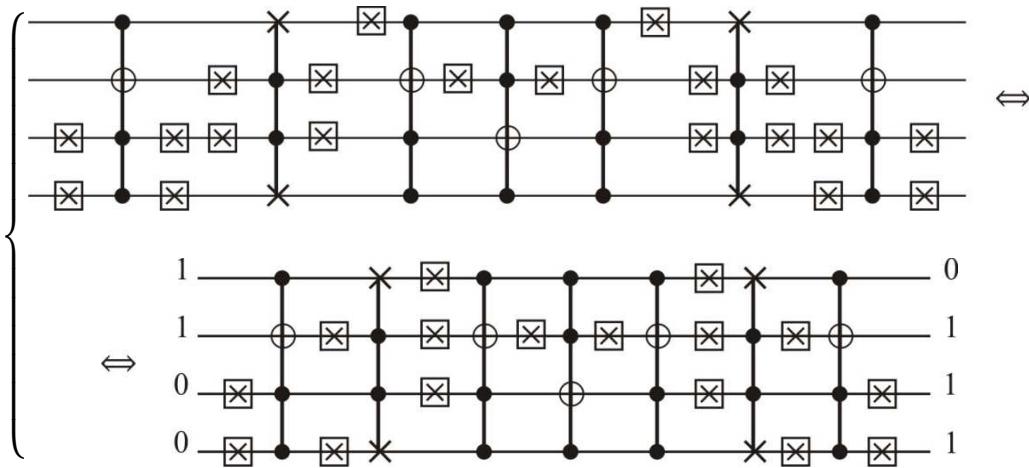
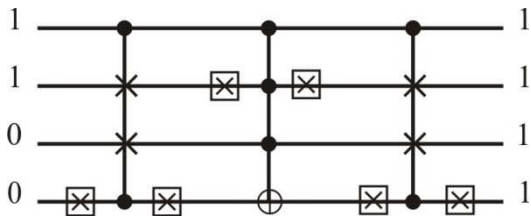
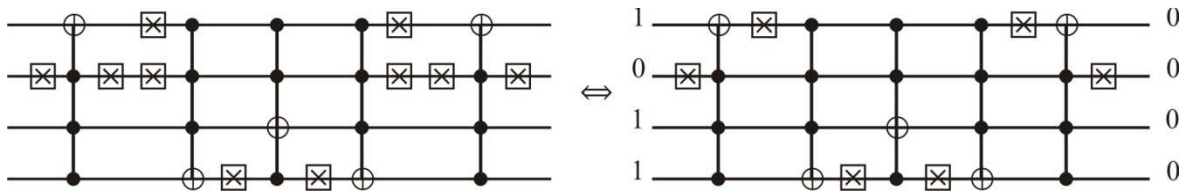


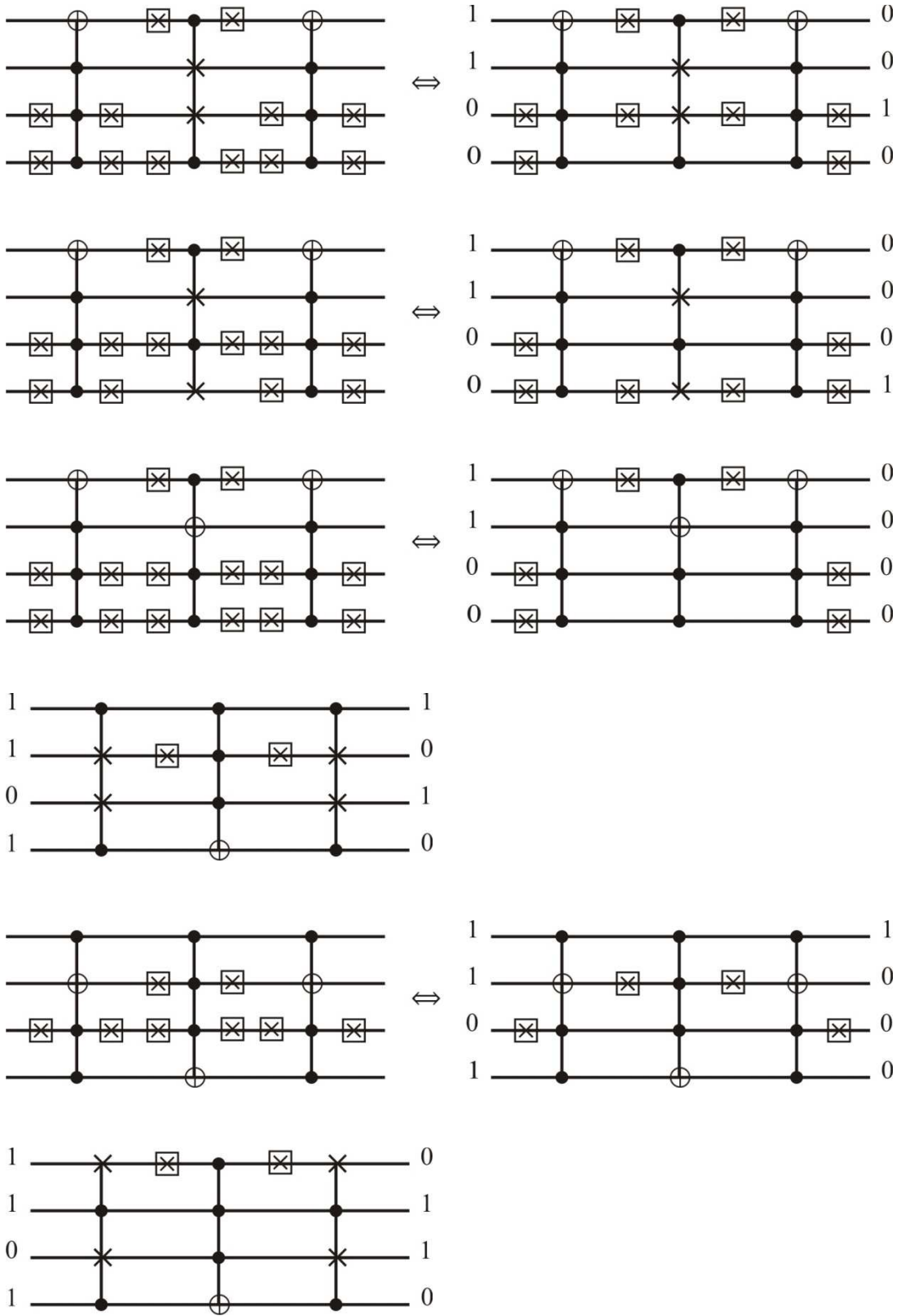


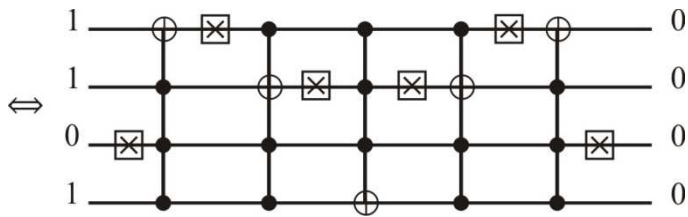
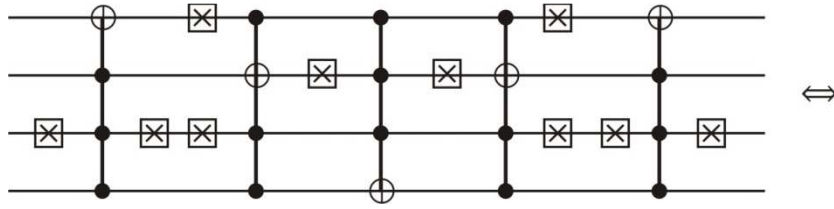
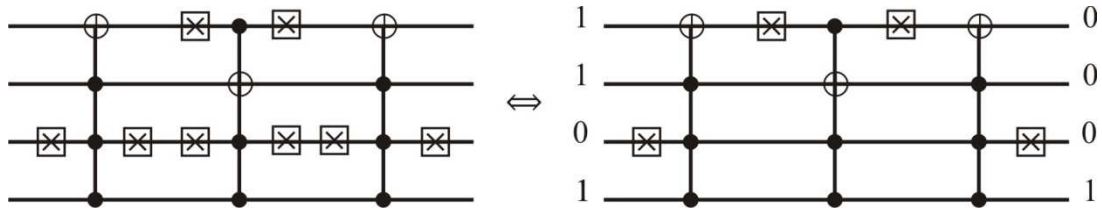
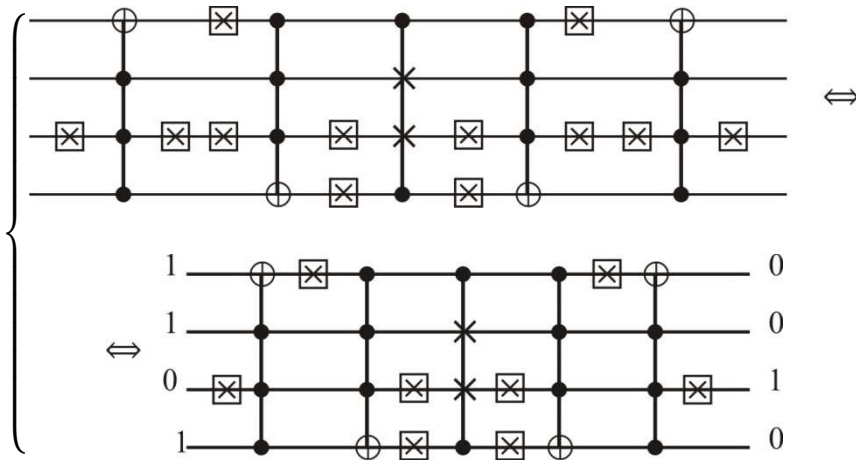
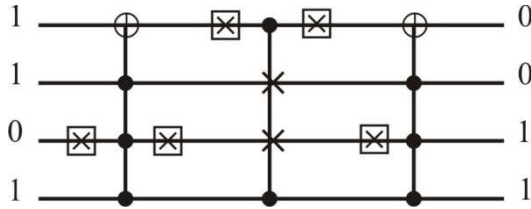
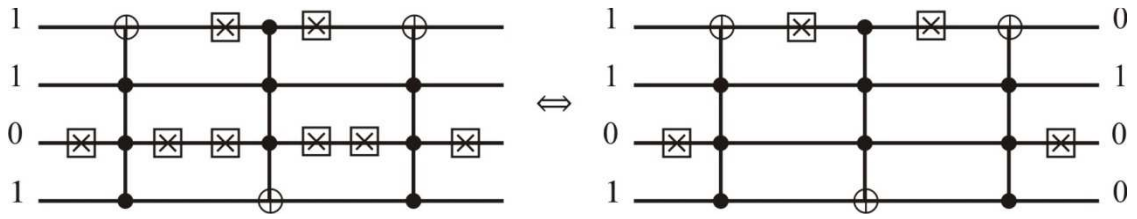


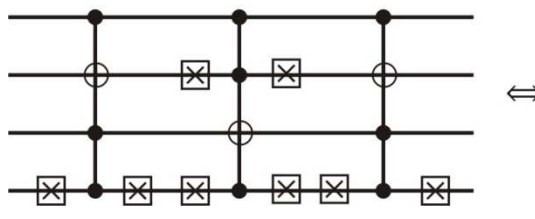
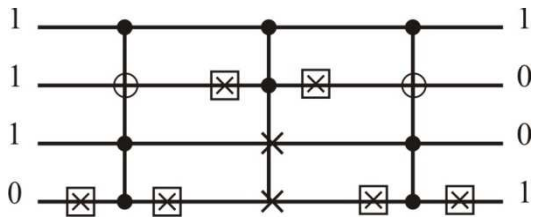




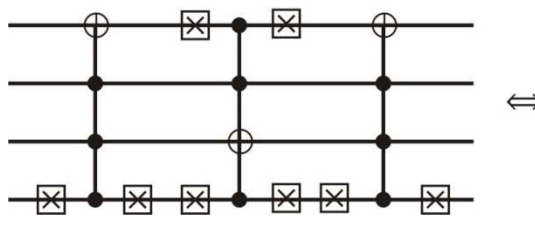
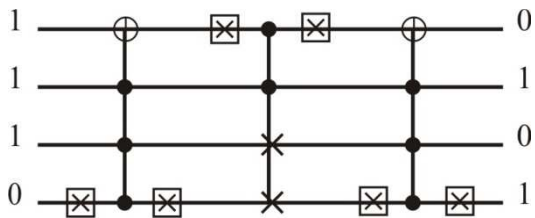
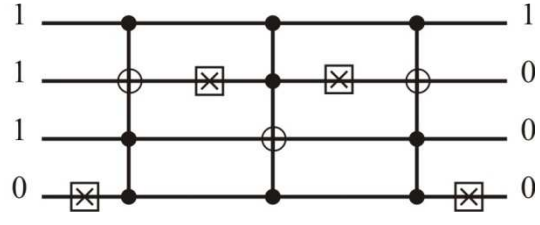




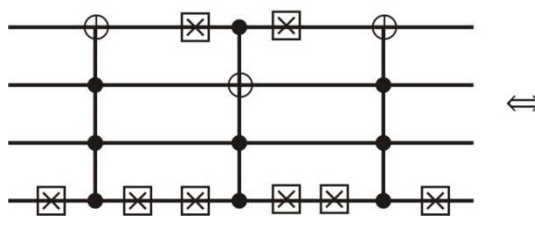
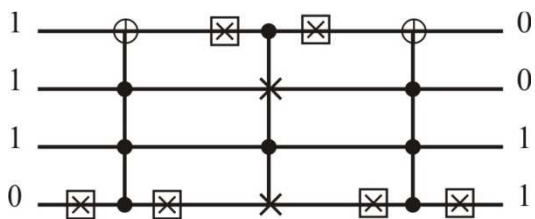
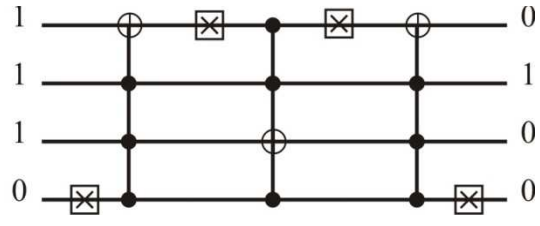




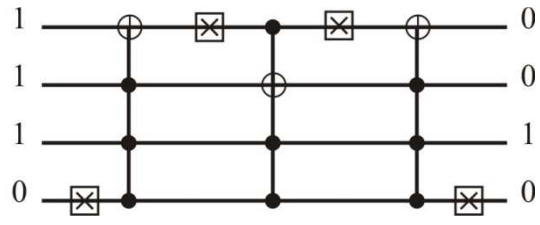
\Leftrightarrow

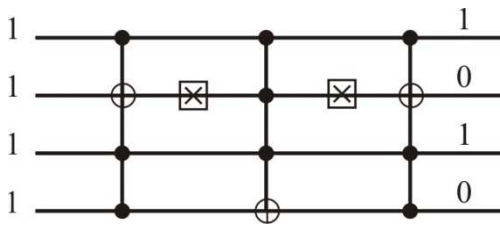
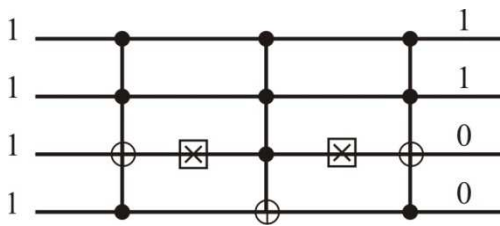
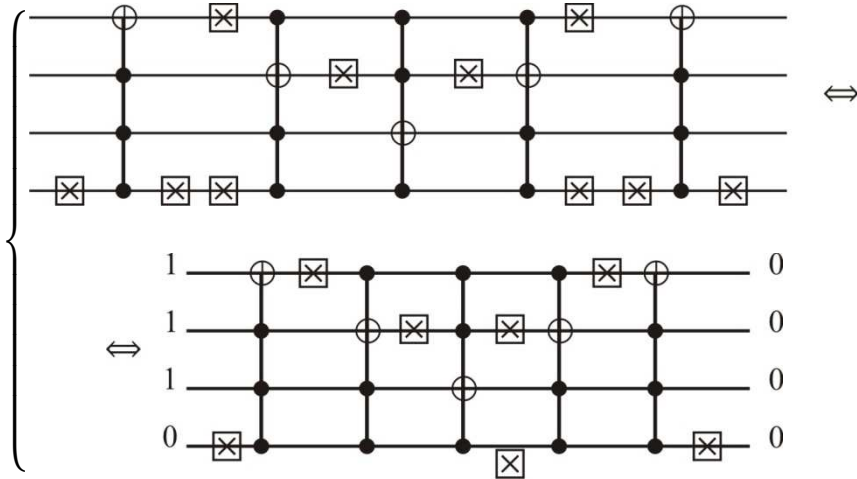
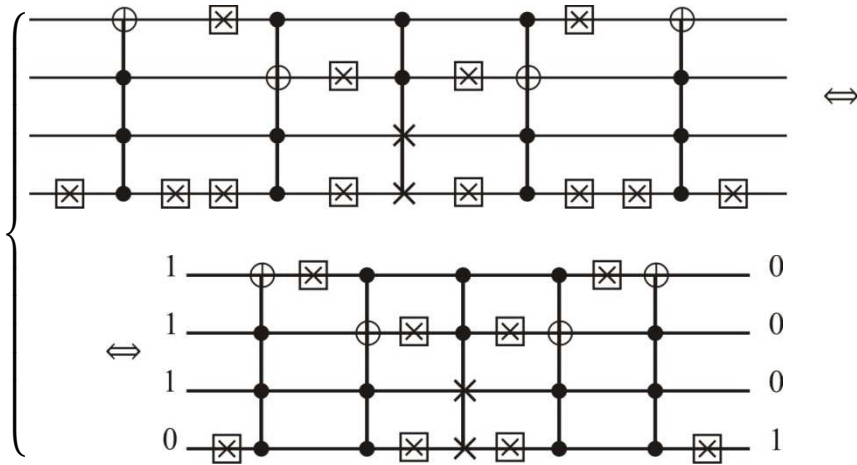


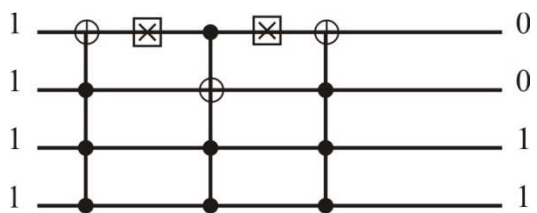
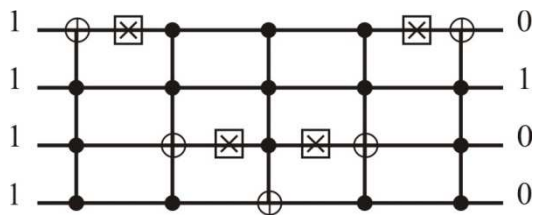
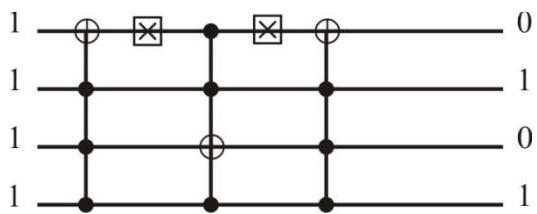
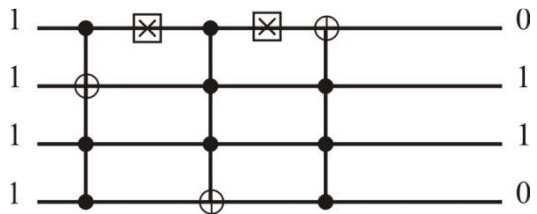
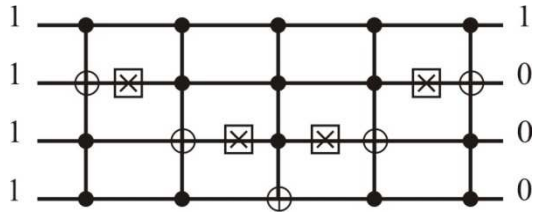
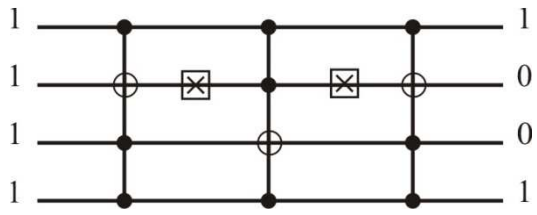
\Leftrightarrow

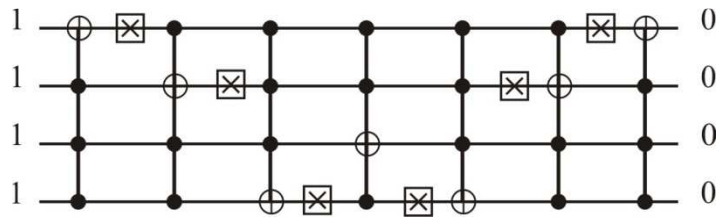
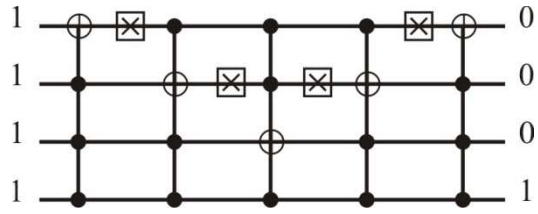
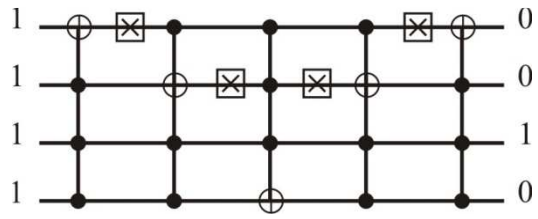


\Leftrightarrow









ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\sigma}{2} \\ e^{i\tau} \sin \frac{\sigma}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) \cdot |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \boxed{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} - i e^{i\tau} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}} \rightarrow Z_1 \\ \boxed{-i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + e^{i\tau} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}} \rightarrow Z_2 \end{pmatrix} = |\psi'\rangle$$

$$Z_1 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} - i \cos \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} + \sin \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} =$$

$$= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + \sin \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \right) - i \cos \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}$$

$$Z_2 = -i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + \cos \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} + i \sin \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} =$$

$$= \cos \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} + i \left(\sin \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} \right)$$

$$|Z_1|^2 = Z_1 Z_1^* = \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} - i e^{i\tau} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + i e^{-i\tau} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \right) =$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\sigma}{2} + i e^{-i\tau} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} - i e^{i\tau} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} +$$

$$+ \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\sigma}{2} =$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{2} \frac{1 + \cos \sigma}{2} + \frac{1 - \cos \theta}{2} \frac{1 - \cos \sigma}{2} + i \cdot 2i(-1) \sin \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \cdot$$

$$\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} =$$

$$= \frac{1 + \cos \sigma + \cos \theta + \cos \theta \cos \sigma}{4} + \frac{1 - \cos \sigma - \cos \theta + \cos \theta \cos \sigma}{4} +$$

$$+ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma}{2} \sin \tau =$$

$$= \frac{1 + \cos \theta \cos \sigma}{2} + \sin \theta \frac{\sin \sigma}{2} \sin \tau = \frac{1 + \cos \theta \cos \sigma + \sin \tau \sin \theta \sin \sigma}{2}$$

$$|Z_1| = \left(\frac{1 + \cos \theta \cos \sigma + \sin \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} |Z_2|^2 &= \left(-i \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} + e^{i\tau} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \right) \cdot \left(i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + e^{-i\tau} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \right) + \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\sigma}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\sigma}{2} + i e^{i\tau} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma}{2} - i e^{-i\tau} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \\ &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \cdot \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \frac{1 + \cos \sigma}{2} + \frac{1 + \cos \theta}{2} \frac{1 - \cos \sigma}{2} + i \cdot 2i \sin \tau \frac{\sin \theta \sin \sigma}{2 \cdot 2} = \\ &= \frac{2 - 2 \cos \theta \cos \sigma}{4} - \frac{\sin \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} = \frac{1 - \cos \theta \cos \sigma - \sin \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Αρα: } |Z_2| = \left(\frac{1 - \cos \theta \cos \sigma - \sin \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} \right)^{1/2}$$

$$\text{Συνεπώς: } Z_1 = |Z_1| e^{i\kappa} \quad \mu\epsilon \quad \kappa = \text{arctan} \left(- \frac{\cos \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + \sin \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}} \right)$$

$$\text{και } Z_2 = |Z_2| e^{i\lambda} \quad \mu\epsilon \quad \lambda = \text{arctan} \left(\frac{\sin \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2}}{\cos \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}} \right)$$

$$\text{Αρα: } |\psi' \rangle = \begin{pmatrix} |Z_1| e^{i\kappa} \\ |Z_2| e^{i\lambda} \end{pmatrix}$$

Θα μπορούσε να είναι $|Z_1| = \cos \frac{\delta}{2}$ και $|Z_2| = \sin \frac{\delta}{2}$; ΝΑΙ ΑΝ

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 + |Z_2|^2 &= \frac{1 + \cos \theta \cos \sigma + \sin \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} + \frac{1 - \cos \theta \cos \sigma - \sin \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} = \\ &= \frac{1 + 1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Αρα: } |\psi' \rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \cdot e^{i\kappa} \\ \sin \frac{\delta}{2} \cdot e^{i\lambda} \end{pmatrix} = e^{i\kappa} \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ e^{i(\lambda-\kappa)} \sin \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$$

Ο όρος $e^{i\kappa}$ αγνοείται γιατί δεν έχει παρατηρήσιμα αποτελέσματα, συνεπώς:

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ e^{i(\lambda-\kappa)} \sin \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu\epsilon \quad \lambda - \kappa = \text{Arctan} \left(\frac{\sin \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2}}{\cos \tau \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}} \right) - \\ - \text{Arctan} \left(- \frac{\cos \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + \sin \tau \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\kappa\alpha\iota \delta = 2\text{Arccos}(|Z_1|) \quad \eta \quad \delta = 2\text{Arcsin}(|Z_2|)$$

$$\begin{aligned} R_y(\theta) &= e^{-i\frac{\theta}{2}y} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)y = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & 0 \\ 0 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} - i \cdot \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Εστ}\omega \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \sigma/2 \\ e^{i\tau} \sin \sigma/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_y(\theta)|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\tau} \sin \sigma/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \boxed{\cos \theta/2 \cos \sigma/2 - e^{i\tau} \sin \theta/2 \sin \sigma/2} \rightarrow Z_1 \\ \boxed{\sin \theta/2 \cos \sigma/2 + e^{i\tau} \cos \theta/2 \sin \sigma/2} \rightarrow Z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 &= (\cos \theta/2 \cos \sigma/2 - e^{i\tau} \sin \theta/2 \sin \sigma/2)(\cos \theta/2 \cos \sigma/2 - e^{-i\tau} \sin \theta/2 \sin \sigma/2) = \\ &= \cos^2 \theta/2 \cos^2 \sigma/2 + \sin^2 \theta/2 \sin^2 \sigma/2 - e^{i\tau} \frac{\sin \theta \sin \sigma}{2} - e^{-i\tau} \frac{\sin \theta \sin \sigma}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \cdot \frac{1 + \cos \sigma}{2} + \frac{1 - \cos \theta}{2} \frac{1 - \cos \sigma}{2} - \frac{\sin \theta \sin \sigma}{4} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}) = \\ &= \frac{1 + \cos \sigma + \cos \theta + \cos \theta \cos \sigma + 1 - \cos \sigma - \cos \theta + \cos \theta \cos \sigma}{4} - \frac{\sin \theta \sin \sigma}{4} \cdot 2 \cos \tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta \cos \sigma}{2} - \frac{\cos \tau \sin \theta \sin \sigma}{2}$$

$$\text{Αρα: } |Z_1| = \left(\frac{1 + \cos \theta \cos \sigma - \cos \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} \right)^{1/2}$$

$$\mu\epsilon \quad Z_1 = (\cos \theta/2 \cos \sigma/2 - \cos \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2) - i \sin \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2$$

$$|Z_2|^2 = (\sin \theta/2 \cos \sigma/2 + e^{i\tau} \cos \theta/2 \sin \sigma/2)(\sin \theta/2 \cos \sigma/2 + e^{-i\tau} \cos \theta/2 \sin \sigma/2) =$$

$$= \sin^2 \theta/2 \cos^2 \sigma/2 + \cos^2 \theta/2 \sin^2 \sigma/2 + \frac{\sin \theta}{2} \frac{\sin \sigma}{2} (e^{i\tau} + e^{-i\tau}) =$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{2} \frac{1 + \cos \sigma}{2} + \frac{1 + \cos \theta}{2} \cdot \frac{1 - \cos \sigma}{2} + \frac{1}{2} \cos \tau \sin \theta \sin \sigma =$$

$$= \frac{1 + \cos \sigma - \cos \theta - \cos \theta \cos \sigma + 1 - \cos \sigma + \cos \theta - \cos \theta \cos \sigma}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos \tau \sin \theta \sin \sigma =$$

$$= \frac{1 - \cos \theta \cos \sigma + \cos \tau \sin \theta \sin \sigma}{2}$$

$$\text{Αρα: } |Z_2| = \left(\frac{1 - \cos \theta \cos \sigma + \cos \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} \right)^{1/2} \quad \mu\epsilon$$

$$Z_2 = (\sin \theta/2 \cos \sigma/2 + \cos \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2) + i \sin \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2$$

$$\text{Αρα: } Z_1 = |Z_1| \cdot e^{i\kappa} \quad \mu\epsilon \quad \kappa = \arctan \left(-\frac{\sin \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{\cos \theta/2 \cos \sigma/2 - \cos \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2} \right)$$

$$Z_2 = |Z_2| e^{i\lambda} \quad \mu\epsilon \quad \lambda = \arctan \left(\frac{\sin \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2}{\sin \theta/2 \cos \sigma/2 + \cos \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2} \right)$$

$$\text{Αρα: } |\psi' \rangle = \begin{pmatrix} |Z_1| e^{i\kappa} \\ |Z_2| e^{i\lambda} \end{pmatrix}$$

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = \frac{1 + \cos \theta \cos \sigma - \cos \tau \sin \theta \sin \sigma + 1 - \cos \theta \cos \sigma + \cos \tau \sin \theta \sin \sigma}{2} =$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε: $|Z_1| = \cos \delta/2$, $|Z_2| = \sin \delta/2$ με $\delta=2\text{Arccos}(|Z_1|)$
ή $\delta=2\text{Arcsin}(|Z_2|)$

$|\psi' \rangle = e^{i\kappa} \begin{pmatrix} |Z_1| \\ |Z_2|e^{i(\lambda-\kappa)} \end{pmatrix}$ Αγνοώντας τον παράγοντα $e^{i\kappa}$ έχουμε:

$$|\psi' \rangle = \begin{pmatrix} |Z_1| \\ |Z_2|e^{i(\lambda-\kappa)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta/2 \\ e^{i(\lambda-\kappa)} \sin \delta/2 \end{pmatrix}$$

Και στις δύο βέβαια περιπτώσεις έχει αποδειχθεί ότι η νέα κατάσταση παριστάνεται στη σφαίρα Bloch με ένα διάνυσμα στραμμένο σε σχέση με αυτό της αρχικής κατάστασης αλλά δεν έχει αποδειχθεί ότι πρόκειται για στροφές περί τους άξονες x,y αντίστοιχα.

Στην περίπτωση του x-άξονα αν γράψουμε το διάνυσμα της σφαίρας Bloch σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα έχουμε:

$$\vec{\tau}' = \sin \delta \cos(\lambda - \kappa) \hat{i} + \sin \delta \sin(\lambda - \kappa) \hat{j} + \cos \delta \hat{k}$$

Αν αποδειχθεί ότι η προβολή αυτού του διανύσματος στον x-άξονα είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής γωνίας θ τότε όντως η προηγούμενη στροφή θα πραγματοποιείται περί τον x-άξονα.

$$\begin{aligned} \vec{\tau}' \cdot \hat{i} &= \sin \delta \cos(\lambda - \kappa) = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} (\cos \lambda \cos \kappa + \sin \lambda \sin \kappa) = \\ &= 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \cos \lambda \cos \kappa + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \sin \lambda \sin \kappa \end{aligned}$$

$$\text{Ομως: } \kappa = \text{Arctan} \left(-\frac{\cos \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{\cos \theta/2 \cos \sigma/2 + \sin \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2} \right)$$

$$\text{ή } \text{Arc sin} \left(\frac{-\cos \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_1|} \right)$$

$$\text{ή } \text{Arc cos} \left(\frac{\cos \theta/2 \cos \sigma/2 + \sin \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_1|} \right) \text{ και}$$

$$\lambda = \text{Arctan} \left(\frac{\sin \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2 - \sin \theta/2 \cos \sigma/2}{\cos \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2} \right)$$

$$\acute{\eta} \text{ Arc sin} \left(\frac{\sin \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2 - \sin \theta/2 \cos \sigma/2}{|Z_2|} \right)$$

$$\acute{\eta} \text{ Arc cos} \left(\frac{\cos \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_2|} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}' \cdot \hat{i} &= 2 \cdot |Z_2| \cdot |Z_1| \frac{\cos \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2 \cos \theta/2 \cos \sigma/2 + \sin \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_2| |Z_1|} + \\ &+ 2|Z_2||Z_1| \frac{\sin \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2 - \sin \theta/2 \cos \sigma/2}{|Z_2|} \frac{-\cos \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_1|} = \\ &= 2(\cos \tau \cos^2 \theta/2 \sin \sigma/2 \cos \sigma/2 + \cos \tau \sin \tau \cos \theta/2 \sin \theta/2 \sin^2 \sigma/2 - \\ &\quad - \sin \tau \cos \tau \cos \theta/2 \sin \theta/2 \sin^2 \sigma/2 + \cos \tau \sin^2 \theta/2 \cos \sigma/2 \sin \sigma/2) = \\ &= 2 \cos \tau \cos \sigma/2 \sin \sigma/2 (\cos^2 \theta/2 + \sin^2 \theta/2) = \cos \tau \cdot \sin \sigma \end{aligned}$$

Άρα: $\vec{\tau}' \cdot \hat{i} = \cos \tau \cdot \sin \sigma$, ανεξάρτητη της γωνίας θ .

Για το αρχικό διάνυσμα: $\hat{\tau} = \sin \sigma \cos \tau \hat{i} + \sin \sigma \sin \tau \hat{j} + \cos \sigma \hat{k}$. Άρα $\vec{\tau} \cdot \hat{i} = \sin \sigma \cos \tau$.

Συνεπώς: $\vec{\tau} \cdot \hat{i} = \vec{\tau}' \cdot \hat{i}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όντως υπάρχει στροφή περί τον x-άξονα. Με όμοιο τρόπο για τον άξονα y: $\vec{\tau}' \cdot \hat{j} = \sin \delta \cdot \sin(\lambda - \kappa)$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}' \cdot \hat{j} &= 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} (\sin \lambda \cos \kappa - \cos \lambda \sin \kappa) = \\ &= 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \sin \lambda \cos \kappa - 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \cos \lambda \sin \kappa \end{aligned}$$

κ

$$= \text{Arc sin} \left(-\frac{\sin \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_1|} \right) \acute{\eta} \text{ Arc cos} \left(\frac{\cos \theta/2 \cos \sigma/2 - \cos \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_1|} \right)$$

$$\lambda = \text{Arc sin} \left(\frac{\sin \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_2|} \right) \acute{\eta} \text{ Arc cos} \left(\frac{\sin \theta/2 \cos \sigma/2 + \cos \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_2|} \right)$$

$$\vec{\tau}' \cdot \hat{j} = 2|Z_1||Z_2| \frac{\sin \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_2|} \frac{\cos \theta/2 \cos \sigma/2 - \cos \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_1|} -$$

$$\begin{aligned}
& -2|Z_1| \cdot |Z_2| \frac{\sin \theta/2 \cos \sigma/2 + \cos \tau \cos \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_2|} \frac{-\sin \tau \sin \theta/2 \sin \sigma/2}{|Z_1|} = \\
& = 2(\sin \tau \cos^2 \theta/2 \sin \sigma/2 \cos \sigma/2 - \sin \tau \cos \tau \sin^2 \sigma/2 \cos \theta/2 \sin \theta/2 + \\
& \quad + \sin \tau \sin^2 \theta/2 \cos \sigma/2 \sin \sigma/2 + \cos \tau \sin \tau \sin^2 \sigma/2 \cos \theta/2 \sin \theta/2) = \\
& = 2 \sin \tau \sin \sigma/2 \cos \sigma/2 (\cos^2 \theta/2 + \sin^2 \theta/2) = \sin \tau \cdot \sin \sigma
\end{aligned}$$

Άρα: $\vec{\tau}' \cdot \hat{j} = \sin \tau \cdot \sin \sigma$, ανεξάρτητη της γωνίας θ .

Για το αρχικό διάνυσμα: $\vec{\tau} = \sin \sigma \cos \tau \hat{i} + \sin \sigma \sin \tau \cdot \hat{j} + \cos \sigma \cdot \hat{k}$

Άρα: $\vec{\tau} \cdot \hat{j} = \sin \sigma \cdot \sin \tau = \vec{\tau}' \cdot \hat{j}$

Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση έχουμε στροφή του καταστατικού διανύσματος περί τον άξονα y .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Nielsen, H., Chuang, I., Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press, New York, 2000.
- [2] Lanyon P. B., Barbieri M., Almeida P. H., Jennewein T., Ralph C. T., Resch J. K., Pryde J. G., O'Brien L. J., Gilchrist A., White A., Simplifying quantum logic using higher-dimensional Hilbert spaces, δημοσίευση online: 7 Δεκεμβρίου 2008, DOI: 10.1038/NPHYS1150
- [3] Le Q. P., Ilyasu M. A., Dong F., Hirota K., Fast Geometric Transformations on Quantum Images, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 40:3, IJAM_40_3_02 (δημοσίευση online: 19 Αυγούστου 2010)
- [4] Le. Q. P., Dong F., Hirota K., A flexible representation of quantum images for polynomial preparation, image compression, and processing operations, Received: 12 Οκτωβρίου 2009/Accepted: 5 Απριλίου 2010, Springer Science + Business Media, LLC 2010 (online δημοσίευση: 17 Απριλίου 2010)