ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Αλγεβρικές μέθοδοι μελέτης του ανισοτροπικού ταλαντωτή με **Rosochatius** όρους αλληλεπίδρασης

ΒΑΙΟΣ Κ. ΜΠΛΑΤΖΙΟΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Γ. Ζουπάνος
Γ. Κουτσούμπας
Δ. Μπονάτσος (Επιβλέπων)

Μάιος 2011

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Με την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ολοκληρώνεται η προσπάθεια μελέτης των κβαντικών υπερολοκληρώσιμων συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκε ο ανισοτροπικός κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής με λόγο συχνοτήτων ίσο με λόγο ακεραίων αριθμών με ή χωρίς όρους αλληλεπίδρασης τύπου Rosochatius. Στο Κεφάλαιο 1 δίνεται μια εισαγωγή της έννοιας της υπερολοκληρωσιμότητας καθώς επίσης μελετώνται διεξοδικά τα διάφορα ¨εργαλεία δουλειάσ' που χρησιμοποιούνται για αυή την κατηγορία συστημάτων. Στο Κεφάλαιο 2, εφοδιασμένοι με τα καινούργια μας εργαλεία ξεκινάμε την μελέτη του ανισοτροπικού ταλαντωτή χωρίς όρους Rosochatius. Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και οι ιδιοκαταστάσεις (αναπαράσταση) της Χαμιλτονιανής καθώς επίσης ορίζονται τελεστές στροφορμής και υπολογίζονται οι σχέσεις μετάθεσης που αυτοί ικανοποιούν. Στο Κεφάλαιο 3 υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις (αναπαράσταση) της Χαμιλτονιανής του ανισοτροπικού ταλαντωτή με όρους Rosochatius. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα που βρέθηκαν συνδέονται (συγκρίνονται) με παλαιότερα αποτελέσματα και ελέγχετε με αυτό τον τρόπο τόσο η ορθότητα της μεθόδου όσο και η ακρίβειά της. Στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2 σε ένα σύγχρονο πρόβλημα πυρηνικής φυσικής που προέκυψε κατά την διάρκεια της συγγραφής της εργασίας. Εφαρμόζουμε δηλαδή τον κβαντικό ανισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή ως οριακή περίπτωση της Χαμιλτονιανής του μοντέλου Nilsson στο όριο των βαρέων πυρήνων και πετυχαίνουμε την επίλυση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα μελετάμε το πρόβλημα που προκύπτει κατα την περιγραφή βαρέων παραμορφωμένων πυρήνων λόγω της αλληλοεπικάλυψης των κυματοσυναρτήσεων των κβαντικών καταστάσεων τους (τροχιακών), όπως αυτές εμφανίζονται σε διάφορα πειραματικά δεδομένα. Το πρόβλημα αυτό διατυπώθηκε από τον Rick Casten, τον Οκτώβριο του 2010, κατά την διάρκεια της επίσκεψής του στην Ελλάδα στα πλαίσια της $69^{ης}$ συνάντησης της Nuppecc (Nuclear Physics European Collaboration Committee). Τέλος στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τόσο οι διάφορες κατευθύνσεις στη μελέτη των υπερολοκληρώσιμων συστημάτων όσο και οι επιμέρους προσεγγίσεις στη μελέτη αυτών των συστημάτων.

Ευχαριστίες

Η συγγραφή της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας ξεκίνησε των Οκτώβριο του 2010 και ολοκληρώθηκε τον Μάιο του 2011. Κατά την διάρκεια της συγγραφής της πολλοί άνθρωποι με βοήθησαν και για αυτό τον λόγο τους οφείλω τις ολόθερμές μου ευχαριστίες. Θα πρέπει καταρχήν να ευχαριστήσω τον ερευνητή στη βαθμίδα A' του Ινστιτούτο Πυρηνικής Φυσικής στο Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. “ ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ ” κ. Διονύση Μπονάτσο, ο οποίος τόσο ως καθηγητής μου στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών “ Φυσική και Τεχνολογικές εφαρμογές ” αλλά όσο και ως επιβλέποντας καθηγητής αυτής της προσπάθειας ήταν διαρκώς δίπλα μου σε ολές τις φάσεις συγγραφής της εργασίας. Η ελευθερία που μου παρείχε στον τρόπο με τον οποίο θα δούλευα το πρόβλημα είναι ίσως ο πιο σημαντικός λόγος για τον οποίο μπόρεσα να ολοκληρώσω αυτή την προσπάθεια. Πρέπει επίσης να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Μαθηματικού τμήματος στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης κ. Κωνσταντίνο Δασκαλογιάννη για την ενεργή του συμμετοχή τόσο στον αρχικό σχεδιασμό του project όσο και κατά την διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος. Θα πρέπει επίσης να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής: τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Φυσικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Εφαρμογών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Γεώργιο Κουτσούμπα όχι μόνο για την συνεχή υποστήριξή του τα τελευταία χρόνια αλλά και γιατί και σε αυτή τη φάση προσφέρθηκε να λάβει ενεργό μέρος στη αξιολόγιση αυτής της εργασίας και τον Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Γεώργιο Ζουπάνο για την συμμετοχή του στην επιτροπή.

Κλείνοντας θέλω να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της ερευνητικής ομάδας του Ινστιτούτο Πυρηνικής Φυσικής, της οποίας υπήρξα μέλος κατά την διάρκεια συγγραφής της εργασίας, για το πολύ ευχάριστο κλίμα συνεργασίας και συναδελφικής αλληλεγγύης. Πιο συγκεκριμένα ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα και φίλο από τα προπτυχιακά χρόνια Πανο Γεωργουδή, την υποψήφια διδάκτορα Σοφία Καραμπάγια, την μεταπτυχιακή φοιτήτρια Ανδριάννα Μαρτίνου και τον μεταδιδακτορικό συνεργάτη κ. Δημήτρη Πετρέλλη.

Κεφάλαιο 1

Κλασικά και Κβαντικά υπερολοκληρώσιμα συστήματα σε N διαστάσεις

1.1 Ορισμοί

Μελετώντας κανείς, τόσο στην κλασική φυσική όσο και στην κβαντική φυσική, διάφορα φυσικά προβλήματα συναντά περιπτώσεις όπου οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν μπορούν να επιλυθούν επακριβώς σε περισσότερα από ένα συστήματα συντεταγμένων. Άλλες φορές όταν μελετά κανείς συστήματα, στα πλαίσια της αναλυτικής μηχανικής, παρατηρεί ότι αυτά τα συστήματα έχουν κλειστές τροχιές. Κάθε μια από αυτές τις κλειστές τροχιές έχει και κάποια συγκεκριμένη περίοδο. Από την άλλη μεριά πολλές φορές σε προβλήματα κβαντικής μηχανικής, σχετικιστικής ή μη, οι ιδιοτιμές της ενέργειας εμφανίζουν εκφυλισμό. Επιπλέον σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρεί κανείς ότι μπορεί να υπολογίσει, τόσο τις εκφυλισμένες ιδιοτιμές ενέργειας όσο και τον βαθμό εκφυλισμού τους, χρησιμοποιώντας μόνο αλγεβρικές μεθόδους. Τυπικά παραδείγματα τέτοιων περπτώσεων είναι το πρόβλημα του Kepler (δηλ. το πρόβλημα της εύρεσης της εξίσωσης τροχιάς της κίνησης ενός σώματος μέσα σε κεντρικό πεδίο δύναμης) και ο ισοτροπικός αρμονικός ταλαντωτής στα πλαίσια της κλασικής φυσικής ενώ στα πλαίσια της κβαντικής φυσικής τα αντίστοιχα προβλήματα είναι το άτομο του υδρογόνου και ο ισοτροπικός κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι στα πλαίσια της κβαντικής μηχανικής η εμφάνιση εκφυλισμού συνδέεται με την ύπαρξη κάποιας συμμετρίας, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε πως στις προηγούμενες περιπτώσεις όλα αυτά δεν είναι τυχαία αλλά πηγάζουν από κάποια βαθύτερη αιτία. Η αλήθεια είναι πως τα προηγούμενα παραδείγματα αποτελούν τυπικά χαρακτηριστικά των λεγόμενων ολοκληρώσιμων καθώς επίσης και των υπερολοκληρώσιμων συστημάτων.

Στα επόμενα θα ακολουθήσουμε τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται συνήθως στην βιβλιογραφία, (βλ. για παράδειγμα [40],[34]). Ένα Χαμιλτονιανό σύστημα στην κλασική μηχανική με n βαθμούς ελευθερίας περιγράφεται από μια Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = H(x,p)$. Οι εξισώσεις κίνησης για αυτό το σύστημα είναι:

$$\dot{x_i} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{1.1}$$

Η χρονική εξέλιξη ενός φυσικού μεγέθους $\ell = \ell(x,p)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\ell}{dt} = \{\ell, H\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ell}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \ell}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} \right), \tag{1.2}$$

όπου $\{,\}$ συμβολίζει την αγκύλη Poisson. Από αυτή τη σχέση παρατηρούμε ότι αν για κάποιο ζευγάρι φυσικών μεγεθών, ένα εκ των οποίων θα είναι η Χαμιλτονιανή συνάρτηση, οι αγκύλες Poissonμηδενίζονται, τότε το αντίστοιχο φυσικό μέγεθος παραμένει σταθερό. Στην περίπτωση της κβαντικής μηχανικής θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις αγκύλες Poisson με τον μεταθέτη και τα φυσικά μεγέθη με παρατηρήσιμα φυσικά μεγέθη, δηλαδή τελεστές. Ένα αυτόνομο (δηλαδή που δεν εξαρτάται από το χρόνο) Χαμιλτονιανό σύστημα επομένως θα ονομάζεται **ολοκληρώσιμο** κατά Liouville εάν υπάρχουν n καθολικά, συναρτησιακά ανεξάρτητα ολοκληρώματα κίνησης $\{X_1, \ldots, X_n\}$ με $X_i = X_i(q_i, p_i)$=σταθ. και $i = 1, \ldots, n$, τα οποία βρίσκονται σε ενέλιξη, δηλαδή η αγκύλη Poisson μηδενίζεται για κάθε ζευγάρι από αυτά

$$\{X_i, X_j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Η συνθήκη ανεξαρτησίας των ολοκληρωμάτων X_i εκφράζεται από τη σχέση

$$\mathrm{rank}(\frac{\partial X_i}{\partial(q_i p_i)}) = 0. \tag{1.4}$$

Οι συναρτήσεις X_i ονομάζονται ολοκληρώματα της κίνησης (ή σταθερές της κίνησης) αφού όπως βλέπουμε από τη σχέση (1.2) $\dot{X_i} = 0$. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να εισάγουμε και ένα συμπληρωματικό σύνολο μεταβλητών$\phi_i(q,p), i = 1, \ldots, N$ έτσι ώστε να περιγράψουμε την αλλαγή συντεταγμένων στο φασικό χώρο $(q,p) \longrightarrow (I_i, \phi_i)$. Οι καινούργιες συντεταγμένες $(I_i, \phi_)$ ονομάζονται **μεταβλητές δράσης - γωνίας** (action-angle variables) και οι εξισώσεις κίνησης γίνονται:

$$\dot{I_i} = \{H, I_i\} \Longrightarrow I_i(t) = const \tag{1.5}$$

$$\dot{\phi_i} = \{H, \phi_i\} = \omega_i \Longrightarrow \phi_i(t) = \phi_i(0) + \omega_i t \tag{1.6}$$

για κάποιες συναρτήσεις $\omega_i(I)$. Άρα η χρονική εξέλιξη των ολοκληρώσιμων συστημάτων είναι γραμμική με το χρόνο ως προς κατάλληλα επιλεγμένες συντεταγμένες δράσης-γωνίας. Παρ΄ όλο που η ύπαρξη των (I_i, ϕ_i) είναι δεδομένη από το θεώρημα του Liouville, η κατασκευή μπορεί να είναι δύσκολο πρόβλημα που εξαρτάται από τις επιμέρους λεπτομέρειες του ολοκληρώσιμου συστήματος.

Να σημειώσουμε πως επιτρέπεται ως ένα από αυτά τα ολοκληρώματα να θεωρήσουμε την ίδια την Χαμιλτονιανή. Περαιτέρω το σύστημά μας θα λέγεται **υπερολοκληρώσιμο** εάν υπάρχουν επιπλέον m ολοκληρώματα κίνησης $\{Y_1, \ldots, Y_m, 1 \leq m \leq n-1\}$, τέτοια ώστε το σύνολο των ολοκληρωμάτων κίνησης $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m\}$ να είναι συναρτησιακά ανεξάρτητα. Να σημειώσουμε ότι συναρτησιακά ανεξάρτητα σημαίνει ότι δεν μπορούμε να γράψουμε κάποιο από αυτά ως συνάρτηση των υπολοίπων. Ένα κλασικό Χαμιλτονιανό σύστημα είναι **μέγιστα υπερολοκληρώσιμο** (maximally superintegrable) εάν $m = n - 1$, ενώ **ελάχιστα υπερολοκληρώσιμο** εάν $m = 1$ [35]. Έτσι λοιπόν στην περίπτωση των μέγιστα υπερολοκληρώσιμων υπάρχουν $2n - 1$ συναρτησιακά ανεξάρτητα ολοκληρώματα κίνησης.

Στα πλαίσια της κβαντικής μηχανικής τα ολοκληρώσιμα και υπερολοκληρώσιμα συστήματα έχουν το ανάλογό τους. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις αγκύλες Poisson με τον μεταθέτη. Επιπλέον θα πρέπει να θυμηθούμε ότι τώρα οι ποσότητες $\hat{X}_i$ και $\hat{Y}_i$ αντιστοιχούν σε παρατηρήσιμα φυσικά μεγέθη που, κατά τα γνωστά στα πλαίσια της κβαντικής μηχανικής, περιγράφονται από τελεστές. Έτσι λοιπόν τα **υπερολοκληρώσιμα κβαντικά συστήματα** περιγράφονται από $m + n$ παρατηρήσιμα μεγέθη $\{\hat{X}_1 = \hat{H}, \ldots, \hat{X}_n, \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_m\}$ τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[H, X_i] = \hat{H}\hat{X}_i - \hat{X}_i\hat{H} = 0, \quad [\hat{H}, \hat{Y}_j] = 0, \quad [\hat{X}_i, \hat{X}_k] = 0, \tag{1.7}$$

όπου $i, k = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στα κλασικά υπερολοκληρώσιμα συστήματα τα ολοκληρώματα είναι πολυώνυμα της κανονικής ορμής. Θα πρέπει επίσης να πούμε ότι οι πιο γνωστές περιπτώσεις υπερολοκληρώσιμων συστημάτων, τόσο στην κλασική όσο και στην κβαντική φυσική, είναι το πρόβλημα του Kepler και ο αρμονικός ταλαντωτής, ορισμένα σε ευκλείδιο χώρο N διαστάσεων. Αυτά τα δυο συστήματα, όπως μας πληροφορεί το θεώρημα του Bertrand [47], είναι τα μόνα σφαιρικά συμμετρικά δυναμικά για τα οποία όλες οι κλειστές και καλώς ορισμένες τροχιές, δηλαδή χωρίς σημεία ασυνέχειας και πεπερασμένες, είναι περιοδικές. Ακόμα, οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται εύκολα και σε μη αυτόνομα συστήματα.

Τελειώνοντας αυτή την εισαγωγή στα υπερολοκληρώσιμα συστήματα θα πρέπει να τονίσουμε την σημαντική διαφορά που υπάρχει μεταξύ της υπερολοκληρωσιμότητας (superintegrability) ενός συστήματος και της ακριβούς επιλυσιμότητας (exact solvability). Η **ακριβής επιλυσιμότητα** ορίζεται από την απαίτηση μας το φάσμα ιδιοτιμών της ενέργειας να μπορεί να υπολογισθεί αλγεβρικά. Η απαίτηση της ακριβούς επιλυσιμότητας (exact solvabivity) και της μερικώς ακριβούς επιλυσιμότητας (quasi exact solvability) χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι η Χαμιλτονιανή του υπό μελέτη συστήματος ¨καραδοκεί’ μέσα στην άλγεβρα Lie που περιγράφει τη συμμετρία του προβλήματος.

1.2 Ανισοτροπικός ταλαντωτής με Rosochatius όρους αλληλεπίδρασης

Το πρόβλημα του ανισοτροπικού ταλαντωτή του οποίου οι συχνότητες ταλάντωσης σε κάθε διεύθυνση ισούνται με τον λόγο ακεραίων αριθμών, καθώς επίσης και η γενίκευσή του με την εισαγωγή ενός όρου αλληλεπίδρασης τύπου Rosochatius, αποτελεί ένα θέμα που παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον στα πλαίσια της μελέτης των υπερολοκληρώσιμων συστημάτων, με δυνατότητες εφαρμογής σε διάφορα προβλήματα της θεωρητικής φυσικής.

Η γενική μορφή της Χαμιλτονιανής είναι:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + k(l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2) + \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{y^2} + \frac{k_3}{z^2}. \tag{1.8}$$

Στην Χαμιλτονιανή αυτή ο πρώτος όρος περιγράφει την κινητική ενέργεια, ο δεύτερος όρος περιγράφει την δυναμική ενέργεια λόγω του δυναμικού του ανισοτροπικού ταλαντωτή, ενώ ο τρίτος όρος περιγράφει την αλληλεπίδραση Rosochatius. Θέτοντας τις ποσότητες $k_i = 0, i = 1, 2, 3$ η Χαμιλτονιανή συμπίπτει με τη Χαμιλτονιανή του προβλήματος του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγους συχνοτήτων ίσους με λόγους ακεραίων αριθμών [46]. Οι εξισώσεις Hamilton-Jacobi και Schrödinger που προκύπτουν από την (1.8) μπορούν να λυθούν με χωρισμό μεταβλητών **μόνο** σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Συνεπώς το σύστημά μας ανήκει σε εκείνη την κατηγορία υπεροκληρώσιμων συστημάτων που δεν μπορούν να λυθούν σε παραπάνω από ένα συστήματα συντεταγμένων. Τυπικά παραδείγματα αυτής της κατηγορίας είναι το Calogero-Moser πρόβλημα καθώς επίσης και το γενικευμένο πρόβλημα Coulomb.

Ξεκινώντας τη μελέτη αυτού του συστήματος θα πρέπει να αποδείξουμε κατ΄ αρχήν ότι είναι υπερολοκληρώσιμο. Γι΄ αυτό το σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των προβολών, όπως προτείνουν και οι Evans και Verrier στο [30].

Θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή του ανισοτροπικού ταλαντωτή στις 6 διαστάσεις, για την οποία ξέρουμε ότι είναι υπερολοκληρώσιμη. Η μορφή της είναι:

$$H_6 = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{2} p_i^2 + k n_i^2 s_i^2, \tag{1.9}$$

όπου n_i είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και s_i είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες στον Ευκλείδιο χώρο των 6 διαστάσεων. Εισάγοντας τις γενικευμένες συντεταγμένες $(x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$, για τις οποίες ισχύει ότι

$$s_1 = x\cos\theta_x, \quad s_2 = x\sin\theta_x, \quad s_3 = y\cos\theta_y, \quad s_4 = y\sin\theta_y, \quad s_5 = z\cos\theta_z, \quad s_6 = z\sin\theta_z, \tag{1.10}$$

και θέτοντας τις συχνότητες $n_1 = n_2 = l, n_3 = n_4 = m$ και $n_5 = n_6 = n$ [1] παίρνουμε την Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + k(l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2) + \frac{{p_{\theta_x}}^2}{x^2} + \frac{{p_{\theta_y}}^2}{y^2} + \frac{{p_{\theta_z}}^2}{z^2}. \tag{1.11}$$

Εφόσον οι συντεταγμένες $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ είναι αγνοήσιμες, μπορούμε να θεωρήσουμε τις συζυγείς ορμές τους ως σταθερές. Αντικαθιστώντας ${p_{\theta_x}}^2 = k_1, {p_{\theta_y}}^2 = k_y$ και ${p_{\theta_z}}^2 = k_3$, παίρνουμε την χαμιλτονιανή (1.11). Εφόσον η Χαμιλτονιανή από την οποία ξεκινήσαμε είναι υπερολοκληρώσιμη, τότε και η Χαμιλτονιανή στην οποία καταλήξαμε είναι και αυτή υπερολοκληρώσιμη, καθώς οι επιπλέον τρεις συντεταγμένες που εισάγαμε είναι αγνοήσιμες, αποτελούν δηλαδή πρώτα ολοκληρώματα της κίνησης. Σε αυτό το σημείο θα ήταν πολύ σημαντική παράληψη εάν δεν αναφερθούμε και σε μια εναλλακτική μέθοδο κατασκευής ολοκληρωμάτων κίνησης αυτή των momentum maps. Στα μαθηματικά, και κυρίως στην symplectic γεωμετρία, η momentum map (ή moment map) είναι ένα εργαλείο που σχετίζεται με δράση ενός Lie group επάνω σ΄ ένα symplectic manifold, το οποίο χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε διατηρήσιμες ποσότητες της Χαμιλτονιανής. Αυτή η απεικόνιση γενικεύει τους κλασικούς ορισμούς της στροφορμής. Είναι πολύ σημαντική για την κατασκευή διαφόρων symplectic

[1] Με αυτή τη μέθοδο αποδεικνείεται γιατί πρέπει ο λόγος των συχνοτήτων να είναι λόγος ακεραίων αριθμών. Σε αντίθετη περίπτωση, αν για παράδειγμα οι συχνότητες ήταν τελείως ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε το σύστημά μας θα εμφάνιζε χαοτική συμπεριφορά

manifolds, παραδείγματος χάριν symplectic (Marsden-Weinstein) quotients. Δεν θα προχωρήσουμε παραπέρα διότι αυτή η μέθοδος ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Αξίζει μόνο να αναφέρουμε σαν ένα παράδειγμα την περίπτωση του κβαντικού ταλαντωτή σε δυο διαστάσεις διότι είναι αρκετά διδακτικό. Έχουμε λοιπόν:

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{\omega_2^2 y^2}{2} \tag{1.12}$$

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δυο ανεξάρτητα και μετατιθέμενα μεταξύ τους ολοκληρώματα τα:

$$F_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 q_1^2 \quad F_2 = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 q_2^2 \tag{1.13}$$

τέτοια ώστε $H = F_1 + F_2$. Εάν οι συχνότητες είναι λόγοι ακεραίων αριθμών

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s}$$

τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίτο ολοκλήρωμα κίνησης το

$$F_3 = a_1^s a_2^{\dagger r} \tag{1.14}$$

όπου

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}(p_1 + i\omega_1 q_1) \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}(p_2 - i\omega_1 q_2) \tag{1.15}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο το τρίτο ολοκλήρωμα βρίσκουμε ότι

$$\dot{F_3} = a_1^{s-1} a_2^{\dagger r-1}(s a_2^\dagger \dot{a_1} + r a_1 \dot{a_2}) \tag{1.16}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\dot{q} = p$ και $\dot{p} = -\omega^2 q$ έχουμε ότι:

$$\dot{a_1} = i\omega_1 a_1, \quad \dot{a_2} = -i\omega_2 a_2 \tag{1.17}$$

Συνεπώς $\dot{F_3} = i a_1^2 a_2^{\dagger r}(s\omega_1 - r\omega_2) = 0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι και με αυτή τη μέθοδο προκειμένου το σύστημα μας να είναι υπέρολοκληρώσιμο, μιάς και στις δύο διαστάσεις έχουμε τρία ολοκληρώματα, θα πρέπει οι λόγοι συχνοτήτων να είναι ακέραιοι αριθμοί. Η γενίκευση σε τρείς διαστάσεις καθώς και για περισσότερες πληροφορίες μπορεί κανείς να απευθυνθεί στο [32]. Κλείνοντας αξίζει να σημειώσουμε ότι στην κλασική περίπτωση οι τροχιές που θα προκύψουν είναι κλειστές και περιοδικές.

1.3 Υπερολοκληρώσιμα συστήματα και παραμορφωμένες άλγεβρες

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να μελετήσουμε τα κβαντικά υπερολοκληρώσιμα συστήματα. Ξεκινάμε κάνοντας την ακόλουθη παρατήρηση. Στα πλαίσια της κβαντικής φυσικής πολλές φορές τα διάφορα φυσικά συστήματα εμφανίζουν εκφυλισμό στο φάσμα των ιδιοτιμών της ενέργειάς τους. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η ύπαρξη εκφυλισμών συνδέεται με την ύπαρξη κάποιας συμμετρίας. Συνεπώς μπορούμε να μελετήσουμε τις ιδιότητες αυτών των συστημάτων ερευνώντας τις τυχόν συμμετρίες που υπάρχουν στο πρόβλημα. Έτσι λοιπόν σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει κάποια πεπερασμένη άλγεβρα Lie, η οποία περιέχει τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, οι οποίοι με τη σειρά τους συνδέουν μεταξύ τους όλες τις ιδιοκαταστάσεις του συστήματος για τις διάφορες ιδιοτιμές ενέργειας. Επιπλέον η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του φυσικού συστήματος συνδέεται με τους τελεστές Casimir της άλγεβρας. Το σύνολο των ιδιοκαταστάσεων του προβλήματος που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη ιδιοτιμή ενέργειας μας εφοδιάζουν με μια βάση, πάνω στην οποία μπορούμε να μελετήσουμε τις μη αναγωγήσιμες αναπαράστασεις της άλγεβρας που περιγράφει το σύστημα. Κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές της ενέργειας μπορούν να υπολογιστούν από τις ιδιοτιμές του τελεστή Casimir της αντίστοιχης μη αναγωγήσιμης αναπαράστασης. Επομένως αυτό που θα πρέπει να κάνουμε είναι να προσπαθούμε είτε να βρούμε, είτε να μαντέψουμε την άλγεβρα που εκφράζει τη συμμετρία της δοθείσης Χαμιλτονιανής. Φυσικά κάτι τέτοιο είναι πολύ δύσκολο, είτε γιατί οι γνωστές άλγεβρες είναι ακατάλληλες για να περιγράψουν τη συμμετρία που εμφανίζεται σε κάποιο πρόβλημα, είτε γιατί η συμμετρία δεν είναι τόσο προφανής σε κάποιες περιπτώσεις. Σε αυτό το σημείο θα καταφύγουμε στις παραμορφωμένες άλγεβρες, προκειμένου να εμπλουτίσουμε τις δυνατότητες περιγραφής συμμετριών και σε άλλες λιγότερες προφανείς περιπτώσεις.

Για να προχωρήσουμε θα πρέπει να κάνουμε μια υπόθεση εργασίας. Σύμφωνα λοιπόν με την υπόθεση που παρουσιάζεται στα [54] και [36] μπορούμε να κατασκευάσουμε μια παραμορφωμένη άλγεβρα (deformed oscillator algebra) μέσω των τελεστών$\{1, b, b^\dagger\, N\}$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$[N, b^\dagger] = b^\dagger, \quad [N, b] = -b, \quad b^\dagger b = \Phi(N), \quad bb^\dagger = \Phi(N+1), \tag{1.18}$$

όπου η συνάρτηση $\Phi(x)$ ονομάζεται συνάρτηση δομής (structure function). Η συνάρτηση Φ είναι μια πραγματική συνάρτηση, τέτοια ώστε $\Phi(0) = 0$ και $\Phi(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ ([54]). Έτσι έχουμε μια αναπαράσταση τύπου Fock, στην οποία τα διανύσματα βάσης είναι τα $|n>, n = 0, 1, \ldots$ και η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$N|n >= n|n >, \quad b^\dagger|n >= \sqrt{\Phi(N+1)}|n+1 >, \quad b|n >= \sqrt{\Phi(N)}|n-1 >, \quad b|0 >= 0. \tag{1.19}$$

Απαιτώντας $\Phi(p+1) = 0$ παίρνουμε μία πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση.

Τώρα μπορούμε να μελετήσουμε τα υπερολοκληρώσιμα συστήματα απευθείας. Θεωρούμε λοιπόν ένα υπερολοκληρώσιμο σύστημα σε δύο διαστάσεις το οποίο περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή H, ενώ τα ολοκληρώματα κίνησης του είναι τα I και C, τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις

$$[H, I] = [H, C] = 0, \quad [I, C] \neq 0. \tag{1.20}$$

Υπόθεση: Θεωρούμε ένα υπερολοκληρώσιμο σύστημα, για το οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε την μεταθετική άλγεβρα

$$\begin{aligned} N &= N(H, I, C), \\ N^\dagger &= N, \\ A &= A(H, I, C), \\ [N, A] &= -A, \\ A^\dagger A &= \Phi(H, N), \\ [A^\dagger A, AA^\dagger] &= 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

όπου $\Phi(E,x)$ είναι μια πραγματική και θετική συνάρτηση ορισμένη για $x \geq 0$ και $\Phi(E,0) = 0$. Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$[N, A^\dagger] = A^\dagger, \quad AA^\dagger = \Phi(H, N+1).$$

Εάν αυτή η κατασκευή είναι δυνατή, τότε μπορούμε να ορίσουμε έναν χώρο Fock για κάθε ιδιοτιμή της ενέργειας

$$H|E,n>= E|E,n>,$$

$$N|E,n>= n|E,n>,$$

$$A|E,0>= 0,$$

$$|E,n>= (\frac{1}{\sqrt{[n]!}})(A^\dagger)^n|E,0>,$$

όπου $[0]! = 1, [n]! = \Phi(E,n)[n-1]!$. Στην περίπτωση των διακριτών ιδιοτιμών ενέργειας, για κάθε ιδιοτιμή E υπάρχει κάποιος εκφυλισμός της τάξης $N_d + 1$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτησή μας να ισχύει $\Phi(E, N_d + 1) = 0$.

Τελειώνοντας θα πρέπει να πούμε ότι αρκεστήκαμε στις δύο διαστάσεις, διότι η γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις είναι άμεση. Αξίζει ακόμα να παρατηρήσουμε ότι μια πλήρης θεωρίας μελέτης των κλασικών, αλλά και των κβαντικών ολοκληρώσιμων συστημάτων, δεν υπάρχει. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι μελέτης, αλλά πρέπει να υπογραμμίσουμε πως απέχουμε αρκετά από μια πλήρη θεωρία. Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι αυτό που περιγράψαμε αμέσως παραπάνω είναι μια υπόθεση και όχι ένα θεώρημα(!).

Κεφάλαιο 2

Ανισοτροπικός κβαντικός ταλαντωτής

2.1 Ανισοτροπικός κβαντικός ταλαντωτής με λόγο συχνοτήτων ακέραιο αριθμό

Προκειμένου να μελετήσουμε το σύστημά μας, θεωρούμε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση του κβαντικού αναρμονικού ταλαντωτή

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left({p_k}^2 + \frac{x_k^2}{m_k^2}\right), \tag{2.1}$$

όπου m_k φυσικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε κάθε ζευγάρι τιμών από αυτούς να έχει κοινό διαιρέτη μόνο το 1. Ο ταλαντωτής μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_k}{m_k} - ip_k\right), \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_k}{m_k} + ip_k\right), \tag{2.2}$$

οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης

$$[a_k, a_k^\dagger] = \frac{1}{m_k}. \tag{2.3}$$

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή

$$U_k = \frac{1}{2}\left({p_k}^2 + \frac{x_k^2}{m_k^2}\right) = \frac{1}{2}\left\{a_k, a_k^\dagger\right\}, \tag{2.4}$$

ως συνάρτηση του οποίου μπορούμε να γράψουμε τη Χαμιλτονιανή

$$H = \sum_{k=1}^{N} U_k. \tag{2.5}$$

Για τους τελεστές που ορίσαμε στις σχέσεις (2.2) μπορούμε να αποδείξουμε τις σχέσεις:

$$[a_k^\dagger, U_k] = -\frac{1}{m_k}a_k^\dagger, \qquad [({a_k}^\dagger)^{m_k}, U_k] = -({a_k}^\dagger)^{m_k}, \tag{2.6}$$

$$[a_k, U_k] = \frac{1}{m_k} a_k, \qquad [(a_k)^{m_k}, U_k] = (a_k)^{m_k}. \tag{2.7}$$

Επιπλέον ειναι πολύ χρήσιμο να ορίσουμε τα γινόμενα

$$(a_k^\dagger)^{m_k}(a_k)^{m_k} = F(m_k, U_k), \qquad (a_k)^{m_k}(a_k^\dagger)^{m_k} = F(m_k, U_k + 1), \tag{2.8}$$

όπου η συνάρτηση $F(m, x)$ ορίζεται ώς εξής:

$$F(m, x) = \prod_{p=1}^{m} \left(x - \frac{2p - 1}{2m} \right). \tag{2.9}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να ορίσουμε την άλγεβρα C, η οποία ορίζεται μέσω των τελεστών γεννητόρων $\{1, H, A_k, A_k^\dagger, U_k\}$, όπου $k = 1, 2, ...N - 1$ και οι γεννήτορες έχουν τη μορφή

$$A_k^\dagger = (a_k^\dagger)^{m_k}(a_N)^{m_N}, \qquad A_k = (a_k)^{m_k}(a_N^\dagger)^{m_N}. \tag{2.10}$$

Αυτοί οι τελεστές αποτελούν μια πολυδιάστατη γενίκευση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, που ορίζει κανείς στη συνηθισμένη περίπτωση του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. Επιπλέον, για τους μεταθέτες αυτών των τελεστών ισχύουν οι σχέσεις

$$[H, A_k] = 0, \qquad [H, A_k^\dagger] = 0, \qquad [H, U_k] = 0, \qquad k = 1, 2, ..., N - 1. \tag{2.11}$$

Πίνακας 2.1

Σχέσης μετάθεσης για την παραμορφωμένη άλγεβρα U(3) σε σχέση με την περίπτωση $m_1 : m_2 : m_3$, όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.1 .

	U_1	U_2	U_3	$\mathcal{A}_3^\dagger$	$\mathcal{A}_2^\dagger$	$\mathcal{A}_1^\dagger$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
U_1	0	0	0	$\mathcal{A}_3^\dagger$	0	$\mathcal{A}_1^\dagger$	$-\mathcal{A}_3$	0	$-\mathcal{A}_1$
U_2	0	0	0	$-\mathcal{A}_3^\dagger$	$\mathcal{A}_2^\dagger$	0	$\mathcal{A}_3$	$-\mathcal{A}_2$	0
U_3	0	0	0	0	$-\mathcal{A}_2^\dagger$	$-\mathcal{A}_1^\dagger$	0	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1$
$\mathcal{A}_3^\dagger$	$-\mathcal{A}_3^\dagger$	$\mathcal{A}_3^\dagger$	0	0	$\mathcal{A}_1^\dagger F_2$	0	$-F_{12}$	0	$-\mathcal{A}_2 F_1$
$\mathcal{A}_2^\dagger$	0	$-\mathcal{A}_2^\dagger$	$\mathcal{A}_2^\dagger$	$-\mathcal{A}_1^\dagger F_2$	0	0	0	$-F_{23}$	$\mathcal{A}_3 F_3$
$\mathcal{A}_1^\dagger$	$-\mathcal{A}_1^\dagger$	0	$\mathcal{A}_1^\dagger$	0	0	0	$-\mathcal{A}_2^\dagger F_1$	$\mathcal{A}_3^\dagger F_3$	$-F_{13}$
$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_3$	$-\mathcal{A}_3$	0	F_{12}	0	$\mathcal{A}_2^\dagger F_1$	0	$-\mathcal{A}_1 F_2$	0
$\mathcal{A}_2$	0	$\mathcal{A}_2$	$-\mathcal{A}_2$	0	F_{23}	$-\mathcal{A}_3^\dagger F_3$	$\mathcal{A}_1 F_2$	0	0
$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_1$	0	$-\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2 F_1$	$-\mathcal{A}_3 F_3$	F_{13}	0	0	0

Οι επόμενες σχέσεις ισχύουν για $k \neq l$, όπου $k, l = 1, ..., N - 1$

$$[U_k, A_l] = 0, \qquad [U_k, A_l^\dagger] = 0, \qquad [A_k, A_l] = 0, \qquad [A_k^\dagger, A_l^\dagger] = 0, \tag{2.12}$$

ενώ

$$[U_k, A_k] = -A_k, \qquad [U_k, A_k^\dagger] = A_k^\dagger, \tag{2.13}$$

$$A_k^\dagger A_k = F(m_k, U_k) F(m_N, H - \sum_{l=1}^{N-1} U_l + 1), \tag{2.14}$$

$$A_k A_k^\dagger = F(m_k, U_k + 1) F(m_N, H - \sum_{l=1}^{N-1} U_l). \tag{2.15}$$

Στον Πίνακα 2.1 έχουν υπολογιστεί για την περίπτωση $N = 3$, καθώς και διάφορες τιμές των παραμέτρων $m_1 : m_2 : m_3$, οι σχέσεις μετάθεσεις της παραμορφωμένης (deformed) άλγεβρας $u(3)$.

2.2 Αναπαράσταση της παραμορφωμένης άλγεβρας $u(N)$

Η άλγεβρα που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα επιδέχεται μια αναπαράσταση στο χώρο Fock. Τα ιδιοδιανύσματα της βάσης θα έχουν τη μορφή $|E, p_1 ... p_{N-1}\rangle$ και θα αντιστοιχούν στις N ιδιοτιμές των τελεστών H και U_k, που δημιουργούν την άλγεβρα. Οι τελεστές A_k και $A_k^\dagger$ αντιστοιχούν στους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής της παραμορφωμένης άλγεβρας. Στη γενική τους μορφή, η δράση των τελεστών επάνω στα καταστατικά διανύσματα θα έχει τη γενική μορφή

$$H|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = E|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle, \tag{2.16}$$

$$U_k|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = p_k|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle, \tag{2.17}$$

$$A_k|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = \sqrt{F(m_k, p_k) F(m_N, E - \sum_{k=1}^{N-1} p_k + 1)}|E, p_1, ..., p_k - 1, ... p_{N-1}\rangle, \tag{2.18}$$

$$A_k^\dagger|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = \sqrt{F(m_k, p_k + 1) F(m_N, E - \sum_{k=1}^{N-1} p_k)}|E, p_1, ..., p_k + 1, ... p_{N-1}\rangle. \tag{2.19}$$

Θεωρούμε την τιμή p_k^{min} ως την ελάχιστη ιδιοτιμή των p_k τέτοια ώστε

$$A_k|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = 0. \tag{2.20}$$

Προκειμένου να συμβεί κάτι τέτοιο, θα πρέπει η τιμή p_k^{min} να είναι τέτοια ώστε, σύμφωνα και με τη εξίσωση (10), να μηδενίζεται η συνάρτηση

$$F(m_k, p_k^{min}) = 0. \tag{2.21}$$

Τότε οι τιμές p_k θα προκύπτουν ως οι ρίζες της συνάρτησης F, όπως αυτή ορίζεται από τη εξίσωση (9). Η γενική μορφή των ριζών είναι

$$p_k^{min} = \frac{2q_k - 2}{2m_k}, \qquad k = 1, ..., m_k. \tag{2.22}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι κάθε ρίζα χαρακτηρίζεται από τον αριθμό q_k, όπου αυτός ο αριθμός χαρακτηρίζει την αναπαράσταση της άλγεβρας. Όπως και στην συνηθισμένη περίπτωση του ισοτροπικού κβαντικού ταλαντωτή, έτσι και εδώ οι επιμέρους καταστάσεις του χώρου Fock δημιουργούνται δρώντας με το τελεστή δημιουργίας $A_k^\dagger$ επάνω στην θεμελιώδη κατάσταση

$$|E, p_1^{min} ... p_{N-1}^{min}\rangle = \left| \begin{array}{c} E,[0] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} E, 0, 0, ..., 0 \\ q_1, ..., q_k, ... q_N \end{array} \right\rangle. \tag{2.23}$$

Έτσι λοιπόν τα στοιχεία του χώρου Fock θα δίνονται από τη σχέση:

$$|E,[p_k^{min}+n_k]\rangle = \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_{[q]}^{[n]}}} \left(\prod_{k=1}^{N-1} (A_k^{\dagger})^{n_k} \right) \left| \begin{array}{c} E,[0] \\ q_1, q_2, ...q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle, \tag{2.24}$$

όπου $[\mathrm{n}] = (n_1, ..., n_{N-1})$ και $[\mathrm{q}] = (q_1, ..., q_N)$, ενώ $C_{[q]}^{[n]}$ειναι σταθερές κανονικοποίησης.

Δρώντας με τους γεννήτορες της άλγεβρας επάνω στη βάση του χώρου Fock προκύπτουν οι σχέσεις

$$H \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = E \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle, \tag{2.25}$$

$$U_k \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = (n_k \hbar\omega + p_k^{min}) \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle, \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} A_k^{\dagger} \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \\ \sqrt{F(m_k, n_k + p_k^{min} + 1) F(m_N, E - \sum_{l=1}^{N-1} (n_l + p_l^{min}))} \left| \begin{array}{c} E, n_1, ..., n_k + 1, ...n_{N-1} \\ q_1, ..., q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle, \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} A_k \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \\ \sqrt{F(m_k, n_k + p_k^{min}) F(m_N, E - \sum_{l=1}^{N-1} (n_l + p_l^{min} + 1))} \left| \begin{array}{c} E, n_1, ..., n_k - 1, ...n_{N-1} \\ q_1, ..., q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Εφόσον υπάρχει μια πεπερασμένων διαστάσεων αναπαράσταση αυτής της άλγεβρας, μετά από Σ διαδοχικές δράσεις του τελεστή δημιουργίας $A_k^{\dagger}$ στη θεμελιώδη κατάσταση, προκύπτει μηδενισμός όταν ικανοποιηθεί η σχέση

$$F\left(m_N, E - \Sigma - \sum_{l=1}^{N-1} p_l^{min} \right) = 0.$$

Επομένως

$$E - \Sigma - \sum_{l=1}^{N-1} p_l^{min} = p_N^{min},$$

με p_N^{min} να είναι η ρίζα της εξίσωσης $F(m_N, p_N^{min}) = 0$. Τελικά

$$E = \Sigma + \sum_{k=1}^{N} \frac{2q_k - 1}{2m_k}. \tag{2.29}$$

Στην περίπτωσή μας λοιπόν μόνο οι ιδιοτιμές που προκύπτουν από την εξίσωση (2.29) ειναι επιτρεπτές, με συνέπεια τα στοιχεία του χώρου Fock να μπορούν να περιγραφούν χρησιμοποιώντας το Σ

αντί για την ενέργεια E. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα η δράση των τελεστών της άλγεβρας επάνω στις διάφορες καταστάσεις του χώρου Fock να περιγράφεται από τις σχέσεις

$$H\left| \begin{array}{c} \Sigma,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = (\Sigma + \frac{(2q_k-1}{2m_k})\left| \begin{array}{c} \Sigma,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle, \tag{2.30}$$

$$U_k\left| \begin{array}{c} \Sigma,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = (n_k + \frac{(2q_k-1}{2m_k}))\left| \begin{array}{c} \Sigma,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle, \tag{2.31}$$

$$A_k^\dagger\left| \begin{array}{c} \Sigma,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \sqrt{F(m_k, n_k + \frac{(2q_k-1}{2m_k}+1).F(m_N, \Sigma - \sum_{l=1}^{N-1}(n_l + \frac{2q_N-1}{2m_N}))}\left| \begin{array}{c} \Sigma, n_1, ..., n_k+1, ...n_{N-1} \\ q_1, ..., q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle \tag{2.32}$$

$$A_k\left| \begin{array}{c} \Sigma,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \sqrt{F(m_k, (n_k + \frac{(2q_k-1}{2m_k}.F(m_N, \Sigma - \sum_{l=1}^{N-1}(n_l + \frac{2q_N-1}{2m_n}+1))}\left| \begin{array}{c} \Sigma, n_1, ..., n_k-1, ...n_{N-1} \\ q_1, ..., q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle \tag{2.33}$$

2.3 Η άλγεβρα του τρισδιάστατου ανισοτροπικού ταλαντωτή

Προκειμένου να κατασκευάσουμε την άλγεβρα που κλείνει στις διάφορες περιπτώσεις του ανισοτροπικού ταλαντωτή στις τρείς διαστάσεις εργαζόμαστε ώς εξής.

Ξεκινάμε ορίζοντας τους τελεστές

$$\mathcal{A}_k^\dagger = \left(a_k^\dagger\right)^{m_k}(a_3)^{m_3}, \qquad \mathcal{A}_k = (a_k)^{m_k}\left(a_3^\dagger\right)^{m_3}, \qquad k=1,2, \tag{2.34}$$

$$\mathcal{A}_3^\dagger = (a_1^\dagger)^{m_1}(a_2)^{m_2}, \qquad \mathcal{A}_3 = (a_1)^{m_1}(a_2^\dagger)^{m_2}. \tag{2.35}$$

Αυτοί οι 6 τελεστές $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_k^\dagger$, μαζί με τους τρεις τελεστές U_k ($k=1,\ 2,\ 3$), όπως ορίζονται στην σχέση (2.4), ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης όπως δίνονται στον Πίνακα 1, όπου

$$F_i = F(m_i, U_i+1) - F(m_i, U_i), \qquad i=1,2,3, \tag{2.36}$$

$$F_{ij} = F(m_i, U_i+1)F(m_j, U_j) - F(m_i, U_i)F(m_j, U_j+1), \qquad i,j=1,2,3, \tag{2.37}$$

με την συνάρτηση $F(m_i, U_i)$ να έχει οριστεί στη σχέση (2.9).

2.4 Η άλγεβρα του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων 1:1:1

Στην περίπτωση 1:1:1 οι συναρτήσεις $F_i = 1$, $i = 1, 2, 3$ και $F_{ij} = U_j - U_i$, $i, j = 1, 2, 3$, είναι τέτοιες ώστε ο Πίνακας 1 να δίνει τα συνήθη αποτελέσματα που παίρνει κανείς για την άλγεβρα $U(3)$.

2.5 Η άλγεβρα του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων 1:1:2

Στην περίπτωση όπου οι λόγοι των συχνοτήτων δίνονται από τη σχέση 1:1:2, οι σχέσεις μετάθεσης τροποποιούνται ως εξής

$$[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1^\dagger] = -2U_1U_3 + U_3^2 + \frac{3}{16}, \qquad [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2^\dagger] = -2U_3\mathcal{A}_3,$$

$$[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2^\dagger] = -2U_2U_3 + U_3^2 + \frac{3}{16}, \qquad [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1^\dagger] = -2U_3\mathcal{A}_3^\dagger.$$

Συνεπώς μόνο 4 μεταθέτες επηρεάζονται, ενώ οι υπόλοιποι παραμένουν ως έχουν, όπως δηλαδή για την περίπτωση της άλγεβρας $U(3)$.

2.6 Η άλγεβρα του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων 1:1:3

Παρομοίως για την περίπτωση 1:1:3 θα έχουμε

$$[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1^\dagger] = -3U_1U_3^2 - \frac{5}{36}U_1 + U_3^3 + \frac{23}{36}U_3, \qquad [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2^\dagger] = -\left(3U_3^2 + \frac{5}{36}\right)\mathcal{A}_3,$$

$$[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2^\dagger] = -3U_2U_3^2 - \frac{5}{36}U_2 + U_3^3 + \frac{23}{36}U_3, \qquad [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1^\dagger] = -\left(3U_3^2 + \frac{5}{36}\right)\mathcal{A}_3^\dagger.$$

Και σε αυτή την περίπτωση μόνο 4 μεταθέτες επηρεάζονται. Μπορεί επιπλέον να βρεί κανείς ότι και στη γενική περίπτωση $1 : 1 : m$, μόνο 4 μεταθέτες θα επηρεάζονται κάθε φορά.

2.7 Η άλγεβρα του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων 2:2:1

Τέλος σε αυτή την περίπτωση, όπου οι λόγοι των συχνοτήτων των ταλαντωτών συνδέονται με τη σχέση 2:2:1, οι μεταθέτες που τροποποιούνται είναι

$$[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1^\dagger] = 2U_1U_3 - U_1^2 - \frac{3}{16}, \qquad [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3^\dagger] = 2U_1\mathcal{A}_2,$$

$$[\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2^\dagger] = 2U_2U_3 - U_2^2 - \frac{3}{16}, \qquad [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3^\dagger] = 2U_2\mathcal{A}_1,$$

$$[\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3^\dagger] = -(U_1 - U_2)\left(2U_1U_2 - \frac{3}{8}\right), \qquad [\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1^\dagger] = 2U_1\mathcal{A}_2^\dagger,$$

$$[\mathcal{A}_2^\dagger, \mathcal{A}_3^\dagger] = -2U_2\mathcal{A}_1^\dagger,$$

ενώ οι μεταθέτες

$$[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2^\dagger] = -\mathcal{A}_3, \qquad [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1^\dagger] = -\mathcal{A}_3^\dagger,$$

δεν μεταβάλλονται. Τέλος μπορεί να αποδειχθεί για την γενική περίπτωση $m : m : 1$ ότι οι μεταθέτες που μεταβάλλονται είναι 7.

Κλείνοντας θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι παραπάνω άλγεβρες είναι **μή γραμμικές**, με την εξής έννοια: Ο μεταθέτης δύο γεννητόρων της άλγεβρας δίνει ως αποτέλεσμα γεννήτορες σε τάξη μεγαλύτερη του ένα. Όμως αυτό δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα, μιας και οι αναπαραστάσεις αυτών των αλγεβρών μπορούν να κατασκευαστουν χωρίς καμιά δυσκολία.

2.8 Σύνδεση με την καρτεσιανή βάση

Ακολουθώντας για μια ακόμα φορά τον συμβολισμό της εργασίας [46], θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε τα αποτελέσματα για την αναπαράσταση της παραμορφωμένης άλγεβρας $U(3)$ με την καρτεσιανή βάση. Ο λόγος για τον οποίο θα επιχειρήσουμε κάτι τέτοιο θα φανεί πολύ καλύτερα στο κεφάλαιο 4, όπου θα συνδέσουμε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν με το πρότυπο Nilsson της πυρηνικής φυσικής.

Ξεκινώντας θα πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι οι τελεστές $a_l, a_l^\dagger, N_l = m_lU_l - 1/2$ συνιστούν μια άλγεβρα με συνάρτηση δομής (structure function) (για περισσότερες λεπτομέρειες δες [54])

$$\Phi_l(x) = x/m_l, \tag{2.38}$$

η οποία στην περίπτωσή μας ειναι της μορφής

$$\Phi_l(N_l) = U_l - \frac{1}{2m_l}. \tag{2.39}$$

Γι΄ αυτή την άλγεβρα ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης

$$[N_l, a_l^\dagger] = a_l^\dagger, \quad [N_l, a_l] = -a_l, \quad a_l^\dagger a_l = \Phi(N_l), \quad a_l a_l^\dagger = \Phi(N_l + 1). \tag{2.40}$$

Σε αυτή τη βάση υπάρχουν συνολικά N ταλαντωτές ασύζευκτοι μεταξύ τους. Η άλγεβρα, έτσι όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορεί να συνδεθεί με την αναπαράσταση στο χώρο Fock της προηγούμενης παραγράφου. Προκειμένου να συνδέσουμε την προηγούμενη βάση με τη συνήθη καρτεσιανή βάση, ορίζουμε το καταστατικό διάνυσμα $[r] = (r_1, r_2, ..., r_N)$, έτσι ώστε

$$a_l^\dagger |[r] >= \sqrt{\Phi(r_l + 1)} |r_1, ...r_l + 1, ...r_N >,$$

$$a_l |[r] >= \sqrt{\Phi(r_l)} |r_1, ...r_l - 1, ...r_N >,$$

$$N_l |[r] >= r_l |r > .$$

Η σύνδεση μεταξύ της καρτεσιανής βάσης και της βάσης έτσι όπως ορίστηκε μέσα απο τις σχέσεις (2.32)-(2.35) δίνεται από τη σχέση

$$|[r] >= \left| \begin{array}{c} \Sigma,\text{[n]} \\ \text{[q]} \end{array} \right\rangle, \tag{2.41}$$

$$r_l = n_l m_l + mod(r_l, m_l), \quad l = 1, 2, ..., N. \tag{2.42}$$

Οι κβαντικοί αριθμοί r_l συνδέονται με τους κβαντικούς αριθμούς q_k και n_k μέσω των σχέσεων

$$n_k = [r_k/m_k], \quad k = 1, ..., N - 1, \tag{2.43}$$

$$q_l = mod(r_l, m_l) + 1, \quad \Sigma = \sum_{l=1}^{N} [r_l/m_l], \tag{2.44}$$

όπου $[x]$ σημαίνει το ακέραιο μέρος του αριθμού x.

Χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία μεταξύ των δυο βάσεων, όπως διατυπώνεται στις εξισώσεις (2.43)-(2.46), η δράση του τελεστή $a_k^\dagger$ στην αρχική βάση μπορεί να υπολογιστεί για τις περιπτώσεις όπου $k = 1, ..., N - 1$ μέσω της σχέσης

$$a_k^\dagger \left| \begin{array}{c} \Sigma,\text{[n]} \\ \text{[q]} \end{array} \right\rangle = \sqrt{n_k + q_k/m_k} \left| \begin{array}{c} \Sigma',\text{[n']} \\ \text{[q']} \end{array} \right\rangle, \tag{2.45}$$

όπου

$$n'_l = n_l \quad q'_l = q_l \quad for \quad l \neq k,$$

$$n'_k = n_k + [q_k/m_k],$$

$$\Sigma' = \Sigma + [q_k/m_k],$$

$$q'_k = mod(q_k, m_k) + 1,$$

ενώ για τον τελεστή $a_N^\dagger$ έχουμε

$$a_N^\dagger \left| \begin{array}{c} \Sigma,\text{[n]} \\ \text{[q]} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\Sigma - \sum_{k=1}^{N-1} n_k + q_N/m_N} \left| \begin{array}{c} \Sigma',\text{[n']} \\ \text{[q']} \end{array} \right\rangle, \tag{2.46}$$

όπου

$$n'_k = n_k \quad q'_k = q_k \quad for \quad k = 1, ..., N-1,$$
$$\Sigma' = \Sigma + [q_N/m_N],$$
$$q'_N = mod(q_N, m_N) + 1.$$

Τελείως αντίστοιχα μπορούμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή a_k για $k = 1, ..., N-1$

$$a_k \left| \begin{array}{c} \Sigma,\text{[n]} \\ \text{[q]} \end{array} \right\rangle = \sqrt{n_k + (q_k - 1)/m_k} \left| \begin{array}{c} \Sigma',\text{[n']} \\ \text{[q']} \end{array} \right\rangle, \tag{2.47}$$

όπου

$$n'_l = n_l \quad q'_l = q_l \quad for \quad l \neq k,$$
$$n'_k = n_k + [(q_k - 2)/m_k],$$
$$\Sigma' = \Sigma + [(q_k - 2)/m_k],$$
$$q'_k = mod(q_k - 2, m_k) + 1,$$

ενώ για τον τελεστή a_N βρίσκουμε

$$a_k \left| \begin{array}{c} \Sigma,\text{[n]} \\ \text{[q]} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\Sigma - \sum_{k=1}^{N-1} n_k + (q_N - 1)/m_N} \left| \begin{array}{c} \Sigma',\text{[n']} \\ \text{[q']} \end{array} \right\rangle, \tag{2.48}$$

όπου

$$n'_k = n_k \quad q'_k = q_k \quad for \quad l \neq k,$$
$$\Sigma' = \Sigma + [(q_N - 2)/m_N],$$
$$q'_N = mod(q_N - 2, m_N) + 1.$$

Στο Κεφάλαιο 4 θα δούμε με λεπτομέρεια τα αποτελέσματα που προκύπτουν για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων $(m_1 : m_2 : m_3)$.

Κεφάλαιο 3

Ανισοτροπικός κβαντικός ταλαντωτής σε N διαστάσεις με όρους **Rosochatius**

Θεωρούμε ότι το σύστημα μας περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left({p_k}^2 + m_k^2\omega^2 x_k^2 + \frac{\lambda_k^2}{x_k^2}\right), \tag{3.1}$$

όπου m_k είναι φυσικοί αριθμοί, με κάθε ζευγάρι από αυτούς να έχει κοινό διαιρέτη μόνο το 1. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αυτή η Χαμιλτονιανή, σε σχέση με την Χαμιλτονιανή του προηγούμενου κεφαλαίου, έχει δυο δαφορές. Η πρώτη φυσικά είναι αναμενόμενη και αφορά την παρουσία των όρων Rosochatius, ενώ η δεύτερη έχει να κάνει με τους συντελεστές μπροστά από το κομμάτι που αφορά τον ανισοτροπικό όρο. Ο λόγος αυτής της αλλαγής είναι ο εξής: θέλουμε τα απότελέσματα που θα προκύψουν να τα συγκρίνουμε με αυτά που υπάρχουν στη βιβλιογραφία [30, 32, 33, 34]. Προκειμένου η σύγκριση να είναι πιο εύκολη, χρησιμοποιούμε αυτή τη μορφή.

Αυτός ο ταλαντωτής μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής

$$a_k^\dagger = \frac{1}{4}\left(({x_k}^2{m_k}^2\omega^2 - {p_k}^2 - \frac{\lambda_k}{x_k^2}) - i\omega m_k\{x_k, p_x\}\right), \tag{3.2}$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left(({x_k}^2{m_k}^2\omega^2 - {p_k}^2 - \frac{\lambda_k}{x_k^2}) + i\omega m_k\{x_k, p_x\}\right), \tag{3.3}$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[a_k, a_k^\dagger] = 2m_k\hbar\omega U_k. \tag{3.4}$$

Ορίζουμε τον τελεστή U_k

$$U_k = \frac{1}{4}\left({p_k}^2 + x_k^2 m_k^2\omega^2 + \frac{\lambda_k}{x_k^2}\right), \tag{3.5}$$

ως συνάρτηση του οποίου η Χαμιλτονιανή γράφεται σαν

$$H = 2\sum_{k=1}^{N} U_k. \tag{3.6}$$

Είναι πολύ σημαντικό σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε μια διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση, στην οποία η αλληλεπίδραση μηδενιζόταν ($\lambda_k = 0$). Όπως μπορούμε να δούμε από την εξίσωση (3.4), ο τελεστής U_k ισούται με τον μεταθέτη των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής και όχι με τον αντιμεταθέτη.

Προχωρώντας αποδεικνύουμε ακόμα τις σχέσεις:

$$[a_k^\dagger, U_k] = -m_k\hbar\omega a_k^\dagger, \qquad [a_k, U_k] = m_k\hbar\omega a_k, \tag{3.7}$$

$$[(a_k^\dagger)^{m_k}, U_k] = -{m_k}^2\hbar\omega(a_k^\dagger)^{m_k}, \qquad [(a_k)^{m_k}, U_k] = {m_k}^2\hbar\omega(a_k)^{m_k}. \tag{3.8}$$

Θα μας φανούν πολύ χρήσιμοι για τη συνέχεια οι μεταθέτες

$$[(a_k^\dagger)^{m_p}, U_k] = -m_p m_k\hbar\omega(a_k^\dagger)^{m_p}, \qquad [(a_k)^{m_p}, U_k] = m_p m_k\hbar\omega(a_k)^{m_p}. \tag{3.9}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε τις σχέσεις (3.5) και (3.6), χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (3.2) και (3.3), διότι έτσι οι αποδείξεις γίνονται ευκολότερα.

Ορίζουμε την άλγεβρα $C : \{1, H, D_k, D_k^\dagger, U_k\}$ με $k = 1, 2, ..., N-1$, όπου

$$D_k = (a_k)^{m_k}(a_N^\dagger)^{m_k}, \tag{3.10}$$

$$D_k^\dagger = (a_k^\dagger)^{m_k}(a_N)^{m_k}. \tag{3.11}$$

Γι΄ αυτή την άλγεβρα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης:

$$[H, D_k] = 0, \qquad [H, D_k^\dagger] = 0, \qquad [H, U_k] = 0. \tag{3.12}$$

Οι επόμενες σχέσεις ικανοποιούνται για $k \neq l$ και $k, l = 1, 2, ...N-1$

$$[U_k, D_l] = [U_k, D_l^\dagger] = [D_k, D_l] = [D_k^\dagger, D_l^\dagger] = 0. \tag{3.13}$$

Προκειμένου να μπορέσουμε να βρούμε μια αναπαράσταση για αυτή την άλγεβρα, χρειάζεται να υπολογίσουμε το γινόμενο των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής

$$a_k^\dagger a_k = U_k(U_k - m_k\omega) + m_k^2\omega^2(\frac{3}{16} - \frac{\lambda}{4}), \tag{3.14}$$

$$a_k a_k^\dagger = U_k(U_k + m_k\omega) + m_k^2\omega^2(\frac{3}{16} - \frac{\lambda}{4}). \tag{3.15}$$

Ορίζουμε ακόμα τη συνάρτηση $F(m,n,x)$, έτσι ώστε

$$(a_k^\dagger)^{m_k}(a_k)^{m_k} = F(m_k,\lambda,U_k), \tag{3.16}$$

$$(a_k)^{m_k}(a_k^\dagger)^{m_k} = F(m_k,\lambda,U_k+\hbar\omega), \tag{3.17}$$

όπου η συνάρτηση $F(m,\lambda,x)$ ορίζεται ως

$$F(m,n,x) = \prod_{p=1}^{m}\left(x - \frac{(2p-1+\sqrt{\lambda+1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right)\left(x - \frac{(2p-1+\sqrt{\lambda+1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right) \tag{3.18}$$

Εδώ θα πρέπει να βρούμε το γινόμενο των τελεστών D_k και $D_k^\dagger$

$$D_k^\dagger D_k = (a_k^\dagger)^{m_N}(a_N)^{m_k}(a_k)^{m_N}(a_N^\dagger)^{m_k} = (a_k^\dagger)^{m_N}(a_k)^{m_N}(a_N)^{m_k}(a_N\dagger)^{m_k}$$

$$= \prod_{p=1}^{m_N}\left(U_k - \frac{(2p-1+\sqrt{\lambda_k+1/4})m_N\hbar\omega}{2}\right).\left(U_k - \frac{(2p-1+\sqrt{\lambda_k+1/4})m_N\hbar\omega}{2}\right)$$

$$.\prod_{p=1}^{m_k}\left(U_N - \frac{(2p-1+\sqrt{\lambda_N+1/4})m_N\hbar\omega}{2}\right)\left(x - \frac{(2p-1+\sqrt{\lambda_N+1/4})m_N\hbar\omega}{2}\right).$$

Ορισμοί:

$$(a_k^\dagger)^{m_N}(a_k)^{m_N} = G(m_N,m_k,\lambda_k,U_k)$$

$$(a_k)^{m_N}(a_k^\dagger)^{m_N} = G(m_N,m_k,\lambda_k,U_k+\hbar\omega)$$

$$(a_N^\dagger)^{m_k}(a_N)^{m_k} = G(m_k,m_N,\lambda_N,U_N)$$

$$(a_N)^{m_k}(a_N^\dagger)^{m_k} = G(m_k,m_N,\lambda_N,U_N+\hbar\omega)$$

έτσι ώστε

$$D_k D_k^\dagger = G(m_N,m_k,\lambda_k,U_k+\hbar\omega) \quad G(m_k,m_N,\lambda_N,U_N) \tag{3.19}$$

$$D_k^\dagger D_k = G(m_N,m_k,\lambda_k,U_k) \quad G(m_k,m_N,\lambda_N,U_N+\hbar\omega) \tag{3.20}$$

Εισάγουμε ακόμα τη συνάρτηση G, έτσι ώστε:

$$G(m_i,m_j,\lambda_j,U_j) =$$

$$\prod_{p=1}^{m_i}\left(U_j - \frac{(2p-1+\sqrt{\lambda_j+1/4})m_j\hbar\omega}{2}\right)\left(U_j - \frac{(2p-1-\sqrt{\lambda_j+1/4})m_j\hbar\omega}{2}\right). \tag{3.21}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.6) βρίσκουμε

$$U_N = H/2 - \sum_{k=1}^{N-1} U_k.$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στα γινόμενα των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής προκύπτει

$$D_k D_k^\dagger = G(m_N, m_k, \lambda_k, U_k + \hbar\omega) \quad G\left(m_k, m_N, \lambda_N, \frac{H}{2} - \sum_{k=1}^{N-1} U_k\right) \tag{3.22}$$

$$D_k^\dagger D_k = G(m_N, m_k, \lambda_k, U_k) \quad G\left(m_k, m_N, \lambda_N, \frac{H}{2} - \sum_{k=1}^{N-1} U_k + \hbar\omega\right) \tag{3.23}$$

3.1 Η αναπαράσταση της παραμορφωμένης άλγεβρας

Η άλγεβρα που ορίστηκε από τις παραπάνω σχέσεις επιδέχεται αναπαράσταση στο χώρο Fock. Τα διανύσματα της βάσης $|E, p_1 ... p_N\rangle$ χαρακτηρίζονται από τις ιδιοτιμές των N μετατιθέμενων τελεστών H και U_k, όπου $k = 1, 2, ..., N-1$. Οι τελεστές D_k και $D_k^\dagger$ είναι οι τελεστές σκάλας της άλγεβρας. [1]

$$H|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = E|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle, \tag{3.24}$$

$$U_k|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = p_k|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle, \tag{3.25}$$

$$D_k|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = \sqrt{G(m_N, m_k, \lambda_k, p_k) G\left(m_k, m_N, \lambda_N, E/2 - \sum_{k=1}^{N-1} p_k + \hbar\omega\right)}|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle, \tag{3.26}$$

$$D_k^\dagger|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = \sqrt{G(m_N, m_k, \lambda_k, p_k + \hbar\omega) G\left(m_k, m_N, \lambda_N, E/2 - \sum_{k=1}^{N-1} p_k + \hbar\omega\right)}|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle. \tag{3.27}$$

Έστω p_k^{min} η ελάχιστη ιδιοτιμή της παραμέτρου p_k, τέτοια ώστε $D_k^\dagger|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = 0$.

Μέσω της εξίσωσης (3.26) βρίσκουμε ότι θα πρέπει $G(m_N, m_k, \lambda_k, p_k^{min}) = 0$, όπου p_k είναι μία από τις ρίζες της συνάρτησης G όπως αυτή ορίζεται από την εξίσωση 3.21, επομένως

$$p_k^{min} = \frac{(2q_k - 1 \pm \sqrt{\lambda_k + 1/4}) m_k \hbar\omega}{2},$$

με $q_k = 1, .., m_N$. Αυτές οι τιμές χαρακτηρίζουν την αναπαράσταση της άλγεβρας.

Τα στοιχεία του χώρου Fock μπορούν να προκύψουν δρώντας διαδοχικά με τον τελεστή δημιουργίας $D_k^\dagger$ στο στοιχείο ελάχιστου βάρους

$$|E, p_1, ..., p_{N-1}\rangle = \left| \begin{array}{c} E,[0] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} E, 0, 0, ..., 0 \\ q_1, q_2, ...q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle. \tag{3.28}$$

[1] Αξίζει να σχολιάσουμε ότι παρ' ότι η ιδέα να ορίσουμε μια παραμορφωμένη άλγεβρα η οποία θα περιγράφει την άλγεβρα, είναι αρκετά παλιά εντούτης μέχρι και σήμερα βρίσκει εφαρμογή και σε πιο σύγχρονες τεχνικές όπως αυτής της μελέτης των υπερολοκληρώσιμων συστημάτων με μεθόδους υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής [39, 38]

Τα διανύσματα βάσης του χώρου Fock της αναπαράστασής μας είναι

$$|E, [p_k^{min} + n_k]\rangle = \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_{[q]}^{[n]}}} \left(\prod_{k=1}^{N-1} (D_k^\dagger)^{n_k} \right) \left| \begin{array}{c} E,[0] \\ q_1, q_2, ...q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle . \tag{3.29}$$

Η σταθερά κανονικοποίησης $C_{[q]}^{[n]}$ μπορεί να υπολογιστεί. Οι γεννήτορες της άλγεβρας που μελετάμε, δρώντας επάνω στα καταστατικά διανύσματα της βάσης, δίνουν:

$$H \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = E \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle , \tag{3.30}$$

$$U_k \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = (n_k \hbar\omega + p_k^{min}) \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle , \tag{3.31}$$

$$D_k^\dagger \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \sqrt{G(m_N, m_k, \lambda_k, n_k\hbar\omega + p_k^{min} + m_k\hbar\omega) G\left(m_k, m_N, \lambda_N, \frac{E}{2} - \sum_{l=1}^{N-1} (n_l\hbar\omega + p_l^{min}) \right)} \left| \begin{array}{c} E, n_1\hbar\omega, ..., n_k\hbar\omega + m_k\hbar\omega, ...n_{N-1}\hbar\omega \\ q_1, ..., q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle , \tag{3.32}$$

$$D_k \left| \begin{array}{c} E,[\mathrm{n}] \\ [\mathrm{q}] \end{array} \right\rangle = \sqrt{G(m_N, m_k, \lambda_k, n_k\hbar\omega + p_k^{min}) G\left(m_k, m_N, \lambda_N, \frac{E}{2} - \sum_{l=1}^{N-1} (n_l\hbar\omega + p_l^{min} + m_N\hbar\omega) \right)} \left| \begin{array}{c} E, n_1\hbar\omega, ..., n_k\hbar\omega - m_k\hbar\omega, ...n_{N-1}\hbar\omega \\ q_1, ..., q_k, ...q_N \end{array} \right\rangle . \tag{3.33}$$

Η ύπαρξη μιας πεπερασμένης διάστασης αναπαράστασης μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι, μετά από Σ διαδοχικές δράσεις του τελεστή δημιουργίας $D_k^\dagger$ επάνω στο στοιχείο ελάχιστου βάρους, η συνάρτηση G θα μηδενιστεί, οπότε

$$G(m_k, m_N, \lambda_N, p_N^{min}) = 0 \Longrightarrow G = \left(m_k, m_N, \lambda_N, \frac{E}{2} - \Sigma\hbar\omega - \sum_{l=1}^{N-1} p_l^{min} \right) = 0. \tag{3.34}$$

Επομένως

$$\frac{E}{2} - \Sigma\hbar\omega - \sum_{l=1}^{N-1} p_l^{min} = p_N^{min}.$$

Τελικώς η ενέργεια θα ισούται με

$$E = 2\left(\Sigma\hbar\omega + \sum_{k=1}^{N} \frac{(2q_k - 1 + \sqrt{\lambda_k + 1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right). \tag{3.35}$$

Στην περίπτωσή μας, στη περίπτωση δηλαδή μιας πεπερασμένης αναπαράστασης , οι μόνες επιτρεπτές ιδιοτιμές ενέργειας του συστήματός μας είναι αυτές που μας δίνει η εξίσωση (3.35), με αποτέλεσμα τα στοιχεία του χώρου Fock να μπορούν να περιγραφούν πλήρως χρησιμοποιώντας μόνο τις παραμέτρους Σ και E. Έτσι οι δράση των γεννητόρων της άλγεβρας επάνω στο χώρο Fock περιγράφεται από τις σχέσεις

$$H\left|\begin{array}{c}\Sigma,[\mathrm{n}]\\ [\mathrm{q}]\end{array}\right\rangle = 2\left(\Sigma\hbar\omega + \sum_{k=1}^{N} \frac{(2q_k - 1 + \sqrt{\lambda_k + 1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right)\left|\begin{array}{c}\Sigma,[\mathrm{n}]\\ [\mathrm{q}]\end{array}\right\rangle, \tag{3.36}$$

$$U_k\left|\begin{array}{c}\Sigma,[\mathrm{n}]\\ [\mathrm{q}]\end{array}\right\rangle = \left(n_k\hbar\omega + \frac{(2q_k - 1 + \sqrt{\lambda_k + 1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right)\left|\begin{array}{c}\Sigma,[\mathrm{n}]\\ [\mathrm{q}]\end{array}\right\rangle, \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} D_k^\dagger\left|\begin{array}{c}\Sigma,[\mathrm{n}]\\ [\mathrm{q}]\end{array}\right\rangle &= \sqrt{G\left(m_N, m_k, \lambda_k, n_k\hbar\omega + \frac{(2q_k - 1 + \sqrt{\lambda_k + 1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right)} \\ &\sqrt{G\left(m_k, m_N, \lambda_N, \Sigma\hbar\omega - \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(n_l\hbar\omega + \sqrt{\lambda_k + 1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right)} \\ &\left|\begin{array}{c}\Sigma, n_1\hbar\omega, ..., n_k\hbar\omega + m_k\hbar\omega, ...n_{N-1}\hbar\omega\\ q_1, ..., q_k, ...q_N\end{array}\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} D_k\left|\begin{array}{c}\Sigma,[\mathrm{n}]\\ [\mathrm{q}]\end{array}\right\rangle &= \sqrt{G\left(m_N, m_k, \lambda_k, n_k\hbar\omega + \frac{(2q_k - 1 + \sqrt{\lambda_k + 1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right)} \\ &\sqrt{G\left(m_k, m_N, \lambda_N, \Sigma\hbar\omega - \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(n_l\hbar\omega + \sqrt{\lambda_k + 1/4})m_k\hbar\omega}{2}\right)} \\ &\left|\begin{array}{c}\Sigma, n_1\hbar\omega, ..., n_k\hbar\omega - m_k\hbar\omega, ...n_{N-1}\hbar\omega\\ q_1, ..., q_k, ...q_N\end{array}\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.2 Σύνδεση με προηγούμενα αποτελεσματα και σχόλια

Είναι σημαντικό να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με αυτά που περιγράφουν οι Evans και Verrier στην εργασία [30]. Γι΄ αυτό το λόγο θα πρέπει να δούμε αν οι ιδιοτιμές της ενέργειας που υπολογίσαμε μέσω της εξίσωσης (3.35) συμπίπτουν με αυτές της [30] (βλ. εξίσωση (31) της [30]). Στην Χαμιλτονιανή με την οποία δουλεύουμε εμείς έχουμε

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left({p_k}^2 + m_k^2\omega^2 x_k^2 + \frac{\lambda_k^2}{x_k^2}\right). \tag{3.40}$$

Από την άλλη μεριά η Χαμιλτονιανή των Evans και Verrier είναι της μορφής (βλ. εξίσωση (28) στην [30])

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}{p_i}^2 + w_i^2\kappa x_i^2 + \frac{\kappa_i}{x_i^2}\right). \tag{3.41}$$

Θέτοντας

$$\kappa = \frac{\omega^2}{2}, \qquad w_i = m_k, \qquad \kappa_i = \frac{\lambda_i}{2}, \tag{3.42}$$

και αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην εξίσωση

$$E = 2\sqrt{2\kappa}\sum_{i=1}^{3} w_i\left(n_i + \frac{1}{2} \pm \frac{\nu_i}{2}\right), \tag{3.43}$$

όπου $\nu_i = \frac{1}{2}\sqrt{1+8\kappa_i}$ μετά από λίγες πράξεις βρίσκουμε ότι

$$E = 2\sum_{\kappa=1}^{3}\left(m_k n_k \omega + \frac{(1 \pm \sqrt{\lambda_k + 1/4}) m_k \hbar\omega}{2}\right). \tag{3.44}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.35) και (3.44) βλέπουμε ότι συμφωνούν

Σχόλια:

1) Ο βαθμός εκφυλισμού κάθε ενός ενεργειακού επιπέδου του ανισοτροπικού ταλαντωτή με όρους Rosochatius στις τρεις διαστάσεις είναι ο ίδιος με τον βαθμό εκφυλισμού του ανισοτροπικού ταλαντωτή σε τρεις διαστάσεις χωρίς τους όρους Rosochatius.

2) Στην [30] χρησιμοποιήθηκαν οι τελεστές b_i και $b_i^\dagger$ προκειμένου να κατασκευαστεί η ομάδα συμμετρίας του προβλήματος. Στη δική μας περίπτωση χρησιμοποιήσαμε παρόμοιους τελεστές, τους οποίους συμβολίσαμε με a_k και $a_k^\dagger$, με εξαίρεση κάποιους αριθμητικούς παράγοντες, αλλά τους επεξεργαστήκαμε με μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση. Χρησιμοποιήσαμε αυτούς τους τελεστές προκειμένου να ορίσουμε μια παραμορφωμένη άλγεβρα, ακολουθώντας την υπόθεση που περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο [36, 54]. Στην ανάλυση που κάναμε, οι τελεστές D_k,$D_k\dagger$ και η συνάρτηση δομής G χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση της άλγεβρας που κρυβόταν πίσω από το φυσικό πρόβλημα που μελετήσαμε.

3) Για το δισδιάστατο δυναμικό Smorodinsky–Winternitz με Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{c}{x_1^2}, \tag{3.45}$$

θέτοντας

$$m_1 = m_2 = 1, \qquad k = \frac{\omega^2}{2}, \qquad \lambda_1 = 2c, \qquad \lambda_2 = 0,$$

$$D_1^\dagger D_1 = G(m_2, m_1, \lambda_1, U_1)G(m_1, m_2, \lambda_2, U_2 + \hbar\omega)$$

$$= \left(U_1 - \frac{1 + \sqrt{(\lambda_1 + 1/4)m_1\hbar\omega}}{2}\right)\left(U_1 - \frac{1 - \sqrt{(\lambda_1 + 1/4)m_1\hbar\omega}}{2}\right)$$
$$\left(U_2 + 1 - \frac{1 + \sqrt{(\lambda_2 + 1/4)m_2\hbar\omega}}{2}\right)\left(U_2 + 1 - \frac{1 + \sqrt{(\lambda_2 + 1/4)m_2\hbar\omega}}{2}\right)$$

$$= \left(U_1 - \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{1}{4}\hbar\omega\sqrt{1 + 8c}\right)\left(U_1 - \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{4}\hbar\omega\sqrt{1 + 8c}\right)$$
$$\left(U_2 + \hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{1}{4}\hbar\omega\right)\left(U_2 + \hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{4}\hbar\omega\right)$$

$$= \left(U_1 - \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{1}{4}\sqrt{1 + 8c}\right)\left(U_1 - \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{4}\sqrt{1 + 8c}\right)\left(U_2 + \frac{1}{4}\hbar\omega\right)\left(U_2 + \frac{3}{4}\hbar\omega\right). \tag{3.46}$$

Θέτοντας

$$\hbar\omega x = U_2 + \frac{1}{4}\hbar\omega, \tag{3.47}$$

$$\hbar\omega(N + 1 + x) = U_1 - \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\omega\sqrt{1 + 8c}}{4}, \tag{3.48}$$

προσθέτοντας τις εξισώσεις (3.47) και(3.48) βρίσκουμε

$$E = 2\left(N + \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 + 8c}\right)\hbar\omega, \tag{3.49}$$

η οποία βρίσκεται σε συμφωνία με το αποτέλεσμα της [36]. Εάν διαλέξουμε

$$\hbar\omega x = U_2 + \frac{1}{4}\hbar\omega, \tag{3.50}$$

$$\hbar\omega(N + 1 - x) = U_1 - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega\sqrt{1 + 8c}}{4}, \tag{3.51}$$

προσθέτοντας τις εξισώσεις (3.50) και (3.51) βρίσκουμε

$$E = 2\left(N + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1+8c}\right)\hbar\omega, \tag{3.52}$$

όπου και αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με την [36].

4) Έχοντς κατορθώσει να βρούμε τις ιδιοτιμές ενέργειας για αυτό το πολύ γενικό πρόβλημα μπορούμε να λύσουμε πολύ εύκολα και με ακρίβεια μια σειρά συστημάτων που μπορούν να προκύψουν από την περίπτωση του ανισοτροπικού ταλαντωτή με Rosochatius όρους με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων (l, m, n) και (k_i). Ενδεικτικά αναφέρουμε το διδιάστατο δυναμικό Holt, τον ισοτροπικό ταλαντωτή σε καμπύλο χώρο, το δυναμικό Fokas-•Lagerstrom, τις πεπερασμένες W άλγεβρες και πολλές ακόμα περιπτώσεις. Λεπτομέρειες μπορεί κανείς να βρει στα ([36, 14, 15])

3.3 Κλασικός ανισοτροπικός ταλαντωτής με όρους αλληλεπίδρασης Rosochatius

Για λόγους πληρότητας θα πρέπει να περιγράψουμε και τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά τη μελέτη αυτού του συστήματος στα πλαίσια της κλασικής μηχανικής. Όπως έχουμε ήδη πει, η Χαμιλτονιανή μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών μόνο στις καρτεσιανές συντεταγμένες και έχει πέντε πρώτα ολοκληρώματα. Από αυτά τα τρία σχετίζονται με την ενέργεια της ταλάντωσης σε κάθε μία διεύθυνση

$$I_1 = \frac{1}{2}p_x^2 + kl^2x^2 + \frac{k_1}{x^2}, \tag{3.53}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}p_y^2 + km^2y^2 + \frac{k_2}{y^2}, \tag{3.54}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}p_z^2 + kn^2z^2 + \frac{k_3}{z^2}. \tag{3.55}$$

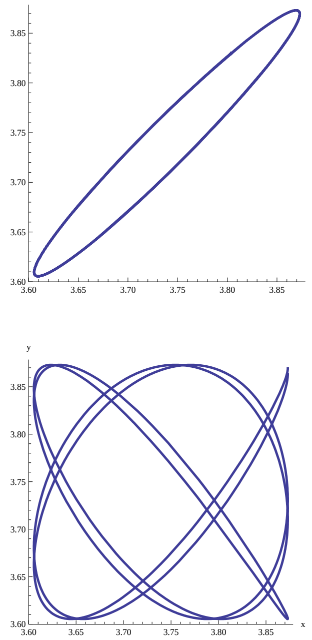
Εφόσον το σύστημα είναι επιλύσιμο με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, μπορούμε να δούμε ότι οι εξισώσεις τροχιάς για κάθε διεύθυνση θα είνα [30]

$$x^2 = \frac{I_1}{2l^2k} + (\frac{I_1^2}{4l^4k^2} - \frac{k_1}{l^2k})^{1/2}\cos(\sqrt{8kl}(t-t_0)), \tag{3.56}$$

$$y^2 = \frac{I_2}{2m^2k} + (\frac{I_2^2}{4m^4k^2} - \frac{k_2}{m^2k})^{1/2}\cos(\sqrt{8km}(t-t_0)+c_1), \tag{3.57}$$

$$z^2 = \frac{I_3}{2n^2k} + (\frac{I_3^2}{4n^4k^2} - \frac{k_3}{n^2k})^{1/2}\cos(\sqrt{8kn}(t-t_0)+c_2), \tag{3.58}$$

όπου t_0 και c_i είναι σταθερές. Οι γραφικές παραστάσεις των τροχιών φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 3.1: (πάνω) Γραφική παράσταση $x - y$ για την περίπτωση του ισοτροπικού ταλαντωτή (κάτω) Γραφική παράσταση για την περίπτωση $m_1 = m_2 = 1, m_3 = 2$ και $k_i = 0$

Τα εναπομείναντα δυο ολοκληρώματα κίνησης είναι οι διαφορές φάσης c_1 και c_2 μεταξύ των τροχιών. Επιπλέον, εάν οι παράμετροι είναι τέτοιοι ώστε $|m - l| < |n - l| < |n - m|$, τότε αυτά τα δυο ολοκληρώματα θα είναι και της χαμηλότερης δυνατής τάξης ως προς τις συζυγείς ορμές. Ορίζουμε αρχικά

$$\xi = \frac{x^2 - \alpha}{A} = \cos(\sqrt{8kl}(t - t_0)), \tag{3.59}$$

$$\eta = \frac{y^2 - \beta}{B} = \cos(\sqrt{8km}(t - t_0) + c_1), \tag{3.60}$$

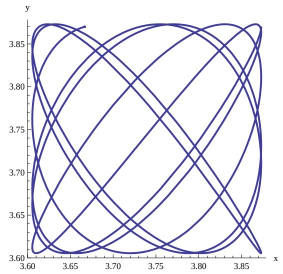
$$\zeta = \frac{z^2 - \gamma}{C} = \cos(\sqrt{8kn}(t - t_0) + c_2), \tag{3.61}$$

όπου $\alpha = I_1/(2l^2k), \beta = I_2/(2m^2k)$ και $\gamma = I_3/(2n^2k)$, ενώ

$$A = (\frac{I_1^2}{4l^4k^2} - \frac{k_1}{l^2k})^{1/2},$$

$$B = (\frac{I_2^2}{4m^4k^2} - \frac{k_2}{m^2k})^{1/2},$$

$$C = (\frac{I_3^2}{4n^4k^2} - \frac{k_3}{n^2k})^{1/2}.$$



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση $x - y$ για την περίπτωση $m_1 = m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $k_i = 0$

Η εύρεση των δυο ολοκληρωμάτων είναι παρόμοια, γι αυτό και θα δείξουμε με λεπτομέρεια μόνο τη μια από αυτές. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$c_1 = \arccos(\eta) - \frac{m}{l}\arccos(\xi). \tag{3.62}$$

Παίρνοντας το συνημίτονο και στις δυο μεριές βρίσκουμε

$$\cos(lc_1) = \cos(\arccos(\eta))\cos(m\arccos(\xi)) + \sin(l\arccos(\eta))\sin(m\arcsin(\xi))$$

$$= T_l(\eta)T_m(\xi) + \frac{\dot{\xi}\dot{\eta}}{8km^2l^2}\acute{T}_l(\eta)\acute{T}_m(\xi),$$

όπου T_l και T_m είναι τα πολυώνυμα Chebyshev του πρώτου είδους και οι παράγωγοί τους ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές η και ξ. Οι χρονικές παράγωγοι των η και ξ ισούνται με

$$\dot{\xi} = \frac{2xp_x}{A}, \qquad \dot{xi} = \frac{2yp_y}{B}. \tag{3.63}$$

Είναι πιο εύχρηστο να γράφουμε το ολοκλήρωμα μας ως εξής

$$I_4 = (2k)^{l+m}A^mB^l\cos(lc_1).$$

Τελείως αντίστοιχα το πέμπτο ολοκλήρωμα είναι της μορφής

$$I_5 = (2k)^{l+v}A^nB^l\cos(lc_2),$$

όπου

$$\cos(lc_2) = T_l(\zeta)T_n(\xi) + \frac{\dot{\xi}\dot{\zeta}}{8kn^2l^2}\acute{T}_l(\zeta)\acute{T}_n(\xi).$$

Τελειώνοντας είναι εύκολο να δούμε ότι τα I_4 και I_5 είναι ολοκληρώματα κίνησης. Αρκεί να υπολογίσουμε την αγκύλη Poisson και να δούμε ότι μηδενίζεται. Επιπλέον είναι συναρτησιακώς ανεξάρτητα, όπως μπορούμε να δούμε από το βαθμό της κατάλληλης Ιακωβιανής ορίζουσας.

Κεφάλαιο 4

Σύνδεση του τρισδιάστατου ανισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή με το πρότυπο **Nilsson** της πυρηνικής φυσικής

Ο ανισοτροπικός ταλαντωτής είναι ενα σύστημα που έχει εφαρμογές σε πολλά προβλήματα της φυσικής. Γι' αυτό το λόγο σε αυτή την παράγραφο θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που εμφανίζεται στην πυρηνική φυσική.

4.1 Εισαγωγή

Διαφορές στις ενέργειες σύνδεσης, γνωστές ως $\delta V_{pn}(Z,N)$, παρουσιάζουν ιδιαιτερότητες στους ελαφρείς άρτιουσ–άρτιους πυρήνες με $N = Z$, λόγω της μεγάλης επικάλυψης των κυματοσυναρτήσεων των πρωτονίων και των νετρονίων του πυρήνα. Πρόσφατες μελέτες [44] έδειξαν ένα παρόμοιο φαινόμενο και σε βαρείς πυρήνες, όταν μόνο τα νουκλεόνια σθένους λαμβάνονται υπόψη. Προκειμένου να λυθεί αυτό το πρόβλημα, προτείνεται [43] η ιδέα ότι αυτό οφείλεται στην ομοιότητα που παρουσιάζεται μεταξύ των διαφόρων αλληλουχιών τροχιακών που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς κλειστούς φλοιούς, αλλά έχουν περίπου τον ίδιο αριθμό πρωτονίων και νετρονίων σθένους. Πιο συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι η ποσότητα $\delta V_{pn}(Z,N)$ μεγιστοποιείται για τα ζευγάρια τροχιακών $(p : 1/2[411], n : 1/2[521])$, $(p : 7/2[523], n : 7/2[633])$ και $(p : 7/2[404], n : 7/2[514])$,όπου χρησιμοποιείται ο συνήθης συμβολισμός $K[Nn_z\Lambda]$. Σημειώνεται επίσης ότι αυτά τα ζευγάρια τροχιακών αντιστοιχούν σε τροχιακά με $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta\Lambda] = 0[110]$.

Χρησιμοποιώντας τον τρισδιάστατο ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή δείχνουμε αρχικά ότι οι κυματοσυναρτήσεις δυο τροχιακών με $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta\Lambda] = 0[110]$ συνδέονται εύκολα μέσω των τελεστών δημιουργίας $a_z^\dagger$ και καταστροφής a_z. Αυτό δείχνει ότι διαφέρουν μόνο κατά τον z-βαθμό ελευθερίας, ενώ είναι πανομοιότυπα κατά τους άλλους δυο, γεγονός που συνεπάγεται μεγάλο βαθμό επικάλυψης μεταξύ τους. Από μαθηματικής σκοπιάς, τα δύο τροχιακά ανήκουν σε γειτονικές μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις (irrep) της άλγεβρας U(3), που συμπίπτει και με την μεγαλύτερη συμμετρία που εμφανίζεται στον $3D$ ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή.

Παρ΄ όλα αυτά, οι βαρείς πυρήνες, όταν περιγράφονται μέσω του προτύπου Nilsson, συνδέονται με παραμορφώσεις, με αποτέλεσμα ο ισοτροπικός αρμονικός ταλαντωτής να μην ειναι κατ΄ αρχήν κατάλληλος για να τους περιγράψει. Όμως, στο όριο των μεγάλων παραμορφώσεων, γνωρίζουμε [45] ότι ο όρος αλληλεπίδρασης σπιν - τροχιάς, καθώς και ο όρος l^2 στο πρότυπο Nilsson, μπορούν να αγνοηθούν, με αποτέλεσμα η Χαμιλτονιανή του προτύπου Nilsson να περιγράφεται πλήρως από την Χαμιλτονιανή του ανισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή.

Σε αυτό το πλαίσιο λοιπόν μπορεί κανείς να μελετήσει εάν η σύνδεση μεταξύ των κυματοσυναρτήσεων δυο τροχιακών, τα οποία ανήκουν στο ίδιο ζευγάρι κβαντικών αριθμών, επιζεί και στην περίπτωση του ανισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή. Θα δείξουμε λοιπόν ότι αυτό ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση του ανισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή, του οποίου οι συχνότητες ικανοποιούν λόγο ακεραίων αριθμών $(l : m : n)$, για τον οποίο η σχετική παραμορφωμένη άλγεβρα U(3), καθώς και οι μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις έχουν κατασκευαστεί [46].

Αποδεικνύεται επίσης ότι δυο τροχιακά που ανήκουν σε γειτονικές μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις της παραμορφωμένης άλγεβρας U(3), συνδέονται μέσω παραμορφωμένων τελεστών δημιουργίας και καταστροφής.

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν επιβεβαίωση της πρόβλεψης για ύπαρξη κυλινδρικής συμμετρίας στο όριο των μεγάλων παραμορφώσεων του προτύπου Nilsson [45].

4.2 Ισοτροπικός ταλαντωτής σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Όπως γνωρίζουμε απο την κβαντική μηχανική, ο τρισδιάστατος ισοτροπικός αρμονικός ταλαντωτής σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ένα πρόβλημα που μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Οι ιδιοσυνταρτήσεις του προβλήματος θα είναι της μορφής

$$\Psi_{n_z,n_\rho,\mu}(z,\rho,\phi) = N_c e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 z^2} H_{n_z}(\kappa z) e^{-\frac{1}{2}k^2\rho^2} \rho^{|\mu|} L_{n_\rho}^{|\mu|}(\kappa\rho^2) e^{i\mu\phi}, \tag{4.1}$$

όπου n_z είναι ο κβαντικός αριθμός που αντιστοιχεί στην z-διεύθυνση, H_{n_z} ειναι τα πολυώνυμα Hermite, μ ειναι ο κβαντικός αριθμός που αντιστοιχεί στη γωνία φ, n_r είναι ο κβαντικός αριθμός που αντιστοιχεί στην ακτινική διεύθυνση, $L_{n_\rho}^{|\mu|}$ είναι τα πολυώνυμα Laguerre που περιέχουν την εξάρτησης απο την ακτίνα, ενώ $k = \frac{m\omega}{\hbar}$ είναι μια σταθερά και N_c είναι η σταθερά κανονικοποίησης.

Παρατηρώντας την κυματοσυνάρτηση του ισοτροπικού ταλαντωτή (4.1), βλέπουμε ότι χωρίζεται σε ένα κομμάτι που περιέχει μόνο την εξάρτηση από το z και τον αντίστοιχο κβαντικό αριθμό n_z, και σε άλλα δυο κομμάτια που περιέχουν την εξάρτηση από τις συντεταγμένες ρ και φ, καθώς και τους αντίστοιχους κβαντικούς αριθμούς (n_r, n_f) αντίστοιχα.

Ο κύριος κβαντικός αριθμός σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες είναι [48]

$$N = n_x + n_y + n_z = n_z + 2n_\rho + |\mu| = 2n + l, \tag{4.2}$$

ενώ για την ενέργεια έχουμε ότι

$$E = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right). \tag{4.3}$$

Εδώ λοιπόν θα κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση, στην οποία στηρίζεται κατά ένα μεγάλο μέρος και το υπόλοιπο κομμάτι της εργασίας. Η κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[521] (με κβαντικούς αριθμούς $N = 5$, $n_z = 2$) μπορεί να προκύψει από την κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[411] (με κβαντικούς αριθμούς $N = 4$, $n_z = 1$), δρώντας στην τελευταία με τον τελεστή δημιουργίας $a_3^\dagger$, που είναι ο τελεστής δημιουργίας στην κατεύθυνση z. Επιπλέον είναι ξεκάθαρο ότι το ακτινικό και το γωνιακό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης δεν επηρεάζονται από τη δράση αυτού του τελεστή, με αποτέλεσμα τα δυο αυτά τροχιακά να έχουν παραπλήσιες ιδιότητες.

4.3 Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσομε τον συμβολισμό $|n_1 n_2 n_3\rangle$ (αντί για $|n_x n_y n_z\rangle$) για τα διανύσματα στην καρτεσιανή βάση.

Ο τελεστής της στροφορμής μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$L_k = i\epsilon_{ijk}\left(a_i a_j^\dagger - a_i^\dagger a_j\right), \tag{4.4}$$

συναρτήση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής:

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_k - ip_k\right), \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_k + ip_k\right), \tag{4.5}$$

ικανοποιώντας τη σχέση μετάθεσης:

$$[a_k, a_k^\dagger] = 1. \tag{4.6}$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$L_1 = i\left(a_2 a_3^\dagger - a_2^\dagger a_3\right), \qquad L_2 = i\left(a_3 a_1^\dagger - a_3^\dagger a_1\right), \qquad L_3 = i\left(a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2\right). \tag{4.7}$$

Ας περιοριστούμε στην περίπτωση με $n_1 + n_2 = 3$, που είναι και οι καταστάσεις που αναφέραμε προηγουμένως. Είναι ξεκάθαρω πως αυτές είναι γραμμική συνδιασμοί των καταστάσεων $|30n_3\rangle$, $|21n_3\rangle$, $|12n_3\rangle$, και $|03n_3\rangle$. Εάν επιπλέον απιτήσουμε αυτοί οι γραμμική συνδιασμοί να είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή L_3 με ιδιοτιμή 1 (ισοδύναμη με $\Lambda = 1$) βρίσκουμε την κατάσταση $|n_1 + n_2, \Lambda\rangle$

$$|3,1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-i\sqrt{3}|30n_3\rangle + |21n_3\rangle - i|12n_3\rangle + \sqrt{3}|03n_3\rangle\right). \tag{4.8}$$

Αυτός ο γραμμικός συνδιασμός είναι ανεξάρτητος του κβαντικού αριθμού n_3. Σαν συνέπεια, τροχιακά όπως τα 1/2[411] και 1/2[521] περιέχουν τους ίδιους γραμμικούς συνδιασμούς καταστασεων της καρτεσιανλης βάσης. Είναι ξεκάθαρο ότι το τροχιακό 1/2[521] (με $n_3 = 2$) μπορεί να προκύψει από το τροχιακό 1/2[411] (με $n_3 = 1$) δρώντας στο τελευταίο με τον τελεστή $a_3^\dagger$.

Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ακόμα ότι ο γραμμικός συνδιασμός που δίνει τις καταστάσεις με $n_1 + n_2 = 3$ και $\Lambda = -1, +3, -3$.

$$\begin{aligned}
|3,-1\rangle &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(i\sqrt{3}|30n_3\rangle + |21n_3\rangle + i|12n_3\rangle + \sqrt{3}|03n_3\rangle\right), \\
|3,3\rangle &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(i\sqrt{3}|30n_3\rangle - \sqrt{3}|21n_3\rangle - i\sqrt{3}|12n_3\rangle + |03n_3\rangle\right), \\
|3,-3\rangle &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(-i\sqrt{3}|30n_3\rangle - \sqrt{3}|21n_3\rangle + i\sqrt{3}|12n_3\rangle + |03n_3\rangle\right),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Η κατάσταση $|3,3\rangle$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη των τροχιακών 7/2[523] και 7/2[633], έχοντας $n_1 + n_2 = 3$ και $\Lambda = 3$. Το τροχιακό 7/2[633] (με $n_3 = 3$) μπορεί να προκύψει από το τροχιακό 7/2[523] (με $n_3 = 2$) δρώντας στο τελευταίο με τον τελεστή $a_3^\dagger$.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για την περίπτωση $n_1 + n_2 = 4$ βρίσκουμε $|n_1 + n_2, \Lambda\rangle$ στατες

$$\begin{aligned}
|4,4\rangle &= \tfrac{1}{4}\left(-i|40n_3\rangle + 2|31n_3\rangle + i\sqrt{6}|22n_3\rangle - 2|13n_3\rangle - i|04n_3\rangle\right), \\
|4,-4\rangle &= \tfrac{1}{4}\left(i|40n_3\rangle + 2|31n_3\rangle - i\sqrt{6}|22n_3\rangle - 2|13n_3\rangle + i|04n_3\rangle\right), \\
|4,2\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(-i|40n_3\rangle + |31n_3\rangle + |13n_3\rangle + i|04n_3\rangle\right), \\
|4,-2\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(i|40n_3\rangle + |31n_3\rangle + |13n_3\rangle - i|04n_3\rangle\right), \\
|4,0\rangle &= \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}|40n_3\rangle + 2|22n_3\rangle + \sqrt{6}|04n_3\rangle\right),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Η κατάσταση $|4,4\rangle$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τα τροχιακά 7/2[404] και 7/2[514], έχοντας $n_1+n_2 = 4$ και $\Lambda = 4$. Το τροχιακό 7/2[514] (με $n_3 = 1$) μπορεί να προκύψει από το τροχιακό 7/2[404] (με $n_3 = 0$) δρώντας με τον τελεστή $a_3^\dagger$ επάνω στο τελευταίο.

Η ερώτηση που προκύπτει σε αυτή τη φάση είναι εάν αυτή η ιδιότητα διατηρείται όταν πηγαίνουμε από τον ισοτροπικό στον ανισοτροπικό ταλαντωτή. Θα δείξουμε ότι αυτή η ιδιότητα διατηρείται στη ειδική περίπτωση του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων λόγο ακεραίων αριθμών.

4.4 Στροφορμές στην περίπτωση του αναρμονικού ταλαντωτή

Έχοντας ορίσει στο κεφάλαιο 2 την Χαμιλτονιανή του αναρμονικού ταλαντωτή (εξίσωση (3.40» και τη διαγώνια μορφή της (εξίσωση (2.5», μπορούμε να μελετήσουμε με περισσότερες λεπτομέριες τις περιπτώσεις 1 : 1 : 2, 1 : 1 : 3 και 2 : 2 : 1, για τις οποίες οι αντίστοιχες άλγεβρες έχουν κατασκευαστεί στην [46]. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αυτές οι άλγεβρες δεν είναι οι συνηθισμένες άλγεβρες Lie, αφού οι μεταθέτες των γεννητόρων τους ισούνται με τους γεννήτορες σε τάξη μεγαλύτερη του 1. Οι αναπαραστάσεις αυτών των αλγεβρών μπορούν να κατασκευαστούν κανονικά.

Ξεκινάμε λοιπόν ορίζοντας τους τελεστές της γενικευμένης στροφορμής

$$L_k = i\epsilon_{ijk}((a_i)^{m_j}(a_j\dagger)^{m_j} - (a_i\dagger)^{m_i}(a_j)^{m_j}), \tag{4.11}$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}(F(m_k, U_k + 1) - F(m_k, U_k))L_k, \tag{4.12}$$

όπου η συνάρτηση $F(m,x)$ ορίζεται μέσω της σχέσης (3.11). Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, στο όριο του ισοτροπικού ταλαντωτή δηλαδή, προκύπτει $F(1,x) = x - 1/2$ οπότε ο μεταθέτης των στροφορμών παίρνει την συνηθισμένη του μορφή. Επιπλέον, όταν $m_1 = m_2 = 1$, ο τελεστής L_3 αντιστοιχεί στον συνηθισμένο τελεστή της z συνιστώσας της στροφορμής. Η εξίσωση ιδιοτιμών για τον τελεστή L_3 είναι της μορφής

$$L_3 \left| \begin{array}{c} \Sigma, \\ j, \mu \\ [q] \end{array} \right\rangle = \mu \left| \begin{array}{c} \Sigma, \\ j, \mu \\ [q] \end{array} \right\rangle, \tag{4.13}$$

όπου τα σύμβολα που εμφανίζονται έχουν την ακόλουθη σημασία:

α) $\Sigma = \sum\limits_{\ell=1}^{3} [r_\ell / m_\ell]$, όπου r_1, r_2, r_3 εκφράζουν τις συνιστώσες ενός διανύσματος στη συνηθισμένη καρτεσιανή βάση, ενώ με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του αριθμού x,

β) $j = \frac{n_1+n_2}{2}$, με $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, όπου $n_k = [r_k/m_k]$, με $[x]$ να αντιστοιχεί πάλι στο ακέραιο μέρος του αριθμού x,

ς) μ ειναι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στον τελεστή L_3,

δ) $[q] = (q_1, q_2, q_3)$, με $q_\ell = \bmod\ (r_\ell, m_\ell) + 1$, όπου $\bmod\ (r_\ell, m_\ell)$ ειναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του r_ℓ με το m_ℓ.

Αυτή η βάση συνδέεται με μια ενδιάμεση βάση μέσω της σχέσης

$$\left| \begin{array}{c} \Sigma, \\ j, \mu \\ [q] \end{array} \right\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \frac{c[j,m,\mu]}{\sqrt{[j+m]_1! [j-m]_2!}} \left| \begin{array}{c} \Sigma, j+m, j-m \\ [q] \end{array} \right\rangle, \tag{4.14}$$

όπου

$$[0]_k! = 1, \quad [n]_k! = [n]_k [n-1]_k!, \quad [n]_k = F\left(m_k, n + \frac{2q_k - 1}{2m_k}\right), \tag{4.15}$$

και οι συντελεστές $c[j,m,\mu]$ στην εξίσωση(4.14) ικανοποιούν την επαναληπτική σχέση

$$\mu c[j,m,\mu] = i\left([j-m]_2 c[j,m+1,\mu] - [j+m]_1 c[j,m-1,\mu]\right). \tag{4.16}$$

Η ενδιάμεση βάση συνδέεται με την καρτεσιανή βάση μεσω της σχέσης

$$|[r]\rangle = \left| \begin{array}{c} \Sigma, [n] \\ [q] \end{array} \right\rangle, \tag{4.17}$$

όπου

α) $[r] = (r_1, r_2, r_3)$ είναι ενα διάνυσμα στη συνήθη καρτεσιανή βάση,

β) $[n] = (n_1, n_2)$,

ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα έχουν την έννοια που ορίστηκε προηγουμένως.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η δράση της Χαμιλτονιανής στην ενδιάμεση βάση δίνεται από τη σχέση

$$H \left| \begin{array}{c} \Sigma, [n] \\ [q] \end{array} \right\rangle = \left(\Sigma + \sum_{k=1}^{3} \frac{2q_k - 1}{2m_k}\right) \left| \begin{array}{c} \Sigma, [n] \\ [q] \end{array} \right\rangle, \tag{4.18}$$

παρατηρώντας ότι οι ιδιοτιμές της ενέργειας συνδέονται με τις μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις

$$E = \Sigma + \sum_{k=1}^{3} \frac{2q_k - 1}{2m_k}. \tag{4.19}$$

Από εδώ και πέρα θα περιοριστούμε στην ειδική περίπτωση όπου $m_1 = m_2$, μελετώντας έτσι την περίπτωση των αξονικά συμμετρικών ταλαντωτών, μιας και σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (4.16) έχει απλές λύσεις. Επιπλέον για την περίπτωση όπου $m_1 = m_2$, οι πιθανές τιμές του κβαντικούς αριθμού μ προκύπτουν να είναι $\mu = -2j, -2(j-1), \ldots, 2(j-1), 2j$.

Στην πυρηνική φυσική οι κβαντικοί αριθμοί $n_\perp = n_1 + n_2$ και $\Lambda = \pm n_\perp$, $\pm(n_\perp - 2)$, $\ldots$, ± 1 ή 0 χρησιμοποιούνται ευρέως. Από τους σχετικούς ορισμούς βλέπουμε ότι $j = n_\perp/2$ και $\mu = \Lambda$. Συνεπώς, στην περίπτωση $m_1 = m_2$, που περιλαμβάνει τους αξονικά επιμηκυμένους πυρήνες με $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 1 : m$, και επιπλέον τους αξονικά πεπλατυσμένους πυρήνες με $m_1 : m_2 : m_3 = m : m : 1$, η σύνδεση μεταξύ της συγκεκριμένης βάσης και του προτύπου Nilsson είναι πρόδηλη.

Κλείνοντας αυτή την ενότητα θα πρέπει να τονίσουμε πως στην περίπτωση των αξονικά παραμορφωμένων πυρήνων ($m_1 = m_2 = 1$) αποδεικνύεται ότι το μέτρο του τετραγώνου της στροφορμής

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + (F(m_3, U_3 + 1) - F(m_3, U_3))L_3^2 \tag{4.20}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$[L^2, L_i] = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4.21}$$

4.5 Ανισοτροπικός ταλαντωτής με λόγο συχνοτήτων 1:1:1

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν στις προηγούμενες ενότητες προκειμένου να εξοικειωθούμε με το νέο φορμαλισμό.

Στην περίπτωση $1 : 1 : 1$ λοιπόν, οι μόνες επιτρεπτές τιμές των παραμέτρων $(q_1 q_2 q_3)$ είναι (111). Η χαμηλότερη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 0$, $(q_1 q_2 q_3) = (111)$, έχει διάσταση 1 και περιέχει την κατάσταση $|000>$. Η δεύτερη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση έχει $\Sigma = 1$, $(q_1 q_2 q_3) = (111)$, $d = 3$ και περιέχει τις καταστάσεις $|100>$, $|010>$, και $|001>$. Η τρίτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση έχει $\Sigma = 2$, $(q_1 q_2 q_3) = (111)$, $d = 6$, και περιέχει τις καταστάσεις $|200>$, $|020>$, $|002>$, $|110>$, $|101>$, και $|011>$. Η τέταρτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 3$, $(q_1 q_2 q_3) = (111)$, έχει διάσταση $d = 10$ και περιέχει τις καταστάσεις $|300>$, $|030>$, $|003>$, $|210>$, $|201>$, $|120>$, $|021>$, $|102>$, $|012>$, και $|111>$.

Οι πρώτες αυτές καταστάσεις περιγράφονται συνοπτικά και με τους δύο συμβολισμούς παρακάτω

$$|000>=\left|\begin{array}{c}0,00\\111\end{array}\right\rangle,\quad |100>=\left|\begin{array}{c}1,10\\111\end{array}\right\rangle,\quad |010>=\left|\begin{array}{c}1,01\\111\end{array}\right\rangle,\quad |001>=\left|\begin{array}{c}1,00\\111\end{array}\right\rangle, \tag{4.22}$$

$$|200>=\left|\begin{array}{c}2,20\\111\end{array}\right\rangle,\quad |020>=\left|\begin{array}{c}2,02\\111\end{array}\right\rangle,\quad |002>=\left|\begin{array}{c}2,00\\111\end{array}\right\rangle, \tag{4.23}$$

$$|110>=\left|\begin{array}{c}2,11\\111\end{array}\right\rangle,\quad |101>=\left|\begin{array}{c}2,10\\111\end{array}\right\rangle,\quad |011>=\left|\begin{array}{c}2,01\\111\end{array}\right\rangle. \tag{4.24}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τις ακόλουθες καταστάσεις, οι οποίες θα μας χρειαστούν στη συνέχεια

$$|301\rangle=\left|\begin{array}{c}4,30\\111\end{array}\right\rangle,\quad |211\rangle=\left|\begin{array}{c}4,21\\111\end{array}\right\rangle,\quad |121\rangle=\left|\begin{array}{c}4,12\\111\end{array}\right\rangle,\quad |031\rangle=\left|\begin{array}{c}4,03\\111\end{array}\right\rangle, \tag{4.25}$$

$$|302\rangle=\left|\begin{array}{c}5,30\\111\end{array}\right\rangle,\quad |212\rangle=\left|\begin{array}{c}5,21\\111\end{array}\right\rangle,\quad |122\rangle=\left|\begin{array}{c}5,12\\111\end{array}\right\rangle,\quad |032\rangle=\left|\begin{array}{c}5,03\\111\end{array}\right\rangle. \tag{4.26}$$

Από τον Πίνακα 4.1 ειναι ξεκάθαρο ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1 + n_2 = 3$ και $n_3 = 1$, που σχετίζονται με το Nilsson τροχιακό 1/2[411], έχουν ενέργεια 11/2, η οποία από τον πίνακα 4.2 φαίνεται να αντιστοιχεί στην κατάσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (111)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14), η σχετική ιδιοκατάσταση γράφεται ως εξής

$$\left|\begin{array}{c}4,\\3/2,1\\(111)\end{array}\right\rangle = c_1\left|\begin{array}{c}4,30\\111\end{array}\right\rangle + c_2\left|\begin{array}{c}4,21\\111\end{array}\right\rangle + c_3\left|\begin{array}{c}4,12\\111\end{array}\right\rangle + c_4\left|\begin{array}{c}4,03\\111\end{array}\right\rangle, \tag{4.27}$$

όπου οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4, οι οποίοι με τη σειρά τους μπορούν να υπολογιστούν μέσω της εξίσωσης (4.14), εξαρτώνται μόνο από τα j και μ, και όχι απο το Σ ή το $[q]$.

Για μια ακόμα φορά από τον Πίνακα 4.1 βλέπουμε ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1 + n_2 = 3$ και $n_3 = 2$, που συνδέονται με το Nilssonτροχιακό 1/2[521], αντιστοιχούν σε ιδιοτιμή ενέργειας ίση με 13/2, η οποία από τον Πίνακα 4.2 αντιστοιχεί στις τιμές $\Sigma = 5$, $[q] = (111)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14), η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\left|\begin{array}{c}5,\\3/2,1\\(111)\end{array}\right\rangle = c_1\left|\begin{array}{c}5,30\\111\end{array}\right\rangle + c_2\left|\begin{array}{c}5,21\\111\end{array}\right\rangle + c_3\left|\begin{array}{c}5,12\\111\end{array}\right\rangle + c_4\left|\begin{array}{c}5,03\\111\end{array}\right\rangle, \tag{4.28}$$

όπου οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4, είναι ίδιοι με αυτούς που εμφανίζονται στη εξίσωση (4.27), μιας και εξαρτώνται μόνο από το j και το μ, και όχι από το Σ ή το $[q]$.

Μεταφράζοντας τις εξισώσεις (4.27) και (4.28) στην καρτεσιανή βάση, μπορεί κανείς να βρεί ότι

$$\left|\begin{array}{c}4,\\3/2,1\\(111)\end{array}\right\rangle = c_1|301\rangle + c_2|211\rangle + c_3|121\rangle + c_4|031\rangle, \tag{4.29}$$

$$\left| \begin{matrix} 5, \\ 3/2, 1 \\ (111) \end{matrix} \right\rangle = c_1 \left|302\right\rangle + c_2 \left|212\right\rangle + c_3 \left|122\right\rangle + c_4 \left|032\right\rangle , \tag{4.30}$$

όπου οι συντελεστές c_i είναι οι ίδιοι όπως προηγουμένως.

Η εξίσωση (4.29) αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[411], ενώ η εξίσωση (4.30) αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[521]. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η δεύτερη μπορεί να προκύψει από την πρώτη δρώντας με τον τελεστή δημιουργίας $a_3^\dagger$.

Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για τα τροχιακά 7/2[523] και 7/2[633], όπου έχουμε $n_\perp = 3$ και $\Lambda = 3$, με $n_3 = 2$ για τον πρώτο και $n_3 = 3$ για το δεύτερο. Το τροχιακό 7/2[523] έχει ενέργεια 13/2 και αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\Sigma = 5$, $[q] = (111)$, ενώ το τροχιακό 7/2[633] έχει ενέργεια 15/2 και αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\Sigma = 6$, $[q] = (111)$. Το αντίστοιχο ανάπτυγμα σε ιδιοδιανύσματα της καρτεσιανής βάσης θα είναι της μορφής

$$\left| \begin{matrix} 5, \\ 3/2, 3 \\ (111) \end{matrix} \right\rangle = c'_1 \left|302\right\rangle + c'_2 \left|212\right\rangle + c'_3 \left|122\right\rangle + c'_4 \left|032\right\rangle , \tag{4.31}$$

$$\left| \begin{matrix} 6, \\ 3/2, 3 \\ (111) \end{matrix} \right\rangle = c'_1 \left|303\right\rangle + c'_2 \left|213\right\rangle + c'_3 \left|123\right\rangle + c'_4 \left|033\right\rangle , \tag{4.32}$$

με τους ίδιους συντελεστές και στις δυο περιπτώσεις.

Κλείνοντας, η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για τα τροχιακά 7/2[404] και 7/2[514], τα οποία έχουν $n_\perp = 4$ και $\Lambda = 4$, με $n_3 = 0$ για το πρώτο και $n_3 = 1$ για το δεύτερο. Το τροχιακό 7/2[404] έχει ενέργεια 11/2 και αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (111)$, ενώ το τροχιακό 7/2[514] έχει ενέργεια 13/2 και αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\Sigma = 5$, $[q] = (111)$. Τα αντίστοιχα αναπτύγματα γράφονται ως εξής:

$$\left| \begin{matrix} 4, \\ 2, 4 \\ (111) \end{matrix} \right\rangle = c''_1 \left|400\right\rangle + c''_2 \left|310\right\rangle + c''_3 \left|220\right\rangle + c''_4 \left|130\right\rangle + c''_5 \left|040\right\rangle , \tag{4.33}$$

$$\left| \begin{matrix} 5, \\ 2, 4 \\ (111) \end{matrix} \right\rangle = c''_1 \left|401\right\rangle + c''_2 \left|311\right\rangle + c''_3 \left|221\right\rangle + c''_4 \left|131\right\rangle + c''_5 \left|041\right\rangle , \tag{4.34}$$

όπου και πάλι οι συντελεστές και στις δύο αναπαραστάσεις είναι ίδιοι.

4.6 Ανισοτροπικός ταλαντωτής με λόγο συχνοτήτων 1:1:2

Στην περίπτωση του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων $1:1:2$, οι επιτρεπτές τιμές για τα $(q_1 q_2 q_3)$ ειναι (111) και (112).

Η χαμηλότερη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 0$, $(q_1q_2q_3) = (111)$, έχει διάσταση 1 και περιέχει μόνο την ιδιοκατάσταση $|000>$. Η δεύτερη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση έχει $\Sigma = 0$, $(q_1q_2q_3) = (112)$, $d = 1$ και περιέχει και αυτή μόνο μία ιδιοκατάσταση, την $|001>$. Η τρίτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση έχει $\Sigma = 1$, $(q_1q_2q_3) = (111)$, $d = 3$ και περιέχει τις ιδιοκαταστάσεις $|100>$, $|010>$, $|002>$. Η τέταρτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση έχει $\Sigma = 1$, $(q_1q_2q_3) = (112)$, διάσταση $d = 3$ και περιέχει τις ιδιοκαταστάσεις $|101>$, $|011>$, $|003>$.

Οι προηγούμενες ιδιοκαταστάσεις γράφονται με τους δυο συμβολισμούς

$$|000>= \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \qquad |001>= \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \tag{4.35}$$

$$|100>= \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \qquad |010>= \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \qquad |002>= \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \tag{4.36}$$

$$|101>= \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \qquad |011>= \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \qquad |003>= \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 112 \end{array} \right\rangle. \tag{4.37}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και τις υπόλοιπες ιδιοκαταστάσεις.

$$|301\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,30 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \quad |211\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,21 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \quad |121\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,12 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \quad |031\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,03 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \tag{4.38}$$

$$|302\rangle = \left| \begin{array}{c} 4,30 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \quad |212\rangle = \left| \begin{array}{c} 4,21 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \quad |122\rangle = \left| \begin{array}{c} 4,12 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \quad |032\rangle = \left| \begin{array}{c} 4,03 \\ 111 \end{array} \right\rangle. \tag{4.39}$$

Από τον Πίνακα 4.1 ειναι σαφές ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1+n_2 = 3$ και $n_3 = 1$, που σχετίζονται με το τροχιακό 1/2[411], έχουν αντίστοιχα ενέργεια ίση με 19/4, η οποία από τον Πίνακα 4.2 βλέπουμε ότι αντιστοιχεί στις τιμές $\Sigma = 3$, $[q] = (112)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14), οι σχετικές ιδιοκαταστάσεις μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\left| \begin{array}{c} 3, \\ 3/2, 1 \\ (112) \end{array} \right\rangle = d_1 \left| \begin{array}{c} 3,30 \\ 112 \end{array} \right\rangle + d_2 \left| \begin{array}{c} 3,21 \\ 112 \end{array} \right\rangle + d_3 \left| \begin{array}{c} 3,12 \\ 112 \end{array} \right\rangle + d_4 \left| \begin{array}{c} 3,03 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \tag{4.40}$$

όπου οι συντελεστές d_1, d_2, d_3, d_4 μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση (4.14) και εξαρτώνται μόνο από τους κβαντικούς αριθμούς j και μ και όχι από το Σ ή το $[q]$.

Παρατηρούμε επίσης στον Πίνακα 4.1 ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1 + n_2 = 3$ και $n_3 = 2$, που σχετίζονται με το τροχιακό 1/2[521], αντιστοιχούν σε ιδιοτιμή ενέργειας ίση με 21/4, η οποία από τον Πίνακα 4.2 βλέπουμε ότι αντιστοιχεί στις τιμές$\Sigma = 4$, $[q] = (111)$. Χρησιμοποιώντας και πάλι την εξίσωση (4.14), οι σχετικές ιδιοκαταστάσεις γράφονται ως εξής

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 3/2, 1 \\ (111) \end{array} \right\rangle = d_1 \left| \begin{array}{c} 4,30 \\ 111 \end{array} \right\rangle + d_2 \left| \begin{array}{c} 4,21 \\ 111 \end{array} \right\rangle + d_3 \left| \begin{array}{c} 4,12 \\ 111 \end{array} \right\rangle + d_4 \left| \begin{array}{c} 4,03 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \tag{4.41}$$

όπου οι συντελεστές d_1, d_2, d_3, d_4 είναι οι ίδιοι που εμφανίζονται στην εξίσωση (4.40), αφού εξαρτώνται μόνο από το j και το μ και όχι από το Σ ή το $[q]$.

Μεταφράζοντας τις εξισώσεις (4.40) και (4.41) στην καρτεσιανή βάση μπορούμε να βρούμε

$$\left| \begin{array}{c} 3, \\ 3/2, 1 \\ (112) \end{array} \right\rangle = d_1 \left|301\right\rangle + d_2 \left|211\right\rangle + d_3 \left|121\right\rangle + d_4 \left|031\right\rangle , \tag{4.42}$$

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 3/2, 1 \\ (111) \end{array} \right\rangle = d_1 \left|302\right\rangle + d_2 \left|212\right\rangle + d_3 \left|122\right\rangle + d_4 \left|032\right\rangle , \tag{4.43}$$

όπου οι συντελεστές d_i είναι οι ίδιοι όπως προηγουμένως.

Η εξίσωση (4.42) αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[411], ενώ η εξίσωση (4.43) αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[521]. Και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε από το ένα τροχιακό να πάμε στο άλλο δρώντας με τον τελεστή $a_3^\dagger$. Σε αυτή την περίπτωση όμως, θα πρέπει να είμαστε ιδιαιτέρως προσεκτικοί, διότι οι τελεστές a_3 και $a_3^\dagger$ δεν ικανοποιούν τις συνήθεις μποζονικες σχέσεις μετάθεσης, αλλά την εξίσωση (3.4).

Από την [46] βλέπει κανείς ότι ο τελεστής $a_3^\dagger$ είναι τέτοιος ώστε

$$a_3^\dagger \left| \begin{array}{c} \Sigma, [n] \\ [q] \end{array} \right\rangle = \sqrt{\Sigma - \sum_{k=1}^{2} n_k + \frac{q_3}{m_3}} \left| \begin{array}{c} \Sigma', [n'] \\ [q'] \end{array} \right\rangle , \tag{4.44}$$

όπου

$$\begin{gathered} n'_k = n_k, \qquad q'_k = q_k, \qquad k = 1, 2, \\ \Sigma' = \Sigma + [q_3/m_3] , \\ q'_3 = \mathrm{mod}\ (q_3, m_3) + 1, \end{gathered} \tag{4.45}$$

με τα σύμβολα που εμφανίζονται να έχουν ορισθεί προηγουμένως.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν κανείς αυτή την εξίσωση βλέπει ότι

$$a_3^\dagger \left| \begin{array}{c} 3, 30 \\ 112 \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} 4, 30 \\ 111 \end{array} \right\rangle , \tag{4.46}$$

ή διαφορετικά

$$a_3^\dagger \left|301\right\rangle = \left|302\right\rangle . \tag{4.47}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$a_3^\dagger \left|211\right\rangle = \left|212\right\rangle , \qquad a_3^\dagger \left|121\right\rangle = \left|122\right\rangle , \qquad a_3^\dagger \left|031\right\rangle = \left|032\right\rangle . \tag{4.48}$$

Είναι λοιπόν πλέον ξεκάθαρο ότι η κατάσταση που αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[521] μπορεί να προκύψει από την κατάσταση 1/2[411], δρώντας επάνω στην τελευταία με έναν κατάλληλο τελεστή δημιουργίας. Φυσικά, οι δυο αυτές καταστάσεις μπορούν να συνδεθούν και μέσα από τον αντίστοιχο τελεστή καταστροφής a_3

$$a_3 \left| \begin{array}{c} \Sigma, [n] \\ [q] \end{array} \right\rangle = \sqrt{\Sigma - \sum_{k=1}^{2} n_k + \frac{q_3 - 1}{m_3}} \left| \begin{array}{c} \Sigma', [n'] \\ [q'] \end{array} \right\rangle, \tag{4.49}$$

όπου

$$\begin{gathered} n'_k = n_k, \qquad q'_k = q_k, \qquad k = 1, 2, \\ \Sigma' = \Sigma + [(q_3 - 2)/m_3], \\ q'_3 = \mathrm{mod}\ (q_3 - 2, m_3) + 1, \end{gathered} \tag{4.50}$$

με αποτέλεσμα

$$a_3 \left|302\right\rangle = \left|301\right\rangle, \quad a_3 \left|212\right\rangle = \left|211\right\rangle, \quad a_3 \left|122\right\rangle = \left|121\right\rangle, \quad a_3 \left|032\right\rangle = \left|031\right\rangle. \tag{4.51}$$

Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και για τα τροχιακά 7/2[523] και 7/2[633], τα οποία έχουν $n_\perp = 3$ και $\Lambda = 3$, με $n_3 = 2$ για το πρώτο και 3 για το δεύτερο. Το τροχιακό 7/2[523] έχει ενέργεια 21/4 και αντιστοιχεί στην μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση με τιμές $\Sigma = 4$, $[q] = (111)$, ενώ το τροχιακό 7/2[633] έχει ενέργεια 23/4 και αντιστοιχεί στην μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (112)$. Τα αντίστοιχα αναπτύγματα είναι

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 3/2, 3 \\ (111) \end{array} \right\rangle = d'_1 \left|302\right\rangle + d'_2 \left|212\right\rangle + d'_3 \left|122\right\rangle + d'_4 \left|032\right\rangle, \tag{4.52}$$

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 3/2, 3 \\ (112) \end{array} \right\rangle = d'_1 \left|303\right\rangle + d'_2 \left|213\right\rangle + d'_3 \left|123\right\rangle + d'_4 \left|033\right\rangle, \tag{4.53}$$

με τους συντελεστές που εμφανίζονται στις εξισώσεις να είναι οι ίδιοι.

Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί για τα τροχιακά 7/2[404] και 7/2[514], τα οποία έχουν $n_\perp = 4$ και $\Lambda = 4$, με $n_3 = 0$ για το πρώτο και $n_3 = 1$ για το δεύτερο. Το τροχιακό 7/2[404] έχει ιδιοτιμή ενέργειας 21/4 και αντιστοιχεί στη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (111)$, ενώ το τροχιακό 7/2[514] έχει ιδιοτιμή ενέργειας 23/4 και αντιστοιχεί στη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (112)$. Τα αντίστοιχα αναπτύγματα θα είναι

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 2, 4 \\ (111) \end{array} \right\rangle = d''_1 \left|400\right\rangle + d''_2 \left|310\right\rangle + d''_3 \left|220\right\rangle + d''_4 \left|130\right\rangle + d''_5 \left|040\right\rangle, \tag{4.54}$$

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 2, 4 \\ (112) \end{array} \right\rangle = d''_1 \left|401\right\rangle + d''_2 \left|311\right\rangle + d''_3 \left|221\right\rangle + d''_4 \left|131\right\rangle + d''_5 \left|041\right\rangle, \tag{4.55}$$

με τους συντελεστές που εμφανίζονται να είναι οι ίδιοι και στις δυο εκφράσεις.

4.7 Ανισοτροπικός ταλαντωτής με λόγο συχνοτήτων 1:1:3

Στην περίπτωση του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων $1:1:3$, οι επιτρεπόμενες τιμές για τα $(q_1 q_2 q_3)$ είναι (111), (112), και (113).

Η χαμηλότερη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 0$, $(q_1 q_2 q_3) = (111)$, έχει διάσταση 1 και περιλαμβάνει την ιδιοκατάσταση $|000>$. Η δεύτερη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 0$, $(q_1 q_2 q_3) = (112)$, $d = 1$ και περιλαμβάνει την κατάσταση $|001>$. Η τρίτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 0$, $(q_1 q_2 q_3) = (113)$, $d = 1$ και περιλαμβάνει την ιδιοκατάσταση $|002>$.Η τέταρτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 1$, $(q_1 q_2 q_3) = (111)$, $d = 3$ και περιλαμβάνει τις ιδιοκαταστάσεις $|100>$, $|010>$, $|003>$. Η πέμπτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 1$, $(q_1 q_2 q_3) = (112)$, $d = 3$ και περιλαμβάνει τις ιδιοκαταστάσεις $|101>$, $|011>$, $|004>$. Η έκτη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 1$, $(q_1 q_2 q_3) = (113)$, $d = 3$ και περιλαμβάνει τις ιδιοκαταστάσεις $|102>$, $|012>$, $|005>$.

Στη συνέχεια γράφουμε τις προηγούμενες ιδιοκαταστάσεις και με τους δυο συμβολισμούς

$$|000>= \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \qquad |001>= \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \qquad |002>= \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 113 \end{array} \right\rangle, \tag{4.56}$$

$$|100>= \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \qquad |010>= \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \qquad |003>= \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \tag{4.57}$$

$$|101>= \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \qquad |011>= \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \qquad |004>= \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \tag{4.58}$$

$$|102>= \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 113 \end{array} \right\rangle, \qquad |012>= \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 113 \end{array} \right\rangle, \qquad |005>= \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 113 \end{array} \right\rangle. \tag{4.59}$$

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες ιδιοκαταστάσεις, τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια

$$|301\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,30 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \quad |211\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,21 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \quad |121\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,12 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \quad |031\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,03 \\ 112 \end{array} \right\rangle, \tag{4.60}$$

$$|302\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,30 \\ 113 \end{array} \right\rangle, \quad |212\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,21 \\ 113 \end{array} \right\rangle, \quad |122\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,12 \\ 113 \end{array} \right\rangle, \quad |032\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,03 \\ 113 \end{array} \right\rangle. \tag{4.61}$$

Από τον Πίνακα 4.1 παρατηρούμε αμέσως ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1 + n_2 = 3$ και $n_3 = 1$, που σχετίζονται με το Nilsson τροχιακό 1/2[411], έχουν ενέργεια 27/6, ενώ από τον Πίνακα 4.2 βλεπουμε ότι αντιστοιχούν στην περίπτωση $\Sigma = 3$, $[q] = (112)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14), η σχετική ιδιοκατάσταση γράφεται ως εξής

$$\left| \begin{array}{c} 3, \\ 3/2, 1 \\ (112) \end{array} \right\rangle = e_1 \left| \begin{array}{c} 3,30 \\ 112 \end{array} \right\rangle + e_2 \left| \begin{array}{c} 3,21 \\ 112 \end{array} \right\rangle + e_3 \left| \begin{array}{c} 3,12 \\ 112 \end{array} \right\rangle + e_4 \left| \begin{array}{c} 3,03 \\ 112 \end{array} \right\rangle , \tag{4.62}$$

όπου οι συντελεστές e_1, e_2, e_3, e_4 μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση (4.14). Παρατηρούμε επίσης ότι εξαρτώνται μόνο από τους κβαντικούς αριθμούς j και μ και όχι από τα Σ ή $[q]$.

Πάλι από τον Πίνακα 4.1 μπορούμε να δούμε ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1 + n_2 = 3$ και $n_3 = 2$, που σχετίζονται με το τροχιακό του προτύπου Nilsson 1/2[521], έχουν ιδιοτιμή ενέργειας 29/6, η οποία με τη σειρά της από τον Πίνακα 4.2 βλέπουμε ότι αντιστοιχεί στην περίπτωση $\Sigma = 3$, $[q] = (113)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14), οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\left| \begin{array}{c} 3, \\ 3/2, 1 \\ (111) \end{array} \right\rangle = e_1 \left| \begin{array}{c} 4,30 \\ 111 \end{array} \right\rangle + e_2 \left| \begin{array}{c} 4,21 \\ 111 \end{array} \right\rangle + e_3 \left| \begin{array}{c} 4,12 \\ 111 \end{array} \right\rangle + e_4 \left| \begin{array}{c} 4,03 \\ 111 \end{array} \right\rangle , \tag{4.63}$$

όπου οι συντελεστές e_1, e_2, e_3, e_4, είναι οι ίδιοι με αυτούς που εμφανίζονται στην εξίσωση (4.62), μιας και εξαρτώνται μόνο από τα j και μ και όχι από το Σ ή το $[q]$.

Μεταφράζοντας τις εξισώσεις (4.62) και (4.63) στην καρτεσιανή βάση βρίσκουμε ότι

$$\left| \begin{array}{c} 3, \\ 3/2, 1 \\ (112) \end{array} \right\rangle = e_1 |301\rangle + e_2 |211\rangle + e_3 |121\rangle + e_4 |031\rangle , \tag{4.64}$$

$$\left| \begin{array}{c} 3, \\ 3/2, 1 \\ (113) \end{array} \right\rangle = e_1 |302\rangle + e_2 |212\rangle + e_3 |122\rangle + e_4 |032\rangle , \tag{4.65}$$

όπου οι συντελεστές e_i ειναι οι ίδιοι όπως προηγουμένως.

Η εξίσωση (4.64) αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[411], ενώ η εξίσωση (4.65) αντιστοιχεί στο τροχιακό 1/2[521]. Και εδώ μπορούμε να δούμε ότι μπορούμε, δρώντας με τον κατάλληλο τελεστή δημιουργίας ($a_3^\dagger$), να περάσουμε από το πρώτο τροχιακό στο δεύτερο.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.44) βλέπουμε ότι

$$a_3^\dagger \left| \begin{array}{c} 3,30 \\ 112 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \begin{array}{c} 3,30 \\ 113 \end{array} \right\rangle , \tag{4.66}$$

ή ισοδύναμα

$$a_3^\dagger |301\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |302\rangle . \tag{4.67}$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε

$$a_3^\dagger |211\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |212\rangle , \quad a_3^\dagger |121\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |122\rangle , \quad a_3^\dagger |031\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |032\rangle . \tag{4.68}$$

Είναι λοιπόν ξεκάθαρο ότι το τροχιακό 1/2[521] μπορεί να προκύψει από το τροχιακό 1/2[411], δρώντας με τον κατάλληλο τελεστή δημιουργίας. Επιπλέον, η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί για τα τροχιακά 7/2[523] και 7/2[633], για τα οποία έχουμε $n_\perp = 3$ και $\Lambda = 3$, με $n_3 = 2$ για το πρώτο τροχιακό και $n_3 = 3$ για το δεύτερο. Το τροχιακό 7/2[523] έχει ενέργεια 29/6 και αντιστοιχεί στη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση $\Sigma = 3$, $[q] = (113)$, ενώ το τροχιακό 7/2[633] έχει ενέργεια 31/6 και αντιστοιχεί στη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (111)$. Τα αντίστοιχα αναπτύγματα είναι της μορφής

$$\left| \begin{array}{c} 3, \\ 3/2, 3 \\ (113) \end{array} \right\rangle = e'_1 |302\rangle + e'_2 |212\rangle + e'_3 |122\rangle + e'_4 |032\rangle \,, \tag{4.69}$$

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 3/2, 3 \\ (111) \end{array} \right\rangle = e'_1 |303\rangle + e'_2 |213\rangle + e'_3 |123\rangle + e'_4 |033\rangle \,, \tag{4.70}$$

με τους συντελεστές που εμφανίζονται στα επιμέρους αναπτύγματα να είναι οι ίδιοι.

Τέλος η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για τα τροχιακά 7/2[404] και 7/2[514], που έχουν $n_\perp = 4$ και $\Lambda = 4$, με $n_3 = 0$ για το πρώτο και $n_3 = 1$ για το δεύτερο. Το τροχιακό 7/2[404] έχει ενέργεια 31/6 και αντιστοιχεί στη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (111)$, ενώ το τροχιακό 7/2[514] έχει ενέργεια 33/6 και αντιστοιχεί στη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση $\Sigma = 4$, $[q] = (112)$. Τα επιμέρους αναπτύγματα θα είναι

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 2, 4 \\ (111) \end{array} \right\rangle = e''_1 |400\rangle + e''_2 |310\rangle + e''_3 |220\rangle + e''_4 |130\rangle + e''_5 |040\rangle \,, \tag{4.71}$$

$$\left| \begin{array}{c} 4, \\ 2, 4 \\ (112) \end{array} \right\rangle = e''_1 |401\rangle + e''_2 |311\rangle + e''_3 |221\rangle + e''_4 |131\rangle + e''_5 |041\rangle \,, \tag{4.72}$$

όπου για μια ακόμα φορά οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι οι ίδιοι.

4.8 Ανισοτροπικός ταλαντωτής με λόγο 2:2:1

Στην περίπτωση του ανισοτροπικού ταλαντωτή με λόγο συχνοτήτων $2:2:1$, οι επιτρεπτές τιμές για τα $(q_1 q_2 q_3)$ είναι (111), (211), (121) και (221).

Η κατάσταση με τη χαμηλότερη ενέργεια χαρακτηρίζεται από τις τιμές $\Sigma = 0$,$(q_1 q_2 q_3) = (111)$, έχει διάσταση $d = 1$ και περιέχει την κατάσταση $|000>$. Η επόμενη ενεργειακή στάθμη έχει διάσταση $d = 2$ και περιέχει την χωρίς εκφυλισμό μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση με τιμές των παραμέτρων

$\Sigma = 0$, $(q_1 q_2 q_3) = (211)$, αφορά δηλαδή την κατάσταση $|100>$, καθώς επίσης την χωρίς εκφυλισμό μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση με $\Sigma = 0$, $(q_1 q_2 q_3) = (121)$, την κατάσταση $|010>$ δηλαδή. Η επόμενη ενεργειακή στάθμη έχει διάσταση $d = 4$ και περιλαμβάνει δυο μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις: την μη εκφυλισμένη με $\Sigma = 0$, $(q_1 q_2 q_3) = (221)$ (κατάσταση $|110>$), καθώς επίσης και την τριπλά εκφυλισμένη μη αναγωγήσιμη αναπαράστση με $\Sigma = 1$, $(q_1 q_2 q_3) = (111)$ (στην οποία αντιστοιχούν οι καταστάσεις $|001>$, $|200>$, $|020>$). Η επόμενη ενεργειακή στάθμη έχει διάσταση $d = 6$ και περιλαμβάνει δυο μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις: μια τριπλά εκφυλισμένη με $\Sigma = 1$, $(q_1 q_2 q_3) = (211)$ και καταστάσεις $|101>$, $|300>$, $|120>$, και την τριπλά εκφυλισμένη μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση με $\Sigma = 1$, $(q_1 q_2 q_3) = (121)$ και καταστάσεις $|011>$, $|030>$, $|210>$.

Αυτές οι καταστάσεις γράφονται και με τους δυο συμβολισμούς ως εξής

$$|000> = \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \quad |100> = \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \quad |010> = \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 121 \end{array} \right\rangle, \tag{4.73}$$

$$|110> = \left| \begin{array}{c} 0,00 \\ 221 \end{array} \right\rangle, \quad |001> = \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \quad |200> = \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \quad |020> = \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 111 \end{array} \right\rangle, \tag{4.74}$$

$$|101> = \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \quad |300> = \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \quad |120> = \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \tag{4.75}$$

$$|011> = \left| \begin{array}{c} 1,00 \\ 121 \end{array} \right\rangle, \quad |030> = \left| \begin{array}{c} 1,01 \\ 121 \end{array} \right\rangle, \quad |210> = \left| \begin{array}{c} 1,10 \\ 121 \end{array} \right\rangle. \tag{4.76}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να γράψουμε και τις υπόλοιπες καταστάσεις, τις οποίες και θα χρειαστούμε στη συνέχεια

$$|301\rangle = \left| \begin{array}{c} 2,10 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \quad |211\rangle = \left| \begin{array}{c} 2,10 \\ 121 \end{array} \right\rangle, \quad |121\rangle = \left| \begin{array}{c} 2,01 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \quad |031\rangle = \left| \begin{array}{c} 2,01 \\ 121 \end{array} \right\rangle, \tag{4.77}$$

$$|302\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,10 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \quad |212\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,10 \\ 121 \end{array} \right\rangle, \quad |122\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,01 \\ 211 \end{array} \right\rangle, \quad |032\rangle = \left| \begin{array}{c} 3,01 \\ 121 \end{array} \right\rangle. \tag{4.78}$$

Από τον Πίνακα 4.1 βλέπουμε αμέσως ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1 + n_2 = 3$ και $n_3 = 1$, σχετίζονται με τα τροχιακά 1/2[411], με ιδιοτιμή ενέργειας 7/2, ενώ από τον Πίνακα 4.2 βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση αντισοιχούν οι τιμές $\Sigma = 2$, $[q] = (211)$ και $\Sigma = 2$, $[q] = (121)$. Κατά συνέπεια, η εξίσωση (4.14) δεν μπορεί να εφαρμοστεί πλέον σε αυτή την περίπτωση.

Από το Πίνακα 4.1 και πάλι βλέπουμε ότι οι καταστάσεις με $n_\perp = n_1 + n_2 = 3$ και $n_3 = 2$, συνδέονται με το τροχιακό 1/2[521], με ενέργεια 9/2, το οποίο με τη σειρά του από τον Πίνακα 4.2 βλέπουμε ότι συνδέεται με τις τιμές$\Sigma = 3$, $[q] = (211)$ και $\Sigma = 3$, $[q] = (121)$. Συνεπώς η εξίσωση (4.14) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ούτε σε αυτή την περίπτωση.

4.9 Συμπεράσματα

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο αξίζει να κάνουμε τα παρακάτω σχόλια.

1) Στην ενδιάμεση βάση που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, είναι πολύ εύκολο να ξεχωρίσουμε τις καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση για κάθε $m_1 : m_2 : m_3$ λόγο συχνοτήτων. Είναι εκείνες οι καταστάσεις που έχουν το ίδιο Σ και $[q] = (q_1 q_2 q_3)$, ενώ στην καρτεσιανή βάση κάτι τέτοιο ισχύει μόνο για την ισοτροπική περίπτωση $1 : 1 : 1$ (είναι εκείνες οι καταστάσεις με ίδια $n_1 + n_2 + n_3$).

2) Στην περίπτωση $1 : 1 : 2$ είδαμε ότι οι μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις έχουν εκφυλισμό 1, 1, 3, 3, 6, 6, 10, 10, ..., γεγονός που μπορεί να ερμηνευθεί ως "δυο αντίτυπα" των εκφυλισμών της U(3) αλγεβρας.

3) Εύκολα μπορεί να δεί κανείς ότι η γενική περίπτωση $1 : 1 : n$ αντιστοιχεί σε n "άντίγραφα" των εκφυλισμών της άλγεβρας U(3). Για παράδειγμα, στην περίπτωση $1 : 1 : 3$, οι εκφυλισμοί είναι 1, 1, 1, 3, 3, 3, 6, 6, 6, ...

4) Στην περίπτωση $2 : 2 : 1$, τα διάφορα ενεργειακά επίπεδα δεν αντιστοιχούν σε μεμονωμένες μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις το καθένα, αλλά μερικά από αυτά αντιστοιχούν σε αθροίσματα μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων, πράγμα που σημαίνει ότι αντιστοιχούν σε αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις της παραμορφωμένης άλγεβρας U(3). Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση m:m:1. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση $2 : 2 : 1$, οι εκφυλισμοί είναι 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, ..., οι οποίοι αντιστοιχούν στις διαστάσεις των μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων της άλγεβρας 'τεξτλατινO(4) [49].

5) Μπορεί ακόμα να βρεθεί εύκολα ότι η συνθήκη που απαιτείται ώστε κάθε μια ιδιοτιμή της ενέργειας να αντιστοιχεί σε μια μη αναγωγήσιμη αναπαράσταση της παραμορφωμένης άλγεβρας είναι οι αριθμοί m_1, m_2, m_3 να είναι όλοι αμοιβαία πρώτοι αριθμοί. Εάν δύο από αυτούς έχουν ίδιο κοινό διαιρέτη εκτός από το 1, τότε μερικές ιδιοτιμές ενέργειας μπορούν να αντιστοιχούν σε αθροίσματα μη αναγωγήσιμων αναπαραστάσεων, δηλαδή αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις.

6) Περιπτώσεις όπου εμφανίζονται αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις, μπορούν να προσομοιωθούν από περιπτώσεις όπου μόνο μη αναγωγήσιμες αναπαραστάσεις εμφανίζονται. Για παράδειγμα, η περίπτωση $2 : 2 : 1$ μπορεί να προσεγγιστεί από την περίπτωση με λόγο $21 : 19 : 10$ ή $201 : 199 : 100$.

Στο πρότυπο Nilsson η Χαμιλονιανή (με μάζα $m = 1$, προκειμένου να αντιστοιχεί στη εξίσωση (3.40)) γράφεται

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left(p_k^2 + \omega_k^2 x_k^2 \right). \tag{4.79}$$

Επομένως έχουμε $\omega_k = 1/m_k$.

Σε αυτό το πλαίσιο χρησιμοποιείται συνήθως η παράμετρος παραμόρφωσης $\delta = 0.946\beta$ [45]. Στην περίπτωση αξονικής συμμετρίας οι λόγοι συχνοτήτων γράφονται ως εξής

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right), \qquad \omega_3^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right), \tag{4.80}$$

δεδομένου ότι

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_3^2} = \frac{m_3^2}{m_1^2} = \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)}{\left(1 - \frac{4}{3}\delta\right)}. \tag{4.81}$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η περίπτωση 1:1:2 αντιστοιχεί σε $\delta = 0.5$ ($\beta = 0.529$), η περίπτωση 1:1:3 αντιστοιχεί σε $\delta = 0.632$ ($\beta = 0.668$) και η περίπτωση 2:2:1 αντιστοιχεί σε $\delta = -0.75$ ($\beta = -0.793$). Αυτές οι παραμορφώσεις είναι πολύ μεγάλες, αλλά μικρότερες παραμορφώσεις μπορούν να επιτευχθούν στην περίπτωση 10:10:11, η οποία δίνει $\delta = 0.092$ ($\beta = 0.097$), ή στην περίπτωση 10:10:13, όπου $\delta = 0.236$ ($\beta = 0.250$).

Πίνακας 4.1: Ιδιοκαταστάσεις (r_1, r_2, r_3) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες για τους $m_1 : m_2 : m_3$ ταλαντωτές με ενέργεια E και βαθμό εκφυλισμού d.

1:1:1			1:1:2			1:1:3			1:1:4			2:2:1		
$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d
000	3/2	1	000	5/4	1	000	7/6	1	000	9/8	1	000	1	1
100	5/2	3	001	7/4	1	001	9/6	1	001	11/8	1	100	3/2	2
010												010		
001			100	9/4	3	002	11/6	1	002	13/8	1			
			010									200	2	4
200	7/2	6	002			100	13/6	3	003	15/8	1	020		
020						010						110		
002			101	11/4	3	003			100	17/8	3	001		
110			011						010					
101			003			101	15/6	3	004			300	5/2	6
011						011						030		
			202	13/4	6	004			101	19/8	3	210		
300	9/2	10	020						011			120		
030			110			102	17/6	3	005			101		
003			102			012						011		
210			012			005			102	21/8	3			
120			004						012			400	3	9
201						200	19/6	6	006			040		
102			201	15/4	6	020						310		
021			021			110			103	23/8	3	130		
012			111			103			013			220		
111			103			013			007			201		
			013			006						021		
400	11/2	15	005						200	25/8	6	111		
040						201	21/6	6	020			002		
004			300	17/4	10	021			110					
310			030			111			104			500	7/2	12
301			210			104			014			050		
130			120			014			008			410		
031			202			007						140		
103			022						201	27/8	6	320		
013			112			202	23/6	6	021			230		
220			104			022			111			301		
202			014			112			105			031		
022			006			105			015			211		
211						015			009			121		
121			301	19/4	10	008						102		
112			031						202	29/8	6	012		

Πίνακας 4.1: (συνέχεια)

1:1:1			1:1:2			1:1:3			1:1:4			2:2:1		
$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d	$r_1r_2r_3$	E	d
			211			300	25/6	10	022					
500	13/2	21	121			030			112			600	4	16
050			203			210			106			060		
005			023			120			016			510		
410			113			203			0010			150		
401			105			023						420		
140			015			113			203	31/8	6	240		
041			007			106			023			330		
104						016			113			401		
014			400	21/4	15	009			107			041		
320			040						017			311		
302			310			301	27/6	10	0011			131		
230			130			031						221		
032			220			211			300	33/8	10	202		
203			302			121			030			022		
023			032			204			210			112		
311			212			024			120			003		
131			122			114			204					
113			204			107			024			700	9/2	20
221			024			017			114			070		
212			114			0010			108			610		
122			106						018			160		
			016			302	29/6	10	0012			520		
			008			032						250		
						212			301	35/8	10	430		
			401	23/4	15	122			031			340		
			041			205			211			501		
			311			025			121			051		
			131			115			205			411		
			221			108			025			141		
			303			018			115			321		
			033			0011			109			231		
			213						019			302		
			123						0013			032		
			205									212		
			025						302	37/8	10	122		
			115						032			103		
			107						212			013		
			017						122					
			009						206					
									026					
									116					
									1010					
									0110					
									0014					

Πίνακας 4.2: Ιδιοκαταστάσεις των $m_1 : m_2 : m_3$ ταλαντωτών στην παραμορφωμένη βάση. Οι ιδιοκαταστάσεις περιγράφονται από τους κβαντικούς αριθμούς Σ και (q_1, q_2, q_3) [οι οποίοι ορίζονται κάτω από την εξ. (4.13)], με την ενέργειά τους E να δίνεται από την εξ. (4.19) και τον βαθμό εκφυλισμού από τη σχέση $d = (\Sigma+1)(\Sigma+2)/2$.

1:1:1				1:1:2				1:1:3				1:1:4				2:2:1			
Σ	$[q]$	E	d	Σ	$[q]$	E	d	Σ	$[q]$	E	d	Σ	$[q]$	E	d	Σ	$[q]$	E	d
0	111	3/2	1	0	111	5/4	1	0	111	7/6	1	0	111	9/8	1	0	111	1	1
				0	112	7/4	1	0	112	9/6	1	0	112	11/8	1	0	211	3/2	1
								0	113	11/6	1	0	113	13/8	1	0	121	3/2	1
												0	114	15/8	1	0	221	2	1
1	111	5/2	3	1	111	9/4	3	1	111	13/6	3	1	111	17/8	3	1	111	2	3
				1	112	11/4	3	1	112	15/6	3	1	112	19/8	3	1	211	5/2	3
								1	113	17/6	3	1	113	21/8	3	1	121	5/2	3
												1	114	23/8	3	1	221	3	3
2	111	7/2	6	2	111	13/4	6	2	111	19/6	6	2	111	25/8	6	2	111	3	6
				2	112	15/4	6	2	112	21/6	6	2	112	27/8	6	2	211	7/2	6
								2	113	23/6	6	2	113	29/8	6	2	121	7/2	6
												2	114	31/8	6	2	221	4	6
3	111	9/2	10	3	111	17/4	10	3	111	25/6	10	3	111	33/8	10	3	111	4	10
				3	112	19/4	10	3	112	27/6	10	3	112	35/8	10	3	211	9/2	10
								3	113	29/6	10	3	113	37/8	10	3	121	9/2	10
												3	114	39/8	10	3	221	5	10
4	111	11/2	15	4	111	21/4	15	4	111	31/6	15	4	111	41/8	15	4	111	5	15
				4	112	23/4	15	4	112	33/6	15	4	112	43/8	15	4	211	11/2	15
								4	113	35/6	15	4	113	45/8	15	4	121	11/2	15
												4	114	47/8	15	4	221	6	15
5	111	13/2	21	5	111	25/4	21	5	111	37/6	21	5	111	49/8	21	5	111	6	21
				5	112	27/4	21	5	112	39/6	21	5	112	51/8	21	5	211	13/2	21
								5	113	41/6	21	5	113	53/8	21	5	121	13/2	21
												5	114	55/8	21	5	221	7	21

Κεφάλαιο 5

Ανασκόπηση των πρόσφατων μελετών στα υπερολοκληρώσιμα συστήματα

Η μελέτη των υπερολοκληρώσιμων κλασικών συστημάτων που βρίσκονται επάνω σε μια δισδιάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι ένα πολύ παλιό πρόβλημα. Αρχικά το πρόβλημα τέθηκε γεωμετρικά, κατά την διάρκεια του 19ου αιώνα. Σκοπός ήταν να βρεθούν δισδιάστατες πολλαπλότητες, των οποίων οι γεωδαισιακές καμπύλες είχαν επιπλέον ολοκληρώματα κίνησης εκτός από την ελεύθερη Χαμιλτονιανή. [1].

Τα απλούστερα ολοκληρώσιμα και υπερολοκληρώσιμα συστήματα είναι εκείνα τα συστήματα που ορίζονται επάνω σε ένα πραγματικό επίπεδο. Μια πλήρη επισκόπηση όλων των ολοκληρώσιμων κλασικών συστημάτων που ορίζονται σε ένα δισδιάστατο πραγματικό επίπεδο μπορεί να βρεί κανείς στις εργασίες [4, 5, 6, 7]. Μιγαδικά υπερολοκληρώσιμα κλασικά συστήματα σε επίπεδο χώρο έχουν επίσης κατηγοριοποιηθεί από τους Kalnins Miller, Pogosyan και άλλους στις εργασίες [8, 9, 10, 11]. Θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι τα συστήματα αυτά είναι ορισμένα σε χώρους με μηδενική καμπυλότητα. Μελέτες ολοκληρώσιμων και υπερολοκληρώσιμων συστημάτων δυο διαστάσεων σε χώρους με σταθερή καμπυλότητα, όπως επάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας, έκαναν πρώτοι οι Higgs και Leemon στις [14, 15]. Μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση είναι η μελέτη συστημάτων σε υπερβολοειδείς χώρους, όπως για παράδειγμα οι εργασίες των Ranãda και Santader [12, 13]

Από την άλλη μεριά, η μελέτη των υπερολοκληρώσιμων κλασικών συστημάτων εχει επεκταθεί και στις τρεις διαστάσεις. Πολύ σημαντική συνεισφορά σε αυτή την κατεύθυνση έχει η εργασία του Evans [16]. Θα πρέπει κάπου εδώ να διαλύσουμε μια εσφαλμένη εντύπωση που ίσως να έχει δημιουργηθεί στον αναγνώστη. Η έρευνα στα κλασικά υπερολοκληρώσιμα συστήματα δεν αφορά απλώς στην καταγραφή όλων των δυνατών ολοκληρώσιμων και υπερολοκληρώσιμων συστημάτων. Συνδέεται στενά και με την προσπάθεια εύρεσης των συμμετριών αυτών των συστημάτων. Προς αυτή την κατεύθυνση πολύ σημαντική είναι η συνεισφορά των Kalnins, Kress και Miller μέσα από τη σειρά των εργασιών

[17, 18, 19, 20], όσο και οι εργασίες [25, 26, 27]. Μέσα από αυτές τις εργασίες μελετήθηκαν τα κλασικά και κβαντικά υπερολοκληρώσιμα συστήματα σε τρεις διαστάσεις, καθώς και όλες εκείνες οι γεωμετρικές συμμετρίες που μας επιτρέπουν να συνδέουμε αποτελέσματα που αφορούν συστήματα που "ζουν" σε ξεχωριστούς χώρους (μετασχηματισμοί Stäckel). Επιπλέον για τρισδιάστατα κλασικά υπερολοκληρώσιμα συστήματα, τα οποία έχουν πέντε συναρτησιακά ανεξάρτητα ολοκληρώματα, έχει αποδειχθεί για την περίπτωση των μη εκφυλισμένων δυναμικών, δηλαδή δυναμικών που εξαρτώνται από τέσσερις παραμέτρους, ότι μπορούμε να βρούμε ένα έκτο ολοκλήρωμα, το οποίο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα πέντε [21]. Η ύπαρξη αυτού του έκτου ολοκληρώματος μας εφοδιάζει με μια επιπλέον ιδιότητα. Τα πέντε αυτά ολοκληρώματα φτιάχνουν μία δευτεροβάθμια άλγεβρα Poisson. Λεπτομέρειες δίνονται στο Παράρτημα B που ακολουθεί.

Μια τελείως διαφορετική προσέγγιση μελέτης των ολοκληρώσιμων και υπερολοκληρώσιμων συστημάτων μπορεί κανείς να βρεί μέσω της υπερσυμμετρικής κβαντικής μηχανικής. Πρόκειται για μια πολύ καινούργια και μοντέρνα προσέγγιση. Η σημαντικότερη εργασία εδώ είναι η [50] των Cooper, Khare και Sukhatme. Η υπερσυμμετρική κβαντομηχανική, σε συνδυασμό με την συνθήκη αναλλοίωτου σχήματος shape invariance, μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε ολόκληρες αλυσίδες υπερολοκληρώσιμων κβαντικών, αλλά και κλασικών, συστημάτων. Για παράδειγμα, μπορούμε να μελετήσουμε συστήματα που περιγράφονται από την εξίσωση Schrödinger, στην οποία η μάζα, κατά συνέπεια και η κινητική ενέργεια, εξαρτάται από τη θέση. Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται κατά τη μελέτη των ηλεκτρικών ιδιοτήτων των ημιαγωγών, σε θεωρητικές μελέτες των κβαντικών τελειών [51], σε κβαντικά ρευστά [52], αλλά και στην περιγραφή της δομής των πυρήνων στα πλαίσια της Χαμιλτονιανής του Bohr [53].

Κλείνοντας θα πρέπει να τονίσουμε ιδιαίτερα τις προσπάθειες που έχουν γίνει προκειμένου τα υπερολοκληρώσιμα συστήματα να μελετηθούν μέσω των παραμορφωμένων αλγεβρών. Σε αυτή την περιοχή οι κυριότερες εργασίες είναι οι [54, 36] αλλά και οι [22, 23, 24]. Οι κβαντικές άλγεβρες είναι μη γραμμικές παραμορφώσεις των συνηθισμένων αλγεβρών Lie, στις οποίες και καταλήγουν όταν η παράμετρος παραμόρφωσης q τεθεί ίση με τη μονάδα. Πρόκειται για ένα μαθηματικό εργαλείο το οποίο αναπτύχθηκε κατά τη μελέτη κβαντικών προβλημάτων αντίστροφης σκέδασης, στις προσπάθειες επίλυσης της εξίσωσης Yang - Baxter, καθώς και στις σύμμορφες θεωρίες πεδίου [31].

Όπως έχουμε ήδη σημειώσει στην πρώτη παράγραφο, στα πλαίσια της μελέτης των ολοκληρώσιμων συστημάτων, δεν υπάρχει γνωστή μέθοδος που να μας δίνει τον αριθμό των καθολικών ολοκληρωμάτων ενός συστήματος. Από την άλλη μεριά, όπως είδαμε παραπάνω, υπάρχουν κάποιες μέθοδοι για την κατασκευή τους. Αυτό που δεν υπάρχει είναι ένα κριτήριο, με τη μορφή ικανής και αναγκαίας συνθήκης, με την οποία να διαπιστώνουμε εάν ένα σύστημα είναι ολοκληρώσιμο ή όχι. Είναι δυνατό με ορισμένες μεθόδους να βρούμε ικανές συνθήκες για την ολοκληρωσιμότητα ή τη μη ολοκληρωσιμότητα ενός συστήματος, ενώ ισχυρές ενδείξεις για την ολοκληρωσιμότητα ή τη μη ολοκληρωσιμότητα ενός συστήματος μας δίνει η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων Hamilton. Είναι γεγονός πάντως ότι η ολοκληρωσιμότητα σε Χαμιλτονιανά συστήματα με περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας είναι σπάνια εξαίρεση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Στο παράρτημα αυτό δίνουμε τις αποδείξεις κάποιων σχέσεων που συναντήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Θεωρούμε λοιπόν τη δράση του τελεστή L_3 επάνω στο καταστατικό διάνυσμα $|30n_3\rangle$. Υπενθυμίζουμε από τον μονοδιάστατο ταλαντωτή ότι:

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{5.1}$$

Ο πρώτος όρος του L_3 δίνει

$$ia_1a_2^\dagger|30n_3\rangle = i\sqrt{3}\sqrt{1}|21n_3\rangle, \tag{5.2}$$

αφού στη x-διεύθυνση έχουμε $a_1|3\rangle = \sqrt{3}|2\rangle$, και στην y διεύθυνση έχουμε $a_2^\dagger|0\rangle = \sqrt{1}|1\rangle$.

Ο δεύτερος όρος του L_3 δίνει μηδέν, αφού ο a_2 δρά πάνω στο $|0\rangle$.
Επιπλέον έχουμε

$$L_3|30n_3\rangle = i\sqrt{3}|21n_3\rangle. \tag{5.3}$$

Με τα ίδια βήματα βρίσκουμε ότι:

$$L_3|21n_3\rangle = i\sqrt{2}\sqrt{2}|12n_3\rangle - i\sqrt{3}|30n_3\rangle, \tag{5.4}$$

$$L_3|12n_3\rangle = i\sqrt{3}|03n_3\rangle - i\sqrt{2}\sqrt{2}|21n_3\rangle, \tag{5.5}$$

$$L_3|03n_3\rangle = -i\sqrt{3}|12n_3\rangle. \tag{5.6}$$

Απαιτώντας ο γραμμικός συνδιασμός:

$$a|30n_3\rangle + b|21n_3\rangle + c|12n_3\rangle + |03n_3\rangle \tag{5.7}$$

να είναι ιδιοκατάσταση του L_3, με ιδιοτιμή $+1$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$L_3[a|30n_3\rangle + b|21n_3\rangle + c|12n_3\rangle + |03n_3\rangle] = a|30n_3\rangle + b|21n_3\rangle + c|12n_3\rangle + |03n_3\rangle. \tag{5.8}$$

Αντικαθιστώντας τα προηγούμενα στην lhs τα αποτελέσματα της δράσης του L_3 στα διανύσματα είναι, δίνονται από τις εξισώσεις (3)-(6), και μαζεύοντας τους ίδιους όρους, βρίσκουμε

$$-i\sqrt{3}b|30n_3\rangle + (i\sqrt{3}a - 2ic)|21n_3\rangle + (2ib - i\sqrt{3})|12n_3\rangle + i\sqrt{3}c|03n_3\rangle \tag{5.9}$$

$$= a|30n_3\rangle + b|21n_3\rangle + c|12n_3\rangle + |03n_3\rangle. \tag{5.10}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του κάθε διανύσματος στην lhs και στη rhs παίρνουμε ότι:

$$-i\sqrt{3}b = a, \tag{5.11}$$

$$i\sqrt{3}a - 2ic = b, \tag{5.12}$$

$$2ib - i\sqrt{3} = c, \tag{5.13}$$

$$i\sqrt{3}c = 1. \tag{5.14}$$

Από την τελευταία παίρνουμε αμέσως ότι:

$$c = -\frac{i}{\sqrt{3}}. \tag{5.15}$$

Τότε η τρίτη εξίσωση δίνει

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{5.16}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$a = -i. \tag{5.17}$$

Ενώ η δεύτερη εξίσωση μας παρέχει μια μέθοδο επαλήθευσης των αποτελεσμάτων.

Επιπλεόν τα ιδιοδιανύσματα γίνονται:

$$-i|30n_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|21n_3\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|12n_3\rangle + |03n_3\rangle. \tag{5.18}$$

Αφού το άθροισμα των τετραγώνων των συντελεστών ισούται με $8/3$, προκειμένου να είναι κανονικοποιημένα θα πρέπει να διαιρέσουμε με το $\sqrt{8/3} = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$ και έτσι παίρνουμε την εξίσωση (8).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Β.1 Parafermionic-like Poisson άλγεβρες

Ξεκινάμε ορίζοντας τις παραφερμιονικές άλγεβρς Poisson. Η κυκλική Lie άλγεβρα $U(g)$ της άλγεβρας g με γεννήτορες $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$[x_i, x_j] = \sum_m c_{ij}^m x_m \tag{5.19}$$

Οι γεννήτορες ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$T(x_i, x_j, x_k) \equiv [x_i, [x_j, x_k]] = \sum_n d_{i;j,k}^n x_n, \quad d_{i;j,k}^n x_n = \sum_m c_{im}^n c_{jk}^m \tag{5.20}$$

Γενικά μια ternary άλγεβρα είναι μια μεταθετική άλγεβρα A της οποίας οι γεννήτορες ικανοποιούν σχέσεις μετάθεσης της μορφής:

$$T(x_i, x_j, x_k) = \sum_n d_{i;jk}^n x_n \tag{5.21}$$

όπου $T : A \otimes A \otimes A \longrightarrow A$ είναι μια τριγραμμική απεικόνιση. Εαν αυτή η τριγραμμική απεικόνιση ορίζεται όπως η σχέση (5.20) τότε αυτή η άλγεβρα αποτελεί ένα παράδειγμα triple Lie άλγεβρας, οι οποίες εισήχθησας από τον Jacobson το 1951. Την ίδια εποχή ο Green εισήγαγε τις παραφερμιονικές άλγεβρες σαν μια επέκταση των γνωστών μεταθετικών αλγεβρών, των οποίων οι τελεστές $f_i^\dagger, f_i$ ικανοποιούν τις ternary σχέσεις:

$$[f_k, [f_l^\dagger, f_m]] = 2\delta_{kl} f_m$$

$$[f_k, [f_l^\dagger, f_m^\dagger]] = 2\delta_{kl} f_m^\dagger - 2\delta_{km} f_m^\dagger$$

$$[f_k, [f_l, f_m]] = 0$$

Ονομάζουμε παραφερμιονική Poisson άλγεβρα την Poisson άλγεβρα που ικανοποιεί την ternary σχέση:

$$\{x_i, \{x_j, x_k\}_P\}_P = \sum_m c_{i;jk}^m x_m$$

η οποία αντιστοιχεί στην κλασικό ανάλογο της εξίσωσης (5.20). Η δευτεροτάξια παραφερμιονική άλγεβρα Poisson είναι μια άλγεβρα Poisson που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\{x_i, \{x_j, x_k\}_P\}_P = \sum_{mn} c_{i;jk}^{mn} x_m x_n + \sum_m c_{i;jk}^m x_m$$

Ένα κλασικό υπερολοκληρώσιμο σύστημα με τετραγωνικά ολοκληρώματα κίνησης επάνω σε μια διδιάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα έχει δυο ανεξάρτητα ολοκληρώματα A και B τα οποία βρίσκονται σε ενέλιξη με τη Χαμιλτονιανή του συστήματος:

$$\{H, A\}_P = 0, \quad \{H, B\}_P = 0 \tag{5.22}$$

ενώ η αγκύλη Poisson $\{A, B\}_P \neq$ είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης κυβικό ως προς την ορμή.

Γενικότερα εάν οι αγκύλες Poisson των ολοκληρωμάτων κίνησης $\{A, \{A, B\}\}_P$,$\{A, B\}, B\}_P$ δεν είναι γραμμικές συναρτήσεις των ολοκληρωμάτων κίνησης, τότε δεν κλείνουν μια Lie Poisson άλγεβρα με τρεις γεννήτορες. Εάν υπολογίσουμε όλες τις αγκύλες Poisson που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ολοκληρώματα κίνησης θα δούμε οτι δεν κλείνουν όλες σε μια δομή Lie Poisson άλγεβρας. Όλα τα διδιάστατα υπερολοκληρώσιμα συστήματα με τετραγωνικά ολοκληρώματα κίνησης έχουν την ίδια δομή [22, 23, 24, 25, 26, 27]:

$$\begin{gathered}\{H, A\}_P = 0, \quad \{H, B\}_P = 0, \quad \{A, B\}_P \neq 0, \quad \{A, B\}_P^2 = 2F(A, H, B) \\ \{A, \{A, B\}_P\}_P = \frac{\partial F}{\partial B}, \quad \{B, \{A, B\}_P\}_P = -\frac{\partial F}{\partial A}\end{gathered} \tag{5.23}$$

όπου η συνάρτηση $F = F(A, B, H)$ είναι μια κυβική συνάρτηση των ολοκληρωμάτων κίνησης

$$\begin{gathered}F(A, B, H) = \alpha A^3 + \beta B^3 + \gamma A^2 B + \delta A B^2 + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 H) A^2 + (\zeta_0 + \zeta_1 H) B^2 + \\ +(\eta_0 + \eta_1 H) AB + (\theta + 0 + \theta_1 H + \theta_2 H^2) A + \\ +(\kappa_0 + \kappa_1 H + \kappa_2 H^2) B + (\lambda_0 + \lambda_1 H + \lambda_2 H^2 + \lambda_3 H^3)\end{gathered} \tag{5.24}$$

Επομένως κάθε διδιάστατο υπερολοκληρώσιμο σύστημα αντιστοιχεί σε κάποια παραφερμιονική κυβική Poisson άλγεβρα με δυο γεννήτορες. Έτσι τα διδιάστατα υπερολοκληρώσιμα συστήματα κατηγοριοποιούνται σε έξη τάξεις κατηγοριοποιώντας τις αντίστοιχες παραφερμιονικές άλγεβρες Poisson που προκύπτουν. Από εκεί και πέρα μπορούμε να υπολογίσουμε τον τελεστή Casimir της άλγεβρας που μελετάμε κάθε φορά. Γι αυτό το λόγο σύμφωνα και με τα [23, 37] έχουμε ότι:

$$\begin{gathered}\{A, B\}_P = C, \quad \{A, C\}_P = \alpha A^2 + 2\gamma AB + \delta A + \epsilon B + \zeta \\ \{B, C\}_P = aA^2 + bB^2 + 2cAB + dAB + eB + z\end{gathered}$$

Να σημειώσουμε ότι με κατάλληλη στροφή των γεννητόρων η παράμετρος $\beta = 0$. Επιπλέον λόγω της ταυτότητας Jacobi που ισχύει για τις αγκύλες Poisson θα έχουμε ότι

$$\{A, \{B, C\}\}_P = \{B, \{A, C\}\}_P$$

Ακόμα θα πρέπει οι παράμετροι να συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης: $b = -\gamma, \quad c = -\alpha$ και $c = -\delta$ Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι τα A, B, C ικανοποιούν την τετραγωνική άλγεβρα Poisson

$$\begin{gathered}\{A, B\}_P = C \\ \{A, C\}_P = \alpha A^2 + 3\gamma AB + \delta A + \epsilon B + \zeta \\ \{B, C\}_P = \alpha A^2 - \gamma B^2 - 2\alpha AB + dA = \delta B + \zeta\end{gathered} \tag{5.25}$$

όπου οι παράμετροι α,γ,a είναι σταθερές και

$$\delta = \delta(H) = \delta_0 + \delta_1 H$$

$$\epsilon = \epsilon(H) = \epsilon_) + \epsilon_1 H$$

$$\zeta = \zeta(H) = \zeta_0 + \zeta_1 H + \zeta_2 H^2$$

$$d = d(H) = d_0 + d_1 H$$

$$z = z(H) = z_0 + z_1 H + z_2 H^2$$

όπου και πάλι οι παράμετροι $\delta_i, \epsilon_i, \zeta_i, d_i$ και z_i είναι σταθερές.

Η άλγεβρα μας έχει Casimir που είναι μια συνάρτηση έκτης τάξης ως προς την ορμή και δίνεται από την έκφραση:

$$K = C^2 - 2\alpha A^2 B - 2\gamma AB^2 - 2\delta AB - \epsilon B^2 - 2\zeta B + \frac{2}{3}\alpha A^3 + dA^2 + 2zA \tag{5.26}$$

Φυσικά ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\{K, A\}_P = \{K, B\}_P = \{K, C\}_P = 0$$

Για κβαντικά υπερολοκληρώσιμα συστήματα οι σχέσεις τροποποιούνται ως εξής:

$$[A, B] = C$$

$$[A, C] = aA^2 + \gamma\{A, B\} + \delta A + \epsilon B + \zeta$$

$$[B, C] = aA^2 - \gamma B^2 - \alpha\{A, B\} + dA - \delta b + \zeta$$

όπου α, γ, a είναι σταθερές και

$$\delta = \delta(H) = \delta_0 + \delta_1 H$$

$$\epsilon = \epsilon(H) = \epsilon_) + \epsilon_1 H$$

$$\zeta = \zeta(H) = \zeta_0 + \zeta_1 H + \zeta_2 H^2$$

$$d = d(H) = d_0 + d_1 H$$

$$z = z(H) = z_0 + z_1 H + z_2 H^2$$

Ο τελεστής Casimir δίνεται από την έκφραση:

$$K = C^2 - \alpha\{A^2, B\} - \gamma\{A, B^2\} + (\alpha\gamma - \delta)\{A, B\} + (\gamma^2 - \epsilon)B^2 + (\gamma\delta - 2\zeta)B$$

$$+\frac{2a}{3}A^3 + (d + \frac{a\gamma}{3}\alpha^2)A^2 + (\frac{a\epsilon}{3} + \alpha\delta + 2\zeta)A$$

B.2 Η δομή της Poisson άλγεβρας στην περίπτωση των τρισδιάστατων κλασικών δυναμικών

Αξίζει να σημειώσουμε ότι μπορούμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα μας απο τα κλασικά στα κβαντικά συστήματα, στις δυο διαστάσεις, ωστόσο κατά την μετάβαση από τις δυο στις τρείς διαστάσεις εμφανίζονται αρκετές δυσκολίες. Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με όσα έχουμε πεί στο κεφάλαιο ένα αλλά και αμέσως παραπάνω, περιμένουμε τα υπερολοκληρώσιμα συστήματα να κλείνουν κάποια άλγεβρα με πέντε γεννήτορες αυτή τη φορά. Δυστυχώς όμως δεν υπάρχει μέθοδος για να περιγράψουμε οποιοδήποτε τρισδιάστατο σύστημα. Αντιθέτως υπάρχουν μέθοδοι περιγραφής μια ιδιαίτερης κατηγορίας τέτοιων συστημάτων, των λεγόμενων μη εκφυλισμένων. Πιο συγκεκριμένα ένα σύστημα στις τρείς διαστάσεις ονομάζεται μη εκφυλισμένο (non degenerate) όταν η συνάρτηση δυναμικού εξαρτάται από τέσσερις παραμέτρους, είναι δηλαδή γραμμικός συνδιασμός τεσσάρων δυναμικών. Εάν εξαρτάται από λιγότερες παραμέτρους ονομάζεται εκφυλισμένο(degenerate). Τα εργαλεία δουλειάς εδώ θα είναι το ”5 to 6” θεώρημα [21].

Θεώρημα $5 \longrightarrow 6$

Έστω V ένα μη εκφυλισμένο και υπερολοκληρώσιμο δυναμικό το οποίο αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο χώρο 3 διαστάσεων με μετρική

$$ds^2 = g(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

με πέντε συναρτησιακώς ανεξάρτητα ολοκληρώματα $\Im = (S_\ell : \ell = 1, \ldots, 5)$. Υπάρχει πάντοτε έκτο ολοκλήρωμα δεύτερης τάξης S_6 που είναι συναρτησιακά εξαρτημένο με τα $\Im$ αλλά γραμμικός ανεξάρτητο με αυτά.

Προϋπόθεση 1

Για μη εκφυλισμένα δυναμικά με τετραγωνικά ολοκληρώματα κίνησης ορισμένα σε επίπεδους χώρους, τα ολοκληρώματα κίνησης ικανοποιούν μια δευτεροτάξια παραφερμιονική Poisson άλγεβρα με πέντε γεννήτορες που ικανοποιούν σχέσεις τις μορφής[1]:

$$\{S_i, \{S_j, S_k\}_P\}_P = \sum_{mn} d^{m,n}_{i;jk} S_m S_n + \sum_m c^m_{i;jk} S_m \tag{5.27}$$

[1] Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε τις ομοιότητες που έχει η περιγραφή των υπερολοκληρώσιμων συστημάτων με τον τρόπο περιγραφής της Nambu classical (quantum) mechanics λόγω των τριπλών σχέσεων μετάθεσης που ικανοποιούν τα ολοκληρώματα

Προϋπόθεση 2

Σε όλες τις γνωστές περιπτώσεις (με μία μόνο εξαίρεση) μη εκφυλισμένων δυναμικών μπορούμε να διαλέξουμε εκτός από την Χαμιλτονιανή H τέσσερα συναρτησιακός ανεξάρτητα ολοκληρώματα κίνησης A_1, B_1, A_2, B_2 και ένα επιπλέον τετραγωνικό ολοκλήρωμα F τέτοια ώστε όλα τα ολοκληρώματα να είναι γραμμικός ανεξάρτητα. Αυτά τα ολοκληρώματα ικανοποιούν μια παραφερμιονική άλγεβρα της μορφής (5.27). Η μορφή της άλγεβρας που ορίζεται από τα ολοκληρώματα A_1, B_1, A_2, B_2 χαρακτηρίζεται από δύο συναρτήσεις της μορφής

$$F_1 = F_1(A_1, A_2, B_1, H), \quad F_2 = F_2(A_1, A_2, B_2, H)$$

και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\{A_1, A_2\}_P = \{A_1, B_2\}_P = \{A_2, B_1\}_P = 0$$

$$\{A_1, B_1\}_P^2 = 2F_1(A_1, A_2, H, B_1)$$

$$\{A_2, B_2\}_P^2 = 2F_2(A_1, A_2, H, B_2)$$

$$\{A_i\{A_i, B_i\}_P\}_P = \frac{\partial F_i}{\partial B_i}, \quad \{B_i, \{A_i, B_i\}_P\}_P = -\frac{\partial F_i}{\partial A_i}$$

$$\{A_1, B_1\}_P, B_2\}_P = \{A_1, \{B_1, B_2\}_P\}_P, \quad \{A_2, B_2\}_P, B_1\}_P = -\{A_2, \{B_1, B_2\}_P\}_P \tag{5.28}$$

Θέτοντας

$$C_1 = \{A_1, B_1\}_P, \quad C_2 = \{A_2, B_2\}_P, \quad D = \{B_1, B_2\}_P$$

στην (5.28) βρίσκουμε ότι:

$$\{C_1, B_2\}_p C_1 - \frac{\partial F_1}{\partial A_2} C_2 - \frac{\partial F_1}{\partial B_1} D = \{C_2, B_1\}_P C_2 - \frac{\partial F_2}{\partial A_1} C_1 + \frac{\partial F_2}{\partial B_2} D = 0$$

και

$$\{C_1, C_2\}_P = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial B_1}\frac{\partial F_2}{\partial A_1} C_1 + \frac{\partial F_1}{\partial A_2}\frac{\partial F_2}{\partial B_2} C_2 + \frac{\partial F_1}{\partial B_1}\frac{\partial F_2}{\partial B_2} D}{C_1 C_2}$$

B.3 Ένα παράδειγμα: Ισοτροπικός κλασικός ταλαντωτής με όρους Rosochatius

Εφοδιασμένοι με όλα μας τα εργαλεία μπορούμε να τα εφαρμόσουμε σε μια ειδική περίπτωση του προβλήματος του ανισοτροπικού ταλαντωτή με όρους Rososchatius. Παρατηρούμε εξαρχής ότι αυτό το πρόβλημα δεν είναι μη εκφυλισμένο καθώς εξαρτάται από έξη παραμέτρους l, m, n, k_1, k_2, k_3. Γι αυτό το λόγο θα θεωρήσουμε την περίπτωση του ισοτροπικού ταλαντωτή με όρους Rosochatius. Έτσι η Χαμιλτονιανή μας θα είναι της μορφής:

$$H = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \delta(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{y^2} + \frac{k_3}{z^2} \tag{5.29}$$

Μαζί με την Χαμιλτονιανή υπάρχουν άλλα πέντε ολοκληρώματα γραμμικός αναξάρτητα ολοκληρώματα A_1, B_1, A_2, B_2, F [16, 21]

$$A_1 = p_x^2 + \delta x^2 + \frac{\alpha_1}{x^2}, \quad A_2 = p_y^2 + \delta y^2 + \frac{\alpha_2}{y^2}$$

$$B_1 = J_z^2 + \frac{\alpha_1 y^2}{x^2} + \frac{\alpha_2 x^2}{y^2}, B_2 = J_x^2 + \frac{\alpha_3 y^2}{z^2} + \frac{\alpha_2 z^2}{y^2}$$

και

$$F = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 + \frac{\alpha_2(x^2 + z^2)}{y^2} + \frac{\alpha_3 x^2(x^2 + y^2) + \alpha_1 z^2(y^2 + z^2)}{x^2 z^2}$$

όπου

$$J_x = yp_z - zp_y, \quad J_y = zp_x - xp_z, \quad J_z = xp_y - yp_x, J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\{A_1, A_2\} = \{A_1, B_2\} = \{A_2, B_1\} = \{B_1, F\} = \{B_2, F\} = 0$$

Οι συναρτήσεις δομής δίνονται από τις σχέσεις:

$$C_1 = \{A_1, B_1\}, \quad C_2 = \{A_2, B_2\}, \quad D = \{B_1, B_2\}, \quad \{B_1, B_2\} = D, \quad \{F, A_1\} = L, \quad \{F, A_2\} = M$$

$$\{F, B_2\} = N, \quad C_1^2 = 2F_1, \quad C_2^2 = 2F_2, \quad L^2 = 2F_3, \quad M^2 = 2F_4, \quad N^2 = 2F_5$$

$$F_1 = -8(A_1^2(\alpha_2 + B_1) + A_1 B_1(A_2 - H) + \delta B_1^2 + \alpha_1((A_1 + A_2 - H)^2 - 4\alpha_2\delta))$$

$$F_2 = -8(A_1 + A_2 - H)(\alpha_3 A_1 + A_2(\alpha_3 + B_2) - \alpha_3 H) + \delta B_2^2 + \alpha_2((A_2^2 - 4\alpha_3\delta))$$

$$F_3 = -8((\alpha_2 + \alpha_3 + F)A_1^2 + (B_2 - F)HA_1 + (B_2 - F)^2\delta + \alpha_1((A_1 - H)^2 - 4(\alpha_2 + \alpha_3 + B_2)\delta))$$

$$F_4 = -8((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + F)A_2^2 +$$

$$+8(2\alpha_3 - B_1 F)HA_2 - 8\alpha_3 H^2 + 8(-(B_1 - F)^2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_3 B_1)\delta$$

$$F_5 = 8(-\alpha_2(B_1 + B_2 - F)^2 + \alpha_1(4\alpha_2\alpha_3 - B_2^2) - B_1(alpha_3 B_1 + B_2(B_1 + B_2 - F))$$

Η πλήρης άλγεβρα είναι:

$$\{A_1, \{A_1, B_1\}\} = \frac{\partial F_1}{\partial B_1} = -8A_1(A_1 + A_2 - H) - 16\delta B_1$$

$$\{A_2, \{A_2, B_2\}\} = \frac{\partial F_2}{\partial B_2} = -8A_2(A_2 + A_1 - H) - 16\delta B_2$$

$$\{A_1, F\}, A_1\}\} = -\frac{\partial F_3}{\partial F} = 8A_1(A_1 - H) - 16\delta(B_2 - F)$$

$$\{A_2, F\}, A_2\}\} = -\frac{\partial F_4}{\partial F} = 8A_2(A_2 - H) - 16\delta(B_1 - F)$$

$$\{A_1, F\}, A_1\}\} = \{A_2, F\}, A_1\}\} = 8A_1A_2 + 16\delta(B_1 + B_2 - F)$$

$$\{A_1, B_1\}, F\}\} = \{A_1, F\}, B_2\}\} = \{A_2, F\}, B_1\} = \{\{B_1, B_2\}, F\} = 0$$

$$\{\{A_2, B_2\}, B_1\} = \{\{B_1, B_2\}, A_2\} = 8A_1(B_1 - F) + 8(B_1 + B_2 F)(A_2 - H)$$

$$\{A_1, \{B_1, B_2\}\} = \{\{A_1, B_1\}, B_2\} = 8A_2(B_2 - F) + 8(B_1 + B_2 F)(A_1 - H)$$

$$\{B_1, \{B_2, B_3\}\} = \frac{\partial F_5}{\partial B_2} = -8(B_1 + 2B_2 - F + 2\alpha_2)B_1 - 16(\alpha_1\alpha_2)B_2 + 16\alpha_2 F$$

$$\{B_1, B_2\}, B_2\} = \frac{\partial F_5}{\partial B_1} = -8(B_2 + 2B_1 - F + 2\alpha_2)B_2 - 16(\alpha_2 + \alpha_3)B_1 + 16\alpha_3 F$$

$$\{A_1, F\}, F\} = \frac{\partial F_3}{\partial A_1} = -16\alpha_1(A_2 - H) - 16(\alpha_2 + \alpha_3)A_1 - 8(2A_2 - H)F - 8B_2 H$$

$$\{A_2, F\}, F\} = \frac{\partial F_4}{\partial A_2} = -16\alpha_3(A_2 - H) - 16(\alpha_1 + \alpha_2)A_2 - 8(2A_2 - H)F - 8B_1 H$$

$$\{A_1, B_1\}, B_1\} = \frac{\partial F_1}{\partial A_1} = -16\alpha_1(A_1 + A_2 - H) - 16\alpha_2 A_1 - 8(2A_1 - A_2)B_1 - 8B_1 H$$

$$\{A_1, B_2\}, B_2\} = \frac{\partial F_2}{\partial A_2} = -16\alpha_3(A_1 + A_2 - H) - 16\alpha_2 A_2 - 8(2A_2 - A_1)B_2 - 8B_1 H$$

$$\{A_1, B_1\}, F\} = \{\{A_1, F\}, B_1\} = -16(\alpha_1 + \alpha_2)A_1 - 16\alpha_1 A_2 - 8A_1 B_2 + 8A_2 B_2 - 8F(A_1 + A_2 - H) + (16\alpha_1 - 8B_2)H$$

$$\{A_2, B_2\}, F\} = \{\{A_2, F\}, B_2\} = -16A_2(\alpha_2 + \alpha_3) - 16\alpha_3 A_1 - 8A_2 B_2 + 8A_1 B_1 - 8F(A_1 + A_2 - H) + (16\alpha_3 - 8B_1)H$$

Επιπλέον η δεύτερη άλγεβρα η οποία αναπτύσσεται συναρτήση των C_1, C_2, D με συντελεστές οποιοδήποτε γραμμικό συνδιασμό των ολοκληρωμάτων A_1, A_2, B_1, B_2, F, H είναι:

$$\{C_1, C_2\} = -8A_2C_1 + 8A_1C_2 + 16\delta D, \quad \{C_1, D\} = 8(F - B_1 - B_2)C_1 - 8(2\alpha_1 + B1)C_2 - 8A_1 D$$

$$\{C_2, D\} = 8(B_2 + 2\alpha_3)C_1 + 8(B_1 + B_2 - F)C_2 - 8A_2 D$$

Η σχέση μεταξύ των $B_1, B_2, C_1, C_2, M, L, F$ είναι:

$$C_1 + C_2 + M + L = 0$$

B.4 Ανισοτροπικός κβαντικός ταλαντωτής χωρίς όρους Rososchatius

Στα πλαίσια αυτής της περιγραφής των υπερολοκληρώσιμων συστημάτων μπορούμε να μελετήσουμε και τον ανισοτροπικό ταλαντωτή με ή χωρίς όρους Rosochatius. Αρχικλα θα πρέπει να επικαιροποιήσουμε την μορφή της Χαμιλτονιανής ώστε να μπορούμε να ελέξουμε τα αποτελέσματα μας με τις υπόλοιπες ομάδες που δουλεύουν στο θέμα. Ξεκινάμε λοιπόν με την Χαμιλτονιανή μας:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left({p_k}^2 + \omega^2 m_k^2 x_k^2\right) \tag{5.30}$$

ενώ οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής γράφονται:

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(m_k\omega x_k - ip_k\right), \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(m_k\omega x_k + ip_k\right) \tag{5.31}$$

οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης:

$$[a_k, a_k^\dagger] = m_k\omega\hbar. \tag{5.32}$$

Ορίζουμε ακόμα τον τελεστή

$$U_k = \frac{1}{2}(p_k^2 + m_k^2\omega x_k^2) \tag{5.33}$$

έτσι ώστε

$$H = \sum_{k=1}^{N} U_k = \frac{1}{2}\{a_k, a_k^\dagger\} \tag{5.34}$$

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε τις σχέσεις:

$$[a_k^\dagger, U_k] = -m_k\omega\hbar a_k^\dagger \quad [a_k, U_k] = m_k\omega\hbar a_k \tag{5.35}$$

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι:

$$[(a_k^\dagger)^{m_k}, U_k] = -(m_k)^2\omega\hbar(a_k^\dagger)^{m_k} \quad [(a_k)^2 m_k, U_k] = m_k\omega\hbar(a_k)^{m_k} \tag{5.36}$$

Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε την άλγεβρα $C : \{1, H, D_k, D_k^\dagger, U_k\}$ όπου ο δείκτης $k = 1, \ldots, N-1$ και οι τελεστές

$$D_k = (a_k)^{m_N}(a_N^\dagger)^{m_k}, \quad D_k^\dagger = (a_k^\dagger)^{m_N}(a_N)^{m_k} \tag{5.37}$$

Οι τελεστές αυτοί ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$[H, D_k] = 0, \quad [H, D_k^\dagger] = 0, \quad [H, U_k] = 0 \tag{5.38}$$

Για την περίπτωση $k \neq l, k, l = 1, \ldots, N-1$ έχουμε ότι:

$$[U_k, D_l] = [U_k, D_l^\dagger] = 0 \tag{5.39}$$

και

$$[D_k, D_l] = [D_k^\dagger, D_l^\dagger] = 0 \tag{5.40}$$

Για τα επόμενα είναι πολύ σημαντικό να υπολογίσουμε τα γινόμενα των τελεστών D_k και $D_k^\dagger$

$$\begin{aligned} D_k^\dagger D_k &= (a_k^\dagger)^{m_N}(a_N)^{m_k}(a_k)^{m_N}(a_N^\dagger)^{m_k} = \\ &= (a_k^\dagger)^{m_N}(a_k)^{m_N}(a_N)^{m_k}(a_N^\dagger)^{m_k} = \\ &= \prod_{p=1}^{m_N}(U_k - \frac{2p-1}{2}m_N\hbar\omega)\prod_{q=1}^{m_k}(U_N - \frac{2q-1}{2}m_k\hbar\omega) \end{aligned} \tag{5.41}$$

και

$$\begin{aligned} D_k D_k^\dagger &= (a_k)^{m_N}(a_N^\dagger)^{m_k}(a_k^\dagger)^{m_N}(a_N)^{m_k} = \\ &= (a_k)^{m_N}(a_k^\dagger)^{m_N}(a_N^\dagger)^{m_k}(a_N)^{m_k} = \\ &= \prod_{p=1}^{m_N}(U_k + \frac{2p-1}{2}m_N\hbar\omega)\prod_{q=1}^{m_k}(U_N - \frac{2q-1}{2}m_k\hbar\omega) \end{aligned} \tag{5.42}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο μεταθέτης

$$[D_k, D_k^\dagger] \neq 0$$

Όπως και στο κεφάλαιο 2 και 3, έτσι και εδώ ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$(a_k^\dagger)^{m_k}(a_k)^{m_k} = F(m_k, U_k) = \prod_{p=1}^{m_k}(U_k - \frac{2p-1}{2}m_k\hbar\omega) \tag{5.43}$$

$$(a_k)^{m_k}(a_k^\dagger)^{m_k} = F(m_k, U_k + \hbar\omega) = \prod_{p=1}^{m_k}(U_k + \frac{2p-1}{2}m_k\hbar\omega) \tag{5.44}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μία νέα συνάρτηση B για την περίπτωση που έχουμε διαφορετικό δείκτη και εκθέτη

$$(a_k^\dagger)^{m_N}(a_k)^{m_N} = B(m_N, m_k, U_k), \quad (a_k)^{m_N}(a_k^\dagger)^{m_N} = B(m_N, m_k, U_k + m_k\hbar\omega) \tag{5.45}$$

$$(a_N^\dagger)^{m_k}(a_N)^{m_k} = B(m_k, m_N, U_N), \quad (a_N)^{m_k}(a_N^\dagger)^{m_k} = B(m_k, m_N, U_N + m_N\hbar\omega) \tag{5.46}$$

όπου

$$B(m, n, x) = \prod_{p=1}^{m}(x - \frac{2p-1}{2}n\hbar\omega) \tag{5.47}$$

Χρησιμοποιώντας τους σχετικούς ορισμούς τα γινόμενα των τελεστών μπορούν να γραφούν:

$$D_k^\dagger D_k = B(m_k, m_N, U_k)B(m_k, m_N, U_N + m_N\hbar\omega) = B(m_k, m_N, U_k)B(m_k, m_N, H - \sum_{l=1}^{N-1} U_l + m_N\hbar\omega) \tag{5.48}$$

$$D_k D_k^\dagger = B(m_N, m_k, U_k + m_k\hbar\omega)B(m_k, m_N, U_N) = B(m_N, m_k, U_k + m_k\hbar\omega)B(m_k, m_N, H - \sum_{l=1}^{N-1} U_l) \tag{5.49}$$

Προχωρώντας παραπέρα ορίζουμε τις στροφορμές ως εξής:

$$L_k = i\epsilon_{ijk}((a_i)^{m_j}(a_j^\dagger)^{m_j} - (a_i^\dagger)^{m_i}(a_j)^{m_j}) \tag{5.50}$$

Δίνοντας τιμές τους δείκτες i, j, k παίρνουμε τις στροφορμές για κάθε μια διεύθυνση. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} L_1 &= i((a_2)^{m_3}(a_3^\dagger)^{m_2} - (a_2^\dagger)^{m_3}(a_3)^{m_2}) \\ L_2 &= -i((a_1)^{m_3}(a_3^\dagger)^{m_1} - (a_1^\dagger)^{m_3}(a_3)^{m_1}) \\ L_3 &= i((a_1)^{m_2}(a_2^\dagger)^{m_1} - (a_1^\dagger)^{m_2}(a_2)^{m_1}) \end{aligned} \tag{5.51}$$

Επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε τα τετράγωνα των τελεστών των συνιστωσών των στροφορμών ως εξής

$$\begin{gathered} S_1 = L_1^2 = \\ = -(a_2)^{2m_3}(a_3^\dagger)^{2m_2} + (a_2)^{m_3}(a_3^\dagger)^{m_2}(a_2^\dagger)^{m_3}(a_3)^{m_2} + (a_2^\dagger)^{m_3}(a_3)^{m_2}(a_2)^{m_3}(a_3^\dagger)^{m_2} - (a_2^\dagger)^{2m_3}(a_3)^{2m_2} \\ S_2 = L_2^2 = \\ = -(a_1)^{2m_3}(a_3^\dagger)^{2m_1} + (a_1)^{m_3}(a_3^\dagger)^{m_1}(a_1^\dagger)^{m_3}(a_3)^{m_1} + (a_1^\dagger)^{m_3}(a_3)^{m_1}(a_1)^{m_3}(a_3^\dagger)^{m_1} - (a_1^\dagger)^{2m_3}(a_3)^{2m_1} \\ S_3 = L_3^2 = \\ = -(a_1)^{2m_2}(a_2^\dagger)^{2m_1} + (a_1)^{m_2}(a_2^\dagger)^{m_1}(a_1^\dagger)^{m_1}(a_2)^{m_1} + (a_1^\dagger)^{m_2}(a_2)^{m_1}(a_1)^{m_2}(a_2^\dagger)^{m_1} - (a_1^\dagger)^{2m_2}(a_2)^{2m_1} \end{gathered} \tag{5.52}$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να υπολογίσουμε τους μεταθέτες των στροφορμών L_1, L_2, L_3. Ο υπολογισμός αυτός θα μας δώσει ένα όχι και τόσο αναμενόμενο, σύμφωνα με την προηγούμενη εμπειρία μας, αποτέλεσμα. Γνωρίζουμε ότι για την συνηθισμένη συμμετρία $SU(2)$ ο μεταθέτης των γεννητόρων είναι ίσος με

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

και ικανοποιεί τη σχέση:

$$L_1[L_2, L_3] + L_2[L_3, L_1] + L_3[L_2, L_1] = i(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) = iL^2 \tag{5.53}$$

Για την $U(3)$ του ανισοτροπικού ταλαντωτή που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2, όταν $m_1 = m_2 = 1$, η σχέση μεταξύ των γεννητόρων γίνεται:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}(F(m_k, U_k + 1) - F(m_k, U_k))L_k$$

και ικανοποιεί τη σχέση

$$L_1[L_2, L_3] + L_2[L_3, L_1] + L_3[L_2, L_1] = i(L_1^2 + L_2^2 + (F(m_3, U_3 + 1) - F(m_3, U_3))L_3^2) = iL^2 \tag{5.54}$$

Στη νέα Χαμιλτονιανή έχοντας ορίσει του τελεστές της στροφορμής παραπάνω θα πρέπει, κατά αντιστοιχία, να μπορούμε να υπολογίσουμε τον τελεστή Casimir της άλγεβρας του προβλήματος μας μέσω κάποιας σχέσης της μορφής (5.54). Προκειμένου να προχωρήσουμε θα πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα τις ποσότητες των οποίων θα υπολογίσουμε τους μεταθέτες και οι οποίοι θα κλείνουν σε κάποια άλγεβρα. Όπως θα δούμε αμέσως αν διαλέξουμε και εδώ τις στροφορμές θα διαπιστώσουμε ότι ο μεταθέτης τους δεν μας δίνει την τρίτη στροφορμή πολλαπλασιασμένη με κάποιο παράγοντα. Για να ξεφύγουμε απο αυτή τη δυσκολία και με βάση την προηγούμενη εμπειρία [28] επιλέγουμε τα τετράγωνα των συνιστωσών των στροφορμών (S_1, S_2, S_3). Οι υπολογισμοί που απαιτούνται έγιναν χρησιμοποιώντας την Mathematica 6 και στηρίζονται στην εξής ιδέα. Επειδή ο ορισμός του μεταθέτη στη Mathematica είναι δύσχρηστος, διότι πρόκειται για μή μετατιθέμενο μέγεθος που περιέχει τελεστές, εκμεταλευόμαστε την σχέση που υπάρχει μεταξύ της κλασικής αγκύλης Poisson και του μεταθέτη των παρατηρήσιμων φυσικών (κβαντικών) μεγεθών.

$$\{,\} = \frac{1}{i\hbar}[,] \tag{5.55}$$

Η αγκύλη Poisson είναι πιο εύχρηστη ποσότητα. Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αγκύλης Poisson, $(\{f,g\} = \sum_n (\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n}))$ έχουμε ότι:

$$[f,g] = i\hbar\{,\}$$

Έτσι λοιπόν έχουμε ότι:

$$\begin{gathered}
[[S_1,S_3],S_2] = \{\{\hbar^2 i^2 m_2\omega^2(2m_1(p1 + im_1\ x_1\omega)(p_3 - im_3x_3\omega) \\
(-p_2^2p_3 + m_2^2p_3x_2^2\omega^2 - 2m_2m_3p_2x_2x_3\omega^2) \\
(2p_1^2p_3 + m_1^2x_1^2\omega^2(-p_3 + im_3x_3\omega) + m_1p_1x_1\omega ip_3 + \\
3m_3x_3\omega))(2m_1p_2x_1(m_2p_3x_2 - m_3p_2x_3)\omega^2 - \\
p_1p_3(p_2^2 + m_2^2x_2^2\omega^2)) + 2m_1\omega(-ip_1 + m_1x_1\omega) \\
(p_3 - im_3x_3\omega)(-p_2^2p_3 + m_2^2p_3x_2^2\omega^2 - 2m_2m_3p_2x_2x_3\omega^2) \\
(2m_1^2p_3x_1^2\omega^2 - p_1^2(p_3 - im_3x_3\omega) - m_1p_1x_1\omega(ip_3 + 3m_3x_3\omega)) \\
(m_1p_3x_1(p_2^2 + m_2^2x_2^2\omega^2) - 2m_2p_1x_2(p_2p_3 + m_2m_3x_2x_3\omega^2)) + m_3(m_1p_2x_1 - m_2p_1x_2) \\
\omega^2(p_1 + im_1x_1\omega)^2(2m_1m_3p_1x_1x_3\omega^2 + p_1^2(2p_3 - im_3x_3\omega) + m_1^2x_1^2\omega^2 \\
(-2p_3 + im_3x_3\omega))(m_1p_2x_1(p_2^2p_3 - 3m_2^2p_3x_2^2\omega^2 + 4m_2m_3p_2x_2x_3\omega^2) + \\
+m_2p_1x_2(3p_2^2p_3 - m_2^2p_3x_2^2\omega^2 + 4m_2m_3p_2x_2x_3\omega^2)) - im_3(m_1p_2x_1 - m_2p_1x_2) \\
\omega(-ip_1 + m_1x_1\omega)^2(p_1^2p_3 - m_1^2p_3x_1^2\omega^2 + 2m_1p_1x_1\omega(ip_3 + 2m_3x_3\omega)) \\
((p_1p_2 - m_1m_2x_1x_2\omega^2)(p_2^2p_3 - m_2^2p_3x_2^2\omega^2 + 2m_2m_3p_2x_2x_3\omega^2) + (p_2^2 - \\
m_2^2x_2^2\omega^2)(m_1x_1(-m_2p_3x_2 + m_3p_2x_3)\omega^2 + p_1(p_2p_3 + m_2m_3x_2x_3\omega^2))))\}\}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
[[S_2,S_3],S_1] = \{\{2\hbar^2 i^2 m_1\omega^2(-m_3(m_1p_2x_1 - m_2p_1x_2)\omega(p_1 + im_1x_1\omega) \\
(p_2^2 - m_2^2x_2^2\omega^2)(p_2^2p_3 - m_2^2p_3x_2^2\omega^2 + 2m_2m_3p_2x_2x_3\omega^2)(m_1p_1x_1 + \\
\omega(p_2 + im_2x_2\omega)(2p_3 - 3im_3x_3\omega) + m_1^2x_1^2\omega^2(ip_2p_3 - m_2p_3x_2\omega + \\
m_3p_2x_3\omega) + p_1^2(-ip_2p_3 + m_2x_2\omega(p_3 - im_3x_3\omega))) - 2m_2\omega^2(p_1 + im_1x_1\omega) \\
(ip_3 + m_3x_3\omega)(m_3p_2^3p_3x_3 + m_2^3p_3^2x_2^3\omega^2 - 3m_2^2m_3p_2p_3x_2^2x_3\omega^2 - \\
m_2p_2^2x_2(p_3^2 - 2m_3^2x_3^2\omega^2))(-im_2p_1^3p_3x_2 + m_1^3x_1^3\omega^2(-ip_2p_3 + m_2p_3x_2\omega - \\
m_3p_2x_3\omega) + im_1p_1^2x_1(2p_2p_3 - m_2m_3x_2x_3\omega^2) - m_1^2p_1x_1^2\omega(m_2m_3x_2x_3 \\
\omega^2 + p_2(p_3 - 3im_3x_3\omega)) - 2m_2m_3p_2x_2(m_1p_2x_1 - m_2p_1x_2)\omega^2x1\omega \\
(p2 + im_2x_2\omega)
\end{gathered}$$

$$(p_3 - 2im_3x_3\omega) + p_1^2(p_2(-2ip_3 - m_3x_3\omega) + m_2x_2\omega(p_3 - im_3x_3\omega))+$$
$$m_1^2x_1^2\omega^2(m_2x_2\omega(-2p_3 + im_3x_3\omega) + p_2(ip_3 + m_3x_3\omega))) + m_2(p_1+$$
$$im_1x_1\omega)(ip_3 + m_3x_3\omega)(2p_2^3p_3^2 + 6m_2m_3p_2^2p_3x_2x_3\omega^2-$$
$$-2m_2^3m_3p_3x_2^3x_3\omega^4+$$
$$2m_2^2p_2x_2^2\omega^2(-p_3^2 + 2m_3^2x_3^2\omega^2))(m_1^3p_2p_3x_1^3\omega^3 - m_1^2p_1x_1^2$$
$$(m_2p_3x_2 + m_3p_2x_3)\omega^3 + p_1^3(-ip_2p_3 + m_2x_2\omega(p_3 - im_3x_3\omega))+$$
$$+m_1p_1^2x_1\omega^2(-im_3p_2x_3 + m_2x_2(ip_3 + 3m_3x_3\omega)))))\}\}$$

$$[[S_1, S_2], S_3] =$$
$$= \{\{2\hbar^2i^2m_3(m_1p_2x_1 - m_2p_1x_2)\omega^3(-ip1 + m_1x_1\omega)(m_1m_2^5p_3x_2^5\omega^5$$
$$(ip_1^2p_3 + p_1(-2m_1p_3x_1 + m_3p_1x_3)\omega - im_1x_1(m_1p_3x_1 - 3m_3p_1x_3)\omega+$$
$$m_1p_2^5p_3(p_1^2p_3 + m_1^2x_1^2\omega^2(-p_3 + im_3x_3\omega) + m_1p_1x_1\omega(2ip_3 + 3m_3x_3\omega))$$
$$+m_2^3p_2x_2^2\omega^2(6im_1m_3^2p_1^3x_1x_3^2\omega^3 + 2m_1p_1^2p_2x_2\omega(ip3^2 + m_3p_3x_3\omega - 2im_3^2x_3^2\omega^2)+$$
$$p_1^4(p_3^2 + 4im_3p_3x_3\omega + 2m_3^2x_3^2\omega^2) + m_1^3x_1^2\omega^4(-3m_1p_3^2x_1^2 + 2im_3p_2x_2x_3(4ip_3 + m_3x_3\omega)+$$
$$2m_1^2p_1x_1\omega^2(m_1x_1^2\omega ip_3^2 + 2m_3p_3x_3\omega + 2im_3^2x_3^2\omega^2)$$
$$+p_2x_2(p_3^2 - im_3p_3x_3\omega + m_3^2x_3^2\omega^2)))$$
$$+m_2^4x_2^3\omega^3(-ip_1^4p_3^2+$$
$$2m_1m_3^2p_1^3x_1x_3^2\omega^3 + m_1^2p_1x_1(2m_1p_3x_1^2 + 3m_3p_2x_2x_3)\omega^3(p_3 - 2im_3x_3\omega)$$
$$+m_1^3p_3x_1^2\omega^3(3p_2p_3x_2 + i(m_1p_3x_1^2 + m_3p_2x_2x_3)\omega)+$$
$$m_1p_1^2\omega(2im_1x_1^2\omega)))$$
$$(ip_3 + m_3x_3\omega)^2 - p_2x_2(p_3^2 + 2m_3^2x_3^2\omega^2$$
$$+m_2p_2^3(-p_1^4p_3^2 - 2im_1p_1^3p_3x_1$$
$$\omega(p_3 - 2im_3x_3\omega) + m_1^2m_3p_1x_1x_3\omega^3(3ip_2p_3x_2 + 6m_3p_2x_2x_3\omega - 2im_1m_3x_1^2$$
$$x_3\omega^2) + m_1p_1^2\omega(2m_1x_1^2\omega(p_3 - im_3x_3\omega)^2 + p_2p_3x_2$$
$$-3ip_3 + m_3x_3\omega)) + m_1^3x_1^2\omega^3(m_1p_3^2x_1^2\omega + ip_2x_2(p_3^2 + 2m_3^2x_3^2\omega^2)))$$
$$+m_2^2p_2^2x_2\omega(3ip_1^4p_3^2 - 2m_1m_3p_1^2p_2x_2x_3\omega^2(4ip_3 + m_3x_3\omega) - 2m_1p_1^3x_1$$
$$\omega(p_3^2 - 2im_3p_3x_3\omega + 2m_3^2x_3^2\omega^2) - 2m_1^2p_1x_1\omega^2(3m_1m_3^2x_1^2x_3^2$$
$$\omega^3 + p_2x_2(ip_3^2 + m_3p_3x_3\omega + im_3^2x_3^2\omega^2)) + m_1^3x_1^2\omega^3(-2p_2x_2$$
$$(p_3^2 - im_3p_3x_3\omega - 2m_3^2x_3^2\omega^2) - im_1x_1^2\omega(p_3^2 + 4im_3p_3x_3\omega+$$
$$2m_3^2x_3^2\omega^2)))))\}\}$$

Εάν προσθέσουμε αυτές τις τρεις ποσότητες θα πρέπει, σύμφωνα και με την ταυτότητα Jacobi, το άθροισμα να δίνει μηδέν. Με αυτό τον τρόπο ελέγχουμε τα αποτελέσματα μας. Πράγματι αυτό συμβαίνει.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε τον τρόπο με τον οποίο σχεδιάστηκαν οι γραφικές παραστάσεις του Κεφαλαίου 3 (βλ. εντολή Table)καθώς επίσης και το πρόγραμμα με το οποίο υπολογίστηκαν οι μεταθέτες $[S_1[S_2, S_3]]$ και οι κυκλικές εναλλαγές τους (βλ. εντολή Commutator).

```
Table[ParametricPlot[{Sqrt[10 / (2) + Sqrt[100 / 4] Cos[Sqrt[8] t]],
   Sqrt[14 / m + Sqrt[196 / 4 m^4] Cos[Sqrt[8] m t + Pi / 3]]},
  {t, 0, 2 Pi}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → All], {m, 4}]

Commutator[f_, g_] := i h {D[f, x1] D[g, p1] - D[f, p1] D[g, x1] +
    D[f, x2] D[g, p2] - D[f, p2] D[g, x2] + D[f, x3] D[g, p3] - D[f, p3] D[g, x3]}
a1 := 1 / Sqrt[2] (m1 ω x1 - ⅈ p1)
b1 := 1 / Sqrt[2] (m1 ω x1 + ⅈ p1)
a2 := 1 / Sqrt[2] (m2 ω x2 - ⅈ p2)
b2 := 1 / Sqrt[2] (m2 ω x2 + ⅈ p2)
a3 := 1 / Sqrt[2] (m3 ω x3 - ⅈ p3)
b3 := 1 / Sqrt[2] (m3 ω x3 + ⅈ p3)
l[1] := ⅈ ((b2)^m3 (a3)^m2 - (a2)^m3 (b3)^m2)
l[2] := ⅈ (-(b1)^m3 (a3)^m1 + (a1)^m3 (b3)^m1)
l[3] := ⅈ ((b1)^m2 (a2)^m1 - (a1)^m2 (b2)^m1)
```

Σχήμα 5.1: Η εντολή Table μας κατασκευάζει τις γραφικές παραστάσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων l, m, k_1, k_2 ενώ η συνάρτηση Commutator μαζί με τους αντίστοιχους ορισμούς των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής υπολογίζει τους μεταθέτες

Βιβλιογραφία

[1] G. Darboux "Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces" (1898) Historical Mathematics Collection site http://www.hti.umich.edu

[2] N. Jacobson, General representation theory of Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 70 509 (1951)

[3] J.M. Jauch, E.L. Hill Ph. Rev. 57, 641 1940

[4] J. Fris,A.Ya. Smorodinsky, M. Uhlir and P. Winternitz Ph. Lett.16 354 (1965)

[5] J. Fris,A.Ya. Smorodinsky, M. Uhlir and P. Winternitz Sov.J. Nucl.Physics 4 444 (1967)

[6] A.A. Makarov, A.Ya. Smorodinsky, Kh. Valiev, P. Winternitz Nuovo Cimento A 52 1061 (1967)

[7] J. Hietarinta Phy. Rep C147, 87 (1987)

[8] E.G. Kalnins, W. Miller, G.S. Pogosyan J.Math. Phys.37 6439 (1996)

[9] E.G. Kalnins, W. Miller, G.S. Pogosyan J. Phys. A:33 4105 (2000)

[10] E.G. Kalnins, W. Miller, G.S. Pogosyan J. Phys. A:34 4705 (2001)

[11] E.G. Kalnins, W. Miller, G.S. Pogosyan Ph.Atom.Nucl.65 1047 (2002)

[12] M.F. Ranada J.Math.Ph.38 4165 (1997)

[13] M.F. Ranada, M. Santader J.Math.Ph. 43 2779 (2003)

[14] P.W. Higgs, J.Ph. A12,309 (1979)

[15] H.I. Leemon, J.Phys. A12, 489 (1979)

[16] N.W. Evans Ph. Rev. A 41 5666 (1990)

[17] E.G. Kalnins, J.M. Kress, W. Miller J.Math.Ph. 46, 053509 (2005)

[18] E.G. Kalnins, J.M. Kress, W. Miller J.Math.Ph. 46, 053510 (2005)

[19] E.G. Kalnins, J.M. Kress, W. Miller J.Math.Ph. 46, 103507 (2005)

[20] E.G. Kalnins, J.M. Kress, W. Miller J.Math.Ph. 47, 043514 (2006)

[21] E.G. Kalnins, J.M. Kress, W. Miller J.Math.Ph. 48, 113518 (2007)

[22] C. Daskaloyannis Czech. J. Phy. 50 1209 (2000)

[23] C. Daskaloyannis J.Math. Phys. 42 1100 (2002)

[24] C. Daskaloyannis, Phys.Atom. Nuclei 65 1008 (2002)

[25] C. Daskaloyannis, K. Ypsilantis J.Math. Phys. 47, 042904 (2006)

[26] Y. Tanoudis, C. Daskaloyannis arXiv:0902.0130v1 math-ph (2009)

[27] C. Daskaloyannis, Y. Tanoudis arXiv:math-ph/0607058v1 (2006)

[28] Y. Tanoudis, C. Daskaloyannis arXiv:math-ph/1102.0397v1 (2011)

[29] N.W. Evans J. Math. Phys. 32 (12) (1991)

[30] N.W. Evans, P.E. Verrier J. Math. Phys. 49, 0929202 (2008)

[31] M. Jimbo, Yang Baxter equation in Integrable Systems, Advancies Series in Mathematical Physics Vol.10 (World Scientific, Singapore, 1990)

[32] M.A. Rodriguez, P. Tempesta, P. Winternitz Ph. Rev. E 78, 046608 (2008)

[33] M.F. Ranada, M.A. Rodriguez, M. Santander J. Math. Phys. 51, 042901 (2010)

[34] E.G. Kalnins, J.M. Kress, P. Winternitz arXiv:math-ph/0108015v1 (21 August 2001)

[35] M.A.Rodriguez, P. Winternitz arXiv:math-ph/011018v1 (16 October 2001)

[36] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, K. Kokkotas Ph. Rev. A 50 3700 (1994)

[37] Ian Marquette Department of Mathematics, University of York, Lecture Notes on Superintegrable Systems, (2009)

[38] Ian Marquette, Superintegrability and higher order polynomial algebras II,math-ph:arXiv:0908.4432 (2009)

[39] Ian Marquette,Superintegrability and higher order polynomial algebras I,math-ph:0908.4399 (2009)

[40] Σ. Ιχτιάρογλου, Θεωρητική Μηχανική, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκησ(2006)

[41] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective* (Oxford University Press, Oxford, 1990).

[42] D. G. Ravenhall, R. T. Sharp, and W. J. Pardee, *Phys. Rev.* **164**, 1950 (1967).

[43] Write up on Nilsson orbitals

[44] R. B. Cakirli, K. Blaum, and R. F. Casten, Phys. Rev. C **82**, 061304(R) (2010).

[45] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective* (Oxford University Press, Oxford, 1990).

[46] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, and D. Lenis, arXiv: hep-th/9411218. (1994)

[47] J. Bertrand Comptes Rendus Ac. Sci. 77 (1873) 849

[48] W. Greiner and J. A. Maruhn, *Nuclear Models* (Springer, Berlin, 1996).

[49] D. G. Ravenhall, R. T. Sharp, and W. J. Pardee, *Phys. Rev.* **164**, 1950 (1967).

[50] F. Cooper,A. Khare, U. Sukhatme, Supersymmetry and quantum mechanics, Phy.Rep. 251 (1995),267-385

[51] G. Bastard, Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures, Editions de Physique, Les Ulis, 1988

[52] L. Serra, E. Lipparini, Spin response of unpolarized quantum dots, Europh. Lett. 40 (1997), 667-672

[53] D. Bonatsos, P. Georgoudis, D. Lenis,N. Minkov, C. Quesne arxiv.nucl-th/0912.3768 (2009)

[54] C. Daskaloyannis (1991) J.Phys. A.Math.Gen.24 L789