



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ

ΚΑΙ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**Μη-τετριμμένοι Κινητικοί Όροι Βαθμωτού Πεδίου**

**και**

**Παραγωγή Σωματιδίων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

**Κωνσταντίνου Ντρέκη**

**Επιβλέπων:** Γεώργιος Κουτσούμπας  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα  
Ιούνιος 2013





# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

## **Μη - τετριμμένοι κινητικοί όροι βαθμωτού πεδίου και παραγωγή σωματιδίων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

**Κωνσταντίνου Ντρέκη**

**Επιβλέπων:** Γεώργιος Κουτσούμπας  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τον Ιούνιο 2013.

(Υπογραφή)

.....  
Γεώργιος Κουτσούμπας  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

(Υπογραφή)

.....  
Κωνσταντίνος Φάρακος  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

(Υπογραφή)

.....  
Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2013



## Εισαγωγή

Σε αυτή την διπλωματική εργασία γίνεται μια προσπάθεια να γίνουν πιο κατανοητές οι επιπτώσεις εισαγωγής μη-τετριμμένων κινητικών όρων βαθμωτού πεδίου στην παραγωγή σωματιδίων. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στην κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπύλους χωροχρόνους και αναπτύσσουμε τις βασικές έννοιες που αφορούν την παραγωγή σωματιδίων. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε έναν 4-διάστατο χωρόχρονο FRW που ασυμπτωτικά στο μακρινό παρελθόν/μέλλον γίνεται επίπεδος. Αφού αναφέρουμε την απλή περίπτωση εισάγουμε μη-τετριμμένους κινητικούς όρους βαθμωτού πεδίου, πιο συγκεκριμένα όρους ανάλογους του ταυσιτή Einstein  $G^{\mu\nu}$ , και μελετάμε τις αλλαγές στην παραγωγή σωματιδίων.

Στη συνέχεια προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο. Χρησιμοποιούμε την έννοια του πληθωρισμού (inflation) που πιστεύεται ότι έλαβε χώρα ακριβώς μετά τη Μεγάλη Έκρηξη. Ο πληθωρισμός καθοδηγείται από ένα ομογενές, χρονικά εξαρτημένο βαθμωτό πεδίο  $\phi(t)$  που ονομάζουμε inflaton. Θεωρούμε ότι μετά το τέλος του πληθωρισμού το σύμπαν βρίσκεται στη φάση που κυριαρχεί η ύλη (matter domination). Η μορφή της μετρικής τότε μας επιτρέπει να υπολογίσουμε πιο εύκολα την παραγωγή σωματιδίων μετά τον πληθωρισμό. Για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε ένα κβαντικό πεδίο  $X(x)$  το οποίο θα επιτρέψουμε να μπορεί να συζευχθεί με το inflaton. Καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας γίνονται ξεχωριστοί υπολογισμοί που αφορούν είτε τη βασική θεωρία είτε την τροποποιημένη, δηλαδή αυτή με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους. Με τη βοήθεια του mathematica μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα αναφοράς, συγκεκριμένα τον μέσο αριθμό σωματιδίων που παράγονται συναρτήσει της μάζας  $M_X$ , και μεταβάλλοντας τις παραμέτρους να εντοπίσουμε τις αλλαγές στον αριθμό των παραγόμενων σωματιδίων.

Ολοκληρώνοντας την εισαγωγή αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Κουτσούμπα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και τον κύριο Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο για την καθοδήγησή του σε ζητήματα που αφορούν κοσμολογικά μοντέλα.



# Περιεχόμενα

<b>1 Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπύλους Χωροχρόνους</b>	<b>3</b>
1.1 Κβάντωση βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο . . . . .	3
1.2 Συντελεστές Bogolyubov . . . . .	5
1.3 Ασυμπτωτικές περιοχές Minkowski σε ένα 4-διάστατο σύμπαν FRW .	7
1.4 Παραγωγή σωματιδίων σε 4-διάστατο σύμπαν FRW με ασυμπτωτικές περιοχές Minkowski . . . . .	11
1.5 Μη-τετριμμένοι κινητικοί όροι βαθμωτού πεδίου στο σύμπαν FRW .	14
<b>2 Πληθωρισμός (inflation)</b>	<b>19</b>
2.1 Το βαθμωτό πεδίο $\phi$ (inflaton) που καθοδηγεί τον πληθωρισμό . . .	19
2.2 Μη-τετριμμένοι κινητικοί όροι του inflaton . . . . .	24
<b>3 Παραγωγή Σωματιδίων μετά τον Πληθωρισμό</b>	<b>29</b>
3.1 Παραγωγή σωματιδίων μετά από πληθωρισμό χωρίς μη-τετριμμένους κινητικούς όρους . . . . .	29
3.2 Παραγωγή σωματιδίων μετά από πληθωρισμό με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους . . . . .	33
<b>A' Τανυστές Riemann και Einstein στο 4-διάστατο σύμπαν FRW</b>	<b>40</b>
A.1 Υπολογισμός της βαθμωτής καμπυλότητας R για το 4-διάστατο σύμπαν FRW . . . . .	40
A.2 Υπολογισμός του τανυστή Einstein για το 4-διάστατο σύμπαν FRW .	42
A.3 Εξισώσεις βαθμωτού πεδίου του Einstein από την αρχή ελάχιστης δράσης . . . . .	42
A.4 Εξισώσεις του Einstein από τη δράση βαθμωτού πεδίου με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους . . . . .	46
<b>B' Κώδικες Mathematica</b>	<b>50</b>





# Κεφάλαιο 1

## Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπύλους Χωροχρόνους

### 1.1 Κβάντωση του βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο πεδίων  $\phi(x)$  που διαδίδονται σε ένα καμπύλο χωρόχρονο με αναλλοίωτο στοιχείο διαστήματος

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

Αν το  $n$  δηλώνει τη διάσταση του χωροχρόνου τότε  $x^0$  θα είναι η χρονική συντεταγμένη και  $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$  θα είναι οι χωρικές. Η δράση  $S$  κατασκευάζεται από το πεδίο  $\phi$  έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτη κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων

$$S[\phi'(x), \partial' \phi(x'), g'_{\mu\nu}(x')] = S[\phi(x), \partial \phi(x), g_{\mu\nu}(x)]$$

Ο πιο απλός τρόπος να κατασκευάσουμε μια τέτοια δράση είναι να ξεκινήσουμε με τη δράση στο χωρόχρονο Minkowski και να αντικαταστήσουμε τους ταυσιές  $\eta^{\mu\nu}$  με τους ταυσιές  $g^{\mu\nu}$  και τους στοιχειώδεις όγκους  $d^n x$  με τους αναλλοίωτους στοιχειώδεις όγκους  $(-g)^{1/2} d^n x$  όπου  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Η απαίτηση η δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από μεταβολές στα πεδία, οι οποίες μηδενίζονται στα όρια της ολοκλήρωσης, δίνει τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα ενός βαθμωτού πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο είναι

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi] - V(\phi) \right\}$$

Σε όλο το κομμάτι της εργασίας θα χρησιμοποιούμε για την μετρική τη σύμβαση  $(+---)$ . Αντικατάσταση αυτής της Λαγκρανζιανής πυκνότητας στην εξίσωση Euler - Lagrange μας δίνει την εξίσωση κίνησης του βαθμωτού πεδίου. Υπολογίζουμε ξεχωριστά

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\sqrt{-g} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \equiv -\sqrt{-g} V_\phi$$

$$\begin{aligned}
& -\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = -\partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \right) - \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} \right) \\
& = -\partial_0 \left( \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi \right]}{\partial(\partial_0 \phi)} \right) - \partial_i \left( \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi \right]}{\partial(\partial_i \phi)} \right) \\
& = -\partial_0 \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \frac{\partial(\partial_\kappa \phi)}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \frac{\partial(\partial_\lambda \phi)}{\partial(\partial_0 \phi)} \right) \\
& - \partial_i \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \frac{\partial(\partial_\kappa \phi)}{\partial(\partial_i \phi)} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \frac{\partial(\partial_\lambda \phi)}{\partial(\partial_i \phi)} \right) \\
& = -\partial_0 \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{0\kappa} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{\lambda 0} \partial_\kappa \phi \right) - \partial_i \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{i\kappa} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa\lambda} \delta_{\lambda i} \partial_\kappa \phi \right) \\
& = -\partial_0 \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{0\lambda} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa 0} \partial_\kappa \phi \right) - \partial_i \left( \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{i\lambda} \partial_\lambda \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\kappa i} \delta_{\lambda i} \partial_\kappa \phi \right) \\
& = -\partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \phi) - \partial_i (\sqrt{-g} g^{ii} \partial_i \phi) = -\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα δύο αυτά αποτελέσματα καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} V_\phi = 0$$

$$\Rightarrow \square \phi + V_\phi = 0 \quad \text{με} \quad \square \phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] \quad (1.1)$$

Προχωράμε στην κβάντωση της θεωρίας προάγοντας το πεδίο  $\phi$  σε τελεστή  $\phi \rightarrow \hat{\phi}$  και ορίζοντας την συζυγή ορμή

$$\hat{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$$

Για την Λαγκρανζιανή πυκνότητα που μελετάμε η συζυγής ορμή είναι

$$\hat{\pi} = \sqrt{-g} \partial_0 \hat{\phi}$$

Επιβάλλουμε τις σχέσεις μετάθεσης των τελεστών  $\hat{\phi}$  και  $\hat{\pi}$  σε ίδιες χρονικές στιγμές

$$\begin{aligned}
[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\
[\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\
[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] &= \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2)
\end{aligned}$$

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των λύσεων της (1.1) ως

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int (-g)^{1/2} g^{0\nu} (\phi_1^*(x) \partial_\nu \phi_2(x) - \phi_2(x) \partial_\nu \phi_1^*(x)) d^3x \quad (1.3)$$

Αν βρούμε ένα σύνολο λύσεων που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$(\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{k}'}') = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\chi_{\mathbf{k}}^*, \chi_{\mathbf{k}'}^*) = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{k}'}^*) = 0$$

τότε το σύνολο αυτό είναι πλήρες και μπορούμε να αναπτύξουμε το πεδίο  $\phi$  στη βάση των  $\chi_{\mathbf{k}}$  ως

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \chi_{\mathbf{k}}^*(x))$$

Οι τελεστές  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  και  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}'] = 0 \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Υπάρχει μια κατάσταση κενού η οποία καταστρέφεται από όλους τους τελεστές καταστροφής  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0_{\chi}\rangle = 0 \quad \text{για όλα τα } \mathbf{k}$$

Από αυτήν την κατάσταση κενού μπορούμε να δημιουργήσουμε μια βάση Fock για τον χώρο Hilbert. Μια κατάσταση με  $n_{\mathbf{k}}$  διεγέρσεις δημιουργείται με την επαναλαμβανόμενη δράση του τελεστή δημιουργίας  $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  στο κενό

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{k}}} |0_{\chi}\rangle$$

και παρόμοια για καταστάσεις με διαφορετικό είδος διεγέρσεων. Μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή αριθμησης για κάθε συνάρτηση  $\chi_{\mathbf{k}}$

$$\hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

Ο κάτω δείκτης  $\chi$  στην κατάσταση κενού και στον τελεστή αριθμησης μας θυμίζουν ότι ορίζονται ως προς το σύνολο των λύσεων  $\chi_{\mathbf{k}}$ .

## 1.2 Συντελεστές Bogolyubov

Θεωρούμε το πιο γενικό πλαίσιο όπου ένας παρατηρητής ορίζει τα σωματίδια ως προς ένα πλήρες σύνολο λύσεων  $\chi_{\mathbf{k}}$  και ένας άλλος ως προς ένα διαφορετικό πλήρες σύνολο λύσεων  $\psi_{\mathbf{k}'}$ . Γενικά οι δύο αυτοί παρατηρητές θα διαφωνούν στο πόσα σωματίδια παρατηρούνται (ή αν παρατηρούνται καθόλου σωματίδια). Για να το δούμε αυτό είναι βολικό να αναπτύξουμε το ένα σύνολο λύσεων ως προς το άλλο (κάτι που είναι εφικτό αφού τα δύο σύνολα είναι πλήρη).

$$\chi_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'}(x) + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'}^*(x))$$

Ο μετασχηματισμός αυτός από το ένα σύνολο λύσεων στο άλλο είναι γνωστός ως μετασχηματισμός Bogolyubov και τα  $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ,  $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  που υλοποιούν τον μετασχηματισμό είναι οι συντελεστές Bogolyubov. Το πεδίο  $\hat{\phi}(x)$  μπορεί να αναπτυχθεί είτε στη βάση των  $\chi_{\mathbf{k}}$

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \chi_{\mathbf{k}}^*(x))$$

είτε στη βάση των  $\psi_{\mathbf{k}'}$

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{\mathbf{k}'} (\hat{b}_{\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'}(x) + \hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \psi_{\mathbf{k}'}^*(x))$$

Οι συντελεστές Bogolyubov μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τον μετασχηματισμό ανάμεσα στους τελεστές

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}) \quad (1.4)$$

και

$$\hat{b}_{\mathbf{k}'} = \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger})$$

Θα αποδείξουμε την (1.4). Για να το κάνουμε αυτό ξεκινάμε από το γεγονός ότι

$$(\chi_{\mathbf{k}}, \hat{\phi}) = \left( \chi_{\mathbf{k}}, \sum_{\mathbf{i}} (\hat{a}_{\mathbf{i}} \chi_{\mathbf{i}} + \hat{a}_{\mathbf{i}}^\dagger \chi_{\mathbf{i}}^*) \right) = \sum_{\mathbf{i}} \hat{a}_{\mathbf{i}} (\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{i}}) + \sum_{\mathbf{i}} \hat{a}_{\mathbf{i}}^\dagger (\chi_{\mathbf{k}}, \chi_{\mathbf{i}}^*) = \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}} &= (\chi_{\mathbf{k}}, \hat{\phi}) = \left( \chi_{\mathbf{k}}, \sum_{\mathbf{k}'} (\hat{b}_{\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'} + \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \psi_{\mathbf{k}'}^*) \right) = \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} (\chi_{\mathbf{k}}, \psi_{\mathbf{k}'}) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger (\chi_{\mathbf{k}}, \psi_{\mathbf{k}'}^*) \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \left( \sum_{\mathbf{i}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'}^*) \right) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \left( \sum_{\mathbf{i}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} \psi_{\mathbf{i}'}^*) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (\psi_{\mathbf{i}'}, \psi_{\mathbf{k}'}) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (\psi_{\mathbf{i}'}^*, \psi_{\mathbf{k}'}) + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \sum_{\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} (\psi_{\mathbf{i}'}, \psi_{\mathbf{k}'}^*) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \sum_{\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'} (\psi_{\mathbf{i}'}^*, \psi_{\mathbf{k}'}^*) \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* (-\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'})) = \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* - \sum_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger) \end{aligned}$$

Ας φανταστούμε τώρα ότι το σύστημα είναι στο  $\psi$ -κενό  $|0_\psi\rangle$ , στο οποίο δεν παρατηρούνται  $\psi$ -σωματίδια. Θα θέλαμε να μάθουμε πόσα σωματίδια παρατηρούνται από έναν παρατηρητή που χρησιμοποιεί τις λύσεις  $\chi$ . Υπολογίζουμε λοιπόν την αναμενόμενη τιμή του τελεστή αριθμησης  $\hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}}$  στο  $\psi$ -κενό

$$\begin{aligned} \langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} | 0_\psi \rangle &= \langle 0_\psi | \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} | 0_\psi \rangle \stackrel{(1.4)}{=} \langle 0_\psi | \sum_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'}) \sum_{\mathbf{i}'} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \hat{b}_{\mathbf{i}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger) | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{i}'} | 0_\psi \rangle - \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'} | 0_\psi \rangle + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger | 0_\psi \rangle \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\hat{b}|0_\psi\rangle = 0$  και  $\langle 0_\psi | \hat{b}^\dagger = 0$ . Χρησιμοποιώντας την σχέση  $[\hat{b}_{\mathbf{k}'}, \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \Rightarrow \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'}$  θα έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} | 0_\psi \rangle &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \langle 0_\psi | \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} + \hat{b}_{\mathbf{i}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} | 0_\psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}'}^* \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{i}'} \langle 0_\psi | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο ο μέσος αριθμός των  $\chi$ -σωματιδίων στο  $\psi$ -κενό έχει εκφραστεί ως προς τους συντελεστές Bogolyubov

$$\langle 0_\psi | \hat{n}_{\chi_{\mathbf{k}}} | 0_\psi \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2$$

Δεν υπάρχει κάποιος λόγος να μηδενιστεί αυτή η ποσότητα. Αυτό που φαίνεται σαν κενό σε έναν παρατηρητή είναι μια κατάσταση γεμάτη σωματίδια για έναν άλλον. Οι καταστάσεις κενού δεν συμπίπτουν.

### 1.3 Ασυμπτωτικές περιοχές Minkowski σε ένα 4-διάστατο σύμπαν FRW

Θεωρούμε το 4-διάστατο σύμπαν Friedmann - Robertson - Walker με στοιχειώδες μήκος

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2$$

όπου τα χωρικά μέρη επεκτείνονται ομοιόμορφα όπως περιγράφεται από τη συ-

νάρτηση  $a(t)$ . Η μετρική είναι της μορφής  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a^2(t) & & \\ & & -a^2(t) & \\ & & & -a^2(t) \end{pmatrix}$

και προφανώς  $\sqrt{-g} = a^3(t)$ . Μπορούμε από την (1.1) να βρούμε την εξίσωση κίνησης που θα ικανοποιεί ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  σε έναν τέτοιο χωρόχρονο

$$\begin{aligned} \square\phi + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow (-g)^{-1/2}\partial_\mu[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\partial_\mu[a^3(t)g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x)] + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\left(\partial_0[a^3(t)g^{00}\partial_0\phi] + \partial_i[a^3(t)g^{ij}\partial_j\phi]\right) + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\left(\partial_0[a^3(t)\partial_0\phi] + a^3(t)g^{ij}\partial_i\partial_j\phi\right) + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\left(3a^2(t)\dot{a}(t)\partial_0\phi + a^3(t)\partial_0\partial_0\phi + a^3(t)g^{ii}\partial_i\partial_i\phi\right) + V_\phi &= 0 \\ \Rightarrow a^{-3}(t)\left(3a^2(t)\dot{a}(t)\dot{\phi} + a^3\ddot{\phi} - a^3(t)a^{-2}(t)\sum_{i=1}^3\partial_i^2\phi\right) + V_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Καταλήξαμε έτσι στην εξίσωση

$$\ddot{\phi}(x) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}(x) - a^{-2}(t)\sum_{i=1}^3\partial_i^2\phi(x) + V_\phi = 0$$

Εξειδικεύουμε τη μελέτη σε ένα δυναμικό της μορφής  $V(\phi) = \frac{1}{2}[m_\phi^2\phi^2 + \zeta R(t)\phi^2]$ . Δίνουμε δηλαδή στο πεδίο  $\phi$  έναν όρο μάζας και του επιτρέπουμε να συζευχθεί με την καμπυλότητα  $R$ . Τότε η παραπάνω θα έχει τη μορφή

$$\ddot{\phi}(x) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}(x) - a^{-2}(t)\sum_{i=1}^3\partial_i^2\phi(x) + [m_\phi^2 + \zeta R(t)]\phi = 0 \quad (1.5)$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε το πεδίο  $\phi(x)$  ως προς την πλήρη βάση των  $\chi_{\mathbf{k}}$

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\chi_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

Αν αντικαταστήσουμε το  $\chi_{\mathbf{k}}$  στην (1.5) θεωρώντας επιπλέον ότι είναι της μορφής  $\chi_{\mathbf{k}} \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\chi_{\mathbf{k}}(t)$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - a^{-2}(t)(i\mathbf{k})^2\chi_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + [m_\phi^2 + \zeta R(t)]\chi_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + \left[\frac{k^2}{a^2(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t)\right]\chi_{\mathbf{k}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Είναι βολικό να απαλλαγούμε από τον όρο με την πρώτη παράγωγο του  $\chi_{\mathbf{k}}$ . Αυτό γίνεται γενικά, για μια εξίσωση της μορφής  $\ddot{\chi}(t) + A(t)\dot{\chi}(t) + B(t)\chi(t) = 0$ , μέσω του μετασχηματισμού  $\chi(t) = f(t)h(t)$ . Βρίσκουμε τότε μια καινούργια εξίσωση και η απαίτηση να εξαλειφεται η πρώτη παράγωγος οδηγεί στον προσδιορισμό της συνάρτησης  $f(t)$ :

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2} \int A(t) dt} \quad , \quad \dot{f}(t) = -\frac{A(t)}{2} f(t) \quad , \quad \ddot{f}(t) = \left[ -\frac{\dot{A}(t)}{2} + \frac{A^2(t)}{4} \right] f(t)$$

Παρατηρούμε ότι τα  $\dot{f}(t)$  και  $\ddot{f}(t)$  είναι πολλαπλάσια του  $f(t)$ , οπότε το ίδιο το  $f(t)$  δεν θα εμφανίζεται στην εξίσωση. Η εξίσωση για το  $h(t)$  θα είναι τότε της μορφής

$$\ddot{h}(t) + \left[ B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4} \right] h(t) = 0$$

Για την εξίσωση (1.6) βλέπουμε εύκολα ότι

$$A(t) = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad , \quad B(t) = \left[ \frac{k^2}{a^2(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t) \right]$$

και

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2} \int 3 \frac{\dot{a}(t')}{a(t')} dt'} = e^{-\frac{3}{2} \int \frac{d \ln(a(t'))}{dt'} dt'} = e^{-\frac{3}{2} \ln(a(t))} = e^{\ln [a(t)^{-\frac{3}{2}}]} = \frac{1}{a^{3/2}(t)}$$

Δηλαδή αν γράψουμε

$$\chi_{\mathbf{k}}(t) \equiv f(t)h_{\mathbf{k}}(t) = \frac{h_{\mathbf{k}}(t)}{a^{3/2}(t)}$$

η (1.6) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ m_\phi^2 + \frac{k^2}{a^2(t)} + \zeta R(t) - \frac{1}{2} 3 \left( \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) - \frac{1}{4} 9 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] h_{\mathbf{k}}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ m_\phi^2 + \frac{k^2}{a^2(t)} + \zeta R(t) - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] h_{\mathbf{k}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση  $a(t)$  έχει τέτοια μορφή που στο μακρινό παρελθόν και μέλλον έχει σταθερή τιμή (και οι παράγωγοί της μηδενίζονται) τότε σε αυτές τις περιοχές, που θα τις ονομάσουμε “μέσα” και “έξω”, ανακτούμε την κβαντική θεωρία πεδίου σε χωρόχρονο Minkowski. Έτσι για την (1.7) μπορούμε να βρούμε μια λύση  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t)$  η οποία στο μακρινό παρελθόν θα είναι  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-i\omega_{in}t}}{\sqrt{2\omega_{in}}}$  αλλά και μια λύση  $h_{\mathbf{k}}^{out}(t)$  η οποία στο μακρινό μέλλον θα είναι  $h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\omega_{out}t}}{\sqrt{2\omega_{out}}}$ . Μπορούμε λοιπόν να βρούμε δύο σύνολα λύσεων

$$\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \quad \text{και} \quad \chi_{\mathbf{k}}^{out}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{out}(t)}{a(t)^{3/2}}$$

Το πεδίο  $\phi(x)$  μπορεί να αναπτυχθεί ως προς το πρώτο σύνολο

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \chi_{\mathbf{k}}^{in*}(x) \right]$$

ή ως προς το δεύτερο

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}'} \left[ \hat{b}_{\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}'}^{out}(x) + \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}(x) \right]$$

Ας δούμε ποια είναι η συνθήκη ώστε τα δύο αυτά σύνολα να είναι πλήρη. Θυμίζουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου (1.3)

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int (-g)^{1/2} g^{0\nu} (\phi_1^*(x) \partial_\nu \phi_2(x) - \phi_2(x) \partial_\nu \phi_1^*(x)) d^3x$$

Βρίσκουμε για τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}$

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) &= i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \\ &= i a(t)^3 \left[ \frac{h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \left( \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{5/2}} \dot{a}(t) \right) - \frac{h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \left( \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{5/2}} \dot{a}(t) \right) \right] \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x \\ &= i a(t)^3 \left[ \frac{h_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} - \frac{h_{\mathbf{k}'}^{in}(t)}{a(t)^{3/2}} \frac{\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)}{a(t)^{3/2}} \right] \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x \\ &= i [h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}'}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x \\ &= i [h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}'}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι για  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  το αποτέλεσμα είναι μηδέν λόγω της συνάρτησης δέλτα. Για να δούμε τι γίνεται στην περίπτωση  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  θεωρούμε ότι τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)$  βρίσκονται μέσα σε ένα κουτί όγκου  $V$  τον οποίο θα αφήσουμε να πάει στο άπειρο. Αν το κάνουμε αυτό η συνάρτηση δέλτα παίρνει τη μορφή

$$\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} d^3x$$

και για  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  θα έχουμε

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

Με αυτόν τον ισχυρισμό το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) &= i [h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}'}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] (2\pi)^3 \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= i [h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

Φαίνεται τώρα ότι αν θέλουμε τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)$  να είναι ορθοκανονικά θα πρέπει αρχικά να ενσωματώσουμε την παράμετρο  $V$  μέσα τους γράφοντας

$$\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \quad (1.8)$$

και στη συνέχεια να απαιτήσουμε να είναι

$$i [h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t)] = 1$$

ή αλλιώς

$$h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) = i \quad (1.9)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η ποσότητα  $h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in*}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t)$  δεν είναι τίποτα άλλο από την Wroskian της (1.7) η οποία ξέρουμε ότι είναι χρονοανεξάρτητη,

απλά τώρα απαιτήσαμε να έχει και συγκεκριμένη τιμή. Δείξαμε λοιπόν ότι με τον ορισμό (1.8) και την απαίτηση (1.9) θα είναι

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι δεδομένης της απαίτησης (1.9) μπορούμε να γράψουμε

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{in*}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in*}) = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \text{και} \quad (\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in*}) = 0$$

Εντελώς όμοιες σχέσεις θα ισχύουν και για τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{out}(x)$  με τον ορισμό

$$\chi_{\mathbf{k}}^{out}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}}$$

Θα έχουμε δηλαδή

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{out}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad , \quad (\chi_{\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}) = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad , \quad (\chi_{\mathbf{k}}^{out}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}) = 0$$

Τώρα λοιπόν που έχουμε κάνει τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)$  και  $\chi_{\mathbf{k}}^{out}(x)$  ορθοκανονικά μπορούμε να γράψουμε το ένα ως προς το άλλο με έναν μετασχηματισμό Bogolyubov της μορφής

$$\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) = \sum_{\mathbf{k}'} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}'}^{out}(x) + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \chi_{\mathbf{k}'}^{out*}(x)] \quad (1.10)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τα εσωτερικά γινόμενα που προκύπτουν λόγω της μορφής (1.10)

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= (\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \sum_{\mathbf{i}} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}} \chi_{\mathbf{i}}^{out} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}} \chi_{\mathbf{i}}^{out*}]) \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{i}}^{out}) + \sum_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{i}}^{out*}) = \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}} \delta_{\mathbf{i}\mathbf{k}'} = \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

και όμοια

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= (\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \sum_{\mathbf{i}} [\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}} \chi_{\mathbf{i}}^{out} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}} \chi_{\mathbf{i}}^{out*}]) \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{i}} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{i}}^{out}) + \sum_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{i}}^{out*}) = \sum_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{i}} (-\delta_{\mathbf{i}\mathbf{k}'} ) = -\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

Ας δούμε τι παίρνουμε για τα ίδια εσωτερικά γινόμενα από τον ορισμό τους

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{out*}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{out*}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \\ &\sim \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

και όμοια

$$\begin{aligned} (\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}'}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \\ &\sim \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$



Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούμε να γράψουμε για τους συντελεστές Bogolyubov

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \alpha_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \beta_{\mathbf{k}}\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}\end{aligned}$$

και η εξίσωση (1.10) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x) &= \sum_{\mathbf{k}'} [\alpha_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\chi_{\mathbf{k}'}^{out}(x) + \beta_{\mathbf{k}}\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}\chi_{\mathbf{k}'}^{out*}(x)] \\ &= \alpha_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}^{out}(x) + \beta_{\mathbf{k}}\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}(x)\end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε το  $\beta_{\mathbf{k}}$  δρούμε στην παραπάνω από αριστερά με  $\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}$

$$(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in}) = \beta_{\mathbf{k}'}(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{-\mathbf{k}'}^{out*}) = -\beta_{\mathbf{k}'}\delta_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$$

Βρίσκουμε λοιπόν

$$\beta_{\mathbf{k}} = -(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in})$$

και πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in}) &= i \int a(t)^3 \left[ \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \partial_t \left( \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} a(t)^{3/2}} \right) \right] d^3x \\ &= i(h_{\mathbf{k}}^{out}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t))\end{aligned}$$

άρα

$$\beta_{\mathbf{k}} = i(h_{\mathbf{k}}^{in}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t) - h_{\mathbf{k}}^{out}(t)\dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t)) \quad (1.11)$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.2 ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση  $\mathbf{k}$  που θα μετρήσει στο  $\chi^{out}$  κενό ένας παρατηρητής που χρησιμοποιεί τις λύσεις  $\chi^{in}$  θα είναι

$$\langle 0_{\chi^{out}} | \hat{n}_{\chi^{in}} | 0_{\chi^{out}} \rangle = \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 = \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}}\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 = |\beta_{\mathbf{k}}|^2$$

Τέλος από την ορθοκανονικότητα των λύσεων προκύπτει

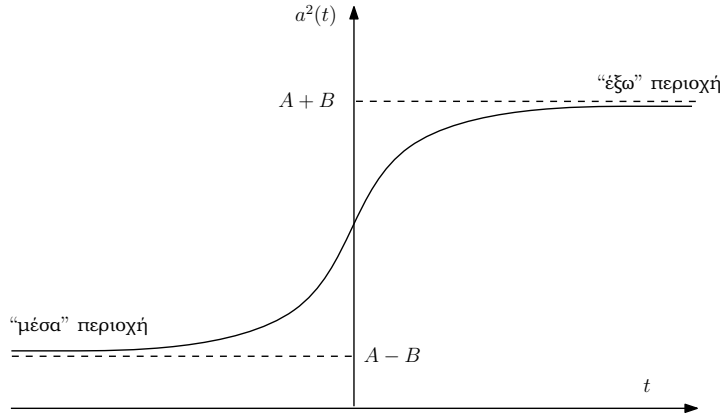
$$\begin{aligned}(\chi_{\mathbf{k}}^{in}, \chi_{\mathbf{k}'}^{in*}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \Rightarrow (\alpha_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}^{out} + \beta_{\mathbf{k}}\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \alpha_{\mathbf{k}'}\chi_{\mathbf{k}'}^{out} + \beta_{\mathbf{k}'}\chi_{-\mathbf{k}'}^{out*}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \Rightarrow \alpha_{\mathbf{k}}^*\alpha_{\mathbf{k}'}(\chi_{\mathbf{k}}^{out}, \chi_{\mathbf{k}'}^{out}) + \beta_{\mathbf{k}}^*\beta_{\mathbf{k}'}(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{-\mathbf{k}'}^{out*}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \Rightarrow \alpha_{\mathbf{k}}^*\alpha_{\mathbf{k}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \beta_{\mathbf{k}}^*\beta_{\mathbf{k}'}(-\delta_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ \Rightarrow |\alpha_{\mathbf{k}}|^2 - |\beta_{\mathbf{k}}|^2 &= 1\end{aligned} \quad (1.12)$$

## 1.4 Παραγωγή σωματιδίων σε 4-διάστατο σύμπαν FRW με ασυμπτωτικές περιοχές Minkowski

Μια μορφή της συνάρτησης  $a(t)$  η οποία μπορεί να μετατρέψει τον χωρόχρονο FRW σε Minkowski στο μακρινό παρελθόν και μέλλον είναι η

$$a^2(t) = A + B \tanh(\rho t) \quad \text{με } A, B, \rho \text{ σταθερά}$$

η οποία έχει τη μορφή του σχήματος 1.1.



Σχήμα 1.1: Ο παράγοντας  $a^2(t) = A + B \tanh(\rho t)$  αντιπροσωπεύει ένα ασυμπτωτικά στατικό σύμπαν το οποίο υπόκειται σε μια περίοδο ομαλής επέκτασης.

Είναι βολικό να δουλέψουμε με αδιάστατες ποσότητες. Ορίζουμε τον αδιάστατο χρόνο  $\tau = M_{pl}t$ . Τότε η (1.6) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} M_{pl}^2 \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(\tau) + 3M_{pl} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} M_{pl}(\tau) \dot{\chi}_{\mathbf{k}} + \left[ \frac{k^2}{a^2(\tau)} + m_\phi^2 + \zeta R(\tau) \right] \chi_{\mathbf{k}}(\tau) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(\tau) + 3 \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} \dot{\chi}_{\mathbf{k}} + \left[ \frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(\tau)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_{pl}^2} \right] \chi_{\mathbf{k}}(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

με

$$a(\tau) = \sqrt{A + B \tanh\left(\rho \frac{\tau}{M_{pl}}\right)}$$

όπου τώρα η τελεία  $\cdot$  δηλώνει παραγώγιση ως προς το χρόνο  $\tau$ . Όπως δείξαμε στο παράρτημα Α.1 η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci έχει τη μορφή (Α.2)

$$R(t) = 6 \frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \quad \rightarrow \quad R(\tau) = 6M_{pl}^2 \frac{\ddot{a}(\tau)a(\tau) + \dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο που παρουσιάσαμε στην ενότητα 1.3 μπορούμε να απαλλαγούμε από την πρώτη παράγωγο της διαφορικής οριζοντιας  $\chi_{\mathbf{k}}(\tau) = f(\tau)h_{\mathbf{k}}(\tau)$ . Τότε η (1.13) παίρνει τη μορφή

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(\tau) + \left[ B(\tau) - \frac{\dot{A}(\tau)}{2} - \frac{A^2(\tau)}{4} \right] h_{\mathbf{k}}(\tau) = 0$$

με

$$A(\tau) = 3 \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)}, \quad B(\tau) = \frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(\tau)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_{pl}^2}$$

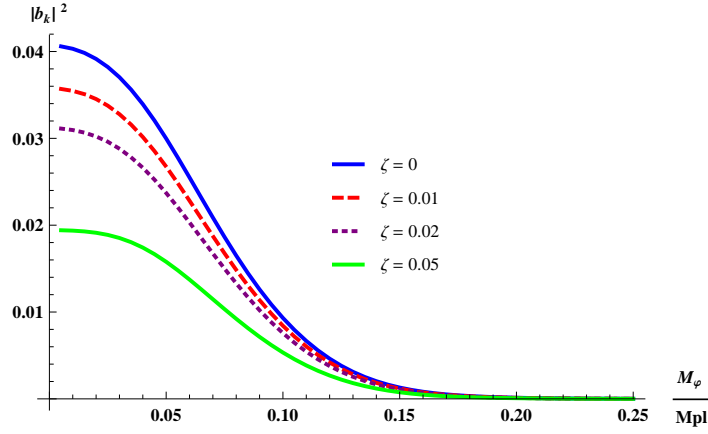
ή αλλιώς

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(\tau) + \Omega^2(\tau) h_{\mathbf{k}}(\tau) = 0 \quad (1.14)$$

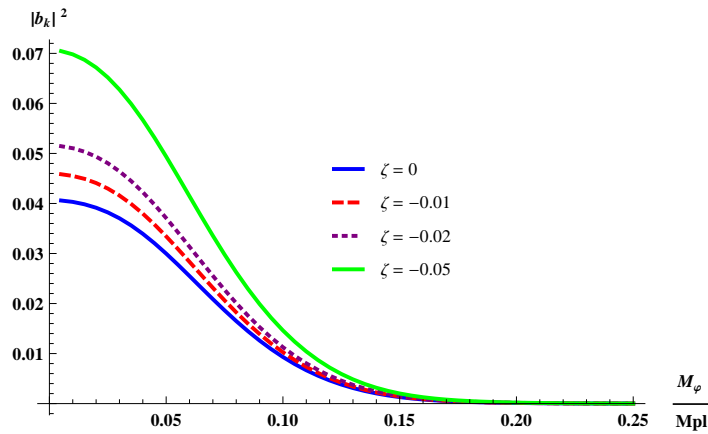
με

$$\Omega(\tau) = \sqrt{\frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(\tau)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_{pl}^2} - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

Η μορφή του  $a(\tau)$  είναι τέτοια που στο μακρινό παρελθόν/μέλλον οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι του μηδενίζονται. Συνεπώς τότε θα μηδενίζεται και η καμπυλότητα  $R$ . Η αρχική και τελική τιμή του  $\Omega$  θα είναι  $\omega_{in} = \sqrt{\frac{k^2}{M_{pl}^2(A-B)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2}}$  και  $\omega_{out} = \sqrt{\frac{k^2}{M_{pl}^2(A+B)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2}}$  αντίστοιχα. Λύνουμε αριθμητικά με τη βοήθεια του mathematica τη διαφορική (1.14) πρώτα για αρχική συνθήκη  $h_{\mathbf{k}}^{in}(\tau_-) = \frac{e^{-i\omega_{in}\tau_-}}{\sqrt{2\omega_{in}}}$  και στη συνέχεια για αρχική συνθήκη  $h_{\mathbf{k}}^{out}(\tau_+) = \frac{e^{-i\omega_{out}\tau_+}}{\sqrt{2\omega_{out}}}$ . Αντικαθιστούμε τις δύο λύσεις που προκύπτουν στην σχέση (1.11). Μπορούμε τότε για κατάλληλες παραμέτρους να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση του μέσου αριθμού σωματιδίων στην κατάσταση  $\mathbf{k}$ ,  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ , συναρτήσει της μάζας των σωματιδίων που παράγονται,  $m_\phi$ . Τα αποτελέσματα είναι



Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$  για θετικές τιμές της σύζευξης  $\zeta$



Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$  για αρνητικές τιμές της σύζευξης  $\zeta$

Παρατηρούμε τη μείωση του αριθμού σωματιδίων που παράγονται με την αύξηση της μάζας καθώς και αλλαγές στον αριθμό παραγόμενων σωματιδίων ίδιας μάζας ανάλογα τη σύζευξη  $\zeta$ .

## 1.5 Μη-τετριμμένοι κινητικοί όροι βαθμωτού πεδίου στο σύμπαν FRW

Μέχρι τώρα μελετούσαμε μια Λαγκρανζιανή πυκνότητα της μορφής

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi] - V(\phi) \right\}$$

Αν εισαγάγουμε έναν κινητικό όρο  $\lambda G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ , όπου  $G^{\mu\nu}$  ο τανυστής Einstein και η σύζευξη  $\lambda$  έχει μονάδες  $[\lambda] = M_{pl}^{-2}$ , η παράπάνω Λαγκρανζιανή παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}$$

και η εξίσωση Klein - Gordon (1.1) γίνεται

$$\square \phi + V_\phi = 0 \quad \text{με} \quad \square \phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[ (-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\nu \phi \right]$$

Μπορούμε να βρούμε την εξίσωση κίνησης που θα ικανοποιεί ένα βαθμωτό πεδίο τότε

$$\begin{aligned} & \square \phi + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & (-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[ (-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\nu \phi \right] + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \partial_\mu \left[ a^3(t) [g^{\mu\nu} + \lambda G^{\mu\nu}] \partial_\nu \phi(x) \right] + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( \partial_0 [a^3(t) [g^{00} + \lambda G^{00}] \partial_0 \phi] + \partial_i [a^3(t) [g^{ij} + \lambda G^{ij}] \partial_j \phi] \right) + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( \partial_0 [a^3(t) \partial_0 \phi] + \partial_0 \left[ \lambda a^3(t) \left( -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \partial_0 \phi \right] \right. \\ & \quad \left. + a^3(t) [g^{ij} + \lambda G^{ij}] \partial_i \partial_j \phi \right) + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( 3a^2(t) \dot{a}(t) \partial_0 \phi + a^3(t) \partial_0 \partial_0 \phi - 3\lambda \dot{a}^3(t) \partial_0 \phi - 6\lambda a(t) \dot{a}(t) \ddot{a}(t) \partial_0 \phi \right. \\ & \quad \left. - 3\lambda a(t) \dot{a}^2(t) \partial_0 \partial_0 \phi + a^3(t) g^{ii} \partial_i \partial_i \phi + \lambda a^3(t) G^{ii} \partial_i \partial_i \phi \right) + V_\phi = 0 \\ \Rightarrow & a^{-3}(t) \left( 3a^2(t) \dot{a}(t) \dot{\phi} + a^3(t) \ddot{\phi} - 3\lambda \dot{a}^3(t) \dot{\phi} - 6\lambda a(t) \dot{a}(t) \ddot{a}(t) \dot{\phi} \right. \\ & \quad \left. - 3\lambda a(t) \dot{a}^2(t) \ddot{\phi} - a^3(t) a^{-2}(t) \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi + \lambda a^3(t) \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi \right) + V_\phi = 0 \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει από το παράρτημα Α.2 τις συνιστώσες του τανυστή Einstein

$$G^{00} = -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \quad \text{και} \quad G^{ii} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}$$

Καταλήξαμε έτσι στην εξίσωση κίνησης

$$\begin{aligned} & \left[1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right] \ddot{\phi}(x) + 3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right] \dot{\phi}(x) \\ & + \left[ -a^{-2}(t) \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi(x) + \lambda \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 \phi(x) \right] + V_\phi = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Χρησιμοποιούμε ένα δυναμικό της μορφής  $V(\phi) = \frac{1}{2} [m_\phi^2 \phi^2 + \zeta R(t) \phi^2]$  και αναπτύσσουμε το πεδίο  $\phi$  ως προς ένα πλήρες σύνολο λύσεων  $\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \chi_{\mathbf{k}}^*(x)]$  τις οποίες θεωρούμε να έχουν τη μορφή  $\chi_{\mathbf{k}}(x) \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \chi_{\mathbf{k}}(t)$ . Τότε η εξίσωση (1.15) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \left[1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right] \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + 3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right] \dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) \\ & + \left[ \frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t) \right] \chi_{\mathbf{k}}(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το τέχνασμα της ενότητας 1.3 γράφοντας  $\chi_{\mathbf{k}}(t) = f(t)h_{\mathbf{k}}(t)$ , η (1.16) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \left[ B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4} \right] h_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (1.17)$$

με

$$A(t) = \frac{3 \left[ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda \left( \frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)} \right) \right]}{1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}, \quad B(t) = \frac{\frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + m_\phi^2 + \zeta R(t)}{1 - 3\lambda \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

και

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}}$$

Οι λύσεις  $\chi_{\mathbf{k}}$  θα έχουν τη μορφή

$$\chi_{\mathbf{k}}(x) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(t) h_{\mathbf{k}}(t) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}(t)}{\sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}}$$

Ας δούμε πως οι λύσεις αυτές γίνονται ορθοκανονικές ώστε να μπορούμε να ορίσουμε συντελεστές Bogolyubov. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int (-g)^{1/2} [g^{0\nu} + \lambda G^{0\nu}] (\phi_1^*(x) \partial_\nu \phi_2(x) - \phi_2(x) \partial_\nu \phi_1^*(x)) d^3x$$

απ' όπου προκύπτει

$$\begin{aligned} & (\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x), \chi_{\mathbf{k}'}^{in}(x)) = \\ & = i \left( \frac{a^2(t) - 3\lambda \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) (h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) \left( \frac{a(t)^3}{a(t) [3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)]} \right) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ & = -i (h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε ξανά την υπόθεση ότι οι λύσεις  $\chi_{\mathbf{k}}(x)$  βρίσκονται μέσα σε ένα κουτί όγκου  $V$  και το εσωτερικό γινόμενο παίρνει τη μορφή

$$(\chi_{\mathbf{k}}^{in}(x), \chi_{\mathbf{k}'}^{in}(x)) = -i(h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

Φαίνεται τώρα ότι αν θέλουμε τα  $\chi_{\mathbf{k}}^{in}$  να είναι ορθοκανονικά θα πρέπει αρχικά να ενσωματώσουμε την παράμετρο  $V$  γράφοντας

$$\chi_{\mathbf{k}}(x) = \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}}$$

και στη συνέχεια να απαιτήσουμε να είναι

$$-i(h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*}) = 1$$

ή αλλιώς

$$h_{\mathbf{k}}^{in*} \dot{h}_{\mathbf{k}'}^{in} - h_{\mathbf{k}'}^{in} \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in*} = i$$

Ο συντελεστής Bogolyubov  $\beta_{\mathbf{k}}$  που χρειαζόμαστε δίνεται από τη σχέση

$$\beta_{\mathbf{k}} = -(\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}, \chi_{\mathbf{k}}^{in})$$

και πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} (\chi_{-\mathbf{k}}^{out*}(x), \chi_{\mathbf{k}}^{in}(x)) &= \\ &= i \int a(t)^3 \left( \frac{a^2(t) - 3\lambda \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \left[ \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \partial_t \left( \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} h_{\mathbf{k}}^{in}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \partial_t \left( \frac{e^{i(-\mathbf{k})\mathbf{x}} h_{-\mathbf{k}}^{out}(t)}{V^{1/2} \sqrt{a(t)} \sqrt{3\lambda \dot{a}^2(t) - a^2(t)}} \right) \right] d^3x \\ &= -i(h_{-\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{-\mathbf{k}}^{out}(t)) \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}} \\ &= -i(h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t)) \end{aligned}$$

άρα

$$\beta_{\mathbf{k}} = i(h_{\mathbf{k}}^{out}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{in}(t) - h_{\mathbf{k}}^{in}(t) \dot{h}_{\mathbf{k}}^{out}(t)) \quad (1.18)$$

Αυτός είναι ο συντελεστής Bogolyubov που χρειαζόμαστε για τη μελέτη της παραγωγής σωματιδίων στη νέα κατάσταση.

Ξεκινάμε γράφοντας την (1.16) συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου  $\tau = M_{pl} t$

$$\begin{aligned} \left[ 1 - 3\lambda M_{pl}^2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)} \right] \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(\tau) + 3 \left[ \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} - \lambda M_{pl}^2 \left( \frac{\dot{a}^3(\tau)}{a^3(\tau)} + \frac{2\dot{a}(\tau)\ddot{a}(\tau)}{a^2(\tau)} \right) \right] \dot{\chi}_{\mathbf{k}}(\tau) \\ + \left[ \frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(\tau)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(\tau)a(\tau) + \dot{a}^2(\tau)}{a^4(\tau)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_{pl}} \right] \chi_{\mathbf{k}}(\tau) = 0 \end{aligned}$$

Γράφοντας  $\chi_{\mathbf{k}}(\tau) = f(\tau)h(\tau)$  καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(\tau) + \left[ B(\tau) - \frac{\dot{A}(\tau)}{2} - \frac{A^2(\tau)}{4} \right] h_{\mathbf{k}}(\tau) = 0 \quad (1.19)$$

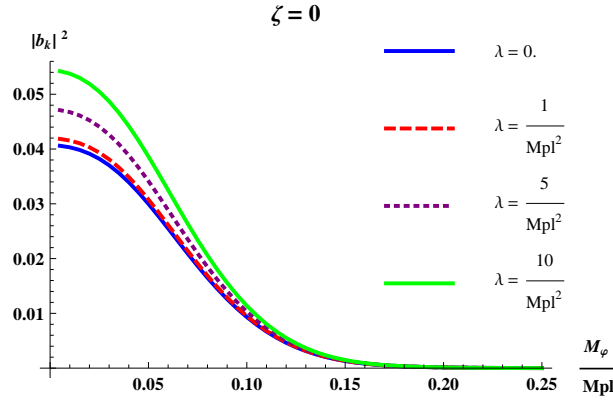
με

$$A(\tau) = \frac{3 \left[ \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} - \lambda M_{pl}^2 \left( \frac{\dot{a}^3(\tau)}{a^3(\tau)} + \frac{2\dot{a}(\tau)\ddot{a}(\tau)}{a^2(\tau)} \right) \right]}{1 - 3\lambda M_{pl}^2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

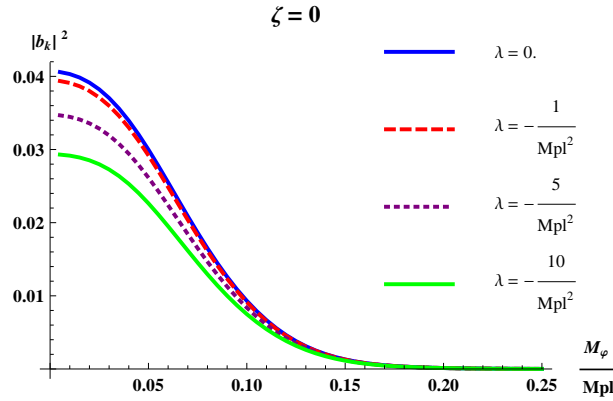
και

$$B(\tau) = \frac{\frac{k^2}{M_{pl}^2 a^2(\tau)} - \lambda k^2 \frac{2\ddot{a}(\tau)a(\tau) + \dot{a}^2(\tau)}{a^4(\tau)} + \frac{m_\phi^2}{M_{pl}^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_{pl}^2}}{1 - 3\lambda M_{pl}^2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

Οι αρχικές και οι τελικές μορφές των λύσεων θα είναι και εδώ  $h_{\mathbf{k}}^{in}(\tau_-) = \frac{e^{-i\omega_{in}\tau_-}}{\sqrt{2\omega_{in}}}$  και  $h_{\mathbf{k}}^{out}(\tau_+) = \frac{e^{-i\omega_{out}\tau_+}}{\sqrt{2\omega_{out}}}$  αφού οι παράγωγοι του  $a(\tau)$  μηδενίζονται ξανά στο μακρινό παρελθόν/μέλλον. Από την αριθμητική λύση της (1.19) προκύπτουν

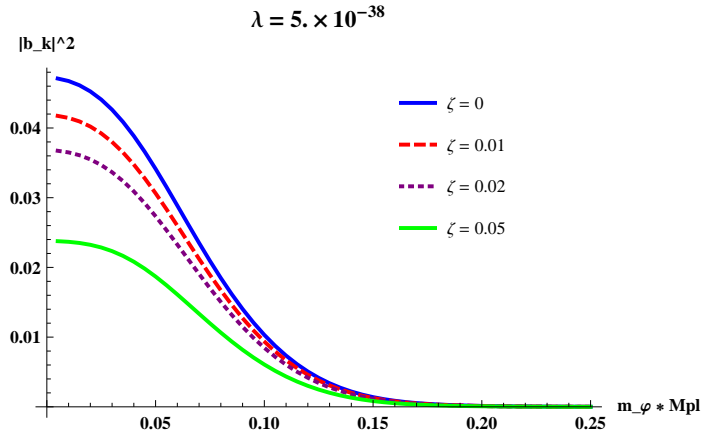


Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$  για θετικές τιμές της σύζευξης  $\lambda$

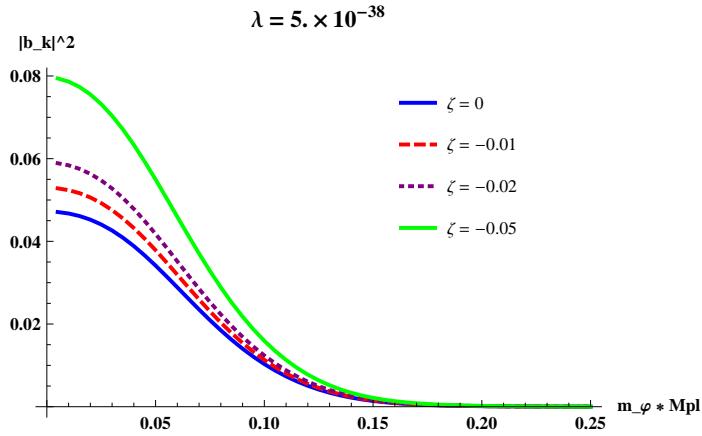


Σχήμα 1.5: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$  για αρνητικές τιμές της σύζευξης  $\lambda$

Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε τη μείωση του αριθμού σωματιδίων που παράγονται με την αύξηση της μάζας καθώς και αλλαγές στον αριθμό παραγόμενων σωματιδίων ίδιας μάζας ανάλογα τη σύζευξη  $\lambda$ . Για θετικά  $\lambda$  τα παραγόμενα σωματίδια αυξάνονται ενώ για αρνητικά  $\lambda$  μειώνονται. Μπορούμε επιπλέον να επιλέξουμε μια τιμή του  $\lambda$ , έστω  $\lambda = 5 \cdot 10^{-38}$ , και να φτιάξουμε τα διαγράμματα για διαφορετικές συζεύξεις  $\zeta$  της καμπυλότητας  $R$ . Τα αποτελέσματα είναι



Σχήμα 1.6: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$  για θετικές τιμές της σύζευξης  $\zeta$ , με  $\lambda = 5 \cdot 10^{-38}$



Σχήμα 1.7: Γραφική παράσταση του  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $m_\phi$  για αρνητικές τιμές της σύζευξης  $\zeta$ , με  $\lambda = 5 \cdot 10^{-38}$

Εδώ τα παραγόμενα σωματίδια μειώνονται για θετικά  $\zeta$  και αυξάνονται για αρνητικά.

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να αναπτύξουμε την παραπάνω μελέτη σε μία πιο ρεαλιστική κατάσταση. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε το μοντέλο του πληθωρισμού (inflation) το οποίο θεωρείται ότι ακολούθησε τη Μεγάλη Έκρηξη. Ο πληθωρισμός καθορίζεται από ένα κλασικό βαθμωτό πεδίο  $\phi$ . Μετά το τέλος του πληθωρισμού θεωρούμε ότι το σύμπαν βρίσκεται στη φάση που επικρατεί η ύλη (matter domination) και προσπαθούμε να συζεύξουμε το πεδίο  $\phi$  με ένα κβαντικό πεδίο  $X$  ώστε να μελετήσουμε τις αλλαγές στην παραγωγή σωματιδίων.



## Κεφάλαιο 2

# Πληθωρισμός (inflation)

### 2.1 Το βαθμωτό πεδίο $\phi$ (inflaton) που καθοδηγεί τον πληθωρισμό

Δεν θα αναπτύξουμε πλήρως την ιδέα του πληθωρισμού καθώς αυτό είναι ένα θέμα από μόνο του. Ο πληθωρισμός τοποθετείται ακριβώς μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, διαρκεί ελάχιστα και φαίνεται απαραίτητος ώστε να γίνουν κατανοητές παρατηρήσεις που δεν μπορούν να εξηγηθούν χρησιμοποιώντας μόνο το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης.

Θεωρούμε ένα 4-διάστατο σύμπαν FRW με μετρική  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2$  και ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$  το οποίο είναι ομογενές και εξαρτάται μόνο από το χρόνο  $t$ . Ξεκινάμε από τη δράση

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

Όπως δείχνουμε στο παράρτημα Α.3 μεταβολή αυτής της δράσης ως προς  $\delta g^{\mu\nu}$  οδηγεί στις εξισώσεις πεδίου του Einstein (Α.9)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

με τον τανυστή ενέργειας-ορμής (Α.10)

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + g_{\mu\nu} V(\phi)$$

Παίρνουμε το χρονικό κομμάτι των εξισώσεων του Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} &= -8\pi G T_{00} \\ \Rightarrow G_{00} &= -8\pi G \left[ \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + g_{00} V(\phi) \right] \\ \Rightarrow G_{00} &= -8\pi G \left[ \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + V(\phi) \right] \\ \Rightarrow -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= -8\pi G \left[ \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{1}{2} \dot{\phi} \dot{\phi} + V(\phi) \right] \end{aligned}$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση Friedmann

$$H^2(t) = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] \quad (2.1)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει  $G = M_{pl}^{-2}$  και έχουμε ορίσει την παράμετρο Hubble  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ . Αν πάρουμε το χωρικό κομμάτι των εξισώσεων του Einstein θα έχουμε

$$\begin{aligned}
G_{ii} &= -8\pi G T_{ii} \\
\Rightarrow G_{ii} &= -8\pi G \left[ \partial_i \phi \partial_i \phi - \frac{1}{2} g_{ii} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + g_{ii} V(\phi) \right] \\
\Rightarrow G_{ii} &= -8\pi G \left[ -\frac{1}{2} g_{ii} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + g_{ii} V(\phi) \right] \\
\Rightarrow 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \left[ -\frac{1}{2} (-a^2(t)) \dot{\phi}^2 - a^2(t) V(\phi) \right] \\
\Rightarrow 2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right]
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς για την πυκνότητα ενέργειας  $\rho_\phi \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$  και την πίεση  $p_\phi \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$  και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την (2.1) προκύπτει η εξίσωση επιτάχυνσης

$$\begin{aligned}
2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho_\phi &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} p_\phi \\
\Rightarrow 2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} p_\phi - \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho_\phi \\
\Rightarrow \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi}{3M_{pl}^2} (\rho_\phi + 3p_\phi) \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Τέλος το πεδίο  $\phi$  ικανοποιεί την εξίσωση Klein - Gordon

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}(t) + V_\phi &= 0 \\
\Rightarrow \ddot{\phi}(t) + 3H(t)\dot{\phi}(t) + V_\phi &= 0
\end{aligned}$$

αφού εξαρτάται μόνο από το χρόνο.

Ορίζουμε τον πληθωρισμό (inflation) να είναι η χρονική περίοδος κατά την οποία  $\ddot{a}(t) > 0$ , μια επιταχυνόμενη διαστολή. Αυτό μπορεί να γραφτεί

$$inflation \equiv \ddot{a}(t) > 0 \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{H^{-1}(t)}{a(t)} \right) < 0 \equiv p_\phi < -\frac{\rho_\phi}{3}$$

Ο ορισμός  $\frac{d}{dt} \left( \frac{H^{-1}(t)}{a(t)} \right) < 0$  είναι αυτός που έχει ένα άμεσο γεωμετρικό νόημα. Σημαίνει ότι το μήκος Hubble ( $H^{-1}$ ), μετρημένο ως προς τις συν-κινούμενες συντεταγμένες  $\frac{H^{-1}}{a}$ , μειώνεται κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Επιστρέφουμε στις εξισώσεις του πεδίου  $\phi$  που θα ονομάζουμε inflaton

$$H(t)^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] \tag{2.3}$$

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} + V_\phi = 0 \tag{2.4}$$

Από τον τελευταίο ορισμό για τον πληθωρισμό που προκύπτει άμεσα από την εξίσωση επιτάχυνσης (2.2) έχουμε

$$\ddot{a} > 0 \iff p_\phi < -\frac{\rho_\phi}{3} \iff \frac{\dot{\phi}^2}{2} < V(\phi)$$

Δηλαδή έχουμε πληθωρισμό όταν ο όρος της δυναμικής ενέργειας επικρατεί. Αυτό είναι πιθανό αν το δυναμικό είναι αρκετά επίπεδο ώστε το βαθμωτό πεδίο να “κυλάει” αργά. Επιπλέον το δυναμικό πρέπει να έχει ελάχιστο στο οποίο όταν φτάσει το πεδίο  $\phi$  ο πληθωρισμός θα σταματήσει.

Η στρατηγική που ακολουθείται στη λύση αυτών των εξισώσεων είναι η προσέγγιση slow-roll σύμφωνα με την οποία θεωρούμε

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \quad \text{και} \quad \dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$$

Τότε οι εξισώσεις (2.3) και (2.4) έχουν την απλούστερη μορφή

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} V(\phi) \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V_\phi$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές εξισώσεις μπορούμε να βρούμε

$$H(t) = -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \frac{V}{V_\phi} \dot{\phi}$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση για το  $a(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \frac{V}{V_\phi} \dot{\phi} \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} [\ln(a(t'))] dt' &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{t_0}^t \frac{V}{V_\phi} \dot{\phi} dt' \\ \Rightarrow \ln a(t) - \ln a(t_0) &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \frac{V}{V_\phi} d\phi \\ \Rightarrow \ln \left[ \frac{a(t)}{a(t_0)} \right] &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \frac{V}{V_\phi} d\phi \\ \Rightarrow a(t) &= a_0 \exp \left[ -\frac{8\pi}{M_{pl}^2} \int_{\phi_0}^{\phi(t)} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

με  $a_0 = a(t_0)$ ,  $\phi_0 = \phi(t_0)$  και  $t_0$  η χρονική στιγμή που ξεκινάει το inflation. Επιπλέον συνδυάζοντας πάλι τις δυο εξισώσεις μπορούμε να βρούμε για το πεδίο

$$\dot{\phi} = -\frac{M_{pl}}{\sqrt{24\pi}} \frac{V_\phi}{\sqrt{V}}$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση για το  $\phi(t)$

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{M_{pl}}{\sqrt{24\pi}} \int_{t_0}^t \frac{V_\phi}{\sqrt{V}} dt' \quad (2.6)$$

Το τέλος του σεναρίου slow-roll έρχεται όταν  $\frac{\dot{\phi}^2}{2} \simeq V(\phi)$ . Δηλαδή για τη χρονική στιγμή  $t_f$  που τελειώνει το inflation θα ισχύει

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{M_{pl}}{\sqrt{24\pi}} \frac{V_\phi}{\sqrt{V}} \right]^2 \simeq 2V \\ \Rightarrow & \frac{V(\phi(t_f))}{V_\phi(\phi(t_f))} = \frac{M_{pl}}{\sqrt{48\pi}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Εξειδικεύουμε τη μελέτη στο δυναμικό  $V(\phi) = \frac{1}{2}M_\phi^2\phi^2$ . Τότε οι εξισώσεις (2.3) και (2.4) παίρνουν τη μορφή

$$H^2 = \frac{8\pi}{6M_{pl}^2}(\dot{\phi}^2 + M_\phi^2\phi^2) \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + M_\phi^2\phi = 0$$

Από την (2.5) η σχέση για το  $a(t)$  γράφεται

$$a(t) = a_0 \exp \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{M_\phi}{M_{pl}} \left( \phi_0 t - \frac{M_\phi M_{pl}}{\sqrt{48\pi}} t^2 \right) \right]$$

(έχουμε επιλέξει  $t_0 = 0$ ) ενώ από την (2.6) η σχέση για το  $\phi$  γίνεται

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{M_\phi M_{pl}}{\sqrt{12\pi}} t$$

Για τη χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός από την (2.7) προκύπτει

$$t_f = \frac{-M_{pl} + 2\phi_0\sqrt{3\pi}}{M_\phi M_{pl}}$$

που δίνει στο  $\phi$  την τελική τιμή

$$\phi(t_f) = \frac{M_{pl}}{\sqrt{12\pi}}$$

Αρχικά θα ορίσουμε έναν αδιάστατο χρόνο  $\tau \equiv M_\phi t$  και το αδιάστατο πεδίο  $\psi(\tau) \equiv \frac{\phi(\tau)}{M_{pl}}$  και θα ξαναγράψουμε τις σχέσεις μας στην μορφή

$$\begin{aligned} a(\tau) &= a_0 \exp \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left( \psi_0 \tau - \frac{\tau^2}{\sqrt{48\pi}} \right) \right] \quad , \quad \psi(\tau) = \psi_0 - \frac{\tau}{\sqrt{12\pi}} \\ \tau_f &= 2\sqrt{3\pi}\psi_0 - 1 \quad , \quad \psi(\tau_f) = \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \quad , \quad \dot{\psi}(\tau_0) = -\frac{1}{\sqrt{12\pi}} \end{aligned}$$

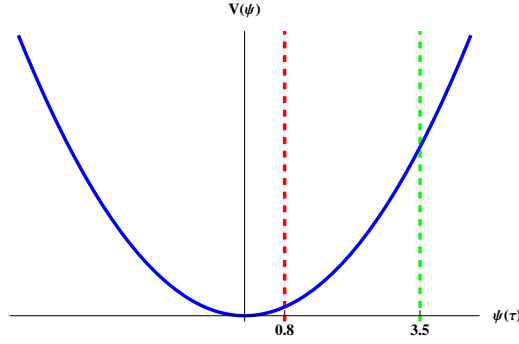
Οι παράμετροι που χρησιμοποιούμε στην αριθμητική μελέτη είναι

$$M_{pl} = 10^{19} \text{GeV} \quad , \quad \psi_0 = 3.5 \quad , \quad t_0 = 0 \quad , \quad a_0 = 1 \quad , \quad M_\phi = 10^{-6} M_{pl}$$

Η παράμετρος που χρειάζεται κάποια εξήγηση είναι η αρχική τιμή του πεδίου  $\psi_0 = 3.5$ . Ορίζουμε μια ποσότητα  $N$  που ονομάζουμε e-folds με τη σχέση

$$N \equiv \ln \frac{a(\tau_f)}{a(\tau_0)}$$

η οποία υπολογίζεται στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll. Η ελάχιστη ποσότητα των e-folds που χρειάζεται να έχει το μοντέλο για να μην εμφανίσει κοσμολογικά προβλήματα είναι  $\sim 70$ . Μόνο τότε δηλαδή θα έχουμε αρκετό πληθωρισμό. Επιλέγουμε λοιπόν ως αρχικές συνθήκες στη θεωρία μας  $\psi(\tau_0) = 3.5$  και  $a(\tau_0) = 1$ . Τότε στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll οι λύσεις μας ικανοποιούν την συνθήκη αυτή δίνοντας  $N = 74$ . Ποιοτικά αυτό μπορεί να γίνει πιο κατανοητό παρατηρώντας τη μορφή του δυναμικού του προβλήματος (Σχήμα (2.1))



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση του rescaled δυναμικού  $V(\psi) = \frac{M_\phi^2 \psi^2}{2M_{pl}^2}$  συναρτήσει του πεδίου  $\psi$

Παρατηρούμε ότι για να έχουμε αρκετό πληθωρισμό, ή αλλιώς για να δουλέψει σωστά το σενάριο slow - roll, το πεδίο θα πρέπει να βρίσκεται πιο “ψηλά” αλλιώς θα φτάσει πολύ γρήγορα στον πάτο και το φαινόμενο του πληθωρισμού θα εξαλειφθεί.

Θα λύσουμε τώρα αριθμητικά το αρχικό σύστημα των εξισώσεων Friedmann (2.3) και Klein - Gordon (2.4) γραμμένες σε αδιάστατη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} [\dot{\phi}^2 + M_\phi^2 \phi^2] \quad \longrightarrow \quad M_\phi^2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)} = \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} [M_\phi^2 \dot{\phi}^2 + M_\phi^2 \phi^2] \\ &\Rightarrow \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)} = \frac{4\pi}{3} (\dot{\psi}(\tau)^2 + \psi^2(\tau)) \end{aligned}$$

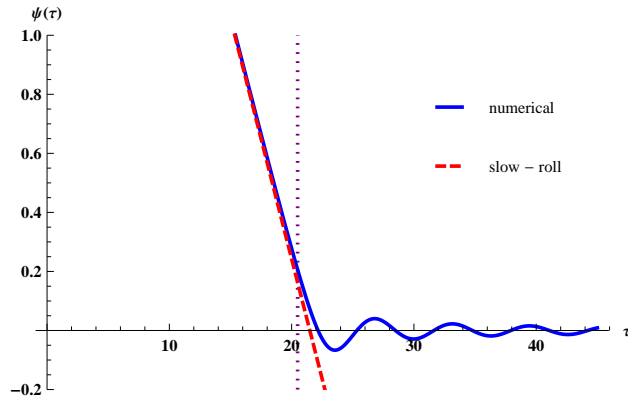
$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) + 3H(t)\dot{\phi}(t) + M_\phi^2 \phi(t) &= 0 \quad \longrightarrow \quad M_\phi^2 \ddot{\phi}(\tau) + 3M_\phi H(\tau)M_\phi \dot{\phi}(\tau) + M_\phi^2 \phi(\tau) = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{\psi}(\tau) + 3H(\tau)\dot{\psi}(\tau) + \psi(\tau) = 0 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας όμως τις αρχικές συνθήκες που έχουν προκύψει στα πλαίσια του slow - roll ,δηλαδή

$$\psi(\tau_0) = \psi_0 \quad , \quad \dot{\psi}(\tau_0) = -\frac{1}{\sqrt{12}\pi}$$

Στο σχήμα (2.2) φαίνεται η μορφή του  $\psi$  από την αριθμητική λύση καθώς και από την προσέγγιση slow - roll. Η κάθετη γράμμη δηλώνει τη χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός

$$\tau_f = 2\sqrt{3\pi}\psi_0 - 1$$



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση του  $\psi$  συναρτήσεως του  $\tau$ . Στο γράφημα απεικονίζεται η αριθμητική λύση του  $\psi$  (συνεχής), η λύση στα πλαίσια του slow - roll (διακεκομμένη) καθώς και το τέλος του slow - roll (τελείες)

Παρατηρούμε πως μέχρι το τέλος του πληθωρισμού η αριθμητική και η προσεγγιστική λύση ταυτίζονται. Μετά το τέλος του πληθωρισμού το πεδίο  $\psi$  ταλαντώνεται στον πάτο του δυναμικού παράγοντας σωματίδια μέχρι να αποδιεγερθεί εντελώς.

## 2.2 Μη-τετριμμένοι κινητικοί όροι του inflaton

Εισαγάγουμε στην μελέτη μας έναν κινητικό όρο  $\lambda_1 G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  και η δράση του πεδίου  $\phi$  παίρνει τη μορφή

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \lambda_1 G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right\}$$

Όπως δείξαμε και στο παράρτημα Α.4 μεταβολή της δράσης αυτής ως προς  $g^{\mu\nu}$  δίνει τις εξισώσεις Einstein στη μορφή (Α.19)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G [T_{\mu\nu} + \lambda_1 \Theta_{\mu\nu}]$$

με

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + g_{\mu\nu} V(\phi)$$

και

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + 2\partial_a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu)}^a - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + \nabla^a \phi \nabla^b \phi R_{\mu a \nu b} + \nabla_\mu \nabla^a \phi \nabla_\nu \nabla_a \phi \\ & - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square \phi + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \nabla^a \nabla^b \phi \nabla_a \nabla_b \phi + \frac{1}{2} (\square\phi)^2 - \nabla_a \phi \nabla_b \phi R^{ab} \right] \end{aligned}$$

Για τις χρονικές συνιστώσες ισχύουν

$$G_{00} = -3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

$$T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} (\partial_a \phi \partial^a \phi) + g_{00} V_\phi = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + V_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_\phi$$

και

$$\begin{aligned}
\Theta_{00} &= -\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi R + \partial_0\phi\partial_0\phi R_0^0 + \partial_0\phi\partial_0\phi R_0^0 + \partial^0\phi\partial^0\phi R_{0000} + \nabla_0\nabla^a\phi\nabla_0\nabla_a\phi \\
&\quad - \nabla_0\nabla_0\phi\Box\phi - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 G_{00} + g_{00}\left[-\frac{1}{2}\nabla^a\nabla^b\phi\nabla_a\nabla_b\phi + \frac{1}{2}(\Box\phi)^2 - \partial_0\phi\partial_0\phi R^{00}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 R + 2\dot{\phi}^2 R_0^0 + \ddot{\phi}^2 - \ddot{\phi}\left(\ddot{\phi} - 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}\right) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 G_{00} \\
&\quad + g_{00}\left[-\frac{1}{2}\left(\ddot{\phi} - 3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\ddot{\phi}^2 - 6\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{9}{2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\dot{\phi}^2\right) - \dot{\phi}^2 R^{00}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 R + 2\dot{\phi}^2 R_0^0 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 G_{00} + \frac{12}{2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\dot{\phi}^2 - g_{00}\dot{\phi}^2 R^{00} \\
&= \dot{\phi}^2\left[-\frac{1}{2}R + 2R_0^0 + \frac{1}{2}G_{00} + \frac{12}{2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + R^{00}\right] \\
&= \dot{\phi}^2\left[-\frac{1}{2}6\left(\frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) + 2\left(3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\right) - \frac{1}{2}\left(-3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) + \frac{12}{2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \left(-3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\right)\right] \\
&= \dot{\phi}^2\left[-\frac{6}{2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{12}{2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right] \\
&= \frac{9}{2}\dot{\phi}^2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}
\end{aligned}$$

Η εξίσωση Friedmann θα είναι λοιπόν

$$\begin{aligned}
G_{00} &= -8\pi G[T_{00} + \lambda_1\Theta_{00}] \\
\Rightarrow -3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= -\frac{8\pi}{M_{pl}^2}\left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_\phi + \lambda_1\frac{9}{2}\dot{\phi}^2\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right] \\
\Rightarrow \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} &= \frac{4\pi}{3M_{pl}^2}\left[\dot{\phi}^2(t)\left(1 - 9\lambda_1\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) + 2V(\phi)\right]
\end{aligned}$$

ενώ για την εξίσωση κίνησης από την (1.15) βρίσκουμε

$$\left(1 - 3\lambda_1\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right)\ddot{\phi}(t) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_1\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right)\dot{\phi}(t) + V_\phi = 0$$

Εξειδικεύουμε τη μελέτη για ένα δυναμικό της μορφής  $V(\phi) = \frac{1}{2}M_\phi^2\phi^2$  και οι παραπάνω γράφονται

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{4\pi}{3M_{pl}^2}\left[\dot{\phi}^2(t)\left(1 - 9\lambda_1\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) + M_\phi^2\phi^2(t)\right]$$

$$\left(1 - 3\lambda_1\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right)\ddot{\phi}(t) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_1\left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right)\dot{\phi}(t) + M_\phi^2\phi(t) = 0$$

Ορίζουμε τον αδιάστατο χρόνο  $\tau \equiv M_\phi \cdot t$  και παίρνουμε τις αδιάστατες εξισώσεις

$$\frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)} = \frac{4\pi}{3}\left[\dot{\psi}^2(\tau)\left(1 - 9\lambda_1\frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}\right) + \psi^2(\tau)\right]$$

$$\left(1 - 3\lambda_1\frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}\right)\ddot{\psi}(\tau) + \left(3\frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} - 3\lambda_1\left(\frac{\dot{a}^3(\tau)}{a^3(\tau)} + \frac{2\dot{a}(\tau)\ddot{a}(\tau)}{a^2(\tau)}\right)\right)\dot{\psi}(\tau) + \psi(\tau) = 0$$

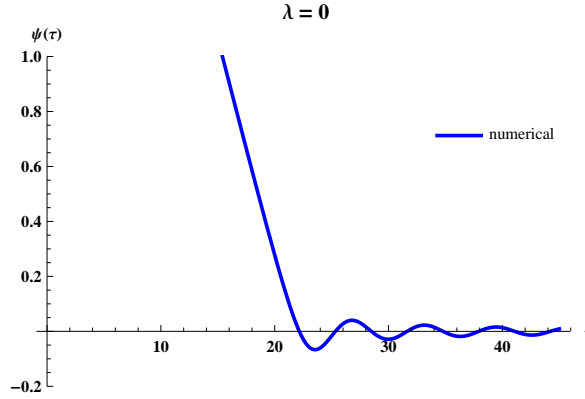
όπου πλέον το  $\cdot$  δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο  $\tau$  και  $\psi(\tau) \equiv \phi(\tau)/M_{pl}$ .

Αρχικά θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια αριθμητική λύση για το  $\psi(\tau)$ . Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραμέτρου Hubble  $H(\tau) \equiv \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)}$  και γράφουμε τις παραπάνω στη μορφή

$$H^2(\tau) = \frac{4\pi}{3} \left[ \dot{\psi}^2(\tau) \left( 1 - 9\lambda_1 M_\phi^2 H^2(\tau) \right) + \psi^2(\tau) \right] \quad (2.8)$$

$$\left( 1 - 3\lambda_1 M_\phi^2 H(\tau)^2 \right) \ddot{\psi}(\tau) + \left( 3H(\tau) - 3\lambda_1 M_\phi^2 H(\tau) (2\dot{H}(\tau) + 3H^2(\tau)) \right) \dot{\psi}(\tau) + \psi(\tau) = 0 \quad (2.9)$$

Λύνουμε την (2.8) ως προς  $H(\tau)$  και στη συνέχεια παίρνουμε τη χρονική παράγωγο του αποτελέσματος. Αντικατάστασή τους στην (2.9) έχει ως αποτέλεσμα μια εξίσωση Klein - Gordon η οποία θα εμπεριέχει μόνο το  $\psi(\tau)$  και χρονικές του παραγώγους. Στο όριο  $\lambda_1 \rightarrow 0$  περιμένουμε η μορφή του  $\psi(\tau)$  να είναι ίδια με την αρχική μας περίπτωση και πράγματι αυτό συμβαίνει όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.3: Αριθμητική λύση για το  $\psi(\tau)$  όπως προκύπτει από τις αρχικές εξισώσεις για  $\lambda_1 = 0$

Για  $\lambda_1 \neq 0$  αλλά αρνητικό μπορούμε να βρούμε και πάλι τέτοιες μορφές λύσεων. Χρειαζόμαστε όμως την προσέγγιση slow - roll για να βρούμε τις αρχικές συνθήκες που θα μας δώσουν τα απαραίτητα e-folds. Ας δούμε λοιπόν τι συμβαίνει στα πλαίσια του slow roll. Αρχικά παίρνουμε την προσέγγιση  $\dot{\phi}(t)^2 \ll V(\phi)$  στην αρχική εξίσωση friedmann οπότε η εξίσωση (2.8) δίνει

$$H^2(\tau) = \frac{4\pi}{3} \psi^2(\tau) \quad (2.10)$$

Επιπλέον θεωρούμε τις προσεγγίσεις  $3\lambda_1 H^2 \gg 1$ ,  $\frac{\dot{H}}{H} \ll 1$  και  $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$  στην αρχική εξίσωση Klein - Gordon οπότε η (2.9) δίνει

$$\dot{\psi}(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{9\lambda_1 M_\phi^2} \frac{1}{H^3(\tau)} \quad (2.11)$$

Ορίζουμε μια ποσότητα  $N$  που ονομάζουμε e-folds με τη σχέση

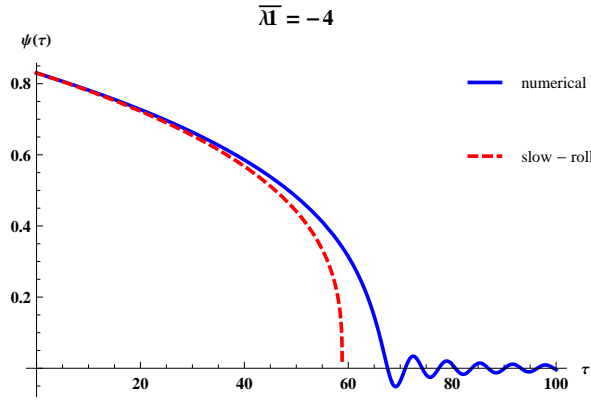
$$N \equiv \ln \frac{a(\tau_f)}{a(\tau_0)}$$



Όπως πριν η ελάχιστη ποσότητα των e-folds που χρειάζεται να έχει το μοντέλο για να μην εμφανίσει κοσμολογικά προβλήματα είναι  $\sim 70$ . Επιλέγουμε λοιπόν ως αρχικές συνθήκες στη θεωρία μας  $\psi(\tau_0) = 0.83$ ,  $a(\tau_0) = 1$  και  $\bar{\lambda}_1 \equiv \lambda_1 M_\phi^2 = -4$ . Τότε στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll οι λύσεις μας ικανοποιούν την συνθήκη αυτή δίνοντας  $N = 74$ . Ξεκινάμε λύνοντας την (2.10) ως προς  $H(\tau)$  και αντικαθιστώντας στην (2.11). Η σχέση που δίνει το  $\psi(\tau)$  σε αυτή την περίπτωση μπορεί να βρεθεί αναλυτικά

$$\psi(\tau) = \frac{\left(18.2972 - \frac{\sqrt{3}\tau}{\pi^{3/2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot 2^{3/2}} = 0.31498(18.2972 - 0.311054\tau)^{\frac{1}{3}}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι από κάποια χρονική στιγμή και μετά η βάση του εκθέτη  $\frac{1}{3}$  γίνεται αρνητική και πέρα από αυτό το σημείο δεν μπορεί να συνεχιστεί η γραφική αναπαράσταση του  $\psi$ , κάτι που φαίνεται και στο σχήμα (2.4). Με αυτές τις αρχικές συνθήκες που έχουν προκύψει στα πλαίσια του slow - roll μπορούμε να βρούμε και την αριθμητική λύση από το σύστημα των αρχικών εξισώσεων. Τις απεικονίζουμε και τις δύο στο σχήμα (2.4)



Σχήμα 2.4: Αναλυτική λύση για το  $\psi(\tau)$  στα πλαίσια του slow roll approximation (διακεκομμένο) και αριθμητική λύση από τις αρχικές σχέσεις (συνεχές)

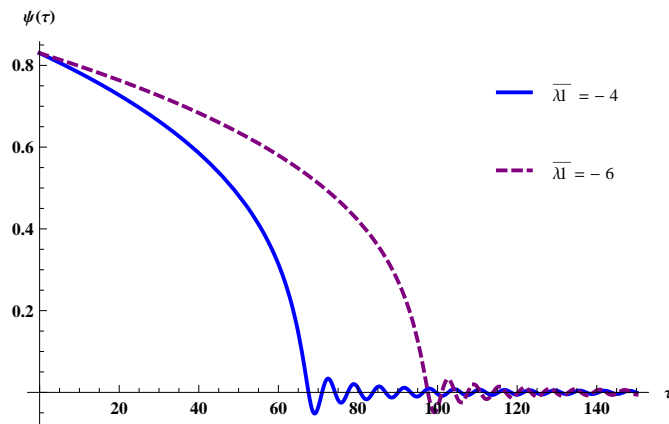
Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι με την εισαγωγή του Einstein tensor στη θεωρία μας μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο  $\lambda_1$  τέτοιο ώστε να έχουμε τον απαραίτητο αριθμό από e-folds ακόμα και αν το πεδίο  $\psi$  έχει μικρότερη αρχική τιμή. Δηλαδή ακόμα και αν το πεδίο αρχίσει να κυλά από χαμηλότερο σημείο του δυναμικού υπάρχουν κατάλληλα  $\lambda_1$  που μπορούν να παρατείνουν το inflation. Επιπλέον όσο αυξάνεται το  $\lambda_1$  κατά απόλυτη τιμή τόσο θα αργεί να έρθει το τέλος του σεναρίου slow - roll όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.5)

Το τέλος του σεναρίου slow roll έρχεται όταν στην αρχική εξίσωση Friedmann ο κινητικός όρος γίνει συγκρίσιμος με το δυναμικό

$$\dot{\phi}^2(t) \left(1 - 9\lambda_1 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \simeq 2V(\phi)$$

το οποίο μεταφράζεται στην σχέση

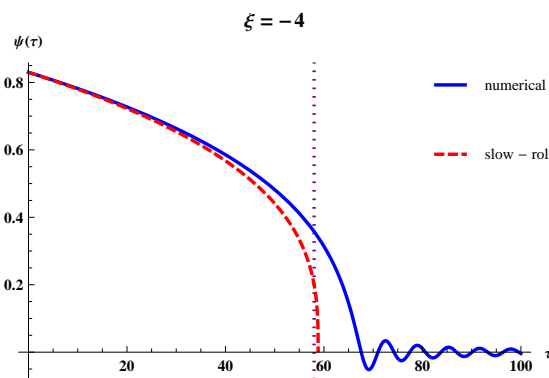
$$\dot{\psi}^2(\tau) = \frac{\psi^2(\tau)}{1 - 9\lambda_1 H^2(\tau)}$$



Σχήμα 2.5: Αριθμητική λύση για το  $\psi(\tau)$  από τις αρχικές σχέσεις για  $\xi = -4$  (συνεχές) και  $\xi = -6$  (διακεκομμένο)

Σημειώνουμε ότι αυτό είναι ένα ακόμα σημάδι ότι το  $\bar{\lambda}_1$  πρέπει να είναι αρνητικό ή στην περίπτωση που είναι θετικό να μην είναι τέτοιο που να δίνει αρνητικό παρονομαστή. Αντικατάσταση της αναλυτικής λύσης του  $\psi(\tau)$  που έχει βρεθεί στα πλαίσια της slow roll δίνει την χρονική στιγμή του τέλους του slow roll

$$\tau_f = 58.0149$$



Σχήμα 2.6: Χρονική στιγμή που τελειώνει το slow roll (κουκίδες)

Στα πλαίσια της προσέγγισης slow - roll το τέλος του σεναρίου slow roll όπως περιγράφηκε παραπάνω ισοδυναμεί με το τέλος του inflation. Για να το δούμε αυτό βρίσκουμε αρχικά την αναλυτική μορφή του  $a(\tau)$  στα πλαίσια της προσέγγισης slow-roll. Εξ' ορισμού έχουμε inflation όσο το  $\ddot{a}(\tau) > 0$ . Η λύση του  $a(\tau)$  από το slow - roll δίνει ότι το τέλος του inflation έρχεται τη χρονική στιγμή

$$\tau_f = 58.0067$$

## Κεφάλαιο 3

# Παραγωγή Σωματιδίων μετά τον Πληθωρισμό

### 3.1 Παραγωγή σωματιδίων μετά από πληθωρισμό χωρίς μη-τετριμμένους κινητικούς όρους

Μελετάμε την παραγωγή σωματιδίων μετά το τέλος του πληθωρισμού χρησιμοποιώντας δύο συζευγμένα βαθμωτά πεδία σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν FRW. Τα πεδία που χρησιμοποιούμε είναι το κλασικό πεδίο inflaton,  $\phi(t)$ , που καθοδηγεί τον πληθωρισμό και ένα κβαντικό πεδίο  $X(x)$ , που μας βοηθά στη μέτρηση των παραγόμενων σωματιδίων. Η δράση του προβλήματος μπορεί να γραφτεί ως

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_{pl}^2 R}{16\pi} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_1 G^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M_\phi^2 \phi^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_2 G^{\mu\nu}) \partial_\mu X \partial_\nu X - (M_X^2 + \zeta R + g^2 \phi^2) X^2 \right] \right\}$$

Ορίζουμε τον αδιάστατο χρόνο  $\tau = M_\phi t$  και την αδιάστατη παράμετρο  $\xi = \lambda M_\phi^2$ . Η δράση για το πεδίο  $\phi$  οδηγεί στις εξισώσεις Friedmann

$$H^2(\tau) = \frac{4\pi}{3} \left[ \dot{\psi}^2(\tau) \left( 1 - 9\bar{\lambda}_1 H^2(\tau) \right) + \psi^2(\tau) \right]$$

και Klein - Gordon

$$\left( 1 - 3\bar{\lambda}_1 H(\tau)^2 \right) \ddot{\psi}(\tau) + \left( 3H(\tau) - 3\bar{\lambda}_1 H(\tau) (2\dot{H}(\tau) + 3H^2(\tau)) \right) \dot{\psi}(\tau) + \psi(\tau) = 0$$

από τις οποίες στο προηγούμενο κεφάλαιο βρήκαμε τη χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός καθώς και την αριθμητική λύση του  $\phi$  που θα συζευχθεί με το  $X$ .

Μεταβολή της δράσης ως προς το πεδίο  $X$  οδηγεί στην εξίσωση Klein - Gordon

$$\square X + [M_X + \zeta R + g^2 \phi^2] X = 0 \quad \text{με} \quad \square X = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} + \lambda_2 G^{\mu\nu}] \partial_\nu X]$$

Για την μετρική μας

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -a^2(t) & & \\ & & -a^2(t) & \\ & & & -a^2(t) \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$G^{00} = -3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}, \quad G^{ii} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}, \quad R = 6\frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

και η Klein - Gordon παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \left(1 - 3\lambda_2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \ddot{X}(x) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_2 \left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right) \dot{X}(x) \\ & - a^{-2}(t) \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 X(x) + \lambda_2 \frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 X(x) + (M_X^2 + \zeta R + g^2 \phi^2(t)) X(x) = 0 \end{aligned}$$

Γράφουμε το πεδίο  $X(x)$  στη μορφή

$$X(x) = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \chi_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

Αντικαθιστούμε το  $\chi_{\mathbf{k}}(x)$  στην παραπάνω θεωρώντας επιπλέον ότι είναι της μορφής  $\chi_{\mathbf{k}}(x) \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \chi_{\mathbf{k}}(t)$  και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \left(1 - 3\lambda_2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}\right) \ddot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) + \left(3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - 3\lambda_2 \left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + \frac{2\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)\right) \dot{\chi}_{\mathbf{k}}(t) \\ & + \left[\frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda_2 k^2 \frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + M_X^2 + \zeta R + g^2 \phi^2(t)\right] \chi_{\mathbf{k}}(t) = 0 \end{aligned}$$

Αν γράψουμε  $\chi_{\mathbf{k}}(t) \equiv f(t)h_{\mathbf{k}}(t)$  μπορούμε να διώξουμε την πρώτη παράγωγο και έτσι θα έχουμε

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(t) + \Omega^2(t)h_{\mathbf{k}}(t) = 0$$

με

$$\Omega(t) = \sqrt{B(t) - \frac{\dot{A}(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4}}$$

όπου

$$A(t) = 3\frac{\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \lambda_2 \left(\frac{\dot{a}^3(t)}{a^3(t)} + 2\frac{\dot{a}(t)\ddot{a}(t)}{a^2(t)}\right)}{1 - 3\lambda_2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}, \quad B(t) = \frac{\frac{k^2}{a^2(t)} - \lambda_2 k^2 \frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} + M_X^2 + \zeta R + g^2 \phi^2(t)}{1 - 3\lambda_2 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}}$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφτούν και ως προς τον αδιάστατο χρόνο  $\tau$

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(\tau) + \Omega^2(\tau)h_{\mathbf{k}}(\tau) = 0 \quad (3.1)$$

με

$$\Omega(\tau) = \sqrt{B(\tau) - \frac{\dot{A}(\tau)}{2} - \frac{A^2(\tau)}{4}}$$

$$A(\tau) = 3 \frac{\frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} - \overline{\lambda_2} \left( \frac{\dot{a}^3(\tau)}{a^3(\tau)} + 2 \frac{\dot{a}(\tau)\ddot{a}(\tau)}{a^2(\tau)} \right)}{1 - 3\overline{\lambda_2} \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

$$B(\tau) = \frac{\frac{k^2}{M_\phi^2 a^2(\tau)} - \lambda_2 k^2 \frac{2a(\tau)\ddot{a}(\tau) + \dot{a}^2(\tau)}{a^4(\tau)} + \frac{M_X^2}{M_\phi^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M\phi^2} + \frac{g^2 \psi(\tau) M_{pl}^2}{M_\phi^2}}{1 - 3\overline{\lambda_2} \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

Θεωρούμε ότι μετά το τέλος του πληθωρισμού βρισκόμαστε στη φάση που επικρατεί η ύλη (matter domination) και ο παράγοντας  $a(\tau)$  θα έχει τη μορφή

$$a(\tau) = \tau^{2/3}$$

Είναι σημαντικό εδώ να σημειώσουμε ότι στη φάση που μελετάμε, δηλαδή για  $a(\tau) = \tau^{2/3}$  ο όρος του  $\lambda_2$  που εμφανίζεται παραπάνω τυχαίνει να μηδενίζεται. Αν προσδιορίσουμε τους συντελεστές Bogolyubov από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\alpha}_k(\tau) = \frac{\dot{\Omega}_k(\tau)}{2\Omega_k(\tau)} \exp \left[ 2i \int \Omega_k(\tau') d\tau' \right] \beta_k(\tau)$$

$$\dot{\beta}_k(\tau) = \frac{\dot{\Omega}_k(\tau)}{2\Omega_k(\tau)} \exp \left[ -2i \int \Omega_k(\tau') d\tau' \right] \alpha_k(\tau)$$

τότε μια λύση της μορφής

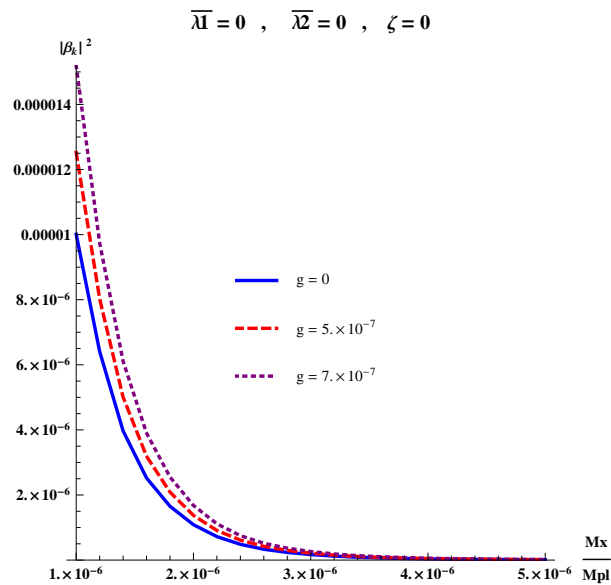
$$h_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{\alpha(\tau)}{\sqrt{2\Omega(\tau)}} e^{-i \int \Omega(\tau') d\tau} + \frac{\beta(\tau)}{\sqrt{2\Omega(\tau)}} e^{i \int \Omega(\tau') d\tau}$$

είναι λύση της (3.1). Η ποσότητα  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  δηλώνει τον μέσο αριθμό σωματιδίων στην κατάσταση  $k$ .

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε ότι έχουμε το inflaton χωρίς επιπλέον κινητικούς όρους ( $\lambda_1 = 0$ ) όπως παρουσιάστηκε στο σχήμα (2.2). Όμοια και το πεδίο  $X$  δεν έχει επιπλέον κινητικούς όρους ( $\lambda_2 = 0$ ). Την χρονική στιγμή  $\tau_0 = 0$  έχουμε την αρχή του πληθωρισμού ο οποίος σύμφωνα με το σενάριο slow - roll θα τελειώσει τη χρονική στιγμή  $\tau_f = 20$ . Τότε το inflaton ταλαντώνεται γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού παράγοντας σωματίδια μέχρι να αποδιεγερθεί εντελώς. Από τη χρονική στιγμή  $\tau_f$  και μετά μπαίνουμε στη φάση που επικρατεί η ύλη. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε σύμφωνα με τα παραπάνω τον μέσο αριθμό σωματιδίων  $X$  που παράγονται. Θεωρούμε ότι μέχρι το τέλος του inflation δεν έχουμε παραγωγή σωματιδίων. Θα έχουμε δηλαδή ως αρχικές συνθήκες

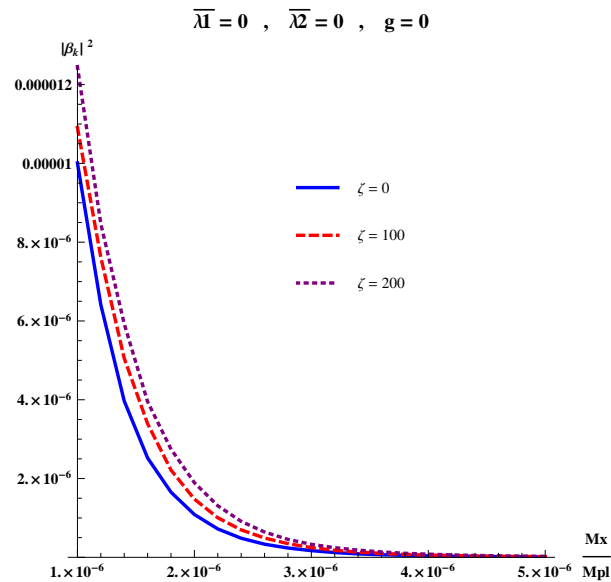
$$\alpha(\tau_f) = 1 \quad , \quad \beta(\tau_f) = 0$$

Επιπλέον για την αριθμητική μελέτη χρησιμοποιούμε  $M_\phi = 10^{-6} M_{pl}$  ,  $k = 10^{-5} M_{pl}$ . Τότε  $\Omega(\tau) > 0$  και ισχύει η αδιαβατική προσέγγιση  $\frac{\dot{\Omega}(\tau)}{\Omega(\tau)} \ll 1$ . Οι συντελεστές Bogolyubov θα σταθεροποιηθούν μετά τη χρονική στιγμή  $\tau_{flat} = 200$  και μετρώντας τους τότε μπορούμε να βρούμε τη μορφή του μέσου αριθμού σωματιδίων  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  συναρτήσει της μάζας  $M_X$  για  $M_X > 10^{-6} M_{pl}$ . Αρχικά επιλέγουμε το πεδίο  $X$  να μην έχει σύζευξη στην καμπυλότητα  $R$  ( $\zeta = 0$ ) αλλά να έχει σύζευξη με το πεδίο  $\phi$  ( $g \neq 0$ ) , σχήμα 3.1.

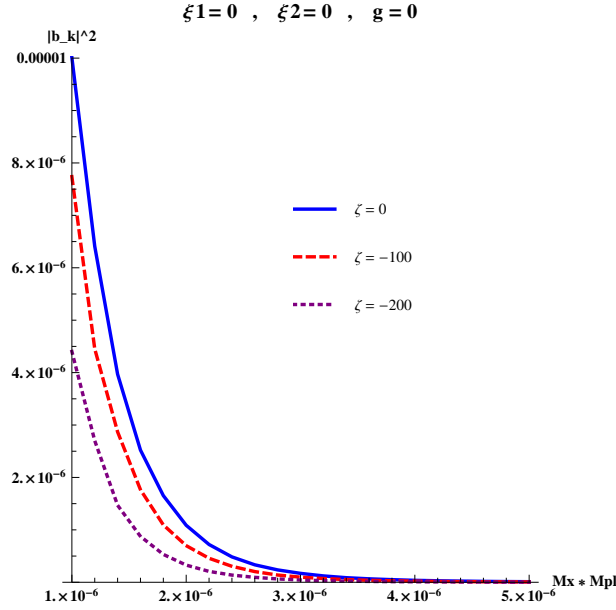


Σχήμα 3.1: Πεδίο  $X$  χωρίς σύζευξη στη καμπυλότητα αλλά με σύζευξη στο πεδίο  $\psi$ .

Στη συνέχεια μηδενίζουμε τη σύζευξη με το πεδίο  $\phi$ , το μόνο που κρατάμε είναι η χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός, και δίνουμε θετική (σχήμα 3.2) και αρνητική (σχήμα 3.3) σύζευξη του  $X$  με την καμπυλότητα  $R$ .



Σχήμα 3.2: Πεδίο  $X$  χωρίς σύζευξη στο πεδίο  $\psi$  αλλά με θετική σύζευξη στην καμπυλότητα.



Σχήμα 3.3: Πεδίο  $X$  χωρίς σύζευξη στο πεδίο  $\psi$  αλλά με αρνητική σύζευξη στην καμπυλότητα.

Παρατηρούμε τις αλλαγές στην παραγωγή σωματιδίων ίδιας μάζας συναρτήσει των συζεύξεων  $g$  και  $\zeta$  αλλά και έναν πιθανό συσχετισμό των αποτελεσμάτων ανάμεσα σε μετρήσεις με  $g \neq 0, \zeta = 0$  και  $g = 0, \zeta > 0$

### 3.2 Παραγωγή σωματιδίων μετά από πληθωρισμό με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε ότι το inflaton έχει μη-τετριμμένους κινητικούς όρους όπως περιγράφηκε στο σχήμα 2.6. Όμοια θα επιτρέψουμε και στο πεδίο  $X$  να έχει επιπλέον κινητικό όρο με διαφορετική εν γένει σύζευξη από αυτή του  $\phi$  ( $\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$ ). Θα έχουμε δηλαδή την πλήρη θεωρία της προηγούμενης ενότητας με δράση

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{M_{pl}^2 R}{16\pi} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_1 G^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M_\phi^2 \phi^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} + \lambda_2 G^{\mu\nu}) \partial_\mu X \partial_\nu X - (M_X^2 + \zeta R + g^2 \phi^2) X^2 \right] \right\}$$

, μοντέλα του πληθωρισμού με  $\bar{\lambda}_1 \neq 0$  και διαφορική εξίσωση

$$\ddot{h}_{\mathbf{k}}(\tau) + \Omega^2(\tau) h_{\mathbf{k}}(\tau) = 0$$

όπου

$$\Omega(\tau) = \sqrt{B(\tau) - \frac{\dot{A}(\tau)}{2} - \frac{A^2(\tau)}{4}}$$

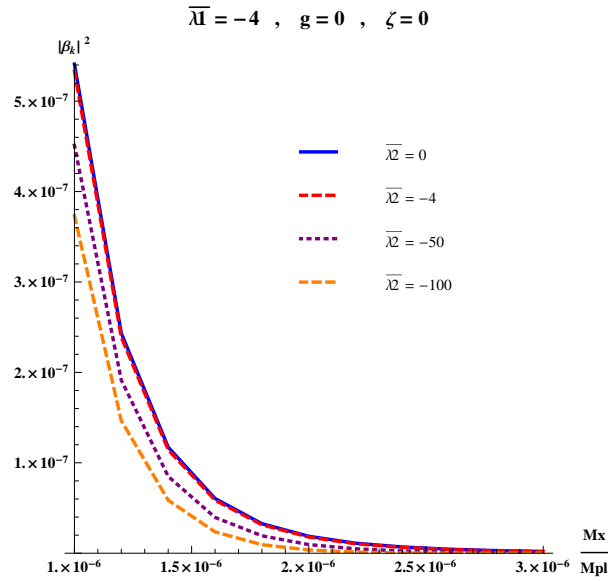
$$A(\tau) = 3 \frac{\frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} - \overline{\lambda}_2 \left( \frac{\dot{a}^3(\tau)}{a^3(\tau)} + 2 \frac{\dot{a}(\tau)\ddot{a}(\tau)}{a^2(\tau)} \right)}{1 - 3\overline{\lambda}_2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

$$B(\tau) = \frac{\frac{k^2}{M_\phi^2 a^2(\tau)} - \lambda_2 k^2 \frac{2a(\tau)\ddot{a}(\tau) + \dot{a}^2(\tau)}{a^4(\tau)} + \frac{M_X^2}{M_\phi^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_\phi^2} + \frac{g^2 \psi(\tau) M_{pl}^2}{M_\phi^2}}{1 - 3\overline{\lambda}_2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

με  $\overline{\lambda}_2 \neq 0$ . Θεωρούμε ξανά πως στην εποχή μετά τον πληθωρισμό που μελετάμε την παραγωγή σωματιδίων ο παράγοντας  $a(\tau)$  έχει τη μορφή

$$a(\tau) = \tau^{2/3}$$

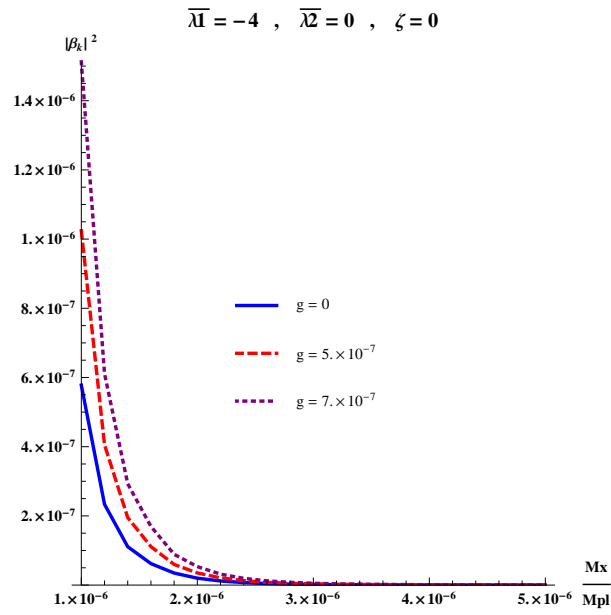
έτσι και εδώ ο παραπάνω όρος με  $\lambda_2$  μηδενίζεται. Το διάγραμμα που μελετάμε είναι και εδώ ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση  $\mathbf{k}$ ,  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$ , συναρτήσει της μάζας  $M_X$  για διάφορες παραμέτρους. Ξεκινάμε με πληθωρισμό με  $\overline{\lambda}_1 = -4$  και επιτρέπουμε στο πεδίο  $X$  όρους με  $\overline{\lambda}_2 \neq 0$ . Εδώ δεν έχουμε σύζευξη του  $X$  με το  $\phi$  ή την καμπυλότητα.



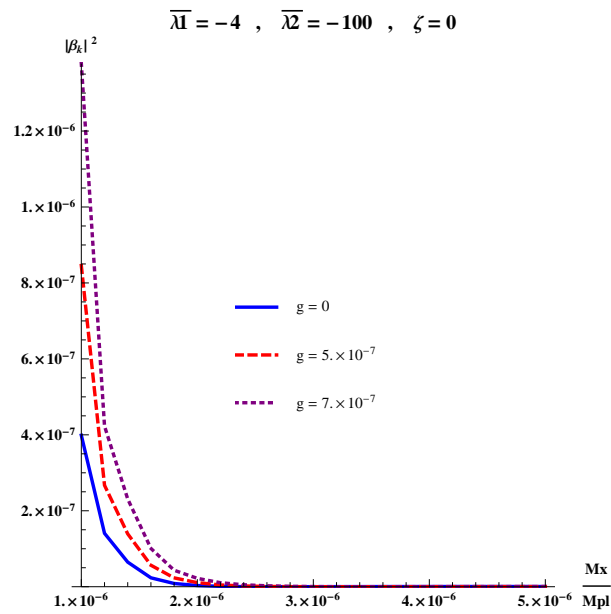
Σχήμα 3.4: Πεδίο  $X$  με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους, χωρίς σύζευξη στο πεδίο  $\psi$ , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.

Παρατηρούμε πως χρειαζόμαστε αρκετά μεγαλύτερο  $\overline{\lambda}_2$  από την τιμή του  $\overline{\lambda}_1$  προκειμένου να έχουμε κάποια αλλαγή στην παραγωγή. Αυτό σημαίνει πως τη χρονική περίοδο που μελετάμε ο τανυστής Einstein έχει ήδη εξασθενήσει και χρειαζόμαστε μια πιο ισχυρή σύζευξη για εμφανή αποτελέσματα. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια δύο διαγράμματα όπου για  $\overline{\lambda}_1 = -4$  αλλάζουμε τη σύζευξη του  $X$  με το  $\phi$ , για ( $\overline{\lambda}_2 = 0$ ) σχήμα 3.5 και ( $\overline{\lambda}_2 = -100$ ) σχήμα 3.6





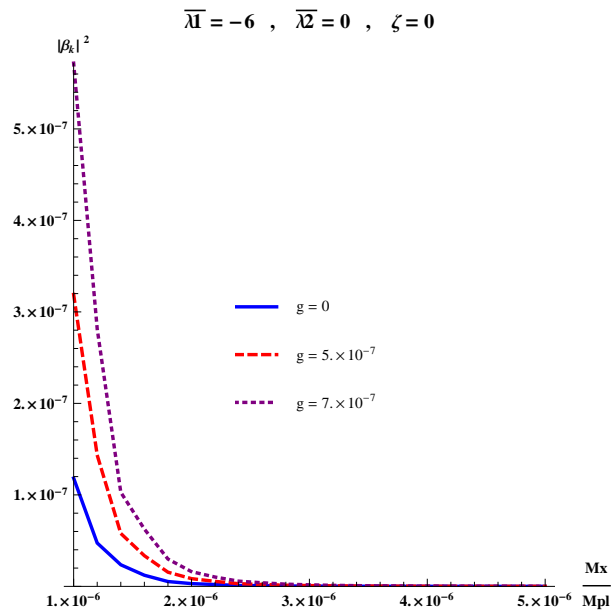
Σχήμα 3.5: Πεδίο  $X$  χωρίς επιπλέον κινητικούς όρους, με σύζευξη στο πεδίο  $\psi$ , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.



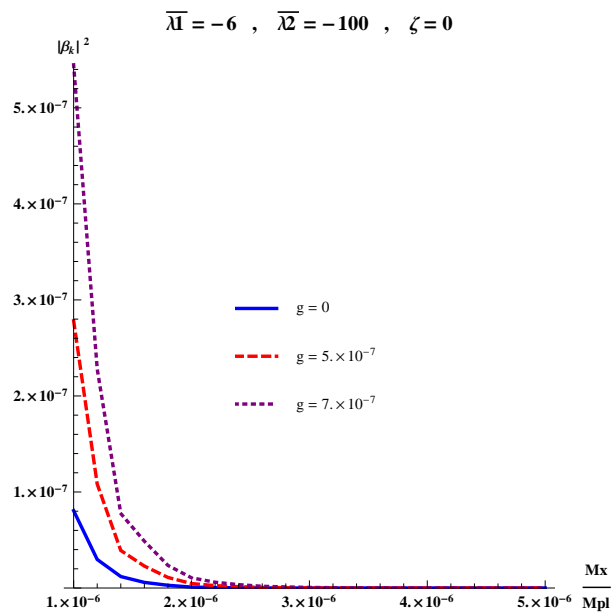
Σχήμα 3.6: Πεδίο  $X$  με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους, με σύζευξη στο πεδίο  $\psi$ , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.

Αλλάζουμε τη σύζευξη του inflaton με τον τανυστή Einstein ( $\overline{\lambda_1} = -6$ ), δηλαδή αλλάζουμε και τη χρονική στιγμή που τελειώνει ο πληθωρισμός και τη λύση του

πεδίου  $\psi$ . Παρουσιάζουμε και πάλι δύο διαγράμματα για ( $\bar{\lambda}_2 = 0$ ) σχήμα 3.7 και ( $\bar{\lambda}_2 = -100$ ) σχήμα 3.8

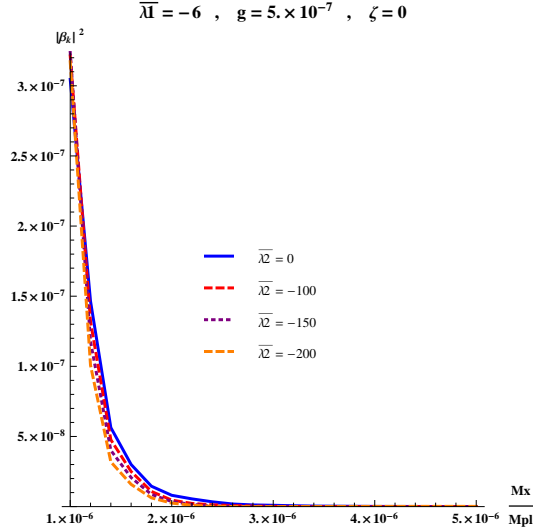


Σχήμα 3.7: Πεδίο  $X$  χωρίς επιπλέον κινητικούς όρους, με σύζευξη στο πεδίο  $\psi$ , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.



Σχήμα 3.8: Πεδίο  $X$  με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους, με σύζευξη στο πεδίο  $\psi$ , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.

Παρατηρούμε πως από τη στιγμή που αυξάνουμε (κατ' απόλυτη τιμή) τη σύζευξη του inflaton με τον τανυστή Einstein η παραγωγή σωματιδίων μειώνεται. Η σύζευξη του πεδίου  $X$  με τον τανυστή Einstein παράγει ακόμα λιγότερα σωματίδια καθώς αυξάνεται (κατ' απόλυτη τιμή). Για να το δούμε αυτό λίγο πιο ξεκάθαρα κρατάμε μια σταθερή τιμή της σύζευξης  $g = 5 \cdot 10^{-7}$  για  $\bar{\lambda}_1 = -6$  και αλλάζουμε τη σύζευξη  $\bar{\lambda}_2$ . Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 3.9



Σχήμα 3.9: Πεδίο  $X$  με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους, με σύζευξη στο πεδίο  $\psi$  , χωρίς σύζευξη στην καμπυλότητα.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω η εισαγωγή του τανυστή Einstein είτε μόνο στο inflaton είτε και στο inflaton και στο πεδίο  $X$  έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του αριθμού σωματιδίων που παράγονται. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται ότι μπορεί να αναστραφεί σε μεγάλο βαθμό με την αύξηση της σύζευξης  $g$ .

Συγκεντρώνοντας τα πιο σημαντικά αποτελέσματα, έχουμε δείξει ότι :

- Έχουμε αύξηση της παραγωγής σωματιδίων με την αύξηση των συζεύξεων  $g$  ,  $\zeta$  (πιθανός συσχετισμός)
- Μετά το τέλος του πληθωρισμού ο τανυστής Einstein έχει εξασθενήσει και χρειαζόμαστε ισχυρότερη σύζευξη  $\bar{\lambda}_2$
- Μείωση της παραγωγής σωματιδίων με την εισαγωγή μη-τετριμμένων κινητικών όρων στο inflaton
- Επιπλέον μείωση της παραγωγής σωματιδίων με την εισαγωγή μη-τετριμμένων κινητικών όρων και στο  $X$  (αλλά σε μικρότερο βαθμό)
- Μείωση της παραγωγής σωματιδίων με την αύξηση των συζεύξεων  $\bar{\lambda}_1$  και  $\bar{\lambda}_2$
- Η οποία όμως μπορεί να αναστραφεί σε μεγάλο βαθμό με την αύξηση της σύζευξης  $g$

## Σημείωση

Έχουμε φτάσει ήδη στο τέλος της εργασίας αλλά αξίζει να αναφερθούμε σε μια παρατήρηση σχετικά με την παραγωγή σωματιδίων όταν το πεδίο  $X$  έχει επιπλέον κινητικούς όρους, δηλαδή για  $\bar{\lambda}_2 \neq 0$ . Τον σημαντικότερο ρόλο στην εύρεση του συντελεστή Bogolyubov  $\beta_{\mathbf{k}}$  είχε το  $\Omega(\tau)$  το οποίο γενικά μεταβαλλόταν με το χρόνο μέχρι να φτάσει σε μια σταθερή τιμή. Εκείνη τη στιγμή μετράμε την τιμή του συντελεστή Bogolyubov και κατασκευάζουμε τα διαγράμματα συναρτήσει της μάζας  $M_X$ . Ο λόγος που διαλέξαμε αυτήν την ποσότητα είναι γιατί μέσα στο  $\Omega(\tau)$  είναι η μόνη που δεν συνοδεύεται από συνάρτηση του  $\tau$ . Για παράδειγμα για  $\bar{\lambda}_2 = 0$

$$\Omega^2(\tau) = \frac{k^2}{M_\phi^2 a^2(\tau)} + \frac{M_X^2}{M_\phi^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_\phi^2} + \frac{g^2 \psi(\tau) M_{pl}^2}{M_\phi^2} - \frac{3 \ddot{a}(\tau)}{2 a(\tau)} - \frac{3 \dot{a}^2(\tau)}{4 a^2(\tau)}$$

Έτσι κατά την αριθμητική λύση των διαφορικών εξισώσεων ο όρος της μάζας του πεδίου  $X$  παρέμενε σταθερός και μπορούσαμε να τον μεταβάλλουμε “ με το χέρι” για να δούμε τις αλλαγές στην παραγωγή σωματιδίων. Γνωρίζαμε λοιπόν ότι η ποσότητα  $M_X$  ήταν η πραγματική μάζα του  $X$  και ότι για μεγαλύτερες μάζες η παραγωγή σωματιδίων θα ήταν πιο δύσκολη, η ποσότητα  $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$  θα ήταν πιο μικρή (όπως και δείξαμε σε όλα τα διαγράμματα).

Παρ’ όλα αυτά με την εισαγωγή επιπλέον κινητικών όρων στο  $X$  δείξαμε ότι το  $\Omega(\tau)$  έχει την πιο πολύπλοκη μορφή

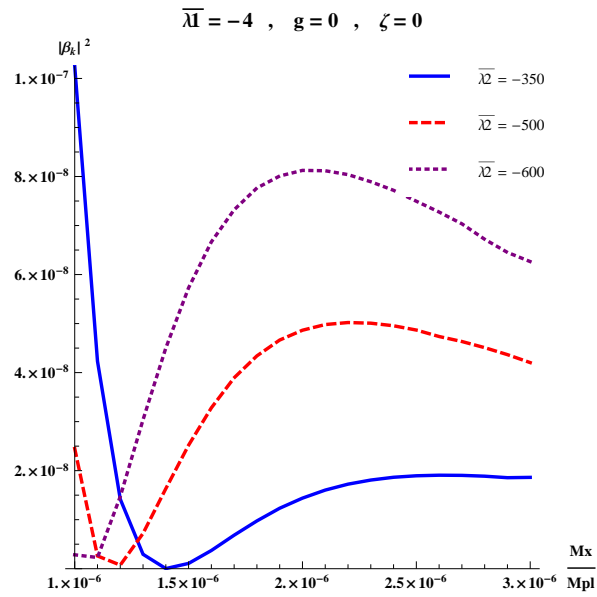
$$\Omega^2(\tau) = B(\tau) - \frac{\dot{A}(\tau)}{2} - \frac{A^2(\tau)}{4}$$

με

$$A(\tau) = 3 \frac{\frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)} - \bar{\lambda}_2 \left( \frac{\dot{a}^3(\tau)}{a^3(\tau)} + 2 \frac{\dot{a}(\tau) \ddot{a}(\tau)}{a^2(\tau)} \right)}{1 - 3 \bar{\lambda}_2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

$$B(\tau) = \frac{\frac{k^2}{M_\phi^2 a^2(\tau)} - \lambda_2 k^2 \frac{2a(\tau) \dot{a}(\tau) + \dot{a}^2(\tau)}{a^4(\tau)} + \frac{M_X^2}{M_\phi^2} + \frac{\zeta R(\tau)}{M_\phi^2} + \frac{g^2 \psi(\tau) M_{pl}^2}{M_\phi^2}}{1 - 3 \bar{\lambda}_2 \frac{\dot{a}^2(\tau)}{a^2(\tau)}}$$

με αντίστοιχο διάγραμμα το σχήμα 3.4. Όπως φαίνεται ακόμα και ο “ όρος μάζας ” έχει εξάρτηση από το χρόνο. Αν το παρακάνουμε με την τιμή του  $\bar{\lambda}_2$  (στα πλαίσια όμως που και πάλι μπορούμε να έχουμε σταθερούς Bogolyubov κάποια χρονική στιγμή  $\tau_{flat}$ ) το αποτέλεσμα είναι το σχήμα



Παρατηρούμε ένα μη αναμενόμενο αποτέλεσμα, την αύξηση της παραγωγής σωματιδίων με μεγαλύτερη μάζα από άλλα. Υπάρχει δηλαδή μια περιοχή τιμών του  $M_X$  η οποία ευνοεί την παραγωγή σωματιδίων. Οδηγούμαστε έτσι στο συμπέρασμα ότι η ποσότητα  $M_X$  δεν μπορεί πλέον να περιγράψει την πραγματική μάζα των σωματιδίων  $X$ . Για  $\bar{\lambda}_2 \neq 0$  το  $M_X$  είναι απλά ακόμα μια παράμετρος που επηρεάζει τη θεωρία που δεν μπορεί όμως να έχει την ίδια φυσική ερμηνεία που είχε μέχρι τώρα.

## Παράρτημα Α΄

# Τανυστές Riemann και Einstein στο 4-διάστατο σύμπαν FRW

### Α΄.1 Υπολογισμός της βαθμωτής καμπυλότητας R για το 4-διάστατο σύμπαν FRW

Όπως έχουμε δηλώσει σε όλη την εργασία χρησιμοποιούμε για τη μετρική τη σύμβαση (+ - - -). Θυμίζουμε κάποιες βασικές σχέσεις όπως ο τανυστής Riemann

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (\text{Α.1})$$

ο τανυστής Ricci

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}$$

η αφινική σύνδεση

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right)$$

και η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$$R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (\text{Α.2})$$

Για το 4-διάστατο σύμπαν FRW με μετρική  $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)\}$  ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής προκύπτει από τη σχέση  $g_{\mu\kappa} g^{\mu\lambda} = \delta_{\kappa}^{\lambda}$  και έχει τη μορφή  $g^{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -a^{-2}(t), -a^{-2}(t), -a^{-2}(t)\}$ . Υπολογίζουμε τα δυνατά αποτελέσματα των συμβόλων Christoffel

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \left( \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}g^{\lambda i} \left( \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{1}{2}g^{ii} \left( \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \right) = 0 \\
\Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{\lambda 0} \left( \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} \right) = 0 \\
\Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{2}g^{\lambda i} \left( \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{1}{2}g^{ii} \left( \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \right) = 0 \\
\Gamma_{0i}^j &= \frac{1}{2}g^{\lambda j} \left( \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{1}{2}g^{jj} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{jj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = \frac{1}{2}(-a^{-2}(t))(-2a(t)\dot{a}(t))\delta_{ij} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\delta_{ij} \\
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{\lambda 0} \left( \frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\
&= -\frac{1}{2}(-2a(t)\dot{a}(t))\delta_{ij} = a(t)\dot{a}(t)\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με αυτά οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Ricci θα είναι

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{0\lambda}^\lambda}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^\eta \Gamma_{0\eta}^\lambda \\
&= \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \Gamma_{01}^\eta \Gamma_{0\eta}^1 + \frac{\partial \Gamma_{02}^2}{\partial x^0} + \Gamma_{02}^\eta \Gamma_{0\eta}^2 + \frac{\partial \Gamma_{03}^3}{\partial x^0} + \Gamma_{03}^\eta \Gamma_{0\eta}^3 \\
&= 3 \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \\
&= 3 \frac{\partial \Gamma_{01}^1}{\partial x^0} + 3\Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 = 3 \left[ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right] \\
&= 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{\Gamma_{11}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{1\lambda}^\eta \Gamma_{1\eta}^\lambda - \Gamma_{11}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \\
&= -\frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} + \Gamma_{10}^\eta \Gamma_{1\eta}^0 + \Gamma_{12}^\eta \Gamma_{12}^\lambda - \Gamma_{11}^\eta \Gamma_{2\eta}^2 + \Gamma_{13}^\eta \Gamma_{1\eta}^3 - \Gamma_{11}^\eta \Gamma_{3\eta}^3 \\
&= -\frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x^0} - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 \\
&= -\dot{a}(t)a(t) - a(t)\ddot{a}(t) - a(t)\dot{a}(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - a(t)\dot{a}(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + a(t)\dot{a}(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\
&= -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)
\end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$R_{22} = -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t) \quad \text{και} \quad R_{33} = -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci από τη σχέση (Α.2)

$$\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - 3(a^{-2}(t))(-\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t)) = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 6 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= 6 \frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \tag{Α.3}
\end{aligned}$$

## Α'.2 Υπολογισμός του τανυστή Einstein για το 4-διάστατο σύμπαν FRW

Εφόσον έχουν γίνει οι προηγούμενοι υπολογισμοί η εύρεση του τανυστή Einstein είναι εύκολη υπόθεση. Ο τανυστής Einstein ορίζεται από τη σχέση

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{2}6\frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = -3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R \\ &= -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t) - \frac{1}{2}(-a^2(t))6\frac{\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\ &= -\ddot{a}(t)a(t) - 2\dot{a}^2(t) + 3\ddot{a}(t)a(t) + 3\dot{a}^2(t) \\ &= 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) \end{aligned}$$

και όμοια βρίσκουμε

$$G_{22} = 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t) \quad \text{και} \quad G_{33} = 2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)$$

Για να βρούμε τα ανταλλοίωτα στοιχεία του τανυστή χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$G^{00} = g^{0\mu}g^{0\nu}G_{\mu\nu} = g^{00}g^{00}G_{00} = -3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}$$

$$\begin{aligned} G^{11} &= g^{1\mu}g^{1\nu}G_{\mu\nu} = g^{11}g^{11}G_{11} = (-a^2(t))(-a^2(t))(2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)) \\ &= \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$G^{22} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)} \quad \text{και} \quad G^{33} = \frac{2\ddot{a}(t)a(t) + \dot{a}^2(t)}{a^4(t)}$$

## Α'.3 Εξισώσεις βαθμωτού πεδίου του Einstein από την αρχή ελάχιστης δράσης

Θυμίζουμε τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου

$$\nabla_\lambda V^\mu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό αυτό σε έναν γενικό τανυστή. Η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς  $x^\kappa$  ενός τανυστή  $T_{\dots}$  ισούται με  $\partial_\kappa T_{\dots}$  συν ,για κάθε ανταλλοίωτο δείκτη  $^\lambda$ , έναν όρο  $\Gamma_{\kappa\eta}^\lambda$  επί  $T$  με το  $^\lambda$  αντικατεστημένο με  $^\eta$  μείον ,



για κάθε συναλλοίωτο δείκτη  $\mu$ , έναν όρο  $\Gamma_{\kappa\mu}^{\eta}$  επί  $T$  με το  $\mu$  αντικατεστημένο με  $\eta$ .  
Για να γίνει πιο ξεκάθαρο δίνουμε ένα παράδειγμα

$$\nabla_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} - \Gamma_{\kappa\mu}^{\eta}\Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\eta}\Gamma_{\eta\mu}^{\lambda}$$

Γράφουμε τον τανυστή Riemann (A.1) στη μορφή

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}$$

Θα δηλώσουμε και θα αποδείξουμε ορισμένες σχέσεις που θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Για τη μεταβολή του τανυστή Riemann ισχύει

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) \quad (\text{A.4})$$

*Απόδειξη.* Μεταβολή του τανυστή Riemann θα δώσει

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \partial_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\eta})\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}(\delta\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}) - (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta})\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}(\delta\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda})$$

Από τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου για τανυστές που δείξαμε παραπάνω μπορούμε να βρούμε για τη μεταβολή του  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  ότι θα ισχύει μια σχέση της μορφής

$$\nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) = \partial_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) + \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}) - \Gamma_{\kappa\mu}^{\eta}(\delta\Gamma_{\eta\nu}^{\lambda}) - \Gamma_{\kappa\nu}^{\eta}(\delta\Gamma_{\eta\mu}^{\lambda})$$

Όμοια μπορούμε να γράψουμε

$$\nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) = \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) + \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}) - \Gamma_{\nu\mu}^{\eta}(\delta\Gamma_{\eta\kappa}^{\lambda}) - \Gamma_{\nu\kappa}^{\eta}(\delta\Gamma_{\eta\mu}^{\lambda})$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned} \nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) &= \partial_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}) + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\eta})\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}(\delta\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}) \\ &\quad - (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta})\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}(\delta\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}) \end{aligned}$$

Άρα πράγματι

$$\delta R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})$$

□

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει άμεσα ότι για τη μεταβολή του τανυστή Ricci ισχύει

$$\delta R_{\mu\kappa} \equiv \delta R_{\mu\nu\kappa}^{\nu} = \nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}) \quad (\text{A.5})$$

Η ποσότητα  $g^{\mu\nu} [\nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa}) - \nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa})]$  μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} [\nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa}) - \nabla_{\kappa}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa})] &= \nabla_{\nu} [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa})] - \nabla_{\kappa} [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa})] \\ &= \nabla_{\sigma} [g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa})] - \nabla_{\sigma} [g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})] \\ &= \nabla_{\sigma} [g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa}) - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα  $\nabla_{\lambda}g^{\mu\nu} = 0$  και στη συνέχεια έχουμε μετονομάσει κάποιους βουβούς δείκτες.

Για τη μεταβολή της μετρικής ισχύει

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}\delta g^{\kappa\lambda} \quad (\text{A.7})$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τη σχέση

$$g^{\kappa\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\kappa}$$

Παίρνοντας τη μεταβολή θα έχουμε

$$\delta g^{\kappa\lambda} g_{\lambda\nu} + g^{\kappa\lambda} \delta g_{\lambda\nu} = 0 \Rightarrow g^{\kappa\lambda} \delta g_{\lambda\nu} = -g_{\lambda\nu} \delta g^{\kappa\lambda}$$

Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με  $g_{\kappa\mu}$  και τα δύο μέλη (ο δείκτης  $\kappa$  είναι ελεύθερος)

$$\begin{aligned} g_{\kappa\mu} g^{\kappa\lambda} \delta g_{\lambda\nu} = -g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} \delta g^{\kappa\lambda} &\Rightarrow \delta_{\mu}^{\lambda} \delta g_{\lambda\nu} = -g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} \delta g^{\kappa\lambda} \\ &\Rightarrow \delta g_{\mu\nu} = -g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} \delta g^{\kappa\lambda} \end{aligned}$$

□

Για τη μεταβολή της ορίζουσας της μετρικής ισχύουν

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \quad \text{και} \quad \delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

Απόδειξη. Ισχύει η ακόλουθη σχέση για οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα  $M$  με μη-μηδενική ορίζουσα

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M)$$

Μεταβολή αυτής της ταυτότητας δίνει

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M)$$

Επιλέγοντας τον πίνακα  $M$  να είναι η μετρική  $g_{\mu\nu}$  έτσι ώστε  $\det M = \det g_{\mu\nu} = g$  βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta g &= g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g^{\mu\nu} g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} \delta g^{\kappa\lambda}) = -g(\delta_{\kappa}^{\nu} g_{\lambda\nu} \delta g^{\kappa\lambda}) \\ &= -g(g_{\kappa\lambda} \delta g^{\kappa\lambda}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση (A.7). Άμεσα προκύπτει τώρα

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

□

Συνεχίζουμε με τα παραπάνω ως δεδομένα. Θεωρούμε μία δράση της μορφής

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G} + S_M$$

όπου  $S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G}$  ονομάζεται δράση Einstein-Hilbert και  $S_M$  είναι η δράση για την ύλη. Μεταβολή της δράσης αυτής θα δώσει

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R] + \delta S_M \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})] + \delta S_M \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] + \delta S_M \end{aligned}$$

$$\stackrel{(A.5)}{=} \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^\kappa) - \nabla_\kappa(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\kappa)] \right] + \delta S_M$$

$$\stackrel{(A.6)}{=} \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\nabla_\sigma[g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma_{\mu\kappa}^\kappa) - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma)] \right] + \delta S_M$$

Ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί σε ένα ολοκλήρωμα ως προς το στοιχείο όγκου  $d^4x$  της συναλλοίωτης παραγώγου ενός διανύσματος. Σύμφωνα με το θεώρημα του Stoke αυτό είναι ισοδύναμο με μια συνοριακή συνθήκη στο άπειρο, η οποία μπορεί να είναι ο μηδενισμός της μεταβολής στο άπειρο. Απομένει λοιπόν

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \right] + \delta S_M$$

Εξ' ορισμού για την συναρτησιακή παράγωγο της δράσης ισχύει

$$\delta S = \int \sum_i \left[ \frac{\delta S}{\delta \Phi^i} \delta \Phi^i \right] d^4x$$

όπου  $\{\Phi^i\}$  είναι ένα πλήρες σύνολο πεδίων ως προς τα οποία μεταβάλλουμε την δράση. Στην περίπτωση μας έχουμε μόνο ένα, το  $g^{\mu\nu}$ . Από την αρχή ελάχιστης δράσης  $\delta S = 0$  θα έχουμε

$$\frac{1}{16\pi G} \left[ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \right] + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16\pi G} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

Ορίζουμε τον τανυστή ενέργειας - ορμής

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

και καταλήγουμε στις εξισώσεις πεδίου του Einstein

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (A.9)$$

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να υπολογίσουμε τον τανυστή ενέργειας - ορμής του πεδίου  $\phi$  με δράση

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

Μεταβολή της δράσης δίνει

$$\delta S_\phi = \int d^4x \left[ \delta \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) + \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta g^{\mu\nu} \right]$$

$$\stackrel{(A.8)}{=} \int d^4x \left( -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) \left( \frac{1}{2}g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right) + \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \delta g^{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) \right] \delta g^{\mu\nu}$$

Έτσι από την αρχή ελάχιστης δράσης για μεταβολή ως προς  $g^{\mu\nu}$  θα έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi)$$

Απ' όπου προκύπτει ο τανυστής ενέργειας - ορμής

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (A.10)$$

## A'.4 Εξισώσεις του Einstein από τη δράση βαθμωτού πεδίου με μη-τετριμμένους κινητικούς όρους

Και εδώ θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας ορισμένες σχέσεις που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

$$\delta R_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi = \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^2 \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_b \nabla_\mu (\partial_\nu \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_\nu (\partial^a \phi \partial_\mu \phi) + \delta g^{\mu\nu} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right] \quad (\text{A'.11})$$

Απόδειξη. Θυμίζουμε τη σχέση (A.5)

$$\delta R_{ab} = \nabla_b (\delta \Gamma_{a\mu}^\mu) - \nabla_\mu (\delta \Gamma_{ab}^\mu)$$

και τη μεταβολή των συμβόλων Christoffel

$$\delta \Gamma_{ab}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_b (\delta g_{\nu a}) + \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\nu (\delta g_{ab})]$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} &= \nabla_b \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_\mu (\delta g_{\nu a}) + \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta g_{a\mu})] \right) \\ &\quad - \nabla_\mu \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_b (\delta g_{\nu a}) + \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\nu (\delta g_{ab})] \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_b \nabla_\mu (\delta g_{\nu a}) + \nabla_b \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla_\nu (\delta g_{a\mu}) \\ &\quad - \nabla_\mu \nabla_b (\delta g_{\nu a}) + \nabla_\mu \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g_{ab})] \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_b \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla_\nu (\delta g_{a\mu}) + \nabla_\mu \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g_{ab})] \end{aligned}$$

Επομένως θα είναι

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi &= \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\nabla_b \nabla_a (\delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla_\nu (\delta g_{a\mu}) + \nabla_\mu \nabla_a (\delta g_{\nu b}) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\delta g_{ab})] \partial^a \phi \partial^b \phi \\ &= \frac{1}{2} [\nabla_a \nabla_b (g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu}) - \nabla_b \nabla^\mu (\delta g_{a\mu}) + \nabla_a \nabla^\nu (\delta g_{\nu b}) - \square (\delta g_{ab})] \partial^a \phi \partial^b \phi \\ &= \frac{1}{2} \left[ -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) + \delta g_{a\mu} \nabla_b \nabla^\mu (\partial^a \phi \partial^b \phi) \right. \\ &\quad \left. + \delta g_{\nu b} \nabla_a \nabla^\nu (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \delta g_{ab} \square (\partial^a \phi \partial^b \phi) \right] + \text{επιφανειακοί όροι} \\ &\stackrel{(\text{A'.7})}{=} \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_b \nabla_\mu (\partial_\nu \phi \partial^b \phi) \right. \\ &\quad \left. - \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_\nu (\partial^a \phi \partial_\mu \phi) + \delta g^{\mu\nu} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right] \end{aligned}$$

□

Αλλάζοντας τους βουβούς δείκτες στην μεταβολή του συναλλοίωτου τανυστή Riemann μπορούμε να γράψουμε

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho}) - \nabla_\nu \nabla_\rho (g^{\kappa\rho} \delta g_{\mu\kappa}) - \nabla_\kappa \nabla_\mu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\rho\nu}) + \square (\delta g_{\mu\nu}) \right] \quad (\text{A'.12})$$

Για τη μεταβολή του ανταλλοίωτου τανυστή Riemann μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\delta R^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi &= \delta(g^{\mu a} g^{\nu b} R_{ab}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&= \delta g^{\mu a} g^{\nu b} R_{ab} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g^{\mu a} \delta g^{\nu b} R_{ab} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g^{\mu a} g^{\nu b} \delta R_{ab} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&= \delta g^{\mu a} \partial_\mu \phi \partial^b \phi R_{ab} + \delta g^{\nu b} \partial^a \phi \partial_\nu \phi R_{ab} + \partial^a \phi \partial^b \phi \delta R_{ab} \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

Για τη μεταβολή της ποσότητας  $\delta(g^{\mu\nu} R)$  ισχύει

$$-\frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu} R) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right] \quad (\text{A.14})$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \delta(g^{\mu\nu} R) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 \delta R \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} [R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] (\partial\phi)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 \\
&\stackrel{(\text{A.12})}{=} -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho}) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_\nu \nabla_\rho (g^{\kappa\rho} \delta g_{\mu\kappa}) - \nabla_\kappa \nabla_\mu (g^{\kappa\rho} \delta g_{\rho\nu}) + \square (\delta g_{\mu\nu}) \right] (\partial\phi)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} \left[ \square (g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho}) \right. \\
&\quad \left. - \nabla^\mu \nabla^\kappa (\delta g_{\mu\kappa}) - \nabla^\rho \nabla^\nu (\delta g_{\rho\nu}) + \square (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \right] (\partial\phi)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} \left[ -g^{\kappa\rho} \delta g_{\kappa\rho} \square (\partial\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. + \delta g_{\mu\kappa} \nabla^\mu \nabla^\kappa (\partial\phi)^2 + \delta g_{\rho\nu} \nabla^\rho \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 \right] + \text{επιφανειακοί όροι} \\
&\stackrel{(\text{A.7})}{=} -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} \left[ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 - \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 \right] \\
&= -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right]
\end{aligned}$$

□

Για μια δράση της μορφής  $S_{NM}^{(1)} = \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  η μεταβολή θα είναι

$$\begin{aligned}
\delta S_{NM}^{(1)} &= \int d^4x \frac{1}{2} [\delta(\sqrt{-g}) R^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta R^{\mu\nu}] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
&\stackrel{(\text{A.8})}{=} \int d^4x \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-g} [\delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^a \phi R_{\nu b} + \delta g^{\mu\nu} \partial^a \phi \partial_\nu \phi R_{\mu a} + \partial^a \phi \partial^b \phi \delta R_{ab}] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(A.11)}{=} \int d^4x \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \sqrt{-g} \left[ \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^a \phi R_{\nu b} \right. \right. \\
& \quad + \delta g^{\mu\nu} \partial^a \phi \partial_\nu \phi R_{\mu a} + \frac{1}{2} \left[ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) - \delta g^{\mu\nu} \nabla_b \nabla_\mu (\partial_\nu \phi \partial^b \phi) \right. \\
& \quad \left. \left. - \delta g^{\mu\nu} \nabla_a \nabla_\nu (\partial^a \phi \partial_\mu \phi) + \delta g^{\mu\nu} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right] \right] \\
& = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + 2 \partial^a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu a)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) \right. \\
& \quad \left. - \nabla_a \nabla_{(\mu} (\nabla_{\nu)} \phi \nabla^a \phi) + \frac{1}{2} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right]
\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\nu}^{(1)} & \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NM}^{(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} \\
& = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + 2 \partial^a \phi \partial_{(\mu} \phi R_{\nu a)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_a \nabla_b (\partial^a \phi \partial^b \phi) \\
& \quad - \nabla_a \nabla_{(\mu} (\nabla_{\nu)} \phi \nabla^a \phi) + \frac{1}{2} \square (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Για μια δράση της μορφής  $S_{NM}^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  η μεταβολή θα είναι

$$\begin{aligned}
\delta S_{NM}^{(2)} & = \int d^4x \frac{1}{2} \left[ \delta \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \sqrt{-g} \frac{1}{2} (\delta g^{\mu\nu} R) \right] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
& \stackrel{(A.8)}{\stackrel{(A.14)}}{=} \int d^4x \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \left( -\frac{1}{2} R (\partial\phi)^2 \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right] \right] \\
& = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi R + R_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right] \right] \\
& = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{4} \left[ -G_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - R \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right]
\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\nu}^{(2)} & \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{NM}^{(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} \\
& = \frac{1}{2} \left[ -G_{\mu\nu} (\partial\phi)^2 - R \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square (\partial\phi)^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu (\partial\phi)^2 \right] \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Ο συνδιασμός τους  $\Theta_{\mu\nu}^{(1)} + \Theta_{\mu\nu}^{(2)}$  θα δώσει

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_a\phi\partial_b\phi R^{ab} + 2\partial^a\phi\partial_{(\mu}\phi R_{\nu a)} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_a\nabla_b(\partial^a\phi\partial^b\phi) \\ & - \nabla_a\nabla_{(\mu}(\nabla_{\nu)}\phi\nabla^a\phi) + \frac{1}{2}\square(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi R \\ & - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu(\partial\phi)^2\end{aligned}\quad (\text{A'.17})$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi R + 2\partial_a\phi\partial_{(\mu}\phi R_{\nu)}^a - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 + \nabla^a\phi\nabla^b\phi R_{\mu a\nu b} + \nabla_\mu\nabla^a\phi\nabla_\nu\nabla_a\phi \\ & - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\square\phi + g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\nabla^a\nabla^b\phi\nabla_a\nabla_b\phi + \frac{1}{2}(\square\phi)^2 - \nabla_a\phi\nabla_b\phi R^{ab}\right]\end{aligned}\quad (\text{A'.18})$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τη συνολική δράση

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\lambda G^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right\}$$

η αρχής της ελάχιστης δράσης για μεταβολή ως προς  $g^{\mu\nu}$  θα δώσει

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(1)}}{\delta g^{\mu\nu}} + \lambda\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{NM}^{(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{G_{\mu\nu}}{8\pi G} + T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}^{(1)} + \Theta_{\mu\nu}^{(2)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{\mu\nu} = -8\pi G[T_{\mu\nu} + \lambda\Theta_{\mu\nu}]\quad (\text{A'.19})$$

με

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + g_{\mu\nu}V(\phi)$$

και

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi R + 2\partial_a\phi\partial_{(\mu}\phi R_{\nu)}^a - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(\partial\phi)^2 + \nabla^a\phi\nabla^b\phi R_{\mu a\nu b} + \nabla_\mu\nabla^a\phi\nabla_\nu\nabla_a\phi \\ & - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\square\phi + g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\nabla^a\nabla^b\phi\nabla_a\nabla_b\phi + \frac{1}{2}(\square\phi)^2 - \nabla_a\phi\nabla_b\phi R^{ab}\right]\end{aligned}$$

**Παράρτημα Β΄**

**Κώδικες Mathematica**



```

(***** PARTICLE PRODUCTION 4-d *****)

(***** XWRIS G^MN *****)

A1 = 600; B1 = 300; rho = 0.1 * Mpl;
t0 = 35;
k = 2 Mpl; (* kanei to omega thetiko *)

ξ1 = 0; ξ2 = 0.01; ξ3 = 0.02; ξ4 = 0.05;
Do[ξ = j;
  Do[mphi = 0.5 * i * 10^(-2) Mpl; (* tosh maza kai panw *)

    a[tau_] = Sqrt[A1 + B1 Tanh[rho * tau / Mpl]];
    R[tau_] = 6 Mpl^2 ( (a'[tau])^2 + a[tau] a''[tau] ) / (a[tau]^2);

    A[tau_] = 3 a'[tau] / a[tau];
    B[tau_] = k^2 / (Mpl^2 a[tau]^2) + mphi^2 / Mpl^2 + ξ R[tau] / Mpl^2;
    W[tau_] = Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4];

    omin = Sqrt[k^2 / (Mpl^2 (A1 - B1)) + mphi^2 / Mpl^2];
    omout = Sqrt[k^2 / (Mpl^2 (A1 + B1)) + mphi^2 / Mpl^2];

    eq = h''[tau] + W[tau]^2 * h[tau];

    solm = NDSolve[{eq == 0, h[-t0] == Exp[-I * omin * (-t0)] / Sqrt[2 omin ],
      h'[-t0] == -I * omin * Exp[-I * omin * (-t0)] / Sqrt[2 omin ]}, h, {tau, -t0, t0}];

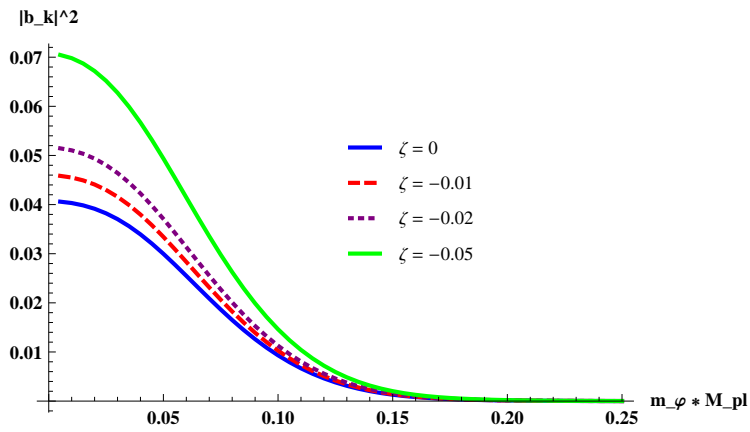
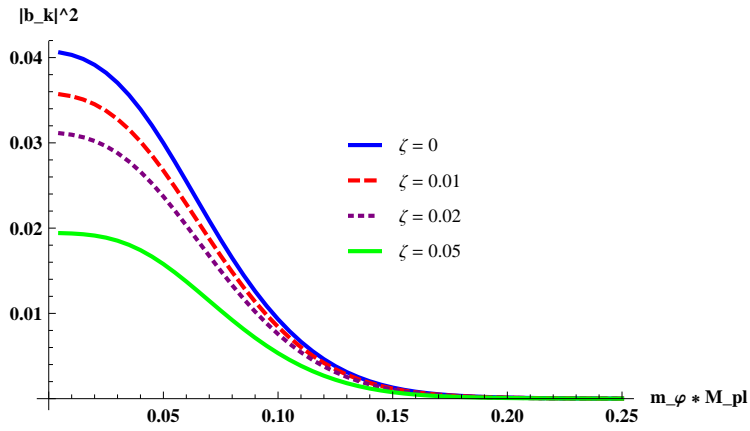
    solp = NDSolve[{eq == 0, h[t0] == (Exp[-I * omout * (t0)] ) / Sqrt[2 omout ],
      h'[t0] == -I * omout * (Exp[-I * omout * (t0)] ) / Sqrt[2 omout ]}, h, {tau, +t0, -t0}];

    hin[tau_] = h[tau] /. solm;
    hout[tau_] = h[tau] /. solp;

    Bogol4d[tau_] = Abs[I (-hin[tau] * hout'[tau] + hout[tau] hin'[tau])]^2;
    store4d[i] = Bogol4d[2][[1]];
    (*Print[Plot[W[tau],{tau,-35,35}]]; *)
    (*Print[Plot[Bogol[tau],{tau, -10, 10}]]; *)
    data4dz[j] = Table[{0.5 * v * 10^(-2), store4d[v]}, {v, 1, 50}];
    valz[j] = ξ;
    , {i, 1, 50}];
  , {j, {ξ1, ξ2, ξ3, ξ4}}];

<< PlotLegends`
ListLinePlot[{data4dz[ξ1], data4dz[ξ2], data4dz[ξ3], data4dz[ξ4]},
  PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Green, Thick}},
  PlotLegend -> {SequenceForm["ξ = ", valz[ξ1]], SequenceForm["ξ = ", valz[ξ2]],
    SequenceForm["ξ = ", valz[ξ3]], SequenceForm["ξ = ", valz[ξ4]]},
  LegendPosition -> {-0.1, -0.2}, AxesLabel -> {"m_φ * M_pl", "|b_k|^2"},
  LabelStyle -> {Bold, Black}, LegendSize -> {0.4, 0.4},
  PlotRange -> All, LegendShadow -> None, LegendBorder -> None]

```



(\*\*\*\*\* EISAGWGH TOU G^MN \*\*\*\*\*)

(\*\*\*\*\*  $\xi = 0$  \*\*\*\*\*)

```
A1 = 600; B1 = 300; rho = 0.1 * Mpl ;
t0 = 35; Mpl = 10^19;
k = 2 Mpl ; (* kanei to omega thetiko *)
```

```
 $\xi = 0$ ;
l1 = 0; l2 = 1; l3 = 5; l4 = 10;
Do[lambda = j / Mpl^2;
  Do[mphi = 0.5 * i * 10^(-2) Mpl; (* tosh maza kai panw *)
```

```

a[tau_] = Sqrt[A1 + B1 Tanh[rho * tau / Mpl]];
R[tau_] = 6 Mpl^2 ((a'[tau])^2 + a[tau] a''[tau]) / (a[tau]^2);

A[tau_] = 3 ((a'[tau] / a[tau]) -
  lambda Mpl^2 (a'[tau]^3 / a[tau]^3 + 2 a''[tau] a'[tau] / a[tau]^2)) /
  (1 - 3 lambda Mpl^2 a'[tau]^2 / a[tau]^2);

B[tau_] =
  (k^2 / (Mpl^2 a[tau]^2) - lambda k^2 (2 a[tau] a''[tau] + a'[tau]^2) / a[tau]^4 +
  mphi^2 / Mpl^2 + g * R[tau] / Mpl^2) / (1 - 3 lambda Mpl^2 a'[tau]^2 / a[tau]^2);

W[tau_] = Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4];

omin = Sqrt[k^2 / (Mpl^2 (A1 - B1)) + mphi^2 / Mpl^2];
omout = Sqrt[k^2 / (Mpl^2 (A1 + B1)) + mphi^2 / Mpl^2];

eq = h''[tau] + W[tau]^2 * h[tau];

solm = NDSolve[{eq == 0, h[-t0] == Exp[-I * omin * (-t0)] / Sqrt[2 omin ],
  h'[-t0] == -I * omin * Exp[-I * omin * (-t0)] / Sqrt[2 omin ]}, h, {tau, -t0, t0}];

solp = NDSolve[{eq == 0, h[t0] == (Exp[-I * omout * (t0)]) / Sqrt[2 omout ],
  h'[t0] == -I * omout * (Exp[-I * omout * (t0)]) / Sqrt[2 omout ]}, h, {tau, +t0, -t0}];

hin[tau_] = h[tau] /. solm;
hout[tau_] = h[tau] /. solp;

Bogol4d[tau_] = Abs[I (hin[tau] * hout'[tau] - hout[tau] hin'[tau])]^2;
store4d[i] = Bogol4d[2][[1]];
(*Print[Plot[W[tau],{tau,-35,35}]]; *)
(*Print[Plot[Bogol[tau],{tau, -10, 10}]]; *)
data4dl[j] = Table[{0.5 * v * 10^(-2), store4d[v]}, {v, 1, 50}];
vall[j] = N[lambda];
, {i, 1, 50}];
, {j, {11, 12, 13, 14}}];

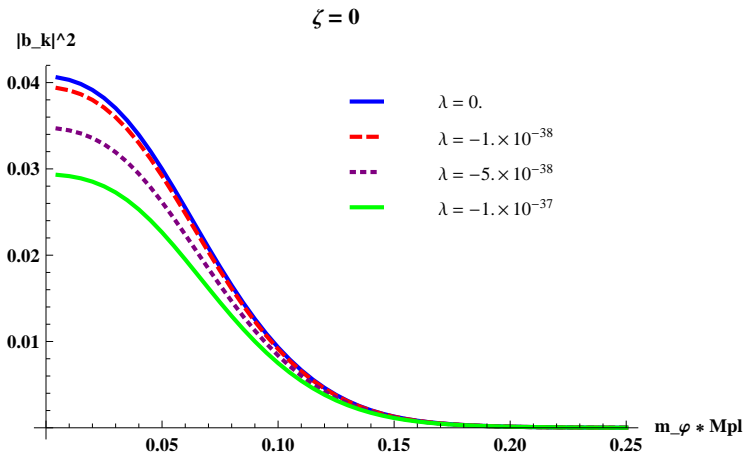
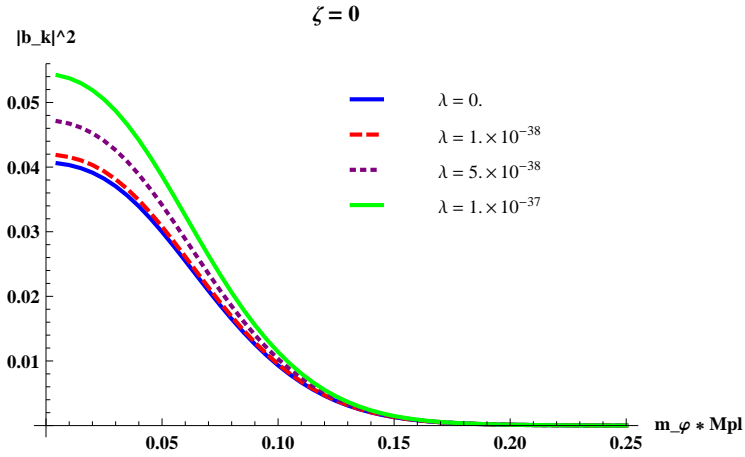
<< PlotLegends`
ListLinePlot[{data4dl[11], data4dl[12], data4dl[13], data4dl[14]},
  PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Green, Thick}},
  PlotLegend -> {SequenceForm["λ = ", vall[11]], SequenceForm["λ = ", vall[12]],
  SequenceForm["λ = ", vall[13]], SequenceForm["λ = ", vall[14]]},

```

```

LegendPosition → {-0.1, 0}, AxesLabel → {"m_φ * Mpl", "|b_k|^2"},
PlotLabel → SequenceForm["ζ = ", ζ], LabelStyle → {Bold, Black},
LegendSize → {0.7, 0.4}, PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]

```



(\*\*\*\*\* λ = 5 \* 10<sup>^</sup>(-38) , ζ ≠ 0 \*\*\*\*\*)

```

A1 = 600; B1 = 300; rho = 0.1 * Mpl;
t0 = 35; Mpl = 10^19;
k = 2 Mpl; (* kanei to omega thetiko *)

lambda = 5 * 10^(-38);
ζ1 = 0; ζ2 = 0.01; ζ3 = 0.02; ζ4 = 0.05;

```

```

Do[ξ = j;
  Do[mphi = 0.5 * i * 10^(-2) Mpl; (* tosh maza kai panw *)

    a[tau_] = Sqrt[A1 + B1 Tanh[rho * tau / Mpl]];
    R[tau_] = 6 Mpl^2 ((a'[tau])^2 + a[tau] a''[tau]) / (a[tau]^2);

    A[tau_] = 3 ((a'[tau] / a[tau]) -
      lambda Mpl^2 (a'[tau]^3 / a[tau]^3 + 2 a''[tau] a'[tau] / a[tau]^2)) /
      (1 - 3 lambda Mpl^2 a'[tau]^2 / a[tau]^2);

    B[tau_] =
      (k^2 / (Mpl^2 a[tau]^2) - lambda k^2 (2 a[tau] a''[tau] + a'[tau]^2) / a[tau]^4 +
        mphi^2 / Mpl^2 + ξ * R[tau] / Mpl^2) / (1 - 3 lambda Mpl^2 a'[tau]^2 / a[tau]^2);

    W[tau_] = Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4];

    omin = Sqrt[k^2 / (Mpl^2 (A1 - B1)) + mphi^2 / Mpl^2];
    omout = Sqrt[k^2 / (Mpl^2 (A1 + B1)) + mphi^2 / Mpl^2];

    eq = h''[tau] + W[tau]^2 * h[tau];

    solm = NDSolve[{eq == 0, h[-t0] == Exp[-I * omin * (-t0)] / Sqrt[2 omin ],
      h'[-t0] == -I * omin * Exp[-I * omin * (-t0)] / Sqrt[2 omin ]}, h, {tau, -t0, t0}];

    solp = NDSolve[{eq == 0, h[t0] == (Exp[-I * omout * (t0)] ) / Sqrt[2 omout ],
      h'[t0] == -I * omout * (Exp[-I * omout * (t0)] ) / Sqrt[2 omout ]}, h, {tau, +t0, -t0}];

    hin[tau_] = h[tau] /. solm;
    hout[tau_] = h[tau] /. solp;

    Bogol4d[tau_] = Abs[I (hin[tau] * hout'[tau] - hout[tau] hin'[tau])]^2;
    store4d[i] = Bogol4d[2][[1]];
    (*Print[Plot[W[tau],{tau,-35,35}]]; *)
    (*Print[Plot[Bogol[tau],{tau , -10, 10}]]; *)
    data4dz[j] = Table[{0.5 * v * 10^(-2) , store4d[v]}, {v, 1, 50}];
    valz[j] = ξ;
    , {i, 1, 50}];
    , {j, {ξ1, ξ2, ξ3, ξ4}}];

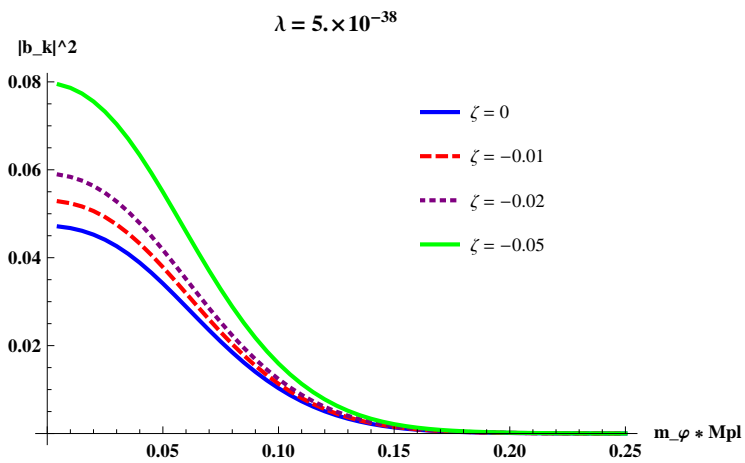
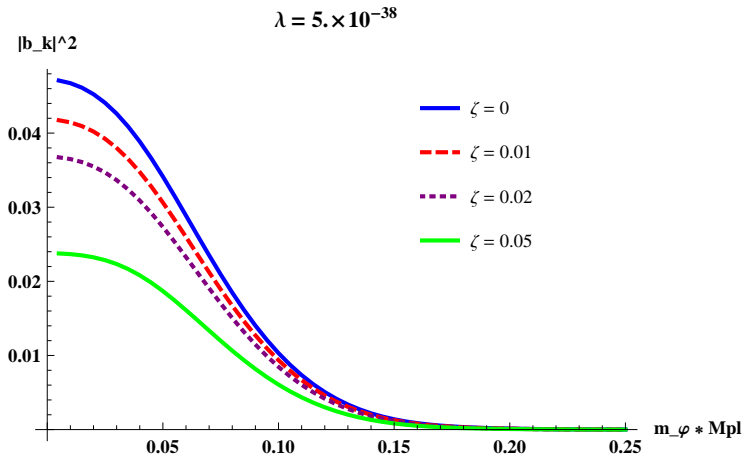
<< PlotLegends`
ListLinePlot[{data4dz[ξ1], data4dz[ξ2], data4dz[ξ3], data4dz[ξ4]},
  PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Green, Thick}},

```

```

PlotLegend → {SequenceForm["ζ = ", valz[ζ1]], SequenceForm["ζ = ", valz[ζ2]],
  SequenceForm["ζ = ", valz[ζ3]], SequenceForm["ζ = ", valz[ζ4]]},
PlotLabel → SequenceForm["λ = ", N[lambda]],
LegendPosition → {0.1, -0.1}, AxesLabel → {"m_φ * Mpl", "|b_k|^2"},
LabelStyle → {Bold, Black}, LegendSize → {0.4, 0.5},
PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]

```



```

(***** PARTICLE PRODUCTION WITH NON-MINIMAL COUPLING *****)

(***** INFLATION GIA  $\xi_1 = 0$  *****)

<< PlotLegends`

Mpl = 10^(19); Mphi = 10^(-6) * Mpl; a0 = 1; taufinal = 45;
psi0 = 3.5; (* GIA NA EXW TOULAXISTON 70 E-FOLDS *)

(* RESCALED LYSH GIA TO psi[tau] KAI a[tau] OPOS PROKYPTEI APO TO SLOW ROLL *)

SRpsi[tau_] = psi0 - tau / Sqrt[12 Pi];
SRa[tau_] = a0 Exp[Sqrt[4 Pi / 3] (psi0 tau - tau^2 / Sqrt[48 Pi])];

(* VRISKW TO TELOS TOU INFLATION APO TH SYNTHKH GIA TO TELOS TOU SLOW ROLL *)
endInf = tau /. Solve[SRpsi[tau] - 2 / Sqrt[48 Pi] == 0, tau][[1]];

(* GIA NA APOFYGOYME KOSMOLOGIKA PROVLHMATA XREIAZOMASTE TOYLAXISTON 70 E-FOLDS *)
Efolds = N[Log[SRa[endInf] / a0]];

(* RESCALED ARXIKES DIAFORIKES EKSIWSEIS *)

ResceQ1 = (psi''[tau]) + 3 (a'[tau] / (a[tau])) (psi'[tau]) + (psi[tau]);
ResceQ2 = (a'[tau] / a[tau]) - Sqrt[(4 * Pi / 3) (psi'[tau]^2 + (psi[tau])^2)];

(* LYSH TOU SYSTHMATOS TWN DIAFORIKWN EKSIWSEWN *)

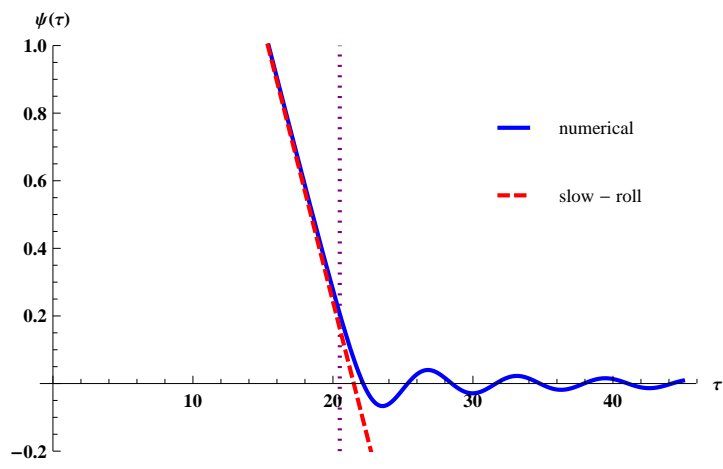
solN = NDSolve[{ResceQ1 == 0, ResceQ2 == 0, psi[0] == psi0,
psi'[0] == - Sqrt[1 / (12 Pi)], a[0] == a0}, {a, psi}, {tau, 300}];

Plot[{(psi[tau] /. solN), SRpsi[tau]}, {tau, 0, taufinal},
GridLines -> {{{endInf, {Thick, Purple, Dotted}}}, {}}, PlotRange -> {-0.2, 1},
AxesLabel -> {" $\tau$ ", " $\psi(\tau)$ "}, LabelStyle -> {Bold, Black},
PlotStyle -> {{Thick, Blue}, {Thick, Red, Dashed}},
PlotLegend -> {"numerical", "slow - roll"}, LegendPosition -> {0.3, 0},
LegendSize -> {0.5, 0.4}, LegendShadow -> None, LegendBorder -> None]

(***** Interpolating Function *****)

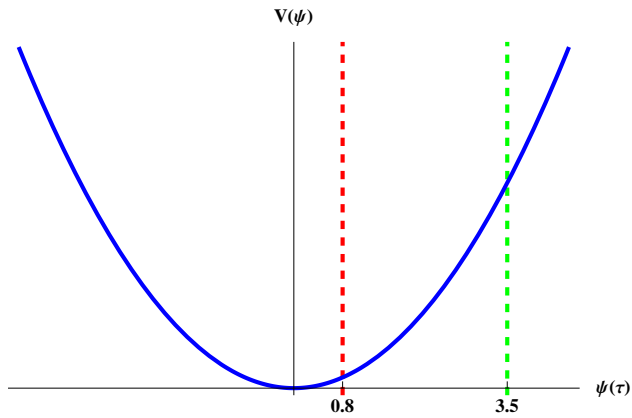
tpsIN = Table[{0.1 * i, psi[0.1 * i] /. solN[[1]]}, {i, 3000}];
psiIN = Interpolation[tpsIN];

```





```
(* DYNAMIKO *)
(* AN H ARXIKH TIMH TOU INFLATON EINAI psi0 = 3.5 MPOREI NA DWSEI ARKETO INFLATION,
GI' AUTO KAI TA E-FOLDS MONO TOTE KSEPERNANE TA 70 *)
Mphi = 10^(-6) Mpl;
Plot[Mphi^2 psi^2 / (2 Mpl^2) , {psi, -4.5, 4.5},
  Axes -> {True, True}, PlotStyle -> {Thick, Blue}, Ticks -> {{0.8, 3.5}, {}},
  GridLines -> {{0.8, {Thick, Red, Dashed}}, {3.5, {Thick, Green, Dashed}}}, {},
  LabelStyle -> {Bold, Black}, AxesLabel -> {"psi(tau)", "V(psi)"}]
```



```

(***** RESCALED KLEIN-
GORDON TOU PEDIU X SYZEYGMENO ME TO PHI *****)

(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = 0$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = 0$  ,  $\xi_2 = 0$  ,
 $\zeta = 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; a0 = 1; psi0 = 3.5; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)
SRpsiN[tau_] = psi0 - tau/Sqrt[12 Pi];
endInf = tau /. Solve[SRpsiN[tau] - 2/Sqrt[48 Pi] == 0, tau][[1]];
(* TO INFLATION TELEIWNEI TH STIGMH tau = 20 *)

tauflat = 200; (* statheropoihsh twN Bogolyubov *)

 $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = 0$ ;  $\zeta = 0$ ;
g1 = 0; g2 = 0.0000008; g3 = 0.0000010;
Do[g = j;
  Do[Mx = (1 + 0.2 * i) * 10^(-6) Mpl;
    R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
    A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
      3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa''[tau] MDa'[tau] / MDa[tau]^2) /
      (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
      ((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
      Mx^2 / Mphi^2 +  $\zeta$  R[tau] / Mphi^2
      + g^2 psiN[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
    Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

    (* Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]], {tau, endInf, tauflat}, PlotRange -> All] *)
    (* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
    integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

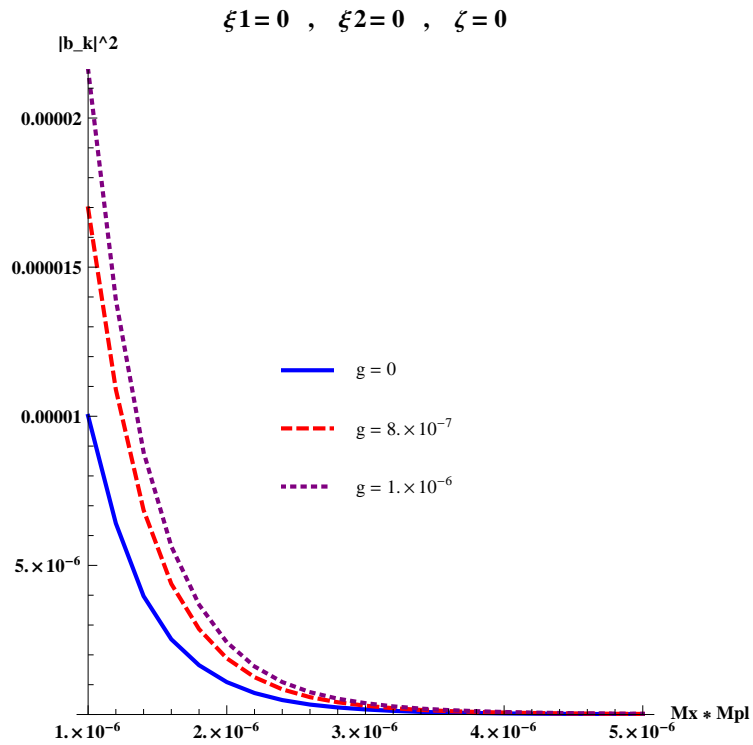
    sol = NDSolve[
      {alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
        beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
        alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
    Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
    store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
    (*Print[Plot[Bogol[tau], {tau, endInf, tauflat}, PlotRange -> All] *)
    , {i, 0, 20}];
    datag[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
      , {v, 0, 20}];
    valg[j] = g;
    , {j, {g1, g2, g3}}];

```

```

<< PlotLegends`
ListLinePlot[{datag[g1], datag[g2], datag[g3]}, PlotStyle →
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend → {SequenceForm["g = ", valg[g1]],
    SequenceForm["g = ", valg[g2]], SequenceForm["g = ", valg[g3]]},
  LegendPosition → {-0.3, -0.4}, AxesLabel → {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel → SequenceForm["ξ1 = ", ξ1, " ", " ", "ξ2 = ", ξ2, " ", " ", "ξ = ", ξ],
  LabelStyle → {Bold, Black}, AspectRatio → Full, LegendSize → {0.6, 0.5},
  PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]

```



```

(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = 0$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = 0$  ,  $\xi_2 = 0$  ,
 $\xi_3 > 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; z = 0; a0 = 1; psi0 = 3.5; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)
SRpsiN[tau_] = psi0 - tau/Sqrt[12 Pi];
endInf = tau /. Solve[SRpsiN[tau] - 2/Sqrt[48 Pi] == 0, tau][[1]];
(* TO INFLATION TELEIWNEI TH STIGMH tau = 20 *)

tauflat = 200; (* statheropoihsh twN Bogolyubov *)

 $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = 0$ ; g = 0;
 $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = 100$ ;  $\xi_3 = 200$ ;
Do[ $\xi = j$ ;
Do[Mx = (1 + 0.2 * i) * 10^(-6) Mpl;
R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
3  $\xi^2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa''[tau] MDa'[tau] / MDa[tau]^2) /
(1 - 3  $\xi^2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
Mx^2 / Mphi^2 +  $\xi$  R[tau] / Mphi^2
+ g^2 psiN[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi^2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

(* Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]], {tau, endInf, tauflat}, PlotRange -> All] *)

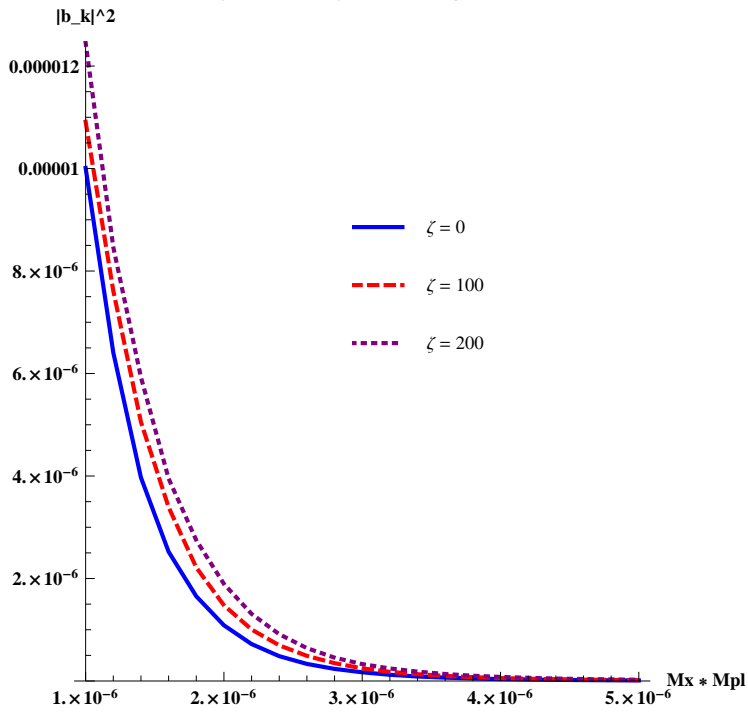
(* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
integral[tau_] = NIntegrate[W[tau], {tau, endInf, tau}];

sol = NDSolve[
{alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
(*Print[Plot[Bogol[tau], {tau, endInf, tauflat}, PlotRange -> All] *)
, {i, 0, 20}];
dataz[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
, {v, 0, 20}];
valz[j] =  $\xi$ ;
, {j, { $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ }}];

```

```
<< PlotLegends`
ListLinePlot[{dataz[ξ1], dataz[ξ2], dataz[ξ3]}, PlotStyle →
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend → {SequenceForm["ξ = ", valz[ξ1]],
    SequenceForm["ξ = ", valz[ξ2]], SequenceForm["ξ = ", valz[ξ3]]},
  LegendPosition → {-0.1, -0.1}, AxesLabel → {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel → SequenceForm["ξ1 = ", ξ1, " ", " ", "ξ2 = ", ξ2, " ", " ", "g = ", g],
  LabelStyle → {Bold, Black}, AspectRatio → Full, LegendSize → {0.6, 0.5},
  PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]
```

$\xi_1 = 0$  ,  $\xi_2 = 0$  ,  $g = 0$



```

(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = 0$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU psi[tau] *)
(*****  $\xi_1 = 0$  ,  $\xi_2 = 0$  ,
 $\xi < 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; z = 0; a0 = 1; psi0 = 3.5; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)
SRpsiN[tau_] = psi0 - tau/Sqrt[12 Pi];
endInf = tau /. Solve[SRpsiN[tau] - 2/Sqrt[48 Pi] == 0, tau][[1]];
(* TO INFLATION TELEIWNEI TH STIGMH tau = 20 *)

tauflat = 200; (* statheropoihsh twN Bogolyubov *)

 $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = 0$ ; g = 0;
 $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = -100$ ;  $\xi_3 = -200$ ;
Do[ $\xi = j$ ;
Do[Mx = (1 + 0.2 * i) * 10^(-6) Mpl;
R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa''[tau] MDa'[tau] / MDa[tau]^2) /
(1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
Mx^2 / Mphi^2 +  $\xi$  R[tau] / Mphi^2
+ g^2 psiN[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

(* Print[Plot[W[tau], {tau, endInf, tauflat}, PlotRange -> All] *)

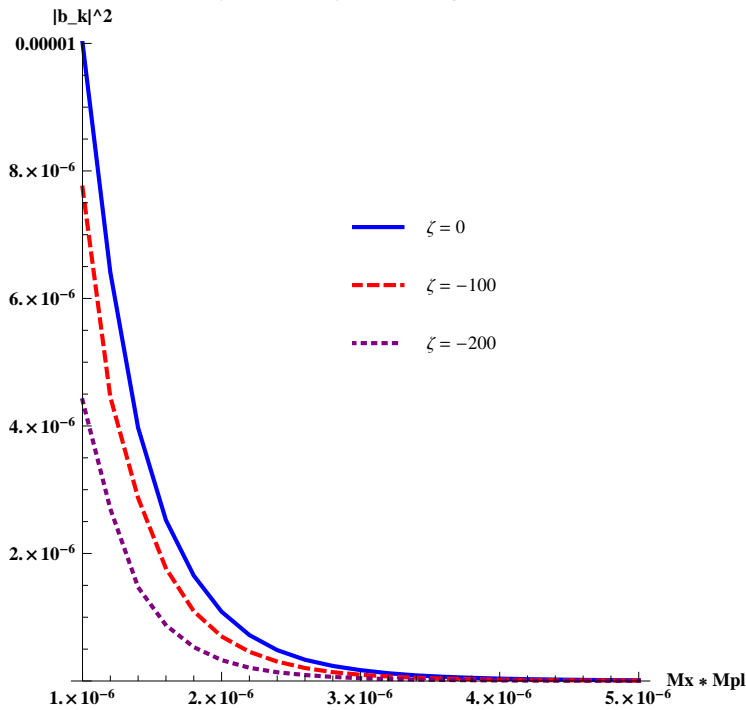
(* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

sol = NDSolve[
{alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
(*Print[Plot[Bogol[tau], {tau, endInf, tauflat}, PlotRange -> All] *)
, {i, 0, 20}];
dataz[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
, {v, 0, 20}];
valz[j] =  $\xi$ ;
, {j, { $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ }}];

```

```
<< PlotLegends`
ListLinePlot[{dataz[ξ1], dataz[ξ2], dataz[ξ3]}, PlotStyle →
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend → {SequenceForm["ξ = ", valz[ξ1]],
    SequenceForm["ξ = ", valz[ξ2]], SequenceForm["ξ = ", valz[ξ3]]},
  LegendPosition → {-0.1, -0.1}, AxesLabel → {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel → SequenceForm["ξ1 = ", ξ1, " ", " ", "ξ2 = ", ξ2, " ", " ", "g = ", g],
  LabelStyle → {Bold, Black}, AspectRatio → Full, LegendSize → {0.6, 0.5},
  PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]
```

ξ1=0 , ξ2=0 , g=0



In[33]:= (\*\*\*\*\* INFLATION GIA ξ1 = -4 ▽ ξ1 = -6 \*\*\*\*\*)

```
<< PlotLegends`
```

(\* GRAFOUME TIS ARKIKES RESCALED EKSISWSEIS FRIEDMANN KAI KLEIN-GORDON \*)

ξ1 = -4; (\* an to ξ1 allaksei se -

6 tha prepei na allaksei kai h arxikh synthikh psi'[0] = -0.0031355 \*)

```

psi0 = 0.83;
(* MPORW NA EXW 70 E-FOLDS ME ksi =
-0.015 KAI psi0 = 3.5 WSTE NA TO SYNDESW ME TO ORIO lambda → 0
ALLA TOTE H ARITHMHTIKH LYSH DEN SYPIPTEI ME
THN ANALYTIKH LOGW TOU SFALMATOS THS ANALYTIKHS *)

IFriedmann = H[tau]^2 - (4 Pi / 3) (psi'[tau]^2 (1 - 3 ξ1 H[tau]^2) + psi[tau]^2);
IKG = (1 - 3 ξ1 H[tau]^2) psi''[tau] +
(3 H[tau] - 3 ξ1 H[tau] (2 H'[tau] + 3 H[tau]^2)) psi'[tau] + psi[tau];

(* VRISKW TO H[tau] APO THN FRIEDMANN KAI META PAIRNW KAI THN PARAGWGO TOU *)
solH = Solve[IFriedmann == 0, H[tau]][[2]];
Hub[tau_] = H[tau] /. solH;
Hubd[tau_] = Hub'[tau];

(* ANTIKATHISTW STHN KLEIN - GORDON TO H[tau] KAI TO H'[tau] *)
KG = (1 - 3 ξ1 H[tau]^2) psi''[tau] + (3 H[tau] - 3 ξ1 H[tau] (2 H'[tau] + 3 H[tau]^2))
psi'[tau] + psi[tau] /. {H[tau] → Hub[tau],
H'[tau] → Hubd[tau]};

(* LYNW THN KLEIN-
GORDON H OPOIA PLEON EXEI MONO TO psi[tau] KAI PARAGWGOUS MEXRI DEYTERH TAKSH *)
tauf = 150;
solpsi = NDSolve[
{KG == 0, psi[0] == psi0, psi'[0] == (*-0.0031355*)-0.081}, psi, {tau, 0, 280}];
(* h arxikes synthkes exoun prokypsei apo to slow roll gia swsta e-folds *)

(* KRATAW THN ARITHMHTIKH LYSH TOY psi[tau] *)
Spsi[tau_] = psi[tau] /. solpsi;
Spsid[tau_] = Spsi'[tau];

(* VRISKW THN ARITHMHTIKH LYSH TOU a[tau] *)
SH[tau_] = Hub[tau] /. {psi[tau] → Spsi[tau], psi'[tau] → Spsid[tau]};
sola = NDSolve[{a'[tau] / a[tau] - SH[tau] == 0, a[0] == 1}, a, {tau, 0, tauf}];
Sa[tau_] = a[tau] /. sola;

(***** SLOW - ROLL *****)

(* GRAFOUME THN ANALYTIKH LYSH TOU psi[tau]
OPWS EXEI PROKYPSEI STA PLAISIA TOU SLOW ROLL *)
(* LYNOUME THN FRIEDMANN WS PROS H[tau] KAI ANTIKATHISTOUME STHN KLEIN -

```



```

GORDON GIA NA VROUME TO psi[tau] *)

SRsolH = Solve [H[tau]^2 - 4 Pi / 3 psi[tau]^2 == 0, H[tau]][[2]];
SRHub[tau_] = H[tau] /. SRsolH;
Kg1 = psi'[tau] - psi[tau] / (9 xi1 (H[tau])^3) /. {H[tau] -> SRHub[tau]};
SRsolp = DSolve[{Kg1 == 0, psi[0] == psi0}, psi, tau][[1]];
SRpsi[tau_] = N[psi[tau] /. SRsolp];
SRpsid[tau_] = SRpsi'[tau];
SRpsid[0];

(* TELOS TOU INFLATION APO TO a''[tau] POU EXEI PROKYPSEI APO TO SLOW ROLL *)
SHub[tau_] = SRHub[tau] /. {psi[tau] -> SRpsi[tau], psi'[tau] -> SRpsid[tau]};
SRsola = DSolve[{a'[tau] / a[tau] - SHub[tau] == 0, a[0] == 1}, a, tau][[1]];
SRa[tau_] = a[tau] /. SRsola;
eq = a''[tau] /. SRsola;
endInf = tau /. Solve[eq == 0, tau][[1]];
SRpsidf = SRpsid[endInf];

(* THELOUME PANW APO 70 EFOLDS *)
Efolds = Log[(a[endInf] /. SRsola)];
(* GIA psi0 = 0.83 kai xi1 = -4 EXOUME 74 E-FOLDS *)

(* GIA psi0 = 0.83 kai xi1 = -6 EXOUME 112 E-FOLDS *)

(* TELOS TOU SLOW ROLL APO THN SYNTHKH *)
(*end = psi'[tau]^2 - psi[tau]^2 / (1-3ksi H[tau]) /. H[tau] -> SRHub[tau];
end2 = end /. {psi[tau]->SRpsi[tau],psi'[tau]->SRpsid[tau]}
Plot[end2 ,{tau,0,tauf}] *)

<< PlotLegends`
Plot[{psi[tau] /. solpsi(*,psi[tau]/. solpsi2 *) , psi[tau] /. SRsolp},
{tau, 0, 100}, GridLines -> {{{endInf, {Thick, Purple, Dotted}}}, {}},
PlotRange -> All, AxesLabel -> {"tau", "psi(tau)", LabelStyle -> {Bold, Black},
PlotStyle -> {{Thick, Blue}, {Thick, Red, Dashed}}, PlotLabel -> SequenceForm["xi = ", xi1],
PlotLegend -> {"numerical", "slow - roll", LegendPosition -> {0.4, 0},
LegendSize -> {0.5, 0.5}, LegendShadow -> None, LegendBorder -> None]

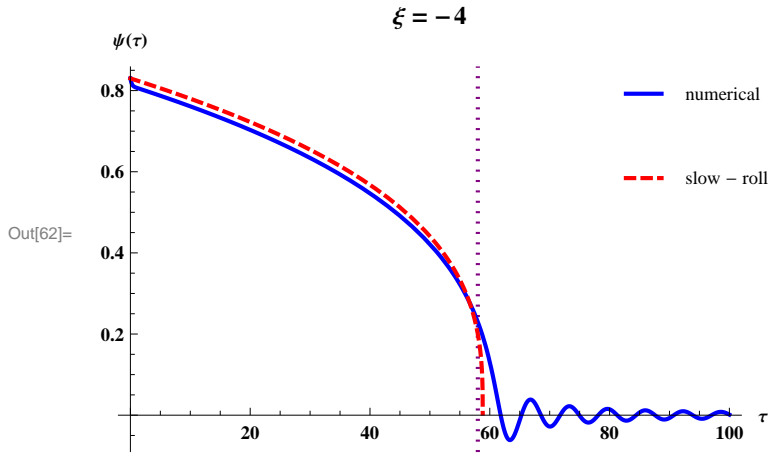
(***** Interpolating Function *****)

```

```

tpsi = Table[{0.1 * i, psi[0.1 * i] /. solpsi[[1]]}, {i, 2800}];
SpsiG = Interpolation[tpsi];

```



(\*\*\*\*\* RESCALED KLEIN-  
GORDON TOU PEDIU X SYZEYGMENO ME TO PHI \*\*\*\*\*)

(\* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = -4$  GIA NA KRATHSEI TH  
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  \*)

(\*\*\*\*\*  $\xi_1 = -4$  ,  $\xi_2 \neq 0$  ,  $g = 0$  ,  $\xi = 0$  \*\*\*\*\*)

```

Mphi = 10^(-6) Mpl; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)

tauflat = 250; (* statheropoihsh twn Bogolyubov *)
endInf; (* telos tou inflation gia xi1 = -4 *)

xi1 = -4; g = 0; zeta = 0;
a = 0; b = -4; c = -50; d = -100;
Do[xi2 = j;
  Do[Mx = (1 + 0.2 i) * 10^(-6) Mpl;
    R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
    A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
      3 xi2 * ((MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa'[tau] MDa''[tau] / MDa[tau]^2)) /
      (1 - 3 xi2 * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda * k^2 *
      ((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
      Mx^2 / Mphi^2 + zeta R[tau] / Mphi^2
      + g^2 SpsiG[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3 xi2 * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
    Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

    (* Print[Plot[(W[tau]),{tau,tauf,tauflat},PlotRange -> All]] *)

    (* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
    integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

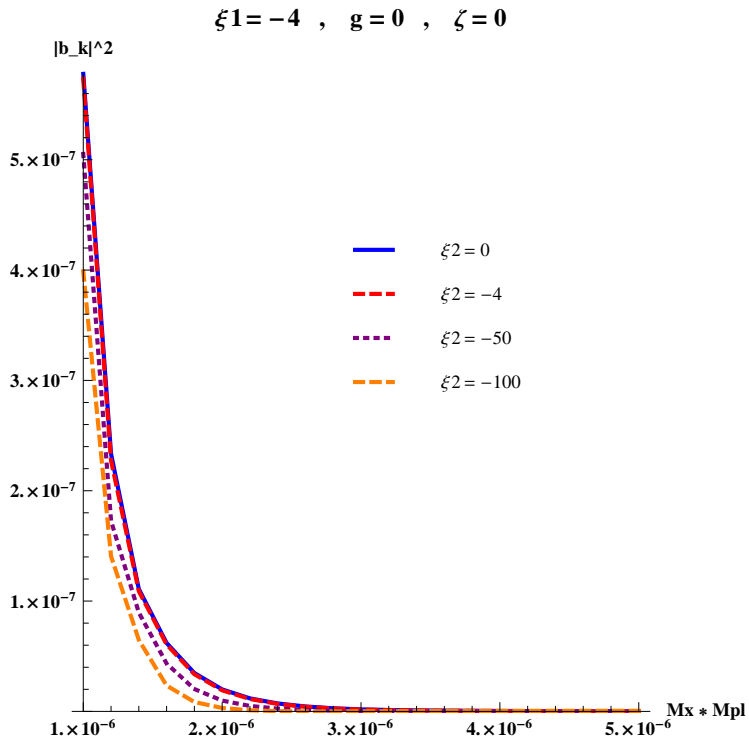
    sol = NDSolve[
      {alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
        beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
        alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf,tauflat}];
    Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
    (*Print[Plot[Bogol[tau],{tau,endInf,tauflat},PlotRange-> All]] *)
    store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
    , {i, 0, 20}];
    datal[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
      , {v, 0, 20}];
    vall[j] = xi2;
    , {j, {a, b, c, d}}];

```

```

<< PlotLegends`
ListLinePlot[{data1[a], data1[b], data1[c], data1[d]},
  PlotStyle -> {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted},
    {Orange, Thick, Dashed}, {Green, Thick}, {Brown, Thick, Dashed}},
  PlotLegend -> {SequenceForm[" $\xi_2 =$ ", vall[a]], SequenceForm[" $\xi_2 =$ ", vall[b]],
    SequenceForm[" $\xi_2 =$ ", vall[c]], SequenceForm[" $\xi_2 =$ ", vall[d]]},
  LegendPosition -> {-0.1, -0.1}, AxesLabel -> {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel -> SequenceForm[" $\xi_1 =$ ",  $\xi_1$ , " ", "g = ", g, " ", "zeta = ",  $\zeta$ ],
  LabelStyle -> {Bold, Black}, AspectRatio -> Full, LegendSize -> {0.7, 0.5},
  PlotRange -> All, LegendShadow -> None, LegendBorder -> None]

```



```
(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = -4$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNENI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = -4$  ,  $\xi_2 = 0$  ,  $g \neq 0$  ,  $\zeta = 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)

tauflat = 250; (* statheropoihsh twn Bogolyubov *)
(* telos tou inflation gia  $\xi_1 = -4$  *)

 $\xi_1 = -4$ ;  $\xi_2 = 0$ ;  $\zeta = 0$ ;
g1 = 0; g2 = 0.0000005; g3 = 0.0000007;
Do[g = j;
  Do[Mx = (1 + i * 0.2) * 10^(-6) Mpl;
    R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2;
    A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
      3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa'[tau] MDa''[tau] / MDa[tau]^2) /
      (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
      ((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
      Mx^2 / Mphi^2 +  $\zeta$  R[tau] / Mphi^2
      + g^2 SpsiG[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
    Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

    (*Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]],{tau,endInf,tauflat},PlotRange -> All]] *)
    (* KGX = h''[tau] + W[tau]^2 *h[tau]; (* adiabata *) *)

    (* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
    integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

    sol = NDSolve[
      {alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
        beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
        alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
    Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
    (*Print[Plot[Bogol[tau],{tau,endInf,tauflat},PlotRange-> All]] *)
    store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
    , {i, 0, 20}];
    datag[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
      , {v, 0, 20}];
    valg[j] = g;
    , {j, {g1, g2, g3}}];
```

NIntegrate::nlim: taut = tau is not a valid limit of integration. >>

NIntegrate::nlim: taut = tau is not a valid limit of integration. >>

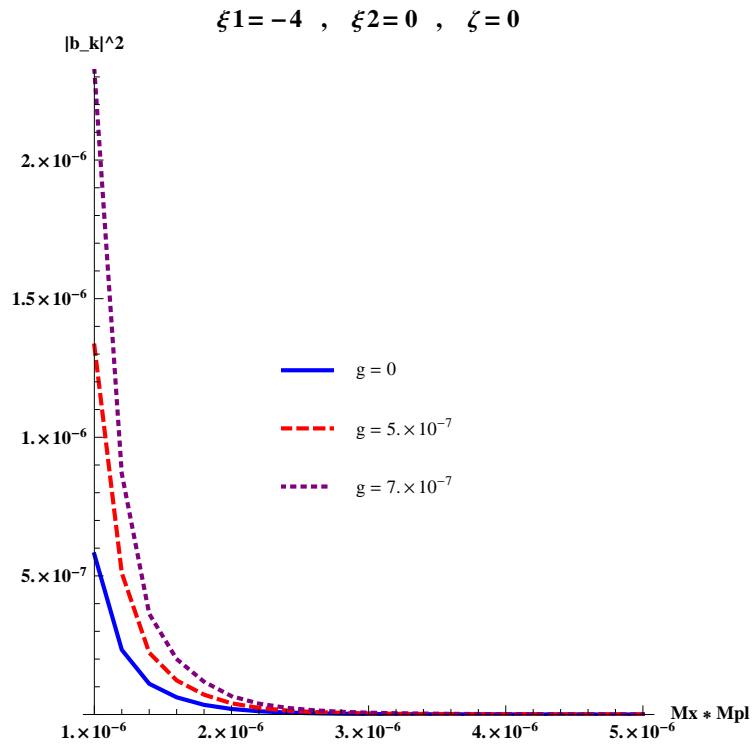
NIntegrate::nlim: taut = tau is not a valid limit of integration. >>

General::stop: Further output of NIntegrate::nlim will be suppressed during this calculation. >>

```

<< PlotLegends`
ListLinePlot[{datag[g1], datag[g2], datag[g3]}, PlotStyle →
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend → {SequenceForm["g = ", valg[g1]],
    SequenceForm["g = ", valg[g2]], SequenceForm["g = ", valg[g3]]},
  LegendPosition → {-0.3, -0.4}, AxesLabel → {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel → SequenceForm["ξ1 = ", ξ1, " ", " ", "ξ2 = ", ξ2, " ", " ", "ξ = ", ξ],
  LabelStyle → {Bold, Black}, AspectRatio → Full, LegendSize → {0.6, 0.5},
  PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]

```



```
(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = -4$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNENI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = -4$  ,  $\xi_2 = -100$  ,  $g \neq 0$  ,
 $\xi = 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)

tauflat = 250; (* statheropoihsh twn Bogolyubov *)
(* telos tou inflation gia  $\xi_1 = -4$  *)

 $\xi_1 = -4$ ;  $\xi_2 = -100$ ;  $\xi = 0$ ;
g1 = 0; g2 = 0.0000005; g3 = 0.0000007;
Do[g = j;
Do[Mx = (1 + i * 0.2) * 10^(-6) Mpl;
R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa'[tau] MDa''[tau] / MDa[tau]^2) /
(1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
Mx^2 / Mphi^2 +  $\xi$  R[tau] / Mphi^2
+ g^2 SpsiG[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

(*Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]],{tau,endInf,tauflat},PlotRange -> All]] *)
(* KGX = h'[tau] + W[tau]^2 *h[tau]; (* adiabata *) *)

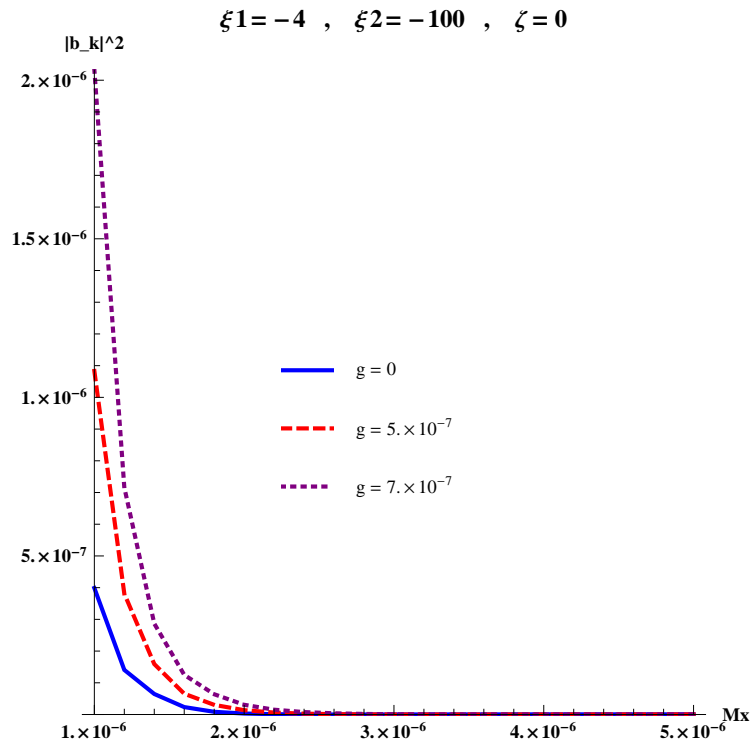
(* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

sol = NDSolve[
{alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
(*Print[Plot[Bogol[tau],{tau,endInf,tauflat},PlotRange-> All]] *)
store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
, {i, 0, 20}];
datag[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
, {v, 0, 20}];
valg[j] = g;
, {j, {g1, g2, g3}}];
```

```

<< PlotLegends`
ListLinePlot[{datag[g1], datag[g2], datag[g3]}, PlotStyle →
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend → {SequenceForm["g = ", valg[g1]],
    SequenceForm["g = ", valg[g2]], SequenceForm["g = ", valg[g3]]},
  LegendPosition → {-0.3, -0.4}, AxesLabel → {"Mx", "|b_k|^2"},
  PlotLabel → SequenceForm["ξ1 = ", ξ1, " ", " ", "ξ2 = ", ξ2, " ", " ", "ξ = ", ξ],
  LabelStyle → {Bold, Black}, AspectRatio → Full, LegendSize → {0.6, 0.5},
  PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]

```





```

(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = -6$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEN TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = -6$  ,  $\xi_2 = 0$  ,  $g \neq 0$  ,  $\zeta = 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)

tauflat = 250; (* statheropoihsh tw'n Bogolyubov *)
endInf; (* telos tou inflation gia  $\xi_1 = -6$  *)

 $\xi_1 = -6$ ;  $\xi_2 = 0$ ;  $\zeta = 0$ ;
g1 = 0; g2 = 0.0000005; g3 = 0.0000007;
Do[g = j;
  Do[Mx = (1 + 0.2 * i) * 10^(-6) Mpl;
    R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
    A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
      3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa'[tau] MDa''[tau] / MDa[tau]^2) /
      (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
      ((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
      Mx^2 / Mphi^2 +  $\zeta$  * R[tau] / Mphi^2
      + g^2 SpsiG[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
    Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

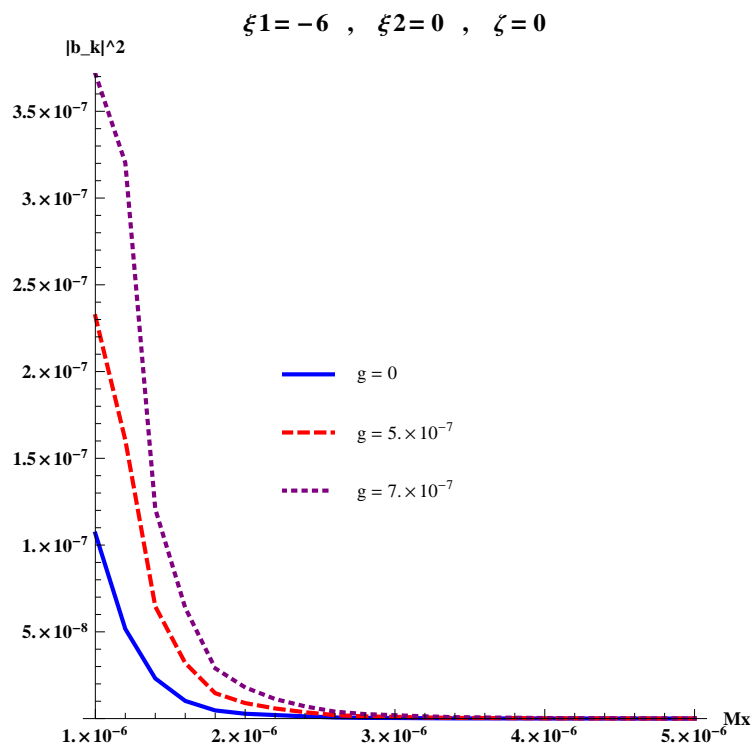
    (*Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]],{tau,endInf,tauflat},PlotRange -> All]] *)

    (* PROSDIORISMOS TW'N SYNTELESTW'N BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TW'N DIAFORIKW'N *)
    integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

    sol = NDSolve[
      {alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
        beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
        alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
    Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
    (*Print[Plot[Bogol[tau],{tau,endInf,tauflat},PlotRange-> All]] *)
    store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
    , {i, 0, 20}];
    datag[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
      , {v, 0, 20}];
    valg[j] = g;
    , {j, {g1, g2, g3}}];

<< PlotLegends`
ListLinePlot[{datag[g1], datag[g2], datag[g3]}, PlotStyle ->
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend -> {SequenceForm["g = ", valg[g1]],
    SequenceForm["g = ", valg[g2]], SequenceForm["g = ", valg[g3]]},
  LegendPosition -> {-0.3, -0.4}, AxesLabel -> {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel -> SequenceForm[" $\xi_1 =$ ",  $\xi_1$ , " , " , " , " $\xi_2 =$ ",  $\xi_2$ , " , " , " , " $\zeta =$ ",  $\zeta$ ],
  LabelStyle -> {Bold, Black}, AspectRatio -> Full, LegendSize -> {0.6, 0.5},
  PlotRange -> All, LegendShadow -> None, LegendBorder -> None]

```



```

(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = -6$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = -6$  ,  $\xi_2 = -100$  ,  $g \neq 0$  ,
 $\zeta = 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)

tauflat = 250; (* statheropoihsh twn Bogolyubov *)
endInf; (* telos tou inflation gia  $\xi_1 = -6$  *)

 $\xi_1 = -6$ ;  $\xi_2 = -100$ ;  $\zeta = 0$ ;
g1 = 0; g2 = 0.0000005; g3 = 0.0000007;
Do[g = j;
  Do[Mx = (1 + 0.2 * i) * 10^(-6) Mpl;
    R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
    A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
      3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa'[tau] MDa''[tau] / MDa[tau]^2) /
      (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
      ((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
      Mx^2 / Mphi^2 +  $\zeta$  * R[tau] / Mphi^2
      + g^2 SpsiG[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
    Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

    (*Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]],{tau,endInf,tauflat},PlotRange -> All]] *)

    (* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
    integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

    sol = NDSolve[
      {alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
        beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
        alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
    Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
    (*Print[Plot[Bogol[tau],{tau,endInf,tauflat},PlotRange-> All]] *)
    store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
    , {i, 0, 20}];
    datag[j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
      , {v, 0, 20}];
    valg[j] = g;
    , {j, {g1, g2, g3}}];

```

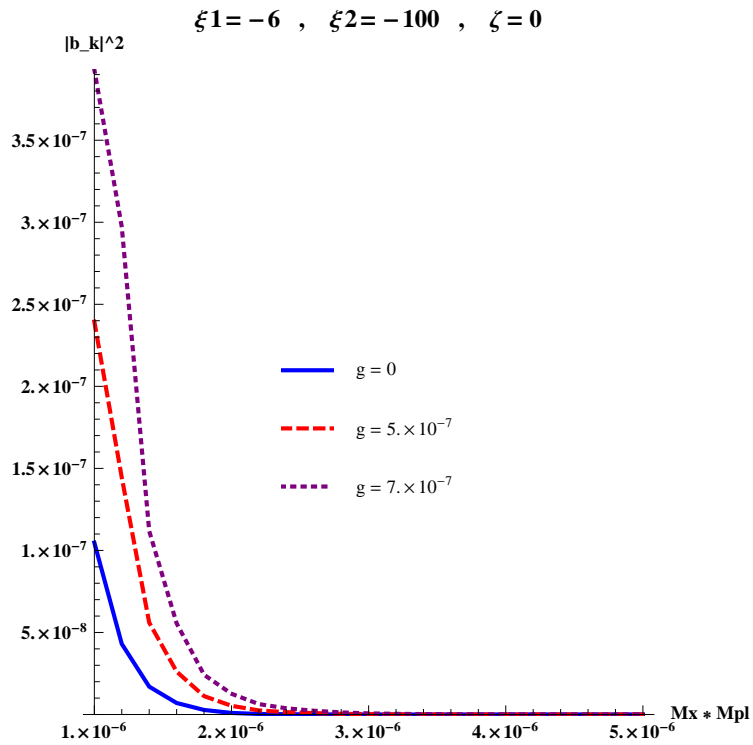
NIntegrate::nlim: taut = tau is not a valid limit of integration. >>

NIntegrate::nlim: taut = tau is not a valid limit of integration. >>

NIntegrate::nlim: taut = tau is not a valid limit of integration. >>

General::stop: Further output of NIntegrate::nlim will be suppressed during this calculation. >>

```
<< PlotLegends`
ListLinePlot[{datag[g1], datag[g2], datag[g3]}, PlotStyle →
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend → {SequenceForm["g = ", valg[g1]],
    SequenceForm["g = ", valg[g2]], SequenceForm["g = ", valg[g3]]},
  LegendPosition → {-0.3, -0.4}, AxesLabel → {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel → SequenceForm["ξ1 = ", ξ1, " ", " ", "ξ2 = ", ξ2, " ", " ", "ξ = ", ξ],
  LabelStyle → {Bold, Black}, AspectRatio → Full, LegendSize → {0.6, 0.5},
  PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]
```



```
(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = -6$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = -6$  ,  $g = 5 * 10^{(-7)}$  ,
 $\xi = 0$  *****)

Mphi =  $10^{(-6)}$  Mpl; k =  $10^{(-5)}$  Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)

tauflat = 250; (* statheropoihsh twn Bogolyubov *)
endInf; (* telos tou inflation gia  $\xi_1 = -6$  *)

 $\xi_1 = -6$ ;  $\xi = 0$ ;
g = 0.0000005;
a = 0; b = -100; c = -150; d = -200;
Do[ $\xi_2 = j$ ;
Do[Mx = (1 + 0.2 * i) *  $10^{(-6)}$  Mpl;
R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa'[tau] MDa''[tau] / MDa[tau]^2) /
(1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
Mx^2 / Mphi^2 +  $\xi$  * R[tau] / Mphi^2
+ g^2 SpsiG[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

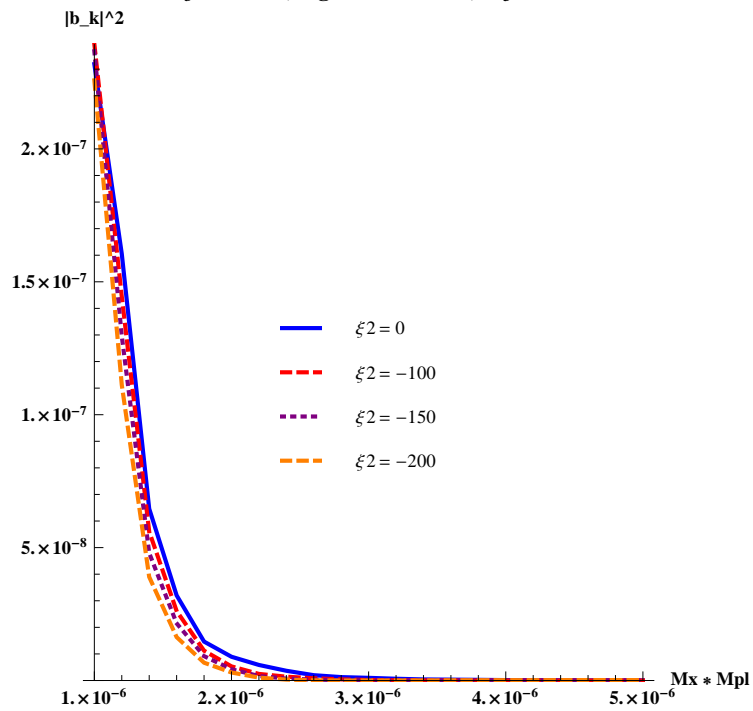
(*Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]],{tau,endInf,tauflat},PlotRange -> All]] *)

(* PROSDIORISMOS TWN SYNTELESTWN BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TWN DIAFORIKWN *)
integral[tau_] = NIntegrate[W[tau], {tau, endInf, tau}];

sol = NDSolve[
{alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
(*Print[Plot[Bogol[tau],{tau,endInf,tauflat},PlotRange-> All]] *)
store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
, {i, 0, 20}];
data $\xi$ [j] = Table[{(1 + 0.2 * v) *  $10^{(-6)}$ , store[v]}
, {v, 0, 20}];
val $\xi$ [j] =  $\xi_2$ ;
, {j, {a, b, c, d}}];
```

```
<< PlotLegends`
ListLinePlot[{dataξ[a], dataξ[b], dataξ[c], dataξ[d]}, PlotStyle →
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend → {SequenceForm["ξ2 = ", valξ[a]], SequenceForm["ξ2 = ", valξ[b]],
    SequenceForm["ξ2 = ", valξ[c]], SequenceForm["ξ2 = ", valξ[d]]},
  LegendPosition → {-0.3, -0.4}, AxesLabel → {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel → SequenceForm["ξ1 = ", ξ1, " ", " ", "g = ", g, " ", " ", "ξ = ", ξ],
  LabelStyle → {Bold, Black}, AspectRatio → Full, LegendSize → {0.6, 0.5},
  PlotRange → All, LegendShadow → None, LegendBorder → None]
```

$\xi_1 = -6$  ,  $g = 5. \times 10^{-7}$  ,  $\xi = 0$



```
(* PREPEI PRWTA NA TREKSEI TO INFLATION GIA  $\xi_1 = -6$  GIA NA KRATHSEI TH
XRONIKH STIGMH POU TELEIWNEI TO INFLATION KAI THN TIMH TOU  $\psi[\tau]$  *)
(*****  $\xi_1 = -6$  ,  $g = 0$ ;  $\xi_2 = -100$ ; ,
 $\xi > 0$  *****)

Mphi = 10^(-6) Mpl; k = 10^(-5) Mpl;

MDa[tau_] = (tau)^(2/3); (* MATTER DOMINATION META TO INFLATION *)

tauflat = 250; (* statheropoihsh tw'n Bogolyubov *)
endInf; (* telos tou inflation gia  $\xi_1 = -6$  *)

 $\xi_1 = -6$ ;
g = 0;  $\xi_2 = -100$ ;
 $\xi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = 250$ ;  $\xi_3 = 400$ ;
Do[ $\xi = j$ ;
  Do[Mx = (1 + 0.2 * i) * 10^(-6) Mpl ;
    R[tau_] = Simplify[6 Mphi^2 (MDa'[tau] MDa[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^2];
    A[tau_] = (3 MDa'[tau] / MDa[tau] -
      3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^3 + 2 MDa'[tau] MDa''[tau] / MDa[tau]^2) /
      (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    B[tau_] = (k^2 / (Mphi^2 MDa[tau]^2) - lambda k^2
      ((2 MDa[tau] MDa''[tau] + MDa'[tau]^2) / MDa[tau]^4) +
      Mx^2 / Mphi^2 +  $\xi$  * R[tau] / Mphi^2
      + g^2 SpsiG[tau]^2 Mpl^2 / Mphi^2) / (1 - 3  $\xi_2$  * (MDa'[tau] / MDa[tau])^2);
    W[tau_] = Simplify[Sqrt[B[tau] - A'[tau] / 2 - A[tau]^2 / 4]];
    Wd[tau_] = Simplify[W'[tau]];

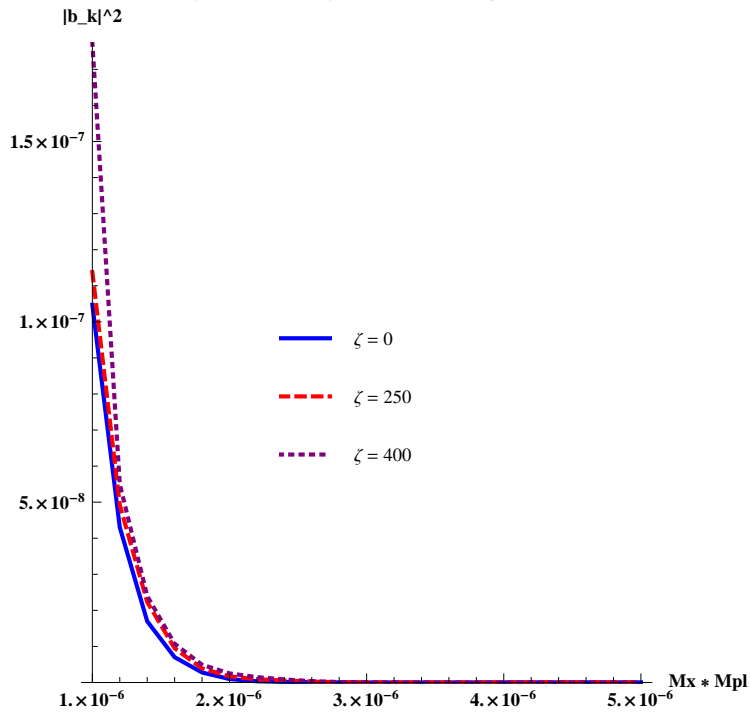
    (*Print[Plot[Abs[W'[tau]/W[tau]],{tau,endInf,tauflat},PlotRange -> All]] *)

    (* PROSDIORISMOS TW'N SYNTELESTW'N BOGOLYUBOV APO TO SYSTHMA TW'N DIAFORIKW'N *)
    integral[tau_] = NIntegrate[W[taut], {taut, endInf, tau}];

    sol = NDSolve[
      {alpha'[tau] == beta[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[2 I integral[tau]],
        beta'[tau] == alpha[tau] * Wd[tau] / (2 W[tau]) Exp[-2 I integral[tau]],
        alpha[endInf] == 1, beta[endInf] == 0}, {alpha, beta}, {tau, endInf, tauflat}];
    Bogol[tau_] = Abs[beta[tau] /. sol]^2;
    (*Print[Plot[Bogol[tau],{tau,endInf,tauflat},PlotRange-> All]] *)
    store[i] = Bogol[tauflat][[1]];
    , {i, 0, 20}];
    data $\xi$ [j] = Table[{(1 + 0.2 * v) * 10^(-6), store[v]}
      , {v, 0, 20}];
    val $\xi$ [j] =  $\xi$ ;
    , {j, { $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ }}];
```

```
<< PlotLegends`
ListLinePlot[{data $\zeta$ [\mathit{\xi}1], data $\zeta$ [\mathit{\xi}2], data $\zeta$ [\mathit{\xi}3]}, PlotStyle ->
  {{Blue, Thick}, {Red, Thick, Dashed}, {Purple, Thick, Dotted}, {Orange, Thick, Dashed}},
  PlotLegend -> {SequenceForm[" $\zeta =$ ", val $\zeta$ [\mathit{\xi}1]],
    SequenceForm[" $\zeta =$ ", val $\zeta$ [\mathit{\xi}2]], SequenceForm[" $\zeta =$ ", val $\zeta$ [\mathit{\xi}3]]},
  LegendPosition -> {-0.3, -0.4}, AxesLabel -> {"Mx * Mpl", "|b_k|^2"},
  PlotLabel -> SequenceForm[" $\xi1 =$ ", \mathit{\xi}1, " ", " ", " $\xi2 =$ ", \mathit{\xi}2, " ", " ", " $g =$ ", g],
  LabelStyle -> {Bold, Black}, AspectRatio -> Full, LegendSize -> {0.6, 0.5},
  PlotRange -> All, LegendShadow -> None, LegendBorder -> None]
```

$\xi1 = -6$  ,  $\xi2 = -100$  ,  $g = 0$





# Βιβλιογραφία

- [1] Birrell N., Davies P.  
*Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press (1982).
- [2] Carroll S.  
*Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004).
- [3] Mukhanov V., Winitzki S.  
*Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*,  
Cambridge University Press (2007).
- [4] Parker L. , Toms D.  
*Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, Cambridge University Press  
(2009).
- [5] Weinberg S.  
*Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).
- [6] Sushkov S.  
*Realistic cosmological scenario with non-minimal kinetic coupling*,  
[arxiv.org/abs/1204.6372](https://arxiv.org/abs/1204.6372).
- [7] Sushkov S.  
*Exact cosmological solutions with nonminimal derivative coupling*,  
[arxiv.org/abs/0910.0980](https://arxiv.org/abs/0910.0980).
- [8] Sushkov S.  
*Classical inflation field induced creation of superheavy dark matter*,  
[inspirehep.net/record/476725](https://inspirehep.net/record/476725).