

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Ζώνες δύο φωνονίων
σε ατομικούς πυρήνες
με χωροεξαρτημένη μάζα

Πέτρος Ταχτσίδης

Επιβλέπων
Διονύσης Μπανάτσος

Τριμελής επιτροπή

Κ. Παρασκευαΐδης
Γ. Κουτσούμπας
Δ. Μπανάτσος

Οκτώβριος 2013

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Αντί προλόγου	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Ομαδοποίηση φασμάτων σε ζώνες.	1
1.1.1 Περιστροφικό φάσμα	2
1.1.2 Δονητικό φάσμα	2
1.2 Ο λόγος $R_{4/2}$	3
1.3 Ανηγμένες ηλεκτρομαγνητικές τετραπολικές μεταβάσεις B(E2)	4
2 Το μοντέλο της υγρής σταγόνας	7
2.1 Το γεωμετρικό συλλογικό μοντέλο των Bohr και Mottelson.	7
2.1.1 Ιδιότητες συλλογικών συντεταγμένων	7
2.1.2 Τύποι πολυπολικής παραμόρφωσης	8
2.1.3 Τετραπολικές Παραμορφώσεις	9
2.1.4 Συμμετρίες των κυματοσυναρτήσεων	11
2.2 Ο αρμονικός ταλαντωτής στην πυρηνική δόνηση τετραπολικού βαθμού .	12
2.2.1 Από την κλασική στην κβαντική περιγραφή	13
2.2.2 Οι ιδιοκαταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή	14
2.3 Ο περιστρεφόμενος πυρήνας	15
2.3.1 Ο συμμετρικός περιστροφέας	15
2.3.2 Ο ασύμμετρος περιστροφέας	17
2.4 Η εξίσωση του Bohr	17
2.5 γ-ασταθής πυρήνας	19
2.6 Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου E(5) και X(5)	20
2.6.1 Το πρότυπο E(5)	21
2.6.2 Πειραματικές εκδηλώσεις της E(5)	23
2.6.3 Το πρότυπο X(5)	23
2.6.4 Πειραματικές εκδηλώσεις της X(5)	26
3 Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων (IBM)	27
3.1 Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί	28
3.2 Η άλγεβρα Lie $U(6)$	29

4	DDM για δυναμικό Davidson	31
4.1	Βασικές παραδοχές	31
4.2	Χαμιλτωνιανή με χωροεξαρτημένη μάζα	32
4.2.1	Βασικός φορμαλισμός	32
4.2.2	Κατασκευή της Χαμιλτωνιανής	33
4.3	Ειδικές λύσεις της Εξίσωσης Bohr	34
4.3.1	γ -ασταθής πυρήνες	34
4.3.2	Συμμετρικά παραμορφωμένοι πυρήνες	34
4.3.3	Τριαξονικοί πυρήνες με $\gamma = \pi/6$	35
4.3.4	Το κοινό β -μέρος του φάσματος	36
4.3.5	Το δυναμικό Davidson	37
4.4	Σχηματικά αναλλοίωτα δυναμικά	38
4.5	Ενεργειακό φάσμα	40
4.6	Κυματοσυναρτήσεις	41
4.6.1	Η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης	41
4.6.2	Διεγερμένες καταστάσεις	42
4.6.3	Η σταθερά κανονικοποίησης	44
4.7	Ρυθμοί μετάπτωσης $B(E2)$	44
5	DDM για δυναμικό Kratzer	47
5.1	Βασικές παραδοχές	47
5.2	Ενεργειακό φάσμα	48
5.3	Κυματοσυναρτήσεις	49
5.3.1	Η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης	49
5.3.2	Διεγερμένες καταστάσεις	50
6	Αριθμητικά αποτελέσματα και σύγκριση με το πείραμα	53
6.1	Δυναμικό Davidson	54
6.2	Δυναμικό Kratzer	66
6.3	Συμπέρασμα	79
	Συμπεράσματα	81
	Παράρτημα Α	83
	Παράρτημα Β	85
	Παράρτημα Γ	87
	Παράρτημα Δ	89
	Παράρτημα Ε	93

Περίληψη

Ο βασικός σκοπός της πυρηνικής φυσικής, είναι η περιγραφή της δομής του πυρήνα και των διαφορετικών εκδηλώσεων αλληλεπίδρασης μεταξύ των δομικών λίθων που τον αποτελούν (πρωτόνια-νετρόνια). Οι βασικοί λόγοι που οδήγησαν στην αντιμετώπιση του προβλήματος χρησιμοποιώντας άλγεβρες Lie και κατ' επέκταση την ανάπτυξη αλγεβρικών μεθόδων θεωρίας ομάδων, είναι ότι το φυσικό σύστημα που μελετάται αποτελείται από υπερβολικά πολλά σωματίδια για να λυθεί αναλυτικά με αντίστοιχο αριθμό μερικών διαφορικών εξισώσεων, και υπερβολικά λίγα για την αξιόπιστη εφαρμογή μεθόδων στατιστικής μηχανικής. Το συλλογικό πρότυπο των Bohr και Mottelson, που αντιμετωπίζει τον πυρήνα ως μία παλλόμενη υγρή σταγόνα, έχει καταφέρει, θεωρώντας τετραπολική παραμόρφωση των πυρήνων, να περιγράψει ενεργειακά φάσματα άρτιων-άρτιων πυρήνων σε χαμηλές ενέργειες, που περιγράφονται από καταστάσεις με άρτια ομοτιμία. Ιδιαίτερη επίσης σημασία έχει η παρουσία συμμετρίας, της οποίας η χρήση παίζει καταλυτικό ρόλο στο συλλογικό πρότυπο. Υπάρχει ωστόσο, και μια κατηγορία πυρήνων των οποίων το φάσμα περιγράφεται από καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία. Αυτές οι καταστάσεις, θεωρείται ότι προκύπτουν από οκταπολικές δονήσεις γύρω από μία σφαιρική ή τετραπολικά παραμορφωμένη βασική κατάσταση, ενώ μία άλλη θεωρητική προσέγγιση είναι αυτή στην οποία ο πυρήνας παρουσιάζει μόνιμη οκταπολική παραμόρφωση. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τετραπολική παραμόρφωση πυρήνων, εισάγοντας στη χαμιλτονιανή του Bohr συγκεκριμένα δυναμικά με κατάλληλες προσεγγίσεις.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται στον αναγνώστη μία συνοπτική εισαγωγή στα διάφορα είδη φασμάτων, χρησιμοποιώντας τις σύγχρονες κβαντικές έννοιες. Επιπλέον, ορίζονται φυσικά μετρήσιμες ποσότητες, χρήσιμες τόσο για την κατανόηση των ιδιοτήτων του πυρήνα όσο και για την παρουσίαση πειραματικών δεδομένων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το συλλογικό πρότυπο ή το μοντέλο της υγρής σταγόνας, όπως αυτό είχε αναπτυχθεί από τους Bohr και Mottelson, περιγράφοντας παραμορφωμένους πυρήνες με τετραπολικό βαθμό ελευθερίας με την αντίστοιχη εξίσωση του Bohr, χρησιμοποιώντας τους βαθμούς ελευθερίας β και γ , οι οποίοι σχετίζονται με την απόκλιση από το σφαιρικό σχήμα και με την απόκλιση από την αξονική συμμετρία αντίστοιχα. Στη συνέχεια περιγράφονται οι συμμετρίες του κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$, όπου αντιστοιχούν σε αλλαγές σχήματος φάσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά η αλγεβρική περιγραφή των πυρήνων στα πλαίσια του μοντέλου αλληλεπιδρώντων μποζονίων IBM [Interacting Boson Model, το οποίο ενεργεί ως συνδετικός κρίκος στα διάφορα συλλογικά γεωμετρικά μοντέλα, ενώ αποτελεί και σήμερα άμεσο αντικείμενο έρευνας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία επέκταση του συλλογικού προτύπου με

αντίστοιχη τροποποίηση στην εξίσωση του Bohr, εισάγοντας έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας. Ως βασική παραδοχή, θεωρείται η εξάρτηση της μάζας από την παραμόρφωση, και κατ' επέκταση η μεταβλητότητα των ροπών αδρανείας. Παρουσιάζεται η ανάπτυξη του αντίστοιχου μοντέλου DDM (Deformation Dependent Mass), και η εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών της αντίστοιχης Χαμιλτωνιανής για δυναμικό Davidson, χρησιμοποιώντας μεθόδους υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής.

Το πέμπτο κεφάλαιο αποτελεί την επέκταση του μοντέλου DDM, λύνοντας την αντίστοιχη Χαμιλτωνιανή για δυναμικό Kratzer.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα θεωρητικά και πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του Δυσπροσίου ^{158}Dy , ^{160}Dy , ^{162}Dy και το Θόριο ^{232}Th , τόσο για το δυναμικό Davidson όσο το δυναμικό Kratzer. Για την προσαρμογή και υπολογισμό των θεωρητικών δεδομένων έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (σε κώδικα Fortran!!!). Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε ζώνες χτισμένες πάνω σε διπλή διέγερση του βαθμού ελευθερίας γ .

Τέλος, στα συμπεράσματα παρουσιάζονται οι βασικές διαφορές και ομοιότητες των ιδιοτιμών για τα δύο διαφορετικά δυναμικά, αλλά και η προβλεπτική ισχύς του μοντέλου, ιδιαίτερα όσον αφορά σε ζώνες χτισμένες πάνω σε διπλή διέγερση του βαθμού ελευθερίας γ .

Στα παραρτήματα στο τέλος της εργασίας, υπάρχουν περαιτέρω πράξεις για την αποσαφήνιση των διαφόρων αποτελεσμάτων.

Αντί προλόγου

Για την εκπόνηση της εργασίας αυτής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ακαδημαϊκούς επιβλέποντες της εργασίας αυτής, Αναπλ. Καθηγητή Κωνσταντίνο Παρασκευαΐδη και Αναπλ. Καθηγητή Γεώργιο Κουτσούμπα, και κυρίως τον Ερευνητικό επιβλέπων Δρ. Διονύσιο Μπονάτσο, ερευνητή του ΕΚΕΦΕ “Δημόκριτος”, για την συνεχή καθοδήγηση και τις συμβουλές του, καθώς επίσης για την κατανόηση και υπομονή τους στην επιμονή μου κατά το πέρας του παρόντος. Θα ήταν μέγα λάθος μου να παραλείψω να αναφέρω την συνεχή βοήθεια και στήριξη που έλαβα από τους φίλους - συμφοιτητές μου και νυν υποψήφιους διδάκτορες του Ε.Κ.Ε.Φ.Ε “Δημόκριτος” Παναγιώτη Γεωργουδή και Σοφία Καραμπάγια, χωρίς την οποία η συγγραφή αυτής της εργασίας θα ήταν αρκετά πιο επίπονη. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για τους έξι μήνες απουσίας που τους έκλειψα.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ένας από τους πρωταρχικούς στόχους της Πυρηνικής Φυσικής, είναι η περιγραφή των αλληλεπιδράσεων και η κατανόηση της δομής του πυρηνικού συστήματος. Συγκεκριμένα, περιγράφονται ιδιότητες των πυρήνων για διεγερμένες στάθμες χαμηλών ενεργειών, δηλαδή στην περιοχή όπου οι κβαντικές ιδιότητες της ύλης είναι πρωτίστως έκδηλες. Για τον σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί τόσο μικροσκοπικά όσο και συλλογικά μοντέλα, των οποίων οι προβλέψεις είναι ικανοποιητικές σε σύγκριση με το πείραμα, στην περιοχή χαμηλών ενεργειών και κυρίως για πυρήνες με άρτιο αριθμό πρωτονίων και νετρονίων (άρτιοι-άρτιοι πυρήνες)

Ένα βασικό μικροσκοπικό μοντέλο, είναι το μοντέλο των φλοιών. Στην πιο απλή του περιγραφή (το μονοσωματιδιακό μοντέλο) θεωρείται ότι κάθε νουκλεόνιο (πρωτόνιο ή νετρόνιο) σε ένα πυρήνα ${}^A_Z X_N$, κινείται ανεξάρτητα σε ένα σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό που αναπαριστά την μέση αλληλεπίδρασή του σε σχέση με τα υπόλοιπα $N-1$ νουκλεόνια του πυρήνα. Έτσι προβλέπεται η ύπαρξη κλειστών φλοιών πρωτονίων ή νετρονίων, η επιτυχής ερμηνεία της ύπαρξης μαγικών αριθμών, καθώς επίσης και η περιγραφή πυρήνων με συμπληρωμένους φλοιούς με ένα νουκλεόνιο σθένους ή μία σπή. Παρ' όλα αυτά, για πυρήνες με μεγάλο αριθμό νουκλεονίων σθένους ή σπών, η περιγραφή του μοντέλου των ανεξάρτητων σωματιδίων είναι αρκετά δύσκολη, αφού δεν έχουν ληφθεί υπόψιν οι αλληλεπιδράσεις γειτονικών νουκλεονίων. Επίσης, υπάρχουν άρτιοι-άρτιοι πυρήνες, όπου η βασική τους κατάσταση αποκλίνει από το σφαιρικό σχήμα που προβλέπει το μοντέλο των φλοιών, ενώ οι μεταβάσεις τους από την πρώτη διεγερμένη στη θεμελιώδη κατάσταση παρουσιάζει πιο συλλογικό χαρακτήρα. Κρίνεται επομένως απαραίτητη η συλλογική αντιμετώπιση τέτοιων πυρήνων, έτσι ώστε να περιγράφονται ικανοποιητικά οι διαφορετικοί τρόποι απορρόφησης και εκπομπής κβάντων ενέργειας, σε συμφωνία με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Συνεπώς, η συλλογική κίνηση των νουκλεονίων, θα πρέπει να περιγραφεί με τη χρήση συλλογικών χρονοεξαρτημένων παραμέτρων, έτσι ώστε να προβλέπεται τόσο το σχήμα όσο και η ιδιοκατάσταση του πυρήνα.

1.1 Ομαδοποίηση φασμάτων σε ζώνες.

Όπως φαίνεται, τα φάσματα πυρήνων χαμηλών ενεργειών που βρίσκονται μακριά από κλειστούς φλοιούς πράγματι δείχνουν μία σχετικά απλή δομή, τα οποία μπορούν να

συσχετιστούν με την ύπαρξη συλλογικών φαινομένων, και συνεπώς μπορούν να περιγραφούν σε όρους συλλογικών παραμέτρων. Τα φάσματα αυτών των πυρήνων μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ζώνες συλλογικών καταστάσεων, ενώ τα μέλη κάθε ζώνης συνδέονται με ισχυρές ηλεκτρικές τετραπολικές μεταβάσεις. Σε αναλογία με τα μοριακά, τα φάσματα αυτά οργανώνονται σε **δονητικά** αν οι ενδοσταθμικές αποστάσεις είναι σχεδόν σταθερές, ή **περιστροφικά** αν υπακούουν στον γνωστό κανόνα $J(J+1)$, όπου J η ιδιοτιμή της στροφορμής του πυρήνα.

1.1.1 Περιστροφικό φάσμα

Σε ένα ιδανικό περιστροφικό φάσμα, παρατηρείται μία ακολουθία σταθμών στροφορμής J και ομοτιμίας (parity) π

$$J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots \quad (1.1)$$

που διαμορφώνεται πάνω στη θεμελιώδη κατάσταση και ονομάζεται θεμελιώδης ζώνη. Επιπροσθέτως, παρατηρούνται ίδιες ακολουθίες σταθμών που διαμορφώνονται πάνω στις 0^+ καταστάσεις, οι λεγόμενες β -ζώνες, καθώς επίσης και ζώνες με την ακολουθία

$$J^\pi = 2^+, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+ \dots \quad (1.2)$$

που διαμορφώνονται πάνω στις διεγερμένες 2^+ καταστάσεις, οι λεγόμενες γ -ζώνες. Οι στάθμες της θεμελιώδης κατάστασης περιγράφονται από τη έκφραση

$$E(J) = \frac{J(J+1)}{2\Theta}, \quad (1.3)$$

όπου Θ είναι η ροπή αδράνειας του πυρήνα, η οποία θεωρείται σταθερή σαν πρώτη προσέγγιση. Παρ' όλα αυτά, για να έχουμε καλύτερη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα, πρέπει να συμπεριλάβουμε όρους ανώτερης τάξης στην παραπάνω έκφραση, δηλαδή

$$E(J) = \frac{J(J+1)}{2\Theta} - B(J(J+1))^2 + \dots \quad (1.4)$$

Περιστροφικά φάσματα απαντώνται σε άρτιους - άρτιους πυρήνες με μόνιμη τετραπολική παραμόρφωση. Τέτοιοι πυρήνες παρατηρούνται μακριά από κλειστούς φλοιούς, συνήθως στο μέσο των φλοιών.

1.1.2 Δονητικό φάσμα

Σε ένα ιδανικό δονητικό φάσμα, αναμένεται να παρατηρήσουμε ένα φωνόνιο δόνησης ενέργειας $\hbar\omega$ στην διεγερμένη κατάσταση 2^+ , για διπλάσια ενέργεια $2\hbar\omega$ αναμένουμε κατάσταση δόνησης δύο φωνονίων στις καταστάσεις $0^+, 2^+, 4^+$, για σχεδόν τριπλάσια ενέργεια $3\hbar\omega$ αναμένουμε κατάσταση δόνησης τριών φωνονίων με καταστάσεις $0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+$ κ.ο.κ.

Τα δονητικά φάσματα ομαδοποιούνται και αυτά σε ζώνες, όπως και τα περιστροφικά. Παρατηρούνται σε σφαιρικούς άρτιους - άρτιους πυρήνες που βρίσκονται κοντά σε κλειστούς φλοιούς. Σε πρώτη προσέγγιση, η ενέργεια των σταθμών της θεμελιώδης ζώνης περιγράφεται από την έκφραση

$$E(J) = aJ \quad (1.5)$$

όπου $a = \hbar\omega$. Όπως και στο περιστροφικό φάσμα, για να έχουμε καλύτερη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα, πρέπει να συμπεριλάβουμε όρους ανώτερης τάξης στην παραπάνω έκφραση. Μία πιθανή επέκταση δίνεται από το μη αρμονικό δονητικό μοντέλο

$$E(J) = aJ + bJ(J - 2) \quad (1.6)$$

1.2 Ο λόγος $R_{4/2}$

Ένα χρήσιμο μέτρο συλλογικότητας είναι ο λόγος

$$R_{4/2} = \frac{E(4^+)}{E(2^+)} \quad (1.7)$$

όπου με $E(J)$ συμβολίζεται η ενέργεια της στάθμης της θεμελιώδους ζώνης με στροφορμή J . Για δονητικούς πυρήνες, όπου αναμένονται ιδιοκαταστάσεις με ενέργεια ανάλογη της στροφορμής J , ο λόγος $R_{4/2}$ είναι ίσος με 2, ενώ για περιστροφικούς πυρήνες, όπου αναμένονται ιδιοκαταστάσεις με ενέργεια που υπακούουν στον κανόνα $J(J + 1)$, ο λόγος $R_{4/2}$ είναι ίσος με $\frac{10}{3} = 3,333$. Συνήθως η περιοχή $2 \leq R_{4/2} \leq 2,4$ λέγεται δονητική ή σχεδόν δονητική περιοχή, η περιοχή $3 \leq R_{4/2} \leq 3,333$ λέγεται περιστροφική ή σχεδόν περιστροφική περιοχή, ενώ η περιοχή $2,4 \leq R_{4/2} \leq 3$ λέγεται περιοχή μετάβασης.

Η περιοχή μετάβασης περιέχει πυρήνες με δονητικά και περιστροφικά δομικά χαρακτηριστικά, ενώ η μετάβαση από την δονητική στην περιστροφική περιοχή παρατηρείται καθώς απομακρυνόμαστε από τους κλειστούς φλοιούς. Στον παρακάτω πίνακα με τα ισότοπα του ${}_{64}\text{Gd}$ και τους αντίστοιχους λόγους $R_{4/2}$, δίνεται ένα παράδειγμα μετάβασης από τη δονητική στην περιστροφική περιοχή.

πυρήνας	$R_{4/2}$
${}^{146}\text{Gd}_{82}$	1,326
${}^{148}\text{Gd}_{84}$	1,806
${}^{150}\text{Gd}_{86}$	2,019
${}^{152}\text{Gd}_{88}$	2,194
${}^{154}\text{Gd}_{90}$	3,015
${}^{156}\text{Gd}_{92}$	3,239
${}^{158}\text{Gd}_{94}$	3,288
${}^{160}\text{Gd}_{96}$	3,298

Ο πρώτος από αυτούς τους πυρήνες είναι ημιμαγικός πυρήνας, αφού ο 82 είναι μαγικός αριθμός. Έτσι ο συγκεκριμένος πυρήνας δεν έχει νουκλεόνια σθένους. Ο

επόμενος πυρήνας, ^{148}Gd , έχει δύο ηλεκτρόνια σθένους. Η συλλογικότητα δεν έχει αναπτυχθεί ικανοποιητικά σε αυτούς τους πυρήνες, καθιστώντας τους μονοσωματιδιακούς παράγοντες πιο σημαντικούς. Αυτό υποδυκνύεται και από τον λόγο $R_{4/2}$, που είναι μικρότερος του 2. Τα ισότοπα ^{150}Gd και ^{152}Gd είναι καθαρά δονητικά, ενώ τα ισότοπα ^{154}Gd έως ^{160}Gd είναι καθαρά περιστροφικά, με τον περιστροφικό τους χαρακτήρα να γίνεται κυρίαρχος καθώς αυξάνεται ο αριθμός των νετρονίων.

1.3 Ανηγμένες ηλεκτρομαγνητικές τετραπολικές μεταβάσεις $B(E2)$

Χρησιμοποιώντας ως αφετηρία τον χρυσό κανόνα του Fermi[1],

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle i | \hat{H}_{int} | f \rangle|^2 \rho_f \quad (1.8)$$

όπου ρ_f η πυκνότητα των τελικών καταστάσεων, μπορεί να προσδιοριστεί ο ρυθμός μετάβασης από μία αρχική κατάσταση $|i\rangle$ προς μία τελική κατάσταση $|f\rangle$, υπό την επίδραση της διαταραγμένης Χαμιλτωνιανής

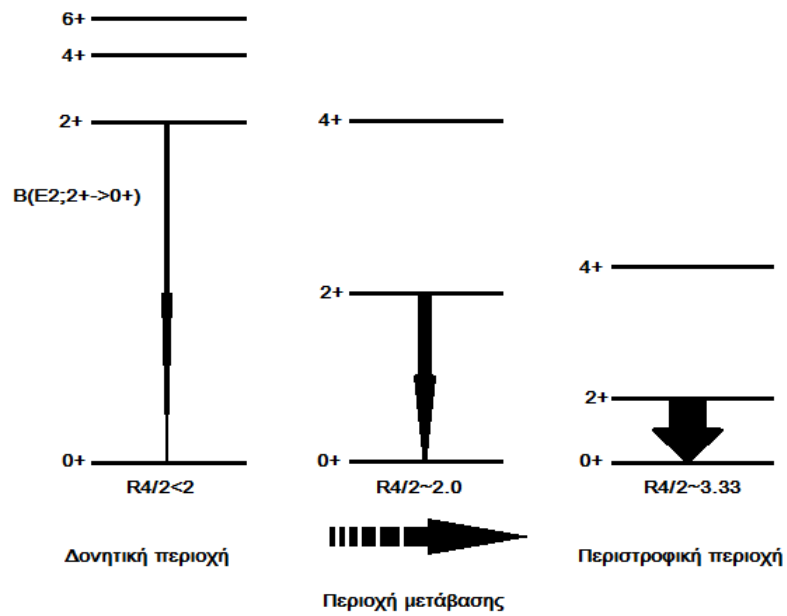
$$\hat{H}_{int} = -\frac{1}{c} \int \hat{j}(r) \cdot \hat{A}(r, t) d^3r \quad (1.9)$$

Η πιθανότητα για τετραπολικές μεταβάσεις, χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα ανηγμένα στοιχεία πίνακα[2], δίνεται από την έκφραση

$$B(E2, J_i \rightarrow J_f) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \left| \int \langle f | \hat{\rho}(r) r^2 Y_2(\Omega) | i \rangle d^3r \right|^2 \quad (1.10)$$

όπου J_i και J_f η αρχική και η τελική ιδιοτιμή της στροφορμής αντίστοιχα, στη συζευγμένη βάση ακτινοβολίας του πυρήνα. Η ποσότητα αυτή χρησιμεύει ως ένα μέτρο συλλογικότητας μεταξύ των καταστάσεων 2_1^+ και 0_1^+ , $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$, που εκφράζεται σε μονάδες $e^2 fm^2 = 10^{-2} e^2 b^2$ ή σε μονάδες Weisskopf (Weisskopf units) (W.u.). Στο σχήμα (1.1) παρουσιάζεται μία ποιοτική περιγραφή της τετραπολικής μετάβασης για πυρήνες με $50 < Z < 82$ και $84 < N < 128$, όπου παρατηρείται μία αύξηση των τιμών $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ καθώς μεταβαίνουμε από μία περιοχή μαγικού αριθμού προς το μέσο της περιοχής των δύο φλοιών, καθώς δηλαδή εισερχόμαστε στην περιοχή συλλογικότητας. Αντίστοιχη μείωση αναμένεται να παρατηρηθεί καθώς μεταβαίνουμε στον αμέσως επόμενο κλειστό φλοιό, για τον επόμενο δηλαδή μαγικό αριθμό, γεγονός που δικαιολογεί και την σταθερότητα των πυρήνων για αντίστοιχο αριθμό νουκλεονίων.

1.3. ΑΝΗΓΜΕΝΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΤΕΤΡΑΠΟΛΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ $B(E2)$



Σχήμα 1.1: Στάδια δομικής εξέλιξης για την περιοχή $50 < Z < 82$ και $84 < N < 128$
 Το πάχος του βέλους μετάβασης είναι ανάλογο της αντίστοιχης πιθανότητας[3]

Κεφάλαιο 2

Το μοντέλο της υγρής σταγόνας

2.1 Το γεωμετρικό συλλογικό μοντέλο των Bohr και Mottelson.

Το πρώτο περιεκτικό συλλογικό μοντέλο που απέδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα για δονητικά και περιστροφικά φάσματα άρτιων - άρτιων πυρήνων σε ενεργειακό εύρος μέχρι και 2MeV, είναι αυτό των Aage Bohr και Ben Mottelson. Οι βασικές παραδοχές του μοντέλου, είναι το πρακτικά ασυμπίεστο της ύλης της πυρηνικής μάζας και η ερμηνεία των ενεργειακών φασμάτων ως δονήσεις και περιστροφές της αμελητέου πάχους πυρηνικής επιφάνειας. Η εσωτερική δομή του πυρήνα είναι μία ομογενής παλλόμενη φορτισμένη σφαίρα, ενώ δεν υπάρχει εικόνα ανεξάρτητων νουκλεονίων. Θεωρώντας το μέγεθος των νουκλεονίων αμελητέο σε σχέση με το μέγεθος του πυρήνα, το μοντέλο της υγρής σταγόνας παρέχει καλύτερα αποτελέσματα για βαρείς πυρήνες.

Με αφετηρία τις παραπάνω παραδοχές, η ακτίνα του πυρήνα μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των πολικών γωνιών θ και ϕ ως ανάπτυγμα σφαιρικών αρμονικών[4]

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right) \quad (2.1)$$

όπου R_0 η ακτίνα του σφαιρικού μη ταλαντώμενου πυρήνα και $\alpha_{\lambda\mu}^*(t)$ οι χρονοεξαρτημένοι παράμετροι παραμόρφωσής του στους οποίους αποδίδεται ο ρόλος των συλλογικών, γενικευμένων συντεταγμένων.

2.1.1 Ιδιότητες συλλογικών συντεταγμένων

Πριν προσδιορίσουμε την Χαμιλτονιανή που περιγράφεται από συλλογικές συντεταγμένες και τις αντίστοιχες γενικευμένες ορμές, είναι αρκετά χρήσιμο να εξετάσουμε τη φυσική τους ερμηνεία χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του πυρήνα.

A) Η ακτίνα του πυρήνα είναι πραγματικός αριθμός, άρα

$$R(\theta, \phi, t) = R^*(\theta, \phi, t) \quad (2.2)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών

$$Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) = (-1)^\mu Y_{\lambda-\mu}(\theta, \phi) \quad (2.3)$$

και εισάγοντάς την στην (2.2) (Βλ.Παράρτημα Α) μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu} \quad (2.4)$$

δηλαδή οι συλλογικές συντεταγμένες υπακούουν στην ίδια σχέση μιγαδικής συζυγίας με τις σφαιρικές αρμονικές, προκειμένου η ακτίνα του πυρήνα να παραμένει πραγματική ποσότητα.

- Β)** Ο πυρήνας θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτος υπό περιστροφές. Αρχικά το σχήμα του πυρήνα δίνεται από τη συνάρτηση $R(\theta, \phi)$. Μία περιστροφή μεταβάλλει τις γωνίες (θ, ϕ) στις (θ', ϕ') ενώ ο πυρήνας θα περιγράφεται από την νέα συνάρτηση $R'(\theta', \phi')$. Θεωρώντας το σχήμα του πυρήνα αναλλοίωτο, η τιμή της νέας συνάρτησης R' στις νέες γωνίες (θ', ϕ') πρέπει να έχει την ίδια τιμή με την αρχική συνάρτηση R για τις αρχικές γωνίες (θ, ϕ) , δηλαδή

$$R'(\theta', \phi') = R(\theta, \phi) \quad (2.5)$$

Ομοίως, (Βλ.Παράρτημα Β) οι $\alpha_{\lambda\mu}^*$ συμπεριφέρονται όπως και οι σφαιρικές αρμονικές υπό περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων κατά τις γωνίες Euler $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, δηλαδή[6]

$$Y'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu'\mu}^\lambda Y_{\lambda\mu'} \quad (2.6)$$

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu'\mu}^\lambda \alpha_{\lambda\mu} \quad (2.7)$$

- Γ)** Ο πυρηνική ακτίνα θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ανακλάσεις του συστήματος συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία όπως και πριν, όταν οι $\alpha_{\lambda\mu}^*$ ανακλώνται, υπόκεινται με την ίδια αλλαγή προσήμου με αυτή των σφαιρικών αρμονικών: πολλαπλασιάζονται με τον όρο $(-1)^\lambda$, δηλαδή έχουν την αυτή ομοτιμία.

2.1.2 Τύποι πολυπολικής παραμόρφωσης

Η γενική έκφραση (2.1) προβλέπει την παραμόρφωση της επιφάνειας του πυρήνα προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, για οποιαδήποτε τιμή της τάξης λ των σφαιρικών αρμονικών. Μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε ποιες από αυτές τις τιμές είναι γενικά παραδεκτές, εξετάζοντας την φυσική ερμηνεία των διάφορων πολυπολικών όρων που αναπτύσσονται.

Για $\lambda = 0$, η (2.1) προβλέπει την μεταβολή του όγκου του πυρήνα. Η ενέργεια όμως που απαιτείται για μία τέτοια μεταβολή, είναι αρκετά μεγαλύτερη από το εύρος του χαμηλοενεργειακού φάσματος εκπομπών που πρόκειται να εξεταστεί στην παρούσα εργασία, έτσι ο μονοπολικός όρος δεν θα μας απασχολήσει. Μπορούμε, υπολογίζοντας προσεγγιστικά τον πυρηνικό όγκο, να εκφράσουμε την παράμετρο α_{00} συναρτήσει των υπόλοιπων παραμορφωτικών παραμέτρων[5]

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\lambda \geq 1} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (2.8)$$

2.1. ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ BOHR ΚΑΙ MOTTELSON.9

Για $\lambda = 1$, οι αντίστοιχοι διπολικοί όροι δεν περιγράφουν κάποια παραμόρφωση του πυρήνα, παρά μία μετατόπιση του κέντρου μάζας του, χωρίς να τους αποδίδονται αναμενόμενες πυρηνικές αποδιεγέρσεις. Για $\lambda = 2$, προκύπτουν οι πλέον σημαντικές τετραπολικές παραμορφώσεις, οι οποίες περιγράφουν καταστάσεις θετικής ομοτιμίας, ενώ στον πυρήνα αποδίδεται σχήμα επιμηκυνσμένου ελλειψοειδούς (prolate) ή πεπλατυσμένου ελλειψοειδούς (oblate), καθώς επίσης και μεταβατικές καταστάσεις. Για $\lambda = 3$, έχουμε οκταπολικές παραμορφώσεις που περιγράφουν καταστάσεις αρνητικής ομοτιμίας, οι οποίες αποδίδουν στον πυρήνα σχήμα "αχλαδιού". Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν τετραπολικές παραμορφώσεις.

2.1.3 Τετραπολικές Παραμορφώσεις

Όπως προαναφέρθηκε, από τις τετραπολικές παραμορφώσεις προκύπτουν οι πιο σημαντικοί δονητικοί βαθμοί ελευθερίας του πυρήνα. Για την περιγραφή τους, θα αναπτύξουμε την (2.1) για $\lambda = 2$

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu}^*(t) Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right) \quad (2.9)$$

Ο όρος α_{00} έχει παραληφθεί από το ανάπτυγμα (2.9) αφού είναι δεύτερης τάξης ως προς $\alpha_{2\mu}$. Επιπλέον, οι παράμετροι $\alpha_{2\mu}$ δεν είναι ανεξάρτητοι λόγω της σχέσης συζυγίας (2.4), συγκεκριμένα, προκύπτει ότι υπάρχουν 5 βαθμοί ελευθερίας. Για να γίνει πιο κατανοητή η γεωμετρική ερμηνεία της (2.9), χρήσιμο είναι να την εκφράσουμε συναρτήσει των καρτεσιανών συνιστωσών του μοναδιαίου διανύσματος

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta \quad (2.10)$$

ενώ εισάγοντας τις (2.10) στις σφαιρικές αρμονικές, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} Y_{20}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2z^2 - x^2 - y^2) \\ Y_{2\pm 1}(\theta, \phi) &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (xz \pm iyz) \\ Y_{2\pm 2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x^2 - y^2 \pm 2ixy) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Εισάγοντας τις (2.11) στην (2.9) έχουμε

$$R(x, y, z) = R_0 (1 + \alpha_{xx} x^2 + \alpha_{yy} y^2 + \alpha_{zz} z^2 + 2\alpha_{xy} xy + 2\alpha_{xz} xz + 2\alpha_{yz} yz) \quad (2.12)$$

Εύκολα επίσης μπορούν να δειχθούν οι παρακάτω εκφράσεις, όπου εκφράζονται οι σφαιρικές παράμετροι συναρτήσει των καρτεσιανών

$$\alpha_{2\pm 2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy} \pm 2i\alpha_{xy})$$

$$\alpha_{2\pm 1} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}}(\alpha_{xz} \pm i\alpha_{yz}) \quad (2.13)$$

$$\alpha_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}(2\alpha_{zz} - \alpha_{xx} - \alpha_{yy})$$

Οι εξισώσεις (2.12) και (2.13) ως έχουν, περιγράφουν τη θέση του πυρήνα για τυχαίο προσανατολισμό στο χώρο. Εκμεταλλευόμενοι τους άξονες συμμετρίας του, αν υπάρχουν κάποιοι, μπορούμε να απλοποιήσουμε την γεωμετρία του προβλήματος εισάγοντας ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό δεν είναι άλλο από το κύριο σύστημα αξόνων (x', y', z') με προσανατολισμό ως προς το σταθερό σύστημα (x, y, z) που καθορίζεται πλήρως από τις γωνίες Euler $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Έτσι, ο ταυιστής αδρανείας του πυρήνα γίνεται διαγώνιος, ενώ οι εκφράσεις (2.12) και (2.13) παίρνουν την απλούστερη μορφή

$$R(x', y', z') = R_0(1 + \alpha'_{xx}x^2 + \alpha'_{yy}y^2 + \alpha'_{zz}z^2) \quad (2.14)$$

$$\alpha'_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{2\pi}{15}}(\alpha'_{xx} - \alpha'_{yy}) = 0 \equiv \alpha_2$$

$$\alpha'_{2\pm 1} = 0 \quad (2.15)$$

$$\alpha'_{20} = 2\sqrt{\frac{\pi}{45}}(2\alpha'_{zz} - \alpha'_{xx} - \alpha'_{yy}) \equiv \alpha_0$$

Εν τέλει έχουμε 5 βαθμούς ελευθερίας, ενώ μπορούμε πιο εύκολα να αποδώσουμε τον γεωμετρικό τους ρόλο

- η α_0 περιγράφει την επιμήκυνση του άξονα z' σε σχέση με τη σύμπτυξη των αξόνων x' και y' .
- η α_2 καθορίζει την διαφορά μήκους των αξόνων x' και y'
- οι γωνίες Euler $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, όπου όπως προαναφέρθηκε καθορίζουν τον προσανατολισμό του (x', y', z') σε σχέση με το (x, y, z) .

Το πλεονέκτημα της χρήσης του συστήματος κυρίων αξόνων, είναι ο σαφής διαχωρισμός στην περιγραφή της περιστροφής και της δόνησης του πυρήνα. Αλλαγή στις γωνίες Euler περιγράφει μία περιστροφή του κυρίου συστήματος, δηλαδή του πυρήνα, περί του αδρανειακού πλαισίου αναφοράς χωρίς αλλαγή στο σχήμα του, η οποία με τη σειρά περιγράφεται καθαρά από τις παραμέτρους α_0 και α_2 .

Υπάρχει ακόμα ένα σύνολο παραμέτρων που εισήχθη από τον Bohr[4]

$$\alpha_0 = \beta \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \sin \gamma, \quad (2.16)$$

2.1. ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ BOHR ΚΑΙ MOTTELSON.11

για τις οποίες ισχύει

$$\sum_{\mu=-2}^2 |\alpha_{2\mu}|^2 = \sum_{\mu=-2}^2 |\alpha'_{2\mu}|^2 = a_0^2 + 2a_2^2 = \beta^2. \quad (2.17)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στο σύστημα κυρίων αξόνων του πυρήνα ισχύει[8]

$$\begin{aligned} \alpha'_{xx} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \alpha'_{yy} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \alpha'_{zz} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.18)$$

ή συμμαζεύοντας τις (2.18) σε μία έκφραση

$$\delta R_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

όπου $k = 1, 2, 3$ αντιστοιχούν στις x', y', z' συνιστώσες αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε ότι

- για $\gamma = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ το σχήμα είναι επίμηκες (ωσειδές), με αντίστοιχους άξονες συμμετρίας τους z', x', y'
- για $\gamma = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ το σχήμα είναι πεπλατυσμένο, με αντίστοιχους άξονες συμμετρίας τους y', z', x'
- για ενδιάμεσες τιμές του γ , δηλαδή μη πολλαπλάσια του 60° , έχουμε τριαξονικά σχήματα.

2.1.4 Συμμετρίες των κυματοσυναρτήσεων

Σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης για την περιγραφή τετραπολικών παραμορφώσεων στο χώρο: μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε τις συλλογικές παραμέτρους $\alpha_{2\mu}$ στο αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς, είτε τις παραμέτρους Bohr (α_0, α_2) και τις γωνίες Euler ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) στο κύριο σύστημα αξόνων. Εκμεταλλευόμενοι τις συμμετρίες στο χώρο (β, γ) και περιοριζόμενοι σε δεξιόστροφα συστήματα αναφοράς, μπορούμε με απλή αρίθμηση να βρούμε 24 διαφορετικούς τρόπους αντιστοίχισης των κυρίων αξόνων ενός ελλειψοειδούς να μετα στο χώρο. Μπορούμε, θεωρώντας ένα εξ' αυτών ως "αφετηρία", να μεταβούμε στα 24 διαφορετικά συστήματα αναφοράς, χρησιμοποιώντας συνδιασμούς τριών βασικών τελεστών μετασχηματισμού $\hat{\mathbf{R}}_k, k = 1, 2, 3$.

$\hat{\mathbf{R}}_1 : (x', y', z') \longrightarrow (x', -y', -z')$. Ο $\hat{\mathbf{R}}_1$ αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα x' . Οι συντεταγμένες παραμόρφωσης β και γ δεν αλλάζουν, αφού

το σχήμα του πυρήνα παραμένει αναλλοίωτο κάτω από ανάκλαση των αξόνων x' και y' , επηρεάζονται όμως οι γωνίες Euler: $\hat{\mathbf{R}}_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1 + \pi, \pi - \theta_2, -\theta_3)$ (Βλ. Παράρτημα Γ). Προφανώς, $\hat{\mathbf{R}}_1^2 = \hat{\mathbf{I}}$, όπου $\hat{\mathbf{I}}$ ο ταυτοτικός τελεστής.

$\hat{\mathbf{R}}_2 : (x', y', z') \longrightarrow (y', -x', z')$. Ο $\hat{\mathbf{R}}_2$ αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ γύρω από τον άξονα z' . Προφανώς ισχύει $\hat{\mathbf{R}}_2^4 = \hat{\mathbf{I}}$. Για τις συντεταγμένες παραμόρφωσης (β, γ) ισχύει $\hat{\mathbf{R}}_2(\beta, \gamma) = (\beta - \gamma)$, ενώ για τις γωνίες Euler $\hat{\mathbf{R}}_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \frac{\pi}{2})$.

$\hat{\mathbf{R}}_3 : (x', y', z') \longrightarrow (y', z', x')$. Ο $\hat{\mathbf{R}}_3$ αντιστοιχεί σε κυκλική εναλλαγή των αξόνων, δηλαδή $\hat{\mathbf{R}}_3^3 = \hat{\mathbf{I}}$. Αυτό αντιστοιχεί σε $\hat{\mathbf{R}}_3(\beta, \gamma) = (\beta, \gamma + \frac{2\pi}{3})$, ενώ για τις γωνίες Euler, $\hat{\mathbf{R}}_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1, \theta_2 + \frac{\pi}{2}, \theta_3 + \frac{\pi}{2})$.

Η ύπαρξη των μετασχηματισμών των αξόνων, που είναι απόρροια της επιλογής του κυρίου συστήματος αξόνων του πυρήνα και του εκφυλισμού των συντεταγμένων, έχει μία σημαντική συνέπεια. Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις θα πρέπει να έχουν την ίδια τιμή στα 24 διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Άρα:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1\psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \psi(\beta, \gamma, \theta_1 + \pi, \pi - \theta_2, -\theta_3), \\ \hat{R}_2\psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \psi(\beta, -\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi/2), \\ \hat{R}_3\psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \psi(\beta, \gamma + 2\pi/3, \theta_1, \theta_2 + \pi/2, \theta_3 + \pi/2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2 Ο αρμονικός ταλαντωτής στην πυρηνική δόνηση τετραπολικού βαθμού

Η χαμιλτωνιανή που περιγράφει την ταλάντωση της υγρής σταγόνας, θεωρώντας μικρές παραμέτρους παραμόρφωσης $\alpha_{\lambda\mu}$, δίνεται από τη σχέση

$$H = T + V = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2} B_{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (2.21)$$

Για την απλούστερη δυνατή περίπτωση, υποθέτοντας πυρήνα αστρόβιλης ροής, ασυμπίεστο, και σταθερής πυκνότητας ϱ_m , οι παράμετροι B_{λ} και C_{λ} παίρνουν την μορφή

$$B_{\lambda} = \frac{\varrho_m R_0^5}{\lambda} \quad (2.22)$$

$$C_{\lambda} = (\lambda - 1) \left((\lambda + 2) R_0^2 \sigma - \frac{3e^2 Z^2}{2\pi(2\lambda + 1) R_0} \right) \quad (2.23)$$

Όπου σ η επιφανειακή τάση, Z ο ατομικός αριθμός και R_0 η ακτίνα του σφαιρικού μη ταλαντώμενου πυρήνα.

2.2. Ο ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΔΟΝΗΣΗ ΤΕΤΡΑΠΟΛΙΚΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

2.2.1 Από την κλασική στην κβαντική περιγραφή

Για την περιγραφή της ταλάντωσης του πυρήνα, περιοριζόμενοι σε τετραπολικό βαθμό ελευθερίας, $\lambda = 2$, εισάγουμε την Λαγκρανζιανή του συστήματος και τις αντίστοιχες συζυγείς ορμές

$$L = T - V = \sum_{\mu=-2}^2 \frac{1}{2} B_2 |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 - \sum_{\mu=-2}^2 \frac{1}{2} C_2 |\alpha_{2\mu}|^2 \quad (2.24)$$

$$\pi_{2\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} = \frac{1}{2} B_2 \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} \sum_{\mu'=-2}^2 \dot{\alpha}_{2\mu'}^* \dot{\alpha}_{2\mu'} \quad (2.25)$$

Αξιοποιώντας κατάλληλα την εκφράση (2.4)

$$\pi_{2\mu} = B_2 (-1)^\mu \dot{\alpha}_{2-\mu} \quad (2.26)$$

ενώ από τη συζυγή έκφραση της (2.26) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\pi_{2\mu}^* = (-1)^\mu \pi_{2-\mu} \quad (2.27)$$

δηλαδή οι γενικευμένες ορμές υπακούουν στην ίδια σχέση συζυγίας με αυτή των γενικευμένων θέσεων. Προκειμένου να πετύχουμε την κβάντωση της Χαμιλτωνιανής, προωθούμε τις γενικευμένες θέσεις και ορμές στους αντίστοιχους τελεστές

$$\begin{aligned} \alpha_{2\mu} &\longrightarrow \hat{\alpha}_{2\mu} \\ \pi_{2\mu} &\longrightarrow \hat{\pi}_{2\mu} \end{aligned}$$

με τον αντίστοιχο διαφορικό τελεστή για την ορμή

$$\hat{\pi}_{2\mu} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha_{2\mu}} \quad (2.28)$$

ενώ ικανοποιούνται οι σχέσεις μετάθεσης

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_{2\mu}, \hat{\alpha}_{2\mu'}] &= 0 \\ [\hat{\pi}_{2\mu}, \hat{\pi}_{2\mu'}] &= 0 \\ [\hat{\alpha}_{2\mu}, \hat{\pi}_{2\mu'}] &= i\hbar \delta_{\mu\mu'} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Στη συνέχεια, εισάγοντας τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής $\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger, \hat{\beta}_{2\mu}$

$$\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger = \sqrt{\frac{B_2 \omega_2}{2\hbar}} \hat{\alpha}_{2\mu} - i \sqrt{\frac{1}{2B_2 \hbar \omega_2}} (-1)^\mu \pi_{2-\mu}, \quad (2.30)$$

$$\hat{\beta}_{2\mu} = \sqrt{\frac{B_2 \omega_2}{2\hbar}} (-1)^\mu \hat{\alpha}_{2-\mu} + i \sqrt{\frac{1}{2B_2 \hbar \omega_2}} \pi_{2\mu}, \quad (2.31)$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger, \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{\beta}_{2\mu}, \hat{\beta}_{2\mu'}] = 0, \quad [\hat{\beta}_{2\mu}, \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'}, \quad (2.32)$$

παίρνουμε την κβάντωση της χαμιλτωνιανής

$$\hat{H} = \hbar\omega_2 \left(\sum_{\mu=-2}^2 \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu} + \frac{5}{2} \right), \quad (2.33)$$

όπου $\omega_2 = \sqrt{C_2/B_2}$. Οι τετραπολικοί τελεστές $\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger$ δημιουργούν φωνόνια στροφορμής 2, ενώ οι τετραπολικοί τελεστές $\hat{\beta}_{2\mu}$ καταστρέφουν φωνόνια στροφορμής 2. Εισάγοντας, κατά τα γνωστά, τον τελεστή που καταμετρά τον αριθμό φωνονίων

$$\hat{N} = \sum_{\mu=-2}^2 \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu} \quad (2.34)$$

με ιδιοτιμή N , οι αντίστοιχες ιδιοτιμές της ενέργειας δίνονται από την έκφραση

$$E_N = \hbar\omega_2 (N + 5/2) \quad (2.35)$$

2.2.2 Οι ιδιοκαταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την αντιμετώπιση 5 ανεξάρτητων αρμονικών ταλαντωτών, με ενέργεια θεμελιώδους στάθμης $\frac{1}{2}\hbar\omega_2$ ο καθένας. Άλλοι αναμενόμενοι κβαντικοί αριθμοί είναι η στροφορμή λ και η προβολή της μ , έτσι ώστε οι αντίστοιχες καταστάσεις να έχουν τη μορφή $|N\lambda\mu\rangle$. Μπορούμε να δούμε τις πρώτες καταστάσεις.

1. Η θεμελιώδης κατάσταση ως το κενό φωνονίων $|N = 0, \lambda = 0, \mu = 0\rangle$ με ενέργεια

$$\hat{H} |0\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega_2 |0\rangle \quad (2.36)$$

2. Η τριπλά εκφυλισμένη κατάσταση ενός φωνονίου

$$|N = 1, \lambda = 2, \mu\rangle = \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger |0\rangle, \quad \mu = -2, \dots, 2$$

με στροφορμή 2 και ενέργεια

$$\hat{H} |1\rangle = \left(1 + \frac{5}{2}\right)\hbar\omega_2 |1\rangle \quad (2.37)$$

3. Για την αναπαράσταση του επόμενου συνόλου καταστάσεων δύο φωνονίων, πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν η σύζευξη στροφορμής.

$$|N = 2, \lambda, \mu\rangle = \sum_{\mu'\mu''} (22\lambda | \mu'\mu''\mu) \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu''}^\dagger |0\rangle \quad (2.38)$$

όπου $(22\lambda | \mu'\mu''\mu)$ ο αντίστοιχος συντελεστής Clebsch-Gordan. Οι κανόνες επιλογής στροφορμής επιτρέπουν τις τιμές για $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$. Εναλλάσσοντας

όμως τους δείκτες μ' και μ'' στους συντελεστές Clebsch-Gordan και κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$(\lambda_1 \lambda_2 \Lambda | \mu_1 \mu_2 M) = (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 - \Lambda} (\lambda_2 \lambda_1 \Lambda | \mu_2 \mu_1 M) \quad (2.39)$$

για να συμμετροποιήσουμε την αντίστοιχη έκφραση έχουμε

$$| N = 2, \lambda, \mu \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mu' \mu''} [1 + (-1)^\lambda] (22\lambda | \mu' \mu'' \mu) \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu''}^\dagger | 0 \rangle \quad (2.40)$$

Συμπερασματικά, δεν υπάρχουν κυματοσυναρτήσεις για περιτό λ . Έτσι η κατάσταση δύο φωνονίων είναι τριπλά εκφυλισμένη με στροφορμή 0, 2 και 4.

2.3 Ο περιστρεφόμενος πυρήνας

Σε αυτή την ενότητα, ο πυρήνας αντιμετωπίζεται ως ένα περιστρεφόμενο στέρεο σώμα, με σταθερές ροπές αδρανείας. Όπως είναι γνωστό από την κλασική μηχανική, οι βαθμοί ελευθερίας του στέρεου σώματος είναι οι γωνίες Euler, που περιγράφουν τον προσανατολισμό του στερεού σώματος, σε σχέση με το σταθερό στο χώρο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (οι μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας μπορούν να αγνοηθούν, αφού δεν συνεισφέρουν στο φάσμα εκπομπής του πυρήνα). Φυσικά η πιο εύκολη περιγραφή επιτυγχάνεται στο σύστημα κυρίων αξόνων, όπου συμπίπτουν με τους άξονες συμμετρίας του πυρήνα, ενώ ο ταυιστής αδρανείας γίνεται διαγώνιος. Το φάσμα του τριαξονικού περιστροφέα μελετήθηκε αρχικά από τους Davydov και Filippov [9]. Η Χαμιλτωνιανή του ασύμμετρου περιστροφέα (όπου θεωρούμε σταθερές τιμές για τις παραμέτρους β και γ) δίνεται από τη σχέση

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{J}_i^2}{2\mathcal{J}_i}, \quad (2.41)$$

όπου \hat{J}_i οι τελεστές στροφορμής και \mathcal{J}_i οι αντίστοιχες ροπές αδρανείας του πυρήνα, οι οποίες εν γένει διαφέρουν μεταξύ τους.

2.3.1 Ο συμμετρικός περιστροφέας

Η κυματοσυνάρτηση του περιστροφέα δίνεται από την έκφραση

$$\Phi_{IM}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{M'} \mathcal{D}_{MM'}^{(I)*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \Phi_{IM'}(0, 0, 0) \quad (2.42)$$

όπου I, M οι κβαντικοί αριθμοί της στροφορμής και της z προβολής της αντίστοιχα και $\mathcal{D}_{MM'}^{(I)*}$ ο πίνακας περιστροφής της κυματοσυνάρτησης. Για έναν αξονικά συμμετρικό περιστροφέα, η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί. Αν ο πυρήνας είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα z, δεν αλλάζει ο προσανατολισμός του υπό περιστροφή γωνίας θ_3 . Άρα το άθροισμα ως προς M' στην (2.42) δεν υφίσταται, αφού η περιστραμμένη κυματοσυνάρτηση δεν εξαρτάται από την γωνία θ_3 . Επιπλέον, από την γεωμετρία του προβλήματος, ο εν προκειμένω άξονας δεν μπορεί παρά να συμπίπτει

με τον αντίστοιχο κύριο άξονα αδρανείας z' του περιστροφέα. Ο M' επομένως είναι κύριος κβαντικός αριθμός, ενώ η ποσότητα $M'\hbar$ είναι ιδιοτιμή των τελεστών της z προβολής της στροφορμής J_z και J'_z για το αδρανειακό και κύριο σύστημα αξόνων αντίστοιχα. Συμβολίζοντας με K τον κβαντικό αριθμό του τελεστή J'_z , η ζητούμενη κυματοσυνάρτηση δίνεται από την έκφραση

$$\Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathcal{D}_{MK}^{(I)*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (2.43)$$

Ενώ η ενέργεια του αξονικά συμμετρικού περιστροφέα δίνεται από την έκφραση

$$E = \frac{\hbar^2 [I(I+1) - K^2]}{2\mathcal{J}} \quad (2.44)$$

όπου $\mathcal{J} = \mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y$, ενώ έχει αξιοποιηθεί κατάλληλα η σχέση $\hat{J}'_x{}^2 + \hat{J}'_y{}^2 = \hat{J}'_x{}^2 - \hat{J}'_z{}^2$ λόγω της αναλλοιωτότητας του μέτρου της στροφορμής.

Για την τοποθέτηση του κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων στους άξονες του πυρήνα, μένει η αξιοποίηση των τελεστών μετασχηματισμού \hat{R}_k που παρουσιάστηκαν στην ενότητα (2.1.4). Από την συμμετρία του πυρήνα, δεν μένει παρά η τοποθέτηση του άξονα z' στον άξονα συμμετρίας του, ενώ οι κάθετοι μεταξύ τους άξονες x' και y' μπορούν χωρίς πρόβλημα να περιστραφούν υπό οποιαδήποτε γωνία ϑ γύρω από αυτόν. Κάνοντας χρήση του τελεστή \hat{R}_2 , ο μετασχηματισμός δίνεται από την έκφραση

$$\hat{R}_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \vartheta) \quad (2.45)$$

ενώ η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση ικανοποιεί την έκφραση

$$\Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \vartheta) \quad (2.46)$$

δηλαδή

$$\mathcal{D}_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathcal{D}_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \vartheta) \quad (2.47)$$

Από τον πίνακα περιστροφών στην βάση $|IM\rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \vartheta) &= \langle IM | e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_1\hat{J}_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_2\hat{J}_y} e^{-\frac{i}{\hbar}(\theta_3+\vartheta)\hat{J}_z} | IK \rangle = \\ &= e^{-i(\theta_1 M + (\theta_3 + \vartheta)K)} d_{MK}^{(I)}(\theta_2) = e^{-iK\vartheta} \mathcal{D}_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = e^{-iK\vartheta} \Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (2.48)$$

όπου $d_{MK}^{(I)}(\theta_2) = \langle IM | e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_2\hat{J}_y} | IK \rangle$, ενώ η τελική κυματοσυνάρτηση διαφέρει από την αρχική ως προς ένα παράγοντα φάσης. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να υπάρχει αναλλοίωτο πρέπει $K = 0$. Επίσης με τον ίδιο τρόπο, η αναλλοιωτότητα από την ανάκλαση του άξονα z' και τη δράση του τελεστή \hat{R}_1 , αναπαράγει τον όρο $(-1)^I$, δηλαδή

$$\Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (-1)^I \Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (2.49)$$

με την φυσική συνέπεια ότι οι αποδεκτές ιδιοτιμές του τελεστή \hat{L} της στροφορμής είναι οι άρτιες. Ο μετασχηματισμός \hat{R}_3 αποτυγχάνει να εφαρμοστεί στην παρούσα

περίπτωση, αφού αλλάζει τον άξονα συμμετρίας του πυρήνα. Οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις δίνονται από την έκφραση

$$\Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \mathcal{D}_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (2.50)$$

με ιδιοτιμές ενέργειας

$$E_I = \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2\mathcal{J}} \quad (2.51)$$

2.3.2 Ο ασύμμετρος περιστροφέας

Στην περίπτωση του τριαξονικού περιστροφέα και οι τρεις άξονες του πυρήνα διαφέρουν μεταξύ τους, οπότε η τοποθέτηση ενός συστήματος συντεταγμένων πάνω τους δε δίνει πολλές επιλογές. Η μόνη επιλογή που κάποιος έχει είναι $x' \rightarrow -x'$, $y' \rightarrow -y'$, $z' \rightarrow -z'$. Μία από τις συμμετρίες που επιτρέπονται είναι η \hat{R}_2^2 , η οποία αντιστοιχεί σε $(x', y', z') \rightarrow (-x', -y', -z')$ και μετασχηματίζει τις γωνίες Euler σε $(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi)$. Από τον πίνακα περιστροφής

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3 + \pi) &= \langle IM | e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_1 \hat{J}_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_2 \hat{J}_y} e^{-\frac{i}{\hbar}(\theta_3 + \pi) \hat{J}_z} | IK \rangle = \\ &= e^{-i(\theta_1 M + (\theta_3 + \pi)K)} d_{MK}^{(I)}(\theta_2) = e^{iK\pi} \mathcal{D}_{MK}^{(I)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = e^{iK\pi} \Phi_{IMK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (2.52)$$

όπου $d_{MK}^{(I)}(\theta_2) = \langle IM | e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_2 \hat{J}_y} | IK \rangle$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να υπάρχει αναλλοίωτο θα πρέπει $K=0, 2, 4, \dots$. Με τον ίδιο τρόπο, η συμμετρία $\hat{R}_1 : (x', y', z') \rightarrow (x', -y', -z')$ μετασχηματίζει τον $D_{MK}^{(I)*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ σε $(-1)^I D_{M-K}^{(I)*}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Η παραπάνω συμμετρία ικανοποιείται συμμετροποιώντας την κυματοσυνάρτηση

$$\langle \theta | IMK \rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left(D_{MK}^{(I)*}(\theta) + (-1)^I D_{M-K}^{(I)*}(\theta) \right). \quad (2.53)$$

Γενικά, ο κβαντικός αριθμός K παίρνει τις μη μηδενικές, άρτιες τιμές $0 \leq K \leq I$. Για $K=0$ η ολική στροφορμή μπορεί να πάρει μόνο άρτιες τιμές $I=0, 2, 4, \dots$, αλλιώς η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται.

Στη γενική περίπτωση, η χαμιλτονιανή (2.29) γράφεται ως εξής

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_1} + \frac{1}{\mathcal{J}_2} \right) (\hat{J}'^2 - \hat{J}_3'^2) + \frac{\hat{J}_3'^2}{2\mathcal{J}_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_1} - \frac{1}{\mathcal{J}_2} \right) (\hat{J}_+'^2 + \hat{J}_-'^2) \quad (2.54)$$

και διαγωνοποιείται.

2.4 Η εξίσωση του Bohr

Στην περιοχή των σπάνιων γαιών με $60 \leq Z \leq 72$ και $90 \leq N \leq 110$, εμφανίζονται πυρήνες με μόνιμη παραμόρφωση στη βασική τους κατάσταση. Το φάσμα τέτοιων

πυρήνων, προέρχεται από μικρές ταλαντώσεις γύρω από την παραμορφωμένη θέση ισορροπίας, αλλά και από περιστροφές στο χώρο. Επιλέγοντας για την περιγραφή της κίνησης το σύστημα κυρίων αξόνων και τις συντεταγμένες $(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, η κινητική ενέργεια της σχέσης (2.21) γράφεται ως άθροισμα ενός δονητικού και ενός περιστροφικού μέρους

$$T = T_{vib} + T_{rot} = \frac{1}{2}B_2 (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathcal{J}_k \omega_k'^2, \quad (2.55)$$

όπου ω_k' είναι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του συστήματος κυρίων αξόνων ως προς το αδρανειακό σύστημα, ενώ \mathcal{J}_k οι ροπές αδραειάς που έχουν τη μορφή

$$\mathcal{J}_k = 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right). \quad (2.56)$$

Το επόμενο βήμα είναι η κβάντωση της χαμιλτονιανής. Η κινητική ενέργεια δίνεται από την γενική έκφραση

$$T = \frac{B ds^2}{2 st^2} \quad (2.57)$$

ενώ το τετράγωνο του γραμμικού στοιχείου ds^2 σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες κατά μήκος των στοιχειδών μετατοπίσεων dx_i έχει τη μορφή

$$ds^2 = \sum_i \sum_j g_{ij} dx_i dx_j \quad (2.58)$$

όπου οι συντελεστές του κάθε όρου είναι τα στοιχεία του μετρικού τανυστή

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j} \quad (2.59)$$

Για την κβάντωση και την αναπαράσταση της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger, οι χρονικές παράγωγοι στην έκφραση της κινητικής ενέργειας θα πρέπει να αντικατασταθούν από τους κατάλληλους διαφορικούς τελεστές ως προς τις μεταβλητές του χώρου του προβλήματος. Στην κβαντική περιγραφή, ο τελεστής της κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B} \nabla^2 \quad (2.60)$$

ενώ η λαπλασιανή σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (2.61)$$

όπου g είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή και g_{ij}^{-1} ο αντίστροφός της. Από τα παραπάνω προκύπτει η χαμιλτωνιανή (βλ. Παράρτημα Δ)

$$\begin{aligned} H &= T + V(\beta, \gamma) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \\ &\quad - \frac{1}{8B\beta^2} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} + V(\beta, \gamma), \end{aligned} \quad (2.62)$$

γνωστή ως εξίσωση Bohr, με στοιχείο όγκου

$$dV = \beta^4 |\sin 3\gamma| d\beta d\gamma d^3\theta. \quad (2.63)$$

Περιοριζόμενοι στο σημείο όπου το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο, $\beta = \beta_0 \neq 0, \gamma = 0$, οι ροπές αδράνειας μεταπίπτουν σε

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 3B\beta^2, \mathcal{J}_3 = 4B\beta^2 \sin^2 \gamma. \quad (2.64)$$

Οι ιδιοτιμές των τελεστών \hat{J}^2, \hat{J}_3^2 (ως προς το σύστημα των κύριων αξόνων του πυρήνα), \hat{J}_z^2 (ως προς το αδρανειακό σύστημα) είναι αντίστοιχα $\hbar^2 I(I+1), \hbar^2 K^2, \hbar^2 M^2$. Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις συμμετρίες της κυματοσυναρτήσεως κάτω από τους τελεστές στροφής $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3$, γράφονται

$$\psi_{IMKn_\beta n_\gamma} = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left(D_{MK}^{(I)*} + (-1)^I D_{M-K}^{(I)*} \right) g_{n_\gamma}(\gamma) f_{n_\beta}(\beta), \quad (2.65)$$

ενώ οι ιδιοτιμές της ενέργειας δίνονται από την έκφραση

$$E_{n_\beta n_\gamma IK} = \hbar\omega_\beta \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_\gamma \left(2n_\gamma + \frac{1}{2}|K| + 1 \right) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} [I(I+1) - K^2], \quad (2.66)$$

όπου

$$K = 0, 2, 4, \dots,$$

$$I = \begin{cases} K, K+1, K+2, \dots & \text{για } K \neq 0, \\ 0, 2, 4, \dots & \text{για } K = 0, \end{cases}$$

$$M = -I, -I+1, \dots, +I,$$

$$n_\gamma = 0, 1, 2, \dots,$$

$$n_\beta = 0, 1, 2, \dots$$

2.5 γ-ασταθής πυρήνες

Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε μία ειδική περίπτωση που μελετήθηκε αρχικά από τους Wilets και Jean[11], όπου θεωρούμε δυναμικό ανεξάρτητο της μεταβλητής γ , δηλαδή για δυναμικό της μορφής $V(\beta, \gamma) = V(\beta)$. Πυρήνες που να ερμηνεύουν τέτοια συμπεριφορά βρίσκονται στην περιοχή $Z > 52, N < 80$. Το δυναμικό έχει τη μορφή

$$V(\beta) = \frac{1}{8}C \left(\beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2} - 2\beta_0^2 \right) - D \quad (2.67)$$

με ελάχιστο στο $V(\beta_0) = -D$. Για το δυναμικό αυτό, η Χαμιλτωνιανή στο σύστημα κύριων αξόνων δίνεται ομοίως από την έκφραση

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] - \frac{1}{8B\beta^2} \sum_k \frac{J_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} + V(\beta). \quad (2.68)$$

Οι κυματοσυναρτήσεις δίνονται από τη σχέση

$$\psi_{n_\beta \lambda I M K} = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \frac{f_{n_\beta \lambda}(\beta)}{\beta^2} \sum_{K=-I}^I g_{\lambda I K}(\gamma) D_{MK}^{(I)}(\theta). \quad (2.69)$$

ενώ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές της ενέργειας δίνονται από την έκφραση

$$\varepsilon_{n_\beta \lambda} = \sqrt{\frac{B}{C}} \left(n_\beta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \alpha_\lambda \right) - \frac{1}{4} C \beta_0^2 - D, \quad (2.70)$$

όπου

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{BC} \beta_0^4 + (2\lambda + 3)^2}, \quad (2.71)$$

με $\lambda = 0, \dots, \infty$ τον κβαντικό αριθμό που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας $O(5)$, ενώ οι επιτρεπόμενες τιμές της στροφορμής για ένα συνδυασμό (n_β, λ) περιορίζονται στις 2λ .

2.6 Οι συμμετρίες κρίσιμου σημείου $E(5)$ και $X(5)$

Οι δυναμικές συμμετρίες είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που επιτρέπει την περιγραφή ιδιοτήτων φυσικών συστημάτων, ανάμεσά τους και των πυρήνων. Δυναμική συμμετρία είναι η περίπτωση κατά την οποία ο τελεστής της χαμιλτονιανής H μπορεί να γραφεί συναρτήσει των τελεστών Casimir μιας αλυσίδας αλγεβρών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εμφάνισης δυναμικών συμμετριών είναι το Πρότυπο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων (Interacting Boson Model, IBM) [48]. Στο IBM, οι χαμηλοενεργειακές συλλογικές καταστάσεις του πυρήνα περιγράφονται με τη βοήθεια μποζονίων στροφορμής 0 (s -μποζόνια) και στροφορμής 2 (d -μποζόνια), μέσω των οποίων προκύπτει η συμμετρία $U(6)$. Βρίσκοντας τις αλυσίδες υποαλγεβρών της άλγεβρας $U(6)$ του προτύπου, μπορούν να βρεθούν όλες οι δυναμικές συμμετρίες. Έτσι, στο IBM υπάρχουν τρεις δυναμικές συμμετρίες, το όνομα των οποίων προκύπτει από το όνομα της πρώτης άλγεβρας της αλυσίδας αλγεβρών. Η $U(5)$ αντιστοιχεί σε σφαιρικούς πυρήνες, η $SU(3)$ είναι κατάλληλη για ορισμένους ωσειδείς πυρήνες, ενώ η $O(6)$ χρησιμοποιείται για την περιγραφή αξονικά ασταθών πυρήνων. Μεταξύ αυτών των συμμετριών συμβαίνουν αλλαγές φάσης [12], οι οποίες προκύπτουν σε χαμιλτονιανές του τύπου $H = c(H_1 + gH_2)$, όπου c είναι παράγοντας κλίμακας, g είναι παράμετρος ελέγχου και οι H_1, H_2 περιγράφουν τις δύο φάσεις του συστήματος. Οι αλλαγές φάσεις στο πλαίσιο του IBM έχουν μελετηθεί εδώ και 30 χρόνια [12], χρησιμοποιώντας το κλασικό όριο του προτύπου [13, 14]. Έχει βρεθεί ότι η μετάβαση μεταξύ σφαιρικών $U(5)$ και γ -ασταθών $O(6)$ πυρήνων είναι δεύτερης τάξης, ενώ η μετάβαση μεταξύ σφαιρικών $U(5)$ και ωσειδών πυρήνων $SU(3)$ είναι πρώτης τάξης. Δεν υπάρχει αλλαγή φάσης μεταξύ ωσειδών και γ -ασταθών πυρήνων. Οι τρεις συμμετρίες του IBM καθώς και οι αλλαγές φάσης/σχήματος μεταξύ αυτών συνηθίζεται να τοποθετούνται στο τρίγωνο συμμετριών του IBM [15].

Στα πλαίσια του συλλογικού προτύπου βρέθηκε ότι οι ιδιότητες των πυρήνων που βρίσκονται στο κρίσιμο σημείο μιας αλλαγής φάσης μπορούν να περιγραφούν με ειδικές

λύσεις της χαμιλτονιανής του Bohr, οι οποίες λύσεις ονομάζονται συμμετρίες κρίσιμου σημείου. Η συμμετρία κρίσιμου σημείου X(5) [50] αντιστοιχεί σε αλλαγή φάσης πρώτης τάξης, ενώ η E(5) [49] σε αλλαγή φάσης δεύτερης τάξης. Με τις συμμετρίες E(5) και X(5) εισάγονται καινούριες δυναμικές συμμετρίες, οι οποίες σχετίζονται με την ακριβή επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Παρακάτω θα εξετάσουμε ξεχωριστά τα πρότυπα E(5) και X(5). Η βασική διαφορά των δύο προτύπων έγκειται στη διαφορετική παραδοχή ως προς το γ -βαθμό ελευθερίας.

2.6.1 Το πρότυπο E(5)

Ξεκινώντας από τη χαμιλτονιανή του Bohr

$$\begin{aligned} H &= T + V(\beta, \gamma) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \\ &\quad - \frac{1}{8B\beta^2} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} + V(\beta, \gamma), \end{aligned} \quad (2.72)$$

και θεωρώντας δυναμικό που εξαρτάται μόνο από το β , $V(\beta, \gamma) = V(\beta)$, οι κυματοσυναρτήσεις γράφονται στη μορφή

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = f(\beta)\Phi(\gamma, \theta_i). \quad (2.73)$$

Κάνοντας χωρισμό μεταβλητών προκύπτουν δύο εξισώσεις.

Η εξίσωση που περιέχει τις γωνίες είναι η

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_k \frac{J_k'^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right)} \right] \Phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_i), \quad (2.74)$$

όπου $\Lambda = \tau(\tau + 3)$, $\tau = 0, 1, 2, \dots$, με Λ^2 τον τελεστή Casimir της άλγεβρας O(5), το ανάλογο σε 5 διαστάσεις του l^2 , του τετραγώνου της στροφορμής στις τρεις διαστάσεις [16] και τ τον κβαντικό αριθμό που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της O(5) [17].

Η εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή β είναι η

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\Lambda}{\beta^2} \right) + V(\beta) \right] f(\beta) = E f(\beta). \quad (2.75)$$

Εισάγοντας ανηγμένες ενέργειες και δυναμικά $\epsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$, $u = \frac{2B}{\hbar^2} V$, η εξίσωση (2.38) απλοποιείται στην

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \epsilon f(\beta). \quad (2.76)$$

Αντικαθιστώντας $\phi(\beta) = \beta^{3/2} f(\beta)$ παίρνουμε

$$\phi'' + \frac{\phi'}{\beta} + \left[\epsilon - u(\beta) - \frac{\left(\tau + \frac{3}{2} \right)^2}{\beta^2} \right] \phi = 0. \quad (2.77)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε την περίπτωση που το δυναμικό είναι πηγάδι άπειρου βάρους, με πλάτος β_w

$$u(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_w \\ \infty, & \beta > \beta_w \end{cases}$$

οπότε η εξίσωση (2.40), μετά από αλλαγή μεταβλητής $z = \beta k$, όπου $k = \sqrt{\epsilon}$, παίρνει την τυπική μορφή μιας εξίσωσης Bessel

$$\phi'' + \frac{\phi'}{z} + \left[1 - \frac{\left(\tau + \frac{3}{2}\right)^2}{z^2} \right] \phi = 0, \quad (2.78)$$

με τάξη $\nu = \tau + \frac{3}{2}$ και λύσεις τις συναρτήσεις Bessel $J_\nu(z)$.

Η συνοριακή συνθήκη $\phi(\beta_w) = 0$ επιβάλλει, αν οι ρίζες της $\phi(z) = 0$ είναι οι $x_{\xi,\tau}$ με ξ τη σειρά εμφάνισης της ρίζας, να ισχύει $x_{\xi,\tau} = k_{\xi,\tau} \beta_w$. Επειδή $\epsilon = k_{\xi,\tau}^2$,

$$\epsilon = \left(\frac{x_{\xi,\tau}}{\beta_w} \right)^2 \Rightarrow E_{\xi,\tau} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{\xi,\tau}^2. \quad (2.79)$$

Προκειμένου να απαλειφθεί το πλάτος του πηγαδιού β_w , θεωρούμε λόγους ενεργειών ως προς την ενέργεια της πρώτης διεγερμένης στάθμης, δηλαδή $E_{\xi=1,L=2} - E_{\xi=1,L=0}$. Η $x_{\xi,\tau}$ αντιστοιχεί στη ρίζα με σειρά εμφάνισης ξ και τάξη $\nu = \tau + \frac{3}{2}$.

Οι κυματοσυναρτήσεις παίρνουν τη μορφή $f_{\xi,\tau} = c_{\xi,\tau} \beta^{-\frac{3}{2}} J_{\tau+\frac{3}{2}}(k_{\xi,\tau} \beta)$. Η σταθερά κανονικοποίησης $c_{\xi,\tau}$ προκύπτει από τη σχέση $\int_0^{\beta_w} \beta^4 d\beta f^2(\beta) = 1$ και από τη σχέση ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Bessel, να είναι

$$c_{\xi,\tau} = \frac{\sqrt{2}}{\beta_w} J_{\tau+\frac{5}{2}}^{-1}(x_{\xi,\tau}). \quad (2.80)$$

Η συμμετρία που προκύπτει από αυτό το ακριβώς επιλύσιμο πρόβλημα ονομάζεται E(5), καθώς οι εξισώσεις Bessel αποτελούν βάση για τις αναπαραστάσεις της ευκλείδειας άλγεβρας E και 5 είναι ο αριθμός των διαστάσεων του προβλήματος.

Οι ρυθμοί ηλεκτρομαγνητικών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$ υπολογίζονται με τη βοήθεια του τετραπολικού τελεστή

$$T^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)} \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)} + D_{\mu,-2}^{(2)} \right) \sin \gamma \right], \quad (2.81)$$

όπου t παράγοντας κλίμακας και έχουν τη μορφή

$$B(E2; \rho_i L_i \rightarrow \rho_f L_f) = \frac{1}{2L_i + 1} \left| \langle \rho_f L_f || T^{(E2)} || \rho_i L_i \rangle \right|^2. \quad (2.82)$$

Όπως και στις ενέργειες, θεωρούμε λόγους ρυθμών μεταβάσεων, κανονικοποιώντας στη χαμηλότερη μετάβαση, $B(E2 : 2_1^+ \rightarrow 0_1^+) = 100$.

2.6.2 Πειραματικές εκδηλώσεις της E(5)

Ο πρώτος πυρήνας με εξακριβωμένη E(5) συμπεριφορά ήταν το ^{134}Ba [18], ενώ το ^{102}Pb [19] επίσης φέρεται ως καλός υποψήφιος. Περαιτέρω μελέτες επιβεβαίωσαν τα συμπεράσματα για το ^{134}Ba [20]. Οι πυρήνες ^{104}Ru [21], ^{108}Pb [22], ^{114}Cd [23] και ^{130}Xe [24] επίσης έχουν προταθεί ως δυνατοί υποψήφιοι. Μια συστηματική έρευνα [25, 26] στα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ενεργειών και ρυθμών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$, έδειξε ότι οι πυρήνες ^{102}Pb , $^{106,108}\text{Cd}$, ^{124}Te , ^{128}Xe και ^{138}Ba είναι δυνατοί υποψήφιοι, ξεχωρίζοντας τους ^{128}Xe και ^{138}Ba . Αυτή η έρευνα έρχεται σε συμφωνία με μια μεταγενέστερη [27], όπου μετρήσεις των διπολικών μεταβάσεων $E1$ και $M1$ στους πυρήνες $^{124-136}\text{Xe}$ έδωσαν ενδείξεις για αλλαγή φάσης για $A \simeq 130$. Ένας ακόμη υποψήφιος είναι το ^{58}Cr [28].

2.6.3 Το πρότυπο X(5)

Σε σύγκριση με το πρότυπο E(5), εδώ δεν υπάρχει ακριβής λύση της εξίσωσης του Bohr, παρά μόνο προσεγγιστική. Συγκεκριμένα, ξεκινώντας πάλι από τη χαμιλτονιανή του Bohr, θεωρούμε ότι το δυναμικό έχει ελάχιστο για $\gamma = 0$ και ψάχνουμε λύσεις της μορφής $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \varphi_K^L(\beta, \gamma) D_{M,K}^L(\theta_i)$.

Για $\gamma = 0$, ο τελευταίος όρος της χαμιλτονιανής παίρνει τη μορφή

$$\sum_{\kappa=1}^3 \frac{Q_\kappa^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi\kappa)} \simeq \frac{4}{3} (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right). \quad (2.83)$$

Εισάγοντας ανηγμένες ενέργειες και δυναμικά $\epsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$ και $u = \frac{2B}{\hbar^2} V$, παίρνουμε την εξίσωση

$$\left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\beta^2} \left[\frac{4}{3} L(L+1) + K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \right] \right\} \varphi_K^L(\beta, \gamma) + u(\beta, \gamma) \varphi_K^L(\beta, \gamma) = \epsilon \varphi_K^L(\beta, \gamma). \quad (2.84)$$

Θεωρώντας τώρα δυναμικά της μορφής $u(\beta, \gamma) = \tilde{u}(\beta) + v(\gamma)$ και κυματοσυναρτήσεις της μορφής $\varphi_K^L(\beta, \gamma) = \xi_L(\beta) \eta_K(\gamma)$, η (2.45) χωρίζεται στις εξής δύο εξισώσεις

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{4\beta^2} \frac{4}{3} L(L+1) + \tilde{u}(\beta) \right] \xi_L(\beta) = \epsilon_\beta \xi_L(\beta), \quad (2.85)$$

$$\left[-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4 \langle \beta^2 \rangle} K^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + v(\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = \epsilon_\gamma \eta_K(\gamma), \quad (2.86)$$

όπου $\epsilon = \epsilon_\beta + \epsilon_\gamma$ και $\langle \beta^2 \rangle$ ο μέσος όρος του β^2 ως προς $\xi(\beta)$. Υποθέτουμε τώρα ότι το δυναμικό είναι τετραγωνικό πηγάδι ως προς τη μεταβλητή β και αρμονικός ταλαντωτής

ως προς τη γ . Κατ' αυτό τον τρόπο μπορούν να επιλυθούν οι δύο εξισώσεις για τις $\xi_L(\beta)$ και $\eta_K(\gamma)$.

Θεωρώντας για το β μέρος, όπως και πριν, δυναμικό

$$\tilde{u}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_w \\ \infty, & \beta > \beta_w \end{cases}$$

και αντικαθιστώντας $\tilde{\xi}(\beta) = \beta^{\frac{3}{2}}\xi(\beta)$ και στη συνέχεια $z = \beta k_\beta$ με $k_\beta = \sqrt{\epsilon_\beta}$, παίρνουμε την εξίσωση Bessel

$$\tilde{\xi}'' + \frac{\tilde{\xi}'}{z} + \left[1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right] \tilde{\xi} = 0, \quad (2.87)$$

με $\nu = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. Από την οριακή συνθήκη $\tilde{\xi}(\beta_w) = 0$ προκύπτει ότι $x_{s,L} = k_{s,L}\beta_w$. Επειδή $\epsilon_{\beta;s,L} = k_{s,L}^2$,

$$\epsilon = \left(\frac{x_{s,L}}{\beta_w}\right)^2 \Rightarrow E_{\beta;s,L} = \frac{\hbar^2}{2B} k_{s,L}^2, \quad (2.88)$$

όπου $x_{s,L}$ είναι οι ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_\nu(z)$ με σειρά εμφάνισης s και τάξη $\nu = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Οι κυματοσυναρτήσεις παίρνουν τη μορφή $\xi_{s,L} = c_{s,L}\beta^{-\frac{3}{2}}J_\nu(k_{s,L}\beta)$ και η σταθερά κανονικοποίησης προκύπτει από τη συνθήκη $\int_0^{\beta_w} \beta^4 \xi_{s,L}^2(\beta) d\beta = 1$ να είναι

$$c_{s,L} = \frac{\sqrt{2}}{\beta_w} J_{\nu+1}^{-1}(x_{s,L}). \quad (2.89)$$

Για το γ κομμάτι του φάσματος, με την παραδοχή $\gamma \simeq 0$, αναπτύσσουμε τους όρους $\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}$ και $\frac{1}{\sin^2 \gamma}$ γύρω από το μηδέν, οπότε,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{4}{3}\right) + \langle \beta^2 \rangle (\epsilon_\gamma - v_\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = 0 \quad (2.90)$$

Για δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή, $v_\gamma = c^2\gamma^2$, προκύπτει

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 \frac{1}{\gamma^2} + (\tilde{\epsilon}_\gamma - c^2\gamma^2) \right] \eta_K(\gamma) = 0, \quad (2.91)$$

με $\tilde{\epsilon}_\gamma = \epsilon_\gamma + \frac{4}{3} \left(\frac{K}{2}\right)^2 \frac{1}{\langle \beta^2 \rangle \gamma}$.

Αντικαθιστούμε $\lambda = c\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}$ και $x = \sqrt{\lambda}\gamma$, οπότε προκύπτει η

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 \frac{1}{x^2} + \tilde{\epsilon}_\gamma \langle \beta^2 \rangle \lambda^{-1} - x^2 \right] \eta_K(x) = 0. \quad (2.92)$$

Θέτοντας $\kappa = \tilde{\epsilon}_\gamma \langle \beta^2 \rangle \lambda^{-1}$, $\alpha = \frac{K}{2}$ η (2.51) επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\eta_K(x) = c \exp^{-\frac{x^2}{2}} x^{|\alpha|} W(x). \quad (2.93)$$

Αντικαθιστώντας την (2.52) στην (2.51) και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής, $t = x^2$, έχουμε την εξίσωση

$$t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial W}{\partial t} (1 + \alpha - t) + W(t) \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{4} \right). \quad (2.94)$$

Θέτοντας $b = 1 + \alpha$, $a = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{\kappa}{4}$ η (2.53) παίρνει τη μορφή της εξίσωσης Kummer

$$t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + (b - t) \frac{\partial W}{\partial t} - aW = 0, \quad (2.95)$$

με λύσεις

$$W(t) \sim_1 F_1(a, b, t) \quad \acute{\eta}$$

$$W(t) \sim_1 F_1(a, b, x^2), \quad \text{οπότε}$$

$$\eta_{n,\alpha} = c e^{-\frac{x^2}{2}} x^{|\alpha|} L_n^{(|\alpha|)}(x) \quad \acute{\eta}$$

$$\eta_{n,K} = c_{n,K} e^{-\frac{\lambda \gamma^2}{2}} \gamma^{|\frac{K}{2}|} L_n^{(|\frac{K}{2}|)}(\lambda \gamma^2).$$

Οι ενέργειες δίνονται από τη συνθήκη κβάντωσης, $a = -n$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$, οπότε $-2n = \alpha + 1 - \frac{\kappa}{2} \Rightarrow \frac{\tilde{\epsilon}_\gamma \langle \beta^2 \rangle^{\lambda-1}}{2} = 2n + \alpha + 1 \Rightarrow \tilde{\epsilon}_\gamma = \frac{2c}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} \left(2n + \frac{K}{2} + 1 \right)$.

Για την ενέργεια ϵ_γ ισχύει λοιπόν

$$\epsilon_\gamma = \frac{2c}{\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}} \left(2n + \frac{K}{2} + 1 \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{K}{2} \right)^2 \frac{1}{\langle \beta^2 \rangle}. \quad (2.96)$$

Θέτοντας $n = \frac{1}{2} \left(n_\gamma - \frac{K}{2} \right)$ προκύπτουν οι δυνατοί συνδυασμοί τιμών για τα n_γ και K ,

$$n_\gamma = 0, K = 0; \quad n_\gamma = 1, K = 1; \quad n_\gamma = 2, K = 0, \pm 4; \dots \quad (2.97)$$

Η σταθερά κανονικοποίησης $c_{n,K}$ προκύπτει από τη συνθήκη $\int_0^\infty \left(\eta_{n,K}^2(\gamma) \right)^2 \gamma d\gamma = 1$ και τη σχέση ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Laguerre, να είναι

$$c_{n,K} = \sqrt{\frac{n! 2^{\frac{K}{2}+1}}{\Gamma \left(n + \frac{K}{2} + 1 \right)}}. \quad (2.98)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε τη γενική έκφραση

$$E(s, L, n_\gamma, K, M) = E_0 + B(x_{s,L})^2 + An_\gamma + CK^2. \quad (2.99)$$

Η συμμετροποιημένη κυματοσυνάρτηση γράφεται

$$\Psi_{s,L,n_\gamma,K,M}(\beta, \gamma, \vartheta_i) \simeq \left[\varphi_{L,K}(\beta, \gamma) D_{M,K}^L(\vartheta_i) + (-1)^{L+K} \varphi_{L,-K}(\beta, \gamma) D_{M,-K}^L \right]. \quad (2.100)$$

Για τον υπολογισμό των ρυθμών ηλεκτρομαγνητικών μεταβάσεων, ο ηλεκτρικός τετραπολικός τελεστής με την προσέγγιση $\gamma \simeq 0$ απλοποιείται σε $T^{(E2)} = t\beta D_{\mu,0}^{(2)}$.

Όπως και στο πρότυπο E(5), χρησιμοποιούνται λόγοι ενεργειών και λόγοι ρυθμών μεταβάσεων, ώστε τα αριθμητικά αποτελέσματα να μην περιέχουν ελεύθερες παραμέτρους.

2.6.4 Πειραματικές εκδηλώσεις της $X(5)$

Το πρώτο παράδειγμα πυρήνα με διαπιστωμένη $X(5)$ συμπεριφορά ήταν αυτό του ^{152}Sm [29], καθώς και το ^{150}Nd [30]. Επιπλέον δουλειά στο ^{152}Sm [31, 32, 33] και στο ^{150}Nd [32, 33, 34] επιβεβαίωσαν τα προηγούμενα. Τα γειτονικά ισότοπα με $N=90$, ^{154}Gd [35, 36] και ^{156}Dy [36, 37] θεωρήθηκαν επίσης καλά παραδείγματα $Q(5)$, αν και το δεύτερο σε μικρότερο βαθμό.

Στην περιοχή των βαρύτερων πυρήνων, τα ^{162}Yb [38] και ^{166}Hf [39] θεωρήθηκαν καλοί υποψήφιοι. Μετέπειτα πειράματα στους ^{176}Os και ^{178}Os [36], έδειξαν ότι ο τελευταίος πυρήνας είναι καλό παράδειγμα $X(5)$. Μία συστηματική μελέτη [40] στα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ενεργειών και ρυθμών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$, έδειξε ότι οι πυρήνες ^{126}Ba και ^{130}Ce είναι πιθανοί καλοί υποψήφιοι μαζί με τα ισότονα με $N=90$ των Nd, Sm, Gd, Dy. Μία παρόμοια μελέτη σε ελαφρύτερους πυρήνες [41] πρότεινε τους ^{76}Sr , ^{78}Sr , ^{80}Zr ως πιθανούς υποψήφιους. Το ^{104}Mo είχε προταθεί για υποψήφιος $X(5)$ με βάση τα διαθέσιμα φάσματα [41, 42], αλλά μεταγενέστερες μελέτες στις τιμές των ρυθμών τετραπολικών μεταβάσεων $B(E2)$ έδειξαν ότι είναι πιο κοντά στο όριο του συμπαγούς περιστροφέα [43]. Το ^{122}Ba είναι υπό εξέταση [44], καθώς η θεμελιώδης ζώνη του συμπίπτει με τις προβλέψεις του $X(5)$.

Κεφάλαιο 3

Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων (IBM)

Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων IBM (Interacting Boson Model) [45] εισήχθη αρχικά το 1974 από τους Arima και Iachello, αποτελεί ένα φαινομενολογικό αλλά συνεχώς σφαιρικά αναπτυσσόμενο αλγεβρικό μοντέλο περί της περιγραφής των μικροσκοπικών ιδιοτήτων του πυρήνα. Σκοπός της αρκετά επίπονης έρευνας επί αυτού είναι, μέσω αλγεβρικών μεθόδων θεωρίας ομάδων, η γεφύρωση του θεμελιώδους μοντέλου των φλοιών και των αντίστοιχων συλλογικών, γεωμετρικών μοντέλων, προς την ενιαία αντιμετώπιση των ατομικών πυρήνων. Στην απλούστερή του μορφή θεωρείται ότι, για μεσαίους και βαρείς άρτιους - άρτιους πυρήνες, οι αντίστοιχες χαμηλοενεργειακές συλλογικές καταστάσεις που βρίσκονται μακριά από κλειστούς φλοιούς κυριαρχούνται μόνο από διεγέρσεις πρωτονίων και νετρονίων σθένους, δηλαδή από νουκλεόνια που είναι εκτός των κύριων στιβάδων συμπληρωμένες μέχρι και τους μαγικούς αριθμούς 2, 8, 20, 28, 50, 82 και 126. Επιπλέον, θεωρείται ότι για τις ιδιότητες των υπό μελέτη χαμηλοενεργειακών καταστάσεων, όμοια σώματα συγκεντρώνονται ανά ζεύγη (πρωτόνιο-πρωτόνιο ή νετρόνιο-νετρόνιο) προκειμένου να δημιουργηθούν συζευγμένες καταστάσεις συνολικής στροφορμής 0 και 2. Λόγω των ακέραιων αυτών τιμών, τα σχηματιζόμενα ζευγάρια πρωτονίων ή νετρονίων μπορούν να περιγραφούν συλλογικά ως μποζόνια. Μποζόνια πρωτονίων και νετρονίων με στροφορμή $L = 0$ ονομάζονται s_{π} - μποζόνια και s_{ν} - μποζόνια αντίστοιχα, ενώ μποζόνια πρωτονίων και νετρονίων με στροφορμή $L = 2$ ονομάζονται d_{π} - μποζόνια και d_{ν} - μποζόνια αντίστοιχα.

Ο αριθμός των ζευγών νουκλεονίων (μποζονίων) σθένους μετρίεται από τον πιο κοντινό κλειστό φλοιό, δηλαδή εάν ο φλοιός είναι πληρωμένος μέχρι και λιγότερο από το μισό της ενδιάμεσης περιοχής των δύο φλοιών, τότε ο αριθμός των μποζονίων είναι ίσος με τον αριθμό των ζευγών νουκλεονίων. Διαφορετικά, αν είναι πληρωμένος κατά περισσότερο από το μισό της περιοχής, ο αριθμός των μποζονίων είναι ίσος με τον αριθμό των ζευγών οπών. Μία αναλυτικότερη περιγραφή των ιδιοτήτων του πυρήνα είναι δυνατή αν αντιμετωπίσουμε τα ζεύγη πρωτονίων και νετρονίων ως διαφορετικές οντότητες (IBM-2). Επιπλέον, στην παρούσα εκδοχή του IBM (IBM-1), θεωρείται μόνο ο σχηματισμός ζευγών πρωτονίων-πρωτονίων και νετρονίων-νετρονίων. Ο λόγος είναι ότι για την περιοχή των μεσαίων και βαριών πυρήνων που μελετάμε, τα πρωτόνια και νετρόνια σθένους καταλαμβάνουν διαφορετικούς φλοιούς, καθιστώντας τον σχηματι-

σμό ζεύγους πρωτονίου-νετρονίου αρκετά απίθανο. Παρ' όλα αυτά, ζεύγη πρωτονίων-νετρονίων παρατηρούνται σε ελαφρύτερους πυρήνες, με ιδιότητες που περιγράφονται από εκτεταμένα μοντέλα μποζονίων (IBM-3 και IBM-4).

3.1 Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί

Για την περιγραφή των ιδιοτήτων του πυρήνα, χρησιμοποιείται ο φορμαλισμός της "δεύτερης" χβάντωσης. Οι δομικοί λίθοι του IBM είναι οι τελεστές δημιουργίας (s^\dagger, d_μ^\dagger) και καταστροφής (s, d_μ), με ($\mu = 0 \pm 1, \pm 2$), όπου ικανοποιούνται οι σχέσεις μετάθεσης

$$[s, s^\dagger] = 1 \quad (3.1)$$

$$[d_\mu, d_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

ενώ οι υπόλοιποι πιθανοί μεταθέτες είναι μηδενίζονται. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $b_{\lambda\mu}^\dagger, \lambda = 0, 2 \equiv s, d$ οι σχέσεις (3.1) και (3.2) μπορούν να εκφραστούν ως

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \quad (3.3)$$

Χρήσιμο είναι επίσης να ορίσουμε τους τελεστές καταστροφής $\tilde{b}_{\lambda\mu}$ ως

$$\tilde{b}_{\lambda\mu} = (-1)^{\lambda+\mu} b_{\lambda, -\mu} = \begin{cases} \tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}, & \lambda = 2 \\ \tilde{s} = s, & \lambda = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ο λόγος που εισάγουμε τους τελεστές καταστροφής $\tilde{b}_{\lambda\mu}$, είναι ότι οι μποζονικοί τελεστές δημιουργίας $b_{\lambda\mu}^\dagger$ μετασχηματίζονται σαν σφαιρικοί τανυστές υπό περιστροφές, ενώ οι συνήθεις μποζονικοί τελεστές καταστροφής $b_{\lambda\mu}$ όχι. Παρατηρούμε την ομοιότητα των (3.4) με την έκφραση (2.4) για τις συλλογικές συντεταγμένες.

Με τους σφαιρικούς τανυστικούς τελεστές μπορούμε να κατασκευάσουμε τανυστικά γινόμενα. Το τανυστικό γινόμενο δύο σφαιρικών τανυστικών τελεστών $T_{\kappa_1}^{k_1}, T_{\kappa_2}^{k_2}$ ορίζεται ως

$$[T^{k_1} \otimes T^{k_2}]_{\kappa_3}^{k_3} = \sum_{\kappa_1 \kappa_2} \langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k_3 \kappa_3 \rangle T_{\kappa_1}^{k_1} T_{\kappa_2}^{k_2}, \quad (3.5)$$

με $|k_2 - k_1| < k_3 < k_2 + k_1$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_3$ και $\langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k_3 \kappa_3 \rangle$ οι γνωστοί συντελεστές Clebsch-Gordan. Αντίστοιχα, το βαθμωτό γινόμενο δύο σφαιρικών τανυστικών τελεστών T^k και U^k ορίζεται ως

$$(T^k \odot U^k) = (-1)^k \sqrt{2k+1} [T^k \otimes U^k]_0^0 = \sum_{\kappa} (-1)^\kappa T_\kappa^k U_{-\kappa}^k \quad (3.6)$$

Ας δούμε για παράδειγμα δύο εφαρμογές της σχέσης (3.6)

$$(i) \quad (s^\dagger \odot \tilde{s}) = [s^\dagger \otimes \tilde{s}]_0^0 = \langle 0000 | 00 \rangle s^\dagger \otimes \tilde{s} = s^\dagger \otimes \tilde{s}^\dagger \otimes \tilde{s} = n_s \quad (3.7)$$

όπου n_s ο αριθμός των s -μποζονίων της ιδιοκατάστασης.

$$(ii) \quad (d^\dagger \odot \tilde{d}) = \sqrt{5} [d^\dagger \otimes \tilde{d}]_0^0 = \sqrt{5} \sum_{\kappa_1, \kappa_2} \langle 2\kappa_1 2\kappa_2 | 00 \rangle d_{\kappa_1}^\dagger \tilde{d}_{\kappa_2} = \sum_{\kappa_1} d_{\kappa_1}^\dagger d_{\kappa_1} = n_d \quad (3.8)$$

όπου n_d ο αριθμός των d -μποζονίων της ιδιοκατάστασης.

3.2 Η άλγεβρα Lie U(6)

Εισάγοντας τους τελεστές της μορφής

$$G_{\kappa}^k(l') = [b_l^{\dagger} \otimes \tilde{b}_{l'}]_{\kappa}^k \quad (3.9)$$

όπου $l, l' = 0, 2 \equiv s, d$, προκύπτουν συνολικά $6^2 = 36$ τελεστές στροφορμής k και z προβολής κ . Ελέγχοντας τις σχέσεις μετάθεσης αυτών των τελεστών μεταξύ τους, βλέπουμε ότι είναι οι ίδιες με αυτές της άλγεβρας Lie της ομάδας U(6) των μοναδιακών μετασχηματισμών στις 6 διαστάσεις. Σαν συμπέρασμα, αυτοί οι τελεστές είναι οι γεννήτορες της ομάδας U(6), δηλαδή οι δομικοί λίθοι της Χαμιλτωνιανής με ομάδα δομής την άλγεβρα Lie U(6). Οι γεννήτορες αυτοί, μπορούν να γραφούν αναλυτικά ως

$$G_0^0(ss) = [s^{\dagger} \otimes \tilde{s}]_0^0 \quad (3.10)$$

$$G_0^0(dd) = [d^{\dagger} \otimes \tilde{d}]_0^0 \quad (3.11)$$

$$G_{\kappa}^1(dd) = [d^{\dagger} \otimes \tilde{d}]_{\kappa}^1 \quad (3.12)$$

$$G_{\kappa}^2(dd) = [d^{\dagger} \otimes \tilde{d}]_{\kappa}^2 \quad (3.13)$$

$$G_{\kappa}^3(dd) = [d^{\dagger} \otimes \tilde{d}]_{\kappa}^3 \quad (3.14)$$

$$G_{\kappa}^4(dd) = [d^{\dagger} \otimes \tilde{d}]_{\kappa}^4 \quad (3.15)$$

$$G_{\kappa}^2(ds) = [d^{\dagger} \otimes \tilde{s}]_{\kappa}^2 \quad (3.16)$$

$$G_{\kappa}^2(sd) = [s^{\dagger} \otimes \tilde{d}]_{\kappa}^2 \quad (3.17)$$

Έχοντας προσδιορίσει την Χαμιλτωνιανή και τις ιδιοκαταστάσεις του υπό μελέτη φυσικού συστήματος, επόμενο βήμα είναι η διαγωνιοποίηση. Απαιτώντας καλούς κβαντικούς αριθμούς για την στροφορμή, επιθυμούμε την κατασκευή μίας υποάλγεβρας που να περιγράφεται από ένα υποσύνολο γεννητόρων της αρχικής άλγεβρας Lie U(6) και να είναι κλειστή κάτω από μεταθέσεις. Δηλαδή κάθε μεταθέτης γεννητόρων της υπό αναζήτηση υποάλγεβρας, να παράγει γραμμικό συνδυασμό στοιχείων που να ανήκουν σε αυτήν, σε συμφωνία δηλαδή με το δεύτερο θεώρημα του Lie.

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij} X_k \quad (3.18)$$

Προς την κατεύθυνση αυτή, υπάρχουν συνολικά τρεις πιθανές αλυσίδες υποαλγεβρών με την O(3) να περιέχεται σε κάθε μία από αυτές

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{I})$$

$$U(6) \supset U(3) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{II}) \quad (3.19)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{III})$$

Έχοντας κατά νου μία αλυσίδα αλγεβρών, το επόμενο βήμα είναι η κατάλληλη δημιουργία μίας βάσης όπου η αντίστοιχη Χαμιλτωνιανή είναι διαγωνιοποιήσιμη, ενώ χρειάζεται να βρεθούν οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν στις διάφορες ομάδες της κάθε αλυσίδας. Συγκεκριμένα, για την βάση της κάθε αλυσίδας,

30 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΩΝΤΩΝ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ (IBM)

θέλουμε να προσδιορίσουμε τις επιτρεπόμενες τιμές του κβαντικού αριθμού M των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της υποομάδας G' , δεδομένων των επιτρεπόμενων τιμών του κβαντικού αριθμού L στις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της αμέσως μεγαλύτερης ομάδας G . Γνωστό παράδειγμα για περιστροφές στον τριδιάστατο χώρο αποτελεί η αλυσίδα

$$O(2) \subset O(3) \quad (3.20)$$

με L την ιδιοτιμή του γεννήτορα στροφορμής \hat{L} στην ομάδα $O(3)$ και M την ιδιοτιμή του γεννήτορα \hat{L}_z για την z προβολή της στροφορμής στην υποομάδα $O(2)$. Για την κοινή βάση σφαιρικών αρμονικών στο χώρο Hilbert $|LM\rangle$, οι επιτρεπόμενες τιμές του κβαντικού αριθμού M είναι $M = -L, -(L-1), \dots, +L$.

Έτσι, οι καταστάσεις της πρώτης αλυσίδας έχουν τη μορφή

$$|[N](n_d) \nu n_\Delta LM\rangle \quad (3.21)$$

όπου N είναι ο ολικός αριθμός μποζονίων, που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $U(6)$, n_d είναι ο αριθμός των d μποζονίων που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $U(5)$, ν είναι ο αριθμός των ζευγών μποζονίων με σύζευξη σε ολική στροφορμή διάφορη του μηδενός ενώ χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(5)$ και ονομάζεται αρχαιότητα (seniority number), n_Δ είναι ένας επιπλέον κβαντικός αριθμός, ο οποίος χρησιμοποιείται λόγω της μη αναγωγισιμότητας κατά την μετάβαση από την άλγεβρα $O(5)$ στην $O(3)$ και είναι ο αριθμός των τριπλετών μποζονίων που συζεύγνυνται σε ολική στροφορμή διάφορη του μηδενός, L είναι η στροφορμή, που χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $O(3)$, και τέλος, M είναι η z προβολή της στροφορμής που όπως είπαμε χαρακτηρίζει τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $O(2)$.

Με παρόμοιο τρόπο, οι καταστάσεις της δεύτερης αλυσίδας έχουν την μορφή

$$|[N](\lambda, \mu) \chi LM\rangle \quad (3.22)$$

όπου (λ, μ) είναι οι δύο κβαντικοί αριθμοί που χαρακτηρίζουν τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$ και χ είναι ένας επιπλέον κβαντικός αριθμός, που χρησιμοποιείται επειδή το βήμα από την $SU(3)$ στην $O(3)$ δεν είναι πλήρως αναγωγίσιμο.

Τέλος, οι καταστάσεις της τρίτης αλυσίδας έχουν τη μορφή

$$|[N](\sigma) \tau \nu_\delta LM\rangle, \quad (3.23)$$

όπου σ είναι ο κβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(6)$, τ είναι ο κβαντικός αριθμός που χαρακτηρίζει τις μ.α.α. της $O(5)$ και n_Δ είναι ένας επιπλέον κβαντικός αριθμός, που χρησιμοποιείται επειδή το βήμα από την $O(5)$ στην $O(3)$ δεν είναι πλήρως αναγωγίσιμο.

Κεφάλαιο 4

DDM για δυναμικό Davidson

4.1 Βασικές παραδοχές

Η Χαμιλτωνιανή του Bohr και οι επεκτάσεις της με το συλλογικό μοντέλο, παρέχουν ένα υπόβαθρο αναφοράς για την κατανόηση της δομής και της συλλογικής συμπεριφοράς των ατομικών πυρήνων. Η βασική παραδοχή στα παραπάνω θεωρητικά μοντέλα, είναι η σταθερότητα της μάζας στη Χαμιλτωνιανή του Bohr. Παρ'όλα αυτά υπάρχει πληθώρα ενδείξεων ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί να μην είναι ακριβής. Συγκεκριμένα:

- (α) Οι ροπές αδρανείας προβλέπεται ότι αυξάνονται ανάλογα με τον όρο β^2 , όπου β είναι η γνωστή συλλογική παράμετρος παραμόρφωσης που μετρά την απόκλιση από το σφαιρικό σχήμα, ενώ οι αντίστοιχες πειραματικές τους τιμές παρουσιάζουν μία αρκετά πιο ήπια αύξηση σε σχέση με τις πειραματικές τιμές της παραμορφωσης, κυρίως για μόνιμα παραμορφωμένους πυρήνες[8]. Αυτή η ασυμφωνία, παρά την επιτυχία της Χαμιλτωνιανής του Bohr για καθαρά δονητικούς και μεταβατικούς πυρήνες, χρήζει τροποποίηση για παραμορφωμένους πυρήνες.
- (β) Εκτενείς συγκρίσεις με πειραματικά δεδομένα[46, 47], υποδεικνύουν ότι το βαθμωτό φυσικό μέγεθος της μάζας είναι αναγκαίο να προαχθεί σε τανυστή συναρτήσεως των συλλογικών συντεταγμένων, με τετραπολικούς και δεκαεξαπολικούς όρους.
- (γ) Στο γεωμετρικό όριο της αλγεβρικής περιγραφής του IBM, όπου γίνεται χρήση σύμφωνων καταστάσεων[48], προκύπτουν επιπροσθέτως στην Χαμιλτωνιανή όροι της μορφής $\pi^2\beta^2$ ή και πιο σύνθετοι[51], σε σχέση τον σύνηθες όρο της κινητικής ενέργειας π^2 . Προς αυτή την κατεύθυνση, θεωρείται απαραίτητη η κατάλληλη τροποποίηση της Χαμιλτωνιανής και συγκεκριμένα της κινητικής ενέργειας, συναρτήσεως των προαναφερθέντων όρων.

Βασίζόμενοι στα παραπάνω επιχειρήματα, μπορεί να κατασκευαστεί μία Χαμιλτωνιανή με την μάζα να εξαρτάται από την παραμόρφωση και συγκεκριμένα από την συλλογική μεταβλητή β . Περιπτώσεις εξάρτησης της μάζας από τη θέση έχουν γενικά μελετηθεί [52], ενώ αρκετές Χαμιλτωνιανές λυμένες με μεθόδους υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής SUSYQM (*Supersymmetric Quantum Mechanics*) [53, 54], συμπεριλαμβανομένης

αυτής του τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή [55], έχουν τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να περιλαμβάνουν χωροεξαρτημένη μάζα.

Στο παρών κεφάλαιο [56] θα παρουσιαστεί η γενική Χαμιλτωνιανή του Bohr για δυναμικό Davidson [57] με την μάζα να εξαρτάται από την συλλογική παράμετρο παραμόρφωσης β μέσω της έκφρασης

$$B = \frac{B_0}{(1 + \alpha\beta^2)^2} \quad (4.1)$$

όπου α και B_0 σταθερές. Θα εξεταστούν συνολικά τρεις κατηγορίες δυναμικών, ενώ με χωρισμό μεταβλητών επιτυγχάνεται η επίλυση της εκάστοτε μερικής διαφορικής εξίσωσης.

(α) Δυναμικά ανεξάρτητα από την παράμετρο γ [11] ή γ ασταθή δυναμικά, κατάλληλα για την περιγραφή δονητικών πυρήνων.

(β) Δυναμικά της μορφής [11, 58, 59, 60, 61]

$$v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{w(\gamma)}{\beta^2} \quad (4.2)$$

όπου $u(\beta)$ δυναμικό Davidson [57], ενώ το $w(\gamma)$ παρουσιάζει βαθύ τοπικό ελάχιστο στο $\gamma = 0$, κατάλληλο για αξονικά συμμετρικούς παραμορφωμένους πυρήνες.

(γ) Ομοίως δυναμικά τη μορφής

$$v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{w(\gamma)}{\beta^2} \quad (4.3)$$

όπου $u(\beta)$ δυναμικό Davidson [57], ενώ το $w(\gamma)$ παρουσιάζει βαθύ τοπικό ελάχιστο στο $\gamma = \pi/6$, κατάλληλο για τριαξονικούς πυρήνες [9, 62].

4.2 Χαμιλτωνιανή με χωροεξαρτημένη μάζα

4.2.1 Βασικός φορμαλισμός

Θεωρώντας μάζα εξαρτώμενη από τον τελεστή θέσης $m(\mathbf{x})$ [52], προκύπτει μη μεταθετότητα με τον αντίστοιχο τελεστή ορμής $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$. Έτσι, κρίνεται απαραίτητη η τροποποίηση του όρου της κινητικής ενέργειας $-\hbar^2/(2m_0)$, όπου m_0 σταθερά, ώστε να προκύπτει Ερμιτιανός τελεστής. Εισάγοντας την έκφραση δύο παραμέτρων, όπου αρχικά εισήχθει από τον von Roos [63], με Χαμιλτωνιανή

$$H = -\frac{\hbar^2}{4} \left[m^{\delta'}(\mathbf{x}) \nabla m^{\kappa'}(\mathbf{x}) \nabla m^{\lambda'}(\mathbf{x}) + m^{\lambda'}(\mathbf{x}) \nabla m^{\kappa'}(\mathbf{x}) \nabla m^{\delta'}(\mathbf{x}) \right] + V(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

όπου V είναι το σχετικό δυναμικό ενώ οι παράμετροι $\delta', \kappa', \lambda'$ υπακούουν τη σχέση $\delta' + \kappa' + \lambda' = -1$. Θεωρώντας χωροεξαρτώμενη μάζα με έκφραση

$$m(\mathbf{x}) = m_0 M(\mathbf{x}), \quad M(\mathbf{x}) = \frac{1}{f^2(\mathbf{x})}, \quad f(\mathbf{x}) = 1 + g(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

όπου m_0 σταθερά και $M(\mathbf{x})$ χωροεξαρτώμενη ποσότητα, η Χαμιλτωνιανή γίνεται

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m_0} \left[f^\delta(\mathbf{x}) \nabla f^\kappa(\mathbf{x}) \nabla f^\lambda(\mathbf{x}) + f^\lambda(\mathbf{x}) \nabla f^\kappa(\mathbf{x}) \nabla f^\delta(\mathbf{x}) \right] + V(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

ενώ $\delta + \kappa + \lambda = 2$. Επίσης, η Χαμιλτωνιανή αυτή μπορεί να λάβει την έκφραση [52]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \sqrt{f(\mathbf{x})} \nabla f(\mathbf{x}) \nabla \sqrt{f(\mathbf{x})} + V_{eff}(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

με

$$\begin{aligned} V_{eff}(\mathbf{x}) = & V(\mathbf{x}) + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{2}(1 - \delta - \lambda) f(\mathbf{x}) \nabla^2 f(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\nabla f(\mathbf{x}))^2 \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2.2 Κατασκευή της Χαμιλτωνιανής

Ξεκινώντας με αφετηρία την Χαμιλτωνιανή (4.7) επιθυμούμε την κατασκευή της αντίστοιχης εξίσωσης Bohr, με την παράμετρο μάζας να έχει την έκφραση

$$B(\beta) = \frac{B_0}{f^2(\beta)} \quad (4.9)$$

όπου B_0 σταθερά. Χρησιμοποιώντας τη συνήθη μέθοδο Pauli-Podolsky [64] για καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

$$\nabla \Phi_i = g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}, \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi \quad (4.10)$$

προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση Bohr

$$\begin{aligned} H = & \left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{f}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 f \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{f} - \frac{f^2}{2\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right. \\ & \left. + \frac{f^2}{8\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi\kappa)} + v_{eff} \right] \Psi = \epsilon \Psi \end{aligned} \quad (4.11)$$

με $\epsilon = \frac{B_0 E}{\hbar^2}$ και $v = \frac{B_0 V}{\hbar^2}$ οι ανηγμένες τιμές των ιδιοτιμών της ενέργειας και του δυναμικού αντίστοιχα, ενώ

$$v_{eff} = v(\beta, \gamma) + \frac{1}{4}(1 - \delta - \lambda) f \nabla^2 f + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\nabla f)^2 \quad (4.12)$$

4.3 Ειδικές λύσεις της Εξίσωσης Bohr

4.3.1 γ -ασταθής πυρήνες

Όπως προαναφέρθηκε, για την κατηγορία των γ -ασταθών πυρήνων, θεωρούμε δυναμικά της μορφής $u = u(\beta)$, κατάλληλο για πυρήνες των οποίων το φάσμα δεν εξαρτάται από την απόκλιση του από αξονική συμμετρία. Θεωρώντας κυματοσυναρτήσεις της μορφής [11, 49],

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \xi(\beta)\Phi(\gamma, \theta_i) \quad (4.13)$$

και αντικαθιστώντας στην (4.11), με χωρισμό μεταβλητών προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{f}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 f \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{f} + \frac{f^2}{2\beta^2} \Lambda + \frac{1}{4} (1 - \delta - \lambda) f \nabla^2 f \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\nabla f)^2 + u(\beta) \right] \xi(\beta) = \epsilon \xi(\beta) \quad (4.14)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4} \sum_k \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3} k\pi \right)} \right] \Phi(\gamma, \theta_i) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_i) \quad (4.15)$$

όπου η εξίσωση (4.15) έχει λυθεί από τον Bès [65]. Ο $\Lambda = \tau(\tau + 3)$, αναπαριστά τις ιδιοτιμές του τελεστή Casimir δεύτερης τάξης της άλγεβρας $SO(5)$, ενώ ο τ είναι ο αριθμός κυριότητας (seniority number) της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης της $SO(5)$.

4.3.2 Συμμετρικά παραμορφωμένοι πυρήνες

Σε αυτή την κατηγορία πυρήνων θεωρούμε δυναμικά της μορφής [11, 58, 59, 60, 61]

$$v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{f^2}{\beta^2} w(\gamma) \quad (4.16)$$

όπου η $w(\gamma)$ έχει ένα βαθύ ελάχιστο για $\gamma = 0$. Για αυτή την περίπτωση, η στροφορμή μπορεί να πάρει την έκφραση [50]

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3} k\pi \right)} \approx \frac{4}{3} (Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) \quad (4.17)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής [50]

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \xi_L(\beta) \eta_K(\gamma) \mathcal{D}_{M,K}^L(\theta_i) \quad (4.18)$$

όπου $\mathcal{D}_{M,K}^L(\theta_i)$ οι συναρτήσεις Wigner, ενώ M και K οι γνωστές ιδιοτιμές των προβολών της στροφορμής στον άξονα z του αδρανειακού συστήματος και στον άξονα

z' του εσωτερικού συστήματος αντίστοιχα. Με χωρισμό μεταβλητών προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{f}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 f \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{f} + \frac{f^2}{2\beta^2} \tilde{\Lambda} + \frac{1}{4} (1 - \delta - \lambda) f \nabla^2 f \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\nabla f)^2 + u(\beta) \right] \xi_L(\beta) = \epsilon \xi_L(\beta) \quad (4.19)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right) + 2w(\gamma) \right] \eta_K(\gamma) = \eta_K(\gamma) \quad (4.20)$$

όπου

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda + \frac{L(L+1)}{3} \quad (4.21)$$

Η εξίσωση (4.20) έχει λυθεί για δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή

$$w(\gamma) = \frac{1}{2} (3c)^2 \gamma^2 \quad (4.22)$$

για $\gamma \approx 0$ [61, 50], με

$$\Lambda = \epsilon_\gamma - \frac{K^2}{3} \quad \epsilon_\gamma = 6c(n_\gamma + 1), \quad \gamma = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

όπου n_γ ο κβαντικός αριθμός που αντιστοιχεί στο φάσμα της γ ταλάντωσης. Οι επιτρεπόμενες ζώνες χαρακτηρίζονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} n_\gamma = 0, \quad K = 0; \quad n_\gamma = 1, \quad K = \pm 2; \\ n_\gamma = 2, \quad K = 0, \pm 4; \quad \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

ενώ αξιοποιώντας τις εκφράσεις (4.21) και (4.23) προκύπτει

$$\tilde{\Lambda} = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + 6c(n_\gamma + 1) \quad (4.25)$$

4.3.3 Τριαξονικοί πυρήνες με $\gamma = \pi/6$

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ξανά δυναμικό της μορφής

$$v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{f^2}{\beta^2} w(\gamma) \quad (4.26)$$

με την διαφορά ότι η συνάρτηση $w(\gamma)$ παρουσιάζει ένα βαθύ ελάχιστο στο $\gamma = \pi/6$. Σε αυτό το πρόβλημα ο K , η ιδιοτιμή της προβολής της στροφορμής στον z' άξονα του εσωτερικού συστήματος δεν είναι καλός κβαντικός αριθμός σε αντίθεση με τον α , που αναπαριστά την ιδιοτιμή της προβολής της στροφορμής στον x' άξονα του

εσωτερικού συστήματος, σύμφωνα με [66] τη μελέτη του τριαξονικού περιστροφέα [9, 62]. Η έκφραση για την στροφορμή παίρνει τη μορφή [66, 67]

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}k\pi\right)} \approx 4(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) - 3Q_1^2 \quad (4.27)$$

Αναζητώντας λύσεις της μορφής [67]

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \xi_{L,\alpha}(\beta)\eta(\gamma)\mathcal{D}_{M,\alpha}^L(\theta_i) \quad (4.28)$$

όπου ομοίως $\mathcal{D}(\theta_i)$ οι συναρτήσεις Wigner των γωνιών Euler ενώ M και α οι κβαντικοί αριθμοί των προβολών της στροφορμής στον z άξονα του αδρανειακού συστήματος και στον x' άξονα του εσωτερικού συστήματος αντίστοιχα, με χωρισμό μεταβλητών έχουμε τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{f}}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 f \frac{\partial}{\partial \beta} \sqrt{f} + \frac{f^2}{2\beta^2} \bar{\Lambda} + \frac{1}{4}(1 - \delta - \lambda) f \nabla^2 f \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (\nabla f)^2 + u(\beta) \right] \xi_{L,\alpha}(\beta) = \epsilon \xi_{L,\alpha}(\beta) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + 2w(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \Lambda' \eta(\gamma) \quad (4.30)$$

ενώ

$$\bar{\Lambda} = \frac{4L(L+1) - 3\alpha^2}{4} + \Lambda' \quad (4.31)$$

Η εξίσωση (4.30) έχει λυθεί για δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή γύρω από το τοπικό ελάχιστο

$$w(\gamma) = \frac{1}{4}c \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right) \quad (4.32)$$

ενώ για $\gamma \approx \pi/6$ [67]

$$\Lambda' = \epsilon_\gamma = \sqrt{2c} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right) \quad (4.33)$$

όπου n_γ ο σχετικός κβαντικός αριθμός για τις γ ταλαντώσεις, ενώ αξιοποιώντας κατάλληλα τις εκφράσεις (4.31) και (4.33) προκύπτει

$$\bar{\Lambda} = \frac{4L(L+1) - 3\alpha^2}{4} + \sqrt{2c} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right) \quad (4.34)$$

4.3.4 Το κοινό β -μέρος του φάσματος

Από την παρουσίαση των παραπάνω περιπτώσεων, παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχες λύσεις (4.14), (4.19) και (4.29) για το δονητικό σκέλος της εξίσωσης Bohr έχουν κοινή μορφή, με την διαφορά ότι ο όρος Λ αντικαθίσταται από τον $\tilde{\Lambda}$ στην δεύτερη περίπτωση

και από τον $\bar{\Lambda}$ στην τρίτη. Εκτελώνοντας τις σχετικές παραγωγές στην εξίσωση (4.14) προκύπτει η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{2}f^2\xi'' + \left(ff' + \frac{2f^2}{\beta} \right) \xi' + \left(\frac{(f')^2}{8} + \frac{ff''}{4} + \frac{ff'}{\beta} \right) \xi - \frac{f^2}{2\beta^2}\Lambda\xi + \epsilon\xi - v_{eff}\xi = 0 \quad (4.35)$$

όπου

$$v_{eff} = u + \frac{1}{4}(1 - \delta - \lambda)f \left(\frac{4f'}{\beta} + f'' \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) (f')^2 \quad (4.36)$$

Θέτοντας

$$\xi(\beta) = \frac{R(\beta)}{\beta^2} \quad (4.37)$$

και αντικαθιστώντας στην (4.53) έχουμε

$$HR = - \left(\sqrt{f} \frac{d}{d\beta} \sqrt{f} \right)^2 R + 2u_{eff}R = 2\epsilon R \quad (4.38)$$

όπου

$$u_{eff} = v_{eff} + \frac{f^2 + \beta ff'}{\beta^2} + \frac{f^2}{2\beta^2}\Lambda \quad (4.39)$$

4.3.5 Το δυναμικό Davidson

Σε αυτή την ενότητα ειδικές μορφές για τις εξισώσεις του δυναμικού $u(\beta)$ και της συνάρτησης παραμόρφωσης μάζας $f(\beta)$. Συγκεκριμένα, θεωρούμε δυναμικό Davidson [57]

$$u(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \quad (4.40)$$

όπου β_0 το ελάχιστο του δυναμικού, ενώ βασιζόμενοι στα αποτελέσματα του τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή [55] θεωρούμε συνάρτηση παραμόρφωσης

$$f(\beta) = 1 + \alpha\beta^2, \quad \alpha \ll 1 \quad (4.41)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (4.40) και (4.41) στην έκφραση (4.39) για το δυναμικό u_{eff} προκύπτει η σχέση

$$2u_{eff} = k_1\beta^2 + k_0 + \frac{k_{-1}}{\beta^2} \quad (4.42)$$

όπου

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 + \alpha^2 [5(1 - \delta - \lambda) + (1 - 2\delta)(1 - 2\lambda) + 6 + \Lambda] \\ k_0 &= \alpha [5(1 - \delta - \lambda) + 8 + 2\Lambda] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$k_{-1} = 2 + \Lambda + 2\beta_0^4$$

με την υπενθύμιση ότι αντικαθιστούμε τον Λ με $\tilde{\Lambda}$ και $\bar{\Lambda}$ για αξονικά παραμορφωμένους και τριαξονικούς πυρήνες αντίστοιχα.

4.4 Σχηματικά αναλλοίωτα δυναμικά

Για την εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων της Χαμιλτωνιανής (4.38) [57] εφαρμόζονται μέθοδοι [55] με ολοκληρωτικές συνθήκες που εξασφαλίζουν την ύπαρξη λύσεων της στα πλαίσια της υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής [54] και ανάλογες με την γνωστή μέθοδο παραγοντοποίησης της εξίσωσης Schrödinger [68]

Στην απλή περίπτωση του μονοδιάστατου χώρου [69] θεωρούμε δύο δυναμικά V_1 και V_2 , όπου είναι εν γένει διαφορετικές συναρτήσεις ως προς x και αποτελούν υπερσυμμετρικό ζεύγος, ενώ αποκαλούνται σχηματικά αναλλοίωτα SIPs (*Shape Invariant Potentials*) αν ικανοποιούν τη δεσμευτική συνθήκη

$$V_2(x; \alpha_1) = V_1(x; \alpha_2) + R(\alpha_1) \quad (4.44)$$

όπου οι παράμετροι α_1 και α_2 είναι ανεξάρτητοι του x και επιπλέον ο α_2 είναι συνάρτηση του α_1 . Επιπροσθέτως, είναι γνωστό ότι η σχέση αναλλοιώτητας (4.44) μπορεί εκφραστεί με τη μορφή τελεστών ως

$$A(\alpha_1)A^\dagger(\alpha_1) = A^\dagger(\alpha_2)A(\alpha_2) + R(\alpha_1) \quad (4.45)$$

όπου A και A^\dagger είναι οι τελεστές που αντιστοιχούν στο υπερσυμμετρικό ζεύγος Χαμιλτωνιανών $H_1 = A^\dagger A$ και $H_2 = AA^\dagger$, όπου λύνοντας κανείς την εξίσωση Schrödinger για την H_1 , έχει σαν κέρδος και την λύση της H_2 .

Στην παρούσα περίπτωση, όπου λαμβάνουμε υπόψη την εξάρτηση της μάζας από την παραμόρφωση, έχουμε να λύσουμε την (4.38). Συγκεκριμένα, θεωρούμε την H ως τον πρώτο όρο της παρακάτω ακολουθίας Χαμιλτωνιανών

$$H_i = A_i^+ A_i^- + \sum_{j=0}^i \varepsilon_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.46)$$

όπου η πρώτη τάξης τελεστές [55] ορίζονται ως

$$A_i^\pm = A^\pm(\mu_i, \nu_i) = \mp \sqrt{f} \frac{d}{d\beta} \sqrt{f} + W(\mu_i, \nu_i; \beta) \quad (4.47)$$

και ικανοιούν τη αναδρομική σχέση αναλλοιώτητας

$$A_i^- A_i^+ = A_{i+1}^+ A_{i+1}^- + \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

όπου ε_i σταθερές.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, αφού τα δυναμικά $V_2(x; \alpha_1)$ και $V_1(x; \alpha_2)$ αποτελούν υπερσυμμετρικό ζεύγος, ότι το υπερδυναμικό $W(\mu, \nu; \beta)$ ικανοποιεί τις δύο παρακάτω συνθήκες

$$W^2(\mu, \nu; \beta) - f(\beta)W'(\mu, \nu; \beta) + \varepsilon_0 = 2u_{eff}(\beta) \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & W^2(\mu_i, \nu_i; \beta) + f(\beta)W'(\mu_i, \nu_i; \beta) \\ & = W^2(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; \beta) - f(\beta)W'(\mu_{i+1}, \nu_{i+1}; \beta) + \varepsilon_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.50)$$

όπου $\mu_0 = \mu$ και $\nu_0 = \nu$.

Για την περίπτωση του δυναμικού v_{eff} στην σχέση (4.42) το $W(\mu, \nu; \beta)$ είναι ένα δεύτερης τάξης υπερδυναμικό

$$W(\mu, \nu; \beta) = \mu\phi(\beta) + \frac{\nu}{\phi(\beta)} \quad (4.51)$$

$$\phi(\beta) = \frac{1}{\beta} \quad (4.52)$$

ενώ σύμφωνα με την αναφορά [55]

$$\phi'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} = \frac{A}{\beta^2} + B \quad (4.53)$$

$$\alpha\beta^2 = \frac{A'/\beta^2 + B'}{-1/\beta^2} \quad (4.54)$$

όπου $A = -1, B = 0, A' = 0$, και $B' = -\alpha$.

Εισάγοντας τις εκφράσεις (4.51) και (4.52) για το υπερδυναμικό στην (4.49) προκύπτει η σχέση

$$\left(\frac{\mu}{\beta} + \nu\beta\right)^2 - (1 + \alpha\beta^2) \left(-\frac{\mu}{\beta^2} + \nu\right) + \varepsilon_0 = k_1\beta^2 + k_0 + \frac{k_{-1}}{\beta^2} \quad (4.55)$$

όπου εξισώνοντας όμοιες δυνάμεις της παραμόρφωσης β στα μέλη της (4.55) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \mu(\mu + 1) &= k_{-1} \\ \nu(\nu - \alpha) &= k_1 \\ 2\mu\nu + \mu\alpha - \nu + \varepsilon_0 &= k_0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

με λύση

$$\mu = \frac{1}{2}(-1 \pm \Delta_1), \quad \nu = \frac{\alpha}{2}(1 \pm \Delta_2), \quad \varepsilon_0 = k_0 - 2\mu\nu - \mu\alpha + \nu \quad (4.57)$$

και

$$\Delta_1 \equiv \sqrt{1 + 4k_{-1}}, \quad \Delta_2 = \sqrt{1 + 4\frac{k_1}{\alpha^2}} \quad (4.58)$$

ενώ, όπως θα δούμε παρακάτω, για φυσικά αποδεκτή λύση της κυματοσυνάρτησης της θεμελιώδους στάθμης απαιτείται

$$\mu = -\frac{1}{2}(1 + \Delta_1), \quad \nu = \frac{\alpha}{2}(1 + \Delta_2) \quad (4.59)$$

Τέλος, εισάγοντας τις εκφράσεις (4.51) και (4.52) για το υπερδυναμικό στην (4.50) προκύπτει η αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mu_i}{\beta} + \nu_i\beta\right)^2 + (1 + \alpha\beta^2) \left(-\frac{\mu_i}{\beta^2} + \nu_i\right) \\ &= \left(\frac{\mu_{i+1}}{\beta} + \nu_{i+1}\beta\right)^2 - (1 + \alpha\beta^2) \left(-\frac{\mu_{i+1}}{\beta^2} + \nu_{i+1}\right) + \varepsilon_{i+1} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ομοίως και εδώ, εξισώνοντας όμοιες δυνάμεις της παραμόρφωσης β στα μέλη της (4.60) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}\mu_i(\mu_i - 1) &= \mu_{i+1}(\mu_{i+1} + 1) \\ \nu_i(\nu_i + \alpha) &= \nu_{i+1}(\nu_{i+1} - \alpha) \\ 2\mu_i\nu_i - \mu_i\alpha + \nu_i &= 2\mu_{i+1}\nu_{i+1} + \mu_{i+1}\alpha - \nu_{i+1} + \varepsilon_{i+1}\end{aligned}\quad (4.61)$$

με λύση

$$\mu_{i+1} = \mu_i - 1, \quad \nu_{i+1} = \nu_i + \alpha \quad (4.62)$$

$$\varepsilon_{i+1} = 2(\mu_i\nu_i - \mu_{i+1}\nu_{i+1}) - (\mu_i + \mu_{i+1})\alpha + \nu_i + \nu_{i+1} \quad (4.63)$$

όπου για $\mu_0 = \mu$ και $\nu_0 = \nu$ η (4.62) έχει λύση τις ακολουθίες

$$\begin{aligned}\mu_i &= \mu - i \\ \nu_i &= \nu + i\alpha\end{aligned}\quad (4.64)$$

4.5 Ενεργειακό φάσμα

Το ενεργειακό φάσμα της (4.38) δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \\ &= \frac{1}{2} \left[k_0 - 2\mu_n\nu_n - \alpha \left(2 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i + \mu_n \right) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \nu_i + \nu_n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[k_0 - 2\mu\nu - \alpha\mu + \nu - 4(\alpha\mu - \nu)n + 4\alpha n^2 \right]\end{aligned}\quad (4.65)$$

όπου λαμβάνοντας κανείς υπόψιν τις ειδικές λύσεις (4.59) οι ιδιοτιμές της ενέργειας γίνονται

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= \frac{1}{2} \left[k_0 + \frac{1}{2}\alpha(3 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2) \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha(2 + \Delta_1 + \Delta_2)n + 4\alpha n^2 \right]\end{aligned}\quad (4.66)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

όπου το εύρος των τιμών του n καθορίζεται από την ύπαρξη φυσικά αποδεκτών κυματοσυναρτήσεων.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω θεωρητικές τιμές του φάσματος για σύγκριση με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \frac{19}{4}\alpha + \frac{5}{2}(1 - \delta - \lambda)\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4k_1} \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + 4k_{-1}} + \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha^2 + 4k_1)(1 + 4k_{-1})} + \alpha\Lambda\end{aligned}\quad (4.67)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 + 4\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4k_1} + \alpha\sqrt{1 + 4k_{-1}} \quad (4.68)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 + 12\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + 4k_1} + 2\alpha\sqrt{1 + 4k_{-1}} \quad (4.69)$$

όπου οι τιμές των k_{-1}, k_0, k_1 δίνονται από τις εκφράσεις (4.43), με την υπενθύμιση ότι αντικαθιστούμε τον Λ με $\tilde{\Lambda}$ και $\bar{\Lambda}$ για αξονικά παραμορφωμένους και τριαξονικούς πυρήνες αντίστοιχα. Στις παραπάνω εκφράσεις, η θεμελιώδης ζώνη δίνεται από την (4.76) ενώ η β_1 ζώνη από την (4.77).

4.6 Κυματοσυναρτήσεις

Για να φυσικά αποδεκτές κυματοσυναρτήσεις, πρέπει κλασικά να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες [55]

- (α) Όπως και στην παραδοσιακή κβαντομηχανική, πρέπει οι κυματοσυναρτήσεις να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στην περιοχή ορισμού του δυναμικού u_{eff} , ήτοι

$$\int_0^\infty d\beta |R_n(\beta)|^2 < \infty \quad (4.70)$$

- (β) Ομοίως, θα πρέπει η αντίστοιχη Χαμιλτωνιανή H να είναι Ερμιτιανός τελεστής, δηλαδή ο τελεστής $\sqrt{f}(d/d\beta)\sqrt{f}$ περιορίζεται από τη συνθήκη

$$\begin{aligned} |R_n(\beta)|^2 &\rightarrow 0 && \text{για } \beta \rightarrow 0 \\ |R_n(\beta)|^2 \beta^2 &\rightarrow 0 && \text{για } \beta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.71)$$

4.6.1 Η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης

Η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης αναπαράγεται από τον τελεστή καταστροφής [55] σύμφωνα με την έκφραση

$$\begin{aligned} A^- R_0(\beta) &= 0 \\ \left(\sqrt{f(\beta)} \frac{d}{d\beta} \sqrt{f(\beta)} + W(\mu, \nu; \beta) \right) R_0(\beta) &= 0 \\ \frac{1}{2} f'(\beta) R_0(\beta) + f(\beta) R_0'(\beta) + W(\mu, \nu; \beta) R_0(\beta) &= 0 \\ \left(\sqrt{f(\beta)} \right)' R_0(\beta) + \sqrt{f(\beta)} R_0'(\beta) &= -\frac{W(\mu, \nu; \beta) R_0(\beta)}{\sqrt{f(\beta)}} \\ \frac{d \left(\sqrt{f(\beta)} R_0(\beta) \right)}{\sqrt{f(\beta)} R_0(\beta)} &= -\frac{W(\mu, \nu; \beta)}{f(\beta)} d\beta \\ R_0(\beta) &= R_0(\mu, \nu; \beta) \\ &= \frac{N_0}{\sqrt{f(\beta)}} \exp \left(-\int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

όπου N_0 η σταθερά κανονικοποίησης, ενώ

$$\begin{aligned} \int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta} &= \int^\beta \left(\frac{\mu}{\tilde{\beta}} + \frac{(\nu - \mu\alpha)\tilde{\beta}}{1 + \alpha\tilde{\beta}^2} d\tilde{\beta} \right) \\ &= \mu \ln \beta + \frac{1}{2\alpha} (\nu - \mu\alpha) \ln(1 + \alpha\beta^2) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Αξιοποιώντας τις (4.72) και (4.73)

$$R_0(\beta) = N_0 \beta^{-\mu} f^{(\nu - \mu\alpha + \alpha)/(2\alpha)} \quad (4.74)$$

Για $\beta \rightarrow 0$, η θετικά ορισμένη συνάρτηση $|R_0(\beta)|^2$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-2\mu}$. Η πρώτη έκφραση από τη συνθήκη (4.71) επιβάλλει ότι $\mu < 0$. Επειδή ο όρος k_{-1} όπως ορίζεται από την (4.43) είναι μεγαλύτερος από 2, συνεπάγεται ότι ο Δ_1 όπως ορίζεται από την (4.58) είναι μεγαλύτερος του 3, με αποτέλεσμα η επιλογή θετικού προσήμου στην έκφραση (4.57) για το μ να οδηγήσει στην $\mu > 1$. Αυτό αποτελεί μη φυσικά παραδεκτή λύση, αφήνοντας ως επιλογή το αρνητικό πρόσημο στην (4.57), και άρα $\mu < -2$.

Για $\beta \rightarrow \infty$, η θετικά ορισμένη συνάρτηση $|R_0(\beta)|^2 \beta^2$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-2\nu/\alpha}$. Η δεύτερη έκφραση από τη συνθήκη (4.71) επιβάλλει ότι $\nu > 0$. Η επιλογή αυτή εξασφαλίζεται για θετικό πρόσημο του ν στην (4.57). Για αρνητικό πρόσημο, η θετικά ορισμένη ποσότητα Δ_2 είναι φραγμένη στο $0 < \Delta_2 < 1$. Για μικρές τιμές του α η ποσότητα k_1 στην (4.43) γίνεται θετική, ενώ η ποσότητα Δ_2 στην (4.58) γίνεται μεγαλύτερη του 1, αποτέλεσμα μη παραδεκτό. Παρ'όλα αυτά, για μεγάλες τιμές του α , υπάρχουν παραδεκτές λύσεις. Επειδή είναι σύνηθες στην κβαντομηχανική να επιλέγεται από ένα σύνολο παραδεκτών κυματοσυναρτήσεων αυτή με την πιο ομαλή 'συμπεριφορά' [70], θεωρούμε το θετικό πρόσημο στην επιλογή του ν , καταλήγοντας έτσι στις (5.59).

4.6.2 Διεγερμένες καταστάσεις

Σύμφωνα με την αναφορά [55] οι διεγερμένες καταστάσεις δίνονται από την έκφραση

$$\begin{aligned} R_n(\beta) &= R^n(\mu, \nu; \beta) \propto \beta_{-n} R_0(\mu_n, \nu_n; \beta) P_n(\mu, \nu; y) \\ y &= \beta^2 \end{aligned} \quad (4.75)$$

όπου $P_n(\mu, \nu; y)$ είναι ένα πολυώνυμο n -βαθμού ως προς y που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mu, \nu; y) &= -2y(1 + \alpha y) \frac{d}{dy} P_n(\mu_1, \nu_1; y) \\ &+ [\mu_{n+1} + \mu + \nu(\nu_{n+1} + \nu + n\alpha)y] P_n(\mu_1, \nu_1; y) \end{aligned} \quad (4.76)$$

με αρχική τιμή την $P_0(\mu, \nu; y) = 1$.

Αντικαθιστώντας τις ακολουθίες (4.64) στην έκφραση $R_0(\mu_n, \nu_n; \beta)$ και αξιοποιώντας την σχέση (4.74)

$$R_0(\mu_n, \nu_n; \beta) \propto \beta^{-\mu_n} f^{-(\nu_n - \mu_n\alpha + \alpha)/(2\alpha)} \propto R_0(\mu, \nu; \beta) \beta^n f^{-n} \quad (4.77)$$

έτσι η (4.75) γίνεται

$$R_n(\beta) \propto R_0(\beta) f^{-n} P_n(\mu, \nu; y) \quad (4.78)$$

Η παραπάνω έκφραση υπακούει την συνθήκη (4.71) για $n = 1, 2, \dots$ δεδομένου ότι η $R_0(\beta)$ την ικανοποιεί, όπως αποδείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Για την λύση της αναδρομικής έκφρασης (4.76), χρήσιμη είναι η αλλαγή μεταβλητής

$$t = 1 - \frac{2}{f} = \frac{-1 + \alpha y}{1 + \alpha y} \quad (4.79)$$

στη συνάρτηση

$$P_n(\mu, \nu; y) = C_n f^n Q_n(\mu, \nu; t) \quad (4.80)$$

όπου C_n κάποια σταθερά, ενώ εξ ορισμού, η συνάρτηση $Q_n(\mu, \nu; t)$ είναι πολυώνυμο n -βαθμού ως προς t . Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις εκφράσεις

$$y = \frac{1+t}{\alpha(1-t)}, \quad 1 + \alpha y = \frac{2}{1-t}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{\alpha}{2}(1-t^2) \frac{d}{dt} \quad (4.81)$$

μπορούμε να δείξουμε ότι η σχέση (4.76) γίνεται (Βλ. Παράρτημα Ε)

$$\begin{aligned} \frac{C_{n+1}}{C_n} Q_{n+1}(\mu, \nu; t) &= \left\{ -(1-t^2) \frac{d}{dt} + \left[\mu + \frac{\nu}{\alpha} + \left(\frac{\nu}{\alpha} - \mu + 1 \right) t \right] \right\} \\ &\quad \times Q_n(\mu - 1, \nu + \alpha; t) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα πολυώνυμα Jacobi ικανοποιούν τη σχέση [71]

$$2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = \left\{ -(1-x^2) \frac{d}{dx} + [\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x] \right\} P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \quad (4.83)$$

βλέπουμε ότι τα πολυώνυμα $Q_n(\mu, \nu; t)$ είναι πολυώνυμα Jacobi,

$$Q_n(\mu, \nu; t) = P_n^{\left(\frac{\nu}{\alpha} - \frac{1}{2}, -\mu - \frac{1}{2}\right)}(t) = P_n^{\left(\frac{\Delta_2}{2}, \frac{\Delta_1}{2}\right)}(t) \quad (4.84)$$

επιλέγοντας

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = 2(n+1), \quad C_0 = 1 \quad (4.85)$$

δηλαδή $C_n = 2^n n!$, ενώ οι κυματοσυναρτήσεις δίνονται από την έκφραση

$$R_n(\beta) = \frac{N_n}{N_0} R_0(\beta) P_n^{\left(\frac{\nu}{\alpha} - \frac{1}{2}, -\mu - \frac{1}{2}\right)}(t) = N_n \beta^{-\mu} f^{-(\nu - \mu \alpha + \alpha)/(2\alpha)} P_n^{\left(\frac{\nu}{\alpha} - \frac{1}{2}, -\mu - \frac{1}{2}\right)}(t) \quad (4.86)$$

ή χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους Δ_1, Δ_2 και t

$$R_n(\beta) = N_n \beta^{(1+\Delta_1)/2} f^{-1-(\Delta_1+\Delta_2)/4} P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t), \quad t = \frac{-1 + \alpha \beta^2}{1 + \alpha \beta^2} \quad (4.87)$$

όπου N_n η σταθερά κανονικοποίησης.

4.6.3 Η σταθερά κανονικοποίησης

Για τον υπολογισμό των N_n , σκοπύμως εκφράζουμε τις κυματοσυναρτήσεις R_n συναρτήσει της παραμέτρου t .

$$\begin{aligned} R_n &= N_n y^{(1+\Delta_1)/4} (1 + \alpha y)^{-1 - (\Delta_1 + \Delta_2)/4} P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t) \\ &= N_n 2^{-1 - (\Delta_1 + \Delta_2)/4} \alpha^{-(1+\Delta_1)/4} (1+t)^{(1+\Delta_1)/4} (1-t)^{(3+\Delta_2)/4} \\ &\quad \times P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Διαφορίζοντας την δεύτερη σχέση από τις (4.75)

$$d\beta = \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{dt}{\sqrt{\alpha}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}} \quad (4.89)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση ολοκληρωσιμότητας των κυματοσυναρτήσεων

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |R_n|^2 d\beta &= |N_n|^2 2^{-2 - (\Delta_1 + \Delta_2)/2} \alpha^{-1 - \Delta_1/2} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 (1-t)^{\Delta_2/2} (1+t)^{\Delta_1/2} \left[P_n^{(\Delta_2/2, \Delta_1/2)}(t) \right]^2 dt \end{aligned} \quad (4.90)$$

Χρησιμοποιώντας τις ολοκληρωτικές σχέσεις των πολυωνύμων Jacobi[72], η σχέση κανονικοποίησης δίνεται από την έκφραση

$$\frac{2^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2 + 1} \Gamma\left(n + \frac{\Delta_1}{2} + 1\right) \Gamma\left(n + \frac{\Delta_1}{2} + 1\right)}{\left(2n + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + 1\right) n! \Gamma\left(n + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + 1\right)} |N_n|^2 2^{-2 - (\Delta_1 + \Delta_2)/2} \alpha^{-1 - \Delta_1/2} = 1 \quad (4.91)$$

ή

$$\begin{aligned} N_n &= \left[2\alpha^{\Delta_1/2 + 1} \left(2n + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + 1 \right) n! \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(n + \frac{\Delta_1}{2} + 1\right) \Gamma\left(n + \frac{\Delta_2}{2} + 1\right)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.92)$$

όπου ο λόγος των συναρτήσεων Γ στην (4.92) συγκρίνει για μεγάλες τιμές του δείκτη n , σύμφωνα με το Παράρτημα της αναφοράς [56]

4.7 Ρυθμοί μετάπτωσης $B(E2)$

Οι ρυθμοί μετάβασης $B(E2)$ υπολογίζονται από την έκφραση

$$B(E2; \varrho L \rightarrow \varrho' L') = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle \varrho' L' || T^{(E2)} || \varrho L \rangle|^2}{2L + 1} \quad (4.93)$$

όπου το ρ αναπαριστά κβαντικούς αριθμούς εκτός στροφορμής και μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τετραπολικό τελεστή T^{E2} και το θεώρημα Wigner-Eckart

$$\langle \rho' L' M' | T_{\mu}^{(E2)} | \rho L M \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L'+1}} \langle L 2 L' | M \mu M' \rangle \langle \rho' L' || T^{(E2)} || \rho L \rangle \quad (4.94)$$

Για γ -ασταθής πυρήνες, χρησιμοποιώντας τον τετραπολικό τελεστή [49]

$$T^{(E2)} = A\beta \left[\mathcal{D}_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{D}_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + \mathcal{D}_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin \gamma \right] \quad (4.95)$$

όπου A είναι παράγοντας κλίμακας, ο αντίστοιχος υπολογισμός εκτελείται όπως στην αναφορά [73]

Για αξονικά παραμορφωμένους πυρήνες, ο αντίστοιχος τετραπολικός τελεστής δίνεται ομοίως από την έκφραση (4.95) ενώ ο αντίστοιχος υπολογισμός εκτελείται όπως στην αναφορά [61]

Τέλος, για τριαξονικούς πυρήνες με $\gamma = \pi/6$, ο υπολογισμός των $B(E2)$ s εκτελείται όπως στην αναφορά [74] χρησιμοποιώντας τον τετραπολικό τελεστή

$$T_{\mu}^{(E2)} = A\beta \left[\mathcal{D}_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{D}_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + \mathcal{D}_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (4.96)$$

όπου A είναι παράγοντας κλίμακας, ενώ η ποσότητα $\gamma - 2\pi/3$ στο όρισμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ορίζεται από την ποσότητα $\gamma - 2k\pi/3$ για $k = 1$, αφού στην παρούσα περίπτωση χρησιμοποιείται η προβολή της στροφορμής α κατά τον άξονα x' του εσωτερικού συστήματος.

Κεφάλαιο 5

DDM για δυναμικό Kratzer

5.1 Βασικές παραδοχές

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η επέκταση του μοντέλου DDM για δυναμικό Kratzer[76], δεδομένου ότι στα πλαίσια εφαρμογής μεθόδων υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής, η συναρτησιακή εξάρτηση της μάζας σε σχέση με την παραμόρφωση είναι διαφορετική για κάθε δυναμικό. Έτσι, ο βασικός φορμαλισμός που τροποποιεί την Χαμιλτωνιανή του Bohr είναι στην ουσία ο ίδιος με αυτόν που παρουσιάζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Χρησιμοποιώντας δυναμικό Kratzer

$$u(\beta) = -\frac{1}{\beta} + \frac{\tilde{B}}{\beta^2} \quad (5.1)$$

η συνάρτηση παραμόρφωσης αναμένεται [55] να είναι της μορφής

$$f(\beta) = 1 + \alpha\beta, \quad \alpha \ll 1. \quad (5.2)$$

ενώ αξιοποιώντας κατάλληλα τις σχέσεις (5.1), (5.2), (4.36) και (4.39) έχουμε

$$2u_{eff} = k_0 + \frac{k_{-1}}{\beta} + \frac{k_{-2}}{\beta^2} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} k_0 &= \alpha^2 \left[2(3 - \delta - \lambda) + \frac{1}{4}(1 - 2\delta)(1 - 2\lambda) + \Lambda \right] \\ k_{-1} &= -2 + 2\alpha [(4 - \delta - \lambda) + \Lambda] \\ k_{-2} &= 2 + \Lambda + 2\tilde{B} \end{aligned} \quad (5.4)$$

όπου α η παράμετρος παραμόρφωσης και Λ η ιδιοτιμή που υπεισέρχεται κατά τον υπολογισμό των ιδιοτιμών της ενέργειας όπου ομοίως δίνεται από την έκφραση

$$\Lambda = \begin{cases} \tau(\tau + 3), & \text{για } \gamma\text{-ασταθής πυρήνες} \\ \frac{L(L+1)-K^2}{3} + (6c)(n_\gamma + 1), & \text{για συμμετρικά παραμορφωμένους πυρήνες} \\ & \text{και αρμονική εξάρτηση ως προς } \gamma \\ \frac{L(L+4)+3n_w(2L-n_w)}{4} + \sqrt{2c} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right), & \text{για τριαξονικούς πυρήνες με } \gamma = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

5.2 Ενεργειακό φάσμα

Όπως και στην περίπτωση παραμόρφωσης για δυναμικό Davidson, έτσι και εδώ χρειάζεται να επιλυθούν οι εκφράσεις (4.49) και (4.50) για δυναμικό Kratzer και κατάλληλη επιλογή υπερδυναμικού $W(\mu, \nu; \beta)$. Για την περίπτωση u_{eff} που δίνεται από την έκφραση (5.3), το $W(\mu, \nu; \beta)$ είναι πρώτης τάξης υπερδυναμικό

$$W(\mu, \nu; \beta) = \mu\phi(\beta) + \nu \quad (5.5)$$

με

$$\phi(\beta) = \frac{1}{\beta} \quad (5.6)$$

ενώ ομοίως, σύμφωνα με την αναφορά [55]

$$\phi'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} = \frac{A}{\beta^2} + \frac{B}{\beta} + C \quad (5.7)$$

$$\alpha\beta = \frac{(A'/\beta^2) + (B'/\beta) + C'}{(-1/\beta^2)} \quad (5.8)$$

με $A = -1, B = C = 0, A' = 0, B' = -\alpha$ και $C' = 0$.

Εισάγοντας τις εκφράσεις (5.5) και (5.6) στην (4.49) προκύπτει η έκφραση

$$\left(\frac{\mu}{\beta} + \nu\right)^2 - (1 + \alpha\beta) \left(-\frac{\mu}{\beta^2}\right) + \varepsilon_0 = k_0 + \frac{k_1}{\beta} + \frac{k_2}{\beta^2} \quad (5.9)$$

δηλαδή

$$\mu(\mu + 1) = k_2, \quad \mu(2\nu + \alpha) = k_1, \quad \nu^2 + \varepsilon_0 = k_0 \quad (5.10)$$

με αντίστοιχη λύση τις

$$\mu = \frac{1}{2}(-1 \pm \Delta), \quad \nu = \frac{k_{-1} - \alpha\mu}{2\mu}, \quad \varepsilon_0 = k_0 - \nu^2, \quad \Delta = \sqrt{1 + 4k_2} \quad (5.11)$$

ενώ, όπως θα δούμε παρακάτω, για φυσικά αποδεκτή λύση της κυματοσυνάρτησης της θεμελιώδους στάθμης απαιτείται

$$\mu = -\frac{1}{2}(1 + \Delta) \quad (5.12)$$

ενώ εισάγοντας τις (5.5) και (5.6) στην (4.50) προκύπτει η αναδρομική σχέση

$$\left(\frac{\mu_i}{\beta} + \nu_i\right)^2 + (1 + \alpha\beta) \left(-\frac{\mu_i}{\beta}\right) = \left(\frac{\mu_{i+1}}{\beta} + \nu_{i+1}\right)^2 - (1 + \alpha\beta) \left(-\frac{\mu_{i+1}}{\beta^2}\right) + \varepsilon_{i+1} \quad (5.13)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \mu_i(\mu_i + 1) &= \mu_{i+1}(\mu_{i+1} + 1) \\ \mu_i(2\nu_i - \alpha) &= \mu_{i+1}(2\nu_{i+1} + \alpha) \\ \nu_i^2 &= \nu_{i+1}^2 + \varepsilon_{i+1} \end{aligned} \quad (5.14)$$

με αντίστοιχη λύση τις

$$\mu_{i+1} = \mu_i - 1, \quad 2\mu_{i+1}\nu_{i+1} = 2\mu_i\nu_i - \alpha(\mu_i + \mu_{i+1}) \quad (5.15)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \nu_i^2 - \nu_{i+1}^2 \quad (5.16)$$

όπου για $\mu_0 = \mu$ και $\nu_0 = \nu$ η (5.15) έχει λύση τις ακολουθίες

$$\mu_i = \mu - i, \quad \nu_i = \frac{2\mu(\nu - \alpha i) + \alpha i^2}{2(\mu - i)} \quad (5.17)$$

Το ενεργειακό φάσμα δίνεται από την έκφραση

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \quad (5.18)$$

ενώ αξιοποιώντας κατάλληλα τις (5.16), (5.17) και (5.18) προκύπτει η τελική έκφραση για τις ιδιοτιμές της ενέργειας

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} \left[k_0 - \left(\frac{k_{-1} + \alpha \left[n^2 + \frac{1}{2}(1 + \Delta)(2n + 1) \right]}{2n + 1 + \Delta} \right)^2 \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

5.3 Κυματοσυναρτήσεις

Όπως και στην περίπτωση DDM για δυναμικό Davidson, οι φυσικά αποδεκτές κυματοσυναρτήσεις πρέπει να ικανοποιούν [55] τις συνθήκες (4.70) και $|R_n(\beta)|^2 f(\beta) \rightarrow 0$ για $\beta \rightarrow 0$ και $\beta \rightarrow \infty$, δηλαδή

$$\int_0^\infty d\beta |R_n(\beta)|^2 < \infty \quad (5.20)$$

και

$$|R_n(\beta)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{για} \quad \beta \rightarrow 0 \quad (5.21)$$

$$|R_n(\beta)|^2 (1 + \alpha\beta) \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$|R_n(\beta)|^2 \beta \rightarrow 0 \quad \text{για} \quad \beta \rightarrow \infty \quad (5.22)$$

5.3.1 Η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης

Η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης, ομοίως αναπαράγεται από τον τελεστή καταστροφής A^- και δίνεται από την σχέση

$$R_0(\mu, \nu; \beta) = \frac{N_0}{\sqrt{f(\beta)}} \exp \left(- \int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta} \right) \quad (5.23)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση παραμόρφωσης (5.2)

$$\begin{aligned} \int^\beta \frac{W(\mu, \nu; \tilde{\beta})}{f(\tilde{\beta})} d\tilde{\beta} &= \int^\beta \left(\frac{\mu}{\tilde{\beta}} + \frac{\nu - \alpha\mu}{1 + \alpha\tilde{\beta}} \right) d\tilde{\beta} \\ &= \mu \ln \beta + \frac{1}{\alpha(\nu - \alpha\mu) \ln 1 + \alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Άρα

$$R_0(\mu, \nu; \beta) = N_0 \beta^{-\mu} f^{-\frac{\nu-\alpha\mu}{\alpha}-\frac{1}{2}} = N_0 \beta^{-\mu} f^{\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{\tilde{K}}{\mu}-1\right)} \quad (5.25)$$

όπου $\tilde{K} = k_{-2} - \frac{k_{-1}}{\alpha}$

Για $\beta \rightarrow 0$, η ποσότητα $|R_0(\beta)|^2$ συγκλίνει ως $\beta^{-2\mu}$, ενώ η συνθήκη (5.21) ικανοποιείται αν $\mu < 0$. Δεδομένου ότι $k_{-2} > 2 \Rightarrow \Delta > 3$, δικαιολογείται η κατάλληλη επιλογή για την (5.12), αφού διαφορετικά ισχύει $\mu < -2$ που αντιστοιχεί σε μη αποδεκτές λύσεις.

Για $\beta \rightarrow \infty$, η ποσότητα $|R_0(\beta)|^2 \beta$ συγκλίνει ως $\beta^{\frac{\tilde{K}}{\mu}-\mu}$, ενώ η συνθήκη (5.22) ικανοποιείται αν

$$\mu^2 < \tilde{K} \Rightarrow \frac{1}{2}(1 + \Delta) < -\frac{k_{-1}}{\alpha} \quad (5.26)$$

Η (5.26) θα πρέπει να είναι σύμφωνη με την επιλογή των ελεύθερων παραμέτρων που προσδιορίζονται από την προσαρμογή των πειραματικών - θεωρητικών δεδομένων.

5.3.2 Διεγερμένες καταστάσεις

Οι διεγερμένες κυματοσυναρτήσεις, δίνονται από την έκφραση [55]

$$R_n(\beta) = R_n(\mu, \nu; \beta) \propto R_0(\mu_n, \nu_n; \beta) P_n(\mu, \nu; y), \quad y = \frac{1}{\beta} \quad (5.27)$$

όπου $P_n(\mu, \nu; y)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού ως προς y που ικανοποιούν την αναδρομική έκφραση

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mu, \nu; y) &= y(y + \alpha) \frac{d}{dy} P_n(\mu_1, \nu_1; y) \\ &+ [(\mu_{n+1} + \mu)y + \nu_{n+1} + \nu] P_n(\mu_1, \nu_1; y), \\ P_0(\mu, \nu; y) &= 1 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Αξιοποιώντας τις εκφράσεις (5.25) και (5.27) προκύπτει ότι

$$R_n(\beta) \propto \beta^{-\mu_n} f^{-\frac{\nu_n-\alpha\mu_n}{\alpha}-\frac{1}{2}} P_n(\mu, \nu; y) \propto \beta^{-\mu_n} f^{\frac{1}{2}\left(\mu_n+\frac{\tilde{K}}{\mu_n}-1\right)} P_n(\mu, \nu; y) \quad (5.29)$$

όπου για $\beta \rightarrow 0$ η ποσότητα $|R_n(\beta)|^2$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-2\mu}$ και ικανοποιεί την (5.21).

Για $\beta \rightarrow \infty$, η ποσότητα $|R_n(\beta)|^2 \beta$ συμπεριφέρεται ως $\beta^{-\mu_n+\frac{\tilde{K}}{\mu_n}}$, ενώ η συνθήκη (5.22) ικανοποιείται αν

$$\mu_n^2 < \tilde{K} \quad (5.30)$$

δηλαδή

$$n^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right) (1 + \Delta) < -\frac{k_{-1}}{\alpha} \quad (5.31)$$

από όπου συμπαίρνουμε ότι πρέπει να υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός δέσμιων καταστάσεων για n_{max} έτσι ώστε η ποσότητα $-\frac{k_{-1}}{\alpha}$ να είναι φραγμένη στο διάστημα

$$n_{max}^2 + \left(n_{max} + \frac{1}{2}\right) (1 + \Delta) < -\frac{k_{-1}}{\alpha} \leq (n_{max} + 1)^2 + \left(n_{max} + \frac{3}{2}\right) (1 + \Delta) \quad (5.32)$$

Για την λύση της αναδρομικής έκφρασης (5.28) χρήσιμη είναι η αλλαγή μεταβλητής με τις εκφράσεις

$$t = \frac{2y + \alpha}{\alpha}, \quad P_n \left(\mu, \frac{\alpha}{2} \left(\mu - \frac{\tilde{K}}{\mu} \right); y \right) = C_n^{(\mu)} Q_n(\mu; t) \quad (5.33)$$

όπου $C_n^{(\mu)}$ είναι κάποια σταθερά και $Q_n(\mu; t)$ πολυώνυμο n βαθμού ως προς t . Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις εκφράσεις

$$y = \frac{\alpha}{2}(t - 1), \quad y + \alpha = \frac{\alpha}{2}(t + 1), \quad \frac{d}{dy} = \frac{2}{\alpha} \frac{d}{dt} \quad (5.34)$$

και

$$\nu_i = \frac{\alpha}{2} \left(\mu_i - \frac{\tilde{K}}{\mu_i} \right), \quad \tilde{K} = k_{-2} - \frac{k_{-1}}{\alpha} \quad (5.35)$$

και την έκφραση (5.28) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{2C_{n+1}^{(\mu)}}{\alpha C_n^{(\mu-1)}} Q_{n+1}(\mu; t) &= \left\{ -(1-t^2) \frac{d}{dt} + (2\mu_{n+1} + n + 1) \right. \\ &\quad \left. \times \left(t - \frac{\tilde{K}}{\mu_{n+1}(\mu_{n+1} + n + 1)} \right) \right\} Q_n(\mu - 1; t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι τις αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν τα πολυώνυμα Jacobi [72] μπορούμε να δείξουμε την έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(z) &= \left\{ -(1-z^2) \frac{d}{dz} + (n+\alpha+\beta+1) \right. \\ &\quad \left. \times \left(z + \frac{\alpha-\beta}{2n+\alpha+\beta+2} \right) \right\} P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \end{aligned} \quad (5.37)$$

ενώ παρατηρούμε ότι τα $Q_n(\mu - 1; t)$ είναι πολυώνυμα Jacobi της μορφής

$$Q_n(\mu - 1; t) = P_n^{(\mu_{n+1} - \frac{\tilde{K}}{\mu_{n+1}}, \mu_{n+1} + \frac{\tilde{K}}{\mu_{n+1}})}(t) \quad (5.38)$$

επιλέγοντας για τις σταθερές την έκφραση

$$\frac{C_{n+1}^{(\mu)}}{C_n^{(\mu-1)}} = \frac{\alpha(n+1)(2\mu_{n+1} + n + 1)}{2(\mu_{n+1} + n + 1)}, \quad C_0^{(\mu-n-1)} = 1 \quad (5.39)$$

ή

$$C_n^{(\mu)} = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^n \frac{n! \Gamma(2\mu - n + 1) \Gamma(\mu - n + 1)}{\Gamma(2\mu - 2n + 1) \Gamma(\mu + 1)} \quad (5.40)$$

Έτσι οι κυματοσυναρτήσεις δίνονται από την έκφραση

$$R_n(\beta) = N_n \beta^{-\mu_n} f^{\frac{1}{2}} \left(\mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n} - 1 \right) P_n^{(\mu_n - \frac{\tilde{K}}{\mu_n}, \mu_n + \frac{\tilde{K}}{\mu_n})}(t) \quad (5.41)$$

$$t = \frac{2 + \alpha\beta}{\alpha\beta} \quad (5.42)$$

ενώ N_n [75] είναι η σταθερά κανονικοποίησης.

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικά αποτελέσματα και σύγκριση με το πείραμα

Σε πολλούς άρτιους -άρτιους πυρήνες παρατηρούνται πειραματικά ζώνες με $K^\pi = 4^+$. Η προέλευση των ζωνών αυτών αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια αντικείμενο διαφωνίας όσον αφορά την προέλευσή τους. Μία πλευρά ισχυρίζεται ότι πρόκειται για ζώνες που βασίζονται σε διέγερση δύο φωνονίων στον βαθμό ελευθερίας γ [77, 78, 79], ενώ αντίθετα άλλη πλευρά ισχυρίζεται ότι πρόκειται για ζώνες βασισμένες σε διέγερση του δεκαεξαπολικού ($L = 4$) βαθμού ελευθερίας [80, 81].

Τα μοντέλα που περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια μπορούν να ριζούν κάποιο φως στη φύση αυτών των ζωνών με τον ακόλουθο τρόπο.

α) Οι ελεύθερες παράμετροι των μοντέλων μπορούν να προσδιοριστούν από προσαρμογή των προβλέψεών τους στις υπάρχουσες πειραματικές στάθμες της ζώνης της θεμελιώδους κατάστασης, καθώς και των ζωνών β_1 και γ_1 .

β) Οι θεωρητικές εξισώσεις μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των σταθμών της $K^\pi = 4^+$ ζώνης που αντιστοιχεί σε διέγερση $\gamma\gamma$ (διέγερση δύο φωνονίων του βαθμού ελευθερίας γ), χωρίς να υπεισέρχεται νέα ελεύθερη παράμετρος. Αν οι προβλέψεις συμφωνούν με το πείραμα, η $K^\pi = 4^+$ ζώνη εμφανίζεται να έχει συμπεριφορά $\gamma\gamma$, αν όχι η ερμηνεία της πρέπει να αναζητηθεί σε πρόσθετο βαθμό ελευθερίας (δεκαεξαπολικό).

γ) Ένας έλεγχος αυτοσυνέπειας της παραπάνω μεθόδου προκύπτει αν οι ελεύθερες παράμετροι των μοντέλων προσδιοριστούν εκ νέου από προσαρμογή στις 4 ζώνες (θεμελιώδους κατάστασης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma$). Εφόσον η θεωρία είναι αυτοσυνεπής, οι τιμές των παραμέτρων που θα προκύψουν από την προσαρμογή στις 4 ζώνες θα πρέπει να είναι πολύ παρόμοιες με τις τιμές που προέκυψαν νωρίτερα από την προσαρμογή στις 3 ζώνες.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα πειραματικά και τα αντίστοιχα θεωρητικά δεδομένα κανονικοποιημένα στην E_2^+ κατάσταση σύμφωνα με τη σχέση

$$E_{L2}^+ = \frac{E_L^+ - E_0^+}{E_2^+ - E_0^+}, \quad (6.1)$$

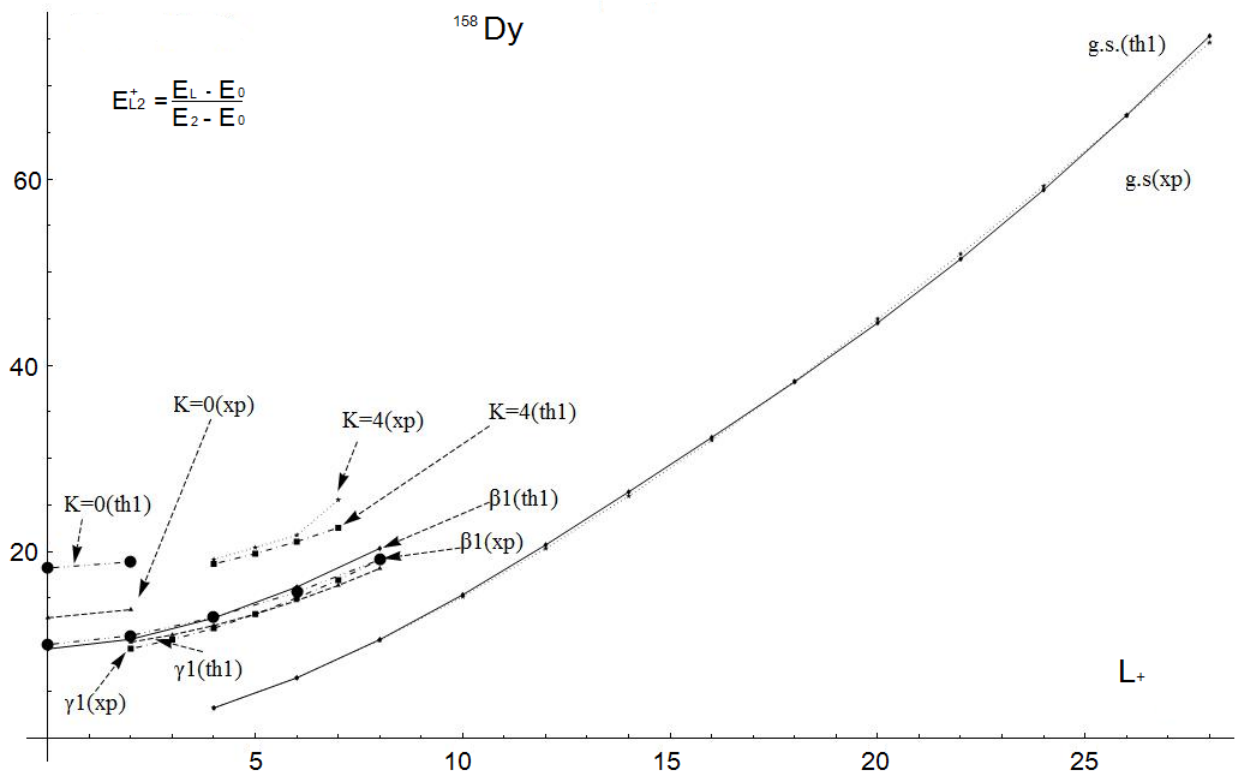
για τα ισότοπα του Δυσπροσίου ^{158}Dy , ^{160}Dy , ^{162}Dy και το Θόριο ^{232}Th για δυναμικό Davidson και Kratzer. Τα θεωρητικά δεδομένα υπολογίζονται σύμφωνα με τις εκφράσεις (4.67) και (4.68) για DDM - Davidson και (5.19) για DDM - Kratzer, ενώ για

την παράμετρο Λ χρησιμοποιείται η έκφραση (4.21) που αντιστοιχεί στην περιγραφή των συμμετρικά παραμορφωμένων πυρήνων. Η προσαρμογή πειραματικών-θεωρητικών δεδομένων, όπου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, έγινε αρχικά στις θεμελιώδη, β_1 , και γ_1 ζώνες, ενώ για τις τιμές των παραμέτρων α , β_0 , c που βρέθηκαν, υπολογίστηκαν και οι θεωρητικές τιμές για τις $\gamma\gamma$ ζώνες με $K = 0$ και $K = 4$. Στη συνέχεια, για την εκτίμηση των προβλεπτικών δυνατοτήτων της θεωρίας, στην προσαρμογή των δεδομένων συμπεριλαμβάνεται και η $\gamma\gamma$ ζώνη για $K = 4$, ενώ για τις νέες τιμές των παραμέτρων α , β_0 και c που προκύπτουν, υπολογίζονται και οι θεωρητικές τιμές για την $\gamma\gamma$ ζώνη με $K = 0$. Τα πειραματικά και θεωρητικά δεδομένα που προκύπτουν από τις εκάστοτε προσαρμογές παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν, με τις αντίστοιχες γραφικές αναπαραστάσεις των E_{L2}^+ σε συνάρτηση με τον κβαντικό αριθμό στροφορμής L για κάθε προσαρμογή.

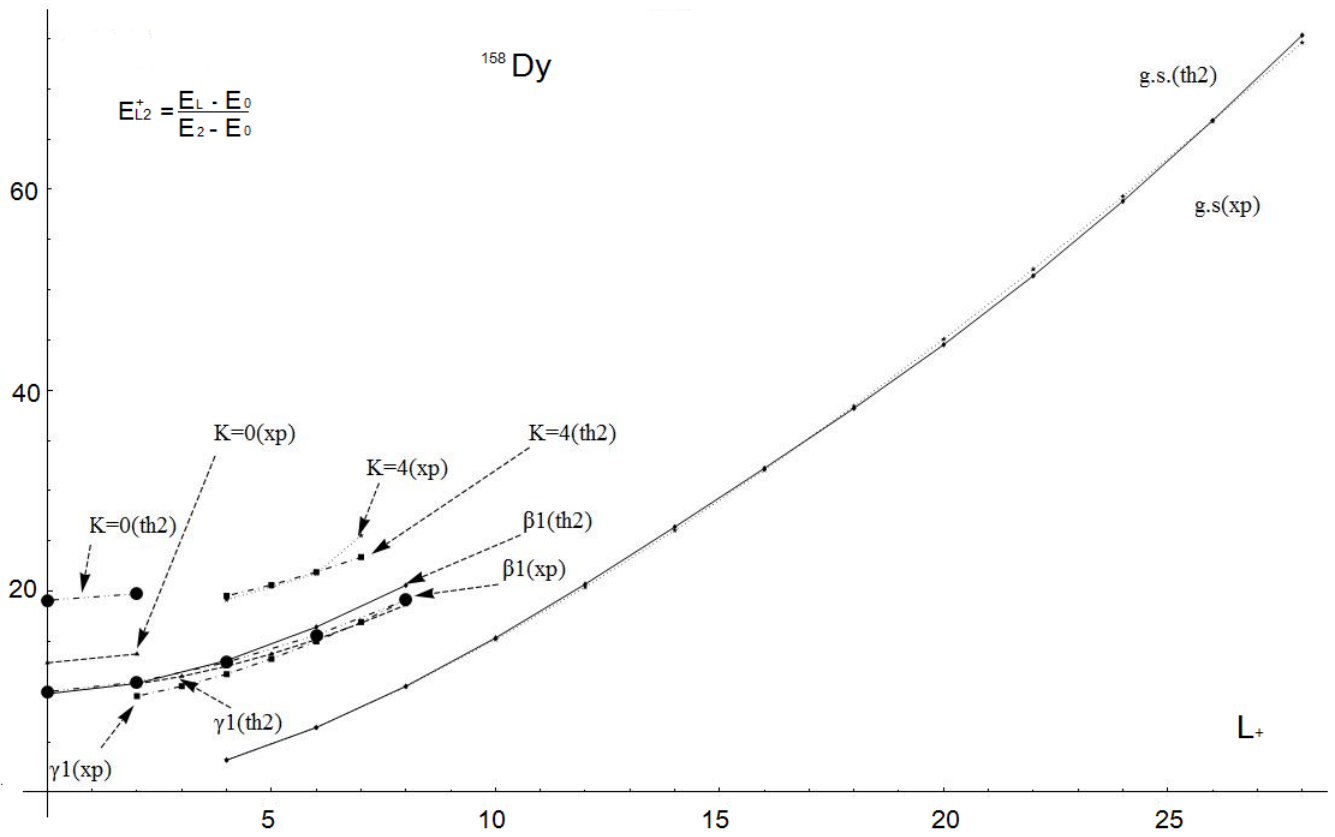
6.1 Δυναμικό Davidson

Πίνακας 6.1: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{158}Dy συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Davidson. Στις στήλες th₁ και th₂ παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma_{(K=4)}$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων α, β, c που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma_{(K=0,4)}$ και $\gamma\gamma_{(K=0)}$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>	L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.206	3.21966	3.22291	2	9.567	10.2796	10.7751
6	6.447	6.45156	6.46502	3	10.56	11.0489	11.5408
8	10.553	10.486	10.5171	4	11.765	12.0564	12.5442
10	15.367	15.1557	15.2095	5	13.292	13.2884	13.7719
12	20.713	20.3416	20.4195	6	15.026	14.7303	15.2095
14	26.409	25.963	26.0626	7	16.942	16.3671	16.8424
16	32.253	31.9661	32.0818	8	19.135	18.1843	18.6561
18	38.228	38.3154	38.4389		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
20	44.554	44.9873	45.1080		($K=4$)	($K=4$)	($K=4$)
22	51.409	51.9663	52.0718	4	19.159	18.6749	19.5437
24	58.837	59.2423	59.3187	5	20.44	19.7761	20.6367
26	66.849	66.809	66.8412	6	21.772	21.074	21.9254
28	75.355	74.6626	74.6343	7	25.559	22.5582	23.3998
	β_1	β_1	β_1		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
0	10.014	9.55295	9.80827		($K=0$)	($K=0$)	($K=0$)
2	10.975	10.5824	10.8354	0	12.829	18.2291	19.1014
4	12.94	12.8671	13.1182	2	13.769	18.8966	19.7638
6	15.642	16.193	16.4471				
8	19.135	20.3434	20.6066				



Σχήμα 6.1: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{158}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₁) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α , β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.023, 0.26 και 3.8 αντίστοιχως.

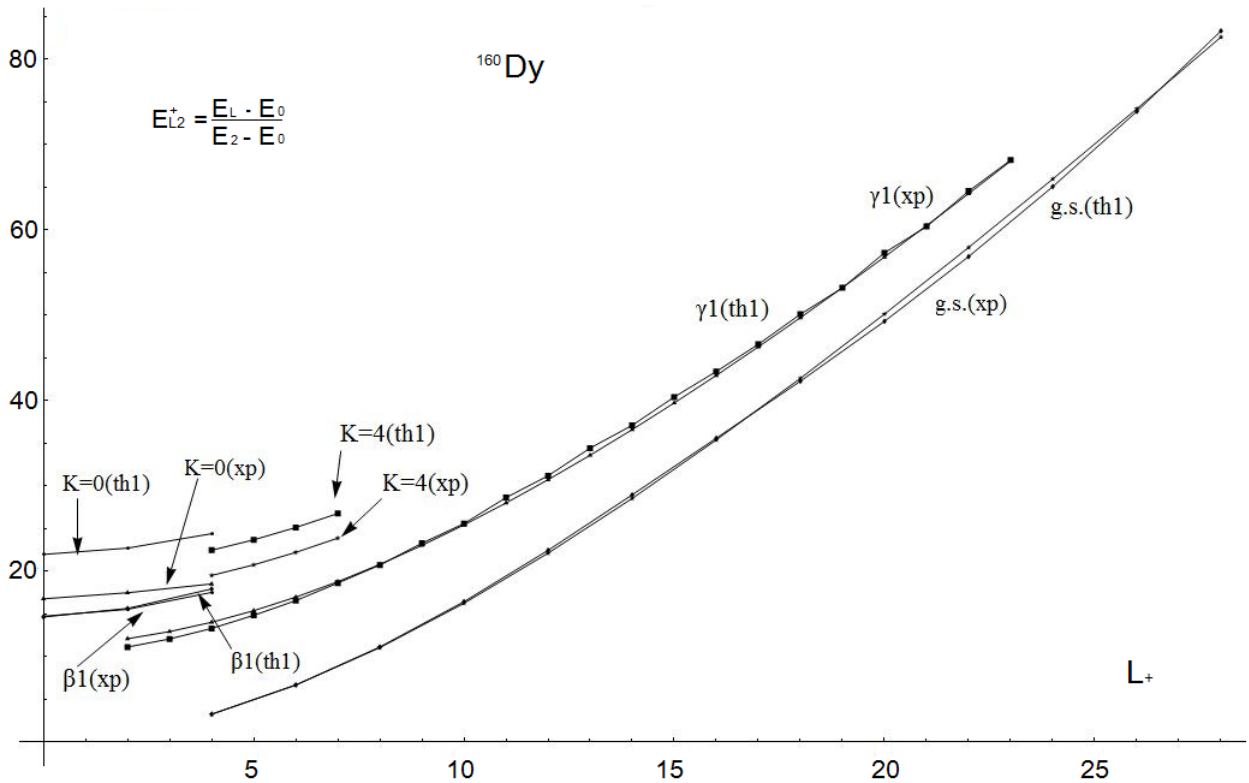


Σχήμα 6.2: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{158}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₂) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α , β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.021, 0.00 και 4.0 αντιστοίχως.

58ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

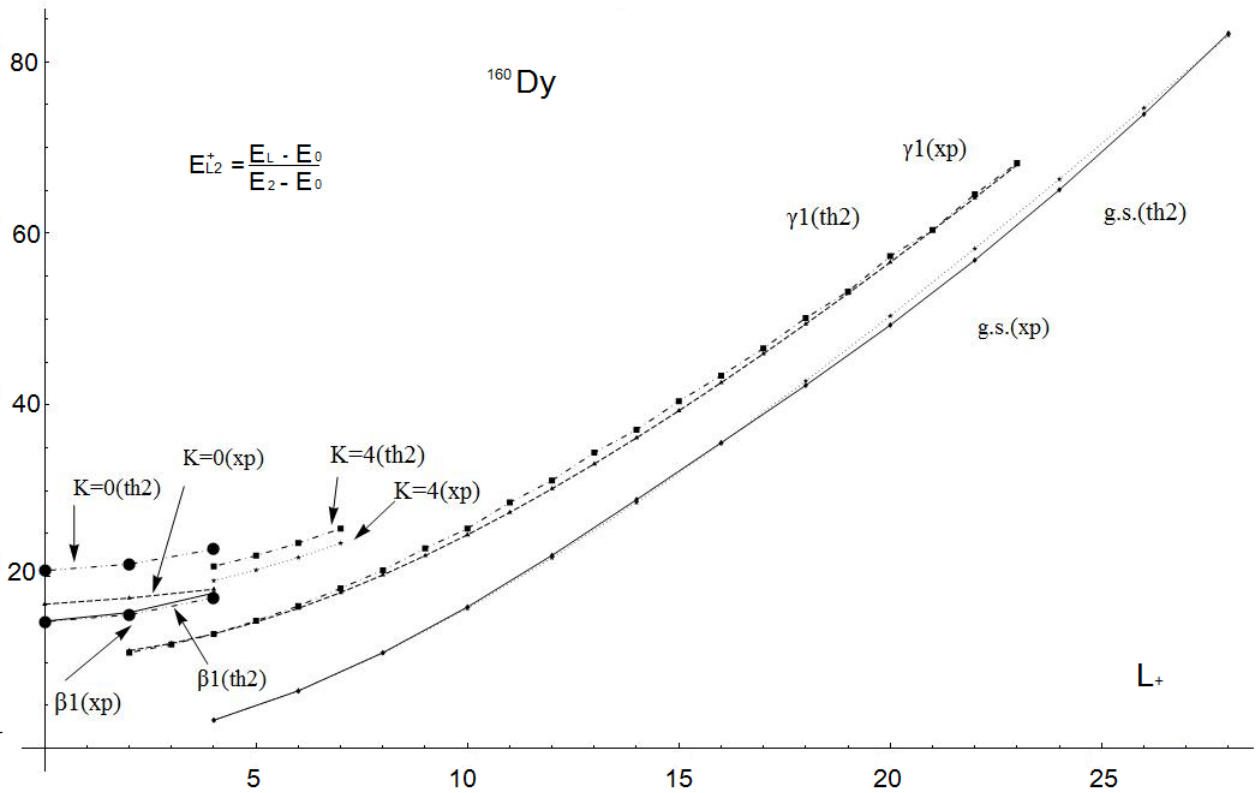
Πίνακας 6.2: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{160}Dy συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Davidson. Ομοίως, στις στήλες th_1 και th_2 παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma_{(K=4)}$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων α, β, c που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma_{(K=0,4)}$ και $\gamma\gamma_{(K=0)}$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th_1 <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th_2 <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>	L^+	exp	th_1 <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th_2 <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.27	3.2709	3.27211	2	11.133	12.1114	11.3697
6	6.695	6.68188	6.68776	3	12.088	12.9452	12.2146
8	11.14	11.0698	11.0859	4	13.318	14.0425	13.3265
10	16.454	16.27	16.3034	5	14.848	15.3921	14.6938
12	22.474	22.1355	22.1936	6	16.575	16.981	16.3034
14	28.965	28.5439	28.6341	7	18.635	18.7954	18.141
16	35.601	35.3974	35.5265	8	20.743	20.8205	20.1917
18	42.286	42.6196	42.7938	9	23.297	23.0417	22.4406
20	49.3	50.1514	50.3762	10	25.598	25.4446	24.8731
22	56.873	57.9469	58.2271	11	28.643	28.0154	27.4751
24	65.073	65.9709	66.3107	12	31.202	30.7408	30.2333
26	73.891	74.1956	74.5988	13	34.441	33.6088	33.1351
28	83.313	82.5994	83.0694	14	37.107	36.6078	36.1692
	β_1	β_1	β_1	15	40.426	39.7275	39.3249
0	14.748	14.6562	14.8006	16	43.416	42.9584	42.5928
2	15.552	15.663	15.8074	17	46.601	46.292	45.9639
4	17.541	17.9495	18.0951	18	50.125	49.7203	49.4306
				19	53.217	53.2365	52.9858
				20	57.327	56.8341	56.623
				21	60.393	60.5076	60.3365
				22	64.553	64.2519	64.1213
				23	68.175	68.0623	67.9726
					$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					<i>K=4</i>	<i>K=4</i>	<i>K=4</i>
				4	19.523	22.4795	21.1985
				5	20.766	23.697	22.4406
				6	22.229	25.1359	23.9081
				7	23.898	26.7858	25.5901
					$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					<i>K=0</i>	<i>K=0</i>	<i>K=0</i>
				0	16.785	21.9877	20.6966
				2	17.496	22.7244	21.4484
				4	18.526	24.4194	23.1774



Σχήμα 6.3: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{160}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₁) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α , β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.005, 1.92 και 4.3 αντιστοίχως.

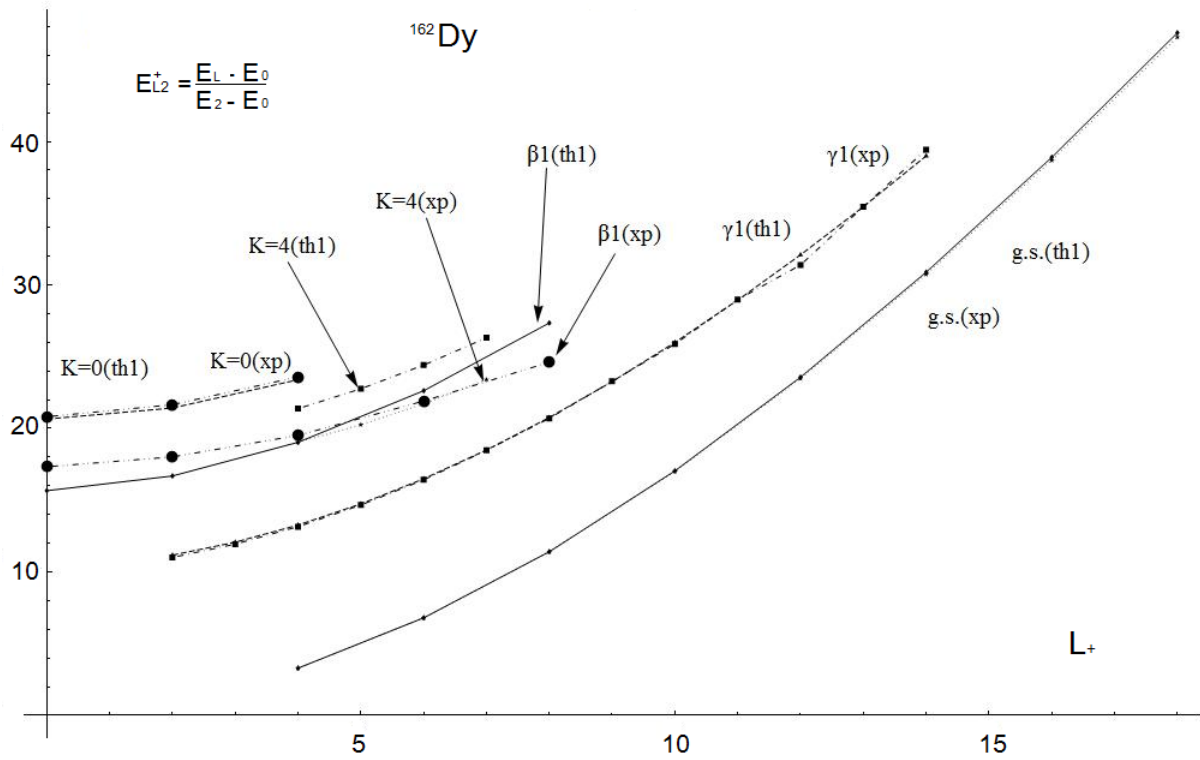
60 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ



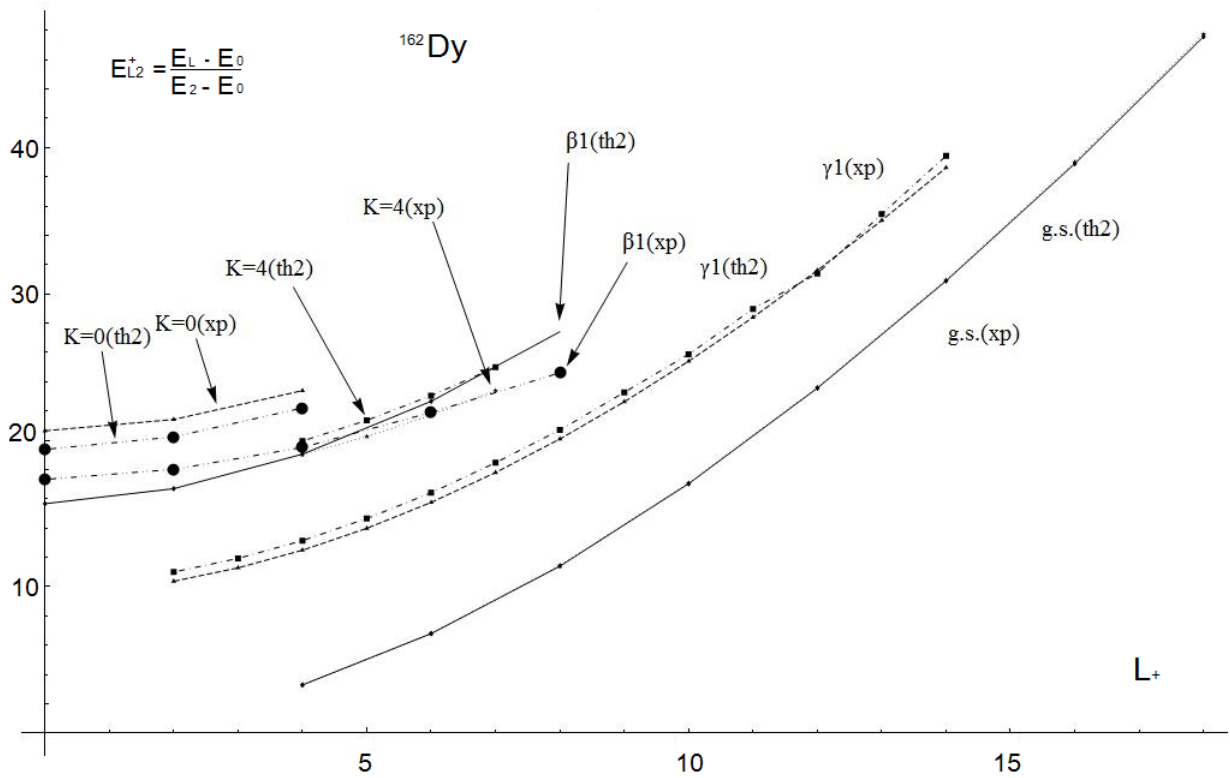
Σχήμα 6.4: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{160}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₂) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α, β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.005, 1.97 και 4.0 αντίστοιχως.

Πίνακας 6.3: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{162}Dy συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Davidson. Ομοίως, στις στήλες th_1 και th_2 παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma_{(K=4)}$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων α, β, c που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma_{(K=0,4)}$ και $\gamma\gamma_{(K=0)}$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th_1 <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th_2 <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>	L^+	exp	th_1 <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th_2 <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.294	3.295	3.29707	2	11.011	11.172	10.3785
6	6.8	6.80237	6.81269	3	11.938	12.0747	11.2919
8	11.412	11.4134	11.4435	4	13.154	13.2679	12.4997
10	17.044	17.0119	17.0785	5	14.664	14.7435	13.9939
12	23.572	23.4873	23.6118	6	16.42	16.4919	15.765
14	30.895	30.7426	30.9498	7	18.477	18.5027	17.803
16	38.904	38.6963	39.0141	8	20.709	20.7648	20.0969
18	47.583	47.2824	47.7409	9	23.284	23.267	22.6358
	β_1	β_1	β_1	10	25.879	25.998	25.4086
0	17.332	15.6626	15.6754	11	28.981	28.9468	28.4046
2	18.02	16.6874	16.7023	12	31.396	32.1028	31.6135
4	19.518	19.0393	19.061	13	35.453	35.456	35.0256
6	21.913	22.6329	22.6705	14	39.437	38.9972	38.6317
8	24.619	27.3566	27.4241		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					<i>K=4</i>	<i>K=4</i>	<i>K=4</i>
				4	19.039	21.3805	19.9546
				5	20.263	22.77	21.3717
				6	21.719	24.4201	23.0548
				7	23.407	26.3224	24.9957
					$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					<i>K=0</i>	<i>K=0</i>	<i>K=0</i>
				0	20.656	20.8209	19.3839
				2	21.427	21.6595	20.2391
				4	23.399	23.5974	22.2155



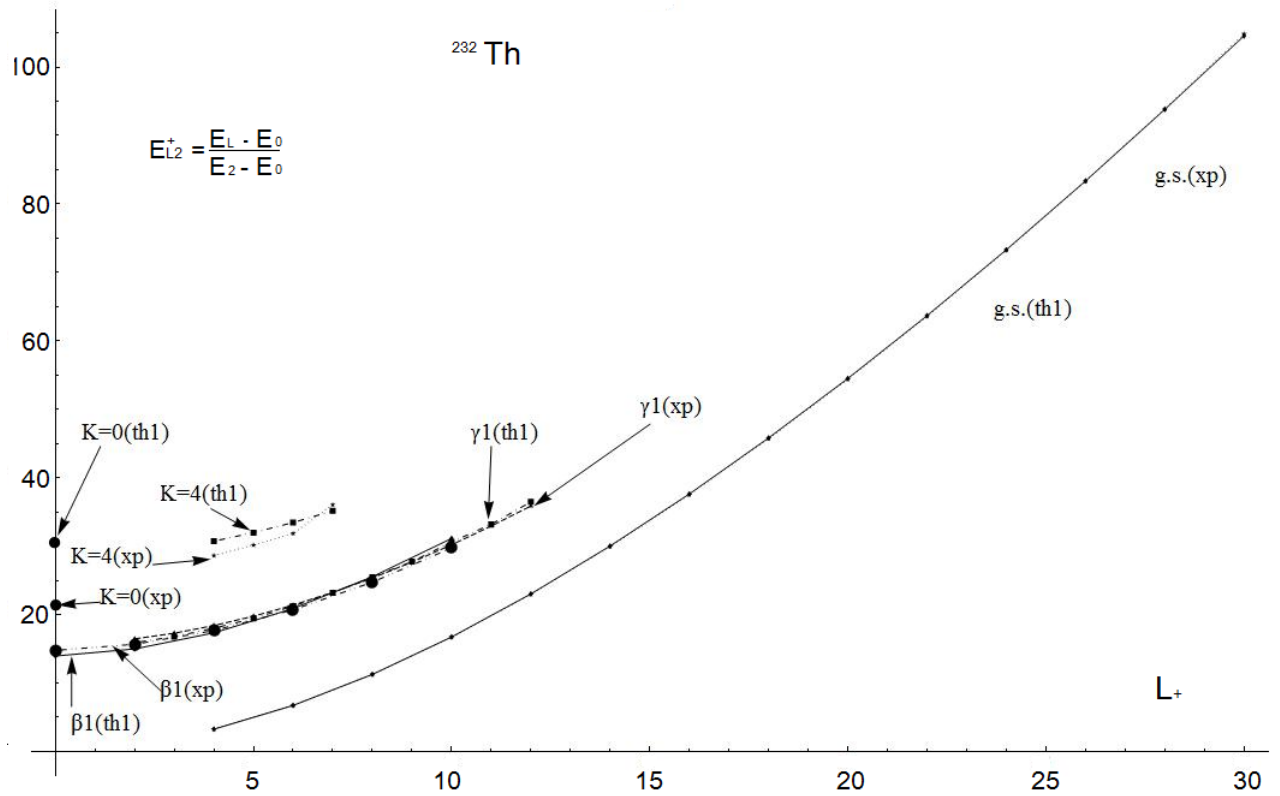
Σχήμα 6.5: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{162}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₁) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α, β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.020, 2.23 και 3.8 αντίστοιχως.



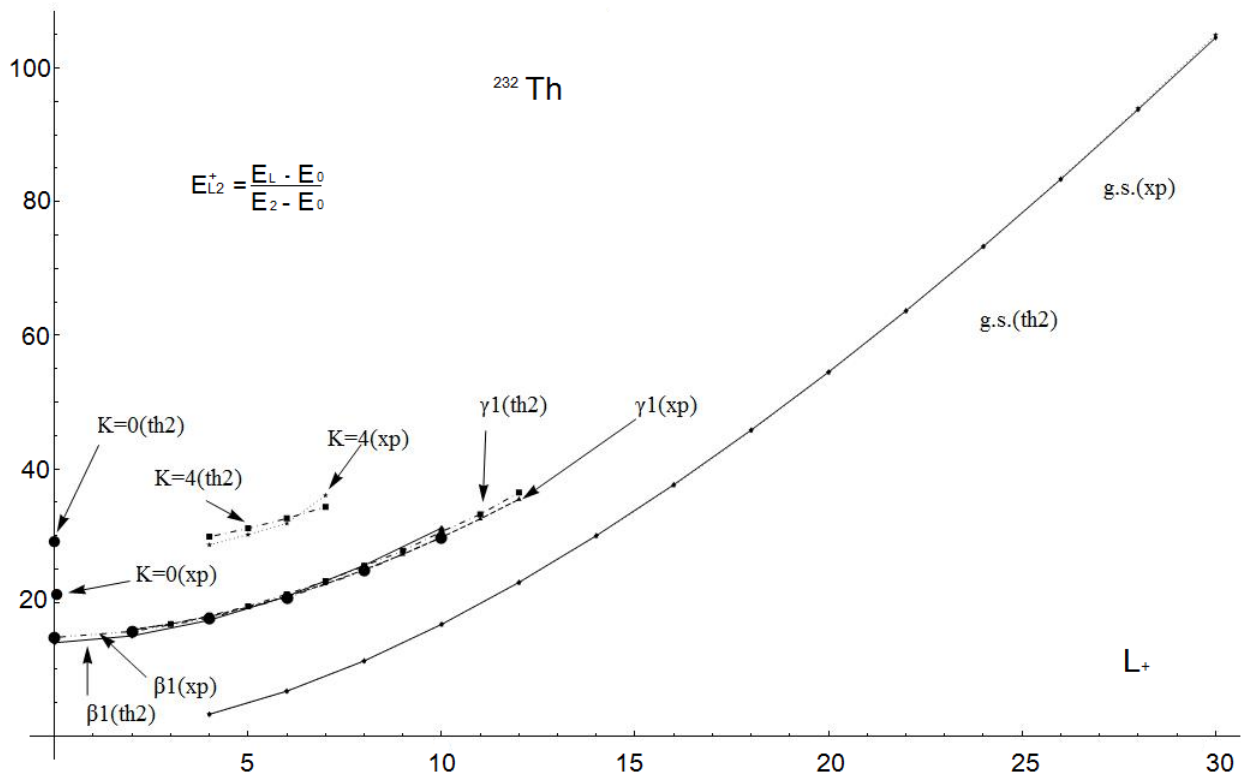
Σχήμα 6.6: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{162}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th2) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α , β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.022, 2.27 και 3.5 αντίστοιχως.

Πίνακας 6.4: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{232}Th συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Davidson. Ομοίως, στις στήλες th_1 και th_2 παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma_{(K=4)}$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων α, β, c που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma_{(K=0,4)}$ και $\gamma\gamma_{(K=0)}$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th_1 <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th_2 <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>	L^+	exp	th_1 <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th_2 <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.284	3.328497	3.28518	2	15.907	16.4722	15.9722
6	6.749	6.75306	6.75408	3	16.804	17.3095	16.8138
8	11.28	11.2762	11.279	4	18.03	18.4162	17.9262
10	16.751	16.7241	16.73	5	19.454	19.7847	19.3015
12	23.033	22.9796	22.99	6	21.266	21.4016	20.9308
14	30.035	29.9452	29.9616	7	23.213	23.2708	22.8043
16	37.647	37.543	37.5668	8	25.496	25.3685	24.9115
18	45.836	45.713	45.7456	9	27.75	27.6888	27.242
20	54.518	54.4094	54.452	10	30.624	30.2215	29.7853
22	63.688	63.598	63.6518	11	33.219	32.9565	32.5313
24	73.317	73.2531	73.3193	12	36.484	35.8841	35.4702
26	83.376	83.356	83.4355		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
28	93.82	93.8927	93.9866		$K=4$	$K=4$	$K=4$
30	104.56	104.853	104.963	4	28.641	30.7477	29.8609
	β_1	β_1	β_1	5	30.181	31.9927	31.1148
0	14.794	13.972	13.9963	6	31.87	33.4729	32.6054
2	15.68	14.9992	15.0236	7	36.055	35.1817	34.3259
4	17.683	17.3463	17.3708		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
6	20.724	20.908	20.9334		$K=0$	$K=0$	$K=0$
8	24.754	25.5524	25.5797	0	21.85	30.2466	29.3562
10	29.762	31.145	31.1754				



Σχήμα 6.7: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{232}Th και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₁) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α , β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.022, 1.80 και 5.9 αντίστοιχως.

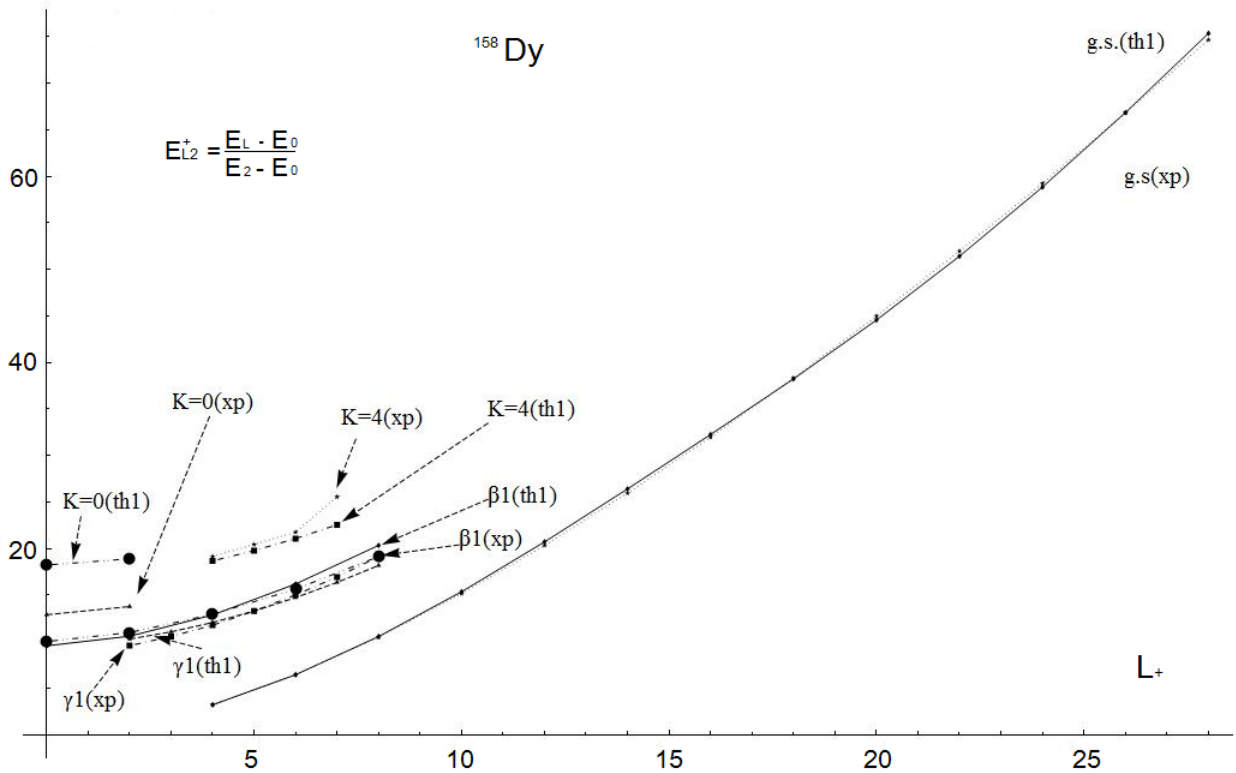


Σχήμα 6.8: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{232}Th και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₂) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Davidson. Στις παραμέτρους α , β και c , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 0.022, 1.83 και 5.7 αντιστοίχως.

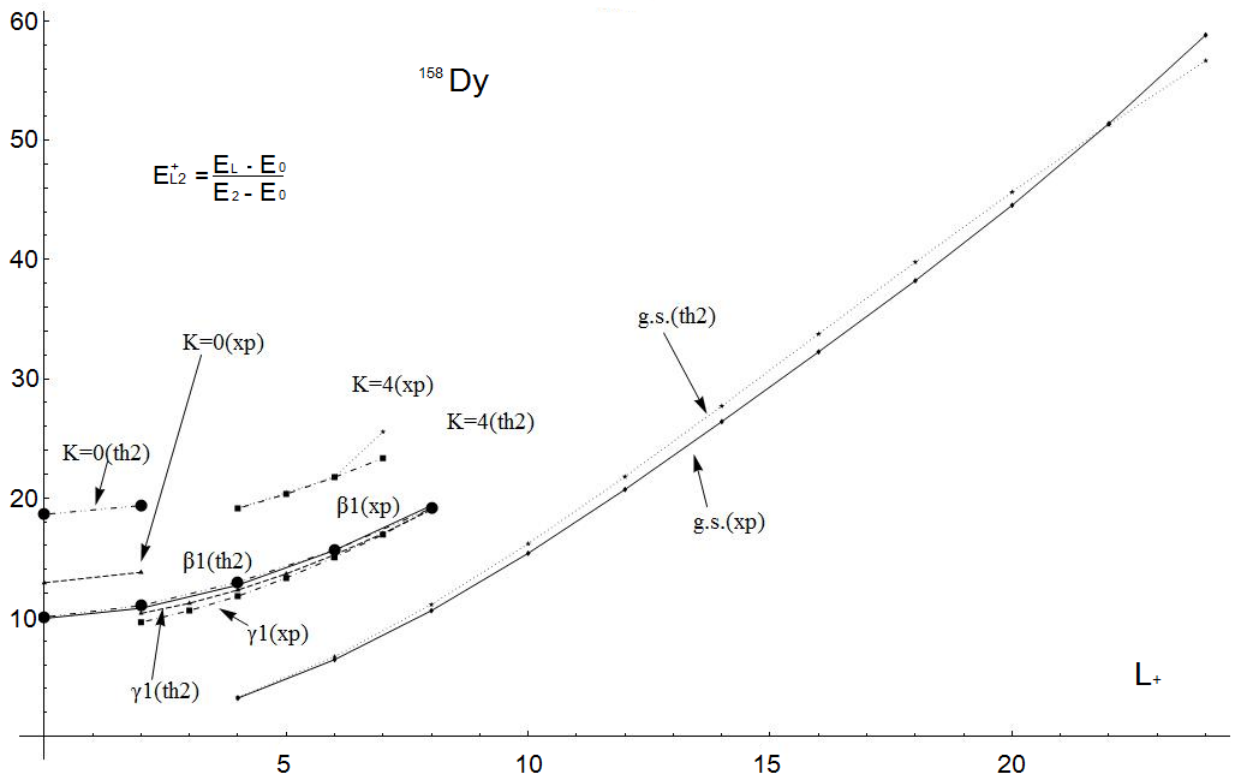
6.2 Δυναμικό Kratzer

Πίνακας 6.5: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{158}Dy συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις στήλες th₁ και th₂ παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1, γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, $\beta_1, \gamma_1, \gamma\gamma(K=4)$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων \tilde{B}, c, α που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma(K=0,4)$ και $\gamma\gamma(K=0)$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>	L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.206	3.27407	3.2742	2	9.567	10.0657	10.3239
6	6.447	6.6887	6.6894	3	10.56	10.9162	11.1711
8	10.553	11.0567	11.0588	4	11.765	12.0315	12.282
10	15.367	16.1613	16.1658	5	13.292	13.3963	13.6417
12	20.713	21.7793	21.7877	6	15.026	14.9926	15.2323
14	26.409	27.7012	27.7148	7	16.942	16.8	17.0336
16	32.253	33.7438	33.7641	8	19.135	18.7973	19.0238
18	38.228	39.7572	39.7855		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
20	44.554	45.6262	45.6636		($K=4$)	($K=4$)	($K=4$)
22	51.409	51.2676	51.315	4	19.159	18.6745	19.1215
24	58.837	56.6264	56.6843	5	20.44	19.8897	20.3279
	β_1	β_1	β_1	6	21.772	21.3131	21.7412
0	10.014	9.8999	9.90151	7	25.559	22.9275	23.3445
2	10.975	10.7526	10.7544		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
4	12.94	12.694	12.6964		($K=0$)	($K=0$)	($K=0$)
6	15.642	15.6155	15.619	0	12.829	18.1809	18.6314
8	19.135	19.364	19.3693	2	13.769	18.9197	19.3649



Σχήμα 6.9: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{158}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₁) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B}, c, a αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 113, 3.5, 0.0017 αντιστοίχως.

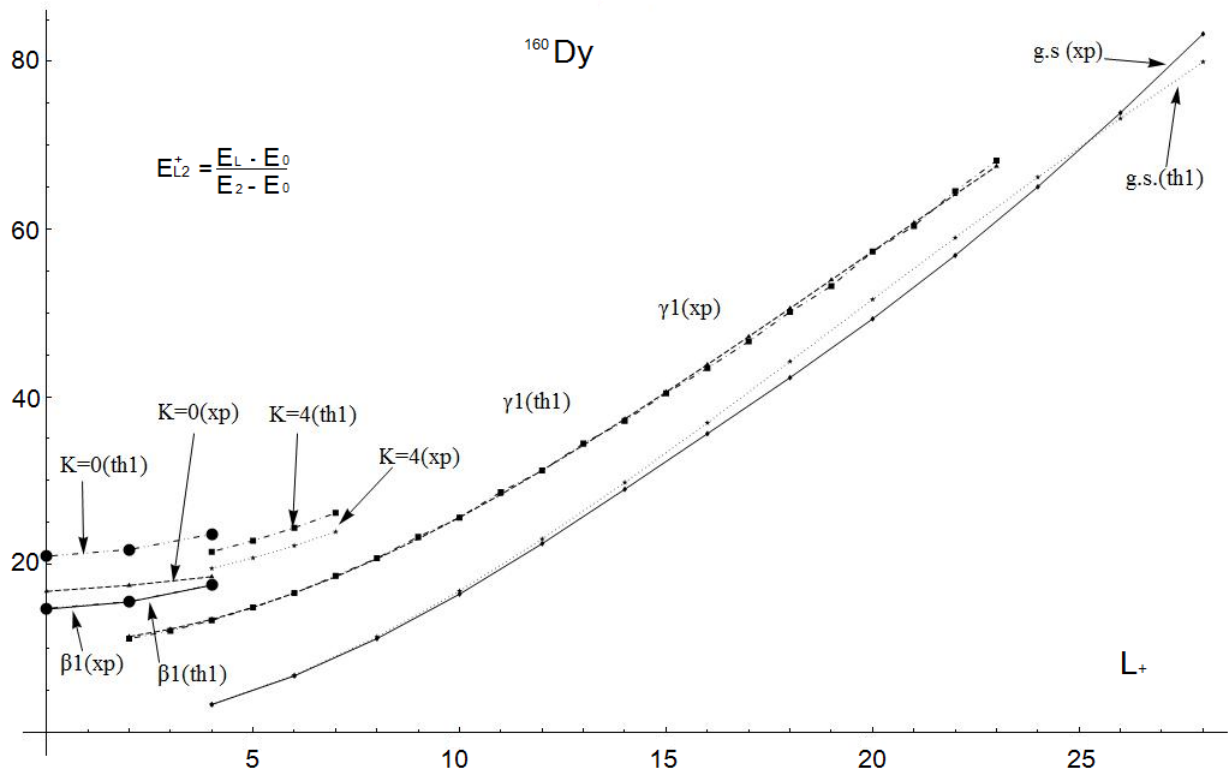


Σχήμα 6.10: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{158}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₂) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B} , c , α , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 113, 3.5, 0.0017 αντιστοίχως.

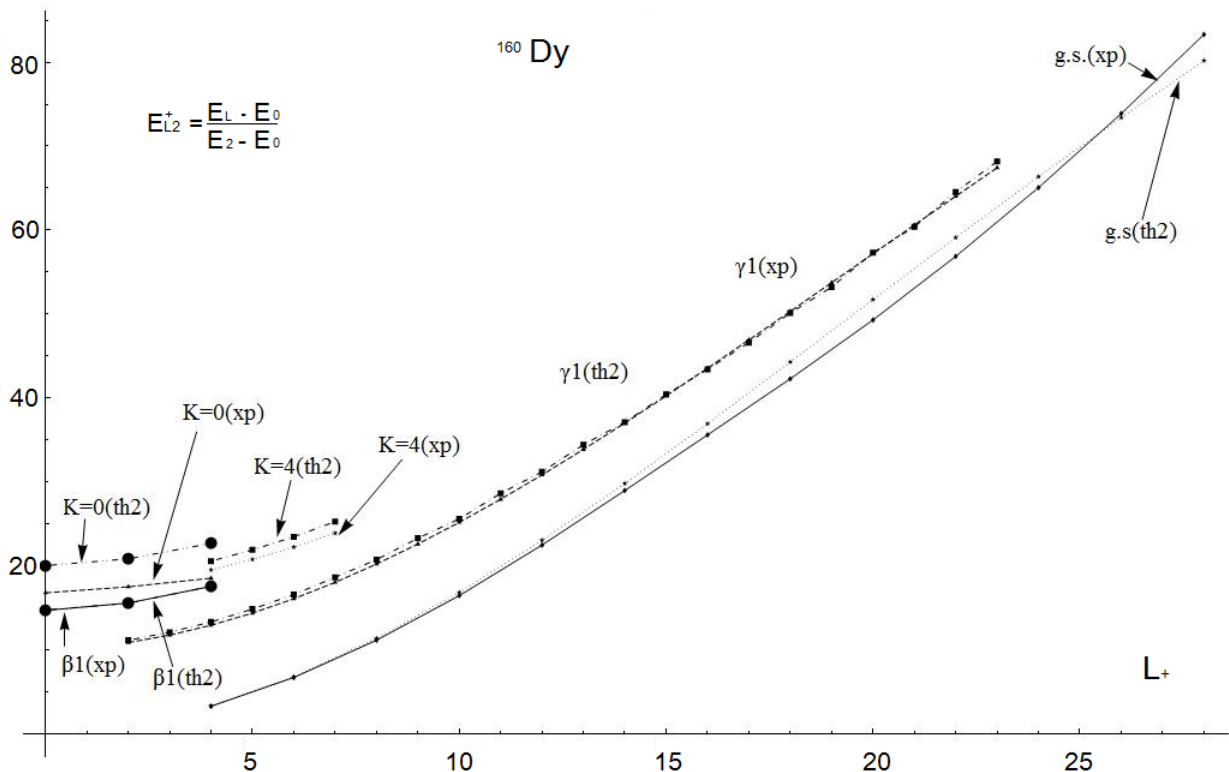
70ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

Πίνακας 6.6: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{160}Dy συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Kratzer. Ομοίως, στις στήλες th₁ και th₂ παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma_{(K=4)}$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων \tilde{B}, c, α που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma_{(K=0,4)}$ και $\gamma\gamma_{(K=0)}$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>	L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.27	3.29366	3.29394	2	11.133	11.3849	10.8531
6	6.695	6.7897	6.79118	3	12.088	12.2711	11.7452
8	11.14	11.3552	11.3597	4	13.318	13.4394	12.9214
10	16.454	16.8279	16.8379	5	14.848	14.8788	14.3705
12	22.474	23.0289	23.048	6	16.575	16.5761	16.0794
14	28.965	29.7763	29.8085	7	18.635	18.5159	18.0327
16	35.601	36.895	36.9448	8	20.743	20.6816	20.2136
18	42.286	44.2254	44.2974	9	23.297	23.055	22.6039
20	49.3	51.6285	51.7269	10	25.598	25.6169	25.1834
22	56.873	58.9877	59.1164	11	28.643	28.3477	27.9352
24	65.073	66.2095	66.3719	12	31.202	31.2276	30.8365
26	73.891	73.2221	73.4211	13	34.441	34.2365	33.8683
28	83.313	79.9732	80.2108	14	37.107	37.3549	37.0109
	β_1	β_1	β_1	15	40.426	40.5639	40.2451
0	14.748	14.651	14.6897	16	43.416	43.8451	43.5525
2	15.552	15.5229	15.562	17	46.601	47.1812	46.9157
4	17.541	17.524	17.5644	18	50.125	50.5558	50.3184
				19	53.217	53.9539	53.7451
				20	57.327	57.3614	57.1819
				21	60.393	60.7657	60.6159
				22	64.553	64.1552	64.0355
				23	68.175	67.5196	67.4303
					$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					<i>K=4</i>	<i>K=4</i>	<i>K=4</i>
				4	19.523	21.5065	20.563
				5	20.766	22.8206	21.8937
				6	22.229	24.3712	23.464
				7	23.898	26.1452	25.2605
					$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					<i>K=0</i>	<i>K=0</i>	<i>K=0</i>
				0	16.785	20.9752	20.0249
				2	17.496	21.7709	20.8307
				4	18.526	23.5994	22.6824



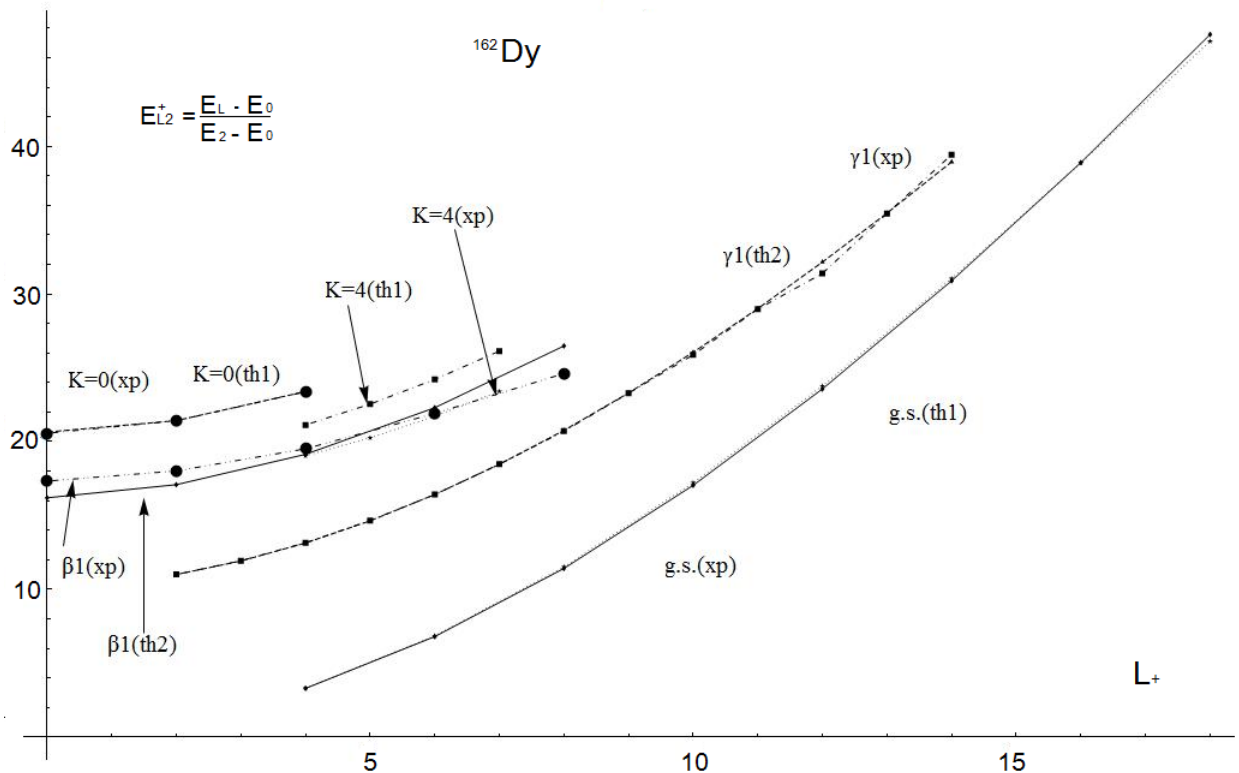
Σχήμα 6.11: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{160}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th_1) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B}, c, a αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 176, 3.9, 0.0006 αντίστοιχως.



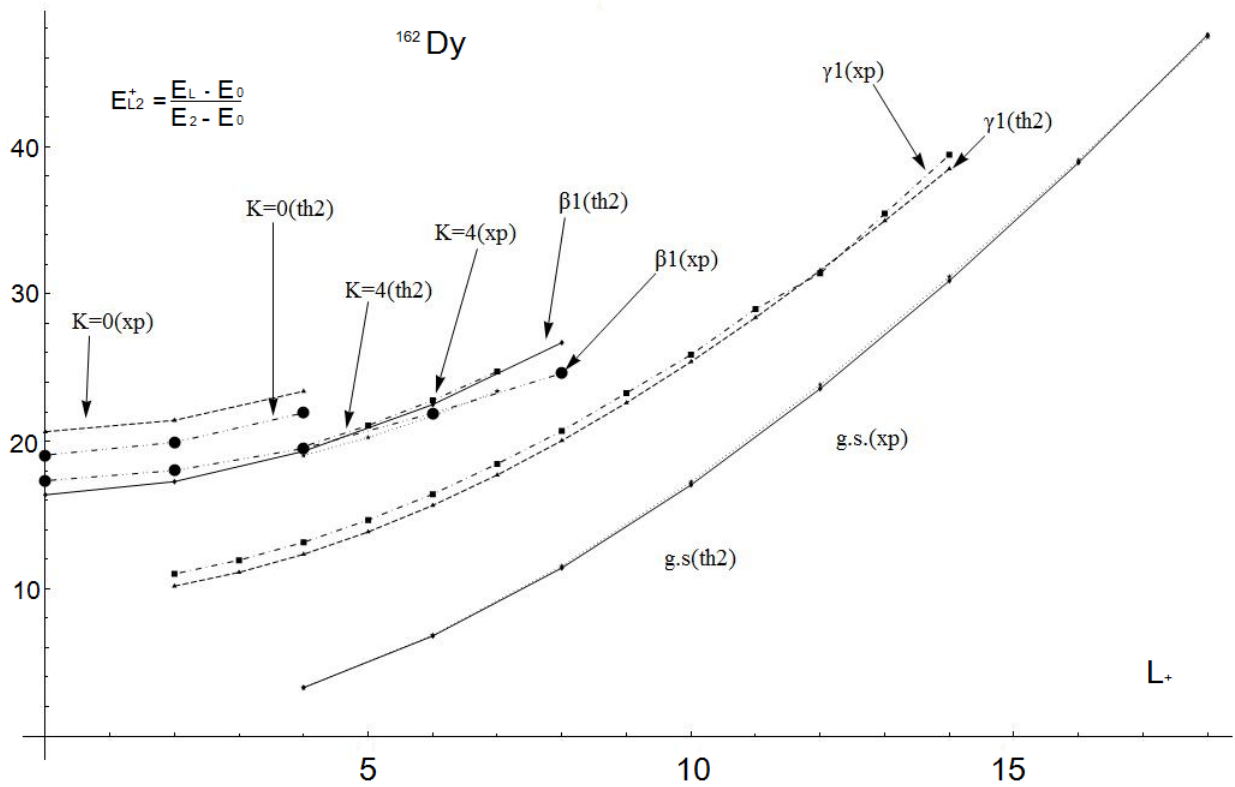
Σχήμα 6.12: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{160}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₂) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B}, c, α , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 178, 3.7, 0.0006 αντίστοιχως.

Πίνακας 6.7: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{162}Dy συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Kratzer. Ομοίως, στις στήλες th_1 και th_2 παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma_{(K=4)}$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων \tilde{B}, c, α που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma_{(K=0,4)}$ και $\gamma\gamma_{(K=0)}$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th_1 <small>$g.s./\beta_1/\gamma_1$</small>	th_2 <small>$g.s./\beta_1/\gamma_1/K=4$</small>	L^+	exp	th_1 <small>$g.s./\beta_1/\gamma_1$</small>	th_2 <small>$g.s./\beta_1/\gamma_1/K=4$</small>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.294	3.30444	3.30549	2	11.011	11.0032	10.183
6	6.8	6.84608	6.85163	3	11.938	11.9226	11.1109
8	11.412	11.525	11.5418	4	13.154	13.1382	12.3383
10	17.044	17.2153	17.2541	5	14.664	14.6415	13.8566
12	23.572	23.7734	23.8486	6	16.42	16.4222	15.6557
14	30.895	31.0459	31.1755	7	18.477	18.4682	17.7239
16	38.904	38.8777	39.0824	8	20.709	20.7659	20.0478
18	47.583	47.1182	47.4206	9	23.284	23.3005	22.613
	β_1	β_1	β_1	10	25.879	26.0563	25.4030
0	17.332	16.2	16.3746	11	28.981	29.0166	28.404
2	18.02	17.0912	17.2679	12	31.396	32.1642	31.5965
4	19.518	19.1457	19.3282	13	35.453	35.4816	34.9638
6	21.913	22.3057	22.4994	14	39.437	38.9509	38.4885
8	24.619	26.4846	26.6978		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					$K=4$	$K=4$	$K=4$
				4	19.039	21.1352	19.6442
				5	20.263	22.5456	21.0801
				6	21.719	24.2169	22.7822
				7	23.407	26.138	24.7397
					$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
					$K=0$	$K=0$	$K=0$
				0	20.656	20.5665	19.0653
				2	21.427	21.4186	19.9326
				4	23.399	23.3841	21.934



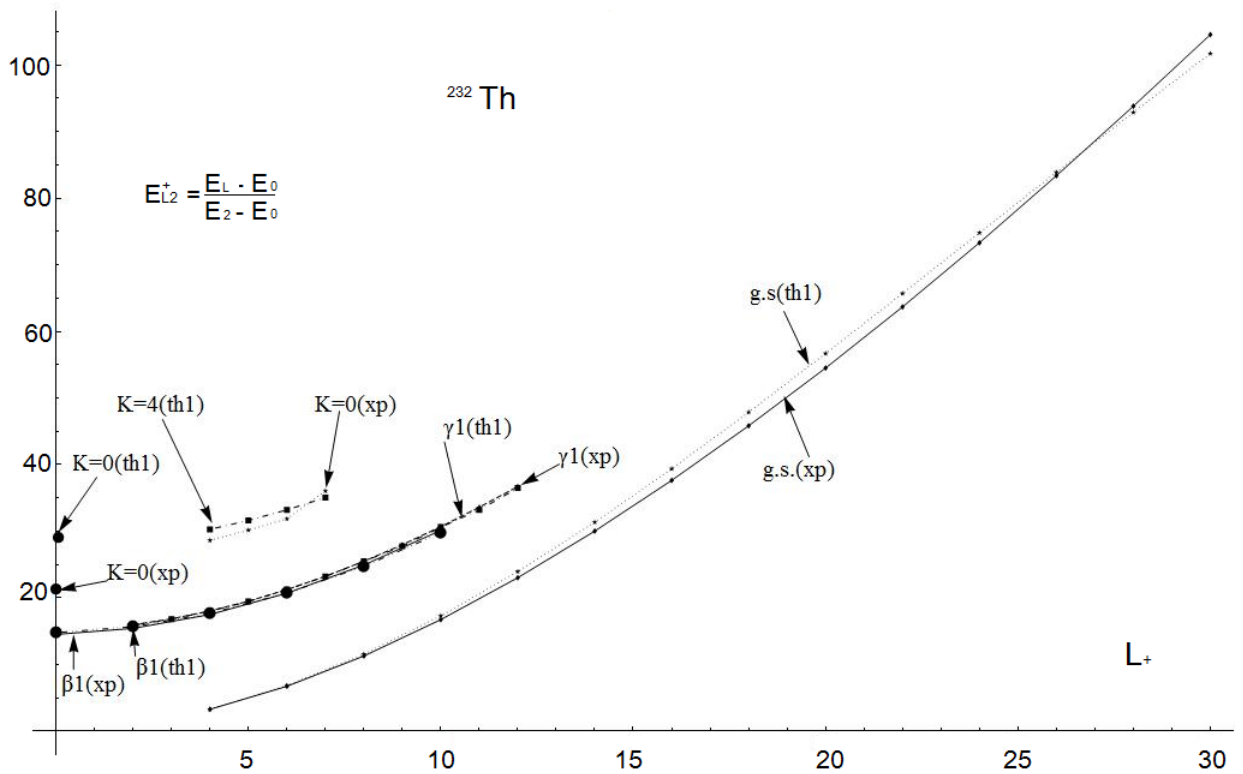
Σχήμα 6.13: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{162}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th_1) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B}, c, α , αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 249, 3.7, 0.0006 αντιστοίχως.



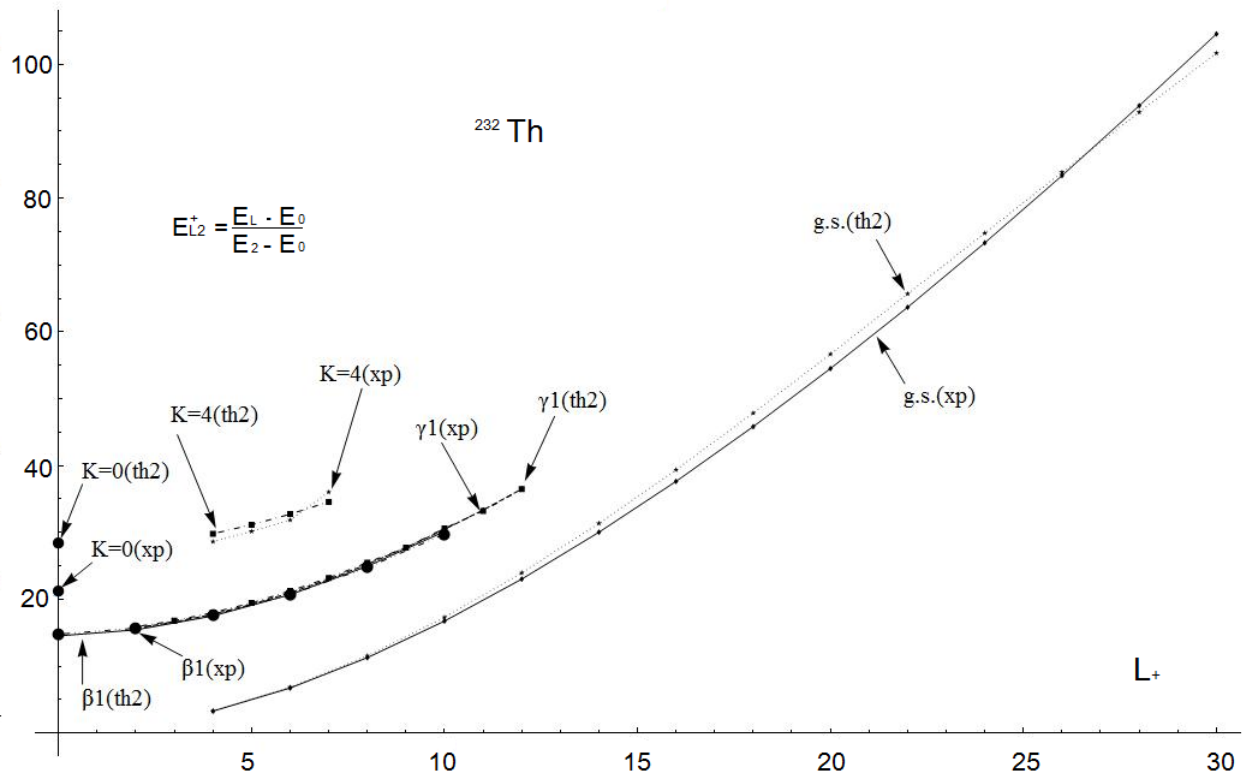
Σχήμα 6.14: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{162}Dy και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₂) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B} , c , α αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 260, 3.4, 0.0006 αντιστοίχως.

Πίνακας 6.8: Πειραματικοί λόγοι $(E_L^+ - E_0^+)/ (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{232}Th συγκρινόμενοι με του αντίστοιχους θεωρητικούς υπολογισμούς του DDM για δυναμικό Kratzer. Ομοίως, στις στήλες th₁ και th₂ παρουσιάζονται τα προσαρμοσμένα θεωρητικά δεδομένα στις ζώνες της θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 και θεμελιώδους στάθμης, β_1 , γ_1 , $\gamma\gamma_{(K=4)}$ αντίστοιχα. Για τις τιμές των παραμέτρων \tilde{B}, c, α που έχουν βρεθεί κατά την προσαρμογή, έχουν επιπροσθέτως υπολογιστεί οι ζώνες $\gamma\gamma_{(K=0,4)}$ και $\gamma\gamma_{(K=0)}$ αντίστοιχα.

L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>	L^+	exp	th ₁ <i>g.s./β_1/γ_1</i>	th ₂ <i>g.s./$\beta_1/\gamma_1/K=4$</i>
	g.s.	g.s.	g.s.		γ_1	γ_1	γ_1
4	3.284	3.30706	3.30703	2	15.907	15.9723	15.702
6	6.749	6.85984	6.8597	3	16.804	16.8666	16.598
8	11.28	11.5668	11.5663	4	18.03	18.0502	17.7837
10	16.751	17.3117	17.3107	5	19.454	19.5155	19.2517
12	23.033	23.9606	23.9587	6	21.266	21.2535	20.9927
14	30.035	31.3692	31.3659	7	23.213	23.2534	22.9962
16	37.647	39.3893	39.384	8	25.496	25.5035	25.2501
18	45.836	47.8753	47.8674	9	27.75	27.9905	27.7413
20	54.518	56.689	56.6778	10	30.624	30.7004	30.4556
22	63.688	65.7033	65.6884	11	33.219	33.6181	33.378
24	73.317	74.8051	74.7856	12	36.484	36.7283	36.493
26	83.376	83.8958	83.8713		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
28	93.82	92.8924	92.8623		$K=4$	$K=4$	$K=4$
30	104.56	101.726	101.69	4	28.641	30.2973	29.8092
	β_1	β_1	β_1	5	30.181	31.6358	31.1523
0	14.794	14.5343	14.5347	6	31.87	33.2241	32.746
2	15.68	15.434	15.4344	7	36.055	35.0529	34.581
4	17.683	17.5105	17.5107		$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$	$\gamma\gamma$
6	20.724	20.7104	20.7103		$K=0$	$K=0$	$K=0$
8	24.754	24.9537	24.9531	0	21.85	29.7582	29.2682
10	29.762	30.139	30.1375				



Σχήμα 6.15: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{232}Th και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₁) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , και γ_1 του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B}, c, α αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 270, 5.5, 0.0009 αντίστοιχως.



Σχήμα 6.16: Αναπαράσταση πειραματικών λόγων $(E_L^+ - E_0^+) / (E_2^+ - E_0^+)$ του φάσματος του ^{232}Th και των αντίστοιχων προσαρμοσμένων θεωρητικών (th₂) στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ για $K = 4$ του DDM για δυναμικό Kratzer. Στις παραμέτρους \tilde{B}, c, a αποδόθηκαν οι αριθμητικές τιμές 270, 5.4, 0.0009 αντίστοιχως.

6.3 Συμπέρασμα

Τα αριθμητικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου υποστηρίζουν ότι οι $K^\pi = 4^+$ ζώνες στους πυρήνες $^{158-162}\text{Dy}$ και ^{232}Th αντιστοιχούν σε διέγερση δύο φωνονίων στον βαθμό ελευθερίας γ , σε συμφωνία με προηγούμενες μελέτες των ^{162}Dy [83] και ^{232}Th [84].

Η μελέτη μπορεί να επεκταθεί και σε άλλους πυρήνες. Με βάση την βιβλιογραφία, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ακόλουθοι πυρήνες, για τους οποίους έχει προταθεί ότι οι ζώνες $K^\pi = 4^+$ αντιστοιχούν σε διπλή διέγερση του βαθμού ελευθερίας

γ

^{106}Mo [86],

$^{154-158}\text{Gd}$ [77, 80],

^{164}Dy [77, 85],

$^{162-170}\text{Er}$ [77, 80, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95],

$^{168-172}\text{Yb}$ [77, 80],

$^{176,178}\text{Hf}$ [77, 80],

$^{188,190,192}\text{Os}$ [78, 79, 80, 81].

Αντίθετα, στον πυρήνα ^{152}Sm οι ζώνες $K^\pi = 4^+$ έχει προταθεί [82] ότι οφείλονται στον δεκαεξαπολικό βαθμό ελευθερίας.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε ο τετραπολικός βαθμός ελευθερίας σε ατομικούς πυρήνες, στην περιοχή των σπανίων γαιών και στους ακτινίδες, δίνοντας έμφαση σε ζώνες χτισμένες πάνω σε διπλή διέγερση του βαθμού ελευθερίας γ . Η βασική παραδοχή στα μέχρις στιγμής συλλογικά πρότυπα και στην Χαμιλτωνιανή του Bohr, είναι η σταθερότητα της μάζας. Στο παρόν πρότυπο, ως βασική παραδοχή θεωρείται η άρση της σταθερότητας αυτής, και κατ' επέκταση τόσο η εξάρτησή της μάζας από την παραμόρφωση, όσο και των αντίστοιχων ροπών αδρανείας. Στα πλαίσια αναζήτησης της κατάλληλης Χαμιλτωνιανής, έχουν ληφθεί υπόψιν οι πειραματικές ροπές αδρανείας για μόνιμα παραμορφωμένους πυρήνες, αφού παρουσιάζουν ηπιότερη εξάρτηση σε σχέση με την συλλογική παράμετρο παραμόρφωσης β , σε αντίθεση με τους καθαρά δονητικούς πυρήνες. Για την τροποποίηση της Χαμιλτωνιανής και την επίλυσή της έχουν χρησιμοποιηθεί μέθοδοι Υπερσυμμετρικής Κβαντομηχανικής, στα πλαίσια του τετραπολικού βαθμού ελευθερίας, και κατάλληλο ζεύγος υπερδυναμικού με ολοκληρωτικές σχέσεις ικανές για την ύπαρξη κλειστών λύσεων της.

Για την εκτίμηση των προβλεπτικών δυνατοτήτων του μοντέλου DDM, έγινε προσαρμογή των πειραματικών-θεωρητικών δεδομένων, αρχικά στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 και γ_1 στάθμης, και κατόπιν στις ζώνες της θεμελιώδους, β_1 , γ_1 και $\gamma\gamma$ στάθμης με $K = 4$. Κατά τις δύο διαφορετικές προσαρμογές, προκύπτει αρκετά μικρή απόκλιση στις ελεύθερες παραμέτρους, όσο και στις αντίστοιχες αποστάσεις μεταξύ θεωρητικών πειραματικών ζωνών για τους μόνιμα παραμορφωμένους πυρήνες των ισότοπων του Δυσπροσίου $^{158}_{66}\text{Dy}$, $^{160}_{66}\text{Dy}$ και $^{162}_{66}\text{Dy}$ και του Θορίου $^{232}_{90}\text{Th}$, κυρίως για τις θεμελιώδη ζώνη και γ_1 ζώνες.

Οι κύριες διαφορές προκύπτουν στις αποστάσεις των β_1 ζωνών των ισότοπων του Dy στο DDM-Davidson, γεγονός που αποδίδεται στο σχήμα του δυναμικού Davidson, αφού για μεγάλες τιμές της συλλογικής παραμέτρου παραμόρφωσης β αποκλίνει στο άπειρο. Ως αποτέλεσμα της απότομης αύξησης του δυναμικού, οι αντίστοιχες β_1 θεωρητικές ζώνες ωθούνται ψηλότερα από τις αντίστοιχες πειραματικές και σε μεγαλύτερες μεταξύ τους αποστάσεις. Η ασυμφωνία αυτή δεν παρατηρείται στο DDM-Kratzer, αφού εκεί το δυναμικό Kratzer είναι εξορισμού πεπερασμένο για μεγάλες τιμές του β .

Διαφορές επίσης παρατηρούνται στις αποστάσεις των $\gamma\gamma$ ζωνών με $K = 0, 4$, γεγονός που υποδεικνύει ότι η εξάρτηση ως προς τον γ βαθμό ελευθερίας μπορεί να χρειάζεται τροποποίηση, αφού στην αντιμετώπιση των συμμετρικά παραμορφωμένων πυρήνων έχει χρησιμοποιηθεί, για κάθε μοντέλο που μελετήθηκε, η αρμονική σχέση (4.22). Πάντως η συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα είναι γενικά ικανοποιητική, υποδεικνύοντας ότι οι ζώνες $K^\pi = 4^+$ στους πυρήνες αυτούς είναι χτισμένες πάνω σε διπλές διεγέρσεις του βαθμού ελευθερίας γ .

Παράρτημα Α

Ας δούμε πως προκύπτει ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων (2.4). Από την πραγματικότητα της ακτίνας

$$\begin{aligned}
 R(\theta, \phi, t) &= R^*(\theta, \phi, t) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right) &= R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right) \Leftrightarrow \\
 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών

$$Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) = (-1)^\mu Y_{\lambda-\mu}(\theta, \phi) \quad (A.2)$$

και εισάγοντάς την στην (A.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) (-1)^\mu Y_{\lambda-\mu}(\theta, \phi) = \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda-\mu}(t) (-1)^{-\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \\
 &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda-\mu}(t) (-1)^\mu Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (A.3)
 \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της γραμμικής ανεξαρτησίας των σφαιρικών αρμονικών, η (A.3) ισχύει αν και μόνο αν

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu} \quad (A.4)$$

Παράρτημα Β

Εισάγοντας την έκφραση (2.1) στην (2.5) έχουμε

$$R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha'_{\lambda\mu}(t) Y'_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha^*_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha'_{\lambda\mu}(t) Y'_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha^*_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (B.1)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για τις μετασχηματισμένες σφαιρικές αρμονικές

$$Y'_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} D_{\mu'\mu}^{(\lambda)} Y_{\lambda\mu'}(\theta, \phi) \quad (B.2)$$

στο αριστερό μέλος της (B.1), όπου $D_{\mu'\mu}^{(\lambda)}$ ο πίνακας μετασχηματισμού κατά γωνίες Euler $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ για σφαιρικές αρμονικές τάξης λ , έχουμε

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha'_{\lambda\mu}(t) Y'_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha'_{\lambda\mu}(t) \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} D_{\mu'\mu}^{(\lambda)} Y_{\lambda\mu'}(\theta, \phi) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} \left(\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha'_{\lambda\mu}(t) D_{\mu'\mu}^{(\lambda)} \right) Y_{\lambda\mu'}(\theta, \phi) \quad (B.3)$$

Εξισώνοντας την (B.3) με το δεξί μέλος της (B.1) έχουμε

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} \left(\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha'_{\lambda\mu}(t) D_{\mu'\mu}^{(\lambda)} \right) Y_{\lambda\mu'}(\theta, \phi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha^*_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (B.4)$$

όπου κάνοντας χρήση της γραμμικής ανεξαρτησίας των σφαιρικών αρμονικών, η (B.4) ισχύει αν και μόνο αν

$$\alpha^*_{\lambda\mu}(t) = \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} \alpha'_{\lambda\mu}(t) D_{\mu'\mu}^{(\lambda)} \quad (B.5)$$

Αντιστρέφοντας τώρα την (B.5), αφού ο $D_{\mu'\mu}^{(\lambda)}$ είναι μοναδιακός πίνακας, έχουμε

$$\alpha'_{\lambda\mu}(t) = \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} \alpha^*_{\lambda\mu'}(t) D_{\mu'\mu}^{*(\lambda)} \quad (B.6)$$

Παράρτημα Γ

Θεωρούμε το πιο γνωστό σύνολο γωνιών Euler($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) όπου ορίζονται ως εξής (θεωρούμε περιστροφές αντίθετης φοράς από αυτή των δεικτών του ωρολογιού)

- 1) Περιστρέφουμε το σύστημα κατά γωνία θ_1 γύρω από τον άξονα z , παράγοντας το σύστημα ξ, η, ζ .
- 2) Περιστρέφουμε το σύστημα κατά γωνία θ_2 γύρω από το νέο άξονα η , παράγοντας το σύστημα ξ', η', ζ'
- 3) Περιστρέφουμε το σύστημα κατά γωνία θ_3 γύρω από τον άξονα η' , παράγοντας το τελικό σύστημα x', y', z' .

Ο πίνακας περιστροφής γύρω από τον άξονα z κατά γωνία θ_1 είναι

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.1)$$

ο πίνακας περιστροφής γύρω από τον άξονα η κατά γωνία θ_2 είναι

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.2)$$

ενώ τέλος, ο πίνακας περιστροφής γύρω από τον άξονα η' κατά γωνία θ_3 είναι

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.3)$$

Ο πίνακας \mathbf{A} που μας μεταφέρει από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο σύστημα κυρίων αξόνων του πυρήνα

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\Gamma.4)$$

δίνεται από το διαδοχικό γινόμενο των πινάκων $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$, που έχει τη μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_3 \sin \theta_1 & \cos \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \cos \theta_1 & \cos \theta_3 \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \sin \theta_1 & -\sin \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_3 \cos \theta_1 & -\sin \theta_3 \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \cos \theta_1 & -\sin \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.5)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή μετασχηματισμού $\hat{\mathbf{R}}_1$ στον πίνακα \mathbf{A} , όπου ο $\hat{\mathbf{R}}_1$ έχει την μορφή

$$\hat{\mathbf{R}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.6)$$

θα πάρουμε τον μετασχηματισμό $\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{A}$, όπου όπως προαναφέρθηκε αντιστοιχεί σε περιστροφή του άξονα x' κατά γωνία π , με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ωρολογιού. Έχει όμως νόημα να αναζητήσουμε κατάλληλες γωνίες Euler($\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$), έτσι ώστε το διαδοχικό γινόμενο των πινάκων $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ στο αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς x, y, z , να έχει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό του πίνακα $\hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{A}$ για τις γωνίες Euler($\theta_1, \theta_2, \theta_3$). Πράγματι, για γωνίες

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \theta_1 + \pi \\ \theta'_2 &= \pi - \theta_2 \\ \theta'_3 &= -\theta_3 \end{aligned} \quad (\Gamma.7)$$

μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ισχύει

$$\mathbf{A}(\theta_1 + \pi, \pi - \theta_2, -\theta_3) = \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{A}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (\Gamma.8)$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να δείξουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες των τελεστών $\hat{\mathbf{R}}_2$ και $\hat{\mathbf{R}}_3$.

Παράρτημα Δ

Για την απόδειξη της σχέσης (2.62), θα προσδιορίσουμε τα στοιχεία του μετρικού τανυστή

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j} \quad (\Delta.1)$$

και της Λαπλασιανής

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (\Delta.2)$$

σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες με μεταβλητές τις $(\beta, \gamma, \theta'_x, \theta'_y, \theta'_z)$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.16) για το κύριο σύστημα αξόνων

$$\begin{aligned} \alpha_{2,0} &\equiv \alpha_0 = \beta \cos \gamma \\ \alpha_{2,\pm 1} &= 0 \\ \alpha_{2,\pm 2} &\equiv \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (\Delta.3)$$

$$\begin{aligned} g_{\beta\beta} &= \frac{\partial \alpha_{2,0}}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha_{2,0}}{\partial \beta} + \frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \beta} + \frac{\partial \alpha_{2,\pm 2}}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha_{2,\pm 2}}{\partial \beta} \\ &= \cos \gamma \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\Delta.4)$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} g_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial \alpha_{2,0}}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha_{2,0}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha_{2,\pm 1}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \alpha_{2,\pm 2}}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha_{2,\pm 2}}{\partial \gamma} \\ &= (-\beta \sin \gamma)(-\beta \sin \gamma) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \cos \gamma \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \cos \gamma \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \cos \gamma \\ &= \beta^2 \end{aligned} \quad (\Delta.5)$$

Με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι $g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta} = 0$.

Για να προσδιορίσουμε τα στοιχεία $g_{\theta'_x \theta'_x}$, $g_{\theta'_y \theta'_y}$, $g_{\theta'_z \theta'_z}$, $g_{\theta'_x \theta'_y}$, $g_{\theta'_x \theta'_z}$ και $g_{\theta'_y \theta'_z}$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις[7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{2\pm 1}}{\partial \theta'_x} &= -\frac{i}{2} (\sqrt{6} \alpha_0 + 2\alpha_2) \\ \frac{\partial \alpha_{2\pm 1}}{\partial \theta'_y} &= \pm \frac{1}{2} (\sqrt{6} \alpha_0 - 2\alpha_2) \\ \frac{\partial \alpha_{2\pm 2}}{\partial \theta'_z} &= \mp 2i\alpha_2 \end{aligned} \quad (\Delta.6)$$

ενώ οι υπόλοιποι όροι είναι μηδενικοί. Επομένως, οι μόνοι μη μηδενικοί όροι που προκύπτουν είναι οι

$$\begin{aligned} g_{\theta'_x \theta'_z} &= -\frac{1}{2} (\sqrt{6}\alpha_0 + 2\alpha_2)^2 \\ g_{\theta'_y \theta'_y} &= \frac{1}{2} (\sqrt{6}\alpha_0 - 2\alpha_2)^2 \\ g_{\theta'_z \theta'_z} &= -8\alpha_2^2 \end{aligned} \quad (\Delta.7)$$

ενώ αξιοποιώντας κατάλληλα την έκφραση των ροπών αδρανείας [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{B}{2} (\sqrt{6}\alpha_0 + 2\alpha_2)^2 \\ \mathcal{J}_2 &= \frac{B}{2} (\sqrt{6}\alpha_0 - 2\alpha_2)^2 \\ \mathcal{J}_3 &= 8B\alpha_2^2 \end{aligned} \quad (\Delta.8)$$

και τις (Δ.3), έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} g_{\theta'_x \theta'_x} &= -\frac{\mathcal{J}_1}{B} = -4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) \\ g_{\theta'_y \theta'_y} &= \frac{\mathcal{J}_2}{B} = 4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{4\pi}{3} \right) \\ g_{\theta'_z \theta'_z} &= -\frac{\mathcal{J}_3}{B} = -4\beta^2 \sin^2 \gamma \end{aligned} \quad (\Delta.9)$$

Επομένως η μήτρα του μετρικού τανυστή έχει την διαγώνια μορφή

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{4\pi}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\beta^2 \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (\Delta.10)$$

με αντίστοιχη ορίζουσα την

$$g = g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma} g_{\theta'_x \theta'_x} g_{\theta'_y \theta'_y} g_{\theta'_z \theta'_z} = 64\beta^8 (\sin 3\gamma)^2 \quad (\Delta.11)$$

και αντίστροφη μήτρα την

$$g_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{4\pi}{3} \right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\beta^2 \sin^2 \gamma} \end{bmatrix} \quad (\Delta.12)$$

Ορίζοντας τους γενικευμένους κβαντομηχανικούς τελεστές κατά τις γωνίες Euler έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{J}'_{\theta_x} &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta_x} \\ \hat{J}'_{\theta_y} &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta_y} \\ \hat{J}'_{\theta_z} &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta_z} \end{aligned} \quad (\Delta.13)$$

Ξαναγράφοντας τη λαπλασιανή, και αξιοποιώντας κατάλληλα όλες τις παραπάνω εκφράσεις

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} \\
&\quad + \frac{B}{\mathcal{J}_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_x^2} + \frac{B}{\mathcal{J}_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_y^2} + \frac{B}{\mathcal{J}_3} \frac{\partial^2}{\partial \theta_z^2} \\
&= \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} + \sum_k \frac{B}{\mathcal{J}_k} \frac{J_k'^2}{\hbar^2}
\end{aligned} \tag{\Delta.14}$$

Έτσι, ο τελεστής της κινητικής ενέργειας παίρνει τη ζητούμενη μορφή

$$\begin{aligned}
T &= -\frac{\hbar^2}{2B} \nabla^2 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} |\sin 3\gamma| \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \sum_k \frac{J_k'^2}{2\mathcal{J}_k}
\end{aligned} \tag{\Delta.15}$$

με αντίστοιχο στοιχείο όγκου

$$\begin{aligned}
dV &= \sqrt{g} d\beta d\gamma d^3\theta \\
&= 2\beta^4 |\sin 3\gamma| d\beta d\gamma d^3\theta
\end{aligned} \tag{\Delta.16}$$

Παράρτημα Ε

Ας δούμε πως προκύπτει η έκφραση (4.82). Από την σχέση (4.79) έχουμε

$$f = \frac{2}{1-t} \quad (E.1)$$

Αντικαθιστώντας την (4.80) στην (4.76) και αξιοποιώντας τις (4.81) και (4.64) έχουμε

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(\mu, \nu; y) &= C_{n+1} f^{n+1} Q_{n+1}(\mu, \nu; t) \\
 &= -2 \frac{1+t}{\alpha(1-t)} \frac{2}{1-t} \frac{\alpha}{2} (1-t)^2 \frac{d}{dt} \left[C_n \left(\frac{2}{1-t} \right)^n Q_n(\mu_1, \nu_1; t) \right] \\
 &\quad + \left[\mu - n - 1 + \mu + n + (\nu + n\alpha + \alpha + \nu + n\alpha) \frac{1+t}{\alpha(1-t)} \right] C_n f^n Q_n(\mu_1, \nu_1; t) \\
 &= -2(1+t) C_n \left[n \frac{2^n}{(1-t)^{n+1}} Q_n(\mu_1, \nu_1; t) + f^n \frac{dQ_n(\mu_1, \nu_1; t)}{dt} \right] \\
 &\quad + C_n \left[2\mu - 1 + \frac{(2\nu + 2n\alpha + \alpha)(1+t)}{\alpha(1-t)} \right] f^n Q_n(\mu_1, \nu_1; t) \\
 &= -2(1+t) C_n \left[n \frac{f^n}{1-t} Q_n(\mu_1, \nu_1; t) + f^n \frac{dQ_n(\mu_1, \nu_1; t)}{dt} \right] \\
 &\quad + C_n \left[2\mu - 1 + \frac{(2\nu + 2n\alpha + \alpha)(1+t)}{\alpha(1-t)} \right] f^n Q_n(\mu_1, \nu_1; t) \\
 &= -2(1+t) C_n f^n \frac{dQ_n(\mu_1, \nu_1; t)}{dt} \\
 &\quad + C_n f^n \left[\frac{-2(1+t)n}{1-t} + 2\mu - 1 + \frac{(2\nu + 2n\alpha + \alpha)(1+t)}{\alpha(1-t)} \right] Q_n(\mu_1, \nu_1; t) \\
 \Leftrightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} Q_{n+1}(\mu, \nu; t) &= \frac{-2(1+t)}{f} \frac{dQ_n(\mu_1, \nu_1; t)}{dt} \\
 &\quad + \frac{1}{f} \left[\frac{-2(1+t)n}{1-t} + 2\mu - 1 + \frac{(2\nu + 2n\alpha + \alpha)(1+t)}{\alpha(1-t)} \right] Q_n(\mu_1, \nu_1; t) \\
 &= -(1-t^2) \frac{dQ_n(\mu_1, \nu_1; t)}{dt} \\
 &\quad + \left[-(1+t)n + \frac{(2\mu-1)(1-t)}{2} + \frac{(2\nu + 2n\alpha + \alpha)(1+t)}{2\alpha} \right] Q_n(\mu_1, \nu_1; t)
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ -(1-t^2) \frac{d}{dt} + \left[\mu + \frac{\nu}{\alpha} + \left(\frac{\nu}{\alpha} - \mu + 1 \right) t \right] \right\} Q_n(\mu_1, \nu_1; t)$$

Βιβλιογραφία

- [1] D. Bonatsos, Quantum Mechanics, chap. 6
- [2] W. Greiner, J. A. Maruhn, Nuclear Models, (Springer, Berlin, 1996), chap. 5.
- [3] P. Cejnar, J. Jolie, R. F. Casten, Rev. Mod. Phys. **82**, 2155 (2010).
- [4] A. Bohr, Dan. Mat. Fys. Medd. **14**, (1952).
- [5] W. Greiner, J. A. Maruhn, Nuclear Models, (Springer, Berlin, 1996), chap. 6.
- [6] V. Devanathan, Angular Momentum Techniques in Quantum Mechanics, (Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, London, Moscow, 2002)
- [7] W. Greiner, J. A. Maruhn, Nuclear Models, (Springer, Berlin, 1996), chap. 6.
- [8] P. Ring, P. Schuck, The nuclear Many-Body Problem, (Springer-Verlag, New York, 1980), κεφ. 1.
- [9] A. S. Davydov and G. F. Filippov, Nucl. Phys. **8**, 237 (1958).
- [10] A. S. Davydov and V. S. Rostovsky, Nucl. Phys. **12**, 58 (1959).
- [11] L. Wilets and M. Jean, Phys. Rev. **C102 788 (1956)**.
- [12] D. H. Feng, R. Gilmore, S. R. Deans, Phys. Rev. C **23**, 1254 (1981).
- [13] J. N. Ginocchio, M. W. Kirson, Phys. Rev. Lett. **44**, 1744 (1980).
- [14] A. E. L. Dieperink, O. Scholten, F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **44**, 1747 (1980).
- [15] R. F. Casten, Nuclear Structure from a Simple Perspective, (Oxford University Press, Oxford, 1990).
- [16] J. P. Elliott, J. A. Evans, P. Park, Phys. Lett. B **169**, 309 (1986).
- [17] G. Rakavy, Nucl. Phys. **4**, 289 (1957).
- [18] R. F. Casten, N. V. Zamfir, Phys. Rev. Lett. **85**, 3584 (2000).
- [19] N. V. Zamfir, *et al.*, Phys. Rev. C **65**, 044325 (2002).
- [20] J. M. Arias, Phys. Rev. C, **63**, 034308 (2001).
- [21] A. Frank, C. E. Alonso, J. M. Arias, Phys. Rev. C **65**, 014301 (2001).
- [22] D. L. Zhang, Y. X. Liu, Phys. Rev. C **65**, 057301 (2002).

- [23] J. F. Zhang, G. L. Long, Y. Sun, S. J. Shu, F. Y. Liu, Y. Jia, *Chin. Phys. Lett.* **20**, 1231 (2003).
- [24] D. L. Zhang, Y. X. Liu, *Chin. Phys. Lett.* **20**, 1028 (2003).
- [25] R. M. Clark, *et al.*, *Phys. Rev. C* **69**, 064322 (2004).
- [26] M. W. Kirson, *Phys. Rev. C* **70**, 049801 (2004).
- [27] H. von Garrel, *et al.*, *Phys. Rev. C* **73**, 054315 (2006).
- [28] N. Marginean, *et al.*, *Phys. Lett. B* **633**, 696 (2006).
- [29] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052503 (2001).
- [30] R. Krücken, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 232501 (2002).
- [31] N. V. Zamfir, *et al.*, *Phys. Rev. C* **65**, 067305 (2002).
- [32] R. M. Clark, M. Cromaz, M. A. Deleplanque, R. M. Diamond, P. Fallon, A. Gørgen, I. Y. Lee, A. O. Macchiavelli, F. S. Stephens, and D. Ward, *Phys. Rev. C* **67**, 041302 (2003).
- [33] R. F. Casten, N. V. Zamfir, and R. Krücken, *Phys. Rev. C* **68**, 059801 (2003).
- [34] D.-L. Zhang and H.-Y. Zhao, *Chin. Phys. Lett.* **19**, 779 (2002).
- [35] D. Tonev, A. Dewald, T. Klug, P. Petkov, J. Jolie, A. Fitzler, O. Möller, S. Heinze, P. von Brentano, and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **69**, 034334 (2004).
- [36] A. Dewald, *et al.*, *Eur. Phys. J. A* **20**, 173–178 (2004).
- [37] M. A. Caprio, *et al.*, *Phys. Rev. C* **66**, 054310 (2002).
- [38] E. A. McCutchan, *et al.*, *Phys. Rev. C* **69**, 024308 (2004).
- [39] E. A. McCutchan, N. V. Zamfir, R. F. Casten, M. A. Caprio, H. Ai, H. Amro, C. W. Beausang, A. A. Hecht, D. A. Meyer, and J. J. Ressler, *Phys. Rev. C* **71**, 024309 (2005).
- [40] R. M. Clark, *et al.*, *Phys. Rev. C* **68**, 037301 (2003).
- [41] D. S. Brenner, in *Mapping the Triangle*, ed. A. Aprahamian, J. A. Cizewski, S. Pittel, and N. V. Zamfir, *AIP CP* **638**, 223–227 (2002).
- [42] P. G. Bizzeti and A. M. Bizzeti-Sona, *Phys. Rev. C* **66**, 031301 (2002).
- [43] C. Hutter, *et al.*, *Phys. Rev. C* **67**, 054315 (2003).
- [44] C. Fransen, N. Pietralla, A. Linnemann, V. Werner, and R. Bijker, *Phys. Rev. C* **69**, 014313 (2004).
- [45] D. Bonatsos, *Interacting Boson Models of Nuclear Structure*, (Clarendon Press, Oxford, 1988).
- [46] R. V. Jolos and P. von Brentano, *Phys. Rev. C* **78**, 064309 (2008).

- [47] R. V. Jolos and P.von Brentano, Phys. Rev. **C79**, 044310 (2009).
- [48] F. Iachello and A. Arima, The Interacting Boson Model, (Cambridge University Press, Cambridge 1987).
- [49] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **85**, 3580 (2000).
- [50] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **87**, 052502 (2001).
- [51] O. S. van Roosmalen, Ph.D. thesis, U. Groningen, 1982.
- [52] C. Quense and V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 4267 (2004).
- [53] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1955).
- [54] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry in Quantum Mechanics (World Scientific, Singapore, 2001).
- [55] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quense and V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 2929 (2005).
- [56] D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, D. Lenis, N. Minkov and C. Quense, Phys. Rev. **C83**, 044321 (2011).
- [57] P. M. Davidson, Proc. R. Soc. London **A135**, 459 (1932).
- [58] L. Fortunato, Eur. Phys. J. **A26**, 1 (2005).
- [59] L. Fortunato, Phys. Rev. **C70**, 011302 (2004).
- [60] L. Fortunato, S. De Baerdemacker and K. Heyde, Phys. Rev. **C74**, 014310 (2006).
- [61] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, N. Minkov, R. F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis and I. Yigitoglou, Phys. Rev. **C76**, 064312 (2007).
- [62] A. S. Davydov and V. S. Rostovsky, Nucl. Phys. **12**, 58 (1959).
- [63] O. von Roos, Phys. Rev. **B27**, 7547 (1983).
- [64] B. Podolsky, Phys. Rev. **32**, 812 (1982).
- [65] D. R. Bès, Nucl. Phys. **10**, 373 (1959).
- [66] J. Meyer-ter-Vehn, Nucl. Phys. **A249**, 111 (1975).
- [67] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, Phys. Lett. **B588**, 172 (2004).
- [68] L. Infeld and T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).
- [69] A. B. Balantekin, Phys. Rev. **A57**, 4188 (1998).
- [70] M. Znojil, Phys. Rev. **A61**, 166101 (2000).
- [71] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, Report No. 94-05, Delft University of Technology (1994); archive: math. CA/9602214.

- [72] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1965).
- [73] D. Bonatsos, D. Lennis, N. Minkov, P. P. Raychev and P. A. Terziev, Phys. Rev. **C69**, 044316 (2004).
- [74] I. Yigitoglu and D. Bonatsos, Phys. Rev. **C83**, 014303 (2011).
- [75] D. Bonatsos, P. E. Georgoudis
- [76] A. Kratzer, Z. **Phys.3**, 289 (1920).
- [77] X. Wu, A. Aprahamian, S. M. Fischer, W. Reviol, G. Liu, and J. X. Saladin, Phys. Rev. C **49**, 1837 (1994).
- [78] C. Y. Wu *et al.*, Phys. Rev. C **64**, 014307 (2001).
- [79] M. Sugita and T. Otsuka, Nucl. Phys. A **557**, 643c (1993).
- [80] D. G. Burke, Phys. Rev. Lett. **73**, 1899 (1994).
- [81] D. G. Burke, Phys. Rev. C **66**, 039801 (2002).
- [82] P. E. Garrett *et al.*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **31**, S1855 (2005).
- [83] C. Y. Wu, D. Cline, M. W. Simon, G. A. Davis, R. Teng, A. O. Macchiavelli, and K. Vetter, Phys. Rev. C **64**, 064317 (2001).
- [84] A. Martin, P. E. Garrett, M. Kadi, N. Warr, M. T. McEllistrem, and S. W. Yates, Phys. Rev. C **62**, 067302 (2000).
- [85] F. Corminboeuf, J. Jolie, H. Lehmann, K. Foehl, F. Hoyler, H. B. Boerner, C. Doll, and P. E. Garrett, Phys. Rev. C **56**, R1201 (1997).
- [86] A. Guessous *et al*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2280 (1995).
- [87] P. E. Garrett, M. Kadi, Min Li, C. A. McGrath, V. Sorokin, Minfang Yeh, and S. W. Yates, Phys. Rev. Lett. **78**, 4545 (1997).
- [88] C. Fahlander, A. Axelsson, M. Heinebrodt, T. Haertlein, and D. Schwalm, Phys. Lett. B **388**, 475 (1996).
- [89] J. E. Garcia-Ramos, C. E. Alonso, J. M. Arias, and P. Van Isacker, Phys. Rev. C **61**, 047305 (2000).
- [90] Y. Sun, K. Hara, J. A. Sheikh, J. G. Hirsch, V. Velázquez, and M. Guidry, Phys. Rev. C **61**, 064323 (2000).
- [91] T. Haertlein, M. Heinebrodt, D. Schwalm, and C. Fahlander, Eur. Phys. J. A **2**, 253 (1998).
- [92] M. Oshima, T. Morikawa, Y. Hatsukawa, S. Ichikawa, N. Shinohara, M. Matsuo, H. Kusakari, N. Kobayashi, M. Sugawara, and T. Inamura, Phys. Rev. C **52**, 3492 (1995).

- [93] H. G. Boerner, J. Jolie, S. J. Robinson, B. Krusche, R. Piepenbring, R. F. Casten, A. Aprahamian, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 691 (1991).
- [94] R. Neu and F. Hoyler, *Phys. Rev. C* **46**, 208 (1992).
- [95] T. S. Dumitrescu and I. Hamamoto, *Nucl. Phys. A* **383**, 205 (1982).