



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Προσδιορισμός μαγνητικής «μάζας» με την μέθοδο της ανίχνευσης μαγνητικής ανωμαλίας

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της Λήδας Τζαννέτου

Επιβλέπων: Ευάγγελος Χριστοφόρου

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. «ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ»

Μεταπτυχιακή Εργασία

Προσδιορισμός μαγνητικής «μάζας» με την μέθοδο της ανίχνευσης μαγνητικής ανωμαλίας

ΛΗΔΑ ΤΖΑΝΕΤΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής: Ευάγγελος Β. Χριστοφόρου

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

.....
Ευάγγελος Χριστοφόρου
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Κωνσταντίνος Παρασκευαΐδης
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Αφροδίτη Κτενά
Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

Αθήνα, 2019

Περίληψη

Στη παρούσα εργασία γίνεται η μελέτη του εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων. Σκοπός της μελέτης αυτής είναι η θεωρητική αποτύπωση των μεθόδων εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων και η ανάπτυξη ενός αλγόριθμου που αξιοποιεί τα μεγέθη των μαγνητικών πεδίων που δημιουργούν αυτά τα αντικείμενα. Η εργασία επικεντρώνεται σε μεθόδους εντοπισμού που αξιοποιούν τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούν τα φερρομαγνητικά αντικείμενα.

Αρχικά γίνεται μια εκτενής βιβλιογραφική αναφορά στις μεθόδους εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων που χρησιμοποιήθηκαν ή και χρησιμοποιούνται ακόμα με σκοπό την αποτύπωση και συγκέντρωση των αντιπροσωπευτικότερων τεχνικών εντοπισμού. Συγκεκριμένα μελετώνται οι μέθοδοι εντοπισμού μαγνητικών ανωμαλιών (magnetic anomaly detection, MAD), που δημιουργούν τα φερρομαγνητικά αντικείμενα στο γεωμαγνητικό πεδίο των εκάστοτε περιοχών όπου γίνεται η απόπειρα εντοπισμού.

Κατόπιν πραγματοποιήθηκαν πειραματικές μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από τρεις διαφορετικού σχήματος μαγνήτες και με αυτές τις τιμές αναπτύχθηκαν οι αλγόριθμοι προσέγγισης και εντοπισμού. Αναλυτικότερα αναπτύχθηκαν δύο αλγόριθμοι που υπολογίζουν το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών μέσω προσεγγιστικών εξισώσεων και μέσω μια απλοποιημένης μορφής του νόμου των Biot-Savart. Επιπλέον κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος όπου εκτιμά τη θέση των μαγνητών και βασίζεται στην ίδια απλοποιημένη μορφή του νόμου των Biot-Savart.

Abstract

The present project focuses on the study of detection of ferromagnetic objects. The purpose of this study is the theoretical mapping of the methods of detecting ferromagnetic objects and the development of an algorithm that exploits the magnitudes of the magnetic field that create these objects. The work focuses on detection methods that leverage the magnetic fields created by the ferromagnetic objects.

Initially, an extensive bibliographic reference is made to the methods of locating the ferromagnetic objects that were used or are still used in order to capture and gather the most representative detection techniques. Specifically, the methods of detecting magnetic anomalies (magnetic anomaly detection, MAD) are studied, which create the ferromagnetic objects in the geomagnetic field of the areas where the detection is attempted.

Then experimental measurements of the magnetic field created by three different shaped magnets are carried out and with these values the approach and localization algorithms have been developed. In more details, two algorithms were developed that calculate the magnetic field of the magnets through approximate equations and through a simplified form of the Biot-Savart law. In Addition, an algorithm was constructed to assess the position of the magnets and is based on the same simplified form of the Biot-Savart law.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Ευάγγελο Χριστοφόρου για την ανάθεση της μελέτης του φερρομαγνητικού εντοπισμού στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία, όπως επίσης και για τον χρόνο που διέθεσε για οποιοδήποτε πρόβλημα ή απορία υπήρξε κατά τη διάρκεια της. Ευχαριστώ επίσης τη καθηγήτρια κα Αφροδίτη Κτενά για τη βοήθεια και καθοδήγηση σε όλα τα στάδια της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Σπύρο Αγγελόπουλο, αφού η συνεισφορά του έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη πορεία και στην τελική μορφή αυτής της μελέτης.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
Θεωρητικό Μέρος	3
1. Ο νόμος Biot-Savart - Μαγνητική Διπολική Ροπή	3
1.1 Ο νόμος Biot-Savart	3
1.2 Μαγνητικό πεδίο σημειακού διπόλου	4
1.3 Μακροσκοπικό μαγνητικό πεδίο μέσα στην ύλη	4
2. Φερρομαγνητικά υλικά – Μόνιμοι Μαγνήτες	6
2.1. Φερρομαγνητικά υλικά	6
2.1.2 Χαρακτηριστικά φερρομαγνητικών υλικών	6
2.1.2.1 Βρόχος υστέρησης	7
2.1.2.2 Συνεκτικό πεδίο	8
2.2. Μόνιμοι Μαγνήτες	8
2.2.1 Χαρακτηριστικά μόνιμων μαγνητών	8
2.2.2 Είδη/ιστορία μόνιμων μαγνητών	9
2.2.3 Μόνιμοι Μαγνήτες Νεοδυμίου (NdFeB)	11
2.2.3.1 Η κρυσταλλική δομή του NdFeB	12
2.2.3.2 Χαρακτηριστικά του NdFeB	12
2.3 Το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών	13
3. Αισθητήρες – Αισθητήρες Hall	15
3.1. Αισθητήρες	15
3.1.1 Ορισμός Αισθητήρων	15
3.1.2 Ταξινόμηση Αισθητήρων	15
3.1.3 Χαρακτηριστικά Αισθητήρων	16
3.1.4 Βαθμονόμηση Αισθητήρων	17
3.2. Αισθητήρες Hall	18
3.2.1 Το φαινόμενο Hall	18
3.2.2 Ο αισθητήρας Hall	20
4. Το γεωμαγνητικό πεδίο	23
4.1 Η εξίσωση του γεωμαγνητικού πεδίου	23
4.2 Πηγές του γεωδυναμικού πεδίου	24
4.2.1 Το εσωτερικό γεωμαγνητικό πεδίο	25
4.2.2 Το εξωτερικό γεωμαγνητικό πεδίο	25
4.3 Συνιστώσες του γεωμαγνητικού πεδίου	26
4.4 Μετρήσεις του γεωμαγνητικού πεδίου	26
4.5 Μοντέλα Γεωμαγνητικού πεδίου	28
4.6 Το γεωμαγνητικό πεδίο στην πόλη της Αθήνας	30
5. Εντοπισμός Φερρομαγνητικού Αντικειμένου	33
5.1 Εντοπισμός Αντικειμένου	33
5.2 Τεχνολογίες εντοπισμού	33
5.2.1 Κλασσικές/υπάρχουσες τεχνολογίες εντοπισμού	34
5.2.1.1 Δορυφορικό σύστημα παγκόσμιας πλοήγησης (Global navigation satellite system, GNSS)	34
5.2.1.2 Ραδιοεντοπισμός (Radiolocation)	34

5.2.1.3 Radar (Radio Detection And Ranging)	34
5.2.1.4 Οπτικός αισθητήρας (Vision sensor)	35
5.2.1.5 Αδρανειακή μονάδα μέτρησης (Inertial measurement unit, IMU)	35
5.2.1.6 Συγχώνευση αισθητήρων (Sensor fusion)	35
5.2.2 Εναλλακτικές τεχνολογίες εντοπισμού	36
5.2.2.1 Μαγνητικός Εντοπισμός (Magnetic Localization)	36
5.2.2.2 Αισθητήρες έντασης φωτός (Light Levels)	36
5.3 Εφαρμογές των τεχνικών εντοπισμού	37
5.3.1 Επιτήρηση κυκλοφορίας (Traffic surveillance)	37
5.3.2 Μαγνητικός εντοπισμός στόχου	38
5.3.3 Αλληλεπίδραση σε δημόσιους χώρους (Interaction in public environments)	38
5.3.4 Εντοπισμός και χαρτογράφηση σε κλειστούς χώρους (Indoor Localization and Mapping)	38
5.4.5 Εντοπισμός πτηνών (Bird Localization)	39
5.4 Συστήματα μεθόδου MAD - Το μαθηματικό πρόβλημα και τα μοντέλα στις τεχνικές εντοπισμού μαγνητικής ανωμαλίας	40
5.4.1 Τα μαγνητόμετρα στα συστήματα MAD	40
5.4.2 Θόρυβος	41
5.4.3 Το μαγνητικό πρόβλημα	42
5.4.3.1 Εντοπισμός μαγνητικής ανωμαλίας μέσω ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης (Orthonormal Basis Functions, OBFs)	43
5.4.3.2 Εντοπισμός μαγνητικής ανωμαλίας μέσω επεξεργασίας σήματος	52
Πειραματικό μέρος	57
6. Πειραματική διαδικασία	57
6.1. Αισθητήρας Hall	58
6.2. Το Γεωμαγνητικό Πεδίο	59
6.3. Το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών	63
6.3.1 Κυλινδρικός Μαγνήτης	65
6.3.2 Κυβικός Μαγνήτης	69
6.3.3 Ορθογώνιος Μαγνήτης	73
7. Αλγόριθμοι	85
7.1. Η γλώσσα προγραμματισμού Python	85
7.2. Αλγόριθμοι Προσεγγιστικών Εξισώσεων Μαγνητικού Πεδίου	86
7.2.1. Οι εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών στους αλγόριθμους	86
7.2.2. Αλγόριθμος για το παραμένον μαγνητικό πεδίο μαγνητών	88
7.2.3. Αλγόριθμος των προσεγγιστικών για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών σε μία διάσταση	94
7.2.4. Αλγόριθμος των προσεγγιστικών για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών	100
7.2.5. Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών	103

7.2.5.1 Κυλινδρικός Μαγνήτης	103
7.2.5.2. Κυβικός Μαγνήτης	105
7.2.5.3 Ορθογώνιος Μαγνήτης	108
7.3. Αλγόριθμοι για το μαγνητικό πεδίο του νόμου Biot-Savart	114
7.3.1. Οι απλοποιημένες εξισώσεις του νόμου Biot-Savart	114
7.3.2. Αλγόριθμος για τη μαγνητική διπολική ροπή μαγνητών	115
7.3.3. Αλγόριθμος του απλοποιημένου Biot-Savart για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών	119
7.3.4. Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου απλοποιημένου Biot-Savart για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών	121
7.3.4.1. Κυλινδρικός Μαγνήτης	121
7.3.4.2. Κυβικός Μαγνήτης	123
7.3.4.3. Ορθογώνιος Μαγνήτης	124
7.4. Αλγόριθμος για την επίλυση του νόμου Biot-Savart	128
7.4.1. Ο αλγόριθμος του απλοποιημένου Biot-Savart για τη θέση των μαγνητών	128
7.4.2. Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου του απλοποιημένου Biot-Savart για τη θέση των μαγνητών	131
7.4.2.1. Κυλινδρικός Μαγνήτης	131
7.4.2.2. Κυβικός Μαγνήτης	132
7.4.2.3. Ορθογώνιος Μαγνήτης	133
Συμπεράσματα	139
Μελλοντικές Επεκτάσεις	145
Βιβλιογραφία	147
Παράρτημα	151

Εισαγωγή

Στη παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε μια προσέγγιση των τεχνικών εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων μέσω του μαγνητικού πεδίου που δημιουργούν.

Κατ' αρχήν αποτυπώνονται από τα βιβλιογραφικά δεδομένα οι βασικότερες υπάρχουσες τεχνολογίες εντοπισμού με ιδιαίτερη αναφορά σε τεχνικές εντοπισμού που αξιοποιούν το μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν, ενώ γίνεται και μια σύντομη ανάλυση σε αρκετές από αυτές.

Ένα φερρομαγνητικό αντικείμενο, που κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο της γης, μετά από κάποιο χρόνο, αποκτά μια μαγνήτιση λόγω του γεωμαγνητικού αυτού πεδίου. Το μαγνητισμένο πια φερρομαγνητικό αντικείμενο με τη σειρά του δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο, το οποίο παρατηρείται ως ανωμαλία στο υπάρχον γεωμαγνητικό πεδίο της εκάστοτε περιοχής στην οποία βρέθηκε το αντικείμενο. Έτσι για τον εντοπισμό φερρομαγνητικών αντικειμένων, έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές που αναζητούν αυτή την ανωμαλία στο γεωμαγνητικό πεδίο και ονομάζονται μέθοδοι εντοπισμού της μαγνητικής ανωμαλίας (magnetic anomaly detection, MAD).

Έχει παρατηρηθεί ότι ένα φερρομαγνητικό αντικείμενο σε αποστάσεις διπλάσιες έως τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του, μπορεί να θεωρηθεί σημειακό δίπολο και άρα το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί προσεγγίζεται από το πολυπολικό μοντέλο που υπακούει στο νόμο των Biot-Savart. Στην εξίσωση του νόμου των Biot-Savart υπάρχουν τρεις εξισώσεις για κάθε συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου συναρτήσει της άγνωστης διανυσματικής μαγνητικής διπολικής ροπής και της θέσης στο χώρο του φερρομαγνητικού αντικειμένου. Πρόκειται δηλαδή για τρεις εξισώσεις με έξι αγνώστους και άρα δεν είναι δυνατό να λυθεί, παρά μόνο να προσεγγιστεί. Για αυτό το λόγο, έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές εντοπισμού MAD με σκοπό τη εύρεση της βέλτιστης μεθόδου που αναδεικνύει τη παρουσία και τη θέση ενός φερρομαγνητικού αντικειμένου.

Σε αυτή την εργασία, πέραν της θεωρητικής μελέτης των μεθόδων εντοπισμού, γίνεται μια απόπειρα αποτύπωσης της συμπεριφοράς των φερρομαγνητικών αντικειμένων στο χώρο και η ανάπτυξη αλγορίθμων που θα ενισχύσουν αυτή τη μελέτη μέσω της σύγκρισής τους με υπάρχουσες εξισώσεις για το μαγνητικό πεδίο. Επιπλέον κατασκευάζεται ένας αλγόριθμος, που αξιοποιεί τις πειραματικές μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου, για να εξάγει τις θέσεις των αντικειμένων.

Για αυτό το λόγο, χρησιμοποιώντας ως φερρομαγνητικά αντικείμενα, τρεις διαφορετικού σχήματος μαγνήτες νεοδυμίου και με τη βοήθεια ενός αισθητήρα Hall

συνδεδεμένου με έναν μικροεπεξεργαστή Arduino και τοποθετημένου σε σταθερό σημείο, πραγματοποιήθηκε η καταγραφή των μαγνητικών πεδίων των μαγνητών και στις τρεις συνιστώσες. Σκοπός της πειραματικής αυτής διαδικασίας είναι ο προσδιορισμός της καταλληλότερης διάταξης και διαδικασίας λήψης μετρήσεων των μαγνητικών πεδίων των φερρομαγνητικών αντικειμένων, ώστε να είναι δυνατή η χρήση τους σε αλγόριθμους εντοπισμού μαγνητικής ανωμαλίας (MAD).

Η χρήση των μαγνητών έγινε με σκοπό να προσπεραστεί το εμπόδιο των τριών αγνώστων συνιστωσών της μαγνητικής διπολικής ροπής και της αντίστοιχης παραμένουσας μαγνήτισης στις εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου, αφού θεωρείται σταθερή και γνωστή από τον κατασκευαστή.

Συγκεκριμένα αναπτύχθηκαν τρεις αλγόριθμοι με σκοπό τη σύγκριση και τον εντοπισμό. Ο πρώτος αλγόριθμος βασίζεται σε υπάρχουσες από τη βιβλιογραφία εξισώσεις που εκφράζουν το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών, μέσω των οποίων υπολογίζει το πεδίο αυτό για μια περιοχή ίδιου εύρους με αυτής των πειραματικών δεδομένων και το συγκρίνει με τα μετρούμενα μαγνητικά πεδία. Ο δεύτερος αλγόριθμος αναπτύσσεται κατά όμοιο τρόπο με τον πρώτο, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιεί την εξίσωση μιας απλοποιημένης μορφής του νόμου των Biot-Savart για την εύρεση των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών. Ο τρίτος αλγόριθμος που κατασκευάστηκε, επιλύει τις εξισώσεις της απλοποιημένης μορφής του νόμου των Biot-Savart, δίνοντας μια εκτίμηση της θέσης του φερρομαγνητικού αντικειμένου, εισάγοντας τις μετρούμενες, από τη πειραματική διαδικασία, συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών.

Παρόλο υπήρχαν πληροφορίες από τους κατασκευαστές των μαγνητών για το παραμένον μαγνητικό πεδίο, δεν υπήρχε αναφορά για την εκτίμησή του σε διαφορετικές διαστάσεις των μαγνητών. Για αυτό αναπτύχθηκαν δύο αλγόριθμοι που υπολογίζουν το παραμένον μαγνητικό πεδίο και τη μαγνητική διπολική ροπή των μαγνητών, μέσω των προσεγγιστικών εξισώσεων και του απλοποιημένου νόμου των Biot-Savart αντίστοιχα, εισάγοντας τις πειραματικές τιμές των θέσεων και των μαγνητικών πεδίων των μαγνητών.

Ο νόμος των Biot-Savart για τα σημειακά δίπολα, όπως προαναφέρθηκε ισχύει σε αποστάσεις διπλάσιες έως τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του φερρομαγνητικού αντικειμένου. Έτσι για του μαγνήτες εξετάζεται ανάλογα με το σχήμα τους η ισχύς των παραπάνω εξισώσεων. Προκύπτει ότι οι προσεγγιστικές εξισώσεις και η απλοποιημένη μορφή του νόμου των Biot-Savart δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε αποστάσεις διπλάσιες έως και τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του εκάστοτε μαγνήτη και έως εκεί όπου έφτανε η εμβέλεια του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών.

Θεωρητικό Μέρος

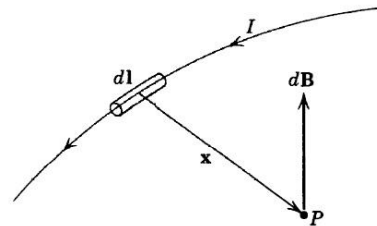
1. Ο νόμος Biot-Savart / Μαγνητική Διπολική Ροπή

1.1 Ο νόμος Biot-Savart

Η βασική ποσότητα στο μαγνητισμό στα στερεά είναι η μαγνητική διπολική ροπή (\vec{m}). Σε ατομικό επίπεδο, οι εσωτερικές μαγνητικές ροπές σχετίζονται με το σπιν των ηλεκτρονίων και με μια περαιτέρω συνεισφορά, που σχετίζεται με τη τροχιακή κίνησή τους γύρω από τον πυρήνα [1]. Το 1819 ο Oersted παρατήρησε ότι σε σύρματα όπου έρρεε ηλεκτρικό ρεύμα, δημιουργούνταν αποκλίσεις στα γειτονικά μόνιμα μαγνητικά δίπολα. Οι Biot-Savart (1820) πρώτα και μετά ο Ampere (1820-1825), με εκτενή ανάλυση και πειράματα, καθιέρωσαν το βασικό πειραματικό νόμο, που συσχετίζει την μαγνητική επαγωγή (\vec{B}) με το ρεύμα και καθιέρωσαν έτσι και το νόμο της δύναμης μεταξύ δυο ρευμάτων.

Αν $d\vec{l}$ είναι το στοιχειώδες μήκος (που δείχνει στη κατεύθυνση της ροής του ρεύματος) ενός νήματος καλωδίου που φέρει ρεύμα I και \vec{x} η συντεταγμένη του διανύσματος του στοιχειώδους μήκους για ένα παρατηρητή στο σημείο P , όπως φαίνεται στο σχήμα (1.1), τότε η στοιχειώδης πυκνότητα ροής $d\vec{B}$ στο σημείο P δίνεται σε μέγεθος και κατεύθυνση από τη σχέση:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(d\vec{l} \times \vec{x})}{|\vec{x}|^3} \quad (1.1)$$

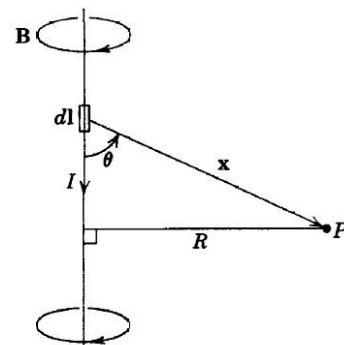


Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής $d\vec{B}$ από στοιχειώδες ρεύμα $I d\vec{l}$ [2].

Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} , ενός ευθύγραμμου σύρματος που φέρει ρεύμα I , όπως αυτό του σχήματος (1.2), δίνεται από τη σχέση:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (1.2)$$

Όπου R η απόσταση από το σημείο παρατήρησης ως το σύρμα. Αυτό το πειραματικό αποτέλεσμα που βρέθηκε πρώτα από τους Biot και Savart είναι γνωστό και ως νόμος Biot-Savart.



Σχήμα 1.2: Μαγνητική επαγωγή (\vec{B}) για ευθύ, μακρύ σύρμα που φέρει ρεύμα I [2].

Για μια κατανομή ρεύματος \vec{J} , η μαγνητική επαγωγή στη θέση \vec{x} , θα δίνεται από μια πιο γενική σχέση για τον νόμο Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' \quad (1.3)$$

Ο νόμος Biot-Savart είναι ισοδύναμος με τις εξισώσεις: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ και $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Η δεύτερη σχέση είναι ο νόμος του Ampere [2].

1.2 Μαγνητικό πεδίο σημειακού διπόλου

Το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό (\vec{A}) είναι η ποσότητα, που ο στροβιλισμός της δίνει τη μαγνητική επαγωγή. Δηλαδή $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Το διανυσματικό δυναμικό επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (βαθμίδα Coulomb) και τότε κάθε καρτεσιανή συντεταγμένη του διανυσματικού δυναμικού, ικανοποιεί την εξίσωση Poisson: $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$. Αν έχουμε μια εντοπισμένη κατανομή ρεύματος, τότε σε όλο το χώρο το διανυσματικό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:
$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

Το διανυσματικό δυναμικό του σημειακού μαγνητικού διπόλου είναι:
$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3},$$
 όπου $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x} \times \vec{J} d^3x$. Από πράξεις προκύπτει ότι η μαγνητική επαγωγή είναι:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{n}(\vec{m} \cdot \hat{n}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \quad (1.4)$$

Όπου \hat{n} το μοναδιαίο διάνυσμα του διανύσματος \vec{x} ($\hat{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$).

1.3 Μακροσκοπικό μαγνητικό πεδίο μέσα στην ύλη

Για μακροσκοπικά σώματα χρειάζεται η γνώση της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου σε μακροσκοπική μόνο κλίμακα και όχι σε ατομική. Πρέπει, λοιπόν, να οριστεί ένα μακροσκοπικό μαγνητικό πεδίο, που σε κάθε σημείο του χώρου ισούται με το μέσο όρο του μικροσκοπικού μαγνητικού πεδίου. Η μέση τιμή του μικροσκοπικού πεδίου ονομάζεται μαγνητική επαγωγή. Επίσης για τα εντοπισμένα ρεύματα που ρέουν σε μικροσκοπική κλίμακα, από το μέσο όρο τους, προκύπτει το μακροσκοπικό μέγεθος της μαγνήτισης.

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{V} = \frac{d\vec{m}}{d^3x} \quad (1.5)$$

Για κάθε απειροστό μικροσκοπικό όγκο d^3x' , στο σημείο \vec{x}' του σώματος, που έχει απειροστή μακροσκοπική διπολική ροπή $\vec{M}(\vec{x}')d^3x'$ και διαρρέεται από μακροσκοπικό ρεύμα πυκνότητας $\vec{J}_F(\vec{x}')$, θα υπάρχει, σε ένα σημείο του χώρου \vec{x} , μια συνεισφορά στο διανυσματικό δυναμικό. Το συνολικό μακροσκοπικό δυναμικό ισούται με το άθροισμα αυτών των απειροστών συνεισφορών για όλο το χώρο [2]:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_F(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (1.6)$$

Η τοπική εξίσωση για τη μαγνητική επαγωγή σε ένα υλικό, θα είναι τότε:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left(\vec{M}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \frac{\vec{J}_F(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\ &= \vec{B}_M + \vec{B}_J \end{aligned} \quad (1.7)$$

Από την παραπάνω σχέση, η μαγνητική επαγωγή, που οφείλεται στη μαγνήτιση του σώματος είναι:

$$\vec{B}_M(\vec{x}) = \mu_0 \vec{M}(\vec{x}) - \mu_0 \nabla \Phi_M \quad (1.8)$$

όπου $\Phi_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x'$ το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό.

Ορίζεται τέλος το διανυσματικό πεδίο \vec{H} , που ονομάζεται μακροσκοπικό μαγνητικό δυναμικό (ή μαγνητικό πεδίο) από τη σχέση: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$. Το μαγνητικό πεδίο (\vec{H}) ικανοποιεί την εξίσωση: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_F$, που αντιπροσωπεύει τη μακροσκοπική μορφή του νόμου Ampere. Συγκρίνοντας την προηγούμενη εξίσωση με την εξίσωση της μαγνητικής επαγωγής φαίνεται ότι το μαγνητικό πεδίο δίνεται από τη σχέση [2]:

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\nabla \Phi_M + \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_F(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (1.9)$$

2. Φερρομαγνητικά υλικά – Μόνιμοι Μαγνήτες

2.1. Φερρομαγνητικά υλικά

2.1.1 Μαγνητικά υλικά

Σε μακροσκοπική κλίμακα οι ατομικής κλίμακας ρευματοφόροι βρόχοι, που δημιουργούνται από την ταυτόχρονη κίνηση των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες και τον εαυτό τους, μπορούν να θεωρηθούν μαγνητικά δίπολα. Τα δίπολα αυτά συνήθως αλληλοαναιρούνται λόγω του τυχαίου προσανατολισμού των ατόμων. Όταν όμως εφαρμοστεί ένα μαγνητικό πεδίο σε κάποιο βαθμό (που εξαρτάται από τη δομή του υλικού), τα μαγνητικά δίπολα ευθυγραμμίζονται με το πεδίο και το υλικό καθίσταται μαγνητικά πολωμένο ή μαγνητισμένο.

Σε αντίθεση με την ηλεκτρική πόλωση, που έχει την ίδια κατεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο, άλλα υλικά αποκτούν μαγνήτιση παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο (παραμαγνητικά) και άλλα αντίθετη (διαμαγνητικά). Ορισμένα υλικά, τα σιδηρομαγνητικά, διατηρούν σε μεγάλο βαθμό τη μαγνήτισή τους επ' αόριστον μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού πεδίου. Στα υλικά αυτά η μαγνήτιση δεν καθορίζεται από το παρόν μαγνητικό πεδίο αλλά από την όλη μαγνητική «ιστορία» τους [3].

Η μακροσκοπική συμπεριφορά των μαγνητικών υλικών μπορεί να κατηγοριοποιηθεί χρησιμοποιώντας μερικές μαγνητικές παραμέτρους, όπως αυτή της μαγνητικής επιδεκτικότητας (χ). Έτσι οι τρεις κλασικές κατηγορίες, στις οποίες χωρίζονται τα μαγνητικά υλικά, είναι σε παραμαγνητικά ($\chi \sim -10^{-5}$), σε διαμαγνητικά ($10^{-5} \leq \chi \leq 10^{-3}$) και σε σιδηρομαγνητικά ($50 \leq \chi \leq 10^4$). Υλικά όπως ο χαλκός (copper, Cu), ο άργυρος (silver, Ag), ο χρυσός (gold, Au), το βισμούθιο (bismuth, Bi) και το βηρύλλιο (beryllium, Be) είναι διαμαγνητικά, ενώ το αλουμίνιο (aluminum, Al), ο λευκόχρυσος (platinum, Pt) και το μαγγάνιο (manganese, Mn) είναι παραμαγνητικά υλικά. Σιδηρομαγνητικά υλικά είναι ο σίδηρος (iron, Fe), το κοβάλτιο (cobalt, Co), το νικέλιο (nickel, Ni), διάφορες σπάνιες γαίες (rare-earths) και τα κράματά τους [4].

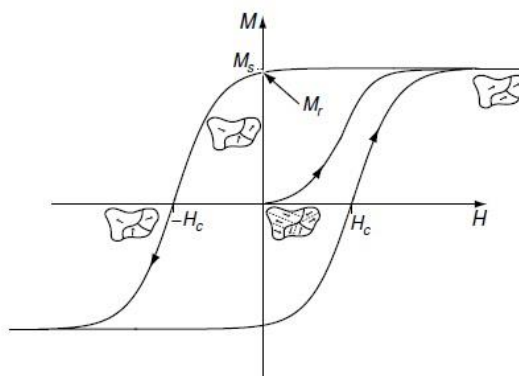
2.1.2 Χαρακτηριστικά φερρομαγνητικών υλικών

Στις εφαρμογές Μηχανικής χρησιμοποιούνται οι φερρομαγνήτες λόγω της υψηλής μαγνητικής διαπερατότητας, που έχει σαν αποτέλεσμα την υψηλή μαγνητική επαγωγή από μεσαία μαγνητικά πεδία. Επίσης χρησιμοποιούνται εξαιτίας της ικανότητάς τους να διατηρούν τη μαγνήτισή τους και άρα να δρουν ως πηγές μαγνητικού πεδίου και τέλος λόγω της μαγνητικής διπολικής ροπής, που δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν σε ηλεκτρικούς κινητήρες. Οι φερρομαγνήτες

έχουν γενικά πολύ υψηλές τιμές σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας (μ_r) και επιδεκτικότητας (χ).

2.1.2.1 Βρόχος υστέρησης

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό κάθε φερρομαγνητικού υλικού είναι η μόνιμη, μη γραμμική απόκριση της μαγνήτισης \vec{M} σε ένα επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο \vec{H} . Αυτή η απόκριση αποτυπώνεται στον βρόχο υστέρησης που



φαίνεται στο σχήμα (2.1). Η μαγνήτιση, η μαγνητική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου και το πεδίο \vec{H} μετρούνται σε μονάδες A/m. Μια εναλλακτική αναπαράσταση του βρόχου υστέρησης μπορεί να γίνει και με τα διαγράμματα της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} προς το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο \vec{H} , λόγω της σχέσης [4]:

Σχήμα 2.1: Ο βρόχος υστέρησης ενός φερρομαγνήτη. Αναπαριστάται επίσης η διάταξη των μαγνητικών περιοχών σε κάθε στάδιο του βρόχου υστέρησης [1].

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.1)$$

Το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο 'αποκαλύπτει' την αυθόρμητη φερρομαγνητική τάξη που υπάρχει στην κλίμακα των μικροσκοπικών μαγνητικών περιοχών. Η δομή των μαγνητικών περιοχών αναπαρίσταται στο σχήμα του βρόχου υστέρησης (Σχήμα 2.1). Συγκεκριμένα φαίνονται οι μαγνητικές περιοχές για τη μη-μαγνητική κατάσταση στην αρχή των αξόνων, για την κατάσταση όπου έχουμε τη μαγνήτιση κορεσμού ($M=M_s$), για την παραμένουσα μαγνητική κατάσταση σε μηδενικό μαγνητικό πεδίο ($M=M_r$) και για την κατάσταση όπου το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με το συνεκτικό ($H=H_c$), εκεί δηλαδή όπου η μαγνήτιση M αλλάζει πρόσημο.

Ο βρόχος υστέρησης συνδυάζει τις πληροφορίες των εσωτερικών μαγνητικών ιδιοτήτων, της μαγνήτισης κορεσμού M_s , που υπάρχει μέσα στο μαγνητικό τοίχωμα του φερρομαγνήτη και δύο εξωτερικών μαγνητικών ιδιοτήτων, της παραμένουσας μαγνήτισης M_r και του συνεκτικού πεδίου H_c , που εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες, όπως το σχήμα του δείγματος, τη σκληρότητα της επιφάνειας, μικροσκοπικά ελαττώματα του υλικού, τη θερμική ιστορία, αλλά και το βαθμό στον οποίο το πεδίο αλλάζει [1].

2.1.2.2 Συνεκτικό πεδίο

Το συνεκτικό πεδίο (H_c) είναι το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο που μειώνει τη μαγνήτιση του υλικού στο μηδέν, το πεδίο δηλαδή που απομαγνητίζει το υλικό. Το εσωτερικό συνεκτικό πεδίο (H_{ci}), ορίζεται στο βρόχο υστέρησης της μαγνήτισης $\vec{M}(\vec{H})$, ως η ένταση του πεδίου στην οποία η μαγνήτιση (\vec{M}) μειώνεται στο μηδέν, ενώ το συνεκτικό πεδίο (H_c) προκύπτει από το διάγραμμα του βρόχου υστέρησης της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}(\vec{H})$ [4].

Με το συνεκτικό πεδίο γίνεται ο διαχωρισμός των φερρομαγνητικών υλικών σε μαλακά και σκληρά μαγνητικά υλικά [1]. Μαλακά μαγνητικά υλικά είναι αυτά με συνεκτικό πεδίο μικρότερο του 1kA/m και σκληρά εκείνα με συνεκτικό πεδίο μεγαλύτερο από 10kA/m. Στα μαλακά μαγνητικά υλικά το εσωτερικό συνεκτικό πεδίο (H_{ci}) και το συνεκτικό πεδίο (H_c) είναι σχεδόν ταυτόσημα, ενώ στα σκληρά μαγνητικά υλικά υπάρχει ευκρινής διαφορά μεταξύ τους, με το H_{ci} να είναι πάντα μεγαλύτερο από το H_c [4].

Μερικά παραδείγματα μαλακών μαγνητικών υλικών είναι ο σίδηρος (Fe), οι χάλυβες χαμηλής περιεκτικότητας σε άνθρακα (low-carbon steels), οι φερρίτες (ferrites) και τα κράματα σιδήρου-πυριτίου (Fe-Si), σιδήρου-αλουμινίου-πυριτίου (Fe-Al-Si), και σιδήρου-κοβαλτίου (Fe-Co). Ενώ κάποια σκληρά μαγνητικά υλικά είναι τα κράματα αλουμινίου-νικελίου-κοβαλτίου (Alnicos), σαμάριου-κοβαλτίου (Sm-Co) και νεοδυμίου-σιδήρου-βορίου (Nd-Fe-B) [1].

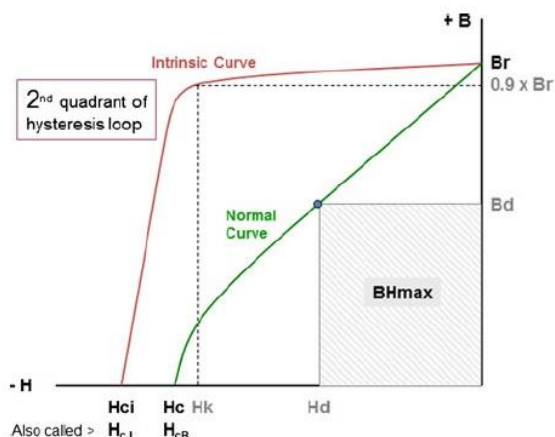
2.2. Μόνιμοι Μαγνήτες

2.2.1 Χαρακτηριστικά μόνιμων μαγνητών

Τα σκληρά μαγνητικά υλικά έχουν διευρυμένους, τετράγωνους $\vec{M}(\vec{H})$ βρόχους. Είναι κατάλληλοι ως μόνιμοι μαγνήτες γιατί, αφού μαγνητιστούν από εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο $H \geq M_s$, παραμένουν σε μαγνητισμένη κατάσταση ακόμα και όταν το πεδίο αφαιρεθεί. Επίσης χαρακτηρίζονται από χαμηλή σχετική μαγνητική διαπερατότητα (μ_r) [1].

Πέρα από το συνεκτικό πεδίο, άλλη μια παράμετρος που είναι σημαντική για τους μόνιμους μαγνήτες, είναι το μέγιστο ενεργειακό γινόμενο BH_{max} . Η τιμή του βρίσκεται από τη μέγιστη τιμή του γινομένου $|BH|$ στο δεύτερο τεταρτημόριο του βρόχου υστέρησης. Το μέγεθος του μέγιστου ενεργειακού γινομένου αποτυπώνει τη μαγνητική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο υλικό ενός μόνιμου μαγνήτη [4].

Στο σχήμα (2.2) φαίνονται οι βρόχοι υστέρησης της μαγνητικής επαγωγής και της μαγνήτισης ως προς το μαγνητικό πεδίο και το εμβαδό του ενεργειακού γινομένου BH_{max} , που ποσοτικοποιεί την αντοχή ενός μόνιμου μαγνήτη.



Σχήμα 2.2: Το δεύτερο τεταρτημόριο του εσωτερικού μαγνητικού (B-H) βρόχου υστέρησης [5].

Για υλικά με παραμένουσα μαγνήτιση M_R και με αρκετά τετράγωνο σχήματος βρόχο υστέρησης, το μέγιστο ενεργειακό γινόμενο που μπορούν να επιτύχουν

είναι $\mu_0 M_R^2/4$. Η μαγνήτιση του υλικού δε γίνεται να ξεπερνά τη μαγνήτιση κορεσμού του. Η μεγαλύτερη γνωστή μαγνήτιση κορεσμού βρίσκεται σε κράματα κοβαλτίου-σιδήρου και είναι ίση με $1.95 \cdot 10^6 A/m$. Το μεγαλύτερο ενεργειακό γινόμενο, λοιπόν, που μπορεί να επιτευχθεί είναι $1.19 \cdot 10^6 J/m^3$. Για πολλά χρόνια το μέγιστο ενεργειακό γινόμενο ήταν της τάξης των $50 \cdot 10^3 J/m^3$, τιμή που αυξήθηκε σε $160 \cdot 10^3 J/m^3$ με τους μαγνήτες σαμάριου-κοβαλτίου και έφτασε τα $320 \cdot 10^3 J/m^3$, με την παρουσία των μαγνητών νεοδυμίου-σιδήρου-βορίου.

Από τους μόνιμους μαγνήτες μπορούν να παραχθούν σταθερά μαγνητικά πεδία, χωρίς την εφαρμογή ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτό το πλεονέκτημα έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών εφαρμογών που χρησιμοποιούν μόνιμους μαγνήτες [4]. Για την επιλογή του μαγνήτη για οποιαδήποτε εφαρμογή, τα χαρακτηριστικά που πρέπει να συνυπολογιστούν είναι το παραμένον μαγνητικό πεδίο (B_r), το συνεκτικό πεδίο (H_c), το μέγιστο ενεργειακό γινόμενο (BH_{max}) και οι θερμοκρασιακοί συντελεστές [6].

Μεταξύ πολλών εφαρμογών τους, οι μόνιμοι μαγνήτες βρίσκονται σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές, αυτοκίνητα, ηλεκτρονικά προϊόντα, ιατρικά προϊόντα, ηχεία. Έχουν βαρύνουσα σημασία στις στρατιωτικές εφαρμογές αφού χρησιμοποιούνται σε μηχανές πολεμικών αεροπλάνων, σε ηλεκτρονικά συστήματα. Επιπλέον είναι αναπόσπαστο κομμάτι των τηλεπικοινωνιακών και δορυφορικών συστημάτων αλλά και μέρος ενεργειακών τεχνολογιών όπως ανεμογεννήτριες, υδρογεννήτριες κ.α. [5].

2.2.2 Είδη/ιστορία μόνιμων μαγνητών

Ο μαγνητίτης (Fe_3O_4), το οξείδιο του σιδήρου, ήταν ο πρώτος φυσικός μόνιμος μαγνήτης που παρατηρήθηκε. Σήμερα δεν θεωρείται καν σκληρό μαγνητικό

υλικό. Ο άνθρακας στον σίδηρο αυξάνει το συνεκτικό του πεδίο και την υστέρηση, έτσι οι πρώτοι εμπορικοί μόνιμοι μαγνήτες, που εμφανίστηκαν το 1917, ήταν χάλυβες άνθρακα (carbon steels) και είχαν περιεκτικότητα σε άνθρακα 1%. Αργότερα προστέθηκαν σε αυτούς βολφράμιο (tungsten, W) και χρώμιο (chromium, Cr), που βελτίωσαν και άλλο το συνεκτικό πεδίο. Κατόπιν αναπτύχθηκαν οι μαγνήτες με κοβάλτιο, με βελτιωμένες μαγνητικές ιδιότητες, υψηλότερα συνεκτικά πεδία και μέγιστο ενεργειακό γινόμενο ($H_c = 20 \text{ kA/m}$, $(BH)_{max} = 7 \text{ kJ/m}^3$).

Τη δεκαετία του 1930 κατασκευάστηκαν τα κράματα Alnico (Alnico alloys) που περιέχουν σίδηρο (iron, Fe), κοβάλτιο (cobalt, Co), νικέλιο (nickel, Ni) και αλουμίνιο (aluminium, Al). Οι μαγνητικές ιδιότητες του κράματος βελτιώνονται μέσω κατάλληλων θερμικών διαδικασιών, που περιλαμβάνει τη ψύξη, η οποία ακολουθείται από τη θέρμανση στους $700 \text{ }^\circ\text{C}$. Βελτιώνονται επίσης και μέσω ανόπτησης σε μαγνητικό πεδίο, διαδικασία που αυξάνει το συνεκτικό πεδίο και το μέγιστο ενεργειακό γινόμενο. Μπορούν να κατασκευαστούν σε διάφορα σχήματα και έτσι να αυξήσουν τη ανισοτροπία σχήματος. Ένα μειονέκτημά τους είναι ότι είναι πολύ σκληρά και εύθραυστα υλικά, οπότε ο μόνος τρόπος να σχηματιστούν είναι μέσω χύτευσης (casting) ή μέσω πίεσης και τήξης (pressing and sintering) της μεταλλικής σκόνης. ($H_c = 50 - 130 \text{ kA/m}$, $(BH)_{max} = 50 - 75 \text{ kJ/m}^3$)

Το 1952 κατασκευάστηκαν οι σκληροί φερρίτες – εξαφερρίτες. Οι σκληροί εξαγωνικοί φερρίτες είναι συνήθως φερρίτες βαρίου (barium, Ba) ($\text{BaO} \cdot 6\text{Fe}_2\text{O}_3$) ή στροντίου (strontium, Sr) ($\text{SrO} \cdot 6\text{Fe}_2\text{O}_3$). Είναι σχετικά φθηνοί και έχουν συνεκτικά πεδία μεγαλύτερα από τους μόνιμους μαγνήτες Alnico, αλλά το ενεργειακό τους γινόμενο είναι χαμηλό. ($H_c = 150 - 200 \text{ kA/m}$, $(BH)_{max} = 20 \text{ kJ/m}^3$). Στα τέλη του 1950 κατασκευάστηκε ο μαγνήτης από κράμα λευκόχρυσου (platinum, Pt) και κοβαλτίου. Παρόλο που αυτοί οι μαγνήτες έχουν βελτιωμένες μαγνητικές ιδιότητες είναι ακριβοί. ($H_c = 400 \text{ kA/m}$, $(BH)_{max} = 80 \text{ kJ/m}^3$)

Στα μέσα του 1960 ξεκίνησε η κυριαρχία των σπάνιων γαιών στους μόνιμους μαγνήτες. Κατασκευάστηκε ο μόνιμος μαγνήτης κράματος σαμαρίου (samarium, Sm) και κοβαλτίου (Sm-Co). Η αιτία της ανάπτυξης αυτού του κράματος ήταν το γεγονός ότι η ανισοτροπία του κοβαλτίου είναι μεγαλύτερη από αυτή του σιδήρου και του νικελίου. Αρχικά κατασκευάστηκε το κράμα SmCo_5 ($H_c = 760 \text{ kA/m}$, $(BH)_{max} = 150 - 200 \text{ kJ/m}^3$) και το 1972 κατασκευάστηκε το κράμα $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$, που αύξησε περαιτέρω τις τιμές του συνεκτικού πεδίου και του ενεργειακού γινομένου ($H_c = 800 \text{ kA/m}$, $(BH)_{max} = 260 \text{ kJ/m}^3$).

Σαν απόρροια των γεωπολιτικών και οικονομικών συνθηκών στις αρχές του 1980, η ανάγκη για εύρεση φθηνότερων υλικών οδήγησε στην κατασκευή του μόνιμου μαγνήτη από κράμα νεοδυμίου (neodymium, Nd), σιδήρου και βορίου (boron, B). Συγκριτικά με το σαμάριο-κοβάλτιο, τα βασικά πλεονεκτήματα του

κράματος νεοδυμίου-σιδήρου-βορίου είναι ότι δίνει μεγαλύτερο συνεκτικό πεδίο και ενεργειακό γινόμενο και ότι τα υλικά του είναι φθηνότερα [4].

2.2.3 Μόνιμοι Μαγνήτες Νεοδυμίου (NdFeB)

Οι μαγνήτες νεοδυμίου (γνωστοί και ως NdFeB, NIB, Neo magnet), ένας τύπος μαγνήτη σπάνιων γαιών, είναι μόνιμοι μαγνήτες που κατασκευάζονται από κράμα νεοδυμίου, σιδήρου και βορίου και σχηματίζουν μια τετραγωνική κρυσταλλική δομή Nd₂Fe₁₄B. Το υλικό αυτό είναι ο δυνατότερος τύπος μόνιμου μαγνήτη [6].

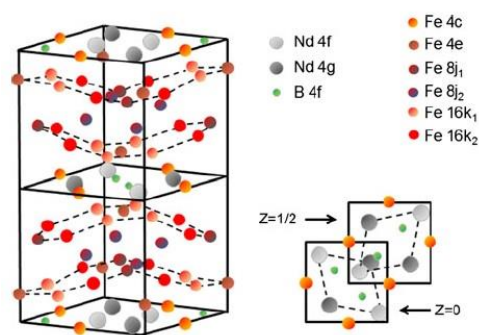
Κατασκευάστηκαν το 1982 ταυτόχρονα από τη General Motors (GM), τη Sumitomo Special Metals Co Ltd. (Sumitomo) και από το U.S. Naval Research Laboratory (NRL). Το καθένα από αυτά τα μέρη ακολούθησε δική του πορεία στο κομμάτι της παρασκευής και της βελτιστοποίησης αυτού του υλικού. Οι εφαρμογές των μόνιμων μαγνητών συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα (1) [5].

Πίνακας 1: Οι εφαρμογές των μόνιμων μαγνητών νεοδυμίου.

Κατηγορία	Παραδείγματα Εφαρμογών
Ηλεκτρονικοί υπολογιστές και αυτοματισμοί γραφείου	Κεφαλές σκληρών δίσκων, εκτυπωτές, φαξ
Αυτοκίνηση και μέσα μεταφοράς	Αισθητήρες, ηλεκτρικές αντλίες καυσίμων, ηλεκτρικά ποδήλατα
Ηλεκτρονικά συστήματα	Κάμερες, μεγάφωνα, ακουστικά, μικρόφωνα, ρολόγια, κινητά τηλέφωνα
Εφαρμογές και συστήματα	Εργαλεία, ζυγαριές, συστήματα ασφάλειας
Βιομηχανικοί αυτοματισμοί	Μηχανές, γεννήτριες, αντλίες
Ιατρική βιομηχανία	Μαγνητικός τομογράφος (MRI), χειρουργικά εργαλεία, ιατρικά εμφυτεύματα
Εναλλακτικές πηγές ενέργειας	Υβριδικά/ηλεκτρικά οχήματα, αερομηχανικά συστήματα, συστήματα αποθήκευσης ενέργειας
Στρατιωτικές εφαρμογές	Οπλικά συστήματα, οχήματα, πλοία, ηλεκτρονικά συστήματα, επικοινωνιακά συστήματα, ραντάρ δορυφόρων

2.2.3.1 Η κρυσταλλική δομή του NdFeB

Τα συστατικά του κράματος Nd-Fe-B σχηματίζουν μια πολύπλοκη τετραγωνική κρυσταλλική δομή (space group $P4_2/mnm$), με 68 άτομα και 6 κρυσταλλογραφικά διακριτές περιοχές του σιδήρου ανά μοναδιαία κυψελίδα. Η δομή 2-14-1, που αναπαρίσταται στο σχήμα (2.3), φαίνεται ως μια κλιμακούμενη διάταξη με εξαγωνικές δομές σιδήρου τοποθετημένες υπό κλίση, που χωρίζονται από επίπεδα που περιέχουν άτομα νεοδυμίου και βορίου [5].



Σχήμα 2.3: Η κρυσταλλική δομή του NdFeB. Φαίνεται επίσης δεξιά και η κάτοψη του τετραγωνικού c-άξονα [5].

2.2.3.2 Χαρακτηριστικά του NdFeB

Οι μαγνητικές ιδιότητες των μαγνητών νεοδυμίου, εξαρτώνται από τη σύνθεση, τη μικροδομή και τη τεχνική κατασκευής του κράματος. Οι μαγνήτες νεοδυμίου έχουν αρκετά υψηλό συνεκτικό πεδίο και ενεργειακό γινόμενο, αλλά χαμηλή θερμοκρασία Curie σε σχέση με άλλους τύπους μαγνητών [6].

Οι βασικότεροι μαγνήτες που αναπτύχθηκαν περιέχουν νεοδύμιο-σίδηρο-βόριο στην κατάσταση $Nd_2Fe_{14}B$, όπου παρατηρείται το μεγαλύτερο συνεκτικό πεδίο και ενεργειακό γινόμενο. Τα κράματα νεοδυμίου-σίδηρου-βόριου είναι πολύ ευαίσθητα ως προς τις μαγνητικές τους ιδιότητες όταν υπόκεινται σε μεταλλουργικές κατεργασίες. Δύο βασικές μέθοδοι παρασκευής έχουν επινοηθεί. Το υλικό παράγεται είτε μέσω κονιορτοποίησης και πυροσυσσωμάτωσης (powdering and sintering), είτε μέσω ταχείας ψύξης (rapid quenching).

Το βασικό πλεονέκτημα αυτών των κραμάτων σε σχέση με τα κράματα σαμάρριου-κοβαλτίου είναι ότι τα συστατικά τους, όπως το νεοδύμιο και ο σίδηρος, είναι φθηνότερα από το σαμάρριο και το κοβάλτιο. Ένα μειονέκτημα είναι ότι έχουν θερμοκρασίες Curie σχετικά χαμηλές, περίπου 300 – 500 °C, που σημαίνει ότι οι μαγνητικές τους ιδιότητες είναι περισσότερο ευαίσθητες στη θερμοκρασία από αυτές των κραμάτων σαμάρριου-κοβαλτίου. Τυπικές τιμές για το συνεκτικό πεδίο είναι $H_c = 1100 \text{ kA/m}$ και για το ενεργειακό γινόμενο $(BH)_{max} = 300 - 350 \text{ kJ/m}^3$ [4].

Οι μαγνήτες νεοδυμίου βαθμολογούνται με βάση το μέγιστο ενεργειακό γινόμενο, με τις υψηλότερες τιμές του να αντιστοιχούν σε ισχυρότερους μαγνήτες. Ο τρόπος αποτύπωσης του μεγέθους αυτών των βαθμών, γίνεται με μια αρίθμηση που συνδυάζει γράμματα και αριθμούς σε ένα εύρος από N35 έως N52 [7].

2.3 Το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών

Ο μαγνήτης είναι μια συνεχής κατανομή διπόλων που καταλαμβάνουν όγκο dV και έχουν μαγνητική διπολική ροπή $dm = MdV$. Η μαγνήτιση θεωρείται σταθερή σε όλο τον όγκο του μαγνήτη, γίνεται μηδέν αμέσως έξω από αυτόν και παραμένει αμετάβλητη σε κάθε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Το βαθμωτό δυναμικό σε ένα σημείο x , που παράγεται από ένα μαγνητικό δίπολο τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων δίνεται από τη σχέση:

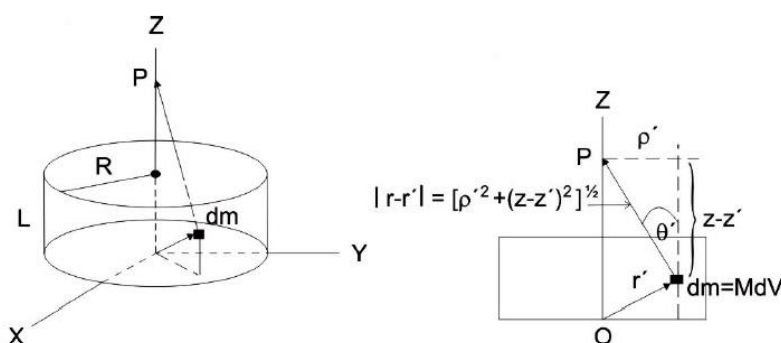
$$\Phi_{dipole}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{n}}{|\vec{x}|^2} \quad (2.2)$$

Και η μαγνητική επαγωγή από το νόμο του Biot-Savart (1.4), είναι: $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{n}(\vec{m} \cdot \hat{n}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}$.

Για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου όλου του μαγνήτη, γίνεται ολοκλήρωση στον όγκο όλων των συνεισφορών των απειροστών διπόλων, είτε του βαθμωτού δυναμικού είτε του μαγνητικού πεδίου. Η απόφαση για το ποιο μέγεθος ολοκληρώνεται εξαρτάται από την κάθε περίπτωση. Αν υπολογιστεί από το βαθμωτό δυναμικό τότε μέσω της σχέσης: $\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi$, προκύπτει η μαγνητική επαγωγή [8].

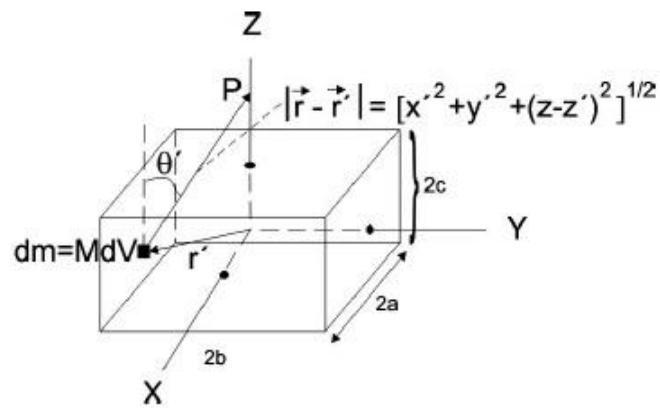
Έτσι για έναν κυλινδρικό μαγνήτη, όμοιο με αυτόν του επόμενου σχήματος (2.4), το μαγνητικό πεδίο στον άξονα z είναι:

$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right\} \quad (2.3)$$



Σχήμα 2.4: Σχηματική αναπαράσταση του κυλινδρικού μαγνήτη (αριστερά). Σχήμα για τον υπολογισμό του πεδίου που παράγεται από τον μαγνήτη (δεξιά) [8].

Έστω ορθογώνιος ή κυβικός μαγνήτης, όπως αυτός του σχήματος (2.5):



Σχήμα 2.5: Σχηματική αναπαράσταση για τον υπολογισμό του πεδίου από ένα ορθογώνιου σχήματος μαγνήτη [8].

Το μαγνητικό πεδίο στον άξονα z είναι:

$$B(z) = \frac{\mu_0 M}{\pi} \left\{ \arctan \frac{ab}{(z-c) \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + (z-c)^2}} - \arctan \frac{ab}{(z+c) \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + (z+c)^2}} \right\} \quad (2.4)$$

Για το μαγνητικό πεδίο στις τρεις διαστάσεις ισχύει η απλουστευμένη σχέση [3]:

$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.5)$$

3. Αισθητήρες – Αισθητήρες Hall

3.1. Αισθητήρες

3.1.1 Ορισμός Αισθητήρων

Ο αισθητήρας ορίζεται συχνά ως 'η συσκευή που δέχεται και αποκρίνεται σε ένα σήμα ή μια διέγερση'. Αυτός ο ορισμός είναι αρκετά ευρύς, έτσι ώστε να καλύπτει σχεδόν οτιδήποτε από το ανθρώπινο μάτι έως την πυροδότηση ενός όπλου. Ένας πιο συγκεκριμένος ορισμός λέει ότι αισθητήρας είναι μια συσκευή που δέχεται ερεθίσματα, που αντιστοιχούν σε μια φυσική ποσότητα και αποκρίνεται με ένα ηλεκτρικό σήμα. Η λέξη διέγερση/ερέθισμα (stimulus) αναφέρεται στην ποσότητα, ιδιότητα ή κατάσταση που γίνεται δεκτή από τη συσκευή και μετατρέπεται σε ηλεκτρικό σήμα.

Οι αισθητήρες βρίσκουν εφαρμογές σε μια πληθώρα πεδίων. Μερικοί τομείς εφαρμογών των αισθητήρων είναι ο κατασκευαστικός, ο οικονομικός, οι τομείς της ενέργειας, της πληροφορίας και των τηλεπικοινωνιών, ο τομέας της υγείας και της φαρμακοβιομηχανίας, της αγροκαλλιέργειας, της αυτοκίνησης, της πλοήγησης, στρατιωτικές εφαρμογές, αεροδιαστημικές εφαρμογές, εφαρμογές επιστημονικών μετρήσεων κ.α.

3.1.2 Ταξινόμηση Αισθητήρων

Η ταξινόμηση των αισθητήρων γίνεται με πολλούς τρόπους. Οι τρόποι κατηγοριοποίησης μπορεί να βασίζονται στην ποσότητα που μετρούν, στα υλικά από τα οποία είναι κατασκευασμένοι ή ακόμα και στη χρήση τους σε διάφορους τομείς.

Όλοι οι αισθητήρες μπορούν να είναι δύο τύπων: παθητικοί ή ενεργοί. Ένας παθητικός αισθητήρας δε χρειάζεται καμία πηγή ενέργειας, παράγει ένα ηλεκτρικό σήμα ως απόκριση σε ένα εξωτερικό ερέθισμα. Οι ενεργοί αισθητήρες απαιτούν την εξωτερική παροχή ενέργειας για να λειτουργήσουν, που ονομάζεται σήμα διέγερσης (excitation signal). Το σήμα αυτό επεξεργάζεται ο αισθητήρας και παράγει το σήμα εξόδου.

Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης των αισθητήρων γίνεται αν συνυπολογιστούν μερικές ιδιότητές τους που έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Τέτοιες ιδιότητες μπορεί να είναι η ακρίβεια (accuracy), η αβεβαιότητα (uncertainty), η επαναληψιμότητα (repeatability), η ευαισθησία (sensitivity), η υστέρηση (hysteresis), η διακριτική ικανότητα (resolution), η γραμμικότητα (linearity), η

αξιοπιστία (reliability), το μέγεθος (size) και το βάρος (weight), η συμβατότητα (compatibility), το εύρος λειτουργίας, ο θόρυβος (noise). Επιπλέον κάποιες ακόμη ιδιότητες μπορεί να θεωρηθούν η σταθερότητα (stability), η ταχύτητα απόκρισης (speed of response), ο χρόνος ζωής (operating life), το κόστος (cost), το εύρος απόκρισης (stimulus range (span)) κ.α.

3.1.3 Χαρακτηριστικά Αισθητήρων

Ένας αισθητήρας καθορίζεται από το φαινόμενο στο οποίο βασίζεται η λειτουργία του και από κάποια γενικά χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν τη λειτουργία του. Κάποια από αυτά τα χαρακτηριστικά μπορεί να είναι:

- Ακρίβεια (accuracy): Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό των αισθητήρων είναι η ακρίβεια, που αναφέρεται στην έλλειψη ακρίβειας που υπάρχει στις μετρήσεις του αισθητήρα. Μετράται ως η υψηλότερη απόκλιση από τη τιμή, που αναγράφει ο αισθητήρας ως ιδανική ή αληθή, για συγκεκριμένο σήμα διέγερσης. Αναφέρεται δηλαδή στο μεγαλύτερο σφάλμα που μπορεί να περιέχεται στις μετρήσεις.

- Αβεβαιότητα (uncertainty): Όσο ακριβής και αν είναι η μέτρηση, παραμένει να είναι μια προσέγγιση ή εκτίμηση της τιμής του σήματος διέγερσης που μετράται, προερχόμενο από μία συγκεκριμένη ποσότητα του δείγματος. Το αποτέλεσμα της μέτρησης, λοιπόν δε μπορεί να θεωρηθεί απόλυτα σωστό αν δε συνδυάζεται με την ποσοτικοποιημένη αβεβαιότητά του. Η εκτίμηση του σφάλματος αβεβαιότητας βασίζεται στον συνυπολογισμό όλων των πληροφοριών που είναι διαθέσιμες. Τέτοιες πληροφορίες μπορεί να είναι προηγούμενες μετρήσεις, εμπειρία από τη γενική συμπεριφορά σχετικών αισθητήρων, υλικών και οργάνων, οδηγίες του κατασκευαστή, αναφορά με τα δεδομένα της βαθμονόμησης κ.α.

- Επαναληψιμότητα (repeatability): Το σφάλμα στην επαναληψιμότητα προκαλείται όταν ο αισθητήρας δεν είναι ικανός να αναπαράγει τις ίδιες τιμές κάτω από ίδιες συνθήκες. Ως επαναληψιμότητα μετράται ο βαθμός στον οποίο παρέχεται ίδιο σήμα εξόδου όταν τροφοδοτείται από συγκεκριμένο σήμα εισόδου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

- Ευαισθησία (sensitivity): Η ευαισθησία ενός αισθητήρα εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή του. Συγκεκριμένα οποιοσδήποτε φυσικός φραγμός μεταξύ του αισθητήρα και του αντικειμένου μπορεί να θεωρηθεί παράγοντας ευαισθησίας. Η ευαισθησία μετράται ως ο λόγος του σήματος εξόδου προς την εκάστοτε διέγερση.

- Υστέρηση (hysteresis): Σφάλμα υστέρησης είναι οι διαφορές του σήματος εξόδου του αισθητήρα, όταν το σήμα εισόδου προσεγγίζεται από την αντίθετη κατεύθυνση.

Οι κύριες αιτίες αυτού του σφάλματος είναι η γεωμετρία του σχεδιασμού, οι προστριβές και δομικές αλλαγές του υλικού.

- Διακριτική ικανότητα (resolution): Διακριτική ικανότητα ορίζεται ως το μέγεθος του σήματος εισόδου που έχει σαν αποτέλεσμα σήμα εξόδου με το μικρότερο βήμα, το μικρότερο διάστημα δηλαδή στο οποίο μπορεί να μετρήσει ο αισθητήρας.

- Γραμμικότητα (linearity): Η γραμμικότητα ορίζεται ως ο βαθμός στον οποίο προσεγγίζεται η συνάρτηση του σήματος εξόδου προς το σήμα εισόδου από μια ευθεία γραμμή. Ένας αισθητήρας μπορεί να εμφανίζει γραμμικότητα σε τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης μεταφοράς.

- Αξιοπιστία (reliability): Η αξιοπιστία είναι η ικανότητα ενός αισθητήρα, να εκτελεί την απαιτούμενη συνάρτηση μεταφοράς κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες για συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Μπορεί να εκφραστεί με στατιστικούς όρους ως η πιθανότητα η συσκευή να λειτουργήσει χωρίς σφάλμα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και αριθμό χρήσεων.

- Διαστάσεις - το μέγεθος (size) και το βάρος (weight): Ένα από τα χαρακτηριστικά του αισθητήρα είναι και οι διαστάσεις του. Το μέγεθός του δηλαδή αλλά και το βάρος του είναι παράγοντες που καθορίζουν πολλές παραμέτρους της συσκευής.

- Θόρυβος (noise): Ο θόρυβος στους αισθητήρες και στα κυκλώματα μπορεί να παρουσιάσει σημαντικά σφάλματα και πρέπει να συνυπολογίζεται. Ο θόρυβος δε μπορεί ποτέ να εξαλειφθεί, μπορεί μόνο να εμποδιστεί αναλόγως τη φύση, τη σοβαρότητα και το κόστος/δυσκολία του εγχειρήματος μείωσής του. Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι θορύβου: ο εσωτερικός θόρυβος (inherent noise), που προέρχεται μέσα από το ίδιο το κύκλωμα και ο εξωτερικός/παρεμβαλλόμενος (interference noise), που προέρχεται από το εξωτερικό του κυκλώματος [6].

3.1.4 Βαθμονόμηση Αισθητήρων

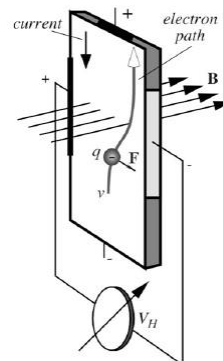
Για να εξασφαλιστεί η ακρίβεια και η επαναληψιμότητα στις μετρήσεις του αισθητήρα απαιτείται η βαθμονόμηση του (calibration). Η βαθμονόμηση γίνεται δηλαδή, με σκοπό την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων στις μετρήσεις.

Η βαθμονόμηση σε ένα μαγνητόμετρο γίνεται με την εφαρμογή ενός γνωστού μαγνητικού πεδίου και τη συσχέτιση του πεδίου αυτού με την παραγόμενη τάση εξόδου του αισθητήρα. Η βαθμονόμηση πρέπει να γίνεται σε περιβάλλοντα όπου έχουν εξαλειφθεί όλα τα εξωτερικά μαγνητικά πεδία, όπως σε διατάξεις μαγνητικής θωράκισης. Από τις προηγούμενες μετρήσεις εξαγονται τα σημεία βαθμονόμησης (calibration points) και με αυτά κατασκευάζεται η καμπύλη βαθμονόμησης του αισθητήρα.

3.2. Αισθητήρες Hall

3.2.1 Το φαινόμενο Hall

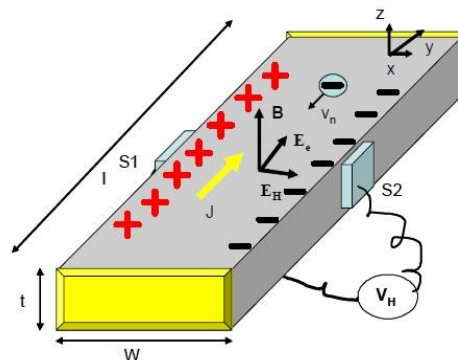
Το φυσικό φαινόμενο Hall ανακαλύφθηκε από τον Ε. Η. Hall στο πανεπιστήμιο Johns Hopkins το 1879. Το φαινόμενο βασίζεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ κινούμενων ηλεκτρικών φορέων και ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Στα μέταλλα, αυτοί οι φορείς είναι τα ηλεκτρόνια. Το ηλεκτρόνιο κινείται μέσα σε μια επίπεδη λωρίδα (strip), από αγωγίμο ή ημιαγωγίμο υλικό, η οποία είναι τοποθετημένη μέσα σε ένα, κάθετο προς αυτή, μαγνητικό πεδίο όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.1).



Σχήμα 3.1: Το σχέδιο του αισθητήρα Hall [6].

Λόγω του μαγνητικού πεδίου θα εμφανιστεί μια απωστική δύναμη Lorentz, η οποία μετακινεί τα κινούμενα ηλεκτρόνια στη δεξιά πλευρά του υλικού, με αποτέλεσμα να υπάρχει αύξηση του αρνητικού φορτίου σε αυτή την πλευρά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την παραγωγή τάσης κάθετη στο ρεύμα και στο μαγνητικό πεδίο, που ονομάζεται τάση Hall (V_H). Το πρόσημο και το μέγεθος της τάσης Hall εξαρτάται εξίσου από την κατεύθυνση και το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου και του ηλεκτρικού ρεύματος [6].

Στο σχήμα (3.2) φαίνεται μια λωρίδα κατασκευασμένη από ημιαγωγίμο υλικό, που διαρρέεται από ρεύμα και ταυτόχρονα βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο. Η λεπτή ημιαγωγίμη πλάκα, διαστάσεων (l, w, t), είναι εφοδιασμένη με τέσσερις επαφές. Οι δυο πολωμένες επαφές CC χρησιμοποιούνται για τη ρυθμιζόμενη



παροχή ρεύματος, ενώ οι επαφές S1S2 συνδέονται με ένα βολτόμετρο για τη μέτρηση της τάσης Hall.

Σχήμα 3.2: Σχέδιο του αισθητήρα Hall. Το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο B και ένα ρεύμα I ρέει στη y -κατεύθυνση μέσω των επαφών CC. Η τάση εξόδου μετράται μέσω των επαφών S1S2 [9].

Όταν δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο, τα ηλεκτρόνια κινούνται κατά τον άξονα y , παράλληλα στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E}_e . Μόλις εφαρμοστεί το μαγνητικό πεδίο, τα κινούμενα με ταχύτητα \vec{v}_n ηλεκτρόνια μετακινούνται υπό την επίδραση της δύναμης Lorentz \vec{F}_L , ως απόκριση στο μαγνητικό πεδίο \vec{B} και το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}_e . Η δύναμη \vec{F}_L δίνεται από τη σχέση: $\vec{F}_L = e(\vec{E}_e + \vec{v}_n \times \vec{B})$, όπου $e = -q$ για τα ηλεκτρόνια.

Τα ηλεκτρόνια, λόγω της μαγνητικής δύναμης κατευθύνονται προς το ένα άκρο της λωρίδας, γεγονός που έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση στη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων στο άλλο. Για την επαναφορά του συστήματος δημιουργείται ένα ηλεκτρικό πεδίο E_H , μεταξύ των δύο άκρων και κινεί τους φορείς, έτσι ώστε να μειωθεί το πλεόνασμα φορτίου. Η ισορροπία αποκαθίσταται όταν η μαγνητική δύναμη που σπρώχνει τους φορείς, ισορροπηθεί με την ηλεκτρική δύναμη που προσπαθεί να τους επαναφέρει. Η ισορροπία εκφράζεται από τη σχέση: $\vec{E}_H + \vec{v}_n \times \vec{B} = 0$. Αυτό οδηγεί στον ορισμό του πεδίου Hall, E_H , που είναι μόνο συνάρτηση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων και του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου και δίνεται από τη σχέση: $\vec{E}_H = -\vec{v}_n \times \vec{B}$.

Θα δείξουμε ότι η τάση Hall θα εκφραστεί ως συνάρτηση του ρεύματος και του μαγνητικού πεδίου. Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων σχετίζεται με την κινητικότητα (mobility) τους μ_n και το εξωτερικό πεδίο από τη σχέση: $\vec{v}_n = -\mu_n \vec{E}_e$. Η πυκνότητα ρεύματος (current density) \vec{J} σχετίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο μέσω του νόμου του Ohm: $\vec{J} = \sigma \vec{E}_e$. Η αγωγιμότητα του υλικού σ (material conductivity) εκφράζεται μέσω: $\sigma = nq\mu_n$, όπου n η πυκνότητα των ηλεκτρονίων (density of electrons).

Η τάση Hall V_H , που εμφανίζεται κατά μήκος των δύο ηλεκτροδίων (S1S2) μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση: $V_H = \int_{S1S2} \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = -\frac{J}{nq} Bw$, όπου η πυκνότητα ρεύματος J σχετίζεται από το πολωμένο ρεύμα I μέσω της σχέσης: $J = I/wt$.

Για ομογενές, ιστροπικό ορθογώνιο και απείρου μήκους αισθητήρα Hall, η τάση Hall μπορεί να συσχετιστεί με το ρεύμα και το μαγνητικό πεδίο συνδυάζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις:

$$V_H = \frac{R_H}{t} I B \quad (3.1)$$

Όπου R_H ο συντελεστής Hall.

Και πιο γενικά, αν το μαγνητικό πεδίο \vec{B} είναι ελαφρώς στραμμένο, σε γωνία γ σε σχέση με τη διεύθυνση της λωρίδας, η τιμή της τάσης Hall δίνεται από τη σχέση: $V_H = \frac{R_H}{t} I B \cos\gamma$

Ο συντελεστής Hall δίνεται για τα ηλεκτρόνια: $R_H = -1/nq = -\mu_n/\sigma$. Ο συντελεστής Hall σχετίζεται με την πυκνότητα των ηλεκτρονίων μέσα στο υλικό και την κινητικότητά τους. Το αρνητικό πρόσημο χρησιμοποιείται γιατί έχουμε ηλεκτρόνια, που είναι αρνητικά φορτισμένα. Σε άλλη περίπτωση, με θετικούς φορτισμένους φορείς, το πρόσημο γίνεται θετικό [9].

3.2.2 Ο αισθητήρας Hall

Ο αισθητήρας Hall βασίζεται στο προηγούμενο, ομώνυμο, φαινόμενο [6]. Ένας αισθητήρας Hall αποτελείται από ένα, μικρότερο του χιλιοστού, ημιαγωγικό υλικό (στοιχείο Hall), πάχους από 0.01 έως 0.1mm, που είναι το ενεργό μέρος, είναι ευαίσθητο, δηλαδή, στο μαγνητικό πεδίο. Είναι επίσης εφοδιασμένος με δύο ηλεκτρόδια που άγουν το ρεύμα I στην αγώγιμη επιφάνεια και δύο ηλεκτρόδια που μετρούν τη τάση Hall. Το στοιχείο Hall είναι συνήθως τοποθετημένο σε ένα κεραμικό υπόστρωμα, το οποίο παρέχει μηχανική υποστήριξη αλλά και θερμοκρασιακή σταθερότητα.

Τα βασικά χαρακτηριστικά στην επιλογή των αισθητήρων Hall είναι οι πραγματικές διαστάσεις, το περιορισμένο μέγεθος των επαφών και η επιλογή του κατάλληλου στοιχείου Hall, το οποίο έγκειται στη γεωμετρία και το είδος του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο. Από τον ορισμό του φαινομένου, δείχνει αναμενόμενο ότι κατάλληλα υλικά είναι αυτά με υψηλή κινητικότητα και χαμηλή αγωγιμότητα. Τα μέταλλα, λοιπόν, δεν αποτελούν καλή επιλογή. Συνήθως χρησιμοποιούνται ημιαγωγοί τύπου n , όπου οι κυρίαρχοι φορείς φορτίου είναι τα ηλεκτρόνια, που έχουν μεγαλύτερη κινητικότητα από τις οπές. Κατάλληλοι υποψήφιοι είναι στοιχεία όπως πυρίτιο Si και τα στοιχεία III-V του περιοδικού πίνακα, όπως το ίνδιο-αντιμόνιο (InSb), το ίνδιο-αρσενικό (InAs) και το γάλλιο-αρσενικό (GaAs). Τα στοιχεία III-V συνδυάζουν υψηλή κινητικότητα φορέων και ικανοποιητική τιμή αγωγιμότητας [9].

- Μετρήσεις αισθητήρα Hall σε έναν άξονα (μία διάσταση)

Ένας αισθητήρας Hall που μετρά το πεδίο σε μία διάσταση μπορεί να τοποθετηθεί πάνω σε ένα στήριγμα και να έχει μια διάταξη σε ποικιλία σχημάτων και κατευθύνσεων της ενεργού περιοχής. Οι αισθητήρες Hall διαχωρίζονται σε δύο τύπους: τους επίπεδους αισθητήρες Hall, που είναι κατάλληλοι για μετρήσεις ομογενών μαγνητικών πεδίων και τους μη-επίπεδους αισθητήρες Hall, που είναι κατάλληλοι για μετρήσεις μη-ομογενών μαγνητικών πεδίων.

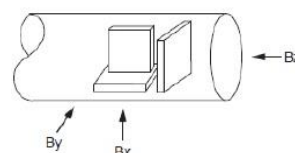
Οι επίπεδοι αισθητήρες χωρίζονται με τη σειρά τους, σε δύο τύπους, τους κάθετους αισθητήρες Hall που μετρούν την κύρια συνιστώσα του πεδίου, η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια του υλικού, και τους αξονικούς αισθητήρες Hall, που είναι κυλινδρικοί, η επιφάνεια του στοιχείου τους είναι κάθετη στον κύλινδρο και μετρούν πεδία παράλληλα στον άξονα. Οι μη-επίπεδοι αισθητήρες Hall έχουν διάφορα σχήματα όπως ορθογώνιο, σταυρό, γέφυρα κ.λπ. Ο βασικότερος τέτοιου τύπου αισθητήρας είναι η κάθετη διάταξη Hall (vertical Hall device, VHD), που ονομάζεται κάθετη επειδή παράγει Hall κάθετο στο επίπεδο του στοιχείου Hall και μετρά πεδία παράλληλα στην επιφάνεια του υλικού. Υπάρχουν επίσης οι

κυλινδρικές διατάξεις Hall (cylindrical devices), που είναι ευαίσθητες σε μαγνητικά πεδία κυκλικού σχήματος. Ένας ακόμη τύπος μη-επίπεδων Hall είναι οι επίπεδοι αισθητήρες Hall με ανοιχτή βάση ('planar' Hall device with open bottom), οι οποίοι μαζί με τον αισθητήρα VHD μπορούν να δώσουν ένα αισθητήρα Hall τριών αξόνων [9].

- Μετρήσεις αισθητήρα Hall σε δύο και τρεις άξονες (διαστάσεις)

Οι αισθητήρες Hall δύο αξόνων είναι συσκευές που μετρούν ταυτόχρονα τις δύο συνιστώσες B_x , B_y , και κατασκευάζονται συνδυάζοντας κάθετα, δύο κάθετους αισθητήρες χωρίς βάση (vertical bottomless generators).

Για την κατασκευή ενός αισθητήρα που μετρά ταυτόχρονα και τις τρεις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου (B_x , B_y , B_z), χρειάζονται να τοποθετηθούν τρεις αισθητήρες Hall με κατεύθυνση τις τρεις κύριες



Σχήμα 3.3: Τριών αξόνων αισθητήρας Hall κατασκευάζεται συσχετίζοντας τρεις μονο-αξονικούς αισθητήρες Hall [9].

συνιστώσες και να στηριχτούν σε βάσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.3). Αυτή η διάταξη έχει μερικά μειονεκτήματα. Η χωρική ανάλυση είναι περιορισμένη από την απόσταση μεταξύ των τριών αισθητήρων. Επίσης υπάρχει αμφιβολία ως προς την ακρίβεια στην καθετότητα των τριών αισθητήρων, η οποία εξαρτάται από την επεξεργασία της τοποθέτησής τους. Ένα ακόμα μειονέκτημα είναι ότι η μέτρηση δεν είναι σημειακή, καθώς η πυκνότητα της ροής δε μετράται στο ίδιο σημείο. Τέλος ο αριθμός των επαφών σε μια τέτοια διάταξη είναι μεγάλος. Το κύριο πλεονέκτημα της κατασκευής είναι ότι η ακρίβεια του ενός μόνο αισθητήρα Hall μπορεί να διατηρηθεί στις τρεις διαστάσεις.

Στη συνέχεια φαίνεται ένας πίνακας (Πίνακας 2) με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης ενός αισθητήρα Hall [9].

Πίνακας 2: Τα πλεονεκτήματα (+) και τα μειονεκτήματα (-) της χρήσης ενός αισθητήρα Hall.

(+)	(-)
Ευκολία στη χρήση	Ευαισθησία στη θερμοκρασία
Κατάλληλος για πολύπλοκες γεωμετρίες	Μη γραμμικότητα στη $V_H=f(B)$
Φθηνός	Offset
Γρήγορες μετρήσεις (άμεση απόκριση)	Μεταβολή της ευαισθησίας συναρτήσει του χρόνου
Καλύπτει μεγάλο εύρος μαγνητικού πεδίου	Θόρυβος
Μεσαία ακρίβεια για μέτρηση με ένα στοιχείο (~0.01%), διακριτική ικανότητα	Χαμηλή ακρίβεια στα ολοκληρωμένα μετρήσεων σε πολλές διαστάσεις: 1%

~0.5G	έως 0.1%
Μπορεί να χαρτογραφήσει το μαγνητικό πεδίο αφού μετρά σε τρεις συνιστώσες	Παρεμβολές μεταξύ των τριών Hall για μετρήσεις σε διαφορετικές κατευθύνσεις
Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ποικίλα μαγνητικά πεδία	Βαθμονόμηση (πολύ-αξονικοί αισθητήρες)
Δουλεύει και για μη-ομογενή μαγνητικά πεδία	Κβαντικό φαινόμενο Hall (κρυογονικές θερμοκρασίες)
Δουλεύει σε κρυογονικές θερμοκρασίες	

Η βαθμονόμηση του αισθητήρα Hall είναι απαραίτητη για το καθορισμό ενός ορθού σήματος από τον αισθητήρα. Η τάση Hall δεν είναι γραμμική συνάρτηση του B και είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας. Αυτές οι συναρτησιακές εξαρτήσεις της τάσης Hall πρέπει να είναι γνωστές πριν από τη διεξαγωγή των μετρήσεων. Η βαθμονόμηση είναι μια δοκιμή κατά την οποία γνωστές τιμές μαγνητικού πεδίου εφαρμόζονται στη διάταξη Hall και καταγράφονται οι τιμές εξόδου του αισθητήρα. Αυτή η διαδικασία λαμβάνει χώρα σε διάφορα εύρη μαγνητικών πεδίων και επαναλαμβάνεται συχνά για την αποφυγή σφαλμάτων. Στην περίπτωση των αισθητήρων τριών αξόνων η βαθμονόμηση είναι δύσκολη, εξαιτίας κυρίως της παρουσίας της αμοιβαίας σύζευξης μεταξύ των αξόνων.

4. Το γεωμαγνητικό πεδίο

4.1 Η εξίσωση του γεωμαγνητικού πεδίου

Το μαγνητικό πεδίο της γης είναι ένα διάνυσμα με χρονικές διακυμάνσεις από δευτερόλεπτα έως χιλιάδες χρόνια. Η μέση τιμή αυτών των διακυμάνσεων τείνει στο μηδέν (<1nT) κατά τη διάρκεια ενός έτους, αλλά για μια συγκεκριμένη ημέρα, είναι δυνατή η καταγραφή μια παρόμοιας ακολουθίας με το χρόνο, σε διαφορετικά σημεία της γης. Αυτό έγινε πρώτα αντιληπτό το 1825 από τις ημερήσιες καταγραφές στο Kazan (Ρωσία) και στο Paris (Γαλλία), πόλεις που απέχουν 4000km μεταξύ τους, και οι οποίες συγκρίθηκαν. Ο Gauss τότε εμπνεύστηκε την καθιέρωση του Magnetische Verein, μια παγκόσμιας κλίμακας σύμπραξη 50 παρατηρητηρίων, συντονισμένα από το Göttingen (Γερμανία), όπου έγιναν λεπτομερείς μετρήσεις του μεγέθους και της κατεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου της γης. Μια γρήγορη επιτυχία του δικτύου ήταν η απόδειξη ότι η εσωτερική πηγή του πεδίου, που κυμαίνεται σήμερα από 30 έως 60μT σε διαφορετικά σημεία στη γη, έχει μία μέση τιμή πεδίου Η ίση περίπου με 40A/m.

Ο Gauss ανέπτυξε την ανάλυση των σφαιρικών αρμονικών, για να μειώσει την ποσότητα των δεδομένων που προέρχονταν από τα παρατηρητήρια. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν ηλεκτρικά ρεύματα στην επιφάνεια της γης, το πεδίο μπορεί να προκύψει από το μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό, που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace: $\nabla^2\Phi_m = 0$. Οι λύσεις της Laplace είναι οι: $\Phi_m = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l [A_l^m r^l + B_l^m r^{-(l+1)}] Y_l^m(\theta, \varphi)$, όπου Y_l^m οι σφαιρικές αρμονικές που σχετίζονται με τα πολυώνυμα Legendre $P_l^m(\cos\theta)$.

Εδώ θ και φ είναι οι συμπληρωματικές γωνίες του γεωγραφικού πλάτους (latitude) και το γεωγραφικό μήκος (longitude) αντίστοιχα. Οι συντελεστές A_l^m περιγράφουν τη συνεισφορά των πηγών έξω από τη σφαίρα της γης, με ακτίνα κύκλου $r=a=6371\text{km}$, ενώ οι συντελεστές B_l^m δίνουν τη συνεισφορά των εσωτερικών πηγών. Αποδεικνύεται ότι τα A_l^m είναι αμελητέα σε σχέση με τα B_l^m . Το δυναμικό των εσωτερικών πηγών μπορεί τότε να γραφεί ως:

$$\varphi_{mi} = \frac{a}{\mu_0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l^m(\cos\theta) [g_l^m \cos\varphi + h_l^m \sin\varphi] \quad (4.1)$$

όπου φ_{mi} είναι σε Ampere και τα g_l^m, h_l^m σε Tesla . Μερικές τιμές των βασικών σφαιρικών αρμονικών του γεωμαγνητικού πεδίου σε nT δίνονται στον επόμενο πίνακα (3).

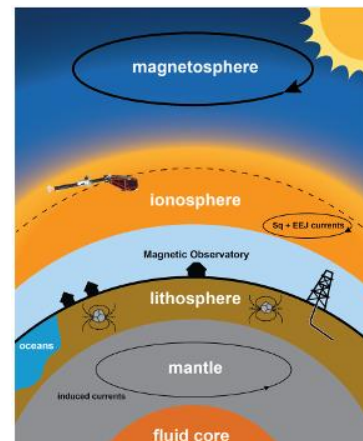
Πίνακας 3: Μερικές τιμές των βασικών σφαιρικών αρμονικών του γεωμαγνητικού πεδίου σε nT.

		Τάξη (n)	Τάξη (n)	Τάξη (n)	Τάξη (n)
Συντελεστές	Βαθμοί (m)	1	2	3	4
	4				169
g_n^m	3			835	-426
	2		1691	1244	363
	1	-1903	2045	-2208	780
g_n^0	0	-29877	-2073	1300	937
	1	5497	-2191	-312	233
	2		-309	284	-250
h_n^m	3			-296	68
	4				-298

Το 90% του γήινου πεδίου αντιπροσωπεύεται από ένα δίπολο μεγέθους $\frac{4a^3}{\mu_0} \sqrt{g_1^{02} + g_1^{12} + h_1^{12}}$, $m = 7.9 \times 10^{22} Am^2$, με κλίση σε γωνία $\theta = \tan^{-1} \left\{ g_1^0 / \sqrt{g_1^{12} + h_1^{12}} \right\} = 15^\circ$ στον άξονα της γης και $\varphi = \arctan(h_1^1 / g_1^1)$. Οι πρώτες οχτώ σφαιρικές αρμονικές αντιπροσωπεύουν το πεδίο που παράγεται από τον πυρήνα της γης, με τους υψηλότερους όρους να εκφράζουν τη συνεισφορά των μαγνητικών ορυκτών στα πρώτα 30km από το φλοιό της γης, για θερμοκρασίες που δεν ξεπερνούν τις αντίστοιχες θερμοκρασίες Curie των ferromagnetic αυτών υλικών [1].

4.2 Πηγές του γεωδυναμικού πεδίου

Είναι γενικά αποδεκτό ότι το μαγνητικό πεδίο της γης και άλλων ουράνιων σωμάτων παράγεται από την κίνηση ενός υγρού πυρήνα. Στην περίπτωση της γης (Σχήμα 4.1), ο υγρός πυρήνας που έχει εσωτερική και εξωτερική ακτίνα 1220 και 3485 km αντίστοιχα, αποτελείται από λιωμένο σίδηρο και μικρές ποσότητες νικελίου και άλλων στοιχείων. Τα λιγότερο ηλεκτραρνητικά στοιχεία των οξειδίων καταλήγουν στον μανδύα [1].



Σχήμα 4.1: Η εσωτερική και εξωτερική δομή της γης [25].

4.2.1 Το εσωτερικό γεωμαγνητικό πεδίο

Από τα 6371km ως τα 2900km βάθους η γη αποτελείται κυρίως από σίδηρο. Ο πυρήνας της γης χωρίζεται σε δύο περιοχές, την εσωτερική, στερεή περιοχή πάχους ~1250km και την υγρή εξώτερη περιοχή του πυρήνα πάχους ~2200km.

Το πεδίο του πυρήνα, το οποίο έχει χωρικές και χρονικές διακυμάνσεις, αποτελεί το 90% του συνολικού γεωμαγνητικού πεδίου που μετράται στη γήινη επιφάνεια. Οι αλλαγές του μαγνητικού πεδίου του πυρήνα αποτυπώνονται στη λιθόσφαιρα και δίνουν πληροφορίες για τη δυναμική μαγνητική ιστορία της γης.

Το λιθόσφαιρικό μαγνητικό πεδίο, είναι 400 φορές μικρότερο από του πυρήνα και κυμαίνεται συνήθως από 0 έως ± 1000 nT. Προέρχεται από το φλοιό και το άνω τμήμα του γήινου μανδύα, μέσω ενός λεπτού στρώματος πάχους 10-70km, που εξαρτάται από τη τοποθεσία. Η αιτία αυτών των μαγνητικών πηγών σχετίζεται με τη θερμοκρασία Curie στην οποία αλλάζουν οι μαγνητικές ιδιότητες των υλικών. Το λεγόμενο ανώμαλο αυτό μαγνητικό πεδίο, που παράγεται από τα σιδηρομαγνητικά ορυκτά, που βρίσκονται στο φλοιό της γης, ενδιαφέρει τους γεωφυσικούς στη μελέτη του παλαιομαγνητισμού (γεωχρονολόγηση, παλαιομαγνητική στρωματογραφία, γεωμαγνητικές διασκοπήσεις) [10].

4.2.2 Το εξωτερικό γεωμαγνητικό πεδίο

Το μαγνητικό πεδίο του ήλιου κυριαρχεί στο διαπλανητικό χώρο του ηλιακού συστήματος. Η μαγνητική ενεργότητα του ήλιου έχει μια περίοδο 11 ετών, τον λεγόμενο ηλιακό κύκλο. Από τον ήλιο με ταχύτητες 350-500km/s εκτοξεύεται πλάσμα, που περιέχει άτομα υδρογόνου, πρωτόνια και ηλεκτρόνια, σωματίδια τα οποία απαρτίζουν τον ηλιακό άνεμο.

Γύρω από τη γη σε απόσταση 10-20 φορές την ακτίνα της γης, υπάρχει η μαγνητόσφαιρα, περιοχή που δε διαπερνούν τα σωματίδια του ηλιακού ανέμου. Σε αυτή την περιοχή υπάρχει ένα σύστημα ηλεκτρικών ρευμάτων, το οποίο περιστρέφεται κατά τον ισημερινό δημιουργώντας ένα ηλεκτρικό ρεύμα, τον δακτύλιο ρεύματος (ring current), και αποτελεί μέρος του μετρούμενου στην επιφάνεια γεωμαγνητικού πεδίου.

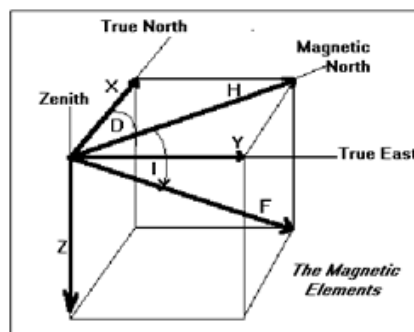
Ακόμη, σε απόσταση 50-60 km πάνω από την επιφάνεια της γης, υπάρχει η ιονόσφαιρα, όπου η υπεριώδης ακτινοβολία από τον ήλιο ionίζει άτομα των ανώτερων ατμοσφαιρικών στρωμάτων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η φωτισμένη από τον ήλιο περιοχή της γης, να έχει επιπλέον κυκλικά ηλεκτρικά ρεύματα [10].

Ο ήλιος είναι επίσης υπεύθυνος για τις ημερήσιες μεταβολές του μαγνητικού πεδίου της γης. Η επίδραση είναι μεγαλύτερη στην περιοχή του ισημερινού και μειώνεται σε μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη. Υπάρχει και εποχική

μεταβολή, όπου η ημερήσια διακύμανση είναι μεγαλύτερη το καλοκαίρι παρά το χειμώνα [11].

4.3 Συνιστώσες του γεωμαγνητικού πεδίου

Το μαγνητικό πεδίο της γης είναι ένα διάνυσμα που καθορίζεται από τις τρεις από τις πέντε συνιστώσες του, οι οποίες έχουν χρονικές διακυμάνσεις από δευτερόλεπτα έως χιλιάδες χρόνια. Από τις πέντε αυτές συνιστώσες, οι τρεις είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού μαγνητικού πεδίου (B_x, B_y, B_z). Οι άλλες δύο συνιστώσες είναι γωνίες I και D . Η γωνία I , καλείται μαγνητική έγκλιση ή κλίση (inclination) και είναι η γωνία μεταξύ του συνολικού μαγνητικού πεδίου και της προβολής του στο οριζόντιο επίπεδο. Ενώ η γωνία D , ονομάζεται



Σχήμα 4.2: Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των συνιστωσών του γεωμαγνητικού πεδίου: βορράς (x), ανατολή (y), κάτω (z) κατευθύνσεις και ένταση (F), απόκλιση (D) και κλίση (I) [22].

μαγνητική απόκλιση (declination) και είναι η γωνία μεταξύ του γεωγραφικού βορρά (x) και της προβολής του συνολικού μαγνητικού πεδίου στο οριζόντιο επίπεδο. Συχνά ορίζεται και μια έκτη συνιστώσα, αυτή της προβολής του μαγνητικού πεδίου στο οριζόντιο επίπεδο (H), ο λεγόμενος μαγνητικός βορράς (Σχήμα 4.2) [1]. Το μαγνητικό πεδίο της γης συνήθως περιγράφεται σε τοπική κλίμακα (local reference frame) είτε χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές x, y, z είτε τις γωνίες D, I ως σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 4.2) [10].

Το γεωμαγνητικό πεδίο αποτυπώνεται σε γεωμαγνητικούς χάρτες. Οι χάρτες μπορεί να είναι ισομαγνητικοί, όπου οι γραμμές ενώνουν σημεία της γης στα οποία μετρήθηκαν ίδιας έντασης μαγνητικά πεδία. Οι ισόγωνες καμπύλες αναπαρίστανται σε χάρτες ενώνοντας σημεία με ίδια απόκλιση. Υπάρχουν επίσης και οι χάρτες με ισοκλινείς καμπύλες, όπου ενώνονται τα σημεία με ίδια μαγνητική κλίση.

4.4 Μετρήσεις του γεωμαγνητικού πεδίου

Το γεωμαγνητικό πεδίο μπορεί να προσεγγιστεί μέσω δύο μοντέλων: το μαθηματικό και το πειραματικό μοντέλο. Στο μαθηματικό μοντέλο, μετρήσεις από δορυφόρους και πληροφορίες για το έδαφος από επίγειους σταθμούς, χρησιμοποιούνται για να εξαχθούν συντελεστές, που χρησιμοποιούνται στη μαθηματική εξίσωση του γεωμαγνητικού πεδίου, για οποιοδήποτε σημείο της γης, για τα επόμενα πέντε χρόνια. Στο πειραματικό μοντέλο, οι πληροφορίες δίνονται από επίγειους σταθμούς και από αεροπλάνα. Οι μετρήσεις για το γεωμαγνητικό πεδίο θεωρούνται πιο ακριβείς από αυτές του μαθηματικού μοντέλου. Ο λόγος

είναι ότι σε αυτό το μοντέλο συνυπολογίζονται οι επιδράσεις των κτηρίων, γεφυρών, ορυχείων κ.α. και άρα είναι πιο ακριβείς. Παρόλα αυτά το πειραματικό μοντέλο παρέχει ένα χάρτη του γεωμαγνητικού πεδίου για συγκεκριμένο χρόνο και δε μπορεί να προβλέψει τη μελλοντική μορφή του γεωμαγνητικού πεδίου [12].

Οι μετρήσεις του γεωμαγνητικού πεδίου συνεχίζουν να γίνονται από επίγειους σταθμούς. Στις μέρες μας υπάρχει το International Real-time Magnetic Observatory Network (INTERMAGNET), ένα πλήρες, αυτοματοποιημένο διάδοχο δίκτυο των σταθμών που εγκαθιδρύθηκαν 200 χρόνια πριν, που μετρούν το μαγνητικό πεδίο της γης με αισθητήρες fluxgate και μαγνητόμετρα πρωτονίων [1]. Ταυτόχρονα σε πολλές ακόμα χώρες έχουν στηθεί παρατηρητήρια που καταγράφουν μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου, οι οποίες και αποστέλλονται σε επιστημονικά κέντρα μελέτης της γης.

Μετρήσεις επίσης γίνονται από δορυφορικές αποστολές. Τα πρώτα δεδομένα μετρήσεων του γεωμαγνητικού πεδίου ήρθαν από τους αμερικάνικους δορυφόρους POGO. Οι δορυφόροι μέτρησαν την ένταση του μαγνητικού πεδίου της γης, μεταξύ του 1965 και του 1971, σε ύψη από 400 έως 800 km. Η πρώτη δορυφορική αποστολή, που παρείχε διανυσματικές μετρήσεις για το γεωμαγνητικό μοντέλο, πραγματοποιήθηκε από τη National Aeronautics and Space Administration (NASA), με το δορυφόρο MAGSAT, που λειτούργησε για πάνω από έξι μήνες μεταξύ του 1979-1980. Τα επόμενα 20 χρόνια η ποιότητα των μετρήσεων του μαγνητικού πεδίου αυξήθηκε με τον δορυφόρο Oersted, που εκτοξεύτηκε τον Φεβρουάριο του 1999. Ο δορυφόρος CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) εκτοξεύτηκε τον Ιούλιο του 2000 και υπήρξε ενεργός μέχρι το 2007, οπού κινήθηκε σε τροχιά γύρω από τη γη σε ύψος 454km. Αυτός ο μικρός δορυφόρος φέρει όργανα για τη μέτρηση του γεωμαγνητικού πεδίου και μέσω των δεδομένων του αποτέλεσε κύρια πηγή χαρτογράφησης του λιθοσφαιρικού πεδίου. Επίσης τον Νοέμβρη του 2000, εκτοξεύτηκε ο SAC-C, σε συνεργασία της Αργεντινής, των ΗΠΑ και της Δανίας [10]. Το Νοέμβρη του 2013 εκτοξεύτηκε ο δορυφόρος Swarm από τη European Space Agency (ESA) για μαγνητικές έρευνες.

Τέλος μετρήσεις του γεωμαγνητικού πεδίου γίνονται και μέσω αερομαγνητικών και θαλάσσιων μετρήσεων. Μετά το 2^ο παγκόσμιο πόλεμο όπου χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά η ανίχνευση μαγνητικών ανωμαλιών για τον εντοπισμό υποβρυχίων και ναρκών, ξεκίνησε η ανάπτυξη των μαγνητικών εφαρμογών σε όργανα μέτρησης σε αερομεταφερόμενα και θαλάσσια μέσα. Από τις αρχές του 1950 εθνικές γεωλογικές υπηρεσίες και εταιρίες γεώτρησης πετρελαίου έχουν δείξει μεγάλο ενδιαφέρον για τις αερομαγνητικές και θαλάσσιες έρευνες, με αποτέλεσμα να βοηθούν στη λιθοσφαιρική αποτύπωση.

4.5 Μοντέλα Γεωμαγνητικού πεδίου

Οι γεωφυσικοί στηρίζονται σε μαθηματικά μοντέλα για τον υπολογισμό της έντασης και της κατεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου, σε κάθε σημείο πάνω από την επιφάνεια της γης. Δεδομένου ότι το μαγνητικό πεδίο αλλάζει συνεχώς, πρέπει να γίνει πρόβλεψη και για την αλλαγή του μαγνητικού πεδίου με το χρόνο.

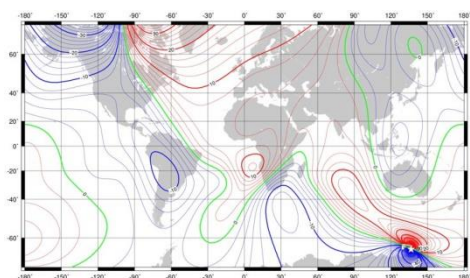
Κάθε μοντέλο μαγνητικού πεδίου (WMM, IGRF κλπ.), περιγράφει το μαγνητικό πεδίο σε διαφορετικό επίπεδο ακρίβειας ή χρησιμοποιεί διαφορετικές τεχνικές επιλογής δεδομένων για την κατασκευή του μοντέλου. Περαιτέρω έρευνα γίνεται για τη βελτίωση της πρόβλεψης της αλλαγής του μαγνητικού πεδίου με το χρόνο, γνωστή ως κοσμική διακύμανση (secular variation), και τη χρήση νέων τεχνικών για τη βελτίωση των ήδη υπαρχόντων μαθηματικών μοντέλων. Εξαιρετικά μοντέλα έχουν προγραμματιστεί με δικές του μεθόδους το καθένα και χρησιμοποιούν δεδομένα από δορυφόρους όπως τους Pogo, Magsat, Oersted και Champ και επίγειες μαγνητικές μετρήσεις. Αυτές οι μετρήσεις σε συνδυασμό με χάρτες από το εσωτερικό (core+crustal) και εξωτερικό πεδίο (ionosphere+magnetosphere) κάνουν δυνατό τον υπολογισμό σε σύντομο χρόνο [13].

Δύο βασικά μοντέλα, που συναντώνται σε κάθε επιστημονικό φορέα που μελετά το γεωμαγνητικό πεδίο, είναι το World Magnetic Model (WMM) το International Geomagnetic Reference Field (IGRF) και ένα μοντέλο για τις μαγνητικές ανωμαλίες (World Digital Magnetic Anomaly Map (WDMAM)).

Το WMM είναι ένα μοντέλο, που χρησιμοποιεί δεδομένα δορυφόρων, για το μαγνητικό πεδίο του πυρήνα και για τα μακροσκοπικά μαγνητικά πεδία του φλοιού. Αποτελείται από συντελεστές έως 12^{ης} τάξης των σφαιρικών αρμονικών του κύριου

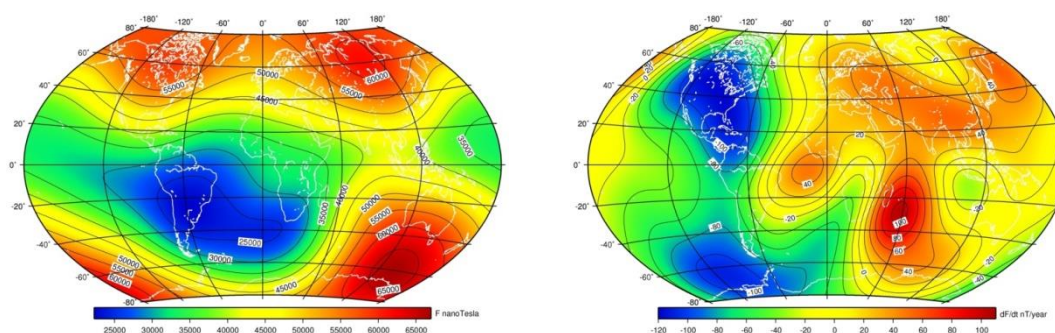
γεωμαγνητικού μοντέλου (Earth's main field (MF)). Για την κατασκευή του χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από το δορυφόρο Swarm και από 160 επίγεια παρατηρητήρια [14]. Στο σχήμα (3.4)

φαίνεται ο ετήσιος ρυθμός της αλλαγής της απόκλισης (declination) από το 2015 ως το 2020 από το μοντέλο WMM. Παρουσιάζεται με κόκκινο η αλλαγή ανατολικότερα, με μπλε η αλλαγή δυτικότερα και με πράσινο η μηδενική αλλαγή. Με ένα λευκό αστέρι συμβολίζεται ο μαγνητικός πόλος [14].



Σχήμα 4.3: Ο ετήσιος ρυθμός της αλλαγής της απόκλισης (declination) από το 2015 ως το 2020 από το μοντέλο WMM. Με κόκκινο-αλλαγή ανατολικότερα, μπλε-αλλαγή δυτικότερα και με πράσινο μηδενική αλλαγή. Με σύμβολο 'λευκό αστέρι ο μαγνητικός πόλος [14].

Το IGRF είναι ένα μοντέλο που η πιο εξελιγμένη μορφή του προτάθηκε το 2014 από τους γεωφυσικούς και εγκρίθηκε από την International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA). Το IGRF είναι ένα μοντέλο με σφαιρικές αρμονικές ως 13^{ης} τάξης [15]. Οι συντελεστές IGRF είναι οι πλησιέστεροι συντελεστές στις πραγματικές τιμές για τη μοντελοποίηση του γεωμαγνητικού πεδίου. Το συνολικό σφάλμα στη μοντελοποίηση είναι περίπου 1.5% στην άθροιση των συνιστωσών, ενώ το σφάλμα του μοντέλου είναι <1% σε διευθύνσεις που απομακρύνονται από τους πόλους [12]. Στο παρακάτω σχήμα (4.4) φαίνεται η ένταση του συνολικού μαγνητικού πεδίου και ο ετήσιος ρυθμός αλλαγής του συνολικού μαγνητικού πεδίου από το μοντέλο IGRF [15].



Σχήμα 4.4: Η συνολική ένταση του γεωμαγνητικού πεδίου (total field intensity) αριστερά και η ετήσια αλλαγή της έντασης του γεωμαγνητικού πεδίου (annual rate of change) δεξιά από το μοντέλο IGRF [15].

Κάθε φορέας έχει ένα μοντέλο για την πρόβλεψη της μαγνητικής ανωμαλίας που προκύπτει στο μαγνητικό πεδίο από τα πεδία που προέρχονται από το φλοιό της γης. Το World Digital Magnetic Anomaly Map (WDMAM) είναι ένα ερευνητικό πρόγραμμα που περιέχει δεδομένα ισοτιούτων και δορυφόρων, το οποίο και χαρτογραφεί σε υψόμετρο 5km τις μαγνητικές ανωμαλίες που προέρχονται από το φλοιό της γης [10], [16], [17].

Τα παραπάνω αποτελούν βασικά μοντέλα για τη μέτρηση του γεωμαγνητικού πεδίου και χρησιμοποιούνται από όλα τα προγράμματα. Κάθε φορέας έχει όμως αναπτύξει και τα δικά του μοντέλα μέτρησης του γεωμαγνητικού πεδίου και των γεωμαγνητικών ανωμαλιών. Για παράδειγμα το British Geological Survey εκτός των μοντέλων WMM [14], IGRF [15], παρέχει δύο ακόμα μοντέλα: το BGS Global Geomagnetic Model (BGGM) [18] και το Model of the Earth's Magnetic Environment (MEME) [19]. Επίσης χρησιμοποιεί ένα μοντέλο για κοσμική διακύμανση (secular variation) [20]. Το National Centers for Environmental Information (NCEI) (τα τρία πρώην κέντρα NOAA (National Climatic Data Center, National Geophysical Data Center & National Oceanographic Data Center, που συμπεριλαμβάνει το National Coastal Data Development Center)), πέρα από τα μοντέλα WMM [21], IGRF [22] και ένα μοντέλο μαγνητικής ανωμαλίας, το Earth

Magnetic Anomaly Model (EMAG2) [23], που προσφέρει, έχει επίσης το Enhanced Magnetic Model (EMM) [24] και το High Definition Geomagnetic Model (HDGM) [25].

4.6 Το γεωμαγνητικό πεδίο στην πόλη της Αθήνας

Οι διάφοροι επιστημονικοί φορείς, που μελετούν το γεωμαγνητικό πεδίο, παρέχουν συνήθως και κάποια απλή αριθμομηχανή υπολογισμού των συνιστωσών του γεωμαγνητικού πεδίου σε διάφορα σημεία στη γη, τοποθετώντας τις γεωγραφικές συντεταγμένες και άλλα χαρακτηριστικά της περιοχής αυτής.

Η πόλη της Αθήνας βρίσκεται σε γεωγραφικό μήκος (longitude) 23.727539° και γεωγραφικό πλάτος (latitude) 37.983810° . Πιο συγκεκριμένα το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο (ΕΜΠ) βρίσκεται σε γεωγραφικό μήκος (longitude) 23.78339946° , γεωγραφικό πλάτος (latitude) 37.97822769° και υψόμετρο 189m [26].

Το British Geological Survey παρέχει δύο υπολογιστικά προγράμματα, για το WMM και IGRF. Με την αριθμομηχανή για το παγκόσμιο μαγνητικό μοντέλο (WMM) (2015) [27], τοποθετώντας τις παραπάνω τιμές για το γεωγραφικό μήκος και πλάτος και το υψόμετρο της περιοχής του Πολυτεχνείου και το χρόνο στον οποίο πραγματοποιήθηκαν οι πειραματικές μετρήσεις, προκύπτουν οι συνιστώσες του γεωμαγνητικού πεδίου και της κοσμικής διακύμανσης, που φαίνονται στον επόμενο πίνακα (4).

Πίνακας 4: Τα αποτελέσματα για τις συνιστώσες του γεωμαγνητικού πεδίου από την αριθμομηχανή του μοντέλου WMM.

Συνιστώσες γεωμαγνητικού πεδίου	Τιμή πεδίου (nT) (main field)	Κοσμική διακύμανση (secular variation)
Μαγνητική απόκλιση (declination) (D)	4.547 degrees east	5.9 arcmin/year
Μαγνητική έγκλιση ή κλίση (inclination) (I)	54.598 degrees down	0.5 arcmin/year
Οριζόντια ένταση (horizontal intensity) (B _h)	26669 nT	13.8 nT/year
Βόρεια συνιστώσα (north component) (x)	26585 nT	10.1 nT/year
Ανατολική συνιστώσα (east component) (y)	2114 nT	46.4 nT/year
Κάθετη ένταση (vertical intensity) (z)	37524 nT	31.5 nT/year
Συνολική ένταση (total intensity) (B)	46036 nT	33.7 nT/year

Με το μοντέλο IGRF [28], υπολογίζει κατά τον ίδιο τρόπο τις συνιστώσες του γεωμαγνητικού πεδίου και της κοσμικής διακύμανσης και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (5).

Πίνακας 5: Τα αποτελέσματα για τις συνιστώσες του γεωμαγνητικού πεδίου από την αριθμομηχανή του μοντέλου IGRF.

Συνιστώσες γεωμαγνητικού πεδίου	Τιμή πεδίου (nT) (main field)	Κοσμική διακύμανση (secular variation)
Μαγνητική απόκλιση (declination) (D)	4.283 degrees	5.6 arcmin/year
Μαγνητική έγκλιση ή κλίση (inclination) (I)	53.297 degrees	0.5 arcmin/year
Οριζόντια ένταση (horizontal intensity) (B _h)	27237 nT	14.8 nT/year
Βόρρεια συνιστώσα (north component) (x)	27161 nT	11.4 nT/year
Ανατολική συνιστώσα (east component) (y)	2034 nT	45.5 nT/year
Κάθετη ένταση (vertical intensity) (z)	36537 nT	31.8 nT/year
Συνολική ένταση (total intensity) (B)	45572 nT	34.3 nT/year

5. Εντοπισμός Φερρομαγνητικού Αντικειμένου

5.1 Εντοπισμός Αντικειμένου

Η έννοια του εντοπισμού ενός αντικειμένου μπορεί να οριστεί ως η διαδικασία του αυτόματου καθορισμού της θέσης του. Για να είναι δυνατή η επίτευξη αυτής της διαδικασίας, απαιτείται η κατάλληλη τεχνική. Υπάρχουν πολλές καθιερωμένες τεχνολογίες όπως το GPS, τα ραντάρ και οι κάμερες, που είναι κατάλληλες για συγκεκριμένες εφαρμογές. Πέρα, όμως, από τις κλασικές μεθόδους εντοπισμού, υπάρχουν και εναλλακτικές τεχνολογίες, όπως ο μαγνητικός εντοπισμός (magnetic localization), δηλαδή εντοπισμός που βασίζεται στο μαγνητικό πεδίο που επάγεται από τα μαγνητικά αντικείμενα. Επίσης ο εντοπισμός με φωτοανιχνευτές (localization with light levels), ο οποίος βασίζεται στα γεγονότα ανατολής και δύσης του ήλιου, που εξάγονται από δεδομένα έντασης του φωτός.

Όλες οι τεχνολογίες εντοπισμού έχουν το κοινό ότι βασίζονται σε έναν ή περισσότερους αισθητήρες, που παρέχουν μετρήσεις, που σχετίζονται με τη θέση. Σημαντικό κομμάτι των τεχνολογιών είναι η περιγραφή της σχέσης μεταξύ των μετρήσεων και της θέσης, το οποίο γίνεται χρησιμοποιώντας μοντέλα.

Όπως όλες οι τεχνολογίες, έτσι και οι τεχνολογίες εντοπισμού, έχουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους, που αποτυπώνονται στα ζητούμενα χαρακτηριστικά, όπως το κόστος, η ακρίβεια, το εύρος, η αξιοπιστία, η προσαρμοστικότητα, το βάρος και το μέγεθος [29].

5.2 Τεχνολογίες εντοπισμού

Με βάση τους Deak et al. (2012), οι τεχνικές εντοπισμού μπορούν να διακριθούν μέσω δύο συστημάτων, στα ενεργά και παθητικά συστήματα εντοπισμού. Τα ενεργά συστήματα απαιτούν τη συμμετοχή του ανθρώπου, εννοώντας ότι οι ηλεκτρονικές συσκευές μεταφέρονται από ανθρώπους και ταυτόχρονα στέλνεται πληροφορία για τη θέση, βοηθώντας έτσι το άτομο να τεκμηριώσει την τοποθεσία του. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι ηλεκτρονικές συσκευές μπορούν επίσης να ανασύρουν καταγεγραμμένα δεδομένα και να στείλουν τα αποτελέσματα για περαιτέρω επεξεργασία σε μια εφαρμογή, που τρέχει τον αλγόριθμο του εντοπισμού. Οι παθητικές συσκευές, αναπτύσσονται στο εκάστοτε περιβάλλον που θα μετρήσουν και η θέση του αντικειμένου εκτιμάται βάσει της διαφοράς μεταξύ των προηγούμενων καταγραφών και του μετρούμενου σήματος [30].

5.2.1 Κλασικές/υπάρχουσες τεχνολογίες εντοπισμού

5.2.1.1 Δορυφορικό σύστημα παγκόσμιας πλοήγησης (*Global navigation satellite system, GNSS*)

Το GNSS βασίζεται στην πολλαπλότητα των τροχιών στις οποίες κινούνται οι δορυφόροι γύρω από τη γη. Με τη χρήση ενός αποδέκτη (receiver), ανιχνεύονται σήματα από τους δορυφόρους και μέσω του τριγωνισμού (triangulation), καθορίζεται η θέση. Το πιο κοινό σύστημα GNSS είναι το Global Positioning System (GPS), που παρέχει πληροφορίες θέσης σε οποιονδήποτε έχει έναν αποδέκτη GPS. Ο αποδέκτης απαιτεί οπτική επαφή (line of sight) με τουλάχιστον τέσσερις δορυφόρους GPS που βρίσκονται σε λειτουργία. Εξαιτίας της αβεβαιότητας στη θέση, η τεχνολογία δεν είναι πλήρως κατάλληλη για εντοπισμό μικρών όγκων με μεγάλη ακρίβεια. Άλλα μειονεκτήματα είναι η ευαισθησία στις παρεμβολές και η υψηλή ενέργεια κατανάλωσης. Οι αποδέκτες για εμπορική χρήση έχουν ακρίβεια περίπου 5 μέτρων.

5.2.1.2 Ραδιοεντοπισμός (*Radiolocation*)

Ο ραδιοεντοπισμός (Radiolocation) και τα αντίστοιχα συστήματα πλοήγησης (radio navigation systems) χρησιμοποιούν μία ή περισσότερες από τις ιδιότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εκπέμπονται από έναν πομπό (transmitter) και μετρώνται από ένα αποδέκτη (receiver). Πολλές τέτοιου είδους διατάξεις είναι πιθανόν να πραγματοποιηθούν, ανάλογα το πώς έχουν αναπτυχθεί ο πομπός και ο δέκτης και τι τύπου ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταδίδονται. Υπάρχουν συστήματα ραδιο-εντοπισμού που δεν έχουν σχεδιαστεί για να υποστηρίξουν τον εντοπισμό θέσης, όπως για παράδειγμα τα σήματα από τοπικά ασύρματα δίκτυα (Wireless Local Area Networks, WLAN), η τηλεοπτική μετάδοση (television broadcast) και τα δίκτυα κινητής τηλεφωνίας (cellular networks). Τέτοιες τεχνολογίες είναι κοινές σε οικιακές εφαρμογές και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως υποδομή για την ανάπτυξη της τεχνολογίας εντοπισμού.

5.2.1.3 Radar (*Radio Detection And Ranging*)

Το radar είναι ένα συγκεκριμένο σύστημα ραδιο εντοπισμού (radio positioning) που αποτελείται από έναν πομπό που εκπέμπει ραδιο-κύματα που ανακλούν σε αντικείμενα με υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα. Οι ανακλάσεις μετρώνται από έναν αποδέκτη που συνήθως (αλλά όχι απαραίτητα) είναι τοποθετημένος στην ίδια θέση που βρίσκεται και ο πομπός. Πρόκειται για ένα παθητικό σύστημα εντοπισμού. Είναι η πιο κοινή εφαρμογή για τον εντοπισμό πλοίων, αεροπλάνων και πυραύλων. Τα ραντάρ χρησιμοποιούνται επίσης και σε

ενεργά συστήματα εντοπισμού σε πλοία για τον εντοπισμό σημείων αναφοράς με σκοπό τον καθορισμό της θέσης τους.

5.2.1.4 Αισθητήρας όρασης (Vision sensor)

Ένας αισθητήρας όρασης περιέχει ένα οπτικό σύστημα που λαμβάνει μια αναλογική εικόνα που ψηφιοποιείται από έναν οπτικό αισθητήρα. Απαθανατίζοντας μια ακολουθία εικόνων από ένα κινούμενο αντικείμενο μπορεί να εντοπιστεί η θέση του αντικειμένου μέσω της επεξεργασίας τους. Θεωρείται και αυτό παθητικό σύστημα εντοπισμού.

5.2.1.5 Αδρανειακός αισθητήρας (Inertial measurement unit, IMU)

Ένας αδρανειακός αισθητήρας (inertial measurement unit, IMU) αποτελείται από ένα επιταχυνσιόμετρο (accelerometer) και ένα γυροσκόπιο (gyroscope). Ο αισθητήρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της κατεύθυνσης ενός αντικειμένου, τοποθετώντας το σχετικά με ένα γνωστό αρχικό σημείο. Η θέση υπολογίζεται μέσω της συσχέτισης των πληροφοριών που καταγράφονται από δύο αισθητήρες. Σε μικρή περίοδο ο υπολογισμός της θέσης είναι ακριβής. Παρόλα αυτά εξαιτίας της ενοποίησης των τιμών, η ακρίβεια μειώνεται με το χρόνο αν δεν βοηθηθεί από άλλο σύστημα, που παρέχει πληροφορία για την απόλυτη θέση.

5.2.1.6 Συνδυασμός αισθητήρων (Sensor fusion)

Για τον εντοπισμό της θέσης ενός αντικειμένου, δεν είναι απαραίτητο να γίνεται εκμετάλλευση μίας μόνο τεχνικής εντοπισμού. Δύο ή περισσότερες από αυτές μπορούν να συνδυαστούν με σκοπό να χρησιμοποιηθούν τα συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και να περιοριστούν τα μειονεκτήματα της κάθε τεχνικής. Για να είναι συμβατές δύο ή περισσότερες τεχνικές εντοπισμού, πρέπει οι μετρήσεις τους να συνδυάζονται με συγκεκριμένο τρόπο. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται συνδυασμός αισθητήρων (sensor fusion). Για παράδειγμα το IMU είναι ένα διαδεδομένο στοιχείο εξαιτίας της υψηλής ακρίβειας σε μικρές περιόδους. Χρησιμοποιώντας IMU με GPS, τα συστήματα εντοπισμού που χρησιμοποιούνται έχουν και τα δύο υψηλή ακρίβεια και παρέχουν πληροφορίες απόλυτης θέσης.

5.2.2 Εναλλακτικές τεχνολογίες εντοπισμού

5.2.2.1 Μαγνητικός Εντοπισμός (*Magnetic Localization*)

Οι μαγνητικοί αισθητήρες, ή αλλιώς μαγνητόμετρα, είναι όργανα που μετρούν την ένταση και συνήθως και την κατεύθυνση των μαγνητικών πεδίων. Έχουν πολλές εφαρμογές σε ένα εύρος από την εύρεση ναρκών και ναυαγίων έως τη μετεωρολογική πρόβλεψη (μέσω των ηλιακών κύκλων).

Η τεχνική για τον εντοπισμό της θέσης χρησιμοποιεί την ιδιότητα των μαγνητικών αντικειμένων να επάγουν μαγνητικό πεδίο. Τέτοια προσέγγιση χρησιμοποιείται στους ανιχνευτές μαγνητικής ανωμαλίας (*magnetic anomaly detectors*) για την ανίχνευση φερρομαγνητικών αντικειμένων.

Το ενδιαφέρον βέβαια δεν περιορίζεται απλά στον εντοπισμό ενός μαγνητικού αντικειμένου, αλλά και στο καθορισμό της θέσης, της κατεύθυνσης της κίνησης, της μαγνητικής υπογραφής και του γεωμετρικού σχήματος του αντικειμένου. Αυτό επιτυγχάνεται ορίζοντας σχετικά μαθηματικά μοντέλα που συσχετίζουν αυτές τις ποσότητες στο μετρούμενο μαγνητικό πεδίο.

Σε αντίθεση με το GPS και τον οπτικό αισθητήρα, αυτή η τεχνική εντοπισμού δεν εξαρτάται από τα εμπόδια που μπορεί να υπάρχουν στη περιοχή μεταξύ του αισθητήρα και του αντικειμένου. Άρα είναι σχεδόν αδύνατο να εξαλειφθούν οι μαγνητικές υπογραφές του μαγνητικού αντικειμένου. Αυτό κάνει τους αισθητήρες μη ευαίσθητους σε παρεμβολές που είναι σημαντικό σε ποικίλες εφαρμογές. Είναι επίσης ανεπηρέαστη από τις καιρικές συνθήκες.

Τελευταία τα μαγνητόμετρα έχουν γίνει μικρότερα και φθηνότερα, γεγονός που τα κάνει πιο προσιτά σε εφαρμογές όπως ο εντοπισμός μαγνητικών αντικειμένων. Παρόλα αυτά το εύρος του αισθητήρα για μερικές εφαρμογές περιορίζει την ακρίβεια της τεχνικής. Με τα εμπορικά μαγνητόμετρα, ένα αυτοκίνητο μπορεί να γίνει αντιληπτό από απόσταση περίπου 10m, ένα μαγνήτης νεοδυμίου με μήκος 1cm μπορεί να ανιχνευθεί από απόσταση περίπου 1m. Οι μαγνητικοί αισθητήρες υπερτίθενται (*superpositional*), εννοώντας ότι μετρούν το σύνολο των μαγνητικών υπογραφών από τα παρόντα μαγνητικά αντικείμενα.

Η μέθοδος εντοπισμού μαγνητικής ανωμαλίας (*magnetic anomaly detection, MAD*) αναλύεται εκτενώς σε επόμενη ενότητα.

5.2.2.2 Αισθητήρες έντασης φωτός (*Light Levels*)

Η γωνία μεταξύ ενός ουράνιου σώματος και του ορίζοντα μπορεί να αποκαλύψει το γεωγραφικό μήκος (*longitude*) και πλάτος (*latitude*) του παρατηρητή. Η χωρική πληροφορία για το ύψος του ήλιου μπορεί να καθοριστεί

χρησιμοποιώντας έναν φωτοανιχνευτή (light sensor), που μετρά την ένταση του φωτός. Έτσι τα γεγονότα της ανατολής και δύσης του ήλιου μπορούν να ανιχνευθούν και να δώσουν χωρικές πληροφορίες. Το μεγάλο πλεονέκτημα με τους αισθητήρες έντασης φωτός είναι ότι έχουν μικρό βάρος και χαμηλή κατανάλωση ενέργειας σε σχέση με το GPS. Από την άλλη, η ακρίβειά τους φτάνει τα 150km και είναι πολύ μικρότερη από άλλες τεχνολογίες και εξαρτάται από τις καιρικές συνθήκες, την ισημερία και τον ισημερινό. Η τεχνολογία επίσης δοκιμάζεται και από σκιάσεις φύλλων και άλλης βλάστησης, που μπορεί να προκαλέσουν λανθασμένες ανιχνεύσεις των γεγονότων ανατολής και δύσης.

5.3 Εφαρμογές των τεχνικών εντοπισμού

Οι εναλλακτικές μέθοδοι εντοπισμού, έχουν αρκετές εφαρμογές σε διάφορους τομείς. Κάποιοι από αυτούς είναι η επιτήρηση της κυκλοφορίας (traffic surveillance), ο εντοπισμός υποθαλάσσιων φερρομαγνητικών αντικειμένων, ο εντοπισμός σε εσωτερικούς χώρους (indoor localization), ο εντοπισμός πτηνών (bird localization) κ.α.

5.3.1 Επιτήρηση κυκλοφορίας (Traffic surveillance)

Στα συστήματα επιτήρησης κυκλοφορίας, βασικός στόχος είναι ο εντοπισμός και η παρακολούθηση οχημάτων. Η πληροφορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για στατιστικούς σκοπούς από τα υπουργεία, για αστικό σχεδιασμό και διαχείριση της κίνησης των κέντρων για τη βελτίωση της οδικής υποδομής. Τα οχήματα έχουν ένα μεγάλο αριθμό μερών από φερρομαγνητικά υλικά και για αυτό επάγουν ένα μαγνητικό πεδίο που μπορεί να μετρηθεί από τα μαγνητόμετρα. Αναπτύσσοντας έναν ή περισσότερους τέτοιους αισθητήρες στη γειτνίαση των λωρίδων κυκλοφορίας, το όχημα μπορεί να εντοπιστεί. Για αυτή την εφαρμογή τα μαγνητόμετρα έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι λιγότερο ευαίσθητα στις καιρικές συνθήκες σε σχέση με άλλα τέτοια συστήματα, όπως η τοποθέτηση καμερών.

Τα συστήματα επιτήρησης κυκλοφορίας (traffic surveillance) βασίζονται στο γεγονός ότι ένα όχημα σε μια απόσταση μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του, μπορεί να θεωρηθεί και μαγνητικό δίπολο και το μαγνητικό του πεδίο θα εκφράζεται μέσω του νόμου Biot-Savart. Με τη χρήση διανυσματικών μαγνητομέτρων, τοποθετημένων στην άκρη του δρόμου, καταγράφονται χρονοεξαρτώμενα σήματα που εξαρτώνται από τη θέση, τη ταχύτητα, την κατεύθυνση (σχετικά με το γήινο μαγνητικό πεδίο) και τη μαγνητική υπογραφή του στόχου. Η επεξεργασία του σήματος γίνεται μέσω μιας μη γραμμικής στατιστικής μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα, η θεώρηση γίνεται μέσω του μοντέλου του μαγνητικού διπόλου, όπου η μαγνητική διπολική ροπή m εξαρτάται από τη γωνία, στην οποία κινείται ο στόχος και η

ταχύτητα είναι σταθερή. Το παραπάνω μοντέλο συνδυάζεται με ένα κινούμενο μοντέλο και με την εφαρμογή ενός εκτεταμένου φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter, EKF) για την εκτίμηση του στόχου.

5.3.2 Μαγνητικός εντοπισμός στόχου

Τα συστήματα εντοπισμού φερρομαγνητικών στόχων έχουν αναπτυχθεί σε στρατιωτικές εφαρμογές από το 2^ο παγκόσμιο πόλεμο. Με τη χρήση τους γίνεται εντοπισμός φίλιων και εχθρικών πλοίων και υποβρυχίων, αλλά και νάρκες στο βυθό, ναυάγια και άλλα. Η τεχνική εντοπισμού μαγνητικής ανωμαλίας (MAD) έχει αρχίσει να εφαρμόζεται επίσης και σε αστικές εφαρμογές, όπως στα συστήματα επιτήρησης κυκλοφορίας (traffic surveillance) και στον εντοπισμό και χαρτογράφηση σε κλειστούς χώρους (indoor localization and mapping) [31].

5.3.3 Αλληλεπίδραση σε δημόσιους χώρους (*Interaction in public environments*)

Μουσεία και επιστημονικά κέντρα χρησιμοποιούν όλο και περισσότερο τεχνολογία που δίνει τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης με τα εκθέματα. Στα εκθέματα υπάρχουν χωρικές πληροφορίες και είναι σημαντική η ύπαρξη ενός συστήματος για τον εντοπισμό τους. Τέτοια συστήματα έχουν υψηλές απαιτήσεις για ανθεκτικότητα και πρέπει να είναι ευπρόσιτα στους επισκέπτες, ώστε να πραγματοποιηθεί η αλληλεπίδραση με τα εκθέματα. Για παράδειγμα, ένα δίκτυο από μαγνητόμετρα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον εντοπισμό ενός μόνιμου μαγνήτη προσκολλημένου σε ένα εργαλείο που ελέγχεται από τον επισκέπτη. Ένα παράδειγμα εφαρμογής της τεχνικής είναι η εφαρμογή εικονικής ζωγραφικής με χρώματα νερού.

5.3.4 Εντοπισμός και χαρτογράφηση σε κλειστούς χώρους (*Indoor localization and mapping*)

Ο εντοπισμός σε κλειστά περιβάλλοντα έχει την τελευταία δεκαετία λάβει μια αυξανόμενη προσοχή. Οι εφαρμογές είναι πολλές, όπως λειτουργία από το προσωπικό ασφαλείας, πλοήγηση σε εμπορικά κέντρα, αλλά και εξακρίβωση της θέσης αυτόνομων ηλεκτρικών συσκευών που μπορεί να ανήκουν στο κτήριο. Τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται η τεχνική των μαγνητικών ανωμαλιών, σαν πηγή εντοπισμού στα περιβάλλοντα αυτά. Αυτές οι διαταραχές επάγονται από τα υπάρχοντα μεταλλικά αντικείμενα στα περισσότερα κτήρια και περιέχουν αρκετή πληροφορία που χρησιμοποιείται στον εντοπισμό.

Πιο συγκεκριμένα, για τον εντοπισμό αντικειμένων σε κλειστούς χώρους, έχει αναπτυχθεί η μέθοδος ταυτόχρονου εντοπισμού και χαρτογράφησης (simultaneous localization and mapping, SLAM) [32]. Σε κλειστά περιβάλλοντα η πλοήγηση είναι δύσκολη λόγω μαγνητικών διαταραχών που οφείλονται στη φερρομαγνητική δομή των κτηρίων. Παρόλα αυτά, αυτές οι διαταραχές παρέχουν πληροφορίες για την κατασκευή ενός μαγνητικού χάρτη του περιβάλλοντος [33]. Η προσέγγιση SLAM χρησιμοποιεί αυτές τις μετρήσεις που έγιναν για το μαγνητικό πεδίο του περιβάλλοντος, με σκοπό την οδομετρική πληροφορία. Η συλλογή μαγνητικών δεδομένων γίνεται με τη χρήση ενός κινούμενου ρομπότ, το οποίο λύνει το πρόβλημα SLAM βασιζόμενο μόνο στα δεδομένα του μαγνητικού πεδίου, ενώ ταυτόχρονα παρέχει αρκετά ακριβείς χάρτες. Στο SLAM, τα ρομπότ δεν έχουν πρότερη χαρτογράφηση ή πληροφορία θέσης και προσπαθούν να παρέχουν ταυτόχρονα ένα χάρτη και τον εντοπισμό τους. Η λύση τους βασίζεται στη διαθέσιμη πληροφορία από το περιβάλλον, που συλλέγεται μέσω αισθητήρων και δεν είναι επαρκής για τον ακριβή χωρικό εντοπισμό του αντικειμένου. Για αυτό το λόγο, χρησιμοποιούνται κατάλληλα φίλτρα και τεχνικές [32].

Ένα από αυτά είναι το φίλτρο Rao-Blackwellized. Γίνεται η θεώρηση ότι οι τρεις ορθογώνιες συνιστώσες του διανυσματικού μαγνητικού πεδίου μπορούν να μοντελοποιηθούν ανεξάρτητα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gaussian process (GP) regression. Όταν ένα σωματίδιο επιστρέφει σε μια περιοχή που έχει ήδη επισκεφτεί, ένα τοπικό μοντέλο του μαγνητικού πεδίου αναδημιουργείται με τη χρήση προηγούμενων διαθέσιμων μετρήσεων. Το τοπικό αυτό μοντέλο χρησιμοποιείται για την παροχή μιας μέτρησης πρόβλεψης της θέσης που αντιπροσωπεύεται από το σωματίδιο. Αυτή η πρόβλεψη συγκρίνεται κατόπιν με την πραγματική μέτρηση του μαγνητομέτρου στην πραγματική θέση και έτσι καθορίζεται η πιθανότητα της μέτρησης και το αντίστοιχο βάρος του σωματιδίου [32].

5.3.5 Εντοπισμός πτηνών (*Bird localization*)

Ο εντοπισμός των μεταναστευτικών πτηνών είναι σημαντικός για την εκτίμηση θεωριών όπως η στρατηγική μετανάστευσης, η γενετική και η εξέλιξη πίσω από τις στρατηγικές. Για να γίνει αυτό απαιτούνται μικροί και ελαφριοί αισθητήρες όπως οι αισθητήρες έντασης φωτός [29].

5.4 Συστήματα μεθόδου MAD - Το μαθηματικό πρόβλημα και τα μοντέλα στις τεχνικές εντοπισμού μαγνητικής ανωμαλίας

Ένα φερρομαγνητικό αντικείμενο, μετά από κάποιο χρόνο αποκτά μαγνήτιση λόγω του μαγνητικού πεδίου της γης και δημιουργεί ένα επαγόμενο μαγνητικό πεδίο, που με τη σειρά του διαταράσσει το γεωμαγνητικό πεδίο στο περιβάλλον του. Έτσι, ένα φερρομαγνητικό αντικείμενο μπορεί να εντοπιστεί μετρώντας τη γεωμαγνητική ανωμαλία που προκαλεί. Τα συστήματα ανίχνευσης μαγνητικής ανωμαλίας (MAD) ανιχνεύουν αυτή την ανωμαλία στο γεωμαγνητικό πεδίο [34].

Τα συστήματα MAD χωρίζονται σε κατηγορίες ανάλογα με τη διάταξή τους και την τεχνική/μέθοδο που χρησιμοποιούν για την ανίχνευση του στόχου.

Ο Ginzburg θεωρεί δύο τύπους MAD:

- Συστήματα Ανίχνευσης (search systems): όπου μαγνητικοί αισθητήρες είναι εγκατεστημένοι πάνω σε κινούμενη πλατφόρμα ψάχνοντας για κρυμμένους φερρομαγνητικούς στόχους, σε μια υπό παρακολούθηση περιοχή, κατά μήκος προκαθορισμένων διαδρομών.
- Συστήματα Συναγερμού (alarm systems): όπου χρησιμοποιούνται στατικοί αισθητήρες/συσκευές που παράγουν σήμα συναγερμού όταν ένας φερρομαγνητικός στόχος περνά κοντά από τον αισθητήρα [35].

Τα συστήματα MAD μπορούν επίσης να χωριστούν σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τις μεθόδους που χρησιμοποιούν για την ανίχνευση του αντικειμένου:

- Η πρώτη κατηγορία εμπεριέχει μεθόδους όπως οι ορθοκανονικοποιημένες συναρτήσεις βάσης (OBFs), πάνω στις οποίες αναλύεται το σήμα. Η μέθοδος είναι αρκετά αποτελεσματική αλλά περιλαμβάνει παραδοχές που πρέπει να γίνουν.
- Η δεύτερη περιέχει μεθόδους όπως η μέθοδος ανίχνευσης της ελάχιστης εντροπίας (Minimum Entropy Detector, MED), η οποία αναδεικνύει τις αλλαγές στο μαγνητικό υπόβαθρο θεωρώντας πως οι αλλαγές αυτές οφείλονται στην παρουσία ενός φερρομαγνητικού στόχου [36].

5.4.1 Τα μαγνητόμετρα στα συστήματα MAD

Τα μαγνητόμετρα μπορεί να είναι τοποθετημένα σε διάφορες θέσεις όπως σε αεροπλάνα, στην ξηρά, σε πλοία ή υποθαλάσσια και μπορούν άρα να είναι είτε στατικά είτε κινούμενα. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση ενός στατικού

μαγνητόμετρου και ενός κινούμενου φερρομαγνητικού στόχου, το πρόβλημα είναι όμοιο με την περίπτωση ενός κινούμενου αισθητήρα και ενός ακίνητου στόχου.

Συχνά χρησιμοποιείται ένα ζεύγος μαγνητομέτρων. Το ένα μαγνητόμετρο τοποθετείται σε κοντινή απόσταση ως προς το στόχο ώστε να μετρά τη μαγνητική ανωμαλία που θα προκαλέσει στο γεωμαγνητικό πεδίο. Το δεύτερο μαγνητόμετρο χρησιμοποιείται ως μαγνητόμετρο αναφοράς και τοποθετείται σε μεγάλη απόσταση από την πηγή της μαγνητικής ανωμαλίας ώστε να μην την ανιχνεύει (και έτσι επιτυγχάνεται μια αποτελεσματική διαφορική λειτουργία). Αν τα δύο μαγνητόμετρα είναι ευθυγραμμισμένα στην ίδια διεύθυνση, τότε οι ενδείξεις του μαγνητομέτρου αναφοράς αφαιρούνται από τις ενδείξεις του μαγνητομέτρου που βρίσκεται κοντά στην πηγή, άξονα προς άξονα. Με αυτό τον τρόπο το γεωμαγνητικό πεδίο αναιρείται [37].

Ένας αισθητήρας σε απόσταση από ένα φερρομαγνητικό αντικείμενο, μετρά μια υπέρθεση σημάτων. Στο σήμα του μαγνητομέτρου θα εμπεριέχονται το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο αντικείμενο, το γεωμαγνητικό πεδίο της γης και ο θερμικός θόρυβος που προκαλείται από τον αισθητήρα και άλλες πιθανές παρεμβολές του περιβάλλοντος χώρου. Το μετρούμενο μαγνητικό πεδίο θα είναι δηλαδή:

$$B_k = \hat{B}_k + \hat{G}_k + \hat{N}_k \quad (5.1)$$

όπου $\hat{B}_k [nT]$ είναι το μαγνητικό πεδίο στον άξονα k , το \hat{G}_k αναφέρεται στο γεωμαγνητικό θόρυβο σύμφωνα με την περιστροφή στον άξονα k και το \hat{N}_k αναφέρεται στο θερμικό θόρυβο του αισθητήρα στον άξονα k [38].

5.4.2 Θόρυβος

Ο θόρυβος που εμπεριέχεται στις μετρήσεις είναι κυρίως θερμικός θόρυβος. Θεωρείται, λοιπόν, ότι ακολουθεί μια κανονική (Gaussian) κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση που εξαρτάται από το μήκος του παραθύρου των δειγμάτων μέσα στο οποίο γίνεται η παρατήρηση του σήματος του στόχου [39].

Για ένα δείγμα x_i η κανονική κατανομή της πυκνότητας πιθανότητας με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 είναι:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.2)$$

όπου $\mu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$, $\sigma^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \mu)^2$

Η πιθανότητα το δείγμα θορύβου να πάρει τη διακριτή τιμή x_i είναι:

$$p(x_i) = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} dx_i f(x_i) \quad (5.3)$$

5.4.3 Το μαγνητικό πρόβλημα

Ένα φερρομαγνητικό αντικείμενο δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο που σε πολλές περιπτώσεις μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας το πολυπολικό μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, το μαγνητικό πεδίο ενός φερρομαγνητικού αντικειμένου σε απόσταση μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του (διπλάσια με τριπλάσια από το μήκος της μεγαλύτερης διάστασής του) θεωρείται ότι προσεγγίζει το πεδίο ενός σημειακού μαγνητικού διπόλου. Το μαγνητικό πεδίο που παράγει ένα σημειακό δίπολο από το νομό Biot-Savart είναι:

$$\vec{B}(\vec{m}, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right] \quad (5.4)$$

όπου \vec{m} η μαγνητική διπολική ροπή του φερρομαγνητικού αντικειμένου, \vec{r} η απόσταση μεταξύ του στόχου και του σημείου όπου μετράται το μαγνητικό πεδίο (αισθητήρα) [37].

Στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) το μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$ ενός φερρομαγνητικού αντικειμένου με μαγνητική ροπή $\vec{m} = m_x\hat{x} + m_y\hat{y} + m_z\hat{z}$ σε απόσταση $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_x \\ \hat{B}_y \\ \hat{B}_z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [H/m]$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, $\hat{B}_k [nT]$ είναι το μαγνητικό πεδίο στον k -άξονα, $m_k [Am^2]$ η μαγνητική διπολική ροπή στον άξονα k , $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ η απόσταση μεταξύ του μαγνητικού αισθητήρα και του αντικειμένου [38].

Η επίλυση του μαγνητικού προβλήματος που αποτυπώνεται στις εξισώσεις (5.4) και (5.5), μαθηματικά αντιστοιχεί στην επίλυση ενός συστήματος τριών εξισώσεων με έξι αγνώστους. Πρόκειται για ένα σύστημα λοιπόν που δε μπορεί να λυθεί, παρά μόνο να γίνει μια προσέγγιση της λύσης του [34].

Η προσέγγιση αυτή μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ένας από αυτούς είναι αρχικά μέσω μιας μαθηματικής προσέγγισης, που περιλαμβάνει παραδοχές και

αναδεικνύει μια γραμμική συσχέτιση των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου με ένα σύνολο ορθοκανονικών βάσεων (Orthonormal Basis Functions, OBFs) που εξάγονται από τα στοιχεία του δεύτερου μέλους των εξισώσεων (5.5). Κατόπιν ορίζεται η γραμμική συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ του σήματος και των εξισώσεων βάσης και με την κατασκευή ενός ανιχνευτή προσδιορίζεται η ύπαρξη ή μη ενός φερρομαγνητικού αντικειμένου στο χώρο.

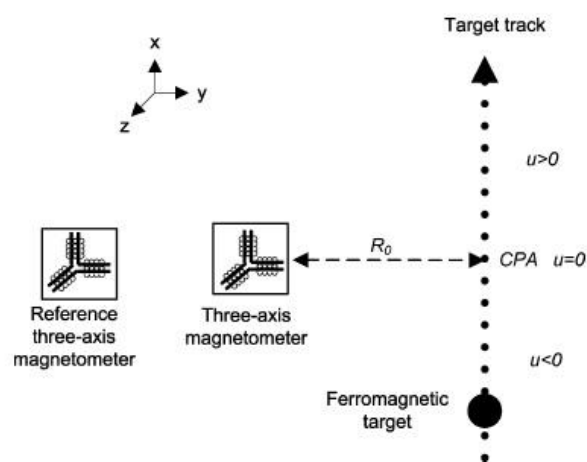
Ο άλλος τρόπος προσέγγισης βασίζεται καθαρά στην ανάλυση του σήματος που μετράται. Μέσω φίλτρων μειώνεται ο θόρυβος του συστήματος και διαμορφώνεται το σήμα ώστε να δώσει τις πληροφορίες εντοπισμού μέσω του ορισμού κατάλληλων κατωφλίων.

5.4.3.1 Εντοπισμός μαγνητικής ανωμαλίας μέσω ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης (Orthonormal Basis Functions, OBFs)

Οι δύο παραδοχές, που απαιτούνται για την ανάπτυξη της μεθόδου, είναι ότι το φερρομαγνητικό αντικείμενο κινείται με σταθερή ταχύτητα και σε σταθερή κατεύθυνση και έχει μαγνητική διπολική ροπή \vec{m} , που είναι επίσης σταθερή σε μέτρο και διεύθυνση. Το σύστημα συντεταγμένων καθορίζεται από το εκάστοτε πρόβλημα ανάλογα με τον τρόπο μέτρησης.

◦ Ακίνητα μαγνητόμετρα – κινούμενο φερρομαγνητικό αντικείμενο

Στο επόμενο σχήμα (5.1) φαίνεται το σύστημα αναφοράς στην περίπτωση που το φερρομαγνητικό αντικείμενο κινείται, ενώ δύο μαγνητόμετρα, ένα για τη μέτρηση του μαγνητικού πεδίου του αντικειμένου και το άλλο ως αναφοράς, παραμένουν ακίνητα.



Σχήμα 5.1: Δύο μαγνητόμετρα τριών αξόνων, το ένα αναφοράς. Το φερρομαγνητικό αντικείμενο κινείται στο ίχνος μιας ευθείας γραμμής με σταθερή ταχύτητα [37].

Για το σύστημα του σχήματος, σε καρτεσιανές συντεταγμένες το μοναδιαίο \hat{x} είναι ένα διάνυσμα που ξεκινά από την πηγή και κατευθύνεται παράλληλα στη διεύθυνση του αντικειμένου, το \hat{y} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ξεκινά από την πηγή και κατευθύνεται κάθετα στη διεύθυνση του αντικειμένου και το μοναδιαίο \hat{z} καθορίζεται κάθετα στα προηγούμενα μοναδιαία \hat{x}, \hat{y} .

Ορίζεται η πλησιέστερη απόσταση μεταξύ του αντικειμένου και του αισθητήρα (Closest Proximity Approach, CPA) τη χρονική στιγμή $t=0$: $CPA = R_0$.

Η θέση του αντικειμένου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι: $\vec{r}_l(t) = v \cdot t \hat{x} + R_0 \hat{y}$

Θέτοντας $u = \frac{v \cdot t}{R_0}$, η εξίσωση της θέσης του στόχου γίνεται: $\vec{r}_l(u) = u \cdot R_0 \hat{x} + R_0 \hat{y}$

Το μαγνητικό πεδίο τότε της σχέσης (5.5) γίνεται [37]:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_x \\ \hat{B}_y \\ \hat{B}_z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi r_l^5} \begin{bmatrix} \frac{2u^2 - 1}{(u^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3u}{(u^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} & 0 \\ \frac{3u}{(u^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{2 - u^2}{(u^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Είναι εμφανές, ότι οι τρεις βασικές εξισώσεις που συνδέουν το μαγνητικό πεδίο με το χώρο είναι:

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}, \varphi_2(u) = \frac{u}{(u^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}, \varphi_3(u) = \frac{u^2}{(u^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \quad (5.7)$$

Η γραμμική ανεξαρτησία τους αποδεικνύεται με τη βοήθεια της ορίζουσας Wronski που προκύπτει μη μηδενική. Για να προκύψει ένα σύστημα ορθοκανονικών βάσεων, εφαρμόζεται στις εξισώσεις (5.7) η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt ως εξής:

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= \varphi_1(u), \\ \varphi_2(u) &= \varphi_2(u) - \frac{\int d\theta \varphi_2(\theta) \varphi_1(\theta)}{\|\varphi_1\|^2}, \\ \varphi_3(u) &= \varphi_3(u) - \frac{\int d\theta \varphi_3(\theta) \varphi_1(\theta)}{\|\varphi_1\|^2} - \frac{\int d\theta \varphi_3(\theta) \varphi_2(\theta)}{\|\varphi_2\|^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

ώστε να ικανοποιούν τη σχέση ορθοκανονικότητας:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du g_i(u) g_j(u) = 0, i \neq j \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} du g_j^2(u) = 1, j = 1, 2, 3 \quad (5.9)$$

Από την ορθοκανονικοποίηση προκύπτουν οι ορθοκανονικοποιημένες βάσεις (OBFs) [36]:

$$\begin{aligned} g_1(u) &= \sqrt{\frac{24}{5\pi} \frac{1 - \frac{5}{3}u^2}{[1 + u^2]^{\frac{5}{2}}}} \\ g_2(u) &= \sqrt{\frac{128}{5\pi} \frac{u}{[1 + u^2]^{\frac{5}{2}}}} \\ g_3(u) &= \sqrt{\frac{128}{3\pi} \frac{u^2}{[1 + u^2]^{\frac{5}{2}}}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Η εξαγωγή των ορθοκανονικών βάσεων είναι όμοια σε όλες τις μελέτες της μεθόδου εντοπισμού μαγνητικής ανωμαλίας. Ο τρόπος αξιοποίησής τους όμως και η συσχέτισή τους με το σήμα προσεγγίζεται διαφορετικά σε κάθε τέτοια μελέτη, ώστε να βρεθεί η βέλτιστη μέθοδος εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων.

Ένας τρόπος μελέτης του σήματος είναι ο ακόλουθος. Μπορεί να θεωρηθεί ότι αφού η κατεύθυνση της κίνησης του στόχου είναι άγνωστη, οι άξονες των μαγνητομέτρων δε θα συμπίπτουν με τα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Για να επιτευχθεί σταθερή συμπεριφορά του μαγνητομέτρου ως προς την ανίχνευση του στόχου, κατασκευάζεται το μέγεθος του σήματος μαγνητικής ανωμαλίας $|\vec{B}(u)|^2$ το οποίο από την παραπάνω σχέση θα είναι:

$$|\vec{B}(u)|^2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi R_0^3}\right)^2 \times \frac{(4m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) \cdot u^2 + 6m_x m_y u + m_x^2 + 4m_y^2 + m_z^2}{(u^2 + 1)^4} \quad (5.11)$$

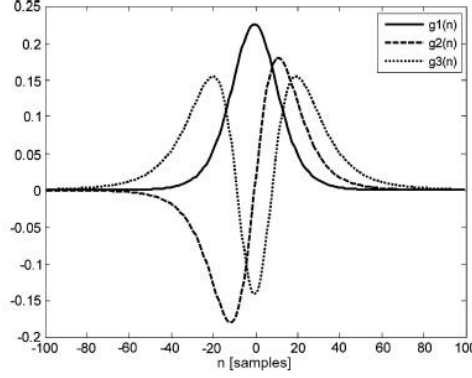
Από τη σχέση (5.11) φαίνεται ότι οι τρεις βασικές συναρτήσεις που συνδέουν το χώρο με το $|\vec{B}(u)|^2$ είναι:

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^4}, \varphi_2(u) = \frac{u}{(u^2 + 1)^4}, \varphi_3(u) = \frac{u^2}{(u^2 + 1)^4} \quad (5.12)$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες κάτι που αποδεικνύεται μέσω της ορίζουσας Wronski, που οδηγεί σε αποτέλεσμα διάφορο του μηδενός. Σκοπός είναι η κατασκευή μιας ομάδας συναρτήσεων βάσης, που είναι ορθοκανονικοποιημένες, ισχύει δηλαδή: $\int g_i(u)g_j(u) = \delta_{i,j}$. Για την κατασκευή ενός συστήματος ορθογώνιων συναρτήσεων χρησιμοποιείται η μέθοδος Gram-Schmidt και τελικά προκύπτει:

$$g_1(u) = \frac{0.3899}{(u^2 + 1)^4}, g_2(u) = \frac{1.4055u}{(u^2 + 1)^4}, g_3(u) = \frac{3.1767u^2 - 0.2444}{(u^2 + 1)^4} \quad (5.13)$$

Εδώ οι $g_1(u), g_2(u), g_3(u)$ θεωρούνται ότι είναι οι ορθοκανονικοποιημένες συναρτήσεις βάσης (OBFs).



Σχήμα 5.2: Οι ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης (OBFs) [37].

Στη συνέχεια γίνεται η εύρεση της κυρίαρχης OBF. Το σήμα μαγνητικής ανωμαλίας, το τετράγωνο δηλαδή της απόλυτης τιμής του σήματος του μαγνητομέτρου $|\vec{B}(u)|^2$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των OBFs μέσω των συντελεστών $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$|\vec{B}(u)|^2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi R_0^3}\right)^2 \sum_{j=1}^3 \lambda_j g_j(u) \quad (5.14)$$

Συγκρίνοντας τη (5.14) με την (5.11), τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των m_x, m_y, m_z :

$$\lambda_1 = 3.3541m_x^2 + 10.4563m_y^2 + 2.7621m_z^2, \lambda_2 = 4.2689m_x m_y, \lambda_3 = 1.2592m_x^2 + 0.3148m_y^2 + 0.3148m_z^2.$$

Μέσω της άλγεβρας μπορεί να αποδειχθεί ότι, για οποιαδήποτε m_x, m_y, m_z , ισχύει:

$$\lambda_1 > 2.7745|\lambda_2| \text{ και } \lambda_1 > 2.6641\lambda_3 > 0 \quad (5.15)$$

Άρα η $g_1(u)$ είναι η κυρίαρχη OBF.

Ακολούθως γίνεται η μελέτη της σύνθεσης του σήματος. Και οι τρεις άξονες του μαγνητομέτρου αναφοράς λαμβάνουν συγχρόνως μετρήσεις/δείγματα με μια δειγματοληπτική περίοδο T_s . Ο λόγος R_0/v ορίζεται ως χαρακτηριστικός χρόνος

$\tau = \frac{R_0}{v}$. Στη σχέση (5.5) γίνεται αντικατάσταση της συνεχούς μεταβλητής u με μία διακριτή μεταβλητή n , όπου: $u = \frac{vnT_s}{R_0} = \frac{nT_s}{\tau}$ (16). Ορίζονται οι κανονικοποιημένοι συντελεστές $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\gamma_j = \left(\frac{\mu_0}{4\pi R_0^3} \right)^2 \lambda_j, j = 1, 2, 3 \quad (5.16)$$

Άρα το τετράγωνο της απόλυτης τιμής του σήματος εξόδου του μαγνητομέτρου της σχέσης (5.14) μπορεί να γραφεί:

$$s(n) = \sum_{j=1}^3 \gamma_j g_j \left(\frac{nT_s}{\tau} \right), n = -N, -n + 1, \dots, N \quad (5.17)$$

Χρησιμοποιείται ένα κινούμενο παράθυρο με μήκος $2N+1$ δειγμάτων. Τα μήκος του παραθύρου ορίζεται βάσει του επιπέδου του θορύβου και του χαρακτηριστικού χρόνου τ . Μεγάλα μήκη τείνουν να συγκεντρώνουν επιπλέον θόρυβο, ενώ με μικρά μήκη μπορεί να χαθεί αρκετή πληροφορία. Το σήμα του στόχου $s(n)$ μπορεί να αναλυθεί στις ορθοκανονικοποιημένες βάσεις (OBFs) υπολογίζοντας τους κανονικοποιημένους συντελεστές. Από τη σχέση ορθοκανονικότητας (5.9) παίρνουμε:

$$\gamma_j = \sum_{n=-N}^N s(n) \cdot g_j \left(\frac{nT_s}{\tau} \right), j = 1, 2, 3 \quad (5.18)$$

Αφού $\gamma_j = \left(\frac{\mu_0}{4\pi R_0^3} \right)^2 \lambda_j$, με τη βοήθεια της ανισότητας (5.15) μπορεί να αποδειχθεί ότι ο γ_1 είναι ο μεγαλύτερος συντελεστής. Άρα όποτε το σήμα ενός στόχου εμφανίζεται στο παράθυρο δειγματοληψίας το μέγεθος $g_1 \left(\frac{nT_s}{\tau} \right)$ θα είναι μεγαλύτερο από τα μεγέθη $g_2 \left(\frac{nT_s}{\tau} \right)$, $g_3 \left(\frac{nT_s}{\tau} \right)$. Εξετάζοντας τη μεταβλητή γ_1 ανιχνεύεται η παρουσία της συνιστώσας $g_1 \left(\frac{nT_s}{\tau} \right)$ και έτσι αποκαλύπτεται ο στόχος.

Για την κατασκευή του ανιχνευτή γίνεται ανάλυση σε ιδιοδιανύσματα. Θεωρείται ότι η μαγνητική ανωμαλία απαρτίζεται από το σήμα του αντικειμένου $s(n) = [s(-N), s(-N + 1), \dots, s(N)]^T$ το οποίο είναι “μολυσμένο” με ένα πρόσθετο λευκό Gaussian θόρυβο: $w(n) = [w(-N), w(-N + 1), \dots, w(N)]^T$ με διακύμανση σ^2 . Κατασκευάζεται ένα φίλτρο $h(n)$ πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response (FIR)) με $[h(-N), h(-N + 1), \dots, h(N)]^T$. Το φίλτρο $h(n)$ θεωρείται ανιχνευτής θέτοντας τους συντελεστές του

$h(N), h(N - 1), \dots, h(-N)$ έτσι ώστε να μεγιστοποιούν την έξοδο όταν το σήμα του στόχου είναι παρόν στην είσοδο.

Για να υπολογιστεί το SNR γίνεται χωριστά υπολογισμός της αναμενόμενης ισχύος εξόδου για ένα καθαρό σήμα στην είσοδο, $E\{(h^T s)^2\}$, και της αναμενόμενης ισχύος του σήματος εξόδου για το θόρυβο, $E\{(h^T w)^2\}$. Αφού το $h(n)$ είναι ένα FIR φίλτρο το SNR υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση: $\eta = \frac{E\{(h^T s)^2\}}{E\{(h^T w)^2\}} = \frac{h^T E\{(ss^T)^2\} h}{h^T E\{(ww^T)^2\} h}$.

Χωρίς βλάβη στη γενικότητα θεωρείται: $h^T h = 1$ και ο πίνακας συσχέτισης του γκαουσιανού λευκού θορύβου θα είναι: $\eta = \frac{h^T R h}{h^T \sigma^2 I h} = \frac{h^T R h}{\sigma^2 h^T h} = \frac{h^T R h}{\sigma^2}$, όπου $R = E\{s s^T\}$. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $h^T R h$ μεγιστοποιείται, όταν το h του ιδιοδιανύσματος αποκρίνεται στο μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του R , a_{max} τότε $h^T R h = a_{max}$, άρα: $\eta_{max} = \frac{a_{max}}{\sigma^2}$.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι μετά τη δειγματοληψία σε ένα παράθυρο, οι OBFs είναι κατάλληλες για ιδιοδιανύσματα του R . Πρακτικά η $g_1 \left(\frac{nT_s}{\tau} \right)$ πρέπει να χρησιμοποιηθεί για ανίχνευση αφού αυτή είναι η κυρίαρχη OBF.

Από πειράματα αποδεικνύεται ότι τα ιδιοδιανύσματα q_1, q_2, q_3 με τη μεγαλύτερη απόκριση ιδιοτιμών και οι OBFs συνδέονται με τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Αγνοώντας τα πεπερασμένης ακρίβειας σφάλματα του πίνακα μετασχηματισμού (5.19), θεωρείται ότι προσεγγίζει το μοναδιαίο πίνακα I και άρα $q_j = g_j, j = 1, 2, 3$. Έχει βρεθεί ότι το $g_1 \left(\frac{nT_s}{\tau} \right)$ μπορεί να θεωρηθεί ιδιοδιάνυσμα του R με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή και άρα να χρησιμοποιηθεί ως ανιχνευτής. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία της $g_1 \left(\frac{nT_s}{\tau} \right)$ και αγνοώντας τον συντελεστή ενίσχυσης (amplification factor), ο ανιχνευτής δίνεται:

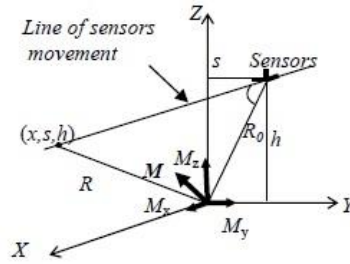
$$h(n) = \left[\left(\frac{nT_s}{\tau} \right)^2 + 1 \right]^{-4} \quad (5.20)$$

Οι τιμές των $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ στο σύστημα $\{s\}$ έχουν ήδη υπολογιστεί με χρήση της σχέσης (5.18) [37].

◦ Κινούμενα μαγνητόμετρα – ακίνητο φερρομαγνητικό αντικείμενο

Στην περίπτωση που θεωρηθεί ένα σύστημα με κινούμενα μαγνητόμετρα και ακίνητο στόχο, όπως αυτό του σχήματος (5.3), θεωρείται ίδιο πρόβλημα με το προηγούμενο και κατά όμοιο τρόπο προκύπτουν οι OBFs της εξίσωσης (5.7).

Μια ακόμα προσέγγιση για τη μετέπειτα επεξεργασία των OBFs είναι η ακόλουθη. Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων βάσης $g_j(u)$.



Σχήμα 5.3: Μαγνητικό δίπολο ακίνητο στην αρχή των αξόνων και ένα μαγνητόμετρο κινείται σε μια ευθεία [35].

Αρχικά ορίζεται ο πίνακας \bar{A} έτσι ώστε να ισχύει:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Ο πίνακας \bar{A} είναι ένας πίνακας 3x3, τα στοιχεία του οποίου εξαρτώνται από τη θέση και τον προσανατολισμό του διπόλου και αναπαρίσταται ως:

$$A_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} du g_i(u) B_j(u), i = 1, 2, 3 j = x, y, z \quad (5.22)$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις ισχύουν για οποιαδήποτε θέση και προσανατολισμό του διπόλου αλλά και για οποιαδήποτε κατεύθυνση του αισθητήρα αν αυτός κινείται. Άρα μπορεί να αναπτυχθεί ένας ενοποιημένος αλγόριθμος για την επεξεργασία του σήματος της μαγνητικής ανωμαλίας.

Με την εφαρμογή των OBFs μπορεί να βελτιστοποιηθεί ο λόγος του θορύβου ως προς το σήμα (Signal to Noise Ratio, SNR). Κατασκευάζεται μια συνάρτηση E , που θα χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο για την πρωταρχική ανάπτυξη του αλγορίθμου ανίχνευσης: $E_j = A_{1j}^2 + A_{2j}^2 + A_{3j}^2, j=x,y,z$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να ερμηνευτεί ως η ενέργεια του σήματος στο χώρο των ορθοκανονικοποιημένων βάσεων. Οι συντελεστές της προηγούμενης εξίσωσης υπολογίζονται από τη σχέση:

$$A_{ij}(u_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(u + u_0) \tilde{B}_j(u) du, i = 1, 2, 3 j = x, y, z \quad (5.23)$$

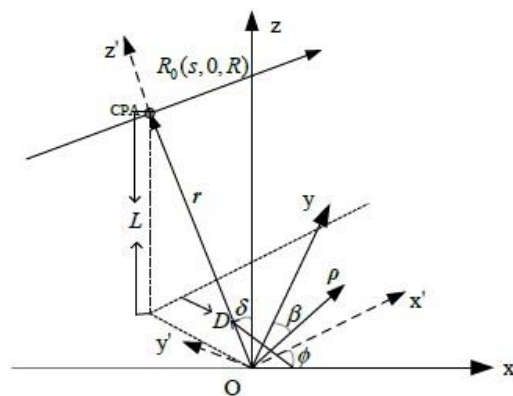
Όπου u_0 κάθε σημείο του αισθητήρα πάνω στο ίχνος της πλατφόρμας που κινείται.

Στην πραγματικότητα τα παραπάνω όρια ολοκλήρωσης είναι πεπερασμένα στο 'παράθυρο παρατήρησης' ('observation window') το μήκος του οποίου επιλέγεται βάσει της αναμενόμενης τιμής του CPA έτσι ώστε να συνυπολογιστεί ο πραγματικός χρόνος ανίχνευσης του συστήματος.

Ο προαναφερθείς αλγόριθμος παρόλο που παρέχει ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την ανίχνευση του στόχου, δεν αποκρίνεται στην απαιτούμενη εκτίμηση της θέσης του στόχου και της μαγνητικής ροπής του. Με σκοπό τη βελτίωση της εκτίμησης αυτών των παραμέτρων, χρησιμοποιούνται βοηθητικοί αλγόριθμοι όπως γενετικοί αλγόριθμοι (genetic algorithm, GA) [35], οι αλγόριθμοι Levenberg-Marquardt (L-M algorithm) [40], οι αλγόριθμοι Levinson-Durbin [41] και άλλοι.

◦ Κινούμενα μαγνητόμετρα – κινούμενο φερρομαγνητικό αντικείμενο

Στην περίπτωση όπου κινούνται και τα μαγνητόμετρα και ο στόχος, όπως σε αυτή των αερομεταφερόμενων μαγνητομέτρων, το σύστημα συντεταγμένων είναι πιο πολύπλοκο. Θεωρείται ότι τα αερομεταφερόμενα μαγνητόμετρα και τα φερρομαγνητικά αντικείμενα κινούνται με σταθερή ταχύτητα και κατεύθυνση σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, που φαίνονται στο σχήμα (5.4), τα οποία πρέπει να συνδυαστούν.



Σχήμα 5.4: Σχηματική αναπαράσταση των συστημάτων αναφοράς στη περίπτωση της σχετικής κίνησης του μαγνητομέτρου με το φερρομαγνητικό αντικείμενο [42].

Το φερρομαγνητικό αντικείμενο είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων των συντεταγμένων και έχει ως σύστημα αναφοράς το O-xyz όπου το Oy είναι ο γεωμαγνητικός και ο μαγνητικός βορράς. Το σύστημα O-x'y'z' αναφέρεται στο αερομεταφερόμενο μαγνητόμετρο. Το Ox' είναι παράλληλο στη διεύθυνση του μαγνητικού αισθητήρα και το Oz' είναι κάθετο στο Ox' και δείχνει προς το CPA. Η γωνία φ είναι η γωνία μεταξύ Ox και Ox', δ η γωνία μεταξύ Oz και Oz' και β η γωνία της πορείας του μαγνητικού στόχου. Τα L και D είναι η σχετική κάθετη και οριζόντια απόσταση μεταξύ του αισθητήρα και του αντικειμένου.

Σε διαφορετικές οριζόντιες σχετικές αποστάσεις D, η πιθανότητα ανίχνευσης του στόχου είναι $P_d(D)$ και το εύρος ανίχνευσης καθορίζεται από τη σχέση: $W_m = \int_{-\infty}^{\infty} P_d(D) dD$ (1). Θεωρείται ότι στην οριζόντια σχετική απόσταση D το φερρομαγνητικό αντικείμενο ανιχνεύεται και η πιθανότητα είναι 1.

Οι συντεταγμένες του μαγνητομέτρου στο σύστημα O-x'y'z' είναι (s,0,R) και $CPA = R_0$. Στο σύστημα O-x'y'z' η διεύθυνση του συνημιτόνου της μαγνητικής ροπής \vec{M} του στόχου είναι l, m, n και η διεύθυνση του συνημιτόνου του γεωμαγνητικού πεδίου \vec{H}_E είναι l_1, m_1, n_1 . Τότε τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα είναι:

$$\begin{aligned}\widehat{M}_{Ox'y'z'} &= l\hat{i}' + m\hat{j}' + n\hat{k}' \\ \widehat{H}_{E,Ox'y'z'} &= l_1\hat{i}' + m_1\hat{j}' + n_1\hat{k}'\end{aligned}\quad (5.24)$$

Η ταχύτητα του κινούμενου μαγνητομέτρου είναι: $\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$ και η ταχύτητα του αντικειμένου είναι: $\vec{\rho} = \rho_x\hat{i} + \rho_y\hat{j} + \rho_z\hat{k}$. Τότε η ταχύτητα του αισθητήρα σχετικά με το αντικείμενο θα είναι: $\vec{v} = (u_x - \rho_x)\hat{i} + (u_y - \rho_y)\hat{j} + (u_z - \rho_z)\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ και $\varphi = \arccos \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$, $\delta = \arctan \frac{D}{L}$.

Θεωρείται ότι ο αισθητήρας με το αντικείμενο έχουν μη-σχετική κίνηση στη κάθετη διεύθυνση, δηλαδή: $s = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}(t - t_0)$, $r = \sqrt{s^2 + R_0^2}$, όπου r η απόσταση μεταξύ του αντικειμένου και του σημείου ανίχνευσης.

Ο στόχος θεωρείται μαγνητικό δίπολο κατά τη διάρκεια της ανίχνευσης και το μετρούμενο σήμα από ένα βαθμωτό/μονόμετρο μαγνητόμετρο είναι:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r}) - \vec{M}}{r^3}\quad (5.25)$$

Η τιμή του μαγνητικού σήματος B_{MAD} που ανιχνεύεται είναι το μαγνητικό πεδίο του στόχου στην προβολή του μαγνητικού πεδίου της γης: $B_{MAD} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}_E}{H_E}$. Άρα το B_{MAD} μπορεί να γραφεί ως:

$$B_{MAD} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|\vec{M}|}{|\vec{r}|^3} \sum_{i=0}^2 A_i f_i(w)\quad (5.26)$$

όπου:

$$\begin{aligned}A_0 &= 2nn_1 - ll_1 - mm_1, \\ A_1 &= 3(nl_1 + ln_1), \\ A_2 &= 2ll_1 - mm_1 - nn_1\end{aligned}\quad (5.27)$$

συντελεστές, που ονομάζονται συντελεστές Anderson,

$$w = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{R_0}, \quad f_i(w) = \frac{w^i}{(1+w^2)^2}\quad (5.28)$$

είναι οι ορθοκανονικοποιημένες συναρτήσεις βάσης ή εξισώσεις Anderson.

Στο σύστημα Oxyz το \vec{M} γράφεται: $\vec{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{M} &= |\vec{H}_E| \cos\Phi \sin\beta \cos\beta \cdot (k_L - k_T)\hat{i} + |\vec{H}_E| \cos\Phi (k_L \cos^2\beta + k_T \sin^2\beta)\hat{j} \\ &\quad - |\vec{H}_E| \sin\Phi k_V \hat{k}\end{aligned}$$

όπου k_L, k_T, k_V αναφέρονται στην οριζόντια, διαμήκη και κάθετη μαγνητική διαπερατότητα του στόχου, Φ η γεωμαγνητική κλίση και $\widehat{H}_{E,Oxyz} = \cos\Phi\hat{j} + \sin\Phi\hat{k}$.

Έστω $\cos\Omega = \frac{M_x}{|\vec{M}|}$ και $\cos\Theta = \frac{M_y}{|\vec{M}|}$ τότε: $\widehat{M}_{Oxyz} = \cos\Omega \sin\Theta\hat{i} + \cos\Omega \cos\Theta\hat{j} - \sin\Omega\hat{k}$

Άρα $\hat{M}_{Ox'y'z'} = \bar{A}\hat{M}_{Oxyz}$ και $\hat{H}_{E,Ox'y'z'} = \bar{A}\hat{H}_{E,Oxyz}$.

Όπου \bar{A} ο πίνακας μετασχηματισμού για τα δύο συστήματα συντεταγμένων:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi\cos\delta & \cos\varphi\sin\delta \\ -\cos\varphi & \sin\varphi\cos\delta & \sin\varphi\sin\delta \\ 0 & -\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Με βάση τα προηγούμενα οι παράμετροι μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{cases} l = \cos\Omega \cos(\varphi - \theta) \\ m = \cos\delta \cos\Omega \sin(\varphi - \theta) - \sin\delta \sin\Omega \\ n = -\sin\delta \cos\Omega \sin(\varphi - \theta) - \cos\delta \sin\Omega \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\begin{cases} l_1 = \cos\Phi \cos\varphi \\ m_1 = \cos\delta \cos\Phi \sin\varphi - \sin\delta \sin\Phi \\ n_1 = -\sin\delta \cos\Phi \sin\varphi - \cos\delta \sin\Phi \end{cases}$$

Αυτές είναι οι σχέσεις που μπορεί να χρησιμοποιεί το εκάστοτε πρόγραμμα για να καθορίσει τις τιμές των συντελεστών Anderson.

Στη συνέχεια γίνεται επεξεργασία του σήματος. Ο εναπομένον από τη διαδικασία θόρυβος μπορεί να θεωρηθεί ότι ικανοποιεί κανονική κατανομή σε σταθερή πτήση της πλατφόρμας ανίχνευσης. Η μέση τιμή δηλαδή θα είναι μηδέν και η διακύμανση σ^2 . Η πιθανότητα ανίχνευσης του αντικειμένου εκτιμάται και πάλι μέσω μοντέλων με κατάλληλους αλγόριθμους [42].

5.4.3.2 Εντοπισμός μαγνητικής ανωμαλίας μέσω επεξεργασίας σήματος

Σε αυτή την κατηγορία μεθόδων εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων ανήκουν τεχνικές ανάλυσης του σήματος που λαμβάνεται από τους μαγνητικούς αισθητήρες. Κύριο πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι η απουσία παραδοχών για το φερρομαγνητικό αντικείμενο.

Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνται φίλτρα τα όποια διαμορφώνουν κατάλληλα το σήμα ώστε να μεταφραστεί σε χρήσιμη πληροφορία εντοπισμού του αντικειμένου. Βασικό μέλημα σε κάθε τέτοια τεχνική είναι η απομάκρυνση του θορύβου ή/και του γεωμαγνητικού πεδίου με σκοπό την ανάδειξη της ύπαρξης ή μη ενός φερρομαγνητικού αντικειμένου κατά την ανίχνευση. Έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές εντοπισμού αντικειμένου μέσω των μεθόδων MAD, που διαφοροποιούνται μεταξύ τους από τον τρόπο ανάλυσης του μετρούμενου σήματος και τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούν.

◦ Μέθοδος ανίχνευσης ελάχιστης εντροπίας (Minimum Entropy Detector – MED)

Η μέθοδος ανίχνευσης ελάχιστης εντροπίας (MED), που ανιχνεύει τις αλλαγές στο φάσμα του μαγνητικού θορύβου, βασίζεται στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μαγνητικού θορύβου.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας προέρχεται από τη δειγματοληψία του μαγνητικού θορύβου και χρησιμοποιεί τα δείγματα για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της διακύμανσης. Με χρήση της εκτιμώμενης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα για κάθε δείγμα.

Το μέγεθος της εντροπίας εκφράζει τη βασική θεωρητική μεταβλητή, η οποία χρησιμοποιείται συχνά για τη μέτρηση της πληροφορίας. Εδώ χρησιμοποιείται για την ανίχνευση στην αλλαγή του φάσματος του θορύβου. Η εντροπία υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες των δειγμάτων σε ένα κινούμενο παράθυρο. Η ύπαρξη μαγνητικής ανωμαλίας αποκαλύπτεται από τη μείωση της τιμής της εντροπίας κάτω από ένα κατώφλι.

Συγκεκριμένα ένα μαγνητόμετρο τοποθετείται έτσι ώστε να είναι προσανατολισμένο στη κατεύθυνση του γεωμαγνητικού πεδίου και καταμετράται το σήμα που εμπεριέχει το γεωμαγνητικό πεδίο και τον εσωτερικό θόρυβο. Κατόπιν το ιστόγραμμα του μετρούμενου θορύβου κανονικοποιείται στον αριθμό των δειγμάτων και προκύπτει μια εξίσωση πυκνότητας πιθανότητας που ακολουθεί τη κανονική κατανομή.

Το φίλτρο εντροπίας υπολογίζει την εντροπία σε ένα κινούμενο παράθυρο L δειγμάτων από τη σχέση: $I(x_i) = \sum_{n=i-L+1}^i p(x_n) \log p(x_n)$.

Η μέθοδος MED απαρτίζεται από το φίλτρο εντροπίας και ένα κατώφλι, έτσι ώστε ανίχνευση συμβαίνει όποτε η έξοδος του φίλτρου εντροπίας πέφτει κάτω από τη τιμή κατωφλίου.

Συγκρίνοντας τη παραπάνω μέθοδο με τη μέθοδο των OBFs, παρατηρείται ότι οι OBFs βασίζονται σε εκ των προτέρων παραδοχές όσο αφορά το αντικείμενο (είναι μαγνητικό δίπολο και κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα και σταθερή μαγνητική διπολική ροπή, περνώντας κοντά από τον αισθητήρα). Ενώ η μέθοδος MED δεν έχει τέτοια προαπαιτούμενα παραδοχών [39].

◦ Μέθοδος ανίχνευσης μαγνητικής ανωμαλίας με προσομοίωση ανόπτησης (Simulated Annealing, SA)

Μια άλλη μελέτη του Sheinker, προτείνει μια παρόμοια τεχνική, τη μέθοδο προσομοίωσης ανόπτησης (SA), ως μέθοδο για την εύρεση της πιο προσιτής λύσης

στο πρόβλημα. Στη θεώρηση του μαγνητικού διπόλου, έχοντας ως σύστημα αναφοράς μια κινούμενη πλατφόρμα, μπορεί να γίνει δειγματοληψία του μαγνητικού πεδίου σε N διαφορετικές θέσεις (Σχήμα 5.5). Για μεγάλο αριθμό N , προκύπτει ένα σύστημα πεπερασμένων μη γραμμικών εξισώσεων.

Το SA είναι εμπνευσμένο από τη φυσική ανόπτηση, μια θερμική κατεργασία για την επίτευξη χαμηλών ενεργειακών καταστάσεων ενός στερεού, μέσω ενός λουτρού θερμότητας. Κατ' αναλογία θεωρούμε ένα σύστημα που μπορεί να έχει L διαφορετικές καταστάσεις: S_1, \dots, S_L και σε καθεμία από αυτές το σύστημα μπορεί να βρίσκεται σε μία μόνο κατάσταση. Θεωρείται η αρχική (τρέχουσα) κατάσταση S_k . Η παραδοχή ότι το σύστημα θα μεταβεί στην κατάσταση S_j την επόμενη στιγμή καθορίζεται από τη σχέση:

$$a_{kj} = \begin{cases} 1, & E_j < E_k \\ e^{\frac{(E_k - E_j)}{T}}, & E_j > E_k \end{cases} \quad (5.31)$$

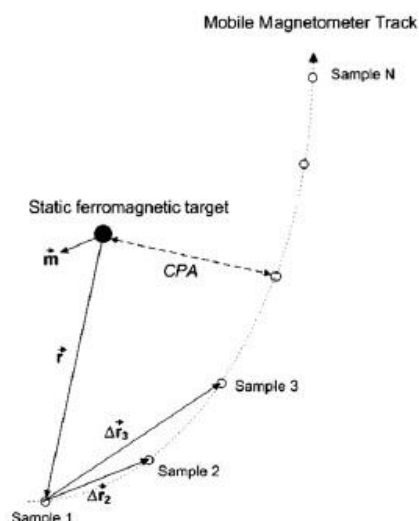
όπου E_k, E_j οι αντίστοιχες τιμές ενέργειας των καταστάσεων S_k, S_j και T η θερμοκρασία που ρυθμίζεται.

Όσο μεγαλύτερο το a_{kj} τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μετάβαση ενώ για ίσο με μηδέν η μετάβαση δε γίνεται. Η διαδικασία συνοψίζεται σε έναν αλγόριθμο και με την κατάλληλη επεξεργασία σήματος προκύπτει η βέλτιστη (υπολογιζόμενη) λύση [43].

◦ Μέθοδος ανίχνευσης μαγνητικής ανωμαλίας μέσω μεταβάσεων υψηλής τάξης (High-order crossing, HOC)

Ο Sheinker προτείνει πολλές μεθόδους MAD. Μια από αυτές βασίζεται στη χρήση της προσέγγισης μεταβάσεων υψηλής τάξης (HOC). Το HOC είναι μια εναλλακτική μέθοδος για χωρική ανάλυση που βασίζεται σε ένα μετρητή διελεύσεων από το μηδέν (zero-crossing count).

Η μέθοδος εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι οι μετρήσεις HOC υπό την παρουσία του φερρομαγνητικού αντικειμένου είναι διαφορετικές από τις τιμές HOC του μαγνητικού υποβάθρου. Ο ανιχνευτής HOC, βασίζεται στη μελέτη της



Σχήμα 5.5: Ένα μαγνητόμετρο τριών αξόνων τοποθετημένο σε κινούμενη σταθερή πλατφόρμα που κινείται κατά μήκος ενός ίχνους αναζητώντας φερρομαγνητικά αντικείμενα [43].

πιθανότητας για την ανίχνευση ή όχι του αντικειμένου, υπολογίζοντας τη μέτρηση μηδενικών διελεύσεων [36].

◦ Μέθοδος ανίχνευσης με σύμφωνη αποδιαμόρφωση (coherent demodulation)

Ο Gao προτείνει ως μέθοδο ανίχνευσης της μαγνητικής ανωμαλίας τη σύμφωνη αποδιαμόρφωση (coherent demodulation) του σήματος και χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt (L-M) για τον υπολογισμό της θέσης του αντικειμένου με τα δεδομένα που μετρήθηκαν από έναν μαγνητικό αισθητήρα τριών αξόνων.

Πιο συγκεκριμένα, στο σήμα εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός Fourier για την επίτευξη της συχνότητας σήματος που αποκρίνεται στο μαγνητικό πεδίο. Κατόπιν το μαγνητικό σήμα υπολογίζεται από το μετασχηματισμό των τριγωνομετρικών εξισώσεων και μια διαδικασία χαμηλοπερατού φιλτραρίσματος που αποδιαμορφώνουν το μαγνητικό πεδίο. Τελικά μέσω του L-M αλγορίθμου γίνεται ο εντοπισμός της θέσης του αντικειμένου [40].

Πειραματικό Μέρος

6. Πειραματική διαδικασία

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη των διαφόρων μεθόδων εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων και των αλγορίθμων που αξιοποιούν τις μετρήσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου για τον προσδιορισμό της θέσης του φερρομαγνητικού αντικειμένου στο χώρο.

Στα πλαίσια αυτά, σχεδιάστηκε μια διάταξη, που επιτρέπει την τρις-διάστατη αποτύπωση του μαγνητικού πεδίου που παράγουν μαγνήτες NdFeB, διαφορετικών όγκων, για διάφορες θέσεις τους στο επίπεδο, όπου είναι τοποθετημένα και η μετρητική διάταξη. Για τις μετρήσεις χρησιμοποιήθηκε ένας εμπορικός αισθητήρας Hall συνδεδεμένος με έναν μικροεπεξεργαστή Arduino, ο οποίος ήταν τοποθετημένος σε σταθερό σημείο. Ο στόχος είναι η χρήση του μαγνητόμετρου Hall-Arduino για τη μελέτη του τρισδιάστατου μαγνητικού πεδίου του κάθε μαγνήτη, ώστε να προσδιοριστεί η καταλληλότερη πειραματική διάταξη και διαδικασία για τη λήψη δυναμικών μετρήσεων μαγνητικού πεδίου και έτσι ώστε αυτές να χρησιμοποιηθούν σε αλγορίθμους εντοπισμού μαγνητικής ανωμαλίας (MAD).

Πριν τη διεξαγωγή αυτών των μετρήσεων, πραγματοποιήθηκαν μια σειρά από μετρήσεις χωρίς την παρουσία κάποιου φερρομαγνητικού αντικειμένου, ώστε να αποτυπωθούν οι εντάσεις του γεωμαγνητικού πεδίου για κάθε συνιστώσα και κατόπιν αυτές να αφαιρεθούν από τις μετρήσεις και να εξαχθεί το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών. Μετά τη διαδικασία απομάκρυνσης του γεωμαγνητικού πεδίου από τις μετρήσεις, με τις τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών κατασκευάστηκαν και μελετήθηκαν τα διαγράμματα τους ως προς το επίπεδο x,y.

Επιπλέον μελετήθηκε και το μέτρο του μαγνητικού πεδίου με και χωρίς μαγνήτες, βάση της εξίσωσης του μέτρου των διανυσμάτων:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (6.1)$$

Με τα αποτελέσματα της παραπάνω σχέση κατασκευάζονται επίσης τα διαγράμματα του μέτρου του μαγνητικού πεδίου ως προς κάθε σημείο του επιπέδου x-y στα οποία βρέθηκε ο μαγνήτης.

6.1. Αισθητήρας Hall

Ο αισθητήρας που χρησιμοποιήθηκε για τις μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου είναι ο Bosch Sensortec BNO055 (Σχήμα 6.1.1). Πρόκειται για ένα ολοκληρωμένο (IC) που αποτελείται από τρεις



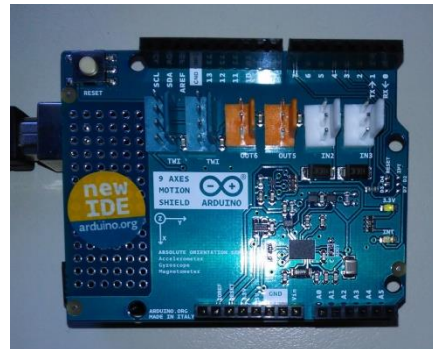
αισθητήρες (ένα επιταχυνσιόμετρο, ένα γυροσκόπιο και έναν γεωμαγνητικό αισθητήρα τριών αξόνων), καθώς και ένα μικροεπεξεργαστή.

Σχήμα 6.1.1:
Αναπαράσταση
του αισθητήρα
Hall, Bosch
Sensortec BNO055
[44].

Τα χαρακτηριστικά του μαγνητικού αισθητήρα όπως αναγράφονται στο εγχειρίδιο είναι τα εξής. Το εύρος της μαγνητικής επαγωγής που μετράται από τον αισθητήρα είναι $\pm 1300\mu T$ για τον x- και y-άξονα και $\pm 2500\mu T$ για τον άξονα z. Επίσης η ανάλυση του μετρούμενου μαγνητικού πεδίου είναι περίπου $0.3\mu T$.

Ο αισθητήρας είναι τοποθετημένος σε μια πλακέτα Arduino η οποία συνδέεται με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Οι τιμές που εμφανίζονται στον υπολογιστή είναι οι τρεις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου όπως αυτό μετράται από τον αισθητήρα [44].

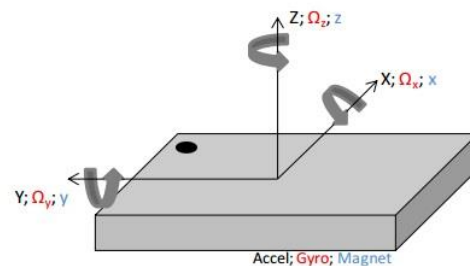
Το Arduino αναπτύχθηκε το 2006 και είναι μία πλακέτα που περιλαμβάνει έναν μικροελεγκτή. Το Arduino περιέχει επίσης εισόδους και εξόδους και μπορεί να προγραμματιστεί μέσω της γλώσσας προγραμματισμού C/C++ σε ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον ανάπτυξης (IDE) [45].



Συγκεκριμένα, ο αισθητήρας Hall ήταν μέρος ενός Arduino Shield, δηλαδή μιας επιπρόσθετης πλακέτας που αυξάνει τις λειτουργίες του απλού Arduino (Σχήμα 6.1.2). Στον υπολογιστή, μέσω του εγκαταστημένου προγράμματος, εμφανίζονται οι μετρήσεις του μαγνητομέτρου σε κάθε συνιστώσα, οι οποίες μπορούν να αποθηκευτούν.

Σχήμα 6.1.2: Η πλακέτα Arduino πάνω στην οποία είναι τοποθετημένος ο αισθητήρας Hall.

Πριν από τη διεξαγωγή των μετρήσεων πραγματοποιούνταν, με κατάλληλες κινήσεις του αισθητήρα, η βαθμονόμησή του. Παρόλα αυτά όταν ο μαγνήτης πλησίαζε αρκετά τον αισθητήρα δεν ήταν εφικτή η βαθμονόμηση. Στο διπλανό σχήμα (Σχήμα



Σχήμα 6.1.3: Η φορά των συνιστωσών του αισθητήρα [44].

6.1.3) φαίνεται η φορά των τριών συνιστωσών του αισθητήρα.

Σημειώνεται τέλος, ότι ο αισθητήρας βρισκόταν σε ύψος $z=2\text{cm}$ από το επίπεδο x,y λόγω της διάταξης στην οποία είναι τοποθετημένος. Δηλαδή η θέση του αισθητήρα στο χώρο ήταν η $(0,0,2)$.

6.2. Γεωμαγνητικό Πεδίο

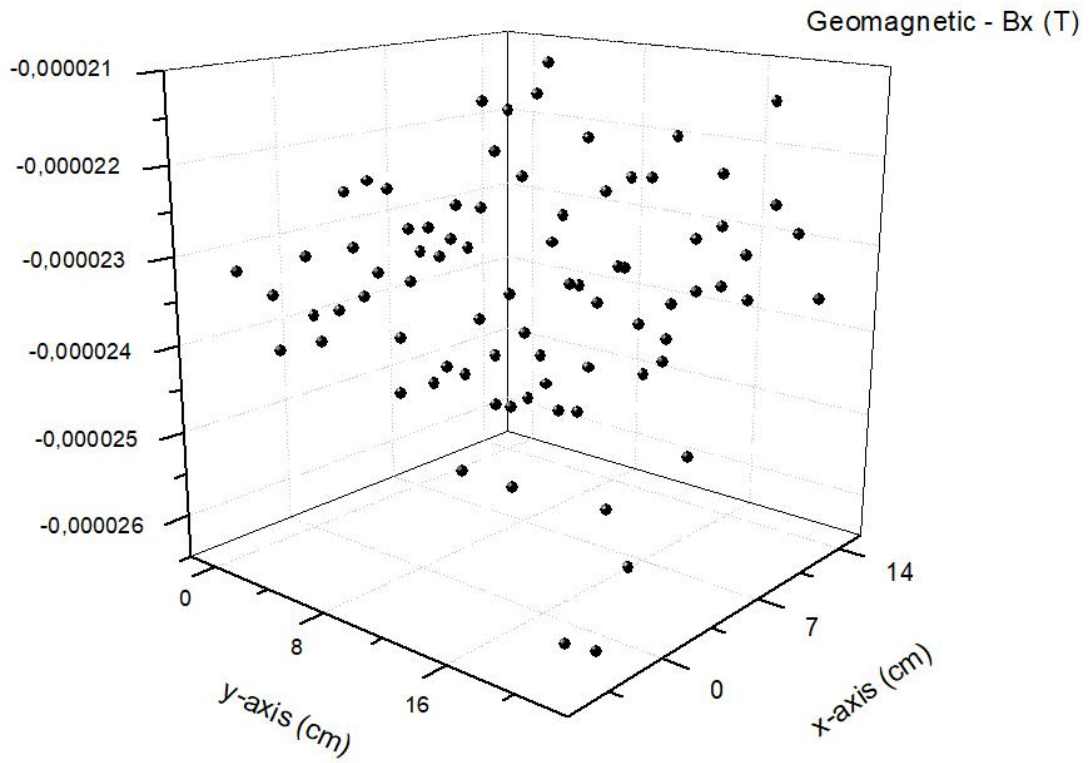
Το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη αποτελεί μια ανωμαλία στο γεωμαγνητικό πεδίο που υπάρχει σε κάθε περιοχή.

Ο αισθητήρας μετρά το συνολικό μαγνητικό πεδίο που υπάρχει σε μια περιοχή, το οποίο περιλαμβάνει το γεωμαγνητικό πεδίο της περιοχής όπου γίνονται οι μετρήσεις, αλλά και το μαγνητικό πεδίο πιθανών φερρομαγνητικών αντικειμένων που υπάρχουν στο χώρο αυτό.

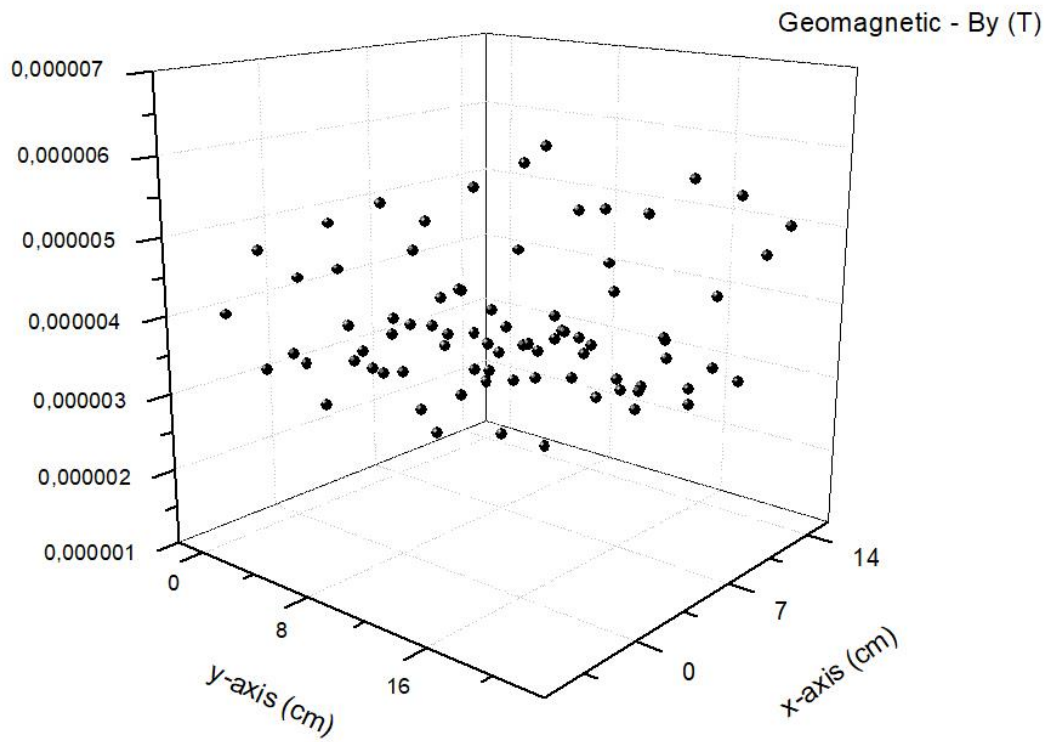
Για να υπάρχει γνώση των τιμών των εντάσεων του γεωμαγνητικού πεδίου στο χώρο του εργαστηρίου, όπου διεξήχθησαν οι μετρήσεις, και για να μπορούν αυτές να αφαιρεθούν, ώστε να διαφανεί η ύπαρξη ενός μαγνητικού αντικειμένου, κατεγράφησαν μετρήσεις από τον αισθητήρα στο χώρο αυτό.

Αρχικά αφαιρέθηκε από το χώρο διεξαγωγής των μετρήσεων οποιοδήποτε φερρομαγνητικό αντικείμενο, που μπορεί να προκαλεί μαγνητικό πεδίο, το οποίο γίνεται αντιληπτό από τον αισθητήρα. Κατόπιν, τοποθετώντας τον αισθητήρα σε προκαθορισμένες θέσεις στο επίπεδο $x-y$, έγινε αποτύπωση των συνιστωσών του γεωμαγνητικού πεδίου.

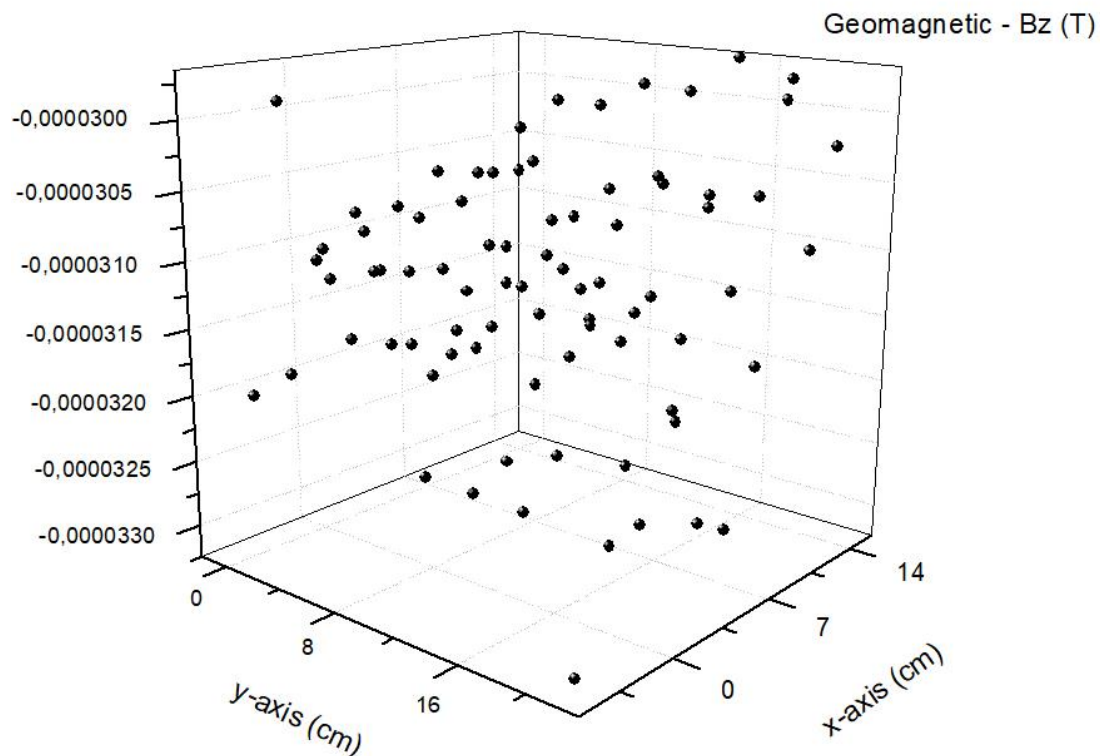
Τα αποτελέσματα των μετρήσεων των συνιστωσών του γεωμαγνητικού πεδίου ως προς τα σημεία του επιπέδου $x-y$, στα οποία βρέθηκε ο αισθητήρας, φαίνονται στα επόμενα διαγράμματα (Σχήματα 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3).



Σχήμα 6.2.1: Το διάγραμμα της συνιστώσας x του γεωμαγνητικού πεδίου ($B_{x,geo}$) ως προς το επίπεδο x-y.



Σχήμα 6.2.2: Το διάγραμμα της συνιστώσας y του γεωμαγνητικού πεδίου ($B_{y,geo}$) ως προς το επίπεδο x-y.



Σχήμα 6.2.3: Το διάγραμμα της συνιστώσας z του γεωμαγνητικού πεδίου ($B_{z,geo}$) ως προς το επίπεδο x-y.

Από τα τιμές των διαγραμμάτων (Σχήματα 6.2.1 έως 6.2.3), παρατηρείται ότι το γεωμαγνητικό πεδίο σε όλες τις συνιστώσες του παρουσιάζει μικρές διακυμάνσεις.

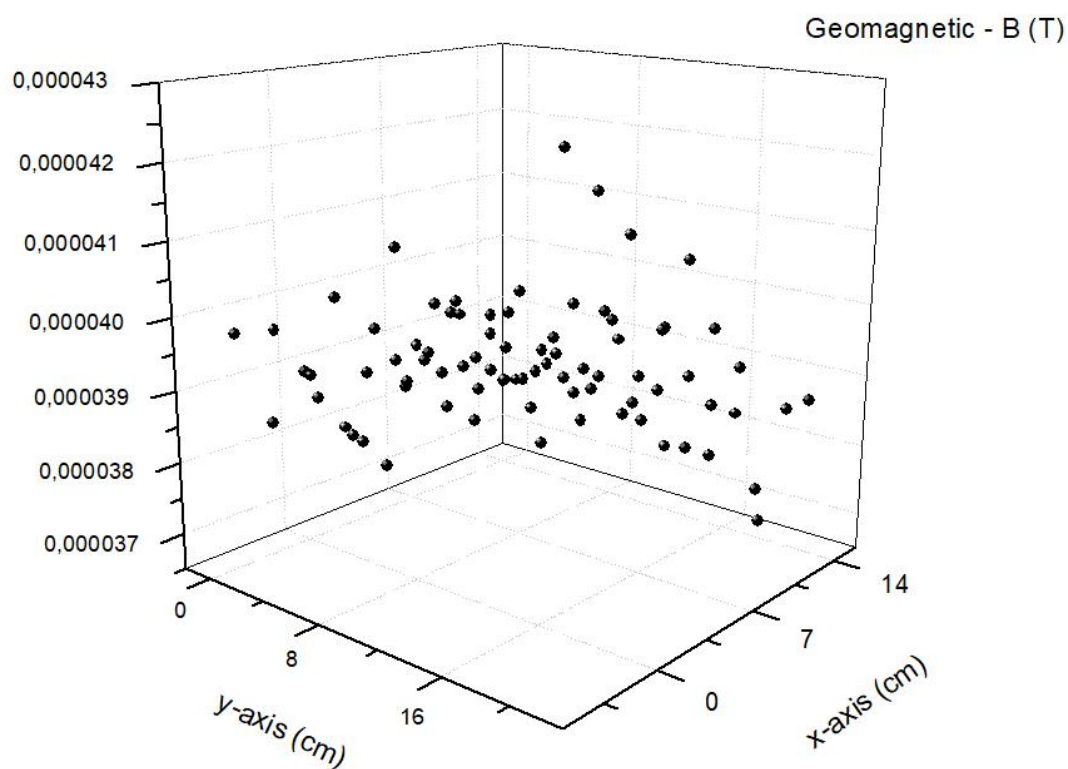
Η συνιστώσα x του γεωμαγνητικού πεδίου ($B_{x,geo}$) (Σχήμα 6.2.1), κυμαίνεται μεταξύ του $-26.38\mu\text{T}$ και $-21.27\mu\text{T}$. Η συνιστώσα y του γεωμαγνητικού πεδίου ($B_{y,geo}$) (Σχήμα 6.2.2), παρατηρήθηκε σε ένα εύρος από $1.37\mu\text{T}$ έως $6.67\mu\text{T}$. Η συνιστώσα z του γεωμαγνητικού πεδίου ($B_{z,geo}$) (Σχήμα 6.2.3), παρουσίαζε τιμές στο εύρος από $36.98\mu\text{T}$ έως $42.78\mu\text{T}$.

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω διακυμάνσεις, που παρατηρήθηκαν σε κάθε συνιστώσα του γεωμαγνητικού πεδίου παρέμεναν όμοιες κάθε μέρα και σε κάθε ώρα, καθώς ελέγχθηκαν καθ' όλη τη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας.

Συγκρίνοντας τις τιμές των συνιστωσών που μετρήθηκαν, με αυτές που υπολογίστηκαν μέσω των αριθμομηχανών, που παρουσιάζονται στην ενότητα (4.1) του θεωρητικού μέρους, γίνονται εμφανή τα εξής. Όσον αφορά τη συνιστώσα x η αριθμομηχανή για παγκόσμιο μαγνητικό μοντέλο (WMM) δίνει τη τιμή $26.669\mu\text{T}$, ενώ η αριθμομηχανή του μοντέλου IGRF δίνει $27.161\mu\text{T}$. Οι τιμές που μετρήθηκαν για τη συνιστώσα x του γεωμαγνητικού πεδίου προκύπτουν ελάχιστα μικρότερες

από αυτές που υπολογίστηκαν μέσω των μοντέλων. Για τη συνιστώσα y τα μοντέλα υπολογίζουν ότι είναι $2.114\mu\text{T}$ για το WMM και $2.034\mu\text{T}$ για το IGRF. Συγκρίνοντας με τις συνιστώσες y του γεωμαγνητικού πεδίου, που μετρήθηκαν, φαίνεται οι τιμές των μοντέλων βρίσκονται μέσα στο εύρος μέτρησης της συνιστώσας y . Τέλος η συνιστώσα z του γεωμαγνητικού πεδίου όπως μετρήθηκε από την αριθμομηχανή WMM είναι ίση με $37.524\mu\text{T}$ και από την αριθμομηχανή για το IGRF ίση με $36.537\mu\text{T}$, αρκετά κοντά στις μετρούμενες τιμές.

Υπολογίζεται κατόπιν το μέτρο του γεωμαγνητικού πεδίου από τις συνιστώσες του, όπως κατεγράφησαν προηγουμένως, μέσω της εξίσωσης (6.1). Στο επόμενο διάγραμμα (Σχήμα 6.2.4) αποτυπώνονται τα αποτελέσματα του μέτρου του γεωμαγνητικού πεδίου ως προς το επίπεδο x - y .



Σχήμα 6.2.4: Το διάγραμμα του μέτρου του γεωμαγνητικού πεδίου (B_{geo}) ως προς το επίπεδο x - y .

Από το διάγραμμα του μέτρου του γεωμαγνητικού πεδίου (Σχήμα), φαίνεται, ότι πέρα κάποιων διακυμάνσεων, παραμένει σχετικά σταθερό. Το εύρος μέσα στο οποίο μετρήθηκε είναι μεταξύ $36.98\mu\text{T}$ και $42.78\mu\text{T}$.

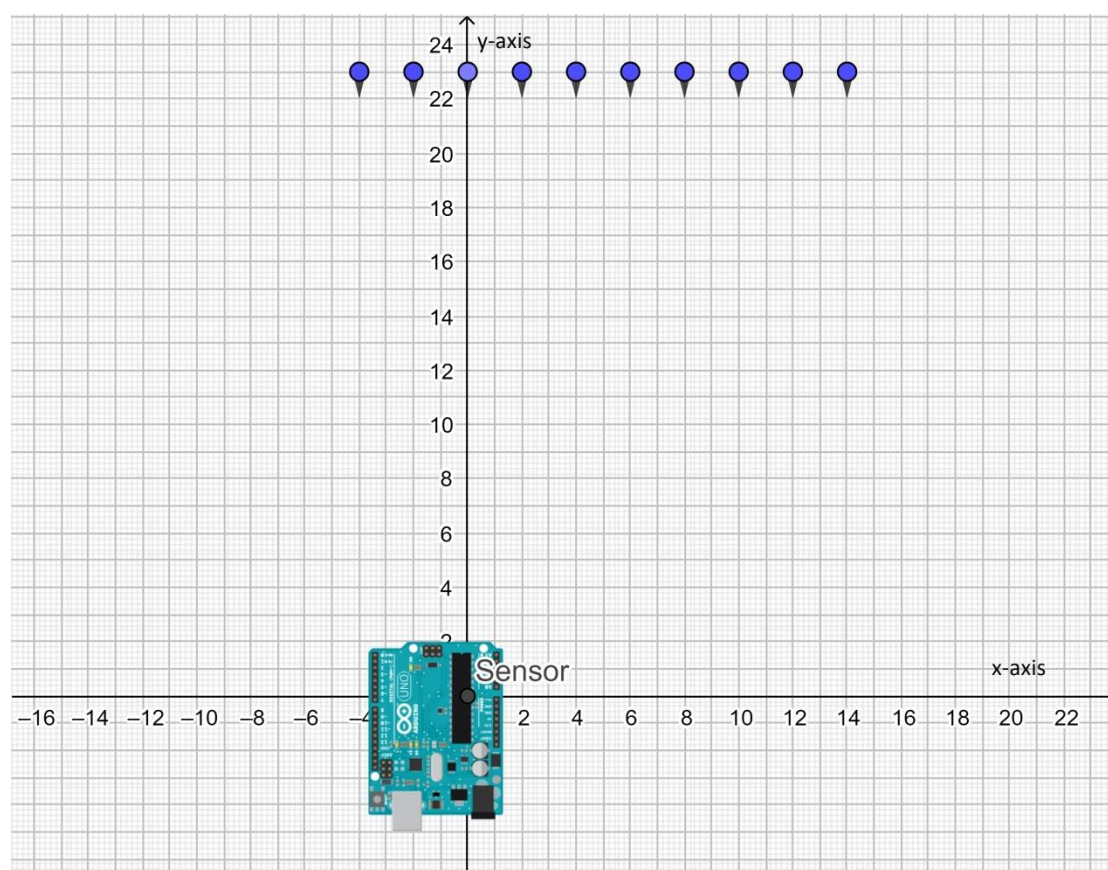
Συγκρίνοντας τις τιμές αυτές με εκείνες που προέκυψαν από τα αριθμητικά μοντέλα φαίνεται ότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση. Συγκεκριμένα η αριθμομηχανή του μοντέλου WMM δίνει συνολική ένταση μαγνητικού πεδίου ίση με $46.036\mu\text{T}$ και

του μοντέλου IGRF δίνει $45.572\mu\text{T}$. Προκύπτει, δηλαδή, ότι το μετρούμενο μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι μικρότερο από αυτό των θεωρητικών μοντέλων.

6.3. Το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών

Οι μαγνήτες που χρησιμοποιήθηκαν για τη διεξαγωγή των πειραματικών μετρήσεων ήταν μαγνήτες νεοδυμίου. Το μαγνητικό υλικό τους είναι κράμα νεοδυμίου-σιδήρου-βορίου (NdFeB) και η επικάλυψη τους είναι από λεπτό υμένιο νικελίου-χαλκού (Ni-Cu-Ni).

Με σκοπό τη μελέτη διαφορετικών μαγνητικών πεδίων ως προς την ένταση και τη μορφή τους, έγιναν μετρήσεις με μαγνήτες διαφορετικού όγκου. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν μαγνήτες κυβικού, ορθογώνιου και κυλινδρικού σχήματος. Η πειραματική διαδικασία υπήρξε ίδια για όλους τους μαγνήτες και αποτυπώνεται στο επόμενο σχήμα (6.3.1).



Σχήμα 6.3.1: Σχηματική αναπαράσταση του χώρου των πειραματικών μετρήσεων που χρησιμοποιήθηκε κατά την πειραματική διαδικασία.

Με τη βοήθεια ενός χλιοστομετρικού χαρτιού ορίστηκαν τα σημεία, στα οποία βρέθηκαν οι μαγνήτες και ο αισθητήρας. Οι άξονες x, y του επιπέδου

ορίστηκαν κατά την ίδια κατεύθυνση με τις αντίστοιχες συνιστώσες στις οποίες μετρούσε ο αισθητήρας. Ο αισθητήρας παρέμεινε ακίνητος στο σημείο (0,0) καθ' όλη τη διάρκεια των μετρήσεων, ενώ οι μαγνήτες μετακινήθηκαν σε προκαθορισμένες θέσεις στο επίπεδο x-y. Υπενθυμίζεται ότι ο αισθητήρας βρισκόταν σε ύψος $z=2\text{cm}$ από το επίπεδο x-y, λόγω της διάταξης στην οποία είναι τοποθετημένος. Η θέση, δηλαδή, του αισθητήρα στο χώρο ήταν η (0,0,2).

Το εύρος του επιπέδου x-y, που επιλέχθηκε, και μέσα στο οποίο μετακινήθηκαν οι μαγνήτες, είναι για τον άξονα x το (-4,14) με βήμα 2cm και για τον άξονα y το (n,21) με βήμα 1cm, όπου το n αντιστοιχεί στη θέση πάνω στον άξονα y μέχρι την οποία ήταν δυνατό να πλησιάσει ο μαγνήτης και διέφερε ανάλογα το σχήμα και το μέγεθός του. Η ανάγκη ορισμού της παραμέτρου n, του διαφορετικού σημείου, δηλαδή, στο οποίο μπορούσε να πλησιάσει ο κάθε μαγνήτης, συνέβη λόγω δύο πρακτικών προβλημάτων. Πρώτον εξαιτίας της ύπαρξης της διάταξης που φέρει τον αισθητήρα, γεγονός που έκανε μη δυνατή την προσέγγιση του μαγνήτη σε σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα στον αισθητήρα. Ένας δεύτερος λόγος, που καθιστούσε αδύνατη τη μέτρηση πολύ κοντά στον αισθητήρα, ήταν οι μεγάλες τιμές του μαγνητικού πεδίου, που σε κάποιες συνιστώσες έφταναν σε επίπεδα υψηλότερα από το εύρος μέσα στο οποίο ο αισθητήρας μετρά.

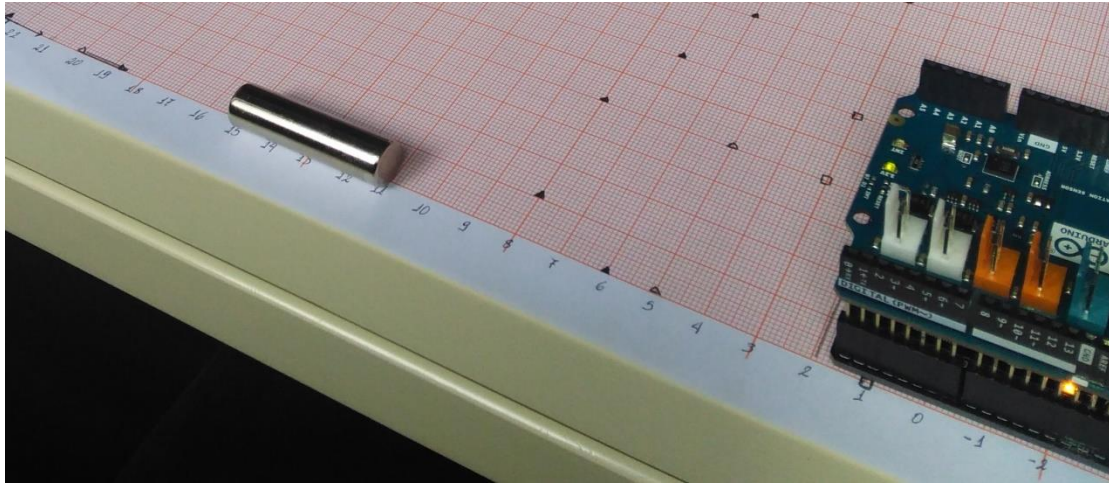
Για κάθε σημείο του επιπέδου στο οποίο βρέθηκαν οι μαγνήτες καταχωρήθηκαν οι τιμές των τριών συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου (B_x, sign , B_y, sign , B_z, sign). Συγκεκριμένα σε κάθε σημείο έγινε καταγραφή τριών τιμών της έντασης του μαγνητικού πεδίου για κάθε συνιστώσα του και από αυτές εξήχθησαν οι αντίστοιχες μέσες τιμές τους, έτσι ώστε σε κάθε σημείο του επιπέδου x-y, να αντιστοιχεί από μια τιμή για κάθε συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου.

Κατόπιν στις τιμές αυτές, αφαιρώντας τις τιμές των μετρήσεων των συνιστωσών του γεωμαγνητικού πεδίου (B_x, geo , B_y, geo , B_z, geo), σε κάθε σημείο του επιπέδου x-y, προκύπτει το μαγνητικό πεδίο του κάθε μαγνήτη (B_x , B_y , B_z).

Το μαγνητικό πεδίο κάθε μαγνήτη, αναλόγως με το σχήμα και το μέγεθος του, από ένα σημείο του επιπέδου και μετά μειωνόταν εκθετικά και έφθινε προς το μηδέν. Στις αρχικές μετρήσεις που έγιναν, υπήρχε η συνεισφορά του γεωμαγνητικού πεδίου με τις αντίστοιχες διακυμάνσεις σε κάθε συνιστώσα. Έτσι σε μεγάλες αποστάσεις όπου το πεδίο του εκάστοτε μαγνήτη, έφθινε και έτεινε προς το μηδέν, έπαιρνε τιμές όμοιες με αυτές των διακυμάνσεων του γεωμαγνητικού πεδίου και άρα δεν ήταν δυνατός ο προσδιορισμός της πραγματικής συνεισφοράς του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη, εξαιτίας και της περιορισμένης ευαισθησίας του αισθητήρα.

6.3.1 Κυλινδρικός Μαγνήτης

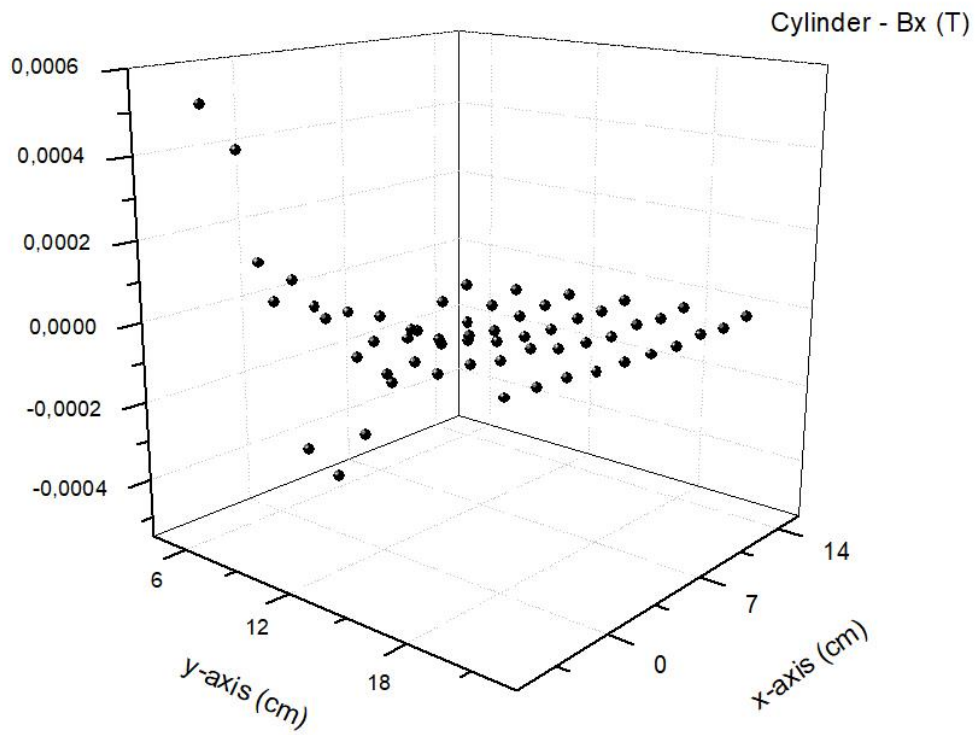
Αρχικά έγινε η καταγραφή των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου ενός κυλινδρικού μαγνήτη νεοδυμίου (NdFeB), ο οποίος φαίνεται στο σχήμα (6.3.2). Οι διαστάσεις του ήταν $R = 0.5\text{cm}$ και $L = 4\text{cm}$.



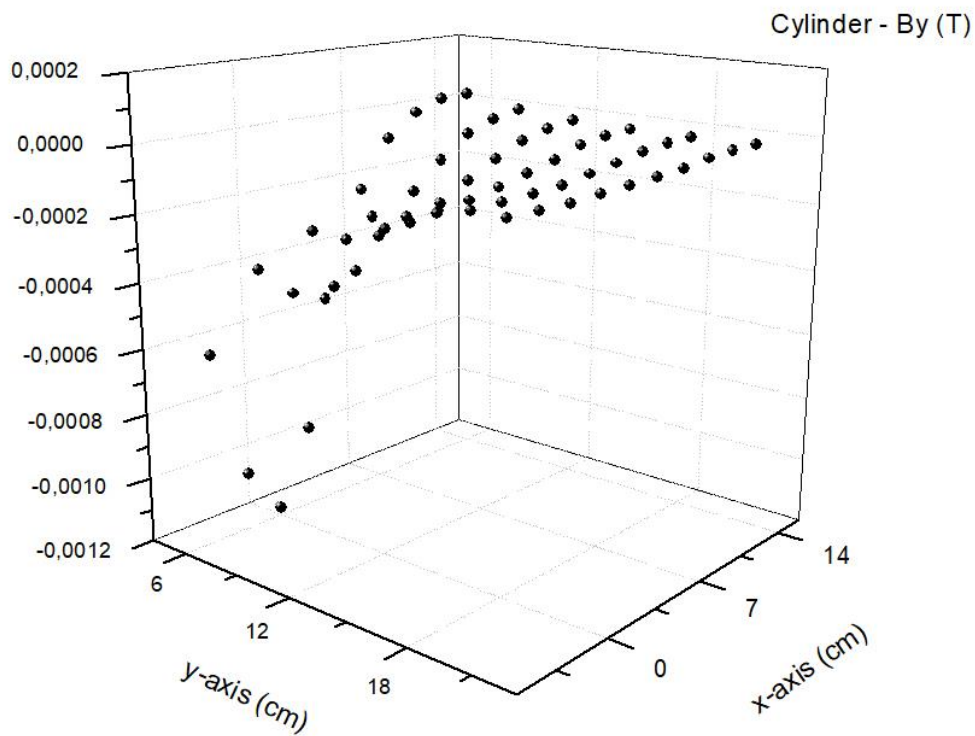
Σχήμα 6.3.2: Αναπαράσταση του κυλινδρικού μαγνήτη.

Οι βαθμοί του συγκεκριμένου μαγνήτη ήταν N40, οι οποίοι αντιστοιχούν σε παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_r = 1.26\text{--}1.29\text{T} \sim 1.275\text{T}$. Το μήκος του μαγνήτη ήταν 4cm και η ακτίνα του 0.5cm.

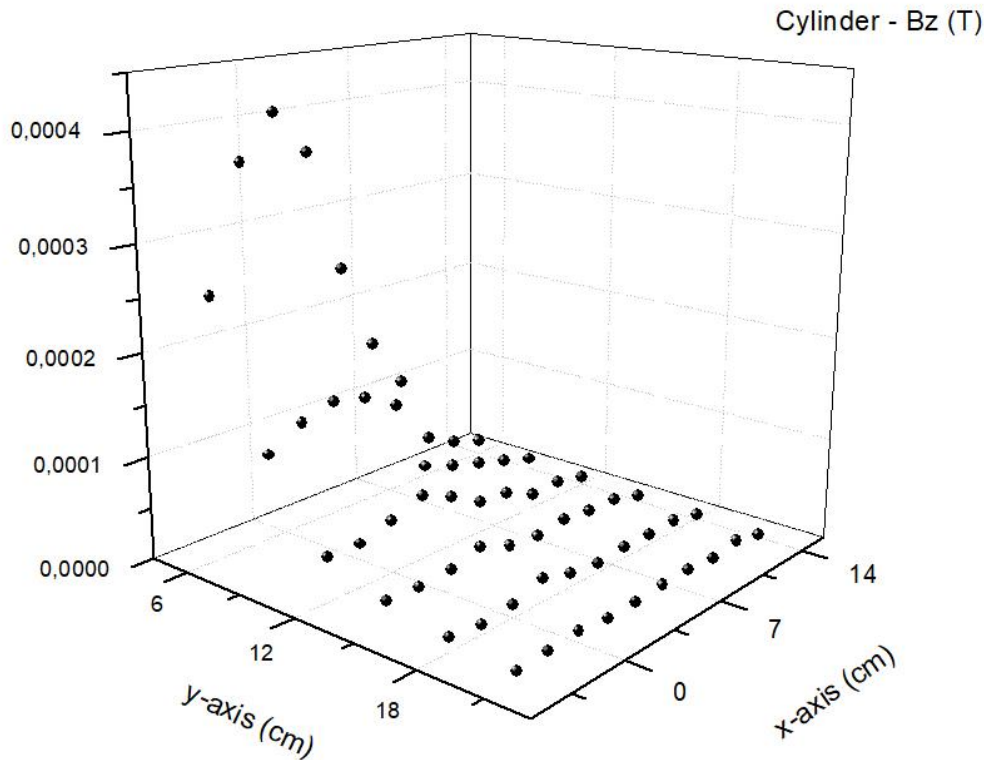
Ο κυλινδρικός μαγνήτης μετακινήθηκε σε σημεία του επιπέδου x-y. Συγκεκριμένα βρέθηκε σε θέσεις που αντιστοιχούν στον άξονα x σε ένα εύρος από -4 έως 14 cm με βήμα 2 και στον άξονα y στο εύρος 6 έως 21 cm με βήμα 3. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου (B_x, B_y, B_z) που προκαλεί ο μαγνήτης ως προς τις αντίστοιχες θέσεις του στο επίπεδο x-y (Σχήματα 6.3.3, 6.3.4 και 6.3.5).



Σχήμα 6.3.3: Το διάγραμμα της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x) του κυλινδρικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο x-y.



Σχήμα 6.3.4: Το διάγραμμα της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y) του κυλινδρικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο x-y.



Σχήμα 6.3.5: Το διάγραμμα της συνιστώσας z του μαγνητικού πεδίου (B_z) του κυλινδρικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο x-y.

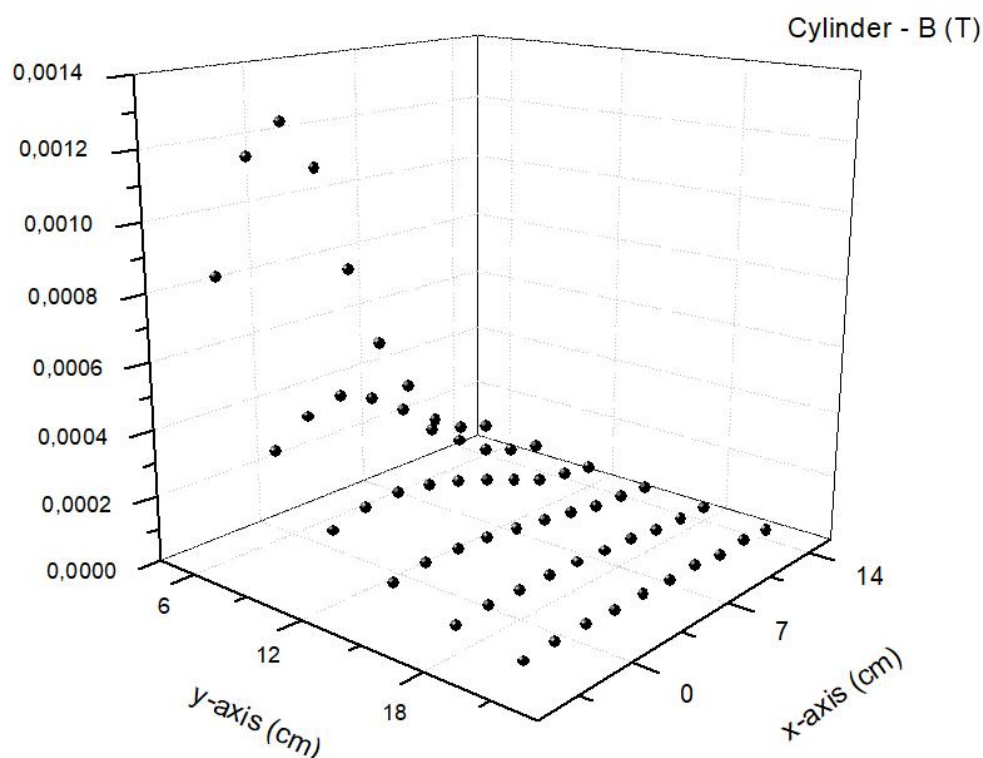
Στα διαγράμματα, εύκολα παρατηρείται ότι σε αποστάσεις μεγαλύτερες του $y=17$ το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη έπαυε να γίνεται αισθητό και έφθινε προς το μηδέν.

Η συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_x), όπως αποτυπώνεται στο σχήμα (6.3.3), εντοπίζεται σε ένα εύρος τιμών μεταξύ $-514.80\mu\text{T}$ και $519.02\mu\text{T}$. Όσον αφορά το πρόσημο της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου είναι θετικό κοντά στον αισθητήρα, ενώ γίνεται αρνητικό από τα σημεία $x=2-14$, $y=6-21$ και μετά.

Οι τιμές της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_y) του διαγράμματος (Σχήμα 6.3.4), κυμαίνεται στο εύρος μεταξύ $-1175.79\mu\text{T}$ και $25.41\mu\text{T}$. Το πρόσημο της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου είναι αρνητικό, εκτός των σημείων το $x=12,14$, $y=6$ όπου εκεί γίνεται θετικό. Το αρνητικό πρόσημο, που έχει το μαγνητικό πεδίο στη συνιστώσα y, σε συνδυασμό με τον ορισμό των συνιστωσών του επιπέδου και των συνιστωσών του αισθητήρα, δείχνει ότι η όψη του μαγνήτη που πλησίαζε τον αισθητήρα ήταν αυτή του νότιου πόλου.

Για τις τιμές της συνιστώσας z του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_z) του σχήματος (6.3.5), παρατηρείται ότι βρέθηκαν στο εύρος από $2.48\mu\text{T}$ έως $407.50\mu\text{T}$. Το πρόσημο του μαγνητικού πεδίου της συνιστώσας z είναι θετικό, σε όλα τα σημεία του επιπέδου $x-y$, στα οποία μετρήθηκε.

Τέλος υπολογίστηκε, μέσω της εξίσωσης (6.1), το μέτρο του μαγνητικού πεδίου του κυλινδρικού μαγνήτη, το οποίο παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα (6.3.6).

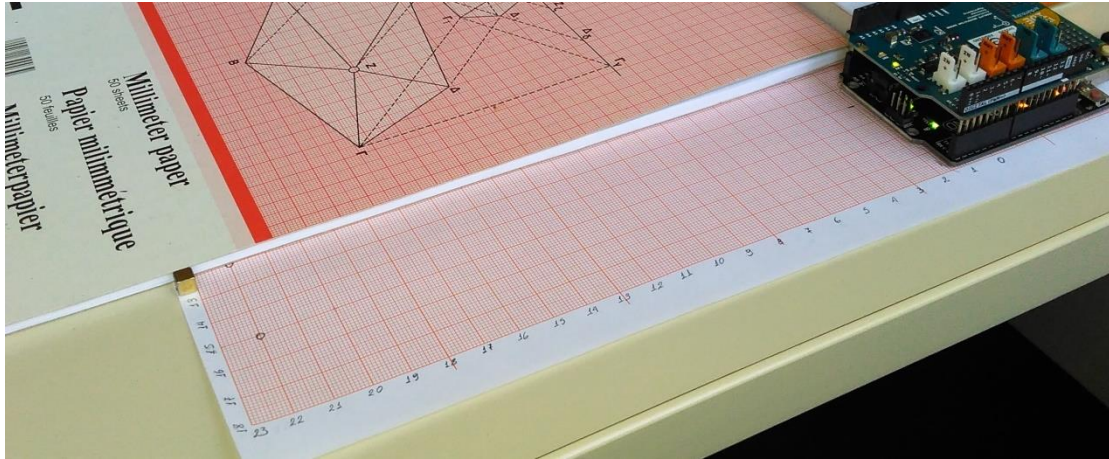


Σχήμα 6.3.6: Το διάγραμμα του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B) του κυλινδρικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο $x-y$.

Από τις τιμές που αποτυπώνονται στο παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 6.3.6), υπολογίζεται ότι η ελάχιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου είναι $30.041\mu\text{T}$ και εντοπίζεται στο σημείο $x=14, y=21$, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι $1244.423\mu\text{T}$ και παρατηρείται στο σημείο $x=0, y=6$, στη μικρότερη απόσταση, δηλαδή, μεταξύ του μαγνήτη και του αισθητήρα. Από το διάγραμμα γίνεται επίσης εμφανές και πάλι ότι ο αισθητήρας αποκρίνεται στην ύπαρξη του μαγνήτη σε μια απόσταση περίπου 17-18cm, όπως και αναμενόταν από τα διαγράμματα των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου.

6.3.2 Κυβικός Μαγνήτης

Για τη μαγνητική αποτύπωση των κυβικών μαγνητών χρησιμοποιήθηκε ένας μαγνήτης νεοδυμίου (NdFeB), διαστάσεων $a_{\text{cube}} = b_{\text{cube}} = c_{\text{cube}} = 0.5\text{cm}$, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα (6.3.7).

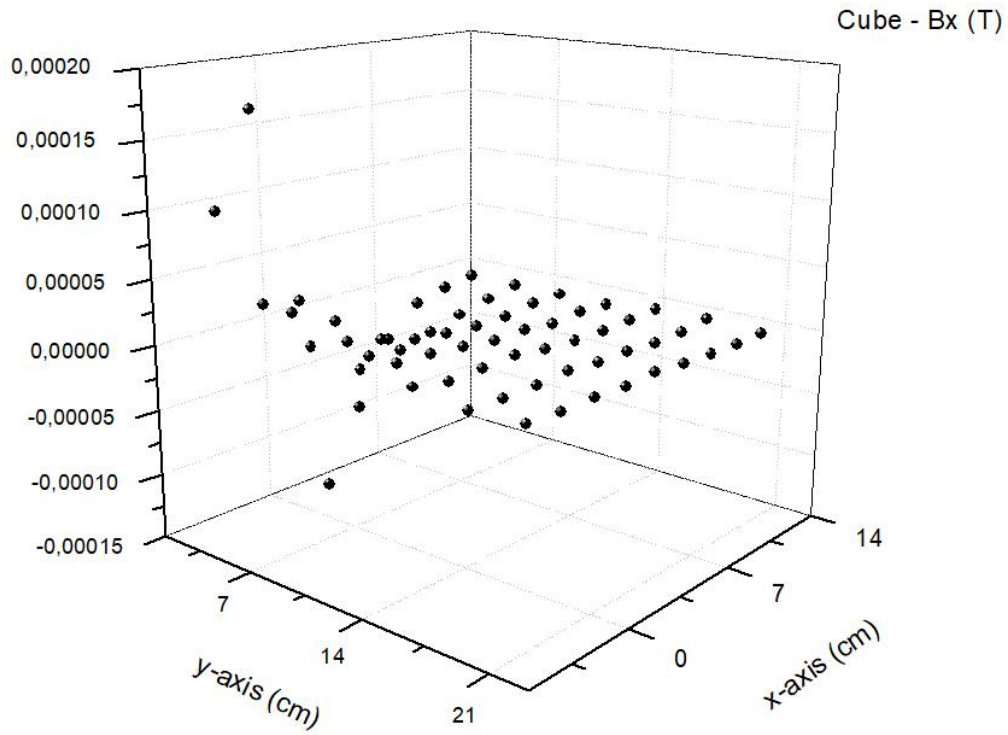


Σχήμα 6.3.7: Αναπαράσταση του κυβικού μαγνήτη.

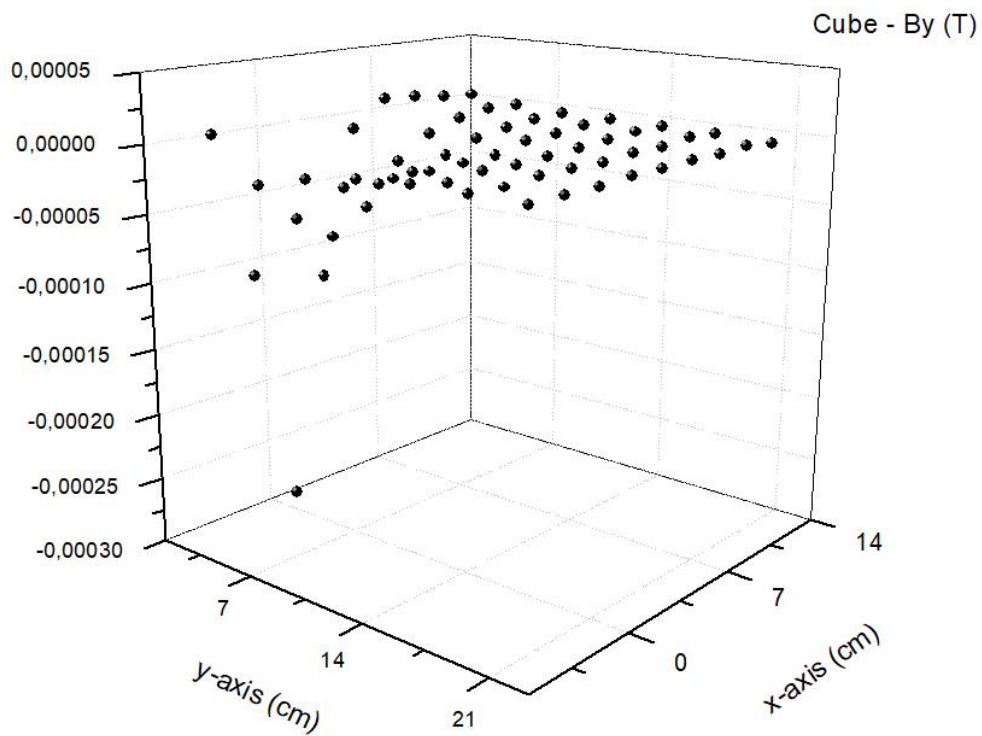
Οι βαθμοί του μαγνήτη είναι N42, το οποίο αντιστοιχεί σε παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_r = 1.29\text{-}1.32\text{T} \sim 1.305\text{T}$. Το πάχος του ήταν 0.5cm και η επίδοσή του ήταν 0.49T .

Ο μαγνήτης βρέθηκε στις παραπάνω θέσεις του επιπέδου x,y , έχοντας τον έναν πόλο στην κατεύθυνση στην οποία βρισκόταν ο αισθητήρας. Ο κυβικός μαγνήτης βρέθηκε στις προαναφερθείσες θέσεις, κινήθηκε δηλαδή κατά τον άξονα x με βήμα 2cm από τη θέση $x = -4\text{cm}$ ως τη θέση $x = 12\text{cm}$, ενώ κατά τον άξονα y μετακινήθηκε με βήμα 3cm από τη θέση $y = 21\text{cm}$ έως τη θέση όπου μπορούσε να φτάσει ο μαγνήτης, χωρίς να εμποδίζεται από τη διάταξη του αισθητήρα και χωρίς να φθάνει σε τιμές μαγνητικού πεδίου μεγαλύτερες από το εύρος μέσα στο οποίο μετρά ο αισθητήρας.

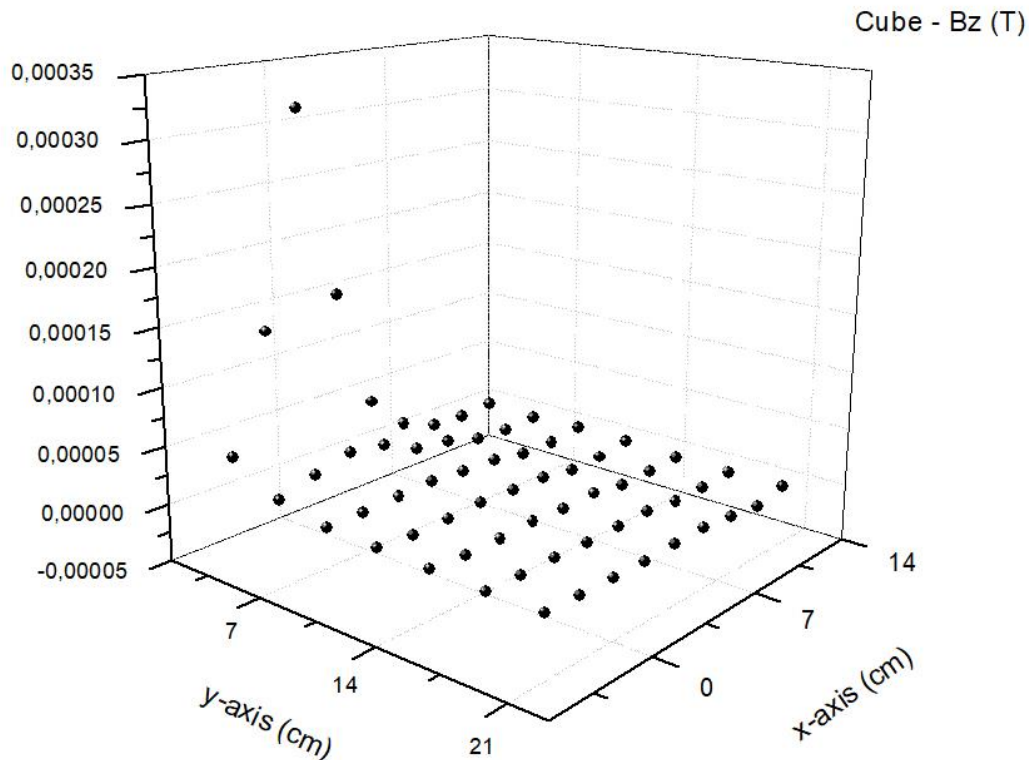
Για τον κυβικό μαγνήτη το εύρος του άξονα y ήταν $(3,21)$. Οι τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου που κατεγράφησαν από τον αισθητήρα, ως προς τα σημεία του επίπεδο $x-y$ στα οποία βρέθηκε ο μαγνήτης αποτυπώνονται στα επόμενα διαγράμματα (Σχήματα 6.3.8, 6.3.9 και 6.3.10).



Σχήμα 6.3.8: Το διάγραμμα της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x) του κυβικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο x-y.



Σχήμα 6.3.9: Το διάγραμμα της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y) του κυβικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο x-y.



Σχήμα 6.3.10: Το διάγραμμα της συνιστώσας z του μαγνητικού πεδίου (B_z) του κυβικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο x-y.

Από τη μελέτη των διαγραμμάτων γίνεται αντιληπτό το σημείο από το οποίο και μετά ο αισθητήρας 'αντιλαμβάνεται' τον μαγνήτη και δίνει τιμές για το μαγνητικό πεδίο του. Σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 9-10cm, το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη έπαυε να γίνεται αντιληπτό από τον αισθητήρα και έφθινε γρήγορα στο μηδέν.

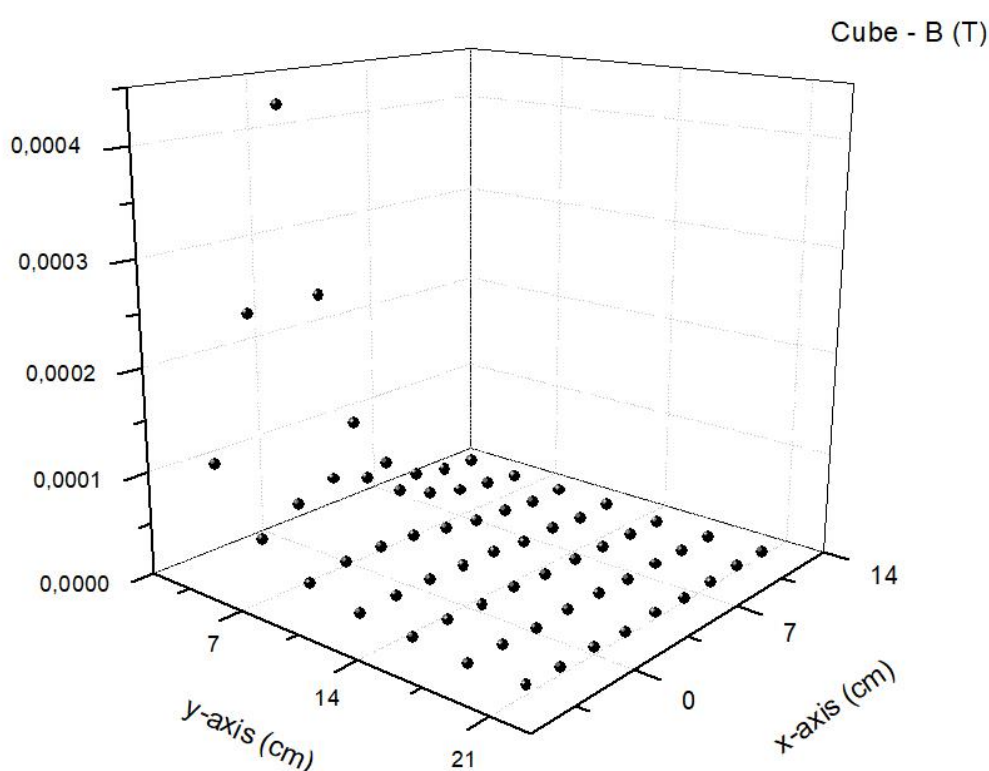
Το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη κατά τη συνιστώσα x (B_x) που αποτυπώνεται στο διάγραμμα (Σχήμα 6.3.8), λαμβάνει τιμές σε ένα εύρος από -142.88 μ T έως 167.02 μ T. Επιπλέον είναι εμφανής η αλλαγή πολικότητας του μαγνητικού πεδίου από τα σημεία $x=2-12$ cm και $y=3-9$ cm, η οποία εκτείνεται σε μια περιοχή δεξιά του αισθητήρα.

Οι τιμές της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y) του μαγνήτη, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα (Σχήμα 6.3.9), κυμαίνονται σε μεγέθη από -285.45 μ T έως 12.56 μ T. Η αλλαγή πολικότητας του μαγνητικού πεδίου εντοπίζεται και πάλι στην περιοχή του επιπέδου, που βρίσκεται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από τα σημεία $x=6-12$, $y=3-6$. Οι αρνητικές τιμές, που εμφανίζει το μαγνητικό πεδίο στη y-συνιστώσα, σε συνδυασμό με τον ορισμό των συνιστωσών του επιπέδου και

αυτών των συνιστωσών του αισθητήρα, καταδεικνύουν ότι ο μαγνήτης κατευθυνόταν με το νότιο πόλο προς τη μεριά όπου βρισκόταν ο αισθητήρας.

Όσον αφορά τη συνιστώσα z του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο μαγνήτης (B_z) (Σχήμα 6.3.10), οι τιμές της βρίσκονται στο εύρος $-4.37\mu\text{T}$ έως $315.27\mu\text{T}$. Το μαγνητικό πεδίο B_z παρουσιάζει αλλαγή προσήμου σε περιοχές μεταξύ $x=8, y=15$ και $x=12, y=6$.

Στο επόμενο διάγραμμα (Σχήμα 6.3.11) παρουσιάζεται το μέτρο του μαγνητικού πεδίου του κυβικού μαγνήτη που μελετήθηκε ως προς τα σημεία του επιπέδου $x-y$, στα οποία βρέθηκε.



Σχήμα 6.3.11: Το διάγραμμα του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B) του κυβικού μαγνήτη ως προς το επίπεδο $x-y$.

Από τις τιμές που αποτυπώνονται στα παραπάνω διαγράμματα (Σχήμα 6.3.11) υπολογίζεται ότι η ελάχιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου είναι $1.74\mu\text{T}$ και εντοπίζεται στο σημείο $x=12, y=15$, ενώ η μέγιστη τιμή του ήταν $425.36\mu\text{T}$ που αντιστοιχεί στο σημείο $x=0, y=3$, που είναι και η μικρότερη απόσταση μεταξύ του μαγνήτη και του αισθητήρα στην οποία βρέθηκαν.

Παρατηρείται ότι στα πιο απομακρυσμένα από τον αισθητήρα σημεία, που αντιστοιχούν στα $x=10\text{cm}$ και $x=12\text{cm}$ δεν καταγράφεται έντονα το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη και οι τιμές κυμαίνονται κοντά σε αυτές του γεωμαγνητικού πεδίου.

Τέλος, από το διάγραμμα φαίνεται και πάλι ότι ο αισθητήρας αποκρίνεται στην ύπαρξη του μαγνήτη σε μια απόσταση περίπου 9-10cm, όπως και αναμενόταν από τα διαγράμματα των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου.

1.3.3. Ορθογώνιος Μαγνήτης

Κατόπιν γίνεται παρουσίαση της μελέτης ενός μαγνήτη νεοδυμίου (NdFeB) σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

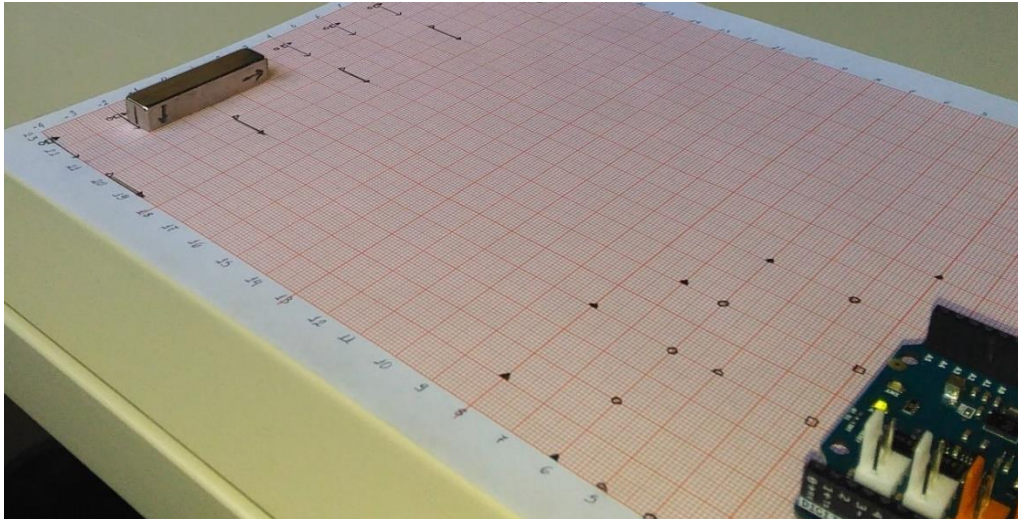
Οι βαθμοί του μαγνήτη ήταν N42, που αντιστοιχεί σε παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_r=1.29-1.32\text{T} \sim 1.305\text{T}$. Οι διαστάσεις του μαγνήτη ήταν $a_{\text{rectangular}} = 4\text{cm}$, $b_{\text{rectangular}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular}} = 0.8\text{cm}$. Η μαγνητική επιφάνεια ήταν $4 \times 0.8\text{cm}$. Το πάχος του, βάσει των στοιχείων του κατασκευαστή, ήταν 0.1cm . Η επίδοσή του ήταν 0.42T .

Ο ορθογώνιος μαγνήτης μετακινήθηκε πάνω στο επίπεδο $x-y$ με δύο τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση μετακινήθηκε τοποθετημένος οριζόντια, έχοντας δηλαδή στον άξονα x τη μεγαλύτερη πλευρά του, ενώ στη δεύτερη περίπτωση κινήθηκε βρισκόμενος σε κατακόρυφη τοποθέτηση, έχοντας πλέον τη μεγαλύτερη πλευρά του κατά τον άξονα z . Και στις δύο περιπτώσεις η κατεύθυνση του μαγνήτη ήταν τέτοια ώστε ο ένας πόλος του να κατευθύνεται κατά μέτωπο στον αισθητήρα.

Τα σημεία της περιοχής του επιπέδου $x-y$, στα οποία βρέθηκε ο μαγνήτης και στα οποία καταγράφηκαν οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου που δημιουργούσε, ήταν όμοια με αυτά των προηγούμενων πειραματικών μετρήσεων. Συγκεκριμένα ο μαγνήτης κινήθηκε σε θέσεις που αντιστοιχούν στο x -άξονα σε ένα εύρος από -4 έως 14 με βήμα 2 και στον y -άξονα στο εύρος 9 έως 21cm με βήμα 3 .

▪ Οριζόντια Τοποθέτηση Ορθογώνιου Μαγνήτη

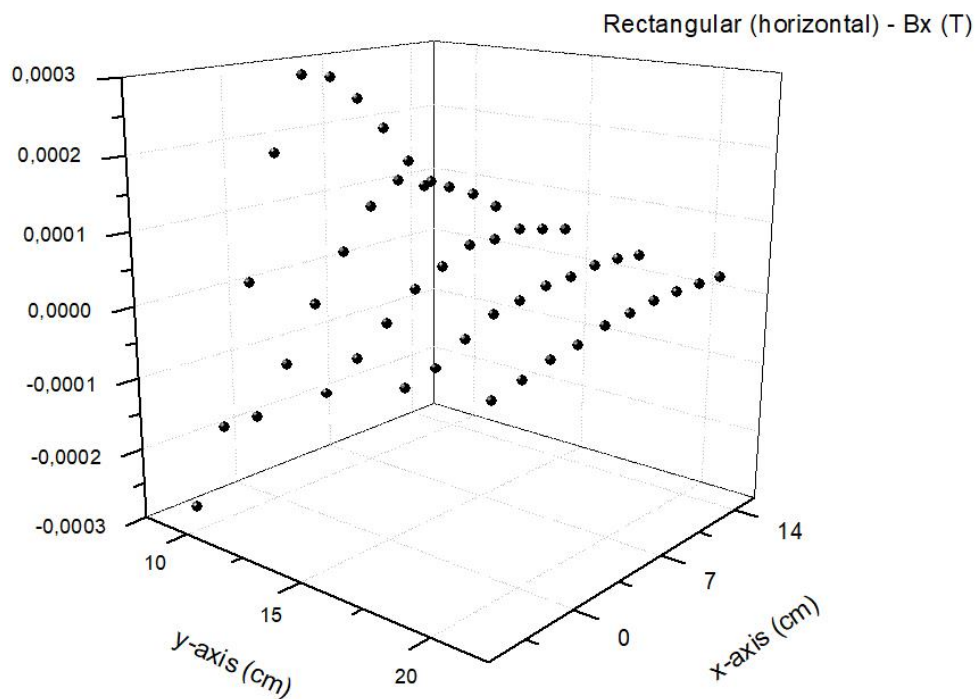
Ο ορθογώνιος μαγνήτης κατά την οριζόντια τοποθέτησή του, που αντιστοιχεί σε διαστάσεις $a_{\text{rectangular,horizontal}} = 4\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,horizontal}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,horizontal}} = 0.8\text{cm}$, φαίνεται στο επόμενο σχήμα (6.3.12).



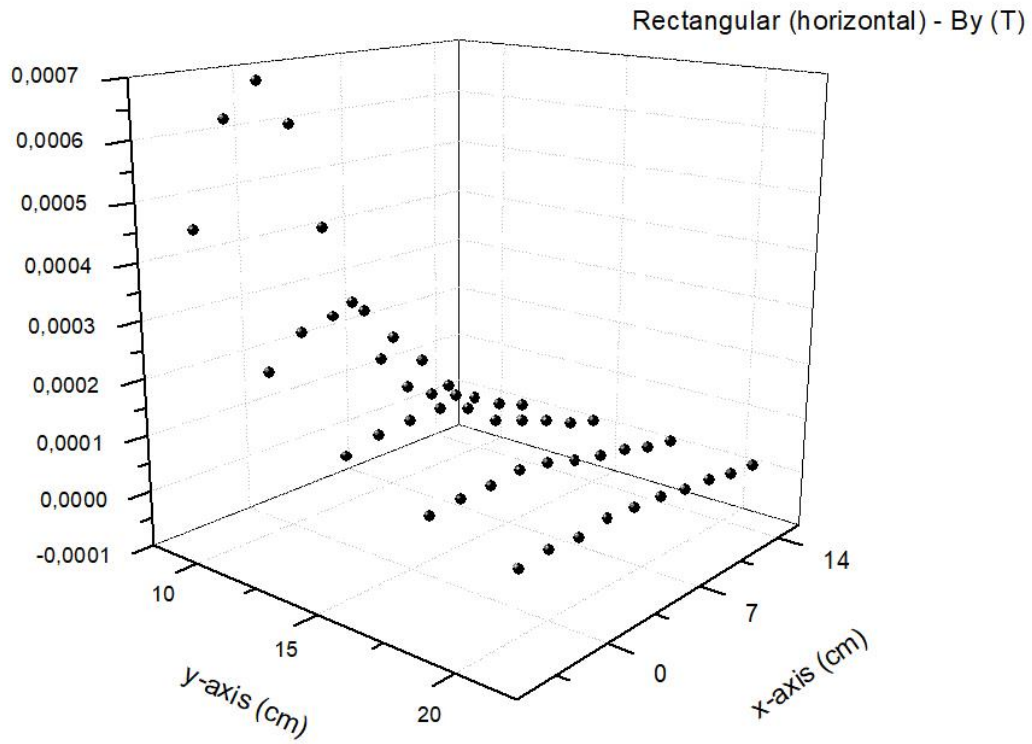
Σχήμα 6.3.12: Αναπαράσταση του ορθογώνιου μαγνήτη κατά την οριζόντια τοποθέτησή του.

Ο μαγνήτης είχε, λοιπόν, τη μεγαλύτερη πλευρά του, των 4cm, κατά μήκος του άξονα x , την πλευρά του 1cm κατά τον άξονα y και τη μικρότερη πλευρά, των 0.8cm, κατά τον άξονα z .

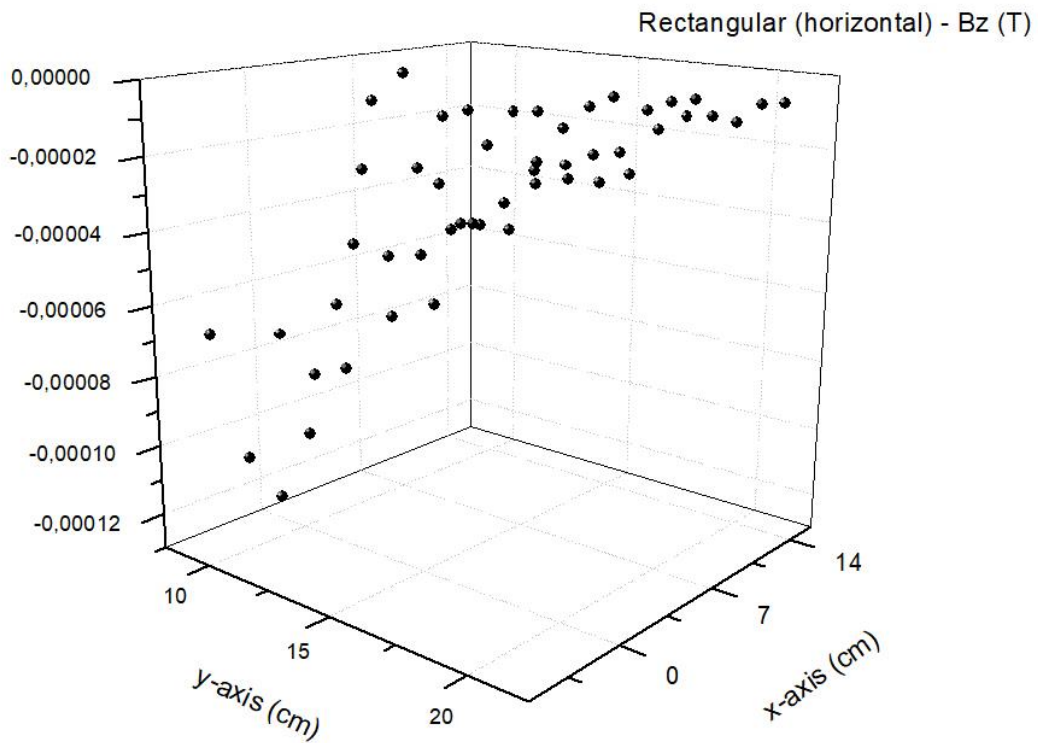
Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση, κατεγράφησαν από τον αισθητήρα και τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στα επόμενα διαγράμματα (Σχήματα 6.3.13, 6.3.14 και 6.3.15).



Σχήμα 6.3.13: Το διάγραμμα της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x) του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x - y .



Σχήμα 6.3.14: Το διάγραμμα της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y) του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x - y .



Σχήμα 6.3.15: Το διάγραμμα της συνιστώσας z του μαγνητικού πεδίου (B_z) του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x - y .

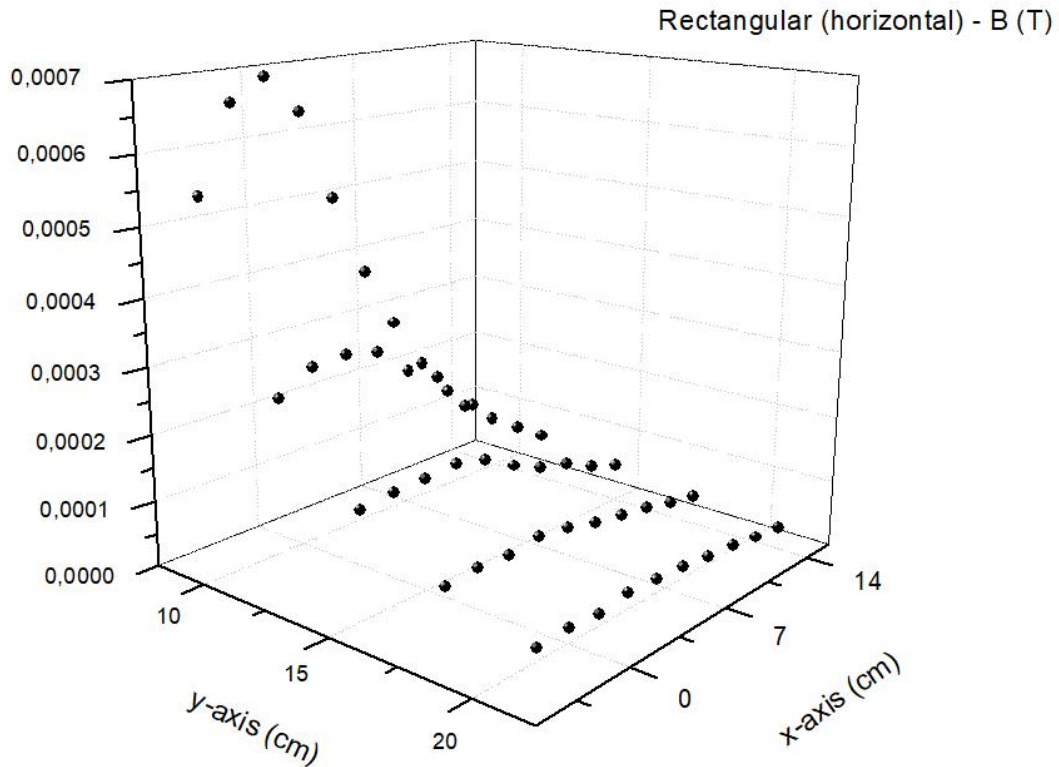
Από τη μελέτη των διαγραμμάτων, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, φαίνεται ότι σε αποστάσεις μεγαλύτερες του $\gamma=15-16\text{cm}$ το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη φθίνει γρήγορα προς το μηδέν.

Η συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_x) (Σχήμα 6.3.13), βρίσκεται σε ένα εύρος τιμών μεταξύ $-290.94\mu\text{T}$ και $280.54\mu\text{T}$. Το πρόσημο του μαγνητικού πεδίου της συνιστώσας x , όπως και πριν κατά την κατακόρυφη τοποθέτησή του, είναι αρνητικό όταν ο μαγνήτης βρίσκεται κοντά στον αισθητήρα, ενώ γίνεται θετικό από τα σημεία $x=2-14$, $\gamma=9-21$ και ύστερα.

Για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_y) (Σχήμα 6.3.14), βρέθηκε να κυμαίνεται στο εύρος μεταξύ $-3.14\mu\text{T}$ και $679.58\mu\text{T}$. Αντιστροφή της πολικότητας της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου παρατηρείται, όπως και πριν, μόνο σε ένα σημείο, το $x=14$, $\gamma=9$. Το πρόσημο της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου σε συνδυασμό με τον ορισμό των συνιστωσών του επιπέδου $x-y$ και των συνιστωσών του αισθητήρα, καταδεικνύει και εδώ τον πόλο, με τον οποίο ήταν στραμμένος ο μαγνήτης, στη φορά του αισθητήρα. Σε όλα τα σημεία, πλην ενός, το πρόσημο ήταν θετικό, οπότε ήταν ο βόρειος πόλος αυτός με τον οποίο κατευθύνονταν ο μαγνήτης προς τον αισθητήρα.

Η συνιστώσα z του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_z) (Σχήμα 6.3.15), παρατηρήθηκε στο εύρος από $-123.58\mu\text{T}$ έως $-0.83\mu\text{T}$. Το μαγνητικό πεδίο της συνιστώσας z είχε αρνητικό πρόσημο, σε όλα τα σημεία στα οποία μετρήθηκε.

Στο παρακάτω σχήμα (6.3.16) παρουσιάζονται οι τιμές του μέτρου του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση ως προς το επίπεδο $x-y$, όπως υπολογίστηκε μέσω της εξίσωσης (6.1), χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου.



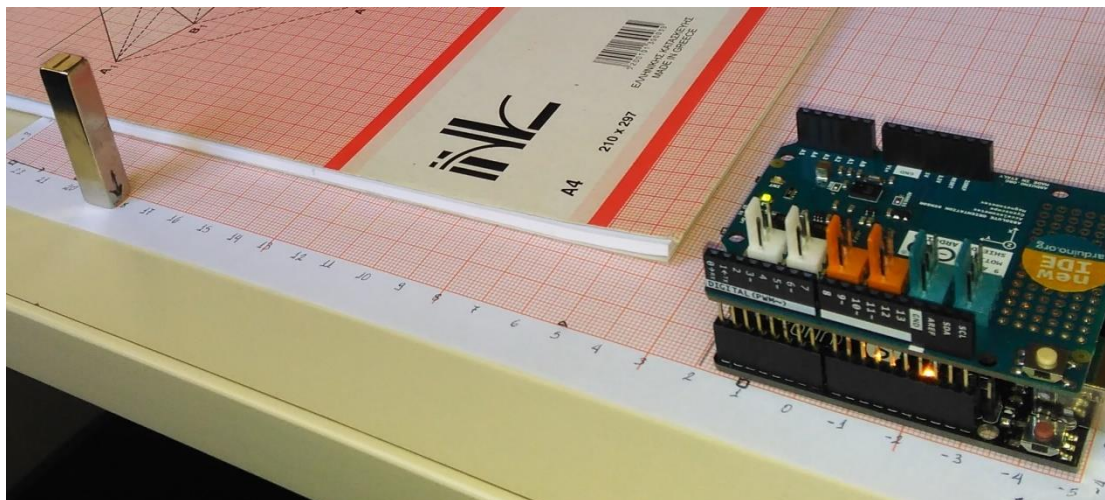
Σχήμα 6.3.16: Το διάγραμμα του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B) του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x-y.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα (6.3.16), το μέτρο του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη, ο οποίος ήταν τοποθετημένος οριζόντια, παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $34.17\mu\text{T}$ στο σημείο $x=14$, $y=21$ και μέγιστο ίσο με $690.75\mu\text{T}$ στο σημείο $x=0$, $y=9$, το κοντινότερο σημείο στο οποίο πλησιάζει ο μαγνήτης τον αισθητήρα.

Από τη γραφική παράσταση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου, παρατηρείται και μέσω αυτού του διαγράμματος ότι ο εντοπισμός του μαγνήτη από τον αισθητήρα συμβαίνει σε μια ακτίνα των 15-16cm. Πέρα από αυτή την εμβέλεια το μαγνητικό πεδίο φθίνει γρήγορα στο μηδέν, όπως έδειξαν άλλωστε και οι συνιστώσες του.

▪ Κατακόρυφη Τοποθέτηση Ορθογώνιου Μαγνήτη

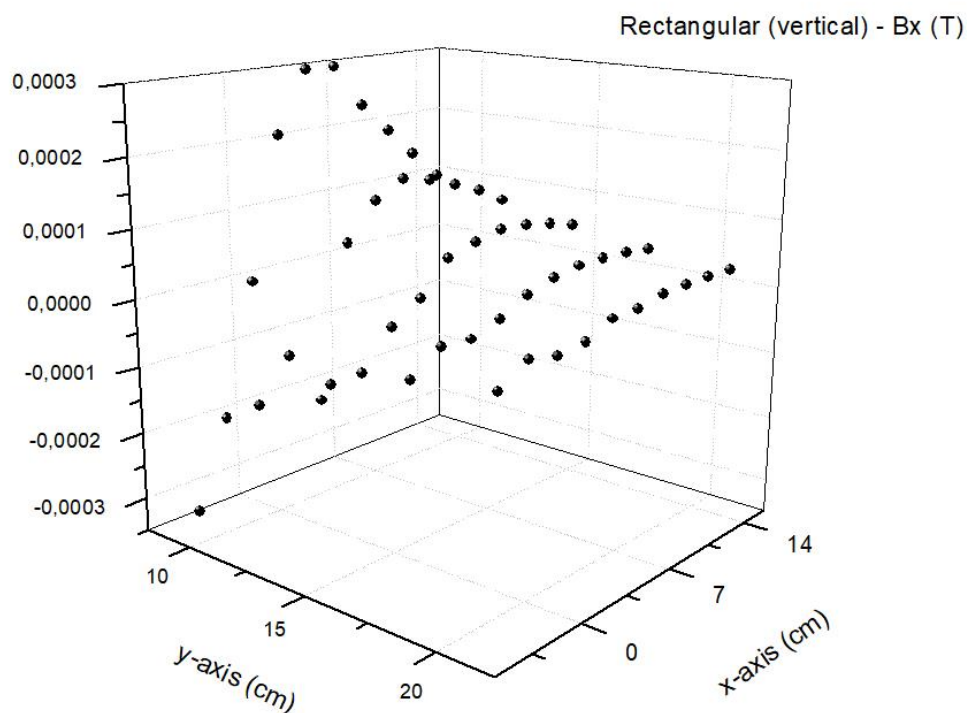
Η κατακόρυφη τοποθέτηση του ορθογώνιου μαγνήτη αντιστοιχεί σε διαστάσεις $a_{\text{rectangular,vertical}} = 0.8\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,vertical}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,vertical}} = 4\text{cm}$, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (6.3.17).



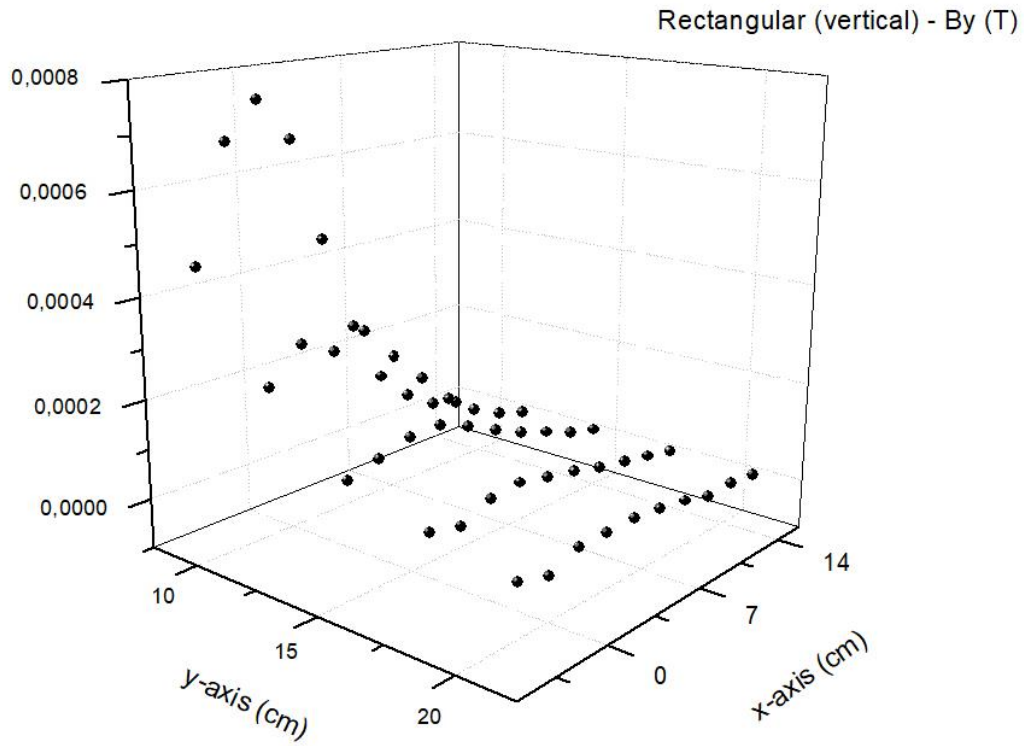
Σχήμα 6.3.17: Αναπαράσταση του ορθογώνιου μαγνήτη κατά την κατακόρυφη τοποθέτησή του.

Ο μαγνήτης βρισκόμενος σε κατακόρυφη τοποθέτηση, δηλαδή, είχε τη μικρότερη πλευρά του, αυτή των 0.8cm κατά μήκος του άξονα x, την πλευρά του 1cm κατά τον άξονα y και αυτή των 4.2cm ως ύψος κατά τον άξονα z.

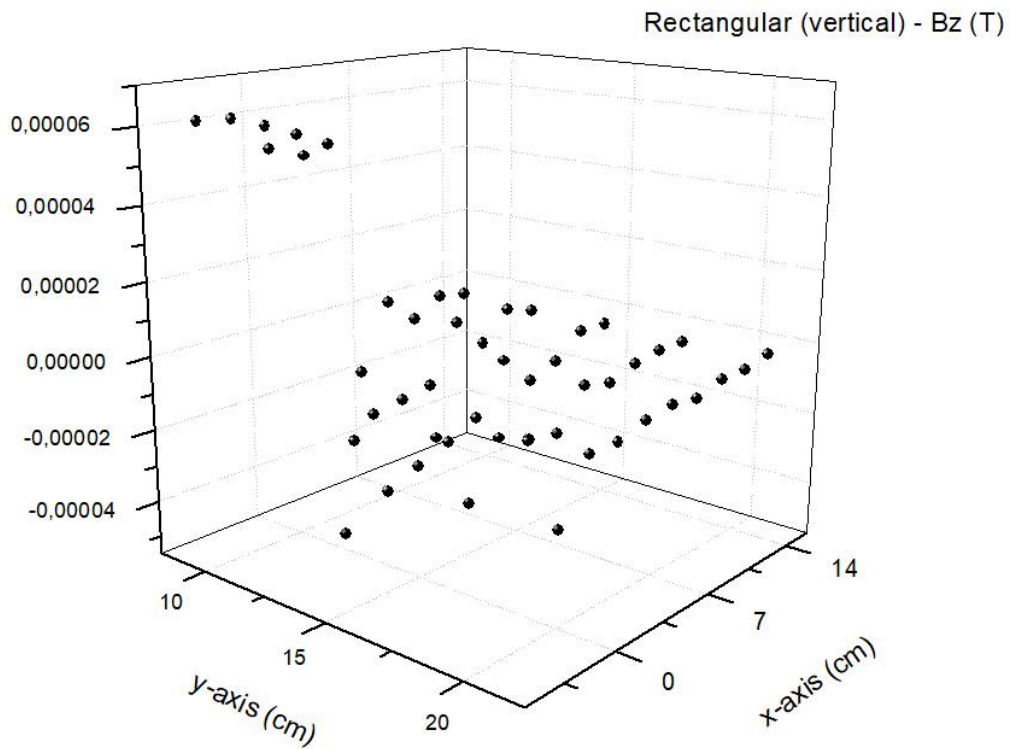
Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη, όπως κατεγράφησαν από τον αισθητήρα, φαίνονται στα επόμενα διαγράμματα (Σχήματα 6.3.18, 6.3.19 και 6.3.20).



Σχήμα 6.3.18: Το διάγραμμα της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x) του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x-y.



Σχήμα 6.3.19: Το διάγραμμα της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y) του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x - y .



Σχήμα 6.3.20: Το διάγραμμα της συνιστώσας z του μαγνητικού πεδίου (B_z) του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x - y .

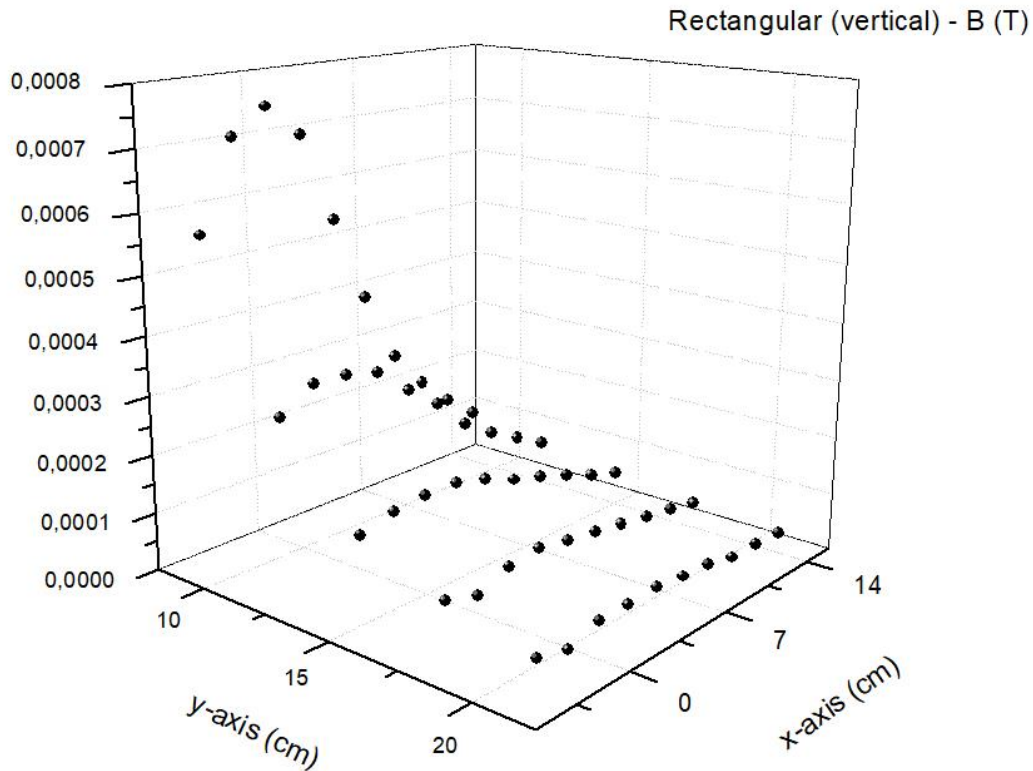
Από τη μελέτη των διαγραμμάτων γίνεται εμφανές σε ποιο σημείο ο αισθητήρας ξεκινά να ανιχνεύει τιμές μαγνητικού πεδίου, που αντιστοιχούν στον μαγνήτη. Συγκεκριμένα, σε αποστάσεις μεγαλύτερες του $\gamma=15-16\text{cm}$, το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη έπαυε να γίνεται αντιληπτό από τον αισθητήρα. Στις αρχικές μετρήσεις κυριαρχούσαν οι αντίστοιχες συνιστώσες του γεωμαγνητικού πεδίου ($B_{x,geo}$, $B_{y,geo}$, $B_{z,geo}$), των οποίων το εύρος εμφάνισής τους επικάλυπτε την ύπαρξη του μαγνήτη.

Η συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_x) (Σχήμα 6.3.18), εντοπίζεται στο εύρος τιμών μεταξύ $-326.73\mu\text{T}$ και $297.08\mu\text{T}$. Το πρόσημο του μαγνητικού πεδίου της συνιστώσας x είναι αρνητικό όταν ο μαγνήτης βρίσκεται κοντά στον αισθητήρα, ενώ γίνεται θετικό από τα σημεία $x=2-14$, $\gamma=9-21$ και ύστερα.

Η συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_y) (Σχήμα 6.3.19), κυμαίνεται σε εύρος τιμών μεταξύ $-1.79\mu\text{T}$ και $746.02\mu\text{T}$. Αντιστροφή της πολικότητας της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου παρατηρείται μόνο σε ένα σημείο, το $x=14$, $\gamma=9$. Γενικά σε όλα τα σημεία εκτός ενός, το πρόσημο της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου βρέθηκε θετικό, γεγονός που σε συνδυασμό με τον ορισμό των συνιστωσών του επιπέδου $x-y$ και αυτών του αισθητήρα, δείχνει ότι ο μαγνήτης μετακινήθηκε με τον βόρειο πόλο προς το σημείο όπου βρισκόταν ο αισθητήρας.

Η συνιστώσα z του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη (B_z) (Σχήμα 6.3.20), εντοπίζεται στο εύρος από $-50.62\mu\text{T}$ έως $60.83\mu\text{T}$. Στα σημεία $x=-2,-4$, $\gamma=9,12$ το μαγνητικό πεδίο της συνιστώσας z έχει θετικό πρόσημο, ενώ στα υπόλοιπα σημεία παρατηρείται αντίθετο, αρνητικό πρόσημο.

Από τις τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση, υπολογίζεται και εδώ με την εξίσωση (6.1) το μέτρο του μαγνητικού πεδίου του. Στο επόμενο σχήμα (6.3.21) αποτυπώνονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών προς τα σημεία του επιπέδου $x-y$.



Σχήμα 6.3.21: Το διάγραμμα του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B) του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση ως προς το επίπεδο x-y.

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση παρουσιάζει ελάχιστο τη τιμή $36.12\mu\text{T}$ στο σημείο $x=14$, $y=21$ και μέγιστο τη τιμή $748.20\mu\text{T}$ στο σημείο $x=0$, $y=9$, το πλησιέστερο σημείο που βρέθηκε ο μαγνήτης ως προς τον αισθητήρα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα (6.3.21) και αναμενόταν, ο αισθητήρας εντοπίζει και μετρά το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη σε μια εμβέλεια των 15-16cm.

▪ Σύγκριση των δυο τοποθετήσεων του ορθογώνιου μαγνήτη

Στη συνέχεια γίνεται μια σύγκριση των διαγραμμάτων των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου για τις δύο διαφορετικές τοποθετήσεις του μαγνήτη (κατακόρυφη και οριζόντια).

Όσον αφορά τις τιμές της συνιστώσας x των μαγνητικών πεδίων, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η διαφορά των τιμών τους είναι μεγαλύτερη σε σημεία κοντά στον αισθητήρα, ενώ μειώνεται αισθητά σε πιο απομακρυσμένες από τον αισθητήρα θέσεις. Για παράδειγμα στο σημείο $x=0, y=12$ η συνιστώσα x του

μαγνητικού πεδίου κατά την κατακόρυφη τοποθέτηση του μαγνήτη ήταν $-73.87\mu\text{T}$, ενώ κατά την οριζόντια τοποθέτηση του ήταν $-70.73\mu\text{T}$. Αντίθετα στο σημείο $x=12, y=21$ οι αντίστοιχες τιμές της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου ήταν $30.31\mu\text{T}$ για το μαγνήτη τοποθετημένο κατακόρυφα και $28.65\mu\text{T}$ στην οριζόντια τοποθέτηση του μαγνήτη. Γενικά, η διαφορά τους παρουσίαζε μια κύμανση, από $0.5\mu\text{T}$ σε σημεία μακριά από τον αισθητήρα, έως $35.79\mu\text{T}$ σε σημεία κοντά του. Σημειώνεται ακόμη ότι σε όλα σημεία η τιμή της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου του κατακόρυφα τοποθετημένου μαγνήτη, ήταν μεγαλύτερη από αυτή του μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.

Οι τιμές της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου κατά την κατακόρυφη τοποθέτηση του μαγνήτη εμφανίζουν ίδιο πρόσημο με αυτές που προέκυψαν από την οριζόντια τοποθέτηση του. Συγκρίνοντας τις τιμές όλων των σημείων, στα οποία μετρήθηκαν οι συνιστώσες y των μαγνητικών πεδίων στις δύο τοποθετήσεις του μαγνήτη, προκύπτει και πάλι ότι η διαφορά ήταν μεγαλύτερη σε σημεία κοντά στον αισθητήρα και μικρότερη σε σημεία μακριά του. Ειδικότερα στο σημείο $x=0, y=12$ η συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη, που ήταν τοποθετημένος κατακόρυφα, ήταν $321.88\mu\text{T}$ και η αντίστοιχη τιμή του, κατά την οριζόντια τοποθέτησή του, ήταν $291.35\mu\text{T}$. Στο σημείο, όμως, $x=12, y=21$ η συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου του κατακόρυφα τοποθετημένου μαγνήτη βρέθηκε ίση με $25.87\mu\text{T}$, ενώ σημειώνεται ίση με $25.31\mu\text{T}$ αυτή του μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση. Μελετώντας τη διαφορά στο μέτρο των τιμών των δύο πεδίων προκύπτει ότι διακυμαίνεται μεταξύ $0.04\mu\text{T}$ σε αποστάσεις μακριά από τον αισθητήρα, έως $67\mu\text{T}$ κοντά σε αυτόν. Γενικά, σε όλα τα σημεία, παρατηρείται ότι η συνιστώσα προέκυπτε μικρότερη στην οριζόντια τοποθέτηση του μαγνήτη, σε σχέση με την κατακόρυφη τοποθέτησή του.

Από τα δύο διαγράμματα των συνιστωσών z του μαγνητικού πεδίου, για τις δύο διαφορετικές τοποθετήσεις του μαγνήτη, φαίνεται ότι για τα ίδια σημεία η συνιστώσα z του μαγνητικού πεδίου παρουσιάζει αντίθετο πρόσημο. Και σε αυτή τη συνιστώσα, είναι εμφανές, ότι η διαφορά των μαγνητικών πεδίων που προκύπτουν από τις δύο τοποθετήσεις, είναι μεγαλύτερη κοντά στον αισθητήρα και αρκετά μικρότερη σε σημεία μακριά του. Συγκεκριμένα στη θέση $x=0, y=12$ για το μαγνήτη στην κατακόρυφη τοποθέτηση ήταν $53.66\mu\text{T}$ ενώ για το μαγνήτη κατά την οριζόντια τοποθέτηση μετρήθηκε $-77.50\mu\text{T}$. Στο σημείο $x=12, y=21$ βρέθηκε ότι η συνιστώσα z του μαγνητικού πεδίου του κατακόρυφα τοποθετημένου μαγνήτη ήταν $-3.92\mu\text{T}$, ενώ αυτή του τοποθετημένου οριζόντια μαγνήτη ίση με $-6.31\mu\text{T}$. Επίσης η διαφορά του μέτρου της συνιστώσας z του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη στις δύο διαφορετικές τοποθετήσεις, ήταν μεταξύ $0.67\mu\text{T}$ για τα σημεία μακριά από τον αισθητήρα έως και $67\mu\text{T}$ για τα σημεία κοντά του. Τέλος σε αντίθεση με τις άλλες δύο συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου η συνιστώσα z του μαγνητικού πεδίου, που

προκύπτει στην οριζόντια τοποθέτηση, είναι μεγαλύτερη από αυτή κατά την κατακόρυφη τοποθέτηση του μαγνήτη.

Συγκρίνοντας τις τιμές του μέτρου του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση, με αυτές κατά την οριζόντια τοποθέτησή του, φαίνεται ότι συγκλίνουν σε μεγάλες αποστάσεις, ενώ στις κοντινότερες οι διαφορές των πεδίων είναι μεγάλες, αγγίζοντας έως και τα 60μΤ. Επίσης σημειώνεται ότι στα περισσότερα σημεία το μέτρο του μαγνητικού πεδίου του κατακόρυφα τοποθετημένου μαγνήτη, βρέθηκε μεγαλύτερο, από αυτό του μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.

7. Αλγόριθμοι

Σκοπός αυτής της ενότητας της εργασίας είναι η εύρεση ενός αλγορίθμου, ο οποίος θα αξιοποιεί τις μετρήσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου και θα αποδίδει τη θέση του φερρομαγνητικού αντικειμένου στο χώρο.

Μετά τη διεξαγωγή των μετρήσεων για το μαγνητικό πεδίο, που δημιουργείται από διαφορετικούς μαγνήτες, γίνεται μια προσέγγισή τους μέσω των ακόλουθων τρόπων. Αρχικά μελετώνται οι προσεγγιστικές εξισώσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου (2.3), (2.4) για μία διάσταση συναρτήσεως του x και του y , και η εξίσωση (2.5) για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου συναρτήσεως των τριών διαστάσεων, για μια περιοχή του χώρου ίδια με αυτή των πειραματικών μετρήσεων. Ένας αλγόριθμος κατασκευάζεται βάσει αυτών των εξισώσεων με σκοπό τη σύγκριση των θεωρητικών αυτών αποτελεσμάτων με τις πειραματικές τιμές.

Κατόπιν αναπτύσσεται σε αλγόριθμο και μελετάται μια απλοποιημένη μορφή του νόμου Biot-Savart για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου στον άξονα x και στον άξονα y . Τα αποτελέσματα του μαγνητικού πεδίου, που προκύπτουν θεωρητικά από τον Biot-Savart, συγκρίνονται με τις πειραματικές τιμές.

Τέλος αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος, ο οποίος επιλύει την απλοποιημένη μορφή του νόμου Biot-Savart και εντοπίζει τα σημεία στα οποία εκτιμάται βάσει του νόμου ότι βρίσκεται ο κάθε μαγνήτης, εφαρμόζοντας σε αυτόν τις πειραματικές τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου.

7.1. Η γλώσσα προγραμματισμού Python

Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται στην εργασία αναπτύχθηκαν στη γλώσσα προγραμματισμού Python.

Η γλώσσα προγραμματισμού Python αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1980 από τον Guido van Rossum. Η εφαρμογή της ξεκίνησε στο Centrum Wiskunde and Informatica (CWI) στην Ολλανδία το 1989. Πρόκειται για γλώσσα ανοικτού κώδικα (open source), με την οποία μπορούν να αναπτυχθούν ολοκληρωμένες εφαρμογές σε διάφορες περιοχές ενδιαφέροντος, για τα περισσότερα λειτουργικά συστήματα. Η Python 1.0 κυκλοφόρησε το 1994 για το κοινό, η Python 2.0 το 2000 και η Python 3.0 το 2008. Σημειώνεται ότι η Python 3.0 δεν είναι συμβατή με τη Python 2.0.

Η γλώσσα Python είναι εμπνευσμένη από τη γλώσσα προγραμματισμού ABC. Η συντακτική δομή της Python είναι απλή και προέρχεται κυρίως από τη γλώσσα προγραμματισμού C. Η φιλοσοφία της γλώσσας βασίζεται στην απλότητα

και την αναγνωρισιμότητα του κώδικα και διακρίνεται επίσης και για την ευκολία στη χρήση της.

Εγκαθίσταται εύκολα στον υπολογιστή και στην εγκατάσταση περιλαμβάνονται το λογισμικό και η πρότυπη βιβλιοθήκη. Η βιβλιοθήκη διαθέτει έτοιμο κώδικα, ο οποίος έχει τη μορφή συλλογής αρθρωμάτων ή πακέτων (modules), που χρησιμοποιούνται για την εκτέλεση πολλών συνηθισμένων διαδικασιών. Μερικά από αυτά τα πακέτα φαίνονται στον επόμενο πίνακα (6).

Πίνακας 6: Πακέτα, που χρησιμοποιεί η γλώσσα προγραμματισμού Python, η σημασία και ο σκοπός τους.

Όνομα πακέτου	Σημασία	Σκοπός
numpy	Αριθμητική (Numerical) Python	Αριθμητικοί υπολογισμοί
sympy	Επιστημονική (Scientific) Python	Επιστημονικοί υπολογισμοί
scipy	Συμβολική (Symbolic) Python	Συμβολικοί υπολογισμοί
matplotlib	Μαθηματική βιβλιοθήκη γραφημάτων (Mathematical Plotting Library)	Για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων

Όλα τα πακέτα που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στον εκάστοτε αλγόριθμο ορίζονται μέσω της εντολής `import` και μπορούν να καλούνται σε όλο το πρόγραμμα μέσω συντομεύσεων τους, για παράδειγμα `import sympy as sp` [46].

Στην παρούσα εργασία για την ανάπτυξη των αλγορίθμων χρησιμοποιήθηκε η Python 3.6.

7.2. Αλγόριθμοι Προσεγγιστικών Εξισώσεων Μαγνητικού Πεδίου

7.2.1. Οι εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών στους αλγόριθμους

Για τη μελέτη του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών σε μια διάσταση θα χρησιμοποιηθούν οι μετρήσεις των συνιστωσών x και y του μαγνητικού πεδίου (B_x και B_y), που πραγματοποιήθηκαν για τα σημεία όπου $y=0$ και $x=0$ αντίστοιχα.

Οι εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου, που θα τοποθετηθούν στον αλγόριθμο, πρέπει να προσαρμοστούν στον άξονα στον οποίο μελετάται το μαγνητικό πεδίο. Στις πειραματικές μετρήσεις οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου που μπορούν να

συσχετιστούν με τις θέσεις όπου βρέθηκε ο μαγνήτης είναι η συνιστώσα στο άξονα x (B_x) και στον άξονα y (B_y).

Έτσι για τον κύλινδρο για τις μετρήσεις στον άξονα y έχουμε:

$$B(y) = \frac{\mu_0 M_y}{2} \left\{ \frac{y}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{y - L}{\sqrt{(y - L)^2 + R^2}} \right\} \quad (7.1)$$

Η εξίσωση της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, για τον κυβικό και τον ορθογώνιο μαγνήτη το μαγνητικό πεδίο στον άξονα x, είναι:

$$B(x) = \frac{\mu_0 M_x}{\pi} \left\{ \arctan \frac{b \cdot c}{(x - a) \cdot \sqrt{(x - a)^2 + b^2 + c^2}} - \arctan \frac{b \cdot c}{(x + a) \cdot \sqrt{(x + a)^2 + b^2 + c^2}} \right\} \quad (7.2)$$

Ενώ στον άξονα y θα είναι:

$$B(y) = \frac{\mu_0 M_y}{\pi} \left\{ \arctan \frac{a \cdot c}{(y - b) \cdot \sqrt{a^2 + (y - b)^2 + c^2}} - \arctan \frac{a \cdot c}{(y + b) \cdot \sqrt{a^2 + (y + b)^2 + c^2}} \right\} \quad (7.3)$$

Για την περίπτωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου συναρτήσε των τριών διαστάσεων θα χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (2.5), η οποία δε διαφοροποιείται.

$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (7.4)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγιστικές εξισώσεις υπολογίζεται θεωρητικά το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών και κατόπιν τα αποτελέσματά τους συγκρίνονται με τις πειραματικές μετρήσεις.

Πριν από την ανάπτυξη του αλγορίθμου αυτού, κατασκευάζεται ένας αλγόριθμος βάσει αυτών των εξισώσεων ο οποίος υπολογίζει το παραμένον μαγνητικό πεδίο του κάθε μαγνήτη: $B_r = \mu_0 M_r$, όπου M_r η παραμένουσα μαγνήτιση του μαγνήτη. Συγκεκριμένα θα υπολογιστούν οι συνιστώσες x και y του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου ($B_{r,x}, B_{r,y}$) αλλά και το μέτρο του (B_r). Αυτό υπήρξε αναγκαίο αφού στις πληροφορίες των κατασκευαστών δίνεται για το νεοδύμιο σε αντιστοιχία με τους βαθμούς του παραμένον μαγνητικό πεδίο περίπου 1.3T, χωρίς να δίνονται πληροφορίες για το σχήμα και το μέγεθος του εκάστοτε μαγνήτη.

7.2.2. Αλγόριθμος για το παραμένον μαγνητικό πεδίο μαγνητών

Για την εύρεση του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου (B_r) των μαγνητών, εφαρμόζονται οι πειραματικές τιμές στις εξισώσεις (7.1), (7.2) και (7.3) για τη μια διάσταση και στην εξίσωση (7.4) για το μέτρο του. Ο αλγόριθμος επιλύει τις εξισώσεις ως προς το παραμένον μαγνητικό πεδίο και βρίσκει τη μέση τιμή του από την εφαρμογή των εξισώσεων στο σύνολο των μετρήσεων. Αρχικά μελετήθηκε η περίπτωση των μαγνητικών εξισώσεων για τον άξονα x , από όπου εξήχθη η συνιστώσα x του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου ($B_{r,x}$), κατόπιν κατά παρόμοιο τρόπο προέκυψε η συνιστώσα y του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου ($B_{r,y}$) και τέλος με χρήση της προσεγγιστικής εξίσωσης για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου υπολογίστηκε και το μέτρο του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου (B_r).

Για να μπορέσει να γίνει η επεξεργασία των μετρήσεων θα πρέπει να τοποθετηθεί στον ίδιο φάκελο που βρίσκεται το αρχείο του αλγορίθμου αποθηκευμένο, ένα αρχείο τύπου excel με τις μετρήσεις. Η μορφή του αρχείου excel πρέπει να είναι τέτοια ώστε να είναι προσβάσιμη από το πρόγραμμα. Για αυτό κάθε στήλη πρέπει να έχει μια επικεφαλίδα, που μέσω του ονόματός της θα καλείται από τον αλγόριθμο. Για τη μελέτη σε μια διάσταση τα αρχεία excel θα πρέπει να εμπεριέχουν τιμές που αντιστοιχούν στα $y=0$ για τη μελέτη στο άξονα x και σε $x=0$ για τη μελέτη στον άξονα y .

Ο αλγόριθμος για την εύρεση του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου από τις προσεγγιστικές εξισώσεις συνοψίζεται στο επόμενο σχήμα (7.2.1)

libraries → inputed parameters → import measured data → equations for magnetic field → export calculated data → plot permanent magnetic induction

Σχήμα 7.2.1: Συνοπτική αναπαράσταση του αλγορίθμου που υπολογίζει το παραμένον μαγνητικό πεδίο των μαγνητών.

Πιο αναλυτικά, αρχικά ορίζονται οι βιβλιοθήκες που θα χρησιμοποιηθούν από το πρόγραμμα, όπως φαίνονται στον επόμενο κώδικα (7.2.1). Η βιβλιοθήκη pandas χρησιμοποιείται για την εισαγωγή και εξαγωγή των τιμών σε αρχεία όπως excel, csv, html κ.α. Ενώ η βιβλιοθήκη matplotlib.pyplot χρησιμοποιείται για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων.

Κώδικας 7.2.1: Το τμήμα του αλγορίθμου με τους ορισμούς των βιβλιοθηκών για το παραμένον μαγνητικό πεδίο.

```
1. # Libraries
2. import pandas as pd
3. import math
4. import matplotlib.pyplot as plt
5. from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
```

Στη συνέχεια, ορίζονται οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στις διαστάσεις των μαγνητών όπως φαίνεται στον παρακάτω κώδικα (7.2.2). Για τον κυλινδρικό μαγνήτη ζητούνται η ακτίνα και το μήκος (*Cylinder: R, L*) και οι τρεις ακμές για τον κυβικό (*Cube: a, b, c*) και για τον ορθογώνιο μαγνήτη, στην οριζόντια (*Rectangular (horizontal): a, b, c*) και στην κατακόρυφη (*Rectangular (vertical): a, b, c*) τοποθέτησή του.

Κώδικας 7.2.2: Το τμήμα του αλγορίθμου με τους ορισμούς των διαστάσεων των μαγνητών που εισάγονται από τον χρήστη.

```
1. # In[2]:
2. # Inputed parameters
3. # for Cylinder
4. R = float(input("Cylinder: R (cm) = " ))
5. L = float(input("Cylinder: L (cm) = "))
6.
7. #for Cube
8. a1 = float(input("Cube: a (cm) = " ))
9. b1 = float(input("Cube: b (cm) = "))
10. c1 = float(input("Cube: c (cm) = "))
11.
12. #for Rectangular (horizontal)
13. a2 = float(input("Rectangular (horizontal): a (cm) = " ))
14. b2 = float(input("Rectangular (horizontal): b (cm) = "))
15. c2 = float(input("Rectangular (horizontal): c (cm) = "))
16.
17. #for Rectangular (vertical)
18. a3 = float(input("Rectangular (vertical): a (cm) = " ))
19. b3 = float(input("Rectangular (vertical): b (cm) = "))
20. c3 = float(input("Rectangular (vertical): c (cm) = "))
```

Κατόπιν, μέσω του πακέτου 'pandas', γίνεται η εισαγωγή των μετρήσεων της πειραματικής διαδικασίας. Όπως προαναφέρθηκε, πρέπει στον ίδιο φάκελο να υπάρχει το αρχείο με τις μετρήσεις σε μορφή excel, που εμπεριέχει επικεφαλίδες στις στήλες του. Όπως φαίνεται και στον επόμενο κώδικα (7.2.3), γίνεται η εισαγωγή του αρχείου, προσδιορίζονται οι ονομασίες των στηλών και τοποθετούνται οι τιμές κάθε μεγέθους σε αντίστοιχες λίστες που φέρουν το όνομα της μεταβλητής στην οποία αντιστοιχούν. Κατόπιν με τη χρήση απλά του ονόματος της μεταβλητής, πχ x_cub_lab, χρησιμοποιούνται ως λίστες με τιμές από το πρόγραμμα.

Κώδικας 7.2.3: Το τμήμα του αλγορίθμου με τις εντολές για την εισαγωγή των πειραματικών μετρήσεων των μαγνητών.

```
1. # In[3]:
2. # Import Measured Data
3. # for Cube
```

```

4. # (x-axis)
5. data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(y=0).xlsx')
6. dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
7. x_cub_data = dfObj2['x']
8. Bx_cub_data = dfObj2['Bx']
9. x_cub_lab = x_cub_data.tolist()
10. Bx_cub_lab = Bx_cub_data.tolist()
11. # (y-axis)
12. data3 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
13. dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
14. y_cub_data = dfObj3['y']
15. By_cub_data = dfObj3['By']
16. y_cub_lab = y_cub_data.tolist()
17. By_cub_lab = By_cub_data.tolist()

```

Στη συνέχεια στον αλγόριθμο, υπάρχει το τμήμα όπου υπολογίζεται το παραμένον μαγνητικό πεδίο. Στον επόμενο κώδικα (7.2.4) παρουσιάζεται, ως αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, το τμήμα του αλγόριθμου για τον υπολογισμό του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου στις δύο συνιστώσες από τις εξισώσεις (7.2) και (7.3) για τον κύβο. Αφού οριστούν οι λίστες, που θα εμπεριέχουν τα αποτελέσματα (Br_x_cub1D , Br_y_cub1D), το πρόγραμμα τρέχει σε ένα εύρος που καθορίζεται από τον αριθμό των μετρήσεων που υπάρχουν σε κάθε στήλη του αρχείου excel και υπολογίζει το παραμένον μαγνητικό πεδίο για κάθε τιμή. Αμέσως μετά υπολογίζεται και ο μέσος όρος αυτών των τιμών και το αποτέλεσμα του παρουσιάζεται στον χρήστη με τον τίτλο: 'Permanent Magnetic Induction', τον άξονα στον οποίο υπολογίστηκε η συνιστώσα, π.χ. (x-axis) και τον τύπο του μαγνήτη που χρησιμοποιήθηκε, εδώ 'Cube'. Κατόπιν στον κώδικα (7.2.5) παρουσιάζεται η περίπτωση του κυλίνδρου για τον υπολογισμό του μέτρου παραμένοντος μαγνητικού πεδίου, μέσω της εξίσωσης (7.4).

Κώδικας 7.2.4: Το τμήμα του αλγόριθμου με τις εντολές για την εύρεση των συνιστωσών του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου των μαγνητών για την περίπτωση του κύβου.

```

1. # In[5]:
2. # Equation of Magnetic Field (1D)
3. # for Cube
4. # (x-axis)
5. Br_x_cub1D = []
6. X_cub1D = []
7. for j in range(0, len(Bx_cub_lab)):
8.     try:
9.         brx_cubValue = ((Bx_cub_lab[j]*math.pi)/((math.atan(((b1*10**2)/2)*((c1*10**2)/2)/((x_cub_lab[j]*10**2)-((a1*10**2)/2)))*math.sqrt(((b1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((x_cub_lab[j]*10**2)-((a1*10**2)/2))**2)) - (math.atan(((b1*10**2)/2)*((c1*10**2)/2)/((x_cub_lab[j]*10**2)+((a1*10**2)/2)))*math.sqrt(((b1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((x_cub_lab[j]*10**2)+((a1*10**2)/2))**2))))
10.         Br_x_cub1D.append(brx_cubValue)
11.     except ZeroDivisionError:

```

```

12.     continue
13.     x_cubValue = x_cub_lab
14.     X_cub1D.append(x_cubValue)
15.     av_cub1D_x = sum(Br_x_cub1D)/len(Br_x_cub1D)
16.     print('Permanent Magnetic Induction (x-axis) - Cube')
17.     print(av_cub1D_x)
18.
19. # (y-axis)
20. Br_y_cub1D = []
21. Y_cub1D = []
22. for k in range(0,len(By_cub_lab)):
23.     try:
24.
25.         bry_cubValue = ((By_cub_lab[k]*math.pi)/((math.atan(((a1*10**2)/2)*((c1*10**
26.             2)/2)/((y_cub_lab[k]*10**2)-
27.             ((b1*10**2)/2)))*math.sqrt(((a1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((y_cub_lab[k]
28.             *10**2)-((b1*10**2)/2)**2)) -
29.             (math.atan(((a1*10**2)/2)*((c1*10**2)/2)/((y_cub_lab[k]*10**2)+((b1*10**2)/
30.             2)))*math.sqrt(((a1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((y_cub_lab[k]*10**2)+((b
31.             1*10**2)/2)**2))))
32.         Br_y_cub1D.append(bry_cubValue)
33.     except ZeroDivisionError:
34.         continue
35.     y_cubValue = y_cub_lab
36.     Y_cub1D.append(y_cubValue)
37.     av_cub1D_y = sum(Br_y_cub1D)/len(Br_y_cub1D)
38.     print('Permanent Magnetic Induction (y-axis) - Cube')
39.     print(av_cub1D_y)

```

Κώδικας 7.2.5: Το τμήμα του αλγορίθμου με τις εντολές για την εύρεση του μέτρου του παραμένουτος μαγνητικού πεδίου των μαγνητών για την περίπτωση του κυλίνδρου.

```

1. # In[6]:
2. # Equation of Magnetic Field (3D)
3. z=-2
4.
5. # for Cylinder
6. Br_cyl3D = []
7. D_cyl3D = []
8. X_cyl3D = []
9. Y_cyl3D = []
10. for q in range(0,len(Bx1)):
11.     d1Value = math.sqrt((x1[q]*10**2)**2+(y1[q]*10**2)**2+(z*10**2)**2)
12.     D_cyl3D.append(d1Value)
13.
14.
15.     b1Value = B1[q]*(2*(math.pi)*((math.sqrt((x1[q]*10**2)**2+(y1[q]*10**2)**2+(
16.         z*10**2)**2)**3))
17.     Br_cyl3D.append(b1Value)
18.
19.     x1Value = x1
20.     X_cyl3D.append(x1Value)
21.     y1Value = y1
22.     Y_cyl3D.append(y1Value)
23. av_cyl3D = sum(Br_cyl3D)/len(Br_cyl3D)
24. print('Permanent Magnetic Induction - Cylinder')
25. print(av_cyl3D)

```

Ακολούθως οι τιμές του παραμένουτος μαγνητικού πεδίου που υπολογίστηκαν εξάγονται σε ένα αρχείο excel, που μετά την ολοκλήρωση της λειτουργίας του προγράμματος βρίσκεται στον ίδιο φάκελο που είναι αποθηκευμένο το αρχείο του αλγορίθμου. Η εξαγωγή γίνεται με τον αλγόριθμο (Κώδικας 7.2.6), όπου το όνομα του αρχείου που θα εμφανίζεται στο φάκελο εδώ θα είναι 'Permanent Magnetic Induction', ο άξονας όπου υπολογίστηκε η συνιστώσα, π.χ. (x-axis) και τον τύπο του μαγνήτη που χρησιμοποιήθηκε, εδώ 'Cube'.

Κώδικας 7.2.6: Το τμήμα του αλγορίθμου με τις εντολές για την εξαγωγή των υπολογιζόμενων τιμών του παραμένουτος μαγνητικού πεδίου των μαγνητών για την περίπτωση του κύβου.

```

1. # In[7]:
2. # Export Calculated Data (1D)
3. # for Cube
4. # (x-axis)
5. equation_data2 = {'x':X_cub1D,'Br_x_cub1D':Br_x_cub1D}
6. result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
7. result2.to_excel('Permanent Magnetic Induction (x-axis) - Cube.xlsx')
8. # (y-axis)
9. equation_data3 = {'y':Y_cub1D,'Br_cub1D':Br_y_cub1D}
10. result3 = pd.DataFrame(equation_data3)
11. result3.to_excel('Permanent Magnetic Induction (y-axis) - Cube.xlsx')

```

Τέλος, με τα αποτελέσματα του υπολογισμού του παραμένουτος μαγνητικού πεδίου, κατασκευάζεται ένα διάγραμμα τους ως προς την απόσταση y , κατά την οποία μετακινήθηκε ο μαγνήτης. Στον επόμενο κώδικα (7.2.7) φαίνεται ο αλγόριθμος που δημιουργεί μια εικόνα, στην οποία κατασκευάζεται η γραφική παράσταση $B_{r,x}$ προς x και $B_{r,y}$ προς y , από τις μαγνητικές εξισώσεις για τη μια διάσταση (7.2) και (7.3) και η γραφική παράσταση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου B_r ως προς το επίπεδο x,y από την εξίσωση (7.4).

Κώδικας 7.2.7: Το τμήμα του αλγορίθμου με τις εντολές για τη γραφική παράσταση των υπολογιζόμενων τιμών του παραμένουτος μαγνητικού πεδίου προς τις θέσεις των μαγνητών για την περίπτωση του κύβου.

```

1. # Plot Permanent Magnetic Induction
2. # for Cube
3. # (x-axis)
4. fig3 = plt.figure(figsize=(10,6))
5. Brx_cub1D_sctr = plt.scatter(x_cub_lab,Br_x_cub1D, color='blue', linewidth =
    1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
6. plt.legend(('Br_x_cub1D'), loc='upper right')
7. plt.title('Permanent Magnetic Induction (x-axis) - Cube', fontsize=14)
8. plt.xlabel('x (cm)')
9. plt.ylabel('Br (T) - (x-axis)')
10. #plt.ylim(0.0, 0.00003)
11.
12. # (y-axis)
13. fig4 = plt.figure(figsize=(10,6))

```



```

14. Bry_cub1D_sctr = plt.scatter(y_cub_lab, Br_y_cub1D, color='blue', linewidth =
    1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
15. plt.legend(('Br_cub1D'), loc='upper right')
16. plt.title('Permanent Magnetic Induction (y-axis) - Cube', fontsize=14)
17. plt.xlabel('y (cm)')
18. plt.ylabel('Br (T)')
19. #plt.ylim(0.0, 0.00003)
20.
21. # (norm)
22. fig5 = plt.figure(figsize=(10,6))
23. ax1 = fig5.add_subplot(111, projection='3d')
24. Br_cub_surf_th = ax1.scatter(x2, y2, Br_cub3D, c='blue', marker='o')
25. ax1.set_title('Permanent Magnetic Induction - Cube', fontsize=14)
26. ax1.set_xlabel('x (cm)')
27. ax1.set_ylabel('y (cm)')
28. ax1.set_zlabel('Br (T)')

```

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται όμοια για όλες τις εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου, από όπου προκύπτει το παραμένον μαγνητικό πεδίο των μαγνητών και για όλα τα διαφορετικά σχήματα μαγνητών που χρησιμοποιήθηκαν.

Όσον αφορά τη λειτουργία του προγράμματος, από το χρήστη απαιτούνται οι εξής κινήσεις. Πριν την εκκίνηση του προγράμματος θα πρέπει να έχει τοποθετηθεί το αρχείο excel των πειραματικών τιμών στην προαναφερθείσα μορφή. Ξεκινώντας τη λειτουργία του προγράμματος ζητείται από τον χρήστη να εισάγει μόνο τις διαστάσεις των μαγνητών (σε cm) και πατώντας το πλήκτρο enter ταυτόχρονα προκύπτουν ως αποτελέσματα η μέση τιμή του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου για κάθε μαγνήτη, δημιουργούνται στο φάκελο τα αρχεία excel που έχουν αναλυτικά όλες τις τιμές που υπολογίστηκαν και αναδύονται σε νέο παράθυρο οι γραφικές παραστάσεις των υπολογιζόμενων τιμών του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου.

Ο αλγόριθμος στην πλήρη μορφή του βρίσκεται στο παράρτημα της εργασίας, στην υποενότητα 1.1, με τίτλο 'Αλγόριθμος για το Παραμένον Μαγνητικό Πεδίο'.

Στον επόμενο πίνακα (7) συνοψίζονται το σχήμα, οι διαστάσεις και τα αποτελέσματα της μέσης τιμής της συνιστώσας x, της συνιστώσας y και του μέτρου του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου για κάθε μαγνήτη, όπως υπολογίστηκαν από τον παραπάνω αλγόριθμο.

Πίνακας 7: Τ το σχήμα, οι διαστάσεις και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για τη μέση τιμή της συνιστώσας x, της συνιστώσας y και του μέτρου του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου για κάθε μαγνήτη

	Διαστάσεις (cm)	Brx (T) 1D	Bry (T) 1D	Br (T) 3D
Κυλινδρικός	$R = 0.5, L = 4$		$4.46 \cdot 10^{-1}$	$2.72 \cdot 10^6$

Κυβικός	$a = 0.5, b = 0.5,$ $c = 0.5$	$1.73 \cdot 10^{-6}$	$1.42 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^5$
Ορθογώνιος (οριζόντια τοποθέτηση)	$a = 4, b = 1,$ $c = 0.8$	$6.01 \cdot 10^{-7}$	$6.47 \cdot 10^{-6}$	$3.51 \cdot 10^6$
Ορθογώνιος (κατακόρυφη τοποθέτηση)	$a = 0.8, b = 1,$ $c = 4$	$1.18 \cdot 10^{-7}$	$6.81 \cdot 10^{-6}$	$3.52 \cdot 10^6$

7.2.3. Αλγόριθμος των προσεγγιστικών για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών σε μία διάσταση

Γνωρίζοντας το παραμένον μαγνητικό πεδίο των μαγνητών, αναπτύχθηκε ο επόμενος αλγόριθμος, με στόχο τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της εξίσωσης του μαγνητικού πεδίου σε σχέση με τις πειραματικές μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών, για όλα τα σχήματα των μαγνητών.

Ο αλγόριθμος για την εύρεση των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου από τις προσεγγιστικές εξισώσεις συνοψίζεται στο επόμενο σχήμα (7.2.2).

libraries → equations for magnetic field → inputed parameters → solve equations → export calculated data → import measured data → print magnetic field (calculated & lab data) → plot magnetic field (calculated & lab data)

Σχήμα 7.2.2: Συνοπτική αναπαράσταση του αλγόριθμου που υπολογίζει τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών.

Στον αλγόριθμο αρχικά καλούνται τα πακέτα που θα χρησιμοποιηθούν, τα οποία είναι ίδια με αυτά του προηγούμενου αλγορίθμου, όπως φαίνονται στον κώδικα (7.2.1).

Κατόπιν ορίζονται οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν από τον αλγόριθμο και αντιστοιχούν στις εξισώσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου (7.2) και (7.3) για τον κυβικό και τον ορθογώνιο μαγνήτη, στις δύο τοποθετήσεις του, και στην εξίσωση (7.1) για τον κύλινδρο. Ο τρόπος ορισμού των εξισώσεων φαίνεται στον επόμενο κώδικα (7.2.8).

Κώδικας 7.2.8: Το τμήμα του αλγορίθμου με τις προσεγγιστικές εξισώσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών για την περίπτωση του κυλινδρικού και των κυβικού και ορθογώνιου σχήματος μαγνητών.

```

1. # In[2]:
2. # Magnetic Field - Equations (1D)
3. def By_cyl_eq(y, Bry, R, L):
4.     return - ((Bry/2)*((y*10**2)/math.sqrt((y*10**2)**2+(R*10**2)**2) -
5.             ((y*10**2)-(L*10**2))/math.sqrt(((y*10**2)-(L*10**2))**2+(R*10**2)**2)))
6.
7. def Bx_eq(x, Brx, a, b, c):
8.     return ((Brx/math.pi)*((math.atan(((b*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((x*10**2)-
9.             ((a*10**2)/2)))*math.sqrt(((b*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((x*10**2)-
10.            ((a*10**2)/2)**2)) -
11.            (math.atan(((b*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((x*10**2)+((a*10**2)/2)))*math.sqrt
12.            (((b*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((x*10**2)+((a*10**2)/2)**2))))
13.
14. def By_eq(y, Bry, a, b, c):
15.     return ((Bry/math.pi)*((math.atan(((a*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((y*10**2)-
16.             ((b*10**2)/2)))*math.sqrt(((a*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((y*10**2)-
17.            ((b*10**2)/2)**2)) -
18.            (math.atan(((a*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((y*10**2)+((b*10**2)/2)))*math.sqrt
19.            (((a*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((y*10**2)+((b*10**2)/2)**2))))

```

Ακολουθεί στον αλγόριθμο ο ορισμός των μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν τα μεγέθη που πρέπει να εισαχθούν από τον χρήστη, συγκεκριμένα ζητούνται το παραμένον μαγνητικό πεδίο στις δύο συνιστώσες του και οι διαστάσεις του μαγνήτη. Στον επόμενο κώδικα (7.2.9) φαίνονται τα μεγέθη που πρέπει να εισαχθούν από το χρήστη.

Κώδικας 7.2.9: Το τμήμα του αλγορίθμου όπου ορίζονται οι παράμετροι του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυλινδρικού, του κυβικού και του ορθογώνιου μαγνήτη.

```

1. # In[3]:
2. # Inputed parameters
3. # Permanent Magnetic Induction
4. print('Insert Permanent Magnetic Induction')
5. # for Cylinder
6. Bry_cyl = float(input("Cylinder: Bry = "))
7.
8. # for Cube
9. Brx_cub = float(input("Cube: Brx= "))
10. Bry_cub = float(input("Cube: Bry= "))
11.
12. # for Rectangular (horizontal)
13. Brx_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): Brx= "))
14. Bry_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): Bry= "))
15.
16. # for Rectangular (vertical)
17. Brx_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): Brx= "))
18. Bry_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): Bry= "))
19.
20.
21. # Size of Magnets
22. print('Insert magnet size')
23. #for Cylinder
24. R1 = float(input("Cylinder: R (cm) = " ))

```

```

25. L1 = float(input("Cylinder: L (cm) = "))
26.
27. #for Cube
28. a1 = float(input("Cube: a (cm) = " ))
29. b1 = float(input("Cube: b (cm) = "))
30. c1 = float(input("Cube: c (cm) = "))
31.
32. #for Rectangular (horizontal)
33. a2 = float(input("Rectangular (horizontal): a (cm) = " ))
34. b2 = float(input("Rectangular (horizontal): b (cm) = "))
35. c2 = float(input("Rectangular (horizontal): c (cm) = "))
36.
37. #for Rectangular (vertical)
38. a3 = float(input("Rectangular (vertical): a (cm) = " ))
39. b3 = float(input("Rectangular (vertical): b (cm) = "))
40. c3 = float(input("Rectangular (vertical): c (cm) = "))

```

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος υπολογίζει το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη, μέσω των εξισώσεων (7.2) και (7.3). Στον παρακάτω κώδικα (7.2.10) παρουσιάζεται το τμήμα του αλγόριθμου, που εμπεριέχει την εξίσωση για την περίπτωση του κύβου. Αρχικά ορίζονται τα μεγέθη που θα υπολογιστούν και μετά σε ένα ίδιο εύρος στον άξονα x με αυτό των μετρήσεων και για ίδιο βήμα, υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη. Η αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται και για τον άξονα y.

Κώδικας 7.2.10: Το τμήμα του αλγορίθμου όπου επιλύονται οι προσεγγιστικές εξισώσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου στον ίδιο χώρο με αυτό των πειραματικών μετρήσεων για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```

1. # In[4]:
2. # Magnetic Field - Equations (1D)
3. # for Cube
4. X_cub_th=[]
5. Y_cub_th=[]
6. Bx_cub_th=[]
7. By_cub_th=[]
8. for x_cub in range(4,13,2):
9.     try:
10.         res_x_cub = Bx_eq(x_cub,Brx_cub,a1,b1,c1)
11.         Bx_cub_th.append(res_x_cub)
12.     except ZeroDivisionError:
13.         continue
14.     x_cub_value = x_cub
15.     X_cub_th.append(x_cub_value)
16.
17. for y_cub in range(3,22,3):
18.     try:
19.         res_y_cub = By_eq(y_cub,Bry_cub,a1,b1,c1)
20.         By_cub_th.append(res_y_cub)
21.     except ZeroDivisionError:
22.         continue
23.     y_cub_value = y_cub
24.     Y_cub_th.append(y_cub_value)

```

Κατόπιν ακολουθούν στον αλγόριθμο οι εντολές για την εξαγωγή των προηγούμενων μετρήσεων σε ένα αρχείο excel. Στον κώδικα (7.2.11) φαίνεται το τμήμα του αλγορίθμου για την εξαγωγή των υπολογισμών στην περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

Κώδικας 7.2.11: Το τμήμα του αλγορίθμου για την εξαγωγή σε ένα αρχείο excel των υπολογιζόμενων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[5]:
2. # Export Calculated Magnetic Field
3. # for Cube
4. # (x-axis)
5. equation_data2 = {'x_cub':X_cub_th, 'Bx_cub':Bx_cub_th}
6. result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
7. result2.to_excel('Magnetic Field for Cube (x-axis).xlsx')
8. # (y-axis)
9. equation_data3 = {'y_cub':Y_cub_th, 'By_cub':By_cub_th}
10. result3 = pd.DataFrame(equation_data3)
11. result3.to_excel('Magnetic Field for Cube (y-axis).xlsx')
```

Αμέσως μετά στον αλγόριθμο με κατάλληλες εντολές γίνεται η εισαγωγή των μετρούμενων τιμών από τα αρχεία excel, που έχουν τοποθετηθεί στον ίδιο φάκελο με αυτό του αρχείου του αλγορίθμου, για κάθε άξονα, όπως φαίνεται στον κώδικα (7.2.12) για τον κυβικού σχήματος μαγνήτη.

Κώδικας 7.2.12: Το τμήμα του αλγορίθμου για την εισαγωγή από ένα αρχείο excel των μετρούμενων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[6]:
2. # Import Measured Data
3. # for Cube
4. # (x-axis)
5. data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(y=0).xlsx')
6. dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
7. x_cub_data = dfObj2['x']
8. Bx_cub_data = dfObj2['Bx']
9. x_cub_lab = x_cub_data.tolist()
10. Bx_cub_lab = Bx_cub_data.tolist()
11. # (y-axis)
12. data3 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
13. dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
14. y_cub_data = dfObj3['y']
15. By_cub_data = dfObj3['By']
16. y_cub_lab = y_cub_data.tolist()
17. By_cub_lab = By_cub_data.tolist()
```

Στη συνέχεια ακολουθούν οι εντολές που μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου θα δώσουν στην οθόνη του προγράμματος τις τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού

πεδίου όπως υπολογίστηκαν από τις εξισώσεις και τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές (Κώδικας (7.2.13)). Οι τιμές του μαγνητικού πεδίου που υπολογίστηκαν από τον αλγόριθμο εμφανίζονται στην οθόνη του προγράμματος με τον τίτλο 'Magnetic Field for', το αντίστοιχο σχήμα του μαγνήτη που υπολογίστηκε π.χ. 'Cube' και ο άξονας που μελετήθηκε π.χ. x-axis. Ενώ οι τιμές των μετρήσεων εμφανίζονται στην οθόνη με τίτλο 'Magnetic Field Data for', το αντίστοιχο σχήμα του μαγνήτη που υπολογίστηκε π.χ. 'Cube' και τον άξονα στον οποίο υπολογίστηκε π.χ. 'x-axis'.

Κώδικας 7.2.13: Το τμήμα του αλγορίθμου για την εμφάνιση υπολογιζόμενων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου στην οθόνη του προγράμματος μετά το τέλος λειτουργίας του, για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[7]:
2. # Print Magnetic Field Calculated / Data
3. # for Cube
4. # (x-axis)
5. print('Magnetic Field for Cube (x-axis)')
6. print(X_cub_th, Bx_cub_th)
7. print('Data for Cube (x-axis)')
8. print(x_cub_lab,Bx_cub_lab)
9. # (y-axis)
10. print('Magnetic Field for Cube (y-axis)')
11. print(Y_cub_th, By_cub_th)
12. print('Data for Cube (y-axis)')
13. print(y_cub_lab,By_cub_lab)
```

Τέλος, υπάρχει το τμήμα του αλγορίθμου που κατασκευάζει τα διαγράμματα του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη, που υπολογίστηκε θεωρητικά από τις εξισώσεις και όπως αυτό μετρήθηκε κατά την πειραματική διαδικασία. Στον παρακάτω κώδικα (7.2.14) φαίνεται αυτό το τμήμα του αλγορίθμου για την περίπτωση του κύβου για τον άξονα x. Αρχικά δημιουργείται η εικόνα που θα φιλοξενήσει τις γραφικές παραστάσεις, η οποία χωρίζεται σε πλέγματα που θα φέρει τα διαγράμματα μέσω της εντολής 'subplot'. Στη συνέχεια, για κάθε γραφική παράσταση ξεχωριστά, δίνονται οι εντολές για την κατασκευή της οριζόντιας κλίμακας με τις μεταβλητές που θα συσχετιστούν με τους άξονες των γραφημάτων. Επίσης υπάρχουν οι εντολές που καθορίζουν το τίτλο της γραφικής, και των αξόνων αλλά και το εύρος του άξονα y της γραφικής παράστασης. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τον άξονα y.

Κώδικας 7.2.14: Το τμήμα του αλγορίθμου για τη γραφική αναπαράσταση των υπολογιζόμενων και των μετρούμενων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[8]:
2. # Plot and Compare
3. #for Cube
4. # (x-axis)
```

```

5. gridsize2 = (2,2)
6. fig2 = plt.figure(figsize=(15,8))
7. ax1 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 0))
8. ax2 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 1))
9. ax3 = plt.subplot2grid(gridsize2, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
10. ax1.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube (th)', fontsize=14)
11. sctr_cub_xth = ax1.scatter(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewidth = 1.0
, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
12. sctr_cub_xth_line = ax1.plot(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewidth = 1
.0, linestyle = '-')
13. ax1.set_xlabel('x (cm)')
14. ax1.set_ylabel('Bx_th (T)')
15. ax1.set_ylim(-0.0002,0.0002)
16. ax2.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube (lab)', fontsize=14)
17. sctr_cub_xlab = ax2.scatter(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', linewidth
= 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
18. sctr_cub_xlab_line = ax2.plot(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', linewidt
h = 1.0, linestyle = '-')
19. ax2.set_xlabel('x (cm)')
20. ax2.set_ylabel('Bx_lab (T)')
21. ax2.set_ylim(-0.0002,0.0002)
22. ax3.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube', fontsize=14)
23. sctr_cub_xth = ax3.scatter(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewidth = 1.0
, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
24. sctr_cub_xlab = ax3.scatter(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', linewidth
= 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
25. ax3.set_xlabel('x (cm)')
26. ax3.set_ylabel('Bx (T)')
27. ax3.set_ylim(-0.0002,0.0002)
28. plt.legend([sctr_cub_xth, (sctr_cub_xth, sctr_cub_xlab)], ["Bx_th", "Bx_lab"
])
29. plt.show()

```

Για να εκτελεστεί ο αλγόριθμος απαιτούνται τα εξής. Ο χρήστης, αφού τοποθετήσει το αρχείο excel στο φάκελο που υπάρχει το αρχείο του προγράμματος με τον τρόπο που προαναφέρθηκε, εισάγει τις τιμές που ζητά το πρόγραμμα για την επίλυση των εξισώσεων (παραμένον μαγνητικό πεδίο και διαστάσεις). Πατώντας 'enter' αναδύονται οι εικόνες των διαγραμμάτων για κάθε άξονα, τις οποίες μπορεί να διαχειριστεί και να αποθηκεύσει, ενώ ταυτόχρονα στον ίδιο φάκελο με πριν εμφανίζονται τα αρχεία excel με τα αποτελέσματα των θεωρητικών υπολογισμών. Επίσης ταυτόχρονα με τα διαγράμματα εμφανίζονται στο παράθυρο του προγράμματος τα αποτελέσματα των υπολογισμών από τις εξισώσεις και οι μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου με τίτλους 'Magnetic Field for' και 'Magnetic Field Data for' αντίστοιχα, συνδυασμένα με το αντίστοιχο σχήμα του μαγνήτη που υπολογίστηκε π.χ. 'Cube' και τον άξονα στον οποίο μετρήθηκε το πεδίο π.χ. x-axis.

Ο αλγόριθμος υπάρχει στην πλήρη μορφή του στο παράρτημα της εργασίας, στην υποενότητα 1.2, με τίτλο 'Αλγόριθμος Προσεγγιστικών Εξισώσεων - Μαγνητικό Πεδίο Μαγνητών (1D)'.

7.2.4. Αλγόριθμος των προσεγγιστικών για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών

Κατά ανάλογο τρόπο αναπτύσσεται σε αλγόριθμο και η εξίσωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών (7.4). Ο νέος αλγόριθμος διαφοροποιείται εκτός από την εξίσωση του επαγόμενου πεδίου, στις διαστάσεις των μαγνητών, που εδώ δε συνυπολογίζονται, και στο τμήμα του αλγόριθμου όπου ορίζονται οι γραφικές παραστάσεις.

Αφού οριστούν τα κατάλληλα πακέτα που θα χρησιμοποιηθούν από τον αλγόριθμο για την εισαγωγή τιμών και την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων, ορίζεται η εξίσωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών, όπως φαίνεται στον επόμενο κώδικα (7.2.15).

Κώδικας 7.2.15: Το τμήμα του αλγορίθμου με την προσεγγιστική εξίσωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών για την περίπτωση του κυλινδρικού, του κυβικού και του ορθογώνιου μαγνήτη.

```
1. # In[2]:
2. # Magnetic Field - Equations (3D)
3. def B_eq(x,y,z,Br):
4.
5.     return (Br)/(2*(math.pi)*((math.sqrt((x*10**2)**2+(y*10**2)**2+(z*10**2)**2)
6.     )**3))
```

Κατόπιν η παραπάνω εξίσωση επιλύεται για κάθε σχήμα μαγνήτη. Στον παρακάτω κώδικα (7.2.16) φαίνεται η επίλυση της εξίσωσης για την περίπτωση του κύβου.

Κώδικας 7.2.16: Το τμήμα του αλγορίθμου όπου επιλύεται η προσεγγιστική εξίσωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου στον ίδιο χώρο με αυτό των πειραματικών μετρήσεων για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[4]:
2. # Magnetic Field - Equations
3. z=-2
4. # for Cube
5. X_cub_th=[]
6. Y_cub_th=[]
7. B_cub_th=[]
8. for x_cub in range(-4,13,2):
9.     for y_cub in range(3,22,3):
10.        try:
11.            res_cub = B_eq(x_cub,y_cub,z,Br_cub)
12.            B_cub_th.append(res_cub)
13.        except ZeroDivisionError:
14.            continue
15.        x_cub_value = x_cub
16.        X_cub_th.append(x_cub_value)
17.        y_cub_value = y_cub
18.        Y_cub_th.append(y_cub_value)
```


Αμέσως μετά οι τιμές του μαγνητικού πεδίου που υπολογίστηκαν, εξάγονται σε ένα αρχείο excel, που εμφανίζεται στο φάκελο που υπάρχει το αρχείο του αλγόριθμου, μετά το τέλος της εκτέλεσης του προγράμματος. Οι εντολές που απαιτούνται για την εξαγωγή τιμών είναι όμοιες με αυτές του προηγούμενου αλγόριθμου, που παρουσιάζεται στον κώδικα (7.2.6).

Στη συνέχεια στον αλγόριθμο ακολουθεί το τμήμα των εντολών για την εισαγωγή των πειραματικών τιμών, όπως φαίνεται στον επόμενο κώδικα (7.2.17).

Κώδικας 7.2.17: Το τμήμα του αλγορίθμου για την εισαγωγή από ένα αρχείο excel των μετρούμενων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[6]:
2. # Import Measured Data (3D)
3. # for Cube
4. data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm).xlsx')
5. dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
6. x2_data = dfObj2['x']
7. y2_data = dfObj2['y']
8. Bx2_data = dfObj2['Bx']
9. By2_data = dfObj2['By']
10. Bz2_data = dfObj2['Bz']
11. x2 = x2_data.tolist()
12. y2 = y2_data.tolist()
13. Bx2 = Bx2_data.tolist()
14. By2 = By2_data.tolist()
15. Bz2 = Bz2_data.tolist()
```

Αφού σκοπός είναι να υπολογιστεί το μέτρο του μαγνητικού πεδίου, εισήχθησαν μέσω του 'pandas' οι μετρήσεις για τις τρεις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου και μέσω της εξίσωσης του μέτρου ενός διανύσματος υπολογίστηκε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου για κάθε θέση x,y του μαγνήτη. Στον παρακάτω κώδικα (7.2.18) φαίνεται το τμήμα του αλγορίθμου, που υπολογίζει το μέτρο του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κύβου.

Κώδικας 7.2.18: Το τμήμα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό του μέτρου του μαγνητικού πεδίου από τις μετρούμενες συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # Calculate Magnetic Field B for Cube
2. B_cub = []
3. for f in range(0, len(Bx2)):
4.     b2_value = math.sqrt(Bx2[f]**2+By2[f]**2+Bz2[f]**2)
5.     B_cub.append(b2_value)
```

Κατόπιν ακολουθούν οι εντολές για την εμφάνιση των πειραματικών μετρήσεων στην οθόνη του προγράμματος, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Οι εντολές είναι όμοιες με αυτές του προηγούμενου αλγορίθμου, όπως φαίνονται στον κώδικα (7.2.13). Οι τιμές εμφανίζονται στην οθόνη με τίτλο 'Magnetic Field for' και 'Data for' για τις θεωρητικά υπολογισμένες και τις πειραματικές τιμές αντίστοιχα και τον αντίστοιχο μαγνήτη που μελετάται, π.χ. 'Cube'.

Για την αναπαράσταση των γραφημάτων σε τρεις διαστάσεις, χρησιμοποιείται και πάλι η βιβλιοθήκη 'matplotlib.pyplot', με τις εντολές που αντιστοιχούν σε διαγράμματα τριών διαστάσεων και τα αποτελέσματα αναδύονται σε δύο νέα παράθυρα. Στον επόμενο κώδικα (7.2.19) φαίνεται το τμήμα του αλγορίθμου στην περίπτωση του κύβου για την αποτύπωση των γραφικών παραστάσεων στις τρεις διαστάσεις.

Κώδικας 7.2.19: Το τμήμα του αλγορίθμου για τη γραφική αναπαράσταση σε τρεις διαστάσεις του υπολογιζόμενου και του μετρούμενου μέτρου του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[9]:
2. # Plot Magnetic Field
3. # for Cube
4. fig3 = plt.figure(figsize=(15,8))
5. ax1 = fig3.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
6. surf_cub_th = ax1.scatter(X_cub_th, Y_cub_th, B_cub_th, c='blue', marker='o'
7. )
8. ax1.set_title('Magnetic field - Cube (th)', fontsize=14)
9. ax1.set_xlabel('x (cm)')
10. ax1.set_ylabel('y (cm)')
11. ax1.set_zlabel('B (T)')
12. ax2 = fig3.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
13. surf_cub_lab = ax2.scatter(x2, y2, B_cub, c='purple', marker='^')
14. ax2.set_title('Magnetic field - Cube (lab)', fontsize=14)
15. ax2.set_xlabel('x (cm)')
16. ax2.set_ylabel('y (cm)')
17. ax2.set_zlabel('B (T)')
18. plt.show()
19. # Compare Plots
20. fig4 = plt.figure(figsize=(15,8))
21. ax = Axes3D(fig4)
22. surf_cub_the = ax.scatter(X_cub_th, Y_cub_th, B_cub_th,
23. c='blue', marker='o')
24. surf_cub_lab0 = ax.scatter(x2, y2, B_cub, c='purple', marker='^')
25. ax.set_title('Magnetic field - Cube', fontsize=14)
26. ax.set_xlabel('x (cm)')
27. ax.set_ylabel('y (cm)')
28. ax.set_zlabel('B (T)')
29. plt.show()
```

Όσον αφορά την εκτέλεση του αλγορίθμου απαιτείται από το χρήστη, αφού τοποθετήσει το αρχείο excel στον ίδιο φάκελο με το αρχείο του προγράμματος με τον τρόπο που προαναφέρθηκε, να εισαγάγει τις τιμές που ζητά το πρόγραμμα για

την επίλυση των εξισώσεων (παραμένον μαγνητικό πεδίο). Πατώντας 'enter' εμφανίζονται οι εικόνες των διαγραμμάτων για κάθε άξονα και ταυτόχρονα, στον ίδιο φάκελο με πριν, τα αρχεία excel με τα αποτελέσματα των υπολογισμών και τα αποτελέσματα των υπολογισμών από τις εξισώσεις και οι μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου με τίτλους 'Magnetic Field for' και 'Data for' αντίστοιχα, συνδυασμένα με το αντίστοιχο σχήμα του μαγνήτη που υπολογίστηκε π.χ. 'Cube' και τον άξονα στον οποίο μετρήθηκε το πεδίο π.χ. x-axis στην οθόνη του προγράμματος.

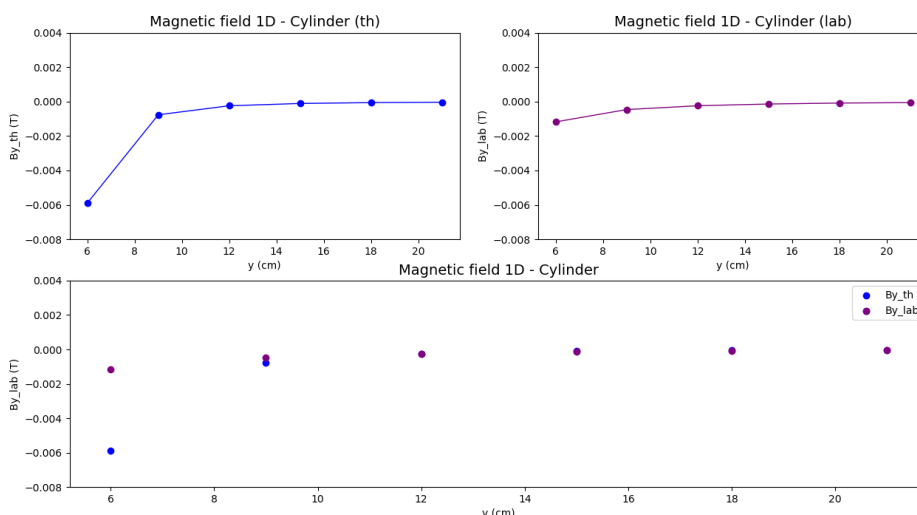
Ο αλγόριθμος υπάρχει στην πλήρη μορφή του στο παράρτημα της εργασίας, στην υποενότητα 1.3 με τίτλο 'Αλγόριθμος Προσεγγιστικών Εξισώσεων - Το Μέτρο του Μαγνητικού Πεδίου των Μαγνητών'.

7.2.5. Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών

Στους αλγόριθμους της προηγούμενης παραγράφου εφαρμόστηκαν κατόπιν οι πειραματικές μετρήσεις για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών κάθε σχήματος.

7.2.5.1. Κυλινδρικός Μαγνήτης

Στην περίπτωση του κυλινδρικού μαγνήτη για παραμένον μαγνητικό πεδίο με συνιστώσα γ του παραμένοντος μαγνητικού πεδίου $B_{r,\gamma} = 0.446 T$ και διαστάσεις κυλίνδρου $R = 0.5cm$, $L = 4cm$, μετά το τέλος της λειτουργίας του προγράμματος αναδύθηκε το παράθυρο, με τις γραφικές παραστάσεις του θεωρητικά υπολογισμένου από τις εξισώσεις μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση και αυτού που μετρήθηκε κατά την πειραματική διαδικασία και το οποίο φαίνεται στο σχήμα (7.2.3). Πάνω αριστερά απεικονίζεται το διάγραμμα των θεωρητικών υπολογισμών της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη, ως προς την απόσταση στην οποία κινήθηκε ο μαγνήτης κατά τον άξονα γ και δεξιά η αντίστοιχη γραφική παράσταση για τις πειραματικές τιμές του πεδίου. Στο κάτω διάγραμμα του σχήματος συγκρίνονται στο ίδιο γράφημα η θεωρητική και πειραματική τιμή του μαγνητικού πεδίου για τη μια διάσταση.

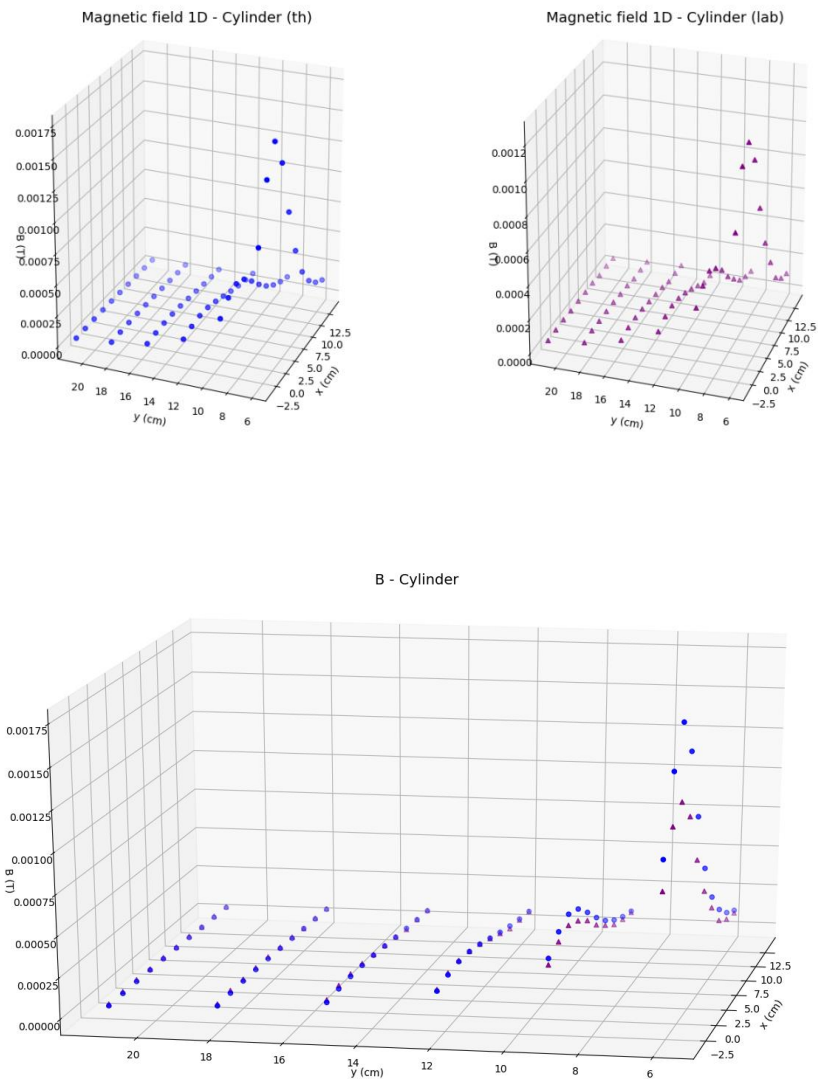


Σχήμα 7.2.3: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση για την περίπτωση του κυλίνδρου.

Από τα διαγράμματα του σχήματος (7.2.3) είναι εμφανές ότι οι πειραματικές μετρήσεις συγκλίνουν με τις θεωρητικές μετά την απόσταση των 9cm, ενώ μετά τα 12cm ταυτίζονται. Η μεγαλύτερη διάσταση του κυλίνδρου είναι 4cm, η ταύτιση λοιπόν των τιμών συμβαίνει σε αποστάσεις μεγαλύτερες από το διπλάσιο της μεγαλύτερης διάστασης του. Στις κοντινές αποστάσεις, υπήρχε απόκλιση των θεωρητικών από τις πειραματικές τιμές, η οποία όμως ήταν μικρή και δεν υπήρχε αλλαγή στη τάξη του μεγέθους του μαγνητικού πεδίου.

Σημειώνεται ότι για τον κυλινδρικό μαγνήτη η μελέτη του της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου ήταν δυνατή μόνο στον άξονα y , οπότε και μελετήθηκε η συνιστώσα y του (B_y), αφού οι μετρήσεις έγιναν μόνο κατά τρόπο ώστε οι πόλοι των μαγνητών να βρίσκονται κάθετα στον άξονα y .

Για τη μελέτη του μέτρου του μαγνητικού πεδίου του κυλινδρικού μαγνήτη, χρησιμοποιήθηκε ο αντίστοιχος αλγόριθμος που βασίστηκε στην εξίσωση (7.4). Για παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_r = 2.72 \cdot 10^6 T$, ο αλγόριθμος υπολόγισε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου θεωρητικά στο ίδιο εύρος τιμών με αυτό των πειραματικών. Επίσης υπολόγισε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου των πειραματικών τιμών, αφού εισήχθησαν οι μετρούμενες συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών αποτυπώθηκαν σε εικόνες με διαγράμματα για τις θεωρητικές και πειραματικές τιμές. Συγκεκριμένα αναδύθηκαν δύο εικόνες που φαίνονται στο επόμενο σχήμα, με τις γραφικές παραστάσεις των θεωρητικών και πειραματικών τιμών σε διαφορετικές γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 7.2.4) και στο ίδιο διάγραμμα.



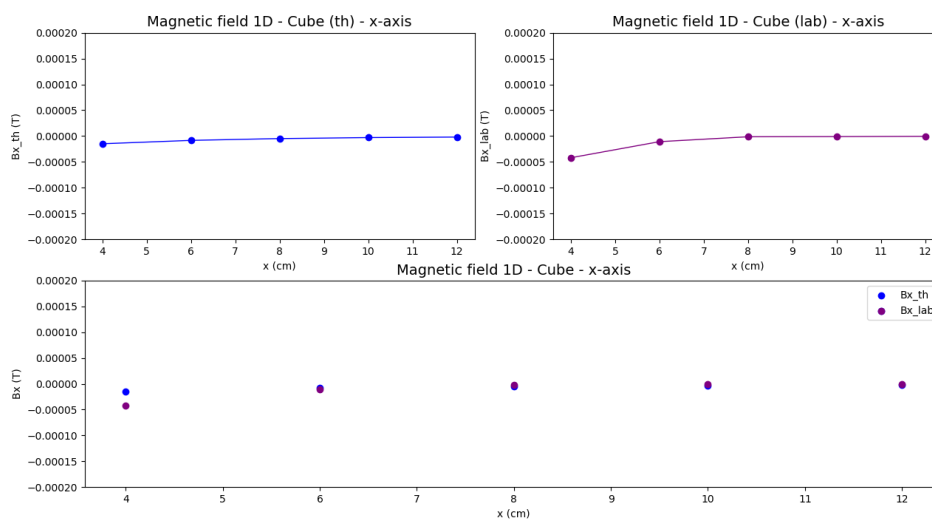
Σχήμα 7.2.4: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης του μέτρου του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυλίνδρου.

Από το διάγραμμα (7.2.4) φαίνεται ότι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου των θεωρητικών υπολογισμών συγκλίνει με τις πειραματικές. Εκτός από τις πολύ κοντινές αποστάσεις, μικρότερες από 3cm, όπου υπάρχει μια απόκλιση σχεδόν μιας τάξης μεγέθους, σε αποστάσεις μεγαλύτερες υπάρχει σχεδόν ταύτιση των τιμών.

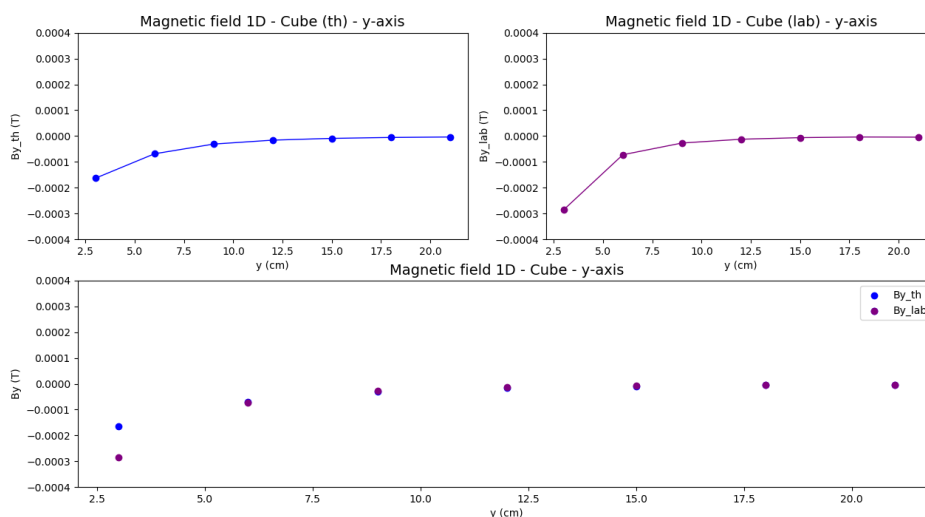
7.2.5.2. Κυβικός Μαγνήτης

Όσον αφορά τον κυβικό μαγνήτη για παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_{r,x} = 1.73 \cdot 10^{-6} T$ για τον άξονα x και $B_{r,y} = 1.42 \cdot 10^{-5} T$ για τον άξονα y και

διαστάσεις $a_{\text{cube}} = b_{\text{cube}} = c_{\text{cube}} = 0.5\text{cm}$, ο αλγόριθμος υπολόγισε τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου για τον άξονα x και τον άξονα y και το παράθυρο με τις γραφικές παραστάσεις που αναδύθηκε φαίνεται στο επόμενο σχήμα (7.2.5) για τη συνιστώσα x και στο σχήμα (7.2.6) για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου. Όπως και πριν πάνω αριστερά βρίσκεται η γραφική παράσταση της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, όπως αυτή υπολογίστηκε από τη θεωρητική προσεγγιστική εξίσωση, ως προς τις θέσεις του μαγνήτη στον άξονα που μετακινήθηκε και αριστερά οι αντίστοιχες πειραματικές τιμές. Στο κάτω μέρος φαίνεται, σε μια γραφική παράσταση, το μαγνητικό πεδίο του θεωρητικού υπολογισμού και των πειραματικών μετρήσεων μαζί.



Σχήμα 7.2.5: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση για την περίπτωση του κύβου.

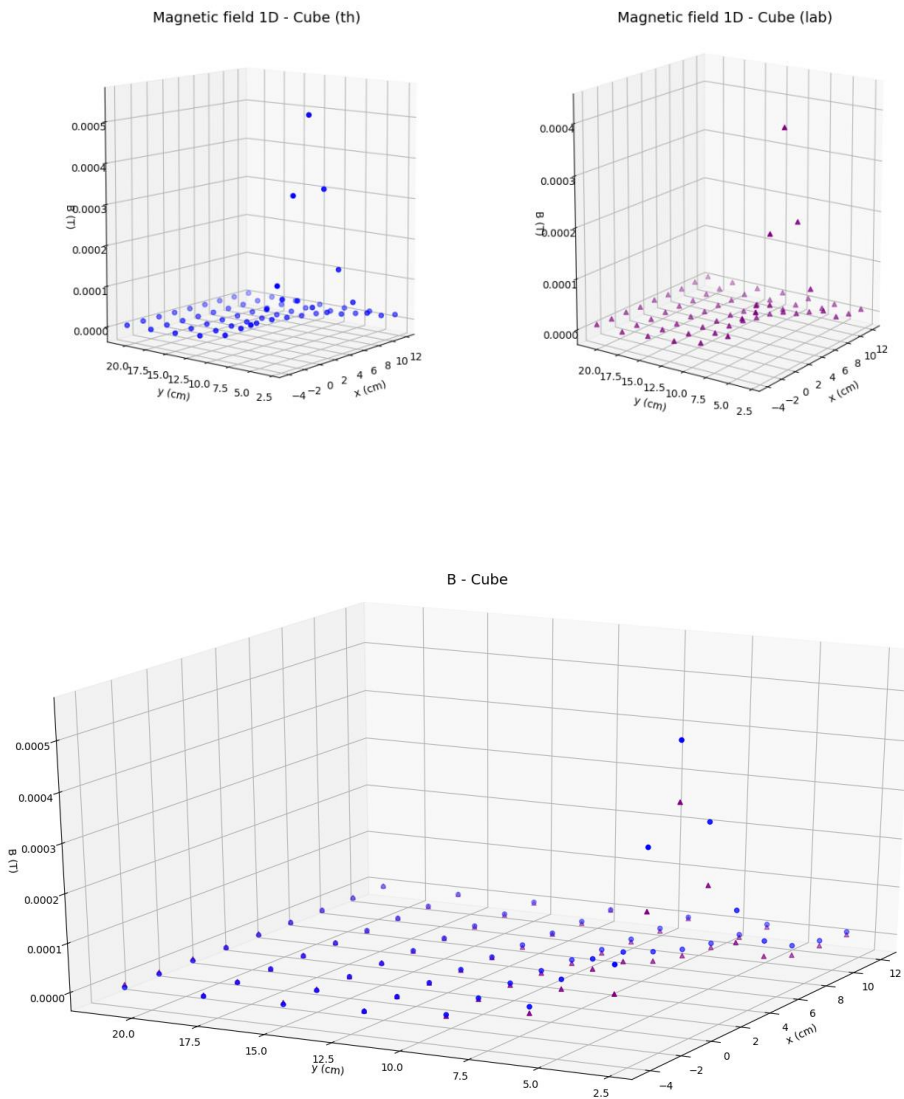


Σχήμα 7.2.6: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση για την περίπτωση του κύβου.

Από τα διαγράμματα του σχήματος (7.2.5) της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x) ως προς θέσεις του μαγνήτη στον άξονα x , φαίνεται ότι υπάρχει απόκλιση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών τιμών στις κοντινές αποστάσεις, η οποία μειώνεται καθώς η απόσταση μεγαλώνει. Συγκεκριμένα οι θεωρητικές τιμές προκύπτουν το πολύ μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από τις πειραματικές τιμές της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου.

Για τα διαγράμματα του σχήματος (7.2.6) της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y) του μαγνήτη προς τις θέσεις του στον άξονα y , παρατηρείται σύγκλιση των τιμών και ταύτιση μετά τα 6cm. Στις κοντινές αποστάσεις η διαφορά των τιμών είναι μικρότερη από μια τάξη μεγέθους. Σε απόσταση, όμως, περίπου τετραπλάσια από τη διάσταση του μαγνήτη οι πειραματικές τιμές ταυτίζονται με τα αποτελέσματα των προσεγγιστικών εξισώσεων.

Ο κυβικός μαγνήτης μελετήθηκε και μέσω του αλγόριθμου για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου. Για παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_r = 1.6 \cdot 10^5 T$, ο αλγόριθμος υπολόγισε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου μέσω της εξίσωσης (7.4) και από τις τιμές των μετρήσεων των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου, υπολογίστηκε και η πειραματική τιμή του μέτρου του. Μετά την εκτέλεση του προγράμματος αναδύθηκαν δύο παράθυρα, με το ένα να φέρει σε δύο διαφορετικές γραφικές παραστάσεις τις θεωρητικές και τις πειραματικές τιμές του μέτρου του μαγνητικού πεδίου ως προς το επίπεδο x,y , ενώ στο δεύτερο αποτυπώνονται οι παραπάνω θεωρητικές και πειραματικές τιμές του μέτρου στο ίδιο διάγραμμα (Σχήμα 7.2.7).



Σχήμα 7.2.7: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης του μέτρου του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

Από τη σύγκριση των τιμών μέσω των διαγραμμάτων προκύπτει ότι υπάρχει αρκετά καλή σύμπτωση σε όλες τις τιμές και σε όλες τις θέσεις του μαγνήτη. Σε κάθε σημείο η απόκλιση μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής τιμής ήταν μικρότερη από μια τάξη μεγέθους.

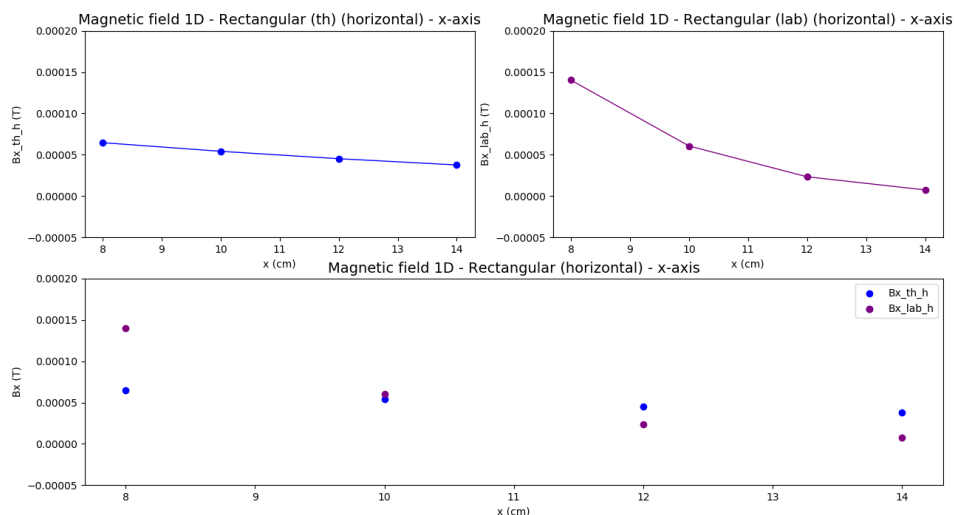
7.2.5.3. Ορθογώνιος Μαγνήτης

Ο ορθογώνιος μαγνήτης μελετήθηκε ως προς δύο διαφορετικές τοποθετήσεις, την οριζόντια και την κατακόρυφη. Έτσι, ο αλγόριθμος αναπτύχθηκε

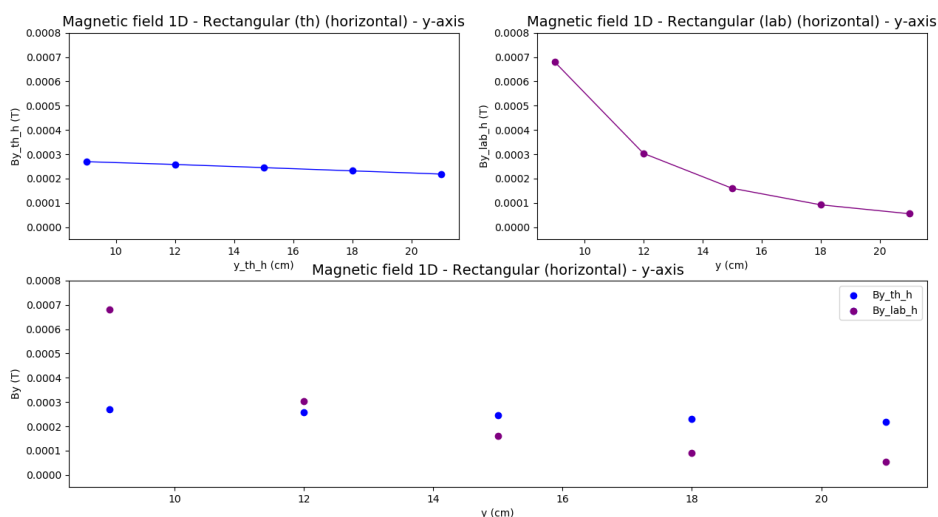
με τις ίδιες εντολές όπως εκείνες του κύβου, εξετάζοντας όμως χωριστά τις δύο αυτές περιπτώσεις. Οι εξισώσεις (7.2) και (7.3) για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, B_x και B_y αντίστοιχα, χρησιμοποιήθηκαν και για τις δύο τοποθετήσεις.

▪ Οριζόντια τοποθέτηση ορθογώνιου μαγνήτη

Κατά την οριζόντια τοποθέτηση του μαγνήτη, το παραμένον μαγνητικό πεδίο υπολογίστηκε ίσο με $B_{r,x} = 6.01 \cdot 10^{-7} T$ για τον άξονα x και ίσο με $B_{r,y} = 6.47 \cdot 10^{-6} T$ για τον άξονα y. Οι διαστάσεις του μαγνήτη για την οριζόντια τοποθέτηση αντιστοιχούν στις ακμές: $a_{\text{rectangular,horizontal}} = 4\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,horizontal}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,horizontal}} = 0.8\text{cm}$. Ο αλγόριθμος υπολόγισε το μαγνητικό πεδίο για τον άξονα x και τον άξονα y και η εικόνα με τις γραφικές παραστάσεις που προέκυψε φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (7.2.8) για τη συνιστώσα x και στο σχήμα (7.2.9) για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου. Όμοια με προηγουμένως, πάνω αριστερά βρίσκεται η γραφική παράσταση της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, όπως αυτή υπολογίστηκε από τη θεωρητική προσεγγιστική εξίσωση, ως προς τις θέσεις του μαγνήτη στον άξονα και αριστερά οι αντίστοιχες πειραματικές τιμές. Στο κάτω μέρος της εικόνας αποτυπώνονται σε μια γραφική παράσταση το μαγνητικό πεδίο του θεωρητικού υπολογισμού και των πειραματικών μετρήσεων μαζί.



Σχήμα 7.2.8: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.



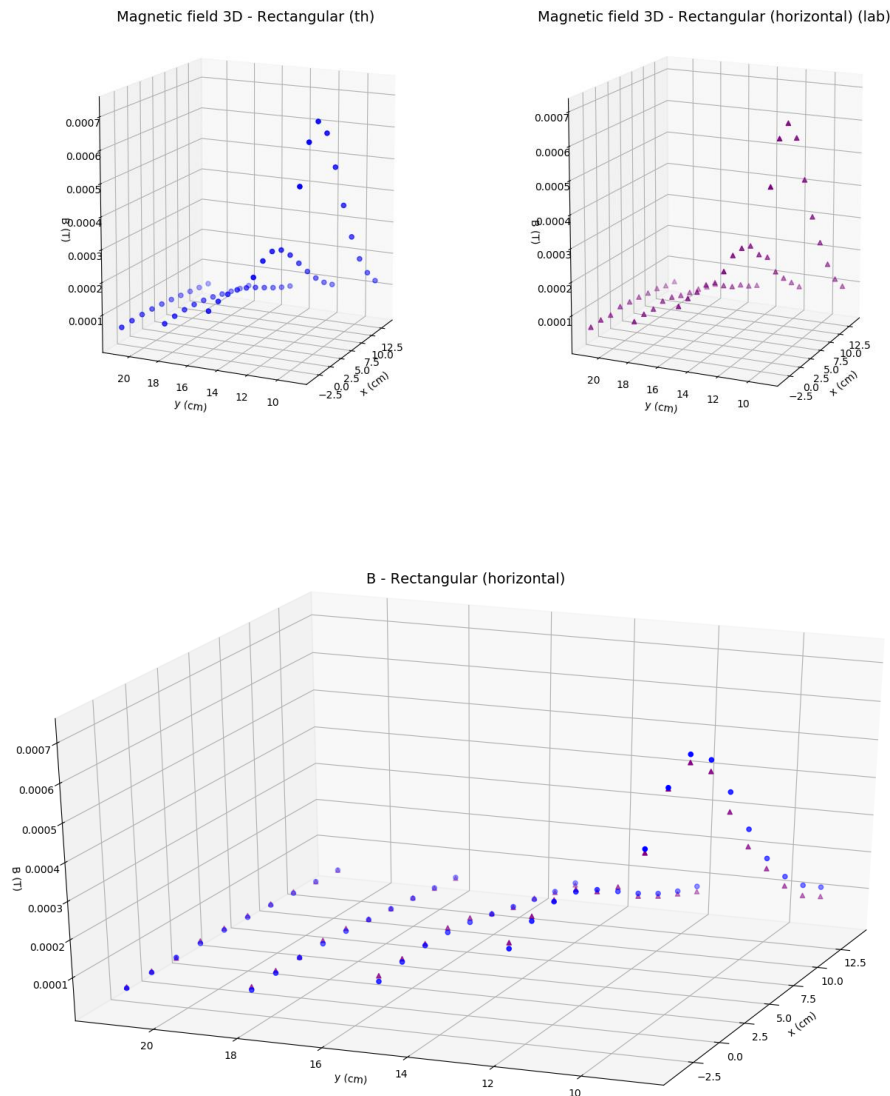
Σχήμα 7.2.9: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.

Για τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου στο σχήμα (7.2.8), φαίνεται ότι υπάρχει απόκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών σε κοντινές αποστάσεις, η οποία μειώνεται αρκετά στη θέση $x=10\text{cm}$ και αυξάνει και πάλι σε μακρινές αποστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, στις κοντινές αποστάσεις στα $x=8\text{cm}$, η απόκλιση των τιμών ήταν δύο τάξεις μεγέθους και κατόπιν μειώθηκε και παρέμεινε μια διαφορά μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής τιμής σε μέγεθος μιας τάξης. Επίσης, μετά το σημείο των 8cm , οι πειραματικές συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου βρέθηκαν σε χαμηλότερες τιμές από αυτές των θεωρητικών, σε αντίθεση με τις κοντινές αποστάσεις.

Η συνιστώσα y για το μαγνητικό πεδίο του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση, που φαίνεται στο σχήμα (7.2.9), για τις θεωρητικές τιμές δείχνει να προσεγγίζει αυτή των πειραματικών μετρήσεων στη θέση $y=12\text{cm}$. Πριν από αυτό το σημείο και λίγο μετά, υπάρχουν αποκλίσεις μεταξύ των τιμών, μικρότερες από μια τάξη μεγέθους, ενώ σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 15cm η διαφορά μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών φτάνει έως δύο τάξεις μεγέθους. Όπως και πριν και στην περίπτωση της συνιστώσας y , μετά τη θέση των 12cm , οι θεωρητικές τιμές του B_y είναι μεγαλύτερες από αυτές των πειραματικών.

Για τη μελέτη του μέτρου του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση, για παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_r = 3.51 \cdot 10^6 \text{ T}$, ο αντίστοιχος αλγόριθμος υπολόγισε το μέτρο και προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των θεωρητικών και πειραματικών τιμών του ως προς το επίπεδο x,y . Στα παρακάτω σχήματα αποτυπώνονται οι γραφικές παραστάσεις των θεωρητικών

και πειραματικών τιμών του μέτρου του μαγνητικού πεδίου σε δύο διαφορετικές γραφικές παραστάσεις και τοποθετημένες μαζί στο ίδιο διάγραμμα (Σχήμα 7.2.10).



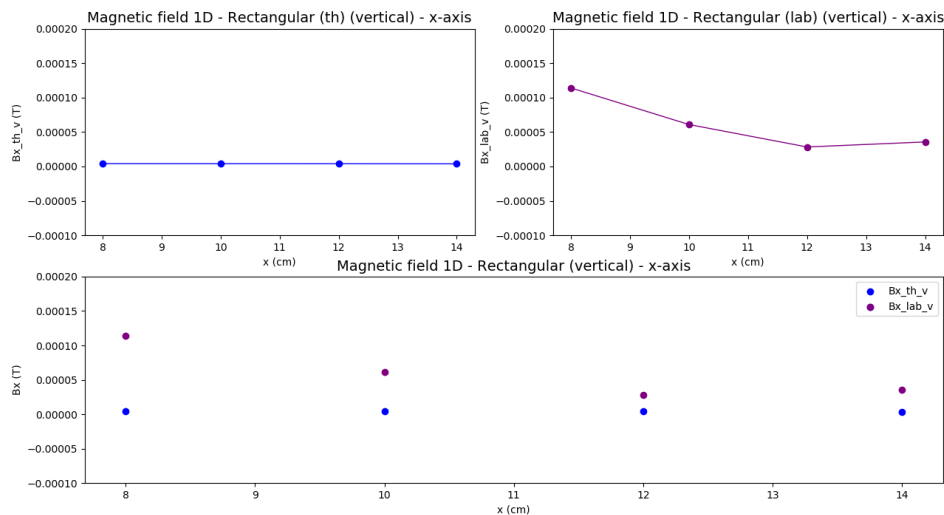
Σχήμα 7.2.10: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης του μέτρου του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.

Στο παραπάνω διάγραμμα (7.2.10) παρατηρείται ότι υπήρχε ταύτιση των θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές, με διαφορές μικρότερες από μια τάξη μεγέθους.

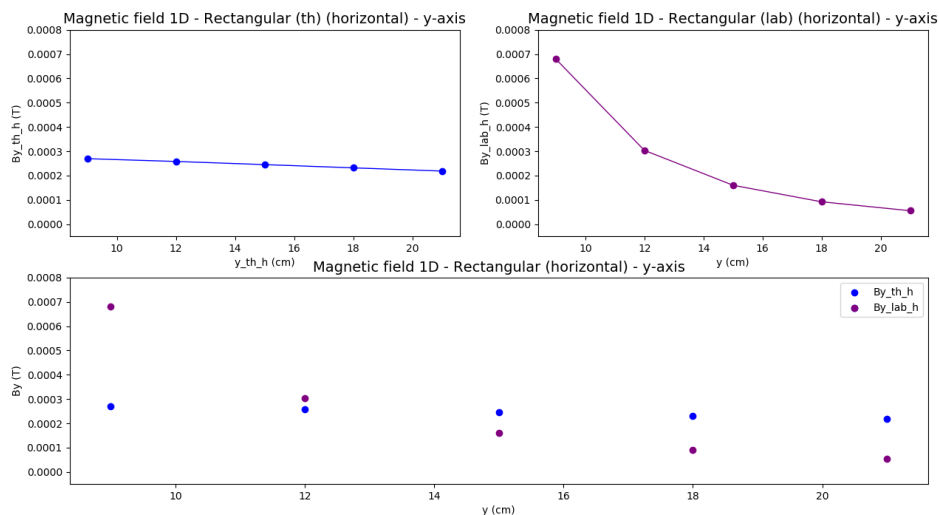
▪ Κατακόρυφη τοποθέτηση ορθογώνιου μαγνήτη

Στην κατακόρυφη τοποθέτηση του μαγνήτη το παραμένον μαγνητικό πεδίο υπολογίστηκε ότι είναι $B_{r,x} = 1.18 \cdot 10^{-7} T$ για τον άξονα x και $B_{r,y} = 6.81 \cdot 10^{-6} T$

για τον άξονα y . Οι διαστάσεις του μαγνήτη για την κατακόρυφη τοποθέτηση αντιστοιχούν στις ακμές: $a_{\text{rectangular,vertical}} = 0.8\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,vertical}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,vertical}} = 4\text{cm}$. Μετά την εκτέλεση του προγράμματος προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των θεωρητικών και πειραματικών τιμών της συνιστώσας x (Σχήμα 7.2.11) και της συνιστώσας y (Σχήμα 7.2.12) του μαγνητικού πεδίου.



Σχήμα 7.2.11: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση.

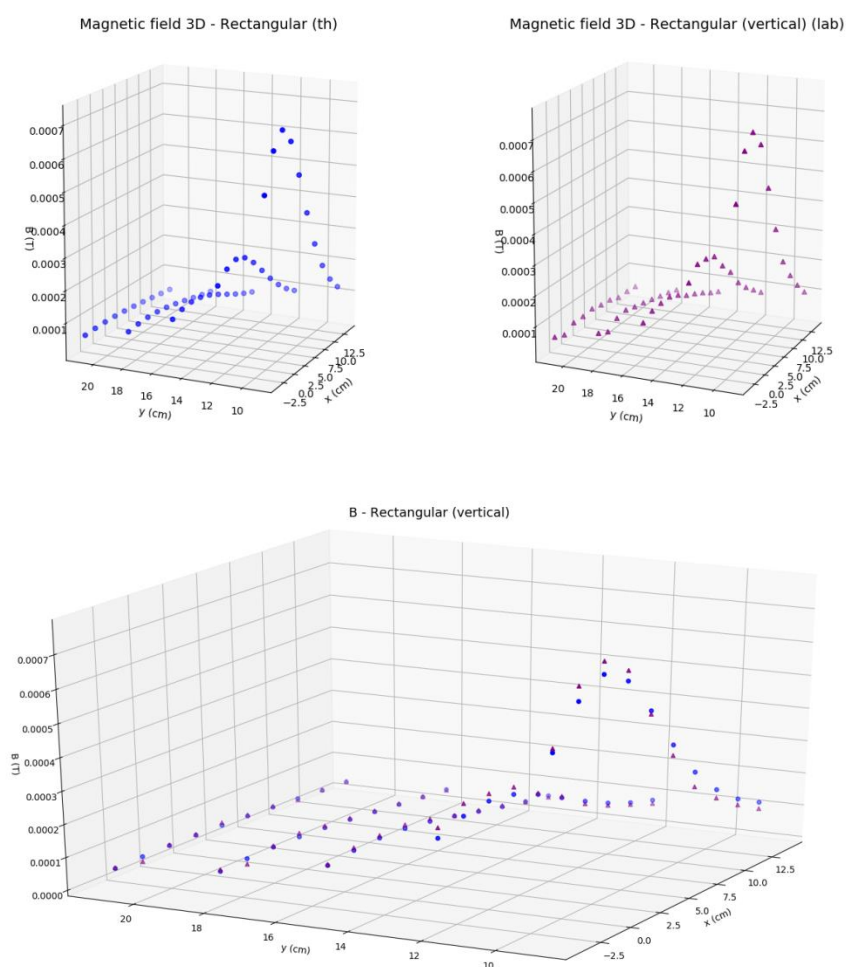


Σχήμα 7.2.12: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε μια διάσταση για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση.

Όσον αφορά τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (Σχήμα 7.2.11), φαίνεται ότι υπάρχει απόκλιση των τιμών, που στις κοντινές αποστάσεις είναι δύο τάξεων μεγέθους, ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις οι θεωρητικές με τις πειραματικές τιμές αποκλίνουν κατά μια τάξη μεγέθους.

Η συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου (Σχήμα 7.2.12), έχει μια καλή σύγκλιση των θεωρητικών και των πειραματικών τιμών σε αποστάσεις έως 15cm, ενώ μετά δημιουργείται μια απόκλιση μιας έως δύο τάξεις μεγέθους.

Για τη μελέτη του μέτρου του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη κατά την κατακόρυφη τοποθέτησή του, με παραμένον μαγνητικό πεδίο $B_{r,y} = 3.51 \cdot 10^6 T$, εκτελέστηκε ο αλγόριθμος για την εξίσωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου. Μετά το τέλος του προγράμματος προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των θεωρητικών και πειραματικών τιμών του μαγνητικού πεδίου ως προς το επίπεδο x,y σε διαφορετικά διαγράμματα και τοποθετημένα στην ίδια γραφική παράσταση (Σχήμα 7.2.13).



Σχήμα 7.2.13: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής του μέτρου του μαγνητικού πεδίου (B), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης του μέτρου του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση.

Από το διάγραμμα του σχήματος (7.2.13), είναι εμφανής η σύγκλιση των πειραματικών και θεωρητικών τιμών του μέτρου του μαγνητικού πεδίου, με διαφορές που τείνουν στο μηδέν.

7.3. Αλγόριθμοι για το μαγνητικό πεδίο του νόμου Biot-Savart

Κατόπιν αναπτύσσεται σε αλγόριθμο και μελετάται μια απλοποιημένη μορφή του νόμου Biot-Savart, για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου στον άξονα x και στον άξονα y . Τα αποτελέσματα του μαγνητικού πεδίου, που προκύπτουν θεωρητικά από τον Biot-Savart, συγκρίνονται με τις πειραματικές τιμές.

7.3.1. Οι απλοποιημένες εξισώσεις του νόμου Biot-Savart

Η εξίσωση του νόμου του Biot-Savart (5.4) για το μαγνητικό πεδίο, αναλύεται στις τρεις συνιστώσες ως εξής:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [(3x^2 - r^2) \cdot m_x + 3xy \cdot m_y + 3zx \cdot m_z] \\ B_y(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3xy \cdot m_x + (3y^2 - r^2) \cdot m_y + 3zy \cdot m_z] \\ B_z(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3xz \cdot m_x + 3yz \cdot m_y + (3z^2 - r^2) \cdot m_z] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Θεωρείται, ότι κατά τη μελέτη του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών σε μια διεύθυνση, συνεισφέρει κυρίως η αντίστοιχη συνιστώσα της μαγνήτισής του, ενώ οι υπόλοιπες τείνουν στο μηδέν. Για παράδειγμα κατά τη μελέτη της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x), κύριο ρόλο παίζει η συνιστώσα x της μαγνήτισης (M_x), καθώς οι άλλες δύο συνιστώσες (M_y , M_z), θεωρούνται αμελητέες. Και αφού $m_i = M_i/V$ το ίδιο θα ισχύει και για τη μαγνητική διπολική ροπή.

Έτσι οι συνιστώσες του νόμου Biot-Savart μπορούν να απλοποιηθούν και να πάρουν την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [(3x^2 - r^2) \cdot m_x] \\ B_y(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [(3y^2 - r^2) \cdot m_y] \\ B_z(x, y, z) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [(3z^2 - r^2) \cdot m_z] \end{aligned} \quad (7.6)$$

Επιπλέον η μελέτη σε κάθε συνιστώσα γίνεται θεωρώντας ότι ο μαγνήτης βρέθηκε σε θέσεις του αντίστοιχου άξονα, βάσει του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιήθηκε κατά την πειραματική διαδικασία. Δηλαδή η συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου μελετήθηκε συναρτήσει του άξονα x των θέσεων του μαγνήτη, με τους άλλους δύο άξονες μηδενικούς ($y=0, z=0$). Οπότε σε αυτή την περίπτωση το μέτρο του διανύσματος της θέσης του μαγνήτη είναι $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2} = x$ για τη μελέτη της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου και $r = y$ για τη συνιστώσα y και $r = z$ για τη συνιστώσα z .

Άρα οι συνιστώσες του νόμου Biot-Savart μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω και να πάρουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} B_x(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_x}{x^3} \\ B_y(y) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_y}{y^3} \\ B_z(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_z}{z^3} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Η προηγούμενη απλουστευμένη μορφή των συνιστωσών του νόμου Biot-Savart είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάπτυξη του αλγορίθμου.

Όπως και κατά τη διαδικασία μελέτης του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών με τις προσεγγιστικές εξισώσεις, έτσι και εδώ, αρχικά θα αναπτυχθεί ο αλγόριθμος που υπολογίζει τις συνιστώσες της μαγνητικής διπολικής ροπής των μαγνητών, μέσω της απλοποιημένης μορφής του νόμου Biot-Savart, εφαρμόζοντας σε αυτές τις πειραματικές μετρήσεις.

7.3.2. Αλγόριθμος για τη μαγνητική διπολική ροπή μαγνητών

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό της μαγνητικής διπολικής ροπής, χρησιμοποιεί τις εξισώσεις (7.7) του απλοποιημένου νόμου των Biot-Savart, εφαρμόζοντας σε αυτές τις πειραματικές τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου και των αντίστοιχων θέσεων τους. Ο αλγόριθμος κατασκευάστηκε ώστε να βρεθούν η συνιστώσα x (m_x) και η συνιστώσα y (m_y) της μαγνητικής διπολικής ροπής, για να χρησιμοποιηθούν μετέπειτα στις εξισώσεις των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου. Ο αλγόριθμος υπολογίζει επίσης τις συνιστώσες της μαγνήτισης (M_x, M_y), αφού υπολογίσει τον όγκο για κάθε σχήμα μαγνήτη που χρησιμοποιήθηκε.

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, για τη χρήση του αλγορίθμου, απαιτείται να τοποθετηθεί στον ίδιο φάκελο με αυτόν που βρίσκεται το αρχείο του

αλγόριθμοι, το αρχείο τύπου excel που περιέχει τις μετρήσεις. Ακόμη για να μπορεί το πρόγραμμα να έχει πρόσβαση στις τιμές θα πρέπει σε κάθε στήλη του αρχείου excel να υπάρχει επικεφαλίδα, μέσω της οποίας εισάγονται και καλούνται στον αλγόριθμο.

Ο αλγόριθμος για την εύρεση της μαγνητικής διπολικής ροπής και της μαγνήτισης, από τον απλοποιημένο νόμο των Biot-Savart, συνοψίζεται στο επόμενο σχήμα (7.3.1).

libraries → inputed parameters → import measured data → equations for magnetic field → export calculated data → plot magnetic moment

Σχήμα 7.3.2: Συνοπτική αναπαράσταση του αλγόριθμου που υπολογίζει τη μαγνητική διπολική ροπή και τη μαγνήτιση των μαγνητών.

Αναλυτικότερα ο αλγόριθμος ακολουθεί την επόμενη διαδικασία. Αρχικά ορίζονται οι βιβλιοθήκες, που θα χρησιμοποιηθούν από το πρόγραμμα για τον υπολογισμό των συνιστωσών της μαγνητικής διπολικής ροπής και της μαγνήτισης. Οι βιβλιοθήκες είναι ίδιες με αυτές του προηγούμενου αλγορίθμου που φαίνονται στον κώδικα (7.2.1).

Κατόπιν ορίζονται οι μεταβλητές για τις διαστάσεις των μαγνητών, που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των συνιστωσών της μαγνήτισης και οι οποίες ζητείται να τοποθετηθούν από το χρήστη. Και πάλι οι εντολές είναι ίδιες με αυτές του αλγορίθμου της προηγούμενης ενότητας, που φαίνονται στον κώδικα (7.2.2). Ορίζονται δηλαδή για τον κυλινδρικό μαγνήτη η ακτίνα και το μήκος (*Cylinder: R, L*) και οι τρεις ακμές για τον κυβικό (*Cube: a, b, c*) και για τον ορθογώνιο μαγνήτη, στην οριζόντια (*Rectangular (horizontal): a, b, c*) και στην κατακόρυφη (*Rectangular (vertical): a, b, c*) τοποθέτησή του.

Στη συνέχεια υπάρχουν οι εντολές για την εισαγωγή των πειραματικών τιμών για τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου και τις θέσεις του μαγνήτη. Οι εντολές φαίνονται στον κώδικα (7.2.3), είναι και αυτές ίδιες δηλαδή με εκείνες του προηγούμενου αλγορίθμου.

Ακολουθώς βρίσκεται το τμήμα του αλγορίθμου με την εξίσωση του απλοποιημένου νόμου των Biot-Savart, που υπολογίζει τις συνιστώσες x και y της μαγνητικής διπολικής ροπής του κάθε μαγνήτη. Στον επόμενο κώδικα (7.3.1) φαίνεται αυτό το τμήμα του αλγορίθμου για την περίπτωση του κύβου. Αρχικά ορίζονται οι μεταβλητές (m_{x_cub} , m_{y_cub}), όπου τοποθετούνται οι τιμές που υπολογίζονται από την εξίσωση. Αμέσως μετά υπολογίζονται οι μαγνητικές διπολικές ροπές (m_x , m_y), στα σημεία που βρέθηκε ο μαγνήτης, μέσω των εξισώσεων (7.7) για κάθε συνιστώσα και τα αποτελέσματα τοποθετούνται στις λίστες, που ορίστηκαν προηγουμένως (m_{x_cub} , m_{y_cub}). Τέλος, υπολογίζεται η

μέση τιμή των υπολογιζόμενων μαγνητικών διπολικών ροπών και οι οποίες μετά το τέλος του αλγορίθμου εμφανίζονται στην οθόνη του προγράμματος.

Επιπλέον υπολογίζονται οι συνιστώσες της μαγνήτισης. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το τμήμα του αλγορίθμου που υπολογίζει τις συνιστώσες x και y της μαγνήτισης (M_x, M_y) στην περίπτωση του κύβου. Αφού υπολογιστεί ο όγκος του μαγνήτη, αυτός πολλαπλασιάζεται με τις τιμές των διπολικών ροπών όλων των σημείων και για κάθε μια βρίσκονται οι τιμές της συνιστώσας της μαγνήτισης σε όλες τις θέσεις του μαγνήτη. Από τις υπολογισμένες συνιστώσες όλων των σημείων, εξάγεται κατόπιν η μέση τιμή τους και η οποία εμφανίζεται στην οθόνη του προγράμματος μετά το τέλος της λειτουργίας του.

Κώδικας 7.3.1: Το τμήμα του αλγορίθμου για την εύρεση της μαγνητικής διπολικής ροπής και της μαγνήτισης στον άξονα x και στον άξονα y για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[5]:
2. # Magnetic Moment
3. # for Cube
4. # (x-axis)
5. mx_cub = []
6. for k in range(0,len(Bx_cub_lab)):
7.     try:
8.         mx_cubValue = Bx_cub_lab[k]*(x_cub_lab[k]**3)*5
9.         mx_cub.append(mx_cubValue)
10.    except ZeroDivisionError:
11.        continue
12. av_cub_x = sum(mx_cub)/len(mx_cub)
13. print('mx average - Cube (x-axis)')
14. print(av_cub_x)
15.
16. # (y-axis)
17. my_cub = []
18. for l in range(0,len(By_cub_lab)):
19.     try:
20.         my_cubValue = By_cub_lab[l]*(y_cub_lab[l]**3)*5
21.         my_cub.append(my_cubValue)
22.     except ZeroDivisionError:
23.         continue
24. av_cub_y = sum(my_cub)/len(my_cub)
25. print('my average - Cube (y-axis)')
26. print(av_cub_y)
27.
28.
29. # Permanent Magnetization
30. # Cube volume
31. V_cub = a1*b1*c1*10**-6
32. print('volume - cube')
33. print(V_cub)
34.
35. # (x-axis)
36. Mx_cub = []
37. for m in range(0,len(mx_cub)):
38.     Mx_cubValue = mx_cub[m]*V_cub
39.     Mx_cub.append(Mx_cubValue)
40. avMx_cub = sum(Mx_cub)/len(Mx_cub)
41. print('Mx average - Cube (x-axis)')
```

```

42. print(avMx_cub)
43.
44. # (y-axis)
45. My_cub = []
46. for n in range(0, len(my_cub)):
47.     My_cubValue = my_cub[n]*V_cub
48.     My_cub.append(My_cubValue)
49. avMy_cub = sum(My_cub)/len(My_cub)
50. print('My average - Cube (y-axis)')
51. print(avMy_cub)

```

Τέλος, με τις τιμές των συνιστωσών της μαγνητικής διπολικής ροπής, κατασκευάζεται ένα διάγραμμα ως προς τον αντίστοιχο άξονα που μελετήθηκε. Το τμήμα του αλγορίθμου για την γραφική αναπαράσταση τους είναι ίδιο, με το αντίστοιχο του αλγορίθμου, που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα και φαίνεται στο σχήμα (7.2.7).

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τον κυλινδρικό και ορθογώνιο μαγνήτη στις δύο τοποθετήσεις του (οριζόντια και κατακόρυφη).

Για την εκτέλεση του αλγορίθμου από το χρήστη, απαιτείται αρχικά η τοποθέτηση του αρχείου excel με τις μετρήσεις, στον ίδιο φάκελο με το αρχείο του αλγορίθμου, με τον τρόπο που προαναφέρθηκε. Με την έναρξη του προγράμματος, ζητείται από το χρήστη να τοποθετήσει τις διαστάσεις όλων των μαγνητών (σε cm) και πατώντας το πλήκτρο enter εμφανίζονται στην οθόνη του προγράμματος τα αποτελέσματα της μαγνητικής διπολικής ροπής, της μαγνήτισης και οι γραφικές παραστάσεις.

Ο αλγόριθμος στην πλήρη μορφή φαίνεται στο παράρτημα της εργασίας, στην υποενότητα 2.1 με τίτλο 'Μαγνητική Διπολική Ροπή και Παραμένουσα Μαγνήτιση των Μαγνητών'.

Στον παρακάτω πίνακα (8) φαίνονται για τον κάθε μαγνήτη που μελετήθηκε το σχήμα, οι διαστάσεις και τα αποτελέσματα της μέσης τιμής των συνιστωσών της μαγνητικής διπολικής ροπής και της μαγνήτισης, όπως υπολογίστηκαν από τον παραπάνω αλγόριθμο.

Πίνακας 8: Τ το σχήμα, οι διαστάσεις και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου για τη μέση τιμή των συνιστωσών της μαγνητικής διπολικής ροπής και της μαγνήτισης για κάθε μαγνήτη.

	Διαστάσεις (cm)	Όγκος (m ³)	m _x (A cm ²)	M _x (A cm ²)	m _y (A cm ²)	M _y (A cm ²)
Κυλινδρικός	R = 0.5, L = 4	3.14 · 10 ⁻⁶			-2.06	-6.46 · 10 ⁻⁶

Κυβικός	$a = 0.5,$ $b = 0.5,$ $c = 0.5$	$1.25 \cdot 10^{-7}$	-0.0076	$-9.53 \cdot 10^{-10}$	-0.103	$-1.3 \cdot 10^{-8}$
Ορθογώνιος (οριζόντια τοποθέτηση)	$a = 4,$ $b = 1,$ $c = 0.8$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	0.24	$7.71 \cdot 10^{-7}$	2.6	$8.35 \cdot 10^{-6}$
Ορθογώνιος (κατακόρυφη τοποθέτηση)	$a = 0.8,$ $b = 1,$ $c = 4$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	0.33	$1.06 \cdot 10^{-6}$	2.73	$8.74 \cdot 10^{-6}$

7.3.3. Αλγόριθμος του απλοποιημένου Biot-Savart για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών

Με τη μαγνητική διπολική ροπή γνωστή στις δύο συνιστώσες για κάθε μαγνήτη, μπορούν να μελετηθούν οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου του μαγνήτη ως προς τις θέσεις του. Αναπτύσσεται λοιπόν ένας αλγόριθμος που χρησιμοποιεί τις απλοποιημένες εξισώσεις του νόμου Biot-Savart και τις συγκρίνει με τις πειραματικές τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου.

Ο αλγόριθμος για την εύρεση των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών, από τον απλοποιημένο νόμο των Biot-Savart, συνοψίζεται στο επόμενο σχήμα (7.3.2).

libraries → equations for magnetic field (Biot-Savart) → inputed parameters → solve equations → export calculated data → import measured data → print magnetic field (calculated & lab data) → plot magnetic field (calculated & lab data)

Σχήμα 7.3.2: Συνοπτική αναπαράσταση του αλγόριθμου που υπολογίζει τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών μέσω του απλοποιημένου νόμου των Biot-Savart.

Τα πακέτα, που ορίζονται αρχικά και θα χρησιμοποιηθούν από τον αλγόριθμο, για την εισαγωγή των πειραματικών τιμών και τις γραφικές αναπαραστάσεις, φαίνονται στον επόμενο κώδικα (7.3.2).

Κώδικας 7.3.2: Το τμήμα του αλγόριθμου με τους ορισμούς των βιβλιοθηκών για τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart.

```
1. # In[1]:
2. # Libraries
3. import pandas as pd
4. import matplotlib.pyplot as plt
```

Ακολουθεί το τμήμα του αλγόριθμου, όπου ορίζονται ως συναρτήσεις οι εξισώσεις των απλοποιημένων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου από το νόμο Biot-Savart και οι οποίες μπορούν να καλούνται σε οποιοδήποτε σημείο του αλγορίθμου, τοποθετώντας τις μεταβλητές που ζητείται να υπολογιστούν κάθε φορά, όπως φαίνεται στο επόμενο κώδικα (7.3.3).

Κώδικας 7.3.3: Το τμήμα του αλγορίθμου με τις εξισώσεις του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για τη συνιστώσα x και τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου.

```
1. # In[2]:
2. # Biot-Savart Equations (cm)
3. def Bx_eq(x,mx):
4.     return (2*10**-1)*mx/(x**3)
5.
6. def By_eq(y,my):
7.     return (2*10**-1)*my/(y**3)
```

Στη συνέχεια στον αλγόριθμο ορίζονται οι μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν τις συνιστώσες της μαγνητικής διπολικής ροπής και οι οποίες ζητείται να τοποθετηθούν από το χρήστη κατά τη διαδικασία εκτέλεσης του προγράμματος. Στον παρακάτω κώδικα (7.3.4) φαίνονται οι εντολές για την εισαγωγή των παραμέτρων m_x και m_y , για την περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

Κώδικας 7.3.4: Το τμήμα του αλγορίθμου για την εισαγωγή της συνιστώσας x και της συνιστώσας y της μαγνητικής διπολικής ροπής στην περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # for Cube
2. mx_cub = float(input("Cube: mx= "))
3. my_cub = float(input("Cube: my= "))
```

Αμέσως μετά υπάρχει το τμήμα του αλγορίθμου που αξιοποιεί τις εισαγόμενες μεταβλητές και λύνει τις εξισώσεις στον κώδικα (7.3.3) στον ίδιο χώρο με αυτό των πειραματικών μετρήσεων. Στον παρακάτω κώδικα (7.3.5) φαίνεται το τμήμα του αλγορίθμου, που επιλύει τις εξισώσεις για τον κυβικό μαγνήτη.

Κώδικας 7.3.5: Το τμήμα του αλγορίθμου για την επίλυση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart στην περίπτωση του κυβικού μαγνήτη.

```
1. # In[4]:
2. # Solve Biot-Savart theoretically
3. # for Cube
4. X_cub_th=[]
```

```

5. Y_cub_th=[]
6. Bx_cub_th=[]
7. By_cub_th=[]
8. for x_cub in range(4,13,2):
9.     try:
10.         res_x_cub = Bx_eq(x_cub,mx_cub)
11.         Bx_cub_th.append(res_x_cub)
12.     except ZeroDivisionError:
13.         continue
14.     x_cub_value = x_cub
15.     X_cub_th.append(x_cub_value)
16.
17. for y_cub in range(3,22,3):
18.     try:
19.         res_y_cub = By_eq(y_cub,my_cub)
20.         By_cub_th.append(res_y_cub)
21.     except ZeroDivisionError:
22.         continue
23.     y_cub_value = y_cub
24.     Y_cub_th.append(y_cub_value)

```

Τα αποτελέσματα των προηγούμενων υπολογισμών με κατάλληλες εντολές, όμοιες με αυτές του κώδικα (7.2.13) του αλγορίθμου της προηγούμενης ενότητας, εμφανίζονται στην οθόνη του προγράμματος μετά το τέλος της λειτουργίας του.

Κατόπιν ακολουθεί το τμήμα του αλγορίθμου όπου γίνεται η εισαγωγή των πειραματικών τιμών. Οι εντολές είναι ίδιες με αυτές του κώδικα (7.2.12) του προηγούμενου αλγόριθμου.

Τέλος υπάρχουν οι εντολές που θα δώσουν τις γραφικές παραστάσεις των θεωρητικών υπολογισμών και των πειραματικών μετρήσεων των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου ως προς τη θέση στον αντίστοιχο άξονα. Οι εντολές είναι όμοιες με του αλγορίθμου της προηγούμενης ενότητας, που φαίνονται στον κώδικα (7.2.14).

Για την εκτέλεση του αλγορίθμου από το χρήστη, απαιτείται η τοποθέτηση του αρχείου excel με τις μετρήσεις, στον ίδιο φάκελο με το αρχείο του αλγορίθμου, με τον τρόπο που προαναφέρθηκε. Με την έναρξη του προγράμματος, ζητείται από το χρήστη να τοποθετήσει τις συνιστώσες της μαγνητικής διπολικής ροπής όλων των μαγνητών και πατώντας το πλήκτρο enter εμφανίζονται στην οθόνη του προγράμματος τα αποτελέσματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου για κάθε μαγνήτη και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Ο αλγόριθμος στην πλήρη μορφή του βρίσκεται στο παράρτημα της εργασίας, στην υποενότητα 2.2 με τίτλο 'Οι Απλοποιημένες Εξισώσεις του Νόμου Biot-Savart'.

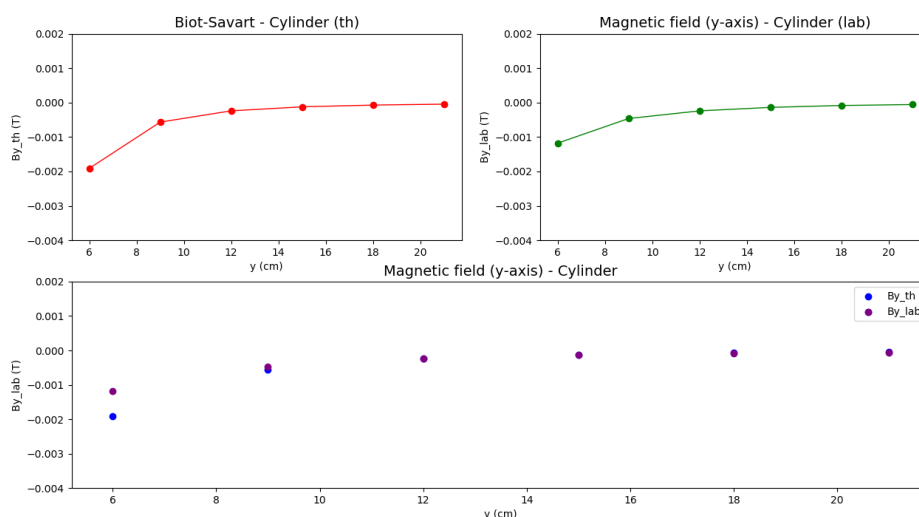
7.3.4. Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου του απλοποιημένου Biot-Savart για το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών

Στον παραπάνω αλγόριθμο, των συνιστωσών του απλοποιημένου Biot-Savart, εισήχθησαν οι πειραματικές τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου, για κάθε σχήματος μαγνήτη.

7.3.4.1. Κυλινδρικός Μαγνήτης

Ο κυλινδρικός μαγνήτης, με διαστάσεις $R = 0.5\text{cm}$ και $L = 4\text{cm}$, υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο της υποενότητας 2.3.2, ότι έχει μαγνητική διπολική ροπή στον άξονα y -2.06 A cm^2 . Εισάγοντας αυτήν την τιμή στον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart, προέκυψαν τα αποτελέσματα των εξισώσεων, για το ίδιο εύρος στον y -άξονα με αυτό των πειραματικών δεδομένων, τα οποία φαίνονται στην οθόνη του προγράμματος μετά το τέλος λειτουργίας του. Επίσης προκύπτουν και οι γραφικές παραστάσεις όπου τοποθετούνται τα διαγράμματα των θεωρητικών και πειραματικών τιμών ως προς τον άξονα y .

Στο επόμενο σχήμα (7.3.3) φαίνονται τα διαγράμματα που εξήχθησαν. Πάνω αριστερά βρίσκεται η y -συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου όπως υπολογίστηκε από τον απλοποιημένο Biot-Savart και δεξιά η συνιστώσα y όπως μετρήθηκε στα ίδια σημεία. Κάτω βρίσκονται και οι δύο παραπάνω γραφικές παραστάσεις στο ίδιο διάγραμμα, ώστε να πραγματοποιηθεί η σύγκριση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών τιμών.

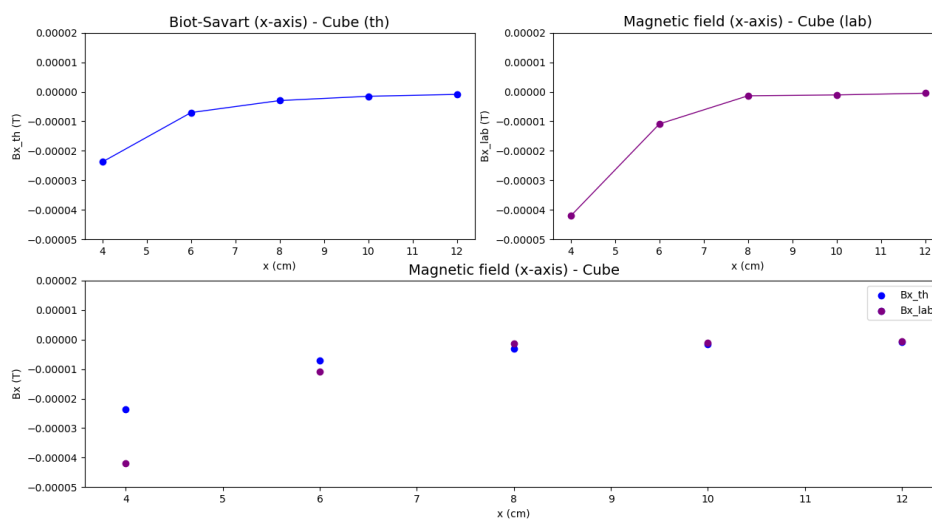


Σχήμα 7.3.3: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του κυλίνδρου.

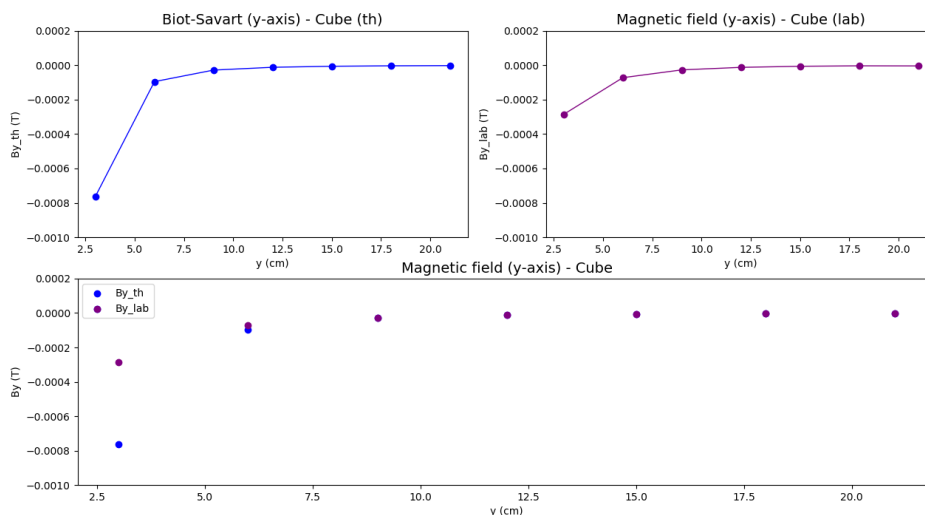
Από τα διαγράμματα του σχήματος (7.3.3) φαίνεται ότι οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου ταυτίζονται από την απόσταση των 9cm και μετά. Η μεγαλύτερη διάσταση του κυλινδρικού μαγνήτη είναι τα 4cm, οπότε η σύγκλιση των B_y συμβαίνει σε αποστάσεις διπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση. Σε μικρότερες αποστάσεις υπήρξε απόκλιση των τιμών, που δε ξεπερνούσε μια τάξη μεγέθους στη συνιστώσα B_y .

7.3.4.2. Κυβικός Μαγνήτης

Στην περίπτωση του κυβικού μαγνήτη διαστάσεων $a_{\text{cube}} = b_{\text{cube}} = c_{\text{cube}} = 0.5\text{cm}$, υπολογίστηκαν η συνιστώσα x και η συνιστώσα y της μαγνητικής διπολικής ροπής ίσες με -0.0076 (A cm^2) και -0.103 (A cm^2) αντίστοιχα. Με αυτές τις τιμές ο αλγόριθμος υπολόγισε τις δύο συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου μέσω του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart και κατασκεύασε τις γραφικές παραστάσεις των θεωρητικών και πειραματικών τιμών των συνιστωσών B_x και B_y ως προς τον αντίστοιχο άξονα, όπως φαίνεται στα επόμενα σχήματα (7.3.4) και (7.3.5) αντίστοιχα.



Σχήμα 7.3.4: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του κύβου.



Σχήμα 7.3.5: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του κύβου.

Όσον αφορά τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου, οι θεωρητικές τιμές της ταυτίζονται με τις πειραματικές σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 8cm, ενώ σε μικρότερες αποστάσεις παρατηρείται μια σύγκλιση των τιμών αφού δε ξεπερνούν τη μια τάξη μεγέθους στη διαφορά μεταξύ θεωρητικών και μετρούμενων B_x .

Για τη συνιστώσα y , φαίνεται ότι η ταύτιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών της ξεκινά σε μικρότερες από τη συνιστώσα x αποστάσεις, περίπου μετά τα 6cm. Στις πιο κοντινές αποστάσεις υπάρχει μια καλή σύγκλιση, με διαφορές μικρότερες από μια τάξη μεγέθους και πάλι.

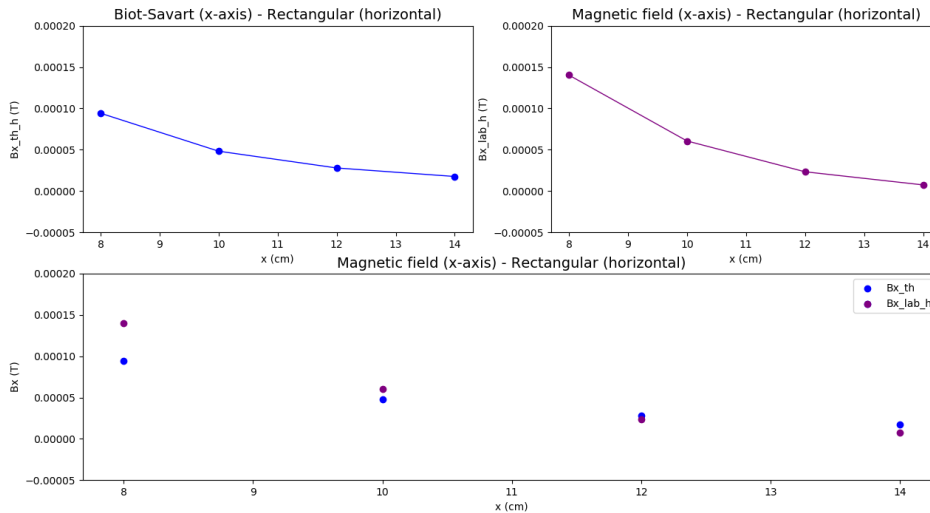
Η μεγαλύτερη διάσταση του κύβου είναι όπως και αν τοποθετηθεί η ίδια ίση με 0.5cm, άρα η ταύτιση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών τιμών της συνιστώσας x συμβαίνει σε αποστάσεις δεκαεξαπλάσιες, ενώ της συνιστώσας y σε αποστάσεις δωδεκαπλάσιες της διάστασής του.

7.3.4.3. Ορθογώνιος Μαγνήτης

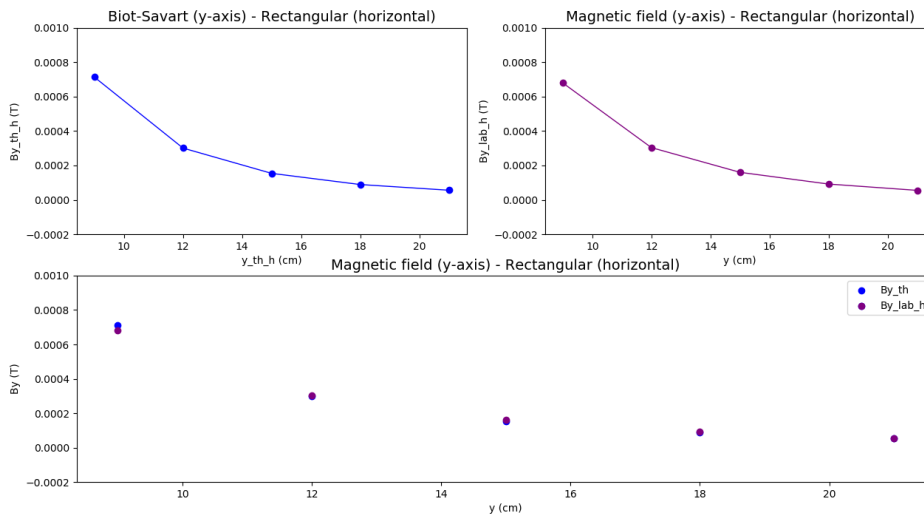
Ο ορθογώνιος μαγνήτης μελετήθηκε οριζόντια και κατακόρυφα. Έτσι, ο θεωρητικός υπολογισμός των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου μέσω του απλοποιημένου Biot-Savart παρότι υπήρξε κοινός, συγκρίθηκε χωριστά για κάθε τοποθέτηση.

▪ Οριζόντια τοποθέτηση ορθογώνιου μαγνήτη

Κατά την οριζόντια τοποθέτηση του ορθογώνιου μαγνήτη οι διαστάσεις του είναι οι $a_{\text{rectangular, horizontal}} = 4\text{ cm}$, $b_{\text{rectangular, horizontal}} = 1\text{ cm}$, $c_{\text{rectangular, horizontal}} = 0.8\text{ cm}$. Οι συνιστώσες της μαγνητικής διπολικής ροπής, όπως υπολογίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, προέκυψαν για τη συνιστώσα x ίση με $0.241\text{ (A cm}^2\text{)}$ και για τη συνιστώσα y ίση με $2.6\text{ (A cm}^2\text{)}$. Για αυτές τις τιμές ο αλγόριθμος υπολόγισε τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου μέσω του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart και με αυτές κατασκεύασε τη γραφική τους παράσταση ως προς τον αντίστοιχο άξονα. Στα παρακάτω σχήματα (7.3.6) και (7.3.7) αποτυπώνονται οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές για τις συνιστώσες x και y του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα.



Σχήμα 7.3.6: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.



Σχήμα 7.3.7: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.

Παρατηρώντας τα διαγράμματα του σχήματος (7.3.6) για τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου, προκύπτει ότι υπάρχει καλή σύγκλιση των τιμών σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 12cm , ενώ σε μικρότερες αποστάσεις υπάρχει απόκλιση. Συγκεκριμένα, σε πολύ κοντινές αποστάσεις, η απόκλιση αυτή αγγίζει τις δύο τάξεις μεγέθους μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών τιμών.

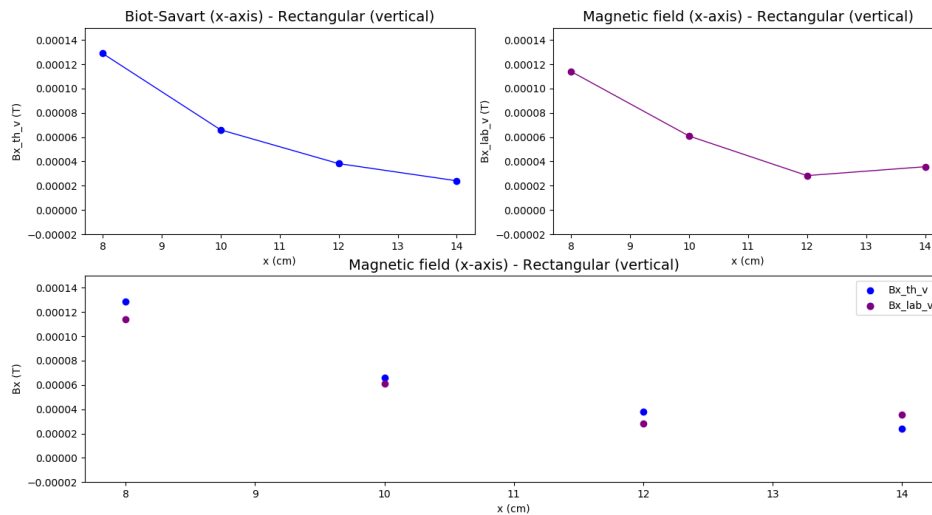
Όσον αφορά τις γραφικές αναπαραστάσεις της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου, υπάρχει μια καλή σύγκλιση των θεωρητικών και πειραματικών τιμών στις κοντινές αποστάσεις, με διαφορές μικρότερες από μια τάξη μεγέθους. Σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 12cm , παρατηρείται πλήρης ταύτιση των θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές του B_y .

Θεωρώντας ότι η μεγαλύτερη διάσταση του ορθογώνιου μαγνήτη είναι αυτή των 4cm , προκύπτει και για τις δύο συνιστώσες ότι σε αποστάσεις τριπλάσιες της μεγαλύτερης διάστασης του μαγνήτη, οι θεωρητικοί υπολογισμοί του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart συμπίπτουν ικανοποιητικά με τα πειραματικά δεδομένα.

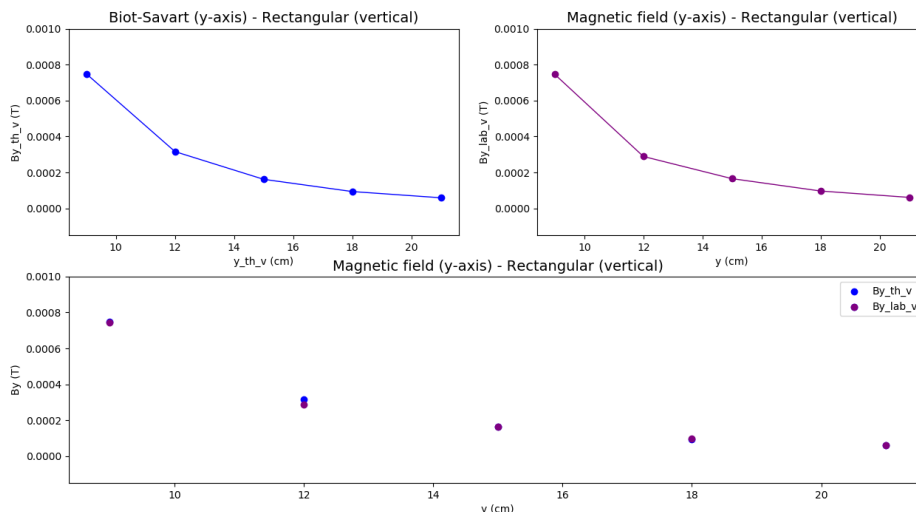
▪ Κατακόρυφη τοποθέτηση ορθογώνιου μαγνήτη

Για την κατακόρυφη τοποθέτηση του ορθογώνιου μαγνήτη, που αντιστοιχεί σε διαστάσεις $a_{\text{rectangular,vertical}} = 0.8\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,vertical}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,vertical}} = 4\text{cm}$, υπολογίστηκε η μαγνητική διπολική ροπή στη συνιστώσα

x και στη συνιστώσα y ίσες με $0.33 \text{ (A cm}^2\text{)}$ και $2.73 \text{ (A cm}^2\text{)}$ αντίστοιχα. Εισάγοντας αυτές τις τιμές στον αλγόριθμο, υπολογίστηκαν για αυτή την περίπτωση τοποθέτησης οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου (B_x και B_y) μέσω του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart. Μετά το τέλος λειτουργίας του προγράμματος προέκυψαν τα επόμενα σχήματα (7.3.8) και (7.3.9), που αναπαριστούν τους παραπάνω υπολογισμούς και τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές των συνιστωσών ως προς του αντίστοιχους άξονες.



Σχήμα 7.3.8: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου (B_x), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση.



Σχήμα 7.3.9: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου (B_y), που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση.

Από τα διαγράμματα του σχήματος (7.3.8) της συνιστώσας x του μαγνητικού πεδίου παρατηρείται μια σύγκλιση των θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές, με διαφορές μικρότερες της μιας τάξης μεγέθους για αποστάσεις μεγαλύτερες των 10cm, ενώ στις κοντινές αποστάσεις προκύπτει μια απόκλιση έως και δύο τάξεις μεγέθους.

Για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου, του σχήματος (7.3.9), παρουσιάζεται ταύτιση των τιμών σε όλα τα σημεία, εκτός αυτού των 10cm, όπου παρουσιάζεται μια αμελητέα απόκλιση.

Θεωρώντας και πάλι ως μεγαλύτερη διάσταση του μαγνήτη αυτή των 4cm, για τη συνιστώσα x υπάρχει μια σύγκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών σε αποστάσεις 2.5 φορές μεγαλύτερες, ενώ για τη συνιστώσα y παρατηρείται σύγκλιση από απόσταση διπλάσια ως προς τη μεγαλύτερη διάσταση του μαγνήτη.

7.4. Αλγόριθμος για την επίλυση του νόμου Biot-Savart

Τέλος αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος, ο οποίος επιλύει την απλοποιημένη μορφή του νόμου Biot-Savart και εντοπίζει τα σημεία στα οποία εκτιμάται βάσει του νόμου ότι βρίσκεται ο μαγνήτης.

7.4.1. Ο αλγόριθμος του απλοποιημένου Biot-Savart για τη θέση των μαγνητών

Για την κατασκευή ενός αλγορίθμου, με σκοπό την εύρεση της θέσης του μαγνήτη στους άξονες x και y , χρησιμοποιούνται οι απλοποιημένες εξισώσεις των συνιστωσών του νόμου Biot-Savart, που φαίνονται στη σχέση (7.7). Σε αυτές τις εξισώσεις εισέρχονται οι τιμές της διπολικής ροπής του μαγνήτη, που υπολογίστηκαν στην υποενότητα 2.3.2 και οι πειραματικές τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου.

Ο αλγόριθμος για την εύρεση των θέσεων των μαγνητών, από τον απλοποιημένο νόμο των Biot-Savart, συνοψίζεται στο επόμενο σχήμα (7.4.1).

```
libraries → equations for magnetic field (Biot-Savart) → inputed parameters →  
import measured data → solve equations → export calculated data → print magnet  
location (calculated & lab data) → plot magnet location (calculated & lab data)
```

Σχήμα 7.4.1: Συνοπτική αναπαράσταση του αλγορίθμου που υπολογίζει τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών μέσω του απλοποιημένου νόμου των Biot-Savart.

Πιο συγκεκριμένα αρχικά ορίζονται οι βιβλιοθήκες, που θα χρησιμοποιήσει ο αλγόριθμος για την εισαγωγή των πειραματικών τιμών, την επίλυση και τη γραφική αναπαράσταση των θέσεων του μαγνήτη και οι οποίες φαίνονται στον επόμενο κώδικα (7.4.1).

Κώδικας 7.4.1: Το τμήμα του αλγορίθμου με τους ορισμούς των βιβλιοθηκών για τον αλγόριθμο επίλυσης του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart.

```
1. import pandas as pd
2. import matplotlib.pyplot as plt
3. import sympy as sp
4. from sympy import solve
```

Κατόπιν ορίζονται οι συναρτήσεις των συνιστωσών x και y του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart, όμοια με αυτές του κώδικα (7.3.3) της προηγούμενης ενότητας.

Κατά όμοιο τρόπο ακολουθούν οι ορισμοί των μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν τις συνιστώσες της μαγνητικής διπολικής ροπής για κάθε μαγνήτη (Κώδικας (7.3.4)) και οι εντολές για την εισαγωγή των πειραματικών τιμών (Κώδικα (7.2.12)).

Μετέπειτα υπάρχουν οι εντολές για την επίλυση των εξισώσεων των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου του νόμου Biot-Savart. Στο επόμενο κώδικα (7.4.2) φαίνεται η περίπτωση του κυβικού μαγνήτη. Συγκεκριμένα αρχικά ορίζονται τα σύμβολα x, y που θα είναι τα άγνωστα σύμβολα της εξίσωσής μας (x_cub, y_cub) και οι λίστες που θα φέρουν τα αποτελέσματα των υπολογισμών για κάθε άξονα ($RESX_cub, RESY_cub$). Στη συνέχεια επιλύεται η εξίσωση του απλοποιημένου Biot-Savart, για κάθε συνιστώσα, μέσω της εντολής 'solve', που ανήκει στη βιβλιοθήκη sympy. Τέλος υπάρχουν οι εντολές ώστε οι τιμές που υπολογίστηκαν για τη θέση των μαγνητών και οι αντίστοιχες πειραματικές τιμές να παρουσιάζονται στην οθόνη του προγράμματος, μετά το τέλος της λειτουργίας του.

Κώδικας 7.4.2: Το τμήμα του αλγορίθμου για την επίλυση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του κύβου.

```
1. # In[5]:
2. # Solve Biot-Savart
3. # for Cube
4. x_cub = sp.Symbol('x_cub', real=True)
5. y_cub = sp.Symbol('y_cub', real=True)
6. X_cub_th=[]
7. Y_cub_th=[]
8. RESX_cub = []
9. RESY_cub = []
10. for j in range(0,len(Bx_cub_lab)):
```

```

11. f2 = Bx_cub_lab[j] - Bx_eq(x_cub,mx_cub)
12. resx_cub = solve(f2, x_cub)
13. resx_cub_d = resx_cub[0]
14. RESX_cub.append(resx_cub_d)
15. x_cub_value = x_cub
16. X_cub_th.append(x_cub_value)
17. print('Biot-Savart for Cube: x (cm)')
18. print(RESX_cub)
19. print('Data for Cube: x (cm)')
20. print(x_cub_lab)
21.
22. for k in range(0,len(By_cub_lab)):
23.     f3 = By_cub_lab[k] - By_eq(y_cub,my_cub)
24.     resy_cub = solve(f3, y_cub)
25.     resy_cub_d = resy_cub[0]
26.     RESY_cub.append(resy_cub_d)
27.     y_cub_value = y_cub
28.     Y_cub_th.append(y_cub_value)
29. print('Biot-Savart for Cube: y (cm)')
30. print(RESY_cub)
31. print('Data for Cube: y (cm)')
32. print(y_cub_lab)

```

Τα αποτελέσματα των παραπάνω υπολογισμών εξάγονται σε αρχεία excel, τα οποία εμφανίζονται μετά το τέλος του προγράμματος στο φάκελο, όπου υπάρχει και το αρχείο του αλγορίθμου. Οι εντολές είναι όμοιες με αυτές του κώδικα (7.2.11) της παραπάνω ενότητας. Συγκεκριμένα εξάγονται διαφορετικά αρχεία, για κάθε μαγνήτη και κάθε άξονα που μελετήθηκε, όπου περιέχονται οι πειραματικές τιμές της θέσης, οι τιμές που υπολογίστηκαν από τον απλοποιημένο Biot-Savart για τις θέσεις των μαγνητών και η αντίστοιχη πειραματική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου.

Τέλος, υπάρχει το τμήμα του αλγορίθμου με τις κατάλληλες εντολές για τη γραφική αναπαράσταση των θεωρητικών και πειραματικών τιμών του κάθε μαγνήτη. Οι εντολές είναι όμοιες με αυτές του κώδικα (7.2.14). Αναλυτικότερα μετά το τέλος της λειτουργίας του προγράμματος προκύπτουν σε ξεχωριστές εικόνες για κάθε μαγνήτη και κάθε συνιστώσα οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές της θέσης του μαγνήτη ως προς την αντίστοιχη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου.

Για την εκτέλεση του αλγορίθμου από το χρήστη, απαιτείται η τοποθέτηση του αρχείου excel με τις μετρήσεις, στον ίδιο φάκελο με το αρχείο του αλγορίθμου, με τον τρόπο που προαναφέρθηκε. Με την έναρξη του προγράμματος, ζητείται από το χρήστη να τοποθετήσει τις συνιστώσες της μαγνητικής διπολικής ροπής όλων των μαγνητών και πατώντας το πλήκτρο enter εμφανίζονται στην οθόνη του προγράμματος τα αποτελέσματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης για κάθε μαγνήτη και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

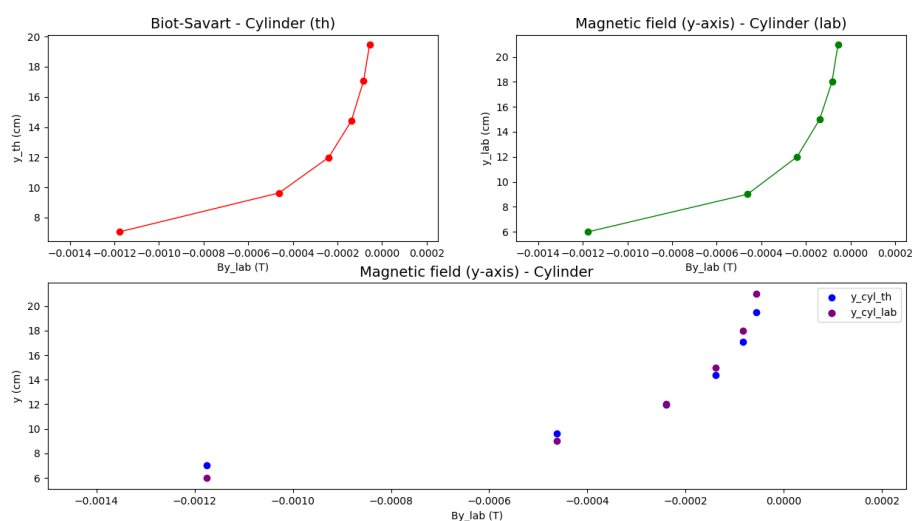
Ο αλγόριθμος στην πλήρη μορφή του βρίσκεται στο παράρτημα της εργασίας, στην υποενότητα 2.2 με τίτλο 'Επίλυση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart'.

7.4.2. Τα αποτελέσματα του αλγόριθμου του απλοποιημένου Biot-Savart για τη θέση των μαγνητών

Στον παραπάνω αλγόριθμο εισήχθησαν οι πειραματικές τιμές των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου, για κάθε σχήματος μαγνήτη.

7.4.2.1. Κυλινδρικός Μαγνήτης

Στην περίπτωση του κυλινδρικού μαγνήτη, διαστάσεων $R = 0.5\text{cm}$ και $L = 4\text{cm}$, για μαγνητική διπολική ροπή στο άξονα y ίση με -2.06 (A cm^2), ο αλγόριθμος υπολόγισε τα σημεία στον άξονα y , όπου βάσει του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart αντιστοιχούν στις μετρούμενες συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου. Στο επόμενο σχήμα (7.4.2), φαίνεται η γραφική αναπαράσταση των θεωρητικών και πειραματικών σημείων ως προς τη μετρούμενη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Πάνω αριστερά αποτυπώνεται ο θεωρητικός υπολογισμός των σημείων του άξονα y προς τη συνιστώσα B_y και δεξιά τα πραγματικά σημεία στα οποία μετρήθηκε η τιμή B_y . Κάτω βρίσκονται οι εκτιμώμενες από την εξίσωση (7.7) θέσεις του μαγνήτη μαζί με τις πειραματικές θέσεις προς τη μετρούμενη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου.



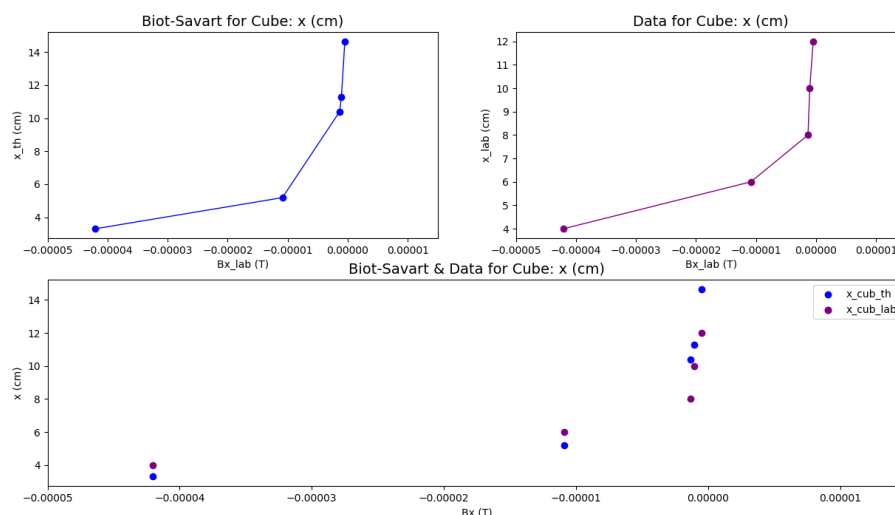
Σχήμα 7.4.2: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης στον άξονα y , που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του κυλίνδρου.

Από τα διαγράμματα του σχήματος (7.4.2) παρατηρείται ότι οι θεωρητικά εκτιμώμενες θέσεις του μαγνήτη συγκλίνουν με τις πραγματικές και μάλιστα σε αποστάσεις μεταξύ 9-12cm υπάρχει σχεδόν ταύτιση των τιμών. Στα περισσότερα σημεία η θεωρητική τιμή της θέσης βρέθηκε μικρότερη από τα πειραματικά, εκτός της απόστασης των 9cm όπου είναι λίγο μεγαλύτερη.

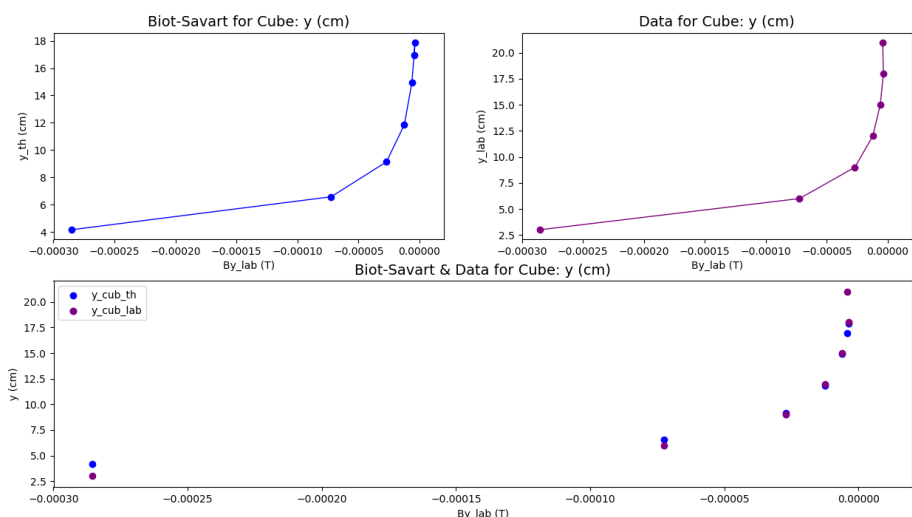
Συνεπώς ο απλοποιημένος νόμος Biot-Savart δίνει καλά αποτελέσματα σε αποστάσεις 9 έως 12cm, δηλαδή σε διπλάσιες με τριπλάσιες αποστάσεις από τη μεγαλύτερη διάσταση του κυλινδρικού μαγνήτη που ήταν τα 4cm.

7.4.2.2. Κυβικός Μαγνήτης

Ο κυβικός μαγνήτης είχε διαστάσεις $a_{\text{cube}} = b_{\text{cube}} = c_{\text{cube}} = 0.5\text{cm}$, και συνιστώσες μαγνητικής διπολικής ροπής $-0.0076 \text{ (A cm}^2\text{)}$ για το άξονα x και $-0.103 \text{ (A cm}^2\text{)}$ για τον άξονα y. Ο αλγόριθμος υπολόγισε τις θέσεις από τον απλοποιημένο νόμο Biot-Savart για τις δύο συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου (Bx και By) όπως μετρήθηκαν κατά την πειραματική διαδικασία. Στα παρακάτω σχήματα (7.4.3) και (7.4.4) φαίνονται οι θεωρητικές εκτιμήσεις της θέσης και οι πραγματικές θέσεις του μαγνήτη ως προς τις αντίστοιχες μετρούμενες συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, για τον άξονα x και τον άξονα y αντίστοιχα.



Σχήμα 7.4.3: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης στον άξονα x, που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του κύβου.



Σχήμα 7.4.4: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης στον άξονα y , που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του κύβου.

Όσον αφορά τη μελέτη στον άξονα x μέσω του σχήματος (7.4.3), για τις ίδιες τιμές της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, B_x , προέκυψε μια απόκλιση μεταξύ των θεωρητικών υπολογισμών και των πραγματικών θέσεων στις οποίες μετρήθηκε αυτή η τιμή της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου και η απόκλιση αυτή αυξάνει όσο ο μαγνήτης απομακρύνεται.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του σχήματος (7.4.4) για τον άξονα y , φαίνεται ότι οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές της θέσης του μαγνήτη συγκλίνουν σε αποστάσεις μεταξύ των 6 έως 18cm. Σε πιο κοντινές αποστάσεις υπάρχει μια απόκλιση 1cm, ενώ σε μεγαλύτερες των 18cm αποστάσεις η απόκλιση φτάνει έως και τα 4cm.

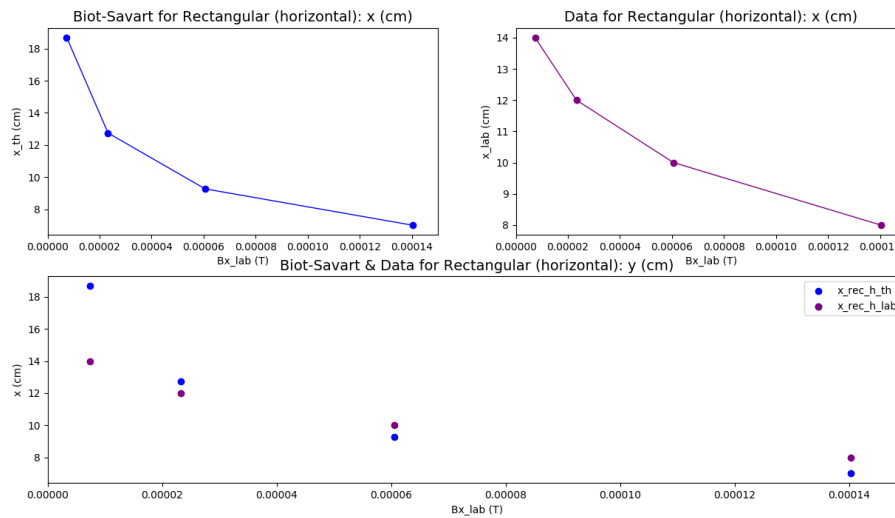
Η μεγαλύτερη διάσταση που έχει ο κυβικός μαγνήτης είναι αυτή των 0.5cm, έτσι για τη θέση του μαγνήτη στον άξονα y , οι εκτιμώμενες θέσεις προσέγγιζαν τις πειραματικές σε μεγάλη κλίμακα αποστάσεων, από δωδεκαπλάσιες της μεγαλύτερης διάστασης του μαγνήτη έως και εκεί όπου έφτανε η εμβέλεια του μαγνητικού του πεδίου.

7.4.2.3. Ορθογώνιος Μαγνήτης

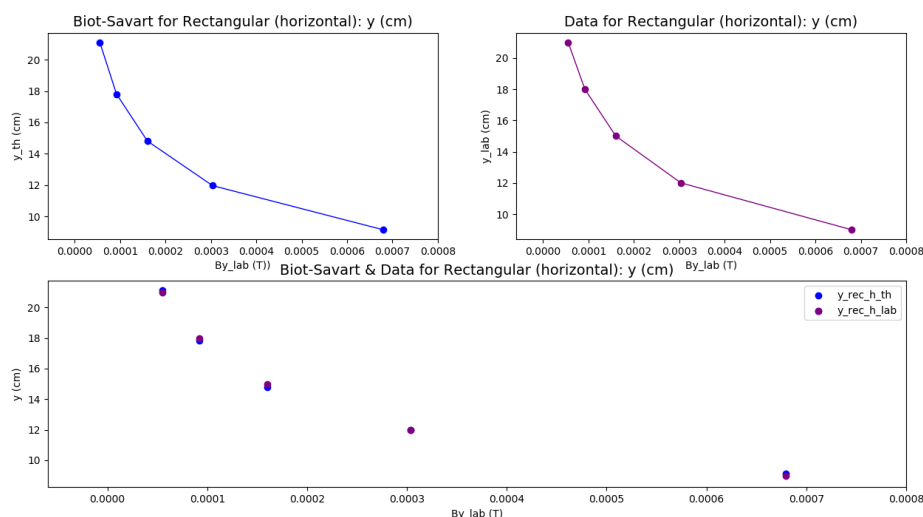
Για τις δύο διαφορετικές τοποθετήσεις του ορθογώνιου μαγνήτη, οριζόντια και κατακόρυφη, η θεωρητική προσέγγιση της θέσης έγινε βάσει των αντίστοιχων μετρούμενων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε κάθε περίπτωση χωριστά.

▪ Οριζόντια τοποθέτηση ορθογώνιου μαγνήτη

Για την οριζόντια τοποθέτηση του μαγνήτη που αντιστοιχεί σε διαστάσεις $a_{\text{rectangular,horizontal}} = 4\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,horizontal}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,horizontal}} = 0.8\text{cm}$, οι συνιστώσες της μαγνητικής διπολικής ροπής υπολογίστηκαν για τη συνιστώσα x ότι είναι ίση με $0.241 \text{ (A cm}^2\text{)}$ και για τη συνιστώσα y προέκυψε ίση με $2.6 \text{ (A cm}^2\text{)}$. Για αυτές τις τιμές διπολικής ροπής, ο αλγόριθμος υπολόγισε τις θέσεις που προκύπτουν σε κάθε άξονα, βάσει των αντίστοιχων μετρούμενων συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου, μέσω της απλοποιημένης εξίσωσης του νόμου Biot-Savart. Μετά το τέλος λειτουργίας του προγράμματος προέκυψαν τα σχήματα (7.4.5) και (7.4.6), όπου αποτυπώνονται οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές της θέσης ως προς την αντίστοιχη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, όπως μετρήθηκε από την πειραματική διαδικασία για τους άξονες x και y αντίστοιχα.



Σχήμα 7.4.5: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης στον άξονα x , που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.



Σχήμα 7.4.6: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης στον άξονα y , που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση.

Παρατηρώντας το σχήμα (7.4.5) για την περίπτωση του άξονα x , φαίνεται ότι οι θεωρητικές τιμές της θέσης προσεγγίζουν τις πειραματικές σε αποστάσεις μεταξύ των 10-12 cm. Σε κοντινότερες αποστάσεις υπάρχει απόκλιση 1cm και σε μεγαλύτερες η διαφορά μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής τιμής είναι μεγαλύτερη από 4cm.

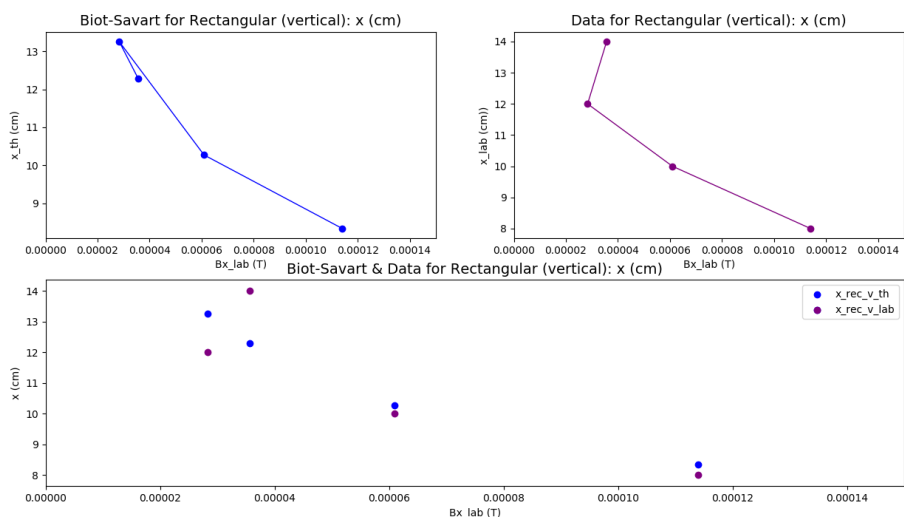
Για τη μελέτη στον άξονα y , όπως αποτυπώνεται στο σχήμα (7.4.6), προκύπτει ότι σε όλες τις μετρούμενες αποστάσεις, μεταξύ 9 και 21 cm, υπάρχει καλή σύγκλιση των θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές.

Η μεγαλύτερη διάσταση του μαγνήτη είναι αυτή των 4cm, οπότε όσον αφορά τις θέσεις στον άξονα x , η θεωρητική τους προσέγγιση μέσω του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart συγκλίνει με τις πραγματικές μετρήσεις σε αποστάσεις 2.5 φορές έως 3 φορές μεγαλύτερες από τη μεγαλύτερη διάστασή του. Για τις θέσεις στον άξονα y σε αποστάσεις περίπου διπλάσιες έως και πενταπλάσιες, ο απλοποιημένος Biot-Savart δίνει καλά αποτελέσματα.

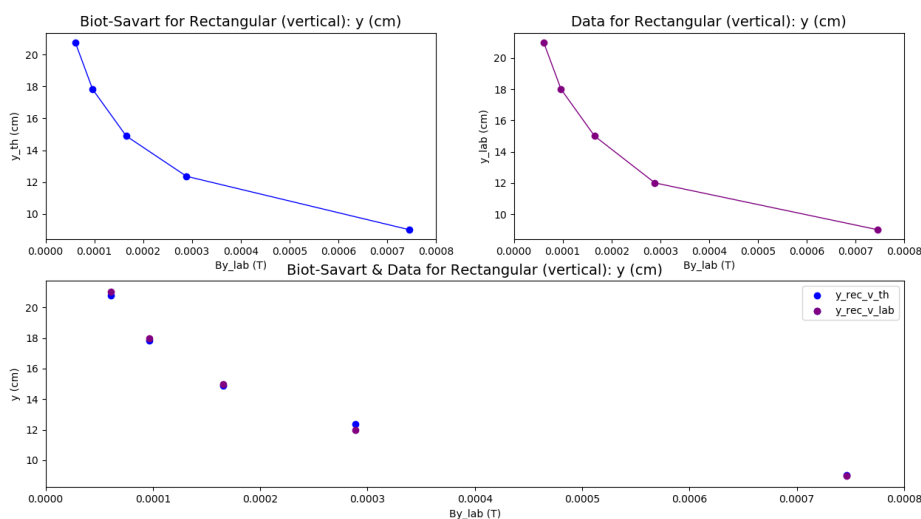
▪ Κατακόρυφη τοποθέτηση ορθογώνιου μαγνήτη

Στην περίπτωση της κατακόρυφης τοποθέτησης του μαγνήτη, που αντιστοιχεί σε διαστάσεις $a_{\text{rectangular,vertical}} = 0.8\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,vertical}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,vertical}} = 4\text{cm}$, η μαγνητική διπολική ροπή στη συνιστώσα x είναι ίση με $0.33 \text{ (A cm}^2\text{)}$ και στη συνιστώσα y ίση με $2.73 \text{ (A cm}^2\text{)}$. Εφαρμόζοντας αυτές τις τιμές

μαγνητικής διπολικής ροπής και εισάγοντας τις πειραματικές τιμές για τη συνιστώσα x και τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου, ο αλγόριθμος υπολόγισε τις θέσεις του μαγνήτη, μέσω των εξισώσεων (7.7) των συνιστωσών του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart. Στα επόμενα σχήματα (7.4.7) και (7.4.8), αποτυπώνονται οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές της θέσης του μαγνήτη ως προς την αντίστοιχη μετρούμενη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου για τους άξονες x και y αντίστοιχα.



Σχήμα 7.4.7: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης στον άξονα x , που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση.



Σχήμα 7.4.8: Τα διαγράμματα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της θέσης στον άξονα y , που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για την περίπτωση του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση.

Από τα διαγράμματα του σχήματος (7.4.7) για τις θέσεις του μαγνήτη στο άξονα x , προκύπτει ότι οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές της συγκλίνουν σε αποστάσεις 8-10 cm. Σε μεγαλύτερες αποστάσεις υπάρχει μια απόκλιση, που δίνει διαφορά μεταξύ θεωρητικής και πειραματικής θέσης μεγαλύτερες του 1cm.

Για τις θέσεις του μαγνήτη στον άξονα y , από τα διαγράμματα του σχήματος (7.4.8), παρατηρείται σύγκλιση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών τιμών της θέσης σε αποστάσεις μεταξύ των 9 και 21 cm.

Στην περίπτωση της κατακόρυφης τοποθέτησης, η μεγαλύτερη διάσταση του μαγνήτη παραμένει αυτή των 4cm, έτσι για την εκτίμηση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για τις θέσεις στον άξονα x , φαίνεται ότι προσεγγίζει τις πειραματικές σε αποστάσεις διπλάσιες έως τριπλάσιες της μεγαλύτερης διάστασης του μαγνήτη. Για την αντίστοιχη εκτίμηση στον άξονα y , φαίνεται ότι ο απλοποιημένος Biot-Savart υπολογίζει ικανοποιητικά την πραγματική κατάσταση σε αποστάσεις διπλάσιες έως και πενταπλάσιες.

Συμπεράσματα

▪ Κυλινδρικός μαγνήτης

Για τον κυλινδρικό μαγνήτη που μελετήθηκε, διαστάσεων $R = 0.5\text{cm}$ και $L = 4\text{cm}$, προέκυψε από την πειραματική διαδικασία, ότι η συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x) που δημιουργούσε κυμάνθηκε σε ένα εύρος μεταξύ $-514.80\mu\text{T}$ και $519.02\mu\text{T}$. Η συνιστώσα y (B_y) σε εύρος $-1175.79\mu\text{T}$ και $25.41\mu\text{T}$ και η συνιστώσα z (B_z) του σε εύρος από $2.48\mu\text{T}$ έως $407.50\mu\text{T}$. Επίσης το μέτρο του συνολικού μαγνητικού πεδίου (B), βρέθηκε στο εύρος μεταξύ $30.04\mu\text{T}$ και $1244.42\mu\text{T}$. Η εμβέλεια μέσα στην οποία το μαγνητικό πεδίο του κυλινδρικού μαγνήτη μπορούσε να μετρηθεί από τον αισθητήρα ήταν μέχρι τις αποστάσεις των $17\text{-}18\text{cm}$. Σε μεγαλύτερες αποστάσεις το όποιο πεδίο και αν δημιουργούσε δε διαφαινόταν αφού κυμαίνονταν σε τιμές όμοιες με τις διακυμάνσεις του γεωμαγνητικού πεδίου και δε μπορούσε να προσδιοριστεί λόγω και της περιορισμένης ευαισθησίας του αισθητήρα.

Κατά τη μελέτη των προσεγγιστικών εξισώσεων για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου του κυλίνδρου, φάνηκε ότι υπάρχει μια ταύτιση με τις πειραματικές τιμές σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 9 και 12cm , ενώ σε μικρότερες αποστάσεις υπήρχε μια απόκλιση μικρότερη από μια τάξη μεγέθους. Δηλαδή σε αποστάσεις διπλάσιες ως τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του κυλίνδρου οι προσεγγιστικές εξισώσεις έδιναν ικανοποιητικά αποτελέσματα, σε σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις. Για την προσεγγιστική εξίσωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο μαγνήτης προέκυψε σύγκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών του πεδίου για αποστάσεις μεγαλύτερες των 3cm . Σε ίδιες περίπου με τις διαστάσεις του αποστάσεις λοιπόν, η εξίσωση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου στην περίπτωση του κυλίνδρου δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Η επόμενη προσέγγιση των πειραματικών τιμών του κυλινδρικού μαγνήτη που έγινε ήταν μέσω του αλγορίθμου του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart. Προέκυψε ότι σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 9cm υπάρχει μια ταύτιση μεταξύ της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της συνιστώσας y του μαγνητικού πεδίου. Σε αποστάσεις, λοιπόν διπλάσιες ως τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του κυλίνδρου ο απλοποιημένος νόμος Biot-Savart δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Τέλος μελετήθηκε ο αλγόριθμος επίλυσης του απλοποιημένου Biot-Savart στην περίπτωση του κυλίνδρου. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι σε αποστάσεις μεταξύ $9\text{-}12\text{cm}$ υπάρχει σχεδόν ταύτιση των θεωρητικών και πειραματικών τιμών της θέσης του μαγνήτη, με τις πειραματικές να είναι ελαφρώς μικρότερες από τις

θεωρητικές. Η επίλυση του νόμου, δηλαδή δίνει καλά αποτελέσματα σε αποστάσεις διπλάσιες έως τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του μαγνήτη.

▪ Κυβικός μαγνήτης

Για τη μελέτη του κυβικού μαγνήτη με διαστάσεις $a_{\text{cube}} = b_{\text{cube}} = c_{\text{cube}} = 0.5\text{cm}$, η πειραματική διαδικασία έδωσε τα εξής: Η συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x), μετρήθηκε σε ένα εύρος από $-142.88\mu\text{T}$ έως $167.02\mu\text{T}$, η συνιστώσα y (B_y) στο εύρος από $-285.45\mu\text{T}$ έως $12.56\mu\text{T}$ και η συνιστώσα z (B_z) σε εύρος μεταξύ $-4.37\mu\text{T}$ και $315.27\mu\text{T}$. Το μέτρο του συνολικού μαγνητικού πεδίου (B), βρέθηκε σε ένα εύρος από $1.73\mu\text{T}$ έως $425.36\mu\text{T}$. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργούσε ο κυβικός μαγνήτης είχε μια εμβέλεια 9-10 cm, μέσα στην οποία γινόταν αισθητό από το μαγνητόμετρο.

Κατά τη μελέτη του κυβικού μαγνήτη μέσω του αλγορίθμου των προσεγγιστικών εξισώσεων προκύπτουν τα εξής: Όσον αφορά τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x) υπήρχε μια απόκλιση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών τιμών του πεδίου σε κοντινές αποστάσεις, η οποία μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση, με διαφορές ως μια τάξη μεγέθους. Για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου (B_y), φάνηκε ότι υπάρχει σύγκλιση των τιμών σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 6cm. Δηλαδή σε αποστάσεις περίπου τετραπλάσιες από τη διάσταση του κυβικού μαγνήτη παρατηρείται ότι οι προσεγγιστικές εξισώσεις αποτιμούν ικανοποιητικά τη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Επίσης από την εξίσωση του μέτρου του συνολικού μαγνητικού πεδίου (B), προέκυψε σύμπτωση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών σε όλες τις θέσεις όπου μελετήθηκε ο κυβικός μαγνήτης.

Κατόπιν μελετήθηκε ο αλγόριθμος που συγκρίνει τις πειραματικές τιμές με αυτές που προκύπτουν από τις συνιστώσες του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart. Για τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x) φαίνεται ότι οι θεωρητικές τιμές ταυτίζονται με τις πειραματικές σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 8cm, ενώ για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου (B_y) η ταύτιση των τιμών ξεκινά από την απόσταση των 6cm. Δηλαδή σε αποστάσεις δεκαεξαπλάσιες για τη συνιστώσα x και δωδεκαπλάσιες για τη συνιστώσα y , από τη μεγαλύτερη διάσταση του κύβου, ο απλοποιημένος νόμος Biot-Savart δίνει καλά αποτελέσματα.

Για τον κυβικό μαγνήτη ο αλγόριθμος που επιλύει τον απλοποιημένο νόμο Biot-Savart δίνει τα εξής αποτελέσματα σε σχέση με τις πραγματικές θέσεις του μαγνήτη. Για τις θέσεις στον άξονα x υπάρχει απόκλιση μεταξύ πειραματικών και θεωρητικών τιμών, η οποία αυξάνει όσο ο μαγνήτης απομακρύνεται. Για τις θέσεις στον άξονα y φαίνεται ότι υπάρχει σύγκλιση των τιμών μεταξύ των 6 έως 18 cm, ενώ σε πιο κοντινές αποστάσεις υπάρχει μια απόκλιση 1cm και σε μεγαλύτερες των 18cm αποστάσεων η απόκλιση φτάνει έως και τα 4cm. Έτσι για τις θέσεις στον

άξονα y η επίλυση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart δίνει καλά αποτελέσματα για αποστάσεις δωδεκαπλάσιες της μεγαλύτερης διάστασης του μαγνήτη έως και εκεί όπου έφτανε η εμβέλεια του μαγνητικού του πεδίου.

▪ Ορθογώνιος μαγνήτης

Ο ορθογώνιος μαγνήτης μελετήθηκε κατά την οριζόντια και κατά την κατακόρυφη τοποθέτηση.

◦ Οριζόντια τοποθέτηση

Η πειραματική διαδικασία για την οριζόντια τοποθέτηση του ορθογώνιου μαγνήτη, που αντιστοιχεί σε διαστάσεις $a_{\text{rectangular, horizontal}} = 4\text{cm}$, $b_{\text{rectangular, horizontal}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular, horizontal}} = 0.8\text{cm}$, έδωσε τα εξής αποτελέσματα. Η συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x) μετρήθηκε σε ένα εύρος μεταξύ $-290.94\mu\text{T}$ και $280.54\mu\text{T}$, η συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου (B_y) βρέθηκε στο εύρος $-3.14\mu\text{T}$ και $679.58\mu\text{T}$ από και η συνιστώσα z (B_z) σε εύρος μεταξύ $-123.58\mu\text{T}$ έως $-0.83\mu\text{T}$. Το μέτρο του συνολικού μαγνητικού πεδίου (B) μετρήθηκε στο εύρος από $34.17\mu\text{T}$ έως $690.75\mu\text{T}$. Η εμβέλεια του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση μέσα στο οποίο μπορούσε να μετρηθεί χωρίς σφάλμα από τον αισθητήρα έφτανε τα 15-16 cm.

Από τη μελέτη του αλγορίθμου των προσεγγιστικών εξισώσεων για τον ορθογώνιο μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση προκύπτουν τα εξής: Για τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x) υπάρχει μια σύγκλιση των τιμών σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 8cm με διαφορές μικρότερες από μια τάξη μεγέθους μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών. Για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου (B_y), παρατηρείται σύγκλιση των τιμών σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 12cm και μικρότερες των 15cm με τις θεωρητικές τιμές να προκύπτουν μεγαλύτερες από τις πειραματικές. Όσον αφορά το μέτρο του συνολικού μαγνητικού πεδίου (B), υπήρχε ταύτιση των θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές, με διαφορές μικρότερες από μια τάξη μεγέθους σε όλες τις θέσεις του μαγνήτη.

Από τον αλγόριθμο του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart για τον ορθογώνιο μαγνήτη σε οριζόντια απόσταση προέκυψαν τα ακόλουθα. Για τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x) φαίνεται ότι υπάρχει μια σύγκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών σε αποστάσεις μεγαλύτερες των 12cm, ενώ σε κοντινότερες αποστάσεις υπάρχουν αποκλίσεις έως και δύο τάξεις μεγέθους. Για τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου (B_y), σε αποστάσεις μεγαλύτερες και πάλι των 12cm οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές ταυτίζονται. Δηλαδή σε αποστάσεις τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του μαγνήτη, η οποία είναι 4cm, οι προσεγγιστικές εξισώσεις αποτυπώνουν ικανοποιητικά τις μετρούμενες τιμές μαγνητικού πεδίου.

Τέλος για την επίλυση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart, για τον ορθογώνιο μαγνήτη σε οριζόντια τοποθέτηση, φάνηκαν τα εξής: Για τη θέση του μαγνήτη στον άξονα x , υπάρχει σύγκλιση των πειραματικών και θεωρητικών τιμών σε αποστάσεις μεταξύ 10-12 cm, ενώ σε κοντινότερες υπάρχει απόκλιση 1cm και σε μεγαλύτερες αποστάσεις η διαφορά είναι μεγαλύτερη από 4cm. Για τη θέση του μαγνήτη στον άξονα y , προκύπτει ότι για όλες τις μετρούμενες αποστάσεις μεταξύ 9 και 21 cm υπάρχει καλή σύγκλιση των θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές. Έτσι όσον αφορά τον άξονα x η επίλυση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart δίνει καλά αποτελέσματα σε αποστάσεις διπλάσιες έως τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση του ορθογώνιου μαγνήτη και για τον άξονα y δίνει καλά αποτελέσματα σε αποστάσεις από περίπου διπλάσια έως και πενταπλάσια από τη μεγαλύτερη διάστασή του.

ο Κατακόρυφη τοποθέτηση

Ο ορθογώνιος μαγνήτης κατά την κατακόρυφη τοποθέτηση του, που αντιστοιχεί σε διαστάσεις $a_{\text{rectangular,vertical}} = 0.8\text{cm}$, $b_{\text{rectangular,vertical}} = 1\text{cm}$, $c_{\text{rectangular,vertical}} = 4\text{cm}$, βρέθηκε ότι η συνιστώσα x του μαγνητικού του πεδίου (B_x) κυμάνθηκε σε ένα εύρος μεταξύ $-326.73\mu\text{T}$ και $297.08\mu\text{T}$, η συνιστώσα y (B_y) στο εύρος από $-1.79\mu\text{T}$ και $746.02\mu\text{T}$ και η συνιστώσα z (B_z) σε εύρος από $-50.62\mu\text{T}$ έως $60.83\mu\text{T}$. Το μέτρο του συνολικού μαγνητικού πεδίου (B) του μαγνήτη εντοπίζεται σε ένα εύρος μεταξύ $36.12\mu\text{T}$ και $748.20\mu\text{T}$. Η εμβέλεια του μαγνητικού πεδίου του ορθογώνιου μαγνήτη, όπως και στην οριζόντια τοποθέτηση, έτσι και στην κατακόρυφη, κάλυπτε μια επιφάνεια ακτίνας 15-16 cm.

Η μελέτη του αλγορίθμου των προσεγγιστικών εξισώσεων έδωσε για τον μαγνήτη τα επόμενα αποτελέσματα. Για τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x) προκύπτει ότι οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές συγκλίνουν με τις θεωρητικές με διαφορές μικρότερες από μια τάξη μεγέθους. Όσον αφορά τη συνιστώσα y του μαγνητικού πεδίου παρατηρείται ότι υπάρχει σύγκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών σε αποστάσεις έως 15cm, ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις δημιουργείται μια απόκλιση μιας έως δύο τάξεις μεγέθους. Συνεπώς σε αποστάσεις διπλάσιες έως περίπου τετραπλάσιες της μεγαλύτερης διάστασης του ορθογώνιου μαγνήτη οι προσεγγιστικές εξισώσεις ικανοποιούν τα παρατηρούμενα μεγέθη. Για το μέτρο του συνολικού μαγνητικού πεδίου (B), φαίνεται ότι υπάρχει σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών και θεωρητικών τιμών, με διαφορές που τείνουν στο μηδέν. Δηλαδή σε αποστάσεις διπλάσιες έως πενταπλάσιες η προσεγγιστική εξίσωση του μέτρου συμπεριφέρεται ικανοποιητικά.

Από την επεξεργασία του αλγορίθμου του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart, για τη συνιστώσα x του μαγνητικού πεδίου (B_x), παρατηρείται σύγκλιση των

θεωρητικών με τις πειραματικές τιμές με διαφορές μικρότερες της μιας τάξης μεγέθους για αποστάσεις μεγαλύτερες των 10cm, ενώ στις κοντινές αποστάσεις παρατηρείται μια απόκλιση έως και δύο τάξεις μεγέθους. Για τη συνιστώσα γ του μαγνητικού πεδίου (B_y) προκύπτει ταύτιση των θεωρητικών και πειραματικών τιμών σε όλα τα σημεία, εκτός αυτού των 10cm, όπου παρατηρείται μια αμελητέα απόκλιση. Έτσι για τη συνιστώσα x του ορθογώνιου μαγνήτη σε κατακόρυφη τοποθέτηση, ο απλοποιημένος νόμος Biot-Savart, δίνει καλά αποτελέσματα σε αποστάσεις 2.5 φορές μεγαλύτερες από τη μεγαλύτερη διάσταση του, ενώ για τη συνιστώσα γ προκύπτουν επιθυμητά αποτελέσματα σε αποστάσεις από διπλάσιες έως και πενταπλάσιες ως προς τη μεγαλύτερη διάσταση απόσταση.

Τέλος από τη μελέτη του αλγόριθμου επίλυσης του απλοποιημένου Biot-Savart, για τον άξονα x προκύπτει ότι οι θεωρητικές και πειραματικές τιμές της συγκλίνουν σε αποστάσεις 8-10 cm. Όσον αφορά τον άξονα γ η σύγκλιση μεταξύ των τιμών της θέσης συμβαίνει σε αποστάσεις μεταξύ των 9 και 21 cm. Άρα για την εκτίμηση της θέσης από τον απλοποιημένο νόμο Biot-Savart, στον άξονα x παρατηρείται ότι δίνει καλά αποτελέσματα σε αποστάσεις διπλάσιες έως τριπλάσιες της μεγαλύτερης διάστασης του μαγνήτη. Για την αντίστοιχη εκτίμηση στον άξονα γ φαίνεται ότι σε αποστάσεις διπλάσιες έως και πενταπλάσιες ο απλοποιημένος Biot-Savart υπολογίζει ικανοποιητικά τα πραγματικά μεγέθη.

Συνολικά, παρατηρείται για όλους τους μαγνήτες, πως οι προσεγγιστικές εξισώσεις και ο απλοποιημένος νόμος των Biot-Savart δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε αποστάσεις διπλάσιες έως τριπλάσιες από τη μεγαλύτερη διάσταση κάθε μαγνήτη και έως εκεί όπου έφτανε η εμβέλεια του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών.

Μελλοντικές Επεκτάσεις / Προτάσεις

Η παρούσα εργασία περιορίστηκε στα πρώτα βήματα που οφείλουν να γίνουν στη μελέτη του εντοπισμού φερρομαγνητικών αντικειμένων. Έγινε δηλαδή μια θεωρητική ανάλυση των υπάρχουσών μεθόδων εντοπισμού και κατόπιν με τη χρήση πειραματικών στατικών μετρήσεων των μαγνητικών πεδίων των μαγνητών έγινε η ανάπτυξη αλγορίθμων με σκοπό την εκτίμηση των πεδίων τους και τον εντοπισμό της θέσης τους. Η πειραματική διαδικασία επίσης έγινε με τη χρήση ενός αισθητήρα ακίνητου στην αρχή των αξόνων και με τους μαγνήτες τοποθετημένους σε διαφορετικές θέσεις στο επίπεδο $x-y$, το οποίο κάλυπτε όμως μόνο το ένα τεταρτημόριο του επιπέδου.

Προτείνονται, λοιπόν, αρχικά μερικές βελτιώσεις ως προς την πειραματική διάταξη. Οι μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου των φερρομαγνητικών αντικειμένων θα ήταν χρήσιμο να καταγραφούν στο χώρο γύρω από τον αισθητήρα, και όχι μόνο στο ένα τεταρτημόριο του επιπέδου, ώστε να υπάρχει ομαλότητα και πληρότητα ως προς την αποτύπωση των μαγνητικών πεδίων στο χώρο.

Οι διατάξεις επίσης θα είχε ενδιαφέρον να βρεθούν σε χώρους όπου επιθυμείται να γίνει εντοπισμός φερρομαγνητικών αντικειμένων.

Όσον αφορά τον αισθητήρα θα ήταν προτιμότερο να κατέγραφε και να μετέδιδε τις μετρήσεις στον υπολογιστή ασύρματα, ώστε να μην υπάρχει παρεμβολή καλωδίων ή, αν είναι δυνατόν τα καλώδια να μην παρεμβάλλονται στον υπό μελέτη χώρο.

Επίσης θα μπορούσε ο αισθητήρας να παραμένει σταθερός αλλά να τοποθετηθεί και να μελετηθεί σε διαφορετικά ύψη, ώστε να εκτιμηθεί η συνιστώσα z του μαγνητικού πεδίου.

Ακόμη θα ήταν βοηθητική η προσθήκη ενός δεύτερου αισθητήρα, που θα χρησιμοποιηθεί ως αισθητήρας αναφοράς. Θα βρίσκεται, δηλαδή σε αποστάσεις, στις οποίες δε θα μπορεί να μετρήσει το πεδίο, που δημιουργεί το φερρομαγνητικό αντικείμενο. Σκοπός του δεύτερου αυτού αισθητήρα θα είναι η ταυτόχρονη καταγραφή του γεωμαγνητικού πεδίου και η αφαίρεσή του επιτόπου ή μεταγενέστερα από το μαγνητικό πεδίο που μετρά ο βασικός αισθητήρας, ώστε να αναδειχθεί το μαγνητικό πεδίο των μαγνητών.

Όσον αφορά τη χρήση ενός αισθητήρα αναφοράς, αυτό θα μπορούσε να γίνει και με ένα δεύτερο τρόπο: Αν ο αισθητήρας κινείται σε μια πλατφόρμα και βρίσκεται σε συγκεκριμένες θέσεις, θα μπορούσε μια από αυτές τις θέσεις, μακριά

από το φερρομαγνητικό αντικείμενο να θεωρηθεί ότι οι μετρήσεις της αφορούν σε μετρήσεις του αισθητήρα αναφοράς και να αφαιρεθούν από όλες τις επόμενες θέσεις στις οποίες θα βρεθεί. Σε μια τέτοια πιθανή διάταξη, διαφοροποιείται η μελέτη αναλόγως με το εάν το φερρομαγνητικό αντικείμενο θεωρηθεί ακίνητο ή κινούμενο.

Στην επιλογή του αισθητήρα τέλος, θα ήταν χρήσιμο να έχει μια καλή ανάλυση και να μετρά σε εμβέλεια ώστε να μπορούν να εκτιμηθούν τα μικρά μαγνητικά πεδία που προκαλούν τα φερρομαγνητικά αντικείμενα και να μπορεί αυτό να γίνει σε μεγαλύτερης έκτασης περιοχή.

Όσον αφορά τα φερρομαγνητικά αντικείμενα που θα χρησιμοποιηθούν στη μελέτη προτείνεται να μην είναι μαγνήτες, ώστε να μαγνητίζονται από το γεωμαγνητικό πεδίο και να είναι έτσι πιο ρεαλιστική η εκτίμηση της θέσης και αντικειμένων χωρίς μόνιμη μαγνήτιση.

Στο κομμάτι της ανάλυσης και επεξεργασίας των μετρήσεων του μαγνητικού πεδίου, σε μετέπειτα μελέτη θα πρέπει να συνυπολογιστεί ο θορυβος της μετρητικής διάταξης, για τη βέλτιστη αξιοποίηση των μετρήσεων του μαγνητικού πεδίου που θα αξιοποιηθούν από τους εκάστοτε αλγορίθμους.

Τέλος οι μετρήσεις προτείνεται να μην είναι στατικές. Θα ήταν χρήσιμο να γίνουν μετρήσεις σήματος και όχι απευθείας καταγραφές του μαγνητικού πεδίου των φερρομαγνητικών αντικειμένων και να γίνει η μετέπειτα ανάλυση του είτε μέσω των OBFs, είτε μέσω μεθόδων τύπου MED.

Βιβλιογραφία

[1] J.M.D. Coey, *Magnetism and Magnetic Materials*, Cambridge University Press, 2010.

[2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, INC., 1999.

[3] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, International, 1999.

[4] D. Jiles, *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials*, Springer-Science+Business Media, B.V., 1991.

[5] L. H. Lewis and F. Jiménez-Villacorta, “Perspectives on Permanent Magnetic Materials for Energy Conversion and Power Generation”, *Minerals, Metals & Materials Society and ASM International*, vol. 44A, pp. S2-S20, 2013.

[6] Jacob Fraden, *Handbook of Modern Sensors, Physics, Designs and Applications*, Springer, 2016.

[7] P. G. Shewane, M. Gite, A. Singh and A. Narkhede, “An Overview of Neodymium Magnets over Normal Magnets for the Generation of Energy”, *International Journal on Recent Innovation Trends in Computing and Communication*, vol. 2, issue: 12, pp. 4056-4059, 2014.

[8] J.M. Camacho and V. Sosa, “Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry”, *Revista Mexicana de Fisica*, E 59, pp.8-17, 2013.

[9] S. Sanfilippo, “Hall probes: physics and application to magnetometry”, CERN Accelerator School CAS 2009: Specialised Course on Magnets, Bruges, 2009.

[10] M. Manda and E. Thébaud, *The Changing Faces of the Earth’s Magnetic Field – A glance at the magnetic lithospheric field from local and regional scales to a planetary view*, Commission for the Geological Map of the World, 2007.

[11] J. L. Rasson, H. Toh and D. Yang, “Geomagnetic Observations and Models – The Global Geomagnetic Observatory Network”, *IAGA Special Sopron Book Series*, vol. 5, pp. 1-25, 2011.

[12] K. Kianfar, A. J. Mahalleh and A. Moridi, “Select the Appropriate Model for the Earth’s Magnetic Field”, *UKSim 5th European Symposium on Computer Modeling and Simulation*, IEEE, pp. 275-280, 2011.

[13] J.L. Le Mouél, P. Shebalin and A. Khokhlov, “Earth magnetic field modeling from Oersted and Champ data”, *Earth Planets Space*, no. 62, pp.277-286, 2010.

- [14] British Geological Survey – World Magnetic Model (WMM).
<http://www.geomag.bgs.ac.uk/research/modelling/WorldMagneticModel.html>
- [15] British Geological Survey – International Geomagnetic Reference Field (IGRF).
<http://www.geomag.bgs.ac.uk/research/modelling/IGRF.html>
- [16] EMAG3: NGDC's candidate for the World Digital Magnetic Anomaly Map.
<http://geomag.org/models/wdmam.html>
- [17] World Digital Magnetic Anomaly Map (WDMAM).
<http://wdmam.org>
- [18] British Geological Survey – BGS Global Geomagnetic Model.
http://www.geomag.bgs.ac.uk/data_service/directionaldrilling/bggm.html
- [19] British Geological Survey – Model of the Earth's Magnetic Environment (MEME).
<http://www.geomag.bgs.ac.uk/research/modelling/MEME.html>
- [20] British Geological Survey – Improving our predictions of secular variation using estimates of flows of molten material in the Earth's core.
<http://www.geomag.bgs.ac.uk/research/modelling/SVpredictions.html>
- [21] NOAA – The World Magnetic Model (WMM).
<https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/DoDWMM.shtml>
- [22] NOAA - IAGA – Geomagnetic Field Model.
<https://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/home.html>
- [23] NOAA – EMAG2: Earth Magnetic Anomaly Grid.
<https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/emag2.html>
- [24] NOAA - Enhanced Magnetic Model (EMM).
<https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/EMM/index.html>
- [25] NOAA – High Definition Geomagnetic Model.
<https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/HDGM/index.html>
- [26] Find Google Maps coordinates.

<https://www.mapcoordinates.net/en>

[27] British Geological Survey – World Magnetic Model 2015 Calculator.

http://www.geomag.bgs.ac.uk/data_service/models_compass/wmm_calc.html

[28] British Geological Survey – IGRF (12th Generation, revised 2014) Synthesis Form.

http://www.geomag.bgs.ac.uk/data_service/models_compass/igrf_form.shtml

[29] N. Wahlström, Localization using Magnetometers and Light Sensors, Linköping studies in science and technology. Thesis 2013.

[30] G. Deak, K. Curran and J. Condell, “A survey of active and passive indoor localisation systems Author links open overlay panel”, Computer Communications, no. 35, pp. 1939-1954, 2012.

[31] N. Wahlström, J. Callmer and F. Gustafsson, “Single target tracking using vector magnetometers”, 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 4332-4335, 2011.

[32] I. Vallivaara, “Simultaneous localization and mapping using the indoor magnetic field”, Acta Universitatis Ouluensis, C Technica 642, 2018.

[33] N. Wahlström, M. Kok, T. B. Schön and F. Gustafsson, “Modeling magnetic fields using Gaussian processes”, ICASSP 2013 - 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2013.

[34] Y. Shangguan, J. Yuan and J. Zou, “A localization method for submarines based on array probes magnetic measurement at two positions to overcome the influence of background field”, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, no. 55, pp. 205-212, 2017.

[35] B. Ginzburg, A. Sheinker, L. Frumkis, B.Z. Kaplan and N. Salomonski, “Investigation of advanced data processing technique in magnetic anomaly detection systems”, 1st International Conference on Sensing Technology, November 21-23 2005, Palmerston North, New Zealand, pp. 561-566, 2005.

[36] A. Sheinker, B. Ginzburg, N. Salomonski, L. Frumkis and B. Z. Kaplan, “Magnetic Anomaly Detection Using High-Order Crossing Method”, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 55, no. 4, 2012.

[37] A. Sheinker, L. Frumkis, B. Ginzburg, N. Salomonski and B. Z. Kaplan, “Magnetic Anomaly Detection Using a Three-Axis Magnetometer”, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 45, no. 1, 2009.

- [38] K. Y. Kim, E. Jeong, S. Kim and Y. Shin, "Magnetic Anomaly Detection Using Angle Alignment of 3-Axis Magnetic Signal", *IEEE Sensors Journal*, Sensors-22674, 2018.
- [39] A. Sheinker, N. Salomonski, B. Ginzburg, L. Frumkis and B. Z. Kaplan, "Magnetic Anomaly Detection Using Entropy Filter", *Measurement Science and Technology*, no.19, 5pp, 2008.
- [40] X. Gao, S. Yan and B. Li, "A Novel Method of Localization for Moving Objects with an Alternating Magnetic Field", *Sensors*, vol. 17, no. 923, 2017.
- [41] I. B. Murray and A. D. McAulay, "Magnetic detection and localization using multichannel Levinson-Durbin algorithm", *Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition XIII, Proc. SPIE (Orlando, FL, USA)*, vol. 5429, pp. 561-556, 2004.
- [42] C. Li, S. Huang, D. Wei, Y. Zhong and K. Y. Gong, "Detection Range of Airborne Magnetometers in Magnetic Anomaly Detection", *Journal of Engineering Science and Technology Review*, vol. 8, no. 4, pp. 105-110, 2015.
- [43] A. Sheinker, B. Lerner, N. Salomonski, B. Ginzburg, L. Frumkis and B. Z. Kaplan, "Localization and magnetic moment estimation of a ferromagnetic target by simulated annealing", *Measurement Science and Technology*, no.18, pp. 3451-3457, 2007.
- [44] Data sheet - BNO055, Bosch Sensortec - Intelligent 9-axis absolute orientation sensor, 2016.
- [45] C. Amariei, *Arduino Development Cookbook*, Packt Publishing, 2015.
- [46] S. Nagar, *Introduction to Python for Scientists and Engineers – Open Source Solutions for Numerical Computation*, Apress, 2018.

Παράρτημα

1. Αλγόριθμοι προσεγγιστικών εξισώσεων

1.1. Αλγόριθμος για το παραμένον μαγνητικό πεδίο

```
1. # In[1]:
2. # Libraries
3. import pandas as pd
4. import math
5. import matplotlib.pyplot as plt
6. from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
7.
8. # In[2]:
9. # Inputed parameters
10. #for Cylinder
11. R = float(input("Cylinder: R (cm) = " ))
12. L = float(input("Cylinder: L (cm) = "))
13.
14. #for Cube
15. a1 = float(input("Cube: a (cm) = " ))
16. b1 = float(input("Cube: b (cm) = "))
17. c1 = float(input("Cube: c (cm) = "))
18.
19. #for Rectangular (horizontal)
20. a2 = float(input("Rectangular (horizontal): a (cm) = " ))
21. b2 = float(input("Rectangular (horizontal): b (cm) = "))
22. c2 = float(input("Rectangular (horizontal): c (cm) = "))
23.
24. #for Rectangular (vertical)
25. a3 = float(input("Rectangular (vertical): a (cm) = " ))
26. b3 = float(input("Rectangular (vertical): b (cm) = "))
27. c3 = float(input("Rectangular (vertical): c (cm) = "))
28.
29. # In[3]:
30. # Import Measured Data
31. # for Cylinder
32. data1 = pd.read_excel('Cylinder_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
33. dfObj1 = pd.DataFrame(data1, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
34. y_cyl_data = dfObj1['y']
35. By_cyl_data = dfObj1['By']
36. y_cyl_lab = y_cyl_data.tolist()
37. By_cyl_lab = By_cyl_data.tolist()
38.
39. # for Cube
40. # (x-axis)
41. data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(y=0).xlsx')
42. dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
43. x_cub_data = dfObj2['x']
44. Bx_cub_data = dfObj2['Bx']
45. x_cub_lab = x_cub_data.tolist()
46. Bx_cub_lab = Bx_cub_data.tolist()
47. # (y-axis)
48. data3 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
49. dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
50. y_cub_data = dfObj3['y']
51. By_cub_data = dfObj3['By']
52. y_cub_lab = y_cub_data.tolist()
53. By_cub_lab = By_cub_data.tolist()
54.
55. # for Rectangular
```

```

56. # Horizontal
57. # (x-axis)
58. data4 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(T, cm)_
(y=0).xlsx')
59. dfObj4 = pd.DataFrame(data4, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
60. x_rec_h_data = dfObj4['x']
61. Bx_rec_h_data = dfObj4['Bx']
62. x_rec_h_lab = x_rec_h_data.tolist()
63. Bx_rec_h_lab = Bx_rec_h_data.tolist()
64. # (y-axis)
65. data5 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(T, cm)_
(x=0).xlsx')
66. dfObj5 = pd.DataFrame(data5, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
67. y_rec_h_data = dfObj5['y']
68. By_rec_h_data = dfObj5['By']
69. y_rec_h_lab = y_rec_h_data.tolist()
70. By_rec_h_lab = By_rec_h_data.tolist()
71.
72. # Vertical
73. # (x-axis)
74. data6 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T, cm)_
(y=0).xlsx')
75. dfObj6 = pd.DataFrame(data6, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
76. x_rec_v_data = dfObj6['x']
77. Bx_rec_v_data = dfObj6['Bx']
78. x_rec_v_lab = x_rec_v_data.tolist()
79. Bx_rec_v_lab = Bx_rec_v_data.tolist()
80. # (y-axis)
81. data7 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T, cm)_
(x=0).xlsx')
82. dfObj7 = pd.DataFrame(data7, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
83. y_rec_v_data = dfObj7['y']
84. By_rec_v_data = dfObj7['By']
85. y_rec_v_lab = y_rec_v_data.tolist()
86. By_rec_v_lab = By_rec_v_data.tolist()
87.
88. # In[4]:
89. # Import Measured Data (3D)
90. # for Cylinder
91. data8 = pd.read_excel('Cylinder_without_geomagnetic_(T, cm).xlsx')
92. dfObj8 = pd.DataFrame(data8, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
93. x1_data = dfObj8['x']
94. x1 = x1_data.tolist()
95. y1_data = dfObj8['y']
96. y1 = y1_data.tolist()
97. Bx1_data = dfObj8['Bx']
98. Bx1 = Bx1_data.tolist()
99. By1_data = dfObj8['By']
100. By1 = By1_data.tolist()
101. Bz1_data = dfObj8['Bz']
102. Bz1 = Bz1_data.tolist()
103. # Calculate Magnetic Field B
104. B1 = []
105. for d in range(0, len(Bx1)):
106.     b1_value = math.sqrt(Bx1[d]**2+By1[d]**2+Bz1[d]**2)
107.     B1.append(b1_value)
108.
109.
110. # for Cube
111. data9 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm).xlsx')
112. dfObj9 = pd.DataFrame(data9, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
113. x2_data = dfObj9['x']
114. x2 = x2_data.tolist()
115. y2_data = dfObj9['y']
116. y2 = y2_data.tolist()

```

```

117.     Bx2_data = dfObj9['Bx']
118.     Bx2 = Bx2_data.tolist()
119.     By2_data = dfObj9['By']
120.     By2 = By2_data.tolist()
121.     Bz2_data = dfObj9['Bz']
122.     Bz2 = Bz2_data.tolist()
123.     # Calculate Magnetic Field B
124.     B2 = []
125.     for f in range(0,len(Bx2)):
126.         b2_value = math.sqrt(Bx2[f]**2+By2[f]**2+Bz2[f]**2)
127.         B2.append(b2_value)
128.
129.
130.     # for Rectangular
131.     # Horizontal
132.     data10 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_
(T, cm).xlsx')
133.     dfObj10 = pd.DataFrame(data10, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz',
'B'])
134.     x3_data = dfObj10['x']
135.     x3 = x3_data.tolist()
136.     y3_data = dfObj10['y']
137.     y3 = y3_data.tolist()
138.     Bx3_data = dfObj10['Bx']
139.     Bx3 = Bx3_data.tolist()
140.     By3_data = dfObj10['By']
141.     By3 = By3_data.tolist()
142.     Bz3_data = dfObj10['Bz']
143.     Bz3 = Bz3_data.tolist()
144.     # Calculate Magnetic Field B
145.     B3 = []
146.     for g in range(0,len(Bx3)):
147.         b3_value = math.sqrt(Bx3[g]**2+By3[g]**2+Bz3[g]**2)
148.         B3.append(b3_value)
149.
150.     # Vertical
151.     data11 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T
, cm).xlsx')
152.     dfObj11 = pd.DataFrame(data11, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz',
'B'])
153.     x4_data = dfObj11['x']
154.     x4 = x4_data.tolist()
155.     y4_data = dfObj11['y']
156.     y4 = y4_data.tolist()
157.     Bx4_data = dfObj11['Bx']
158.     Bx4 = Bx4_data.tolist()
159.     By4_data = dfObj11['By']
160.     By4 = By4_data.tolist()
161.     Bz4_data = dfObj11['Bz']
162.     Bz4 = Bz4_data.tolist()
163.     # Calculate Magnetic Field B
164.     B4 = []
165.     for h in range(0,len(Bx4)):
166.         b4_value = math.sqrt(Bx4[h]**2+By4[h]**2+Bz4[h]**2)
167.         B4.append(b4_value)
168.
169.     # In[5]:
170.     # Equation of Magnetic Field (1D)
171.     # for Cylinder
172.     Br_cyl1D = []
173.     Y_cyl1D = []
174.     for i in range(0,len(By_cyl_lab)):
175.         bryValue = -
((By_cyl_lab[i]*2)/((y_cyl_lab[i]*10**2)/math.sqrt((y_cyl_lab[i]*10**2)**2+
(R*10**2)**2) - ((y_cyl_lab[i]*10**2)-
(L*10**2))/math.sqrt(((y_cyl_lab[i]*10**2)-(L*10**2))**2+(R*10**2)**2)))

```

```

176.     Br_cyl1D.append(bryValue)
177.     yValue = y_cyl_lab
178.     Y_cyl1D.append(yValue)
179.     av_cyl1D = sum(Br_cyl1D)/len(Br_cyl1D)
180.     print('Permanent Magnetic Induction (y-axis) - Cylinder')
181.     print(av_cyl1D)
182.
183.
184.     # for Cube
185.     # (x-axis)
186.     Br_x_cub1D = []
187.     X_cub1D = []
188.     for j in range(0,len(Bx_cub_lab)):
189.         try:
190.
191.             brx_cubValue = ((Bx_cub_lab[j]*math.pi)/((math.atan(((b1*10**2)/2))*((c1*10**
192.                 2)/2)/((x_cub_lab[j]*10**2)-
193.                 ((a1*10**2)/2))) * math.sqrt(((b1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((x_cub_lab[j]
194.                 *10**2)-((a1*10**2)/2)**2)) -
195.                 (math.atan(((b1*10**2)/2)*((c1*10**2)/2)/((x_cub_lab[j]*10**2)+((a1*10**2)/
196.                 2))) * math.sqrt(((b1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((x_cub_lab[j]*10**2)+((a
197.                 1*10**2)/2)**2))))
198.             Br_x_cub1D.append(brx_cubValue)
199.         except ZeroDivisionError:
200.             continue
201.         x_cubValue = x_cub_lab
202.         X_cub1D.append(x_cubValue)
203.     av_cub1D_x = sum(Br_x_cub1D)/len(Br_x_cub1D)
204.     print('Permanent Magnetic Induction (x-axis) - Cube')
205.     print(av_cub1D_x)
206.
207.     # (y-axis)
208.     Br_y_cub1D = []
209.     Y_cub1D = []
210.     for k in range(0,len(By_cub_lab)):
211.         try:
212.
213.             bry_cubValue = ((By_cub_lab[k]*math.pi)/((math.atan(((a1*10**2)/2))*((c1*10**
214.                 2)/2)/((y_cub_lab[k]*10**2)-
215.                 ((b1*10**2)/2))) * math.sqrt(((a1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((y_cub_lab[k]
216.                 *10**2)-((b1*10**2)/2)**2)) -
217.                 (math.atan(((a1*10**2)/2)*((c1*10**2)/2)/((y_cub_lab[k]*10**2)+((b1*10**2)/
218.                 2))) * math.sqrt(((a1*10**2)/2)**2+((c1*10**2)/2)**2+((y_cub_lab[k]*10**2)+((b
219.                 1*10**2)/2)**2))))
220.             Br_y_cub1D.append(bry_cubValue)
221.         except ZeroDivisionError:
222.             continue
223.         y_cubValue = y_cub_lab
224.         Y_cub1D.append(y_cubValue)
225.     av_cub1D_y = sum(Br_y_cub1D)/len(Br_y_cub1D)
226.     print('Permanent Magnetic Induction (y-axis) - Cube')
227.     print(av_cub1D_y)
228.
229.     # for Rectangular
230.     # Horizontal
231.     # (x-axis)
232.     Br_x_rec1D_h = []
233.     X_rec1D_h = []
234.     for l in range(0,len(Bx_rec_h_lab)):
235.         try:
236.
237.             brx_rec_hValue = -
238.             ((Bx_rec_h_lab[l]*math.pi) / ((math.atan(((b2*10**2)/2))*((c2*10**2)/2)/((x_
239.                 rec_h_lab[l]*10**2)-
240.                 ((a2*10**2)/2))) * math.sqrt(((b2*10**2)/2)**2+((c2*10**2)/2)**2+((x_rec_h_lab
241.                 [l]*10**2)-((a2*10**2)/2)**2)) -

```

```

    (math.atan(((b2*10**2)/2)*((c2*10**2)/2)/((x_rec_h_lab[1]*10**2)+((a2*10**2
)/2))) * math.sqrt(((b2*10**2)/2)**2+((c2*10**2)/2)**2+((x_rec_h_lab[1]*10**2
)+((a2*10**2)/2)**2)))
224.     Br_x_rec1D_h.append(brx_rec_hValue)
225.     except ZeroDivisionError:
226.         continue
227.     x_rec_hValue = x_rec_h_lab
228.     X_rec1D_h.append(x_rec_hValue)
229.     av_rec1D_h_x = sum(Br_x_rec1D_h)/len(Br_x_rec1D_h)
230.     print('Permanent Magnetic Induction (x-axis) -
Rectangular (horizontal)')
231.     print(av_rec1D_h_x)
232.
233.     # (y-axis)
234.     Br_y_rec1D_h = []
235.     Y_rec1D_h = []
236.     for m in range(0,len(By_rec_h_lab)):
237.         try:
238.     bry_rec_hValue = ((By_rec_h_lab[m]*math.pi)/((math.atan(((a2*10**2)/2)*((c2*
10**2)/2)/((y_rec_h_lab[m]*10**2)-
((b2*10**2)/2))) * math.sqrt(((a2*10**2)/2)**2+((c2*10**2)/2)**2+((y_rec_h_lab
[m]*10**2)-((b2*10**2)/2)**2)) -
    (math.atan(((a2*10**2)/2)*((c2*10**2)/2)/((y_rec_h_lab[m]*10**2)+((b2*10**2
)/2))) * math.sqrt(((a2*10**2)/2)**2+((c2*10**2)/2)**2+((y_rec_h_lab[m]*10**2
)+((b2*10**2)/2)**2))))
239.     Br_y_rec1D_h.append(bry_rec_hValue)
240.     except ZeroDivisionError:
241.         continue
242.     y_rec_hValue = y_rec_h_lab
243.     Y_rec1D_h.append(y_rec_hValue)
244.     av_rec1D_h_y = sum(Br_y_rec1D_h)/len(Br_y_rec1D_h)
245.     print('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (horizontal)')
246.     print(av_rec1D_h_y)
247.
248.
249.     # Vertical
250.     # (x-axis)
251.     Br_x_rec1D_v = []
252.     X_rec1D_v = []
253.     for n in range(0,len(Bx_rec_v_lab)):
254.         try:
255.     brx_rec_vValue = -
    ((Bx_rec_v_lab[n]*math.pi)/((math.atan(((b3*10**2)/2)*((c3*10**2)/2)/((x_re
c_v_lab[n]*10**2)-
((a3*10**2)/2))) * math.sqrt(((b3*10**2)/2)**2+((c3*10**2)/2)**2+((x_rec_v_lab
[n]*10**2)-((a3*10**2)/2)**2)) -
    (math.atan(((b3*10**2)/2)*((c3*10**2)/2)/((x_rec_v_lab[n]*10**2)+((a3*10**2
)/2))) * math.sqrt(((b3*10**2)/2)**2+((c3*10**2)/2)**2+((x_rec_v_lab[n]*10**2
)+((a3*10**2)/2)**2))))
256.     Br_x_rec1D_v.append(brx_rec_vValue)
257.     except ZeroDivisionError:
258.         continue
259.     x_rec_vValue = x_rec_v_lab
260.     X_rec1D_v.append(x_rec_vValue)
261.     av_rec1D_v_x = sum(Br_x_rec1D_v)/len(Br_x_rec1D_v)
262.     print('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (vertical)')
263.     print(av_rec1D_v_x)
264.
265.     # (y-axis)
266.     Br_y_rec1D_v = []
267.     Y_rec1D_v = []
268.     for p in range(0,len(By_rec_v_lab)):
269.         try:

```

```

270.
    bry_rec_vValue = ((By_rec_v_lab[p]*math.pi)/((math.atan(((a3*10**2)/2)*((c3*
10**2)/2)/((y_rec_v_lab[p]*10**2)-
((b3*10**2)/2))))*math.sqrt(((a3*10**2)/2)**2+((c3*10**2)/2)**2+((y_rec_v_lab
[p]*10**2)-((b3*10**2)/2)**2)) -
    (math.atan(((a3*10**2)/2)*((c3*10**2)/2)/((y_rec_v_lab[p]*10**2)+((b3*10**2
)/2))))*math.sqrt(((a3*10**2)/2)**2+((c3*10**2)/2)**2+((y_rec_v_lab[p]*10**2)
+((b3*10**2)/2)**2))))
271.         Br_y_rec1D_v.append(bry_rec_vValue)
272.         except ZeroDivisionError:
273.             continue
274.         y_rec_vValue = y_rec_v_lab
275.         Y_rec1D_v.append(y_rec_vValue)
276.         av_rec1D_v_y = sum(Br_y_rec1D_v)/len(Br_y_rec1D_v)
277.         print('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (vertical)')
278.         print(av_rec1D_v_y)
279.
280.         # In[6]:
281.         # Equation of Magnetic Field (3D)
282.         z=-2
283.
284.         # for Cylinder
285.         Br_cyl3D = []
286.         D_cyl3D = []
287.         X_cyl3D = []
288.         Y_cyl3D = []
289.         for q in range(0,len(Bx1)):
290.
291.             d1Value = math.sqrt((x1[q]*10**2)**2+(y1[q]*10**2)**2+(z*10**2)**2)
292.             D_cyl3D.append(d1Value)
293.
294.             b1Value = B1[q]*(2*(math.pi)*((math.sqrt((x1[q]*10**2)**2+(y1[q]*10**2)**2+(
z*10**2)**2))**3))
295.             Br_cyl3D.append(b1Value)
296.             x1Value = x1
297.             X_cyl3D.append(x1Value)
298.             y1Value = y1
299.             Y_cyl3D.append(y1Value)
300.         av_cyl3D = sum(Br_cyl3D)/len(Br_cyl3D)
301.         print('Permanent Magnetic Induction - Cylinder')
302.         print(av_cyl3D)
303.
304.
305.         # for Cube
306.         Br_cub3D = []
307.         D_cub3D = []
308.         X_cub3D = []
309.         Y_cub3D = []
310.         for r in range(0,len(Bx2)):
311.
312.             d2Value = math.sqrt((x2[r]*10**2)**2+(y2[r]*10**2)**2+(z*10**2)**2)
313.             D_cub3D.append(d2Value)
314.
315.             b2Value = B2[r]*(2*(math.pi)*((math.sqrt((x2[r]*10**2)**2+(y2[r]*10**2)**2+(
z*10**2)**2))**3))
316.             Br_cub3D.append(b2Value)
317.             x2Value = x2
318.             X_cub3D.append(x2Value)
319.             y2Value = y2
320.             Y_cub3D.append(y2Value)
321.         av_cub3D = sum(Br_cub3D)/len(Br_cub3D)

```



```

322.     print('Permanent Magnetic Induction - Cube')
323.     print(av_cub3D)
324.
325.
326.     # for Rectangular
327.     # Horizontal
328.     Br_rec3D_h = []
329.     D_rec3D_h = []
330.     X_rec3D_h = []
331.     Y_rec3D_h = []
332.     for s in range(0,len(Bx3)):
333.
334.         d3Value = math.sqrt((x3[s]*10**2)**2+(y3[s]*10**2)**2+(z*10**2)**2)
335.         D_rec3D_h.append(d3Value)
336.
337.         b3Value = B3[s]*(2*(math.pi)*((math.sqrt((x3[s]*10**2)**2+(y3[s]*10**2)**2+(
338.             z*10**2)**2))**3))
339.         Br_rec3D_h.append(b3Value)
340.
341.         x3Value = x3
342.         X_rec3D_h.append(x3Value)
343.         y3Value = y3
344.         Y_rec3D_h.append(y3Value)
345.         av_rec3D_h = sum(Br_rec3D_h)/len(Br_rec3D_h)
346.         print('Permanent Magnetic Induction - Rectangular (horizontal)')
347.         print(av_rec3D_h)
348.
349.     # Vertical
350.     Br_rec3D_v = []
351.     D_rec3D_v = []
352.     X_rec3D_v = []
353.     Y_rec3D_v = []
354.     for t in range(0,len(Bx4)):
355.
356.         d4Value = math.sqrt((x4[t]*10**2)**2+(y4[t]*10**2)**2+(z*10**2)**2)
357.         D_rec3D_v.append(d4Value)
358.
359.         b4Value = B4[t]*(2*(math.pi)*((math.sqrt((x4[t]*10**2)**2+(y4[t]*10**2)**2+(
360.             z*10**2)**2))**3))
361.         Br_rec3D_v.append(b4Value)
362.
363.         x4Value = x4
364.         X_rec3D_v.append(x4Value)
365.         y4Value = y4
366.         Y_rec3D_v.append(y4Value)
367.         av_rec3D_v = sum(Br_rec3D_v)/len(Br_rec3D_v)
368.         print('Permanent Magnetic Induction - Rectangular (vertical)')
369.         print(av_rec3D_v)
370.
371.     # In[7]:
372.     # Export Calculated Data (1D)
373.     # for Cylinder
374.     equation_data1 = {'y_cyl1D':Y_cyl1D,'Bry_cyl1D':Br_cyl1D}
375.     result1 = pd.DataFrame(equation_data1)
376.     result1.to_excel('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
377.         Cylinder.xlsx')
378.
379.     # for Cube
380.     # (x-axis)
381.     equation_data2 = {'x':X_cub1D,'Br_x_cub1D':Br_x_cub1D}
382.     result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
383.     result2.to_excel('Permanent Magnetic Induction (x-axis) - Cube.xlsx')
384.
385.     # (y-axis)

```

```

381.     equation_data3 = {'y':Y_cub1D,'Br_cub1D':Br_y_cub1D}
382.     result3 = pd.DataFrame(equation_data3)
383.     result3.to_excel('Permanent Magnetic Induction (y-axis) - Cube.xlsx')
384.
385.     # for Rectangular
386.     # Horizontal
387.     # (x-axis)
388.     equation_data4 = {'x':X_rec1D_h,'Br_x_rec1D_h':Br_x_rec1D_h}
389.     result4 = pd.DataFrame(equation_data4)
390.     result4.to_excel('Permanent Magnetic Induction (x-axis) -
Rectangular (horizontal).xlsx')
391.     # (y-axis)
392.     equation_data5 = {'y':Y_rec1D_h,'Br_rec1D_h':Br_y_rec1D_h}
393.     result5 = pd.DataFrame(equation_data5)
394.     result5.to_excel('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (horizontal).xlsx')
395.
396.     # Vertical
397.     # (x-axis)
398.     equation_data6 = {'x':X_rec1D_v,'Br_x_rec1D_h':Br_x_rec1D_v}
399.     result6 = pd.DataFrame(equation_data6)
400.     result6.to_excel('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (vertical).xlsx')
401.     # (y-axis)
402.     equation_data7 = {'y':Y_rec1D_v,'Br_rec1D_h':Br_y_rec1D_v}
403.     result7 = pd.DataFrame(equation_data7)
404.     result7.to_excel('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (vertical).xlsx')
405.
406.
407.     # Export Calculated Data (3D)
408.     # for Cylinder
409.     equation_data8 = {'x':X_cyl3D,'y':Y_cyl3D,'Br_cyl3D':Br_cyl3D}
410.     result8 = pd.DataFrame(equation_data8)
411.     result8.to_excel('Permanent Magnetic Induction -Cyliner.xlsx')
412.
413.     # for Cube
414.     equation_data9 = {'x':X_cub3D,'y':Y_cub3D,'Br_cub3D':Br_cub3D}
415.     result9 = pd.DataFrame(equation_data9)
416.     result9.to_excel('Permanent Magnetic Induction - Cube.xlsx')
417.
418.     # for Rectangular
419.     # Horizontal
420.     equation_data10 = {'x':X_rec3D_h,'y':Y_rec3D_h,'Br_rec3D_h':Br_rec3D_
h}
421.     result10 = pd.DataFrame(equation_data10)
422.     result10.to_excel('Permanent Magnetic Induction -
Rectangular (horizontal).xlsx')
423.
424.     # Vertical
425.     equation_data11 = {'x':X_rec3D_v,'y':Y_rec3D_v,'Br_rec3D_v':Br_rec3D_
v}
426.     result11 = pd.DataFrame(equation_data11)
427.     result11.to_excel('Permanent Magnetic Induction -
Rectangular (vertical).xlsx')
428.
429.     # In[8]:
430.     # Plot Permanent Magnetic Induction
431.     # for Cylinder
432.     # (y-axis)
433.     fig1 = plt.figure(figsize=(10,6))
434.     Bry_cyl1D_sctr = plt.scatter(y_cyl_lab,Br_cyl1D, color='blue', linewi
dth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
435.     plt.legend(('Br_cyl1D'), loc='upper right')
436.     plt.title('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Cylinder', fontsize=14)

```

```

437.     plt.xlabel('y (cm)')
438.     plt.ylabel('Br (T)')
439.     #plt.ylim(0.0, 0.00003)
440.
441.     # (norm)
442.     fig2 = plt.figure(figsize=(10,6))
443.     ax1 = fig2.add_subplot(111, projection='3d')
444.     Br_cyl_surf_th = ax1.scatter(x1, y1, Br_cyl3D, c='blue', marker='o')
445.     ax1.set_title('Permanent Magnetic Induction - Cylinder', fontsize=14)
446.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
447.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
448.     ax1.set_zlabel('Br (T)')
449.
450.     # In[9]:
451.     # Plot Permanent Magnetic Induction
452.     # for Cube
453.     # (x-axis)
454.     fig3 = plt.figure(figsize=(10,6))
455.     Brx_cub1D_sctr = plt.scatter(x_cub_lab, Br_x_cub1D, color='blue', line
width = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
456.     plt.legend(('Br_x_cub1D'), loc='upper right')
457.     plt.title('Permanent Magnetic Induction (x-axis) -
Cube', fontsize=14)
458.     plt.xlabel('x (cm)')
459.     plt.ylabel('Br (T) - (x-axis)')
460.     #plt.ylim(0.0, 0.00003)
461.
462.     # (y-axis)
463.     fig4 = plt.figure(figsize=(10,6))
464.     Bry_cub1D_sctr = plt.scatter(y_cub_lab, Br_y_cub1D, color='blue', line
width = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
465.     plt.legend(('Br_cub1D'), loc='upper right')
466.     plt.title('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Cube', fontsize=14)
467.     plt.xlabel('y (cm)')
468.     plt.ylabel('Br (T)')
469.     #plt.ylim(0.0, 0.00003)
470.
471.     # (norm)
472.     fig5 = plt.figure(figsize=(10,6))
473.     ax1 = fig5.add_subplot(111, projection='3d')
474.     Br_cub_surf_th = ax1.scatter(x2, y2, Br_cub3D, c='blue', marker='o')
475.     ax1.set_title('Permanent Magnetic Induction - Cube', fontsize=14)
476.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
477.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
478.     ax1.set_zlabel('Br (T)')
479.
480.     # In[10]:
481.     # Plot Permanent Magnetic Induction
482.     # for Rectangular
483.     # Horizontal
484.     # (x-axis)
485.     fig6 = plt.figure(figsize=(10,6))
486.     Brx_re1D_h_sctr = plt.scatter(x_rec_h_lab, Br_x_rec1D_h, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
487.     plt.legend(('Br_rec1D'), loc='upper right')
488.     plt.title('Permanent Magnetic Induction (x-axis) -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
489.     plt.xlabel('x (cm)')
490.     plt.ylabel('Br (T) - x-axis')
491.     #plt.ylim(0.0, 0.00003)
492.
493.     # (y-axis)
494.     fig7 = plt.figure(figsize=(10,6))
495.     Bry_rec1D_h_sctr = plt.scatter(y_rec_h_lab, Br_y_rec1D_h, color='blue'
, linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')

```

```

496.     plt.legend(('Br_rec1D'), loc='upper right')
497.     plt.title('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
498.     plt.xlabel('y (cm)')
499.     plt.ylabel('Br (T)')
500.     #plt.ylim(0.0, 0.00003)
501.
502.     # (norm)
503.     fig8 = plt.figure(figsize=(10,6))
504.     ax1 = fig8.add_subplot(111, projection='3d')
505.     Br_rec_h_surf_th = ax1.scatter(x3, y3, Br_rec3D_h, c='blue', marker='
o')
506.     ax1.set_title('Permanent Magnetic Induction -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
507.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
508.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
509.     ax1.set_zlabel('Br (T)')
510.
511.     # In[11]:
512.     # Plot Permanent Magnetic Induction
513.     # for Rectangular
514.     # Vertical
515.     # (x-axis)
516.     fig9 = plt.figure(figsize=(10,6))
517.     Brx_rec1D_v_sctr = plt.scatter(x_rec_v_lab, Br_x_rec1D_v, color='blue'
, linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
518.     plt.legend(('Br_cyl1D'), loc='upper right')
519.     plt.title('Permanent Magnetic Induction (x-axis) -
Rectangular (vertical)', fontsize=14)
520.     plt.xlabel('x (cm)')
521.     plt.ylabel('Br (T) - x-axis')
522.     #plt.ylim(0.0, 0.00003)
523.
524.     # (y-axis)
525.     fig10 = plt.figure(figsize=(10,6))
526.     Bry_rec1D_v_sctr = plt.scatter(y_rec_v_lab, Br_y_rec1D_v, color='blue'
, linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
527.     plt.legend(('Br_cyl1D'), loc='upper right')
528.     plt.title('Permanent Magnetic Induction (y-axis) -
Rectangular (vertical)', fontsize=14)
529.     plt.xlabel('y (cm)')
530.     plt.ylabel('Br (T)')
531.     #plt.ylim(0.0, 0.00003)
532.
533.     # (norm)
534.     fig11 = plt.figure(figsize=(10,6))
535.     ax1 = fig11.add_subplot(111, projection='3d')
536.     Br_rec_v_surf_th = ax1.scatter(x4, y4, Br_rec3D_v, c='blue', marker='
o')
537.     ax1.set_title('Permanent Magnetic Induction -
Rectangular (vertical)', fontsize=14)
538.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
539.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
540.     ax1.set_zlabel('Br (T)')
541.

```

1.2. Αλγόριθμος προσεγγιστικών εξισώσεων - Μαγνητικό πεδίο μαγνητών (1D)

```
1. # In[1]:
```

```

2. # Libraries
3. import pandas as pd
4. import math
5. import matplotlib.pyplot as plt
6.
7. # In[2]:
8. # Magnetic Field - Equations (1D)
9. def By_cyl_eq(y,Bry,R,L):
10.     return - ((Bry/2)*((y*10**2)/math.sqrt((y*10**2)**2+(R*10**2)**2) -
        ((y*10**2)-(L*10**2))/math.sqrt(((y*10**2)-(L*10**2))**2+(R*10**2)**2)))
11.
12. def Bx_eq(x,Brx,a,b,c):
13.     return ((Brx/math.pi)*((math.atan(((b*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((x*10**2)-
        ((a*10**2)/2))))*math.sqrt(((b*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((x*10**2)-
        ((a*10**2)/2)**2)) -
        (math.atan(((b*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((x*10**2)+((a*10**2)/2))))*math.sqrt
        (((b*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((x*10**2)+((a*10**2)/2)**2))))
14.
15. def By_eq(y,Bry,a,b,c):
16.     return ((Bry/math.pi)*((math.atan(((a*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((y*10**2)-
        ((b*10**2)/2))))*math.sqrt(((a*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((y*10**2)-
        ((b*10**2)/2)**2)) -
        (math.atan(((a*10**2)/2)*((c*10**2)/2)/((y*10**2)+((b*10**2)/2))))*math.sqrt
        (((a*10**2)/2)**2+((c*10**2)/2)**2+((y*10**2)+((b*10**2)/2)**2))))
17.
18. # In[3]:
19. # Inputed parameters
20. # Permanent Magnetic Induction
21. print('Insert Permanent Magnetic Induction')
22. # for Cylinder
23. Bry_cyl = float(input("Cylinder: Bry = "))
24.
25. # for Cube
26. Brx_cub = float(input("Cube: Brx= "))
27. Bry_cub = float(input("Cube: Bry= "))
28.
29. # for Rectangular (horizontal)
30. Brx_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): Brx= "))
31. Bry_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): Bry= "))
32.
33. # for Rectangular (vertical)
34. Brx_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): Brx= "))
35. Bry_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): Bry= "))
36.
37.
38. # Size of Magnets
39. print('Insert magnet size')
40. #for Cylinder
41. R1 = float(input("Cylinder: R (cm) = " ))
42. L1 = float(input("Cylinder: L (cm) = "))
43.
44. #for Cube
45. a1 = float(input("Cube: a (cm) = " ))
46. b1 = float(input("Cube: b (cm) = "))
47. c1 = float(input("Cube: c (cm) = "))
48.
49. #for Rectangular (horizontal)
50. a2 = float(input("Rectangular (horizontal): a (cm) = " ))
51. b2 = float(input("Rectangular (horizontal): b (cm) = "))
52. c2 = float(input("Rectangular (horizontal): c (cm) = "))
53.
54. #for Rectangular (vertical)
55. a3 = float(input("Rectangular (vertical): a (cm) = " ))
56. b3 = float(input("Rectangular (vertical): b (cm) = "))
57. c3 = float(input("Rectangular (vertical): c (cm) = "))
58.

```

```

59. # In[4]:
60. # Magnetic Field - Equations (1D)
61. # for Cylinder
62. Y_cyl_th=[]
63. By_cyl_th=[]
64. for y_cyl in range(6,22,3):
65.     try:
66.         res_y_cyl = By_cyl_eq(y_cyl,Bry_cyl,R1,L1)
67.         By_cyl_th.append(res_y_cyl)
68.     except ZeroDivisionError:
69.         continue
70.     y_cyl_value = y_cyl
71.     Y_cyl_th.append(y_cyl_value)
72.
73.
74. # for Cube
75. X_cub_th=[]
76. Y_cub_th=[]
77. Bx_cub_th=[]
78. By_cub_th=[]
79. for x_cub in range(4,13,2):
80.     try:
81.         res_x_cub = Bx_eq(x_cub,Brx_cub,a1,b1,c1)
82.         Bx_cub_th.append(res_x_cub)
83.     except ZeroDivisionError:
84.         continue
85.     x_cub_value = x_cub
86.     X_cub_th.append(x_cub_value)
87.
88. for y_cub in range(3,22,3):
89.     try:
90.         res_y_cub = By_eq(y_cub,Bry_cub,a1,b1,c1)
91.         By_cub_th.append(res_y_cub)
92.     except ZeroDivisionError:
93.         continue
94.     y_cub_value = y_cub
95.     Y_cub_th.append(y_cub_value)
96.
97.
98. # for Rectangular
99. # Horizontal
100.     X_rec_h_th=[]
101.     Y_rec_h_th=[]
102.     Bx_rec_h_th=[]
103.     By_rec_h_th=[]
104.     Bz_rec_h_th=[]
105.     for x_rec_h in range(8,15,2):
106.         try:
107.             res_x_rec_h = Bx_eq(x_rec_h,Brx_rec_h,a2,b2,c2)
108.             Bx_rec_h_th.append(res_x_rec_h)
109.         except ZeroDivisionError:
110.             continue
111.         x_rec_h_value = x_rec_h
112.         X_rec_h_th.append(x_rec_h_value)
113.
114.     for y_rec_h in range(9,22,3):
115.         try:
116.             res_y_rec_h = By_eq(y_rec_h,Bry_rec_h,a2,b2,c2)
117.             By_rec_h_th.append(res_y_rec_h)
118.         except ZeroDivisionError:
119.             continue
120.         y_rec_h_value = y_rec_h
121.         Y_rec_h_th.append(y_rec_h_value)
122.
123.
124.     # Vertical

```

```

125.     X_rec_v_th=[]
126.     Y_rec_v_th=[]
127.     Bx_rec_v_th=[]
128.     By_rec_v_th=[]
129.     Bz_rec_v_th=[]
130.     for x_rec_v in range(8,15,2):
131.         try:
132.             res_x_rec_v = Bx_eq(x_rec_v,Brx_rec_v,a3,b3,c3)
133.             Bx_rec_v_th.append(res_x_rec_v)
134.         except ZeroDivisionError:
135.             continue
136.         x_rec_v_value = x_rec_v
137.         X_rec_v_th.append(x_rec_v_value)
138.
139.     for y_rec_v in range(9,22,3):
140.         try:
141.             res_y_rec_v = By_eq(y_rec_v,Bry_rec_v,a3,b3,c3)
142.             By_rec_v_th.append(res_y_rec_v)
143.         except ZeroDivisionError:
144.             continue
145.         y_rec_v_value = y_rec_v
146.         Y_rec_v_th.append(y_rec_v_value)
147.
148.     # In[5]:
149.     # Export Calculated Magnetic Field
150.     # for Cylinder
151.     equation_data1 = {'y_cyl':Y_cyl_th,'By_cyl_th':By_cyl_th}
152.     result1 = pd.DataFrame(equation_data1)
153.     result1.to_excel('Magnetic Field for Cylinder (y-axis).xlsx')
154.
155.     # for Cube
156.     # (x-axis)
157.     equation_data2 = {'x_cub':X_cub_th, 'Bx_cub':Bx_cub_th}
158.     result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
159.     result2.to_excel('Magnetic Field for Cube (x-axis).xlsx')
160.     # (y-axis)
161.     equation_data3 = {'y_cub':Y_cub_th, 'By_cub':By_cub_th}
162.     result3 = pd.DataFrame(equation_data3)
163.     result3.to_excel('Magnetic Field for Cube (y-axis).xlsx')
164.
165.     # for Rectangular
166.     # horizontal
167.     # (x-axis)
168.     equation_data4 = {'x_rec_h':X_rec_h_th,'Bx_rec_h_th':Bx_rec_h_th}
169.     result4 = pd.DataFrame(equation_data4)
170.     result4.to_excel('Magnetic Field for Rectangular (horizontal) (x-
axis).xlsx')
171.     # (y-axis)
172.     equation_data5 = {'y_rec_h':Y_rec_h_th,'By_rec_h_th':By_rec_h_th}
173.     result5 = pd.DataFrame(equation_data5)
174.     result5.to_excel('Magnetic Field for Rectangular (horizontal) (y-
axis).xlsx')
175.
176.     # vertical
177.     # (x-axis)
178.     equation_data6 = {'x_rec_v':X_rec_v_th,'Bx_rec_v_th':Bx_rec_v_th}
179.     result6 = pd.DataFrame(equation_data6)
180.     result6.to_excel('Magnetic Field for Rectangular (vertical) (x-
axis).xlsx')
181.     # (y-axis)
182.     equation_data7 = {'y_rec_v':Y_rec_v_th,'By_rec_v_th':By_rec_v_th}
183.     result7 = pd.DataFrame(equation_data7)
184.     result7.to_excel('Magnetic Field for Rectangular (vertical) (y-
axis).xlsx')
185.
186.     # In[6]:

```

```

187.     # Import Measured Data
188.     # for Cylinder
189.     data1 = pd.read_excel('Cylinder_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xls
x')
190.     dfObj1 = pd.DataFrame(data1, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
191.     y_cyl_data = dfObj1['y']
192.     By_cyl_data = dfObj1['By']
193.     y_cyl_lab = y_cyl_data.tolist()
194.     By_cyl_lab = By_cyl_data.tolist()
195.
196.     # for Cube
197.     # (x-axis)
198.     data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(y=0).xlsx')
199.     dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
200.     x_cub_data = dfObj2['x']
201.     Bx_cub_data = dfObj2['Bx']
202.     x_cub_lab = x_cub_data.tolist()
203.     Bx_cub_lab = Bx_cub_data.tolist()
204.     # (y-axis)
205.     data3 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
206.     dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
207.     y_cub_data = dfObj3['y']
208.     By_cub_data = dfObj3['By']
209.     y_cub_lab = y_cub_data.tolist()
210.     By_cub_lab = By_cub_data.tolist()
211.
212.     # for Rectangular
213.     # Horizontal
214.     # (x-axis)
215.     data4 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(
T, cm)_(y=0).xlsx')
216.     dfObj4 = pd.DataFrame(data4, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
217.     x_rec_h_data = dfObj4['x']
218.     Bx_rec_h_data = dfObj4['Bx']
219.     x_rec_h_lab = x_rec_h_data.tolist()
220.     Bx_rec_h_lab = Bx_rec_h_data.tolist()
221.     # (y-axis)
222.     data5 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(
T, cm)_(x=0).xlsx')
223.     dfObj5 = pd.DataFrame(data5, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
224.     y_rec_h_data = dfObj5['y']
225.     By_rec_h_data = dfObj5['By']
226.     y_rec_h_lab = y_rec_h_data.tolist()
227.     By_rec_h_lab = By_rec_h_data.tolist()
228.
229.     # Vertical
230.     # (x-axis)
231.     data6 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T,
cm)_(y=0).xlsx')
232.     dfObj6 = pd.DataFrame(data6, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
233.     x_rec_v_data = dfObj6['x']
234.     Bx_rec_v_data = dfObj6['Bx']
235.     x_rec_v_lab = x_rec_v_data.tolist()
236.     Bx_rec_v_lab = Bx_rec_v_data.tolist()
237.     # (y-axis)
238.     data7 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T,
cm)_(x=0).xlsx')
239.     dfObj7 = pd.DataFrame(data7, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
240.     y_rec_v_data = dfObj7['y']

```



```

241.     By_rec_v_data = dfObj7['By']
242.     y_rec_v_lab = y_rec_v_data.tolist()
243.     By_rec_v_lab = By_rec_v_data.tolist()
244.
245.     # In[7]:
246.     # Print Magnetic Field Calculated / Data
247.     # for Cylinder
248.     print('Magnetic Field for Cylinder (y-axis)')
249.     print(Y_cyl_th, By_cyl_th)
250.     print('Data for Cylinder (y-axis)')
251.     print(y_cyl_lab,By_cyl_lab)
252.
253.     # for Cube
254.     # (x-axis)
255.     print('Magnetic Field for Cube (x-axis)')
256.     print(X_cub_th, Bx_cub_th)
257.     print('Data for Cube (x-axis)')
258.     print(x_cub_lab,Bx_cub_lab)
259.     # (y-axis)
260.     print('Magnetic Field for Cube (y-axis)')
261.     print(Y_cub_th, By_cub_th)
262.     print('Data for Cube (y-axis)')
263.     print(y_cub_lab,By_cub_lab)
264.
265.     # for Rectangular (horizontal)
266.     # (x-axis)
267.     print('Magnetic Field for Rectangular (horizontal) (x-axis)')
268.     print(X_rec_h_th, Bx_rec_h_th)
269.     print('Data for Rectangular (horizontal) (x-axis)')
270.     print(x_rec_h_lab,Bx_rec_h_lab)
271.     # (y-axis)
272.     print('Magnetic Field for Rectangular (horizontal) (y-axis)')
273.     print(Y_rec_h_th, By_rec_h_th)
274.     print('Data for Rectangular (horizontal) (y-axis)')
275.     print(y_rec_h_lab,By_rec_h_lab)
276.
277.     # for Rectangular (vertical)
278.     # (x-axis)
279.     print('Magnetic Field for Rectangular (vertical) (x-axis)')
280.     print(X_rec_v_th, Bx_rec_v_th)
281.     print('Data for Rectangular (vertical) (x-axis)')
282.     print(x_rec_v_lab,Bx_rec_v_lab)
283.     # (y-axis)
284.     print('Magnetic Field for Rectangular (vertical) (y-axis)')
285.     print(Y_rec_v_th, By_rec_v_th)
286.     print('Data for Rectangular (vertical) (y-axis)')
287.     print(y_rec_v_lab,By_rec_v_lab)
288.
289.     # In[8]:
290.     # Plot and Compare
291.     #for Cylinder
292.     gridsize1 = (2,2)
293.     fig1 = plt.figure(figsize=(15,8))
294.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize1, (0, 0))
295.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize1, (0, 1))
296.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize1, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
297.
298.     ax1.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cylinder (th)', fontsize=14)
299.     sctr_cyl_th = ax1.scatter(Y_cyl_th,By_cyl_th, color='red', linewidth
= 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
300.     sctr_cyl_th_line = ax1.plot(Y_cyl_th,By_cyl_th, color='red', linewidth
h = 1.0, linestyle = '-')
301.     ax1.set_xlabel('y (cm)')
302.     ax1.set_ylabel('By_th (T)')
303.     ax1.set_ylim(-0.008,0.004)
304.

```

```

305.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Cylinder (lab)', fontsize=14)
306.     sctr_cyl_lab = ax2.scatter(y_cyl_lab,By_cyl_lab, color='green', linewidth
    idth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
307.     sctr_cyl_lab_line = ax2.plot(y_cyl_lab,By_cyl_lab, color='green', lin
    ewidth = 1.0, linestyle = '-')
308.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
309.     ax2.set_ylabel('By_lab (T)')
310.     ax2.set_ylim(-0.008,0.004)
311.
312.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cylinder', fontsize=14)
313.     sctr_cyl_th = ax3.scatter(Y_cyl_th,By_cyl_th, color='blue', linewidth
    = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
314.     sctr_cyl_lab = ax3.scatter(y_cyl_lab,By_cyl_lab, color='purple', line
    width = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
315.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
316.     ax3.set_ylabel('By_lab (T)')
317.     ax3.set_ylim(-0.008,0.004)
318.
319.     plt.legend([sctr_cyl_th, (sctr_cyl_th, sctr_cyl_lab)], ["By_th", "By_
    lab"])
320.     plt.show()
321.
322.     # In[9]:
323.     # Plot and Compare
324.     #for Cube
325.     # (x-axis)
326.     gridsize2 = (2,2)
327.     fig2 = plt.figure(figsize=(15,8))
328.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 0))
329.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 1))
330.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize2, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
331.
332.     ax1.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube (th)', fontsize=14)
333.     sctr_cub_xth = ax1.scatter(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewidth
    h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
334.     sctr_cub_xth_line = ax1.plot(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewi
    dth = 1.0, linestyle = '-')
335.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
336.     ax1.set_ylabel('Bx_th (T)')
337.     ax1.set_ylim(-0.0002,0.0002)
338.
339.     ax2.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube (lab)', fontsize=14)
340.     sctr_cub_xlab = ax2.scatter(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', lin
    ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
341.     sctr_cub_xlab_line = ax2.plot(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', l
    inewidth = 1.0, linestyle = '-')
342.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
343.     ax2.set_ylabel('Bx_lab (T)')
344.     ax2.set_ylim(-0.0002,0.0002)
345.
346.     ax3.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube', fontsize=14)
347.     sctr_cub_xth = ax3.scatter(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewidth
    h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
348.     sctr_cub_xlab = ax3.scatter(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', lin
    ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
349.     ax3.set_xlabel('x (cm)')
350.     ax3.set_ylabel('Bx (T)')
351.     ax3.set_ylim(-0.0002,0.0002)
352.
353.     plt.legend([sctr_cub_xth, (sctr_cub_xth, sctr_cub_xlab)], ["Bx_th", "
    Bx_lab"])
354.     plt.show()
355.
356.
357.     # (y-axis)

```

```

358.     gridsize3 = (2,2)
359.     fig3 = plt.figure(figsize=(15,8))
360.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize3, (0, 0))
361.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize3, (0, 1))
362.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize3, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
363.
364.     ax1.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cube (th)', fontsize=14)
365.     sctr_cub_yth = ax1.scatter(Y_cub_th,By_cub_th, color='blue', linewidth
366.     h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
367.     sctr_cub_yth_line = ax1.plot(Y_cub_th,By_cub_th, color='blue', linewi
368.     dth = 1.0, linestyle = '-')
369.     ax1.set_xlabel('y (cm)')
370.     ax1.set_ylabel('By_th (T)')
371.     ax1.set_ylim(-0.0004,0.0004)
372.
373.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cube (lab)', fontsize=14)
374.     sctr_cub_ylab = ax2.scatter(y_cub_lab,By_cub_lab, color='purple', lin
375.     ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
376.     sctr_cub_ylab_line = ax2.plot(y_cub_lab,By_cub_lab, color='purple', l
377.     inewidth = 1.0, linestyle = '-')
378.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
379.     ax2.set_ylabel('By_lab (T)')
380.     ax2.set_ylim(-0.0004,0.0004)
381.
382.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cube', fontsize=14)
383.     sctr_cub_yth = ax3.scatter(Y_cub_th,By_cub_th, color='blue', linewidth
384.     h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
385.     sctr_cub_ylab = ax3.scatter(y_cub_lab,By_cub_lab, color='purple', lin
386.     ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
387.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
388.     ax3.set_ylabel('By (T)')
389.     ax3.set_ylim(-0.0004,0.0004)
390.
391.     plt.legend([sctr_cub_yth, (sctr_cub_yth, sctr_cub_ylab)], ["By_th", "
392.     By_lab"])
393.     plt.show()
394.
395.     # In[10]:
396.     # Plot and Compare
397.     #for Rectangular (horizontal)
398.     # (x-axis)
399.     gridsize4 = (2,2)
400.     fig4 = plt.figure(figsize=(15,8))
401.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize4, (0, 0))
402.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize4, (0, 1))
403.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize4, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
404.
405.     ax1.set_title('Magnetic field (x-axis) -
406.     Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
407.     sctr_rec_h_xth = ax1.scatter(X_rec_h_th,Bx_rec_h_th, color='blue', li
408.     newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
409.     sctr_rec_h_xth_line = ax1.plot(X_rec_h_th,Bx_rec_h_th, color='blue',
410.     linewidth = 1.0, linestyle = '-')
411.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
412.     ax1.set_ylabel('Bx_th_h (T)')
413.     ax1.set_ylim(-0.0005,0.0002)
414.
415.     ax2.set_title('Magnetic field (x-axis) -
416.     Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
417.     sctr_rec_h_xlab = ax2.scatter(x_rec_h_lab,Bx_rec_h_lab, color='purple
418.     ', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
419.     sctr_rec_h_xlab_line = ax2.plot(x_rec_h_lab,Bx_rec_h_lab, color='purp
420.     le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
421.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
422.     ax2.set_ylabel('Bx_lab_h (T)')
423.     ax2.set_ylim(-0.0005,0.0002)

```

```

411.
412.     ax3.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
413.     sctr_rec_h_xth = ax3.scatter(X_rec_h_th,Bx_rec_h_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
414.     sctr_rec_h_xlab = ax3.scatter(x_rec_h_lab,Bx_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
415.     ax3.set_xlabel('x (cm)')
416.     ax3.set_ylabel('Bx (T)')
417.     ax3.set_ylim(-0.00005,0.0002)
418.
419.     plt.legend([sctr_rec_h_xth, (sctr_rec_h_xth, sctr_rec_h_xlab)], ["Bx_
th", "Bx_lab_h"])
420.     plt.show()
421.
422.
423.     # (y-axis)
424.     gridsize5 = (2,2)
425.     fig5 = plt.figure(figsize=(15,8))
426.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize5, (0, 0))
427.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize5, (0, 1))
428.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize5, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
429.
430.     ax1.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
431.     sctr_rec_h_yth = ax1.scatter(Y_rec_h_th,By_rec_h_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
432.     sctr_rec_h_yth_line = ax1.plot(Y_rec_h_th,By_rec_h_th, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
433.     ax1.set_xlabel('y_th_h (cm)')
434.     ax1.set_ylabel('By_th_h (T)')
435.     ax1.set_ylim(-0.00005,0.0008)
436.
437.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
438.     sctr_rec_h_ylab = ax2.scatter(y_rec_h_lab,By_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
439.     sctr_rec_h_ylab_line = ax2.plot(y_rec_h_lab,By_rec_h_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
440.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
441.     ax2.set_ylabel('By_lab_h (T)')
442.     ax2.set_ylim(-0.00005,0.0008)
443.
444.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
445.     sctr_rec_h_yth = ax3.scatter(Y_rec_h_th,By_rec_h_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
446.     sctr_rec_h_ylab = ax3.scatter(y_rec_h_lab,By_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
447.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
448.     ax3.set_ylabel('By (T)')
449.     ax3.set_ylim(-0.00005,0.0008)
450.
451.     plt.legend([sctr_rec_h_yth, (sctr_rec_h_yth, sctr_rec_h_ylab)], ["By_
th", "By_lab_h"])
452.     plt.show()
453.
454.     # In[11]:
455.     # Plot and Compare
456.     #for Rectangular (vertical)
457.     # (x-axis)
458.     gridsize6 = (2,2)
459.     fig6 = plt.figure(figsize=(15,8))
460.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize6, (0, 0))
461.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize6, (0, 1))
462.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize6, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)

```

```

463.
464.     ax1.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
465.     sctr_rec_v_xth = ax1.scatter(X_rec_v_th,Bx_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
466.     sctr_rec_v_xth_line = ax1.plot(X_rec_v_th,Bx_rec_v_th, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
467.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
468.     ax1.set_ylabel('Bx_th_v (T)')
469.     ax1.set_ylim(-0.0001,0.00015)
470.
471.     ax2.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
472.     sctr_rec_v_xlab = ax2.scatter(x_rec_v_lab,Bx_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
473.     sctr_rec_v_xlab_line = ax2.plot(x_rec_v_lab,Bx_rec_v_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
474.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
475.     ax2.set_ylabel('Bx_lab_v (T)')
476.     ax2.set_ylim(-0.0001,0.00015)
477.
478.     ax3.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
479.     sctr_rec_v_xth = ax3.scatter(X_rec_v_th,Bx_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
480.     sctr_rec_v_xlab = ax3.scatter(x_rec_v_lab,Bx_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
481.     ax3.set_xlabel('x (cm)')
482.     ax3.set_ylabel('Bx (T)')
483.     ax3.set_ylim(-0.0001,0.00015)
484.
485.     plt.legend([sctr_rec_v_xth, (sctr_rec_v_xth, sctr_rec_v_xlab)], ["Bx_
th_v", "Bx_lab_v"])
486.     plt.show()
487.
488.
489.     # (y-axis)
490.     gridsize7 = (2,2)
491.     fig7 = plt.figure(figsize=(15,8))
492.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize7, (0, 0))
493.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize7, (0, 1))
494.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize7, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
495.
496.     ax1.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
497.     sctr_rec_v_yth = ax1.scatter(Y_rec_v_th,By_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
498.     sctr_rec_v_yth_line = ax1.plot(Y_rec_v_th,By_rec_v_th, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
499.     ax1.set_xlabel('y_th_v (cm)')
500.     ax1.set_ylabel('By_th_v (T)')
501.     ax1.set_ylim(-0.0001,0.0008)
502.
503.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
504.     sctr_rec_v_ylab = ax2.scatter(y_rec_v_lab,By_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
505.     sctr_rec_v_ylab_line = ax2.plot(y_rec_v_lab,By_rec_v_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
506.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
507.     ax2.set_ylabel('By_lab_v (T)')
508.     ax2.set_ylim(-0.0001,0.0008)
509.
510.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)

```

```

511.     sctr_rec_v_yth = ax3.scatter(Y_rec_v_th,By_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
512.     sctr_rec_v_ylab = ax3.scatter(y_rec_v_lab,By_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
513.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
514.     ax3.set_ylabel('By (T)')
515.     ax3.set_ylim(-0.0001,0.0008)
516.
517.     plt.legend([sctr_rec_v_yth, (sctr_rec_v_yth, sctr_rec_v_ylab)], ["By_
th_v", "By_lab_v"])
518.     plt.show()

```

1.3. Αλγόριθμος προσεγγιστικών εξισώσεων - Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου των μαγνητών

```

1. # In[1]:
2. # Libraries
3. import pandas as pd
4. import math
5. import matplotlib.pyplot as plt
6. from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
7.
8. # In[2]:
9. # Magnetic Field - Equations (1D)
10. def B_eq(x,y,z,Br):
11.     return (Br)/(2*(math.pi)*((math.sqrt((x*10**2)**2+(y*10**2)**2+(z*10**2)**2)
)**3))
12.
13. # In[3]:
14. # Inputed parameters
15. # Permanent Magnetic Induction
16. print('Insert Permanent Magnetic Induction')
17. # for Cylinder
18. Br_cyl = float(input("Cylinder: Br = "))
19.
20. # for Cube
21. Br_cub = float(input("Cube: Br= "))
22.
23. # for Rectangular (horizontal)
24. Br_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): Br= "))
25.
26. # for Rectangular (vertical)
27. Br_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): Br= "))
28.
29. # In[4]:
30. # Magnetic Field - Equations
31. z=-2
32.
33. # for Cylinder
34. X_cyl_th=[]
35. Y_cyl_th=[]
36. B_cyl_th=[]
37. for x_cyl in range(-4,15,2):
38.     for y_cyl in range(6,22,3):
39.         try:
40.             res_cyl = B_eq(x_cyl,y_cyl,z,Br_cyl)
41.             B_cyl_th.append(res_cyl)
42.         except ZeroDivisionError:
43.             continue

```

```

44.     x_cyl_value = x_cyl
45.     X_cyl_th.append(x_cyl_value)
46.     y_cyl_value = y_cyl
47.     Y_cyl_th.append(y_cyl_value)
48.
49.
50. # for Cube
51. X_cub_th=[]
52. Y_cub_th=[]
53. B_cub_th=[]
54. for x_cub in range(-4,13,2):
55.     for y_cub in range(3,22,3):
56.         try:
57.             res_cub = B_eq(x_cub,y_cub,z,Br_cub)
58.             B_cub_th.append(res_cub)
59.         except ZeroDivisionError:
60.             continue
61.     x_cub_value = x_cub
62.     X_cub_th.append(x_cub_value)
63.     y_cub_value = y_cub
64.     Y_cub_th.append(y_cub_value)
65.
66.
67. # for Rectangular
68. # Rectangular (horizontal)
69. X_rec_h_th=[]
70. Y_rec_h_th=[]
71. B_rec_h_th=[]
72. for x_rec_h in range(-4,15,2):
73.     for y_rec_h in range(9,22,3):
74.         try:
75.             res_rec_h = B_eq(x_rec_h,y_rec_h,z,Br_rec_h)
76.             B_rec_h_th.append(res_rec_h)
77.         except ZeroDivisionError:
78.             continue
79.     x_rec_h_value = x_rec_h
80.     X_rec_h_th.append(x_rec_h_value)
81.     y_rec_h_value = y_rec_h
82.     Y_rec_h_th.append(y_rec_h_value)
83.
84.
85. # Rectangular (vertical)
86. X_rec_v_th=[]
87. Y_rec_v_th=[]
88. B_rec_v_th=[]
89. for x_rec_v in range(-4,15,2):
90.     for y_rec_v in range(9,22,3):
91.         try:
92.             res_rec_v = B_eq(x_rec_v,y_rec_v,z,Br_rec_v)
93.             B_rec_v_th.append(res_rec_v)
94.         except ZeroDivisionError:
95.             continue
96.     x_rec_v_value = x_rec_v
97.     X_rec_v_th.append(x_rec_v_value)
98.     y_rec_v_value = y_rec_v
99.     Y_rec_v_th.append(y_rec_v_value)
100.
101.     # In[5]:
102.     # Export Calculated Magnetic Field
103.     # for Cylinder
104.     equation_data1 = {'x_cyl':X_cyl_th, 'y_cyl':Y_cyl_th, 'B_cyl_th':B_cyl_th}
105.     result1 = pd.DataFrame(equation_data1)
106.     result1.to_excel('Magnetic Field for Cylinder.xlsx')
107.
108.     # for Cube

```

```

109.     equation_data2 = {'x_cub':X_cub_th, 'y_cub':Y_cub_th, 'B_cub_th':B_cu
    b_th}
110.     result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
111.     result2.to_excel('Magnetic Field for Cube.xlsx')
112.
113.     # for Rectangular
114.     # horizontal
115.     equation_data4 = {'x_rec_h':X_rec_h_th, 'y_rec_h':Y_rec_h_th, 'B_rec_
    h_th':B_rec_h_th}
116.     result4 = pd.DataFrame(equation_data4)
117.     result4.to_excel('Magnetic Field for Rectangular (horizontal).xlsx')
118.
119.     # vertical
120.     equation_data6 = {'x_rec_v':X_rec_v_th, 'y_rec_v':Y_rec_v_th, 'B_rec_
    v_th':B_rec_v_th}
121.     result6 = pd.DataFrame(equation_data6)
122.     result6.to_excel('Magnetic Field for Rectangular (vertical).xlsx')
123.
124.     # In[6]:
125.     # Import Measured Data (3D)
126.     # for Cylinder
127.     data1 = pd.read_excel('Cylinder_without_geomagnetic_(T, cm).xlsx')
128.     df0bj1 = pd.DataFrame(data1, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
    B'])
129.     x1_data = df0bj1['x']
130.     y1_data = df0bj1['y']
131.     Bx1_data = df0bj1['Bx']
132.     By1_data = df0bj1['By']
133.     Bz1_data = df0bj1['Bz']
134.     x1 = x1_data.tolist()
135.     y1 = y1_data.tolist()
136.     Bx1 = Bx1_data.tolist()
137.     By1 = By1_data.tolist()
138.     Bz1 = Bz1_data.tolist()
139.
140.     # Calculate Magnetic Field B for Cylinder
141.     B_cyl = []
142.     for d in range(0,len(Bx1)):
143.         b1_value = math.sqrt(Bx1[d]**2+By1[d]**2+Bz1[d]**2)
144.         B_cyl.append(b1_value)
145.
146.
147.     # for Cube
148.     data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm).xlsx')
149.     df0bj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
    B'])
150.     x2_data = df0bj2['x']
151.     y2_data = df0bj2['y']
152.     Bx2_data = df0bj2['Bx']
153.     By2_data = df0bj2['By']
154.     Bz2_data = df0bj2['Bz']
155.     x2 = x2_data.tolist()
156.     y2 = y2_data.tolist()
157.     Bx2 = Bx2_data.tolist()
158.     By2 = By2_data.tolist()
159.     Bz2 = Bz2_data.tolist()
160.
161.     # Calculate Magnetic Field B for Cube
162.     B_cub = []
163.     for f in range(0,len(Bx2)):
164.         b2_value = math.sqrt(Bx2[f]**2+By2[f]**2+Bz2[f]**2)
165.         B_cub.append(b2_value)
166.
167.
168.     # for Rectangular
169.     # Horizontal

```



```

170.     data3 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(
171. T, cm).xlsx')
171.     dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
172. B'])
172.     x3_data = dfObj3['x']
173.     y3_data = dfObj3['y']
174.     Bx3_data = dfObj3['Bx']
175.     By3_data = dfObj3['By']
176.     Bz3_data = dfObj3['Bz']
177.     x3 = x3_data.tolist()
178.     y3 = y3_data.tolist()
179.     Bx3 = Bx3_data.tolist()
180.     By3 = By3_data.tolist()
181.     Bz3 = Bz3_data.tolist()
182.
183.     # Calculate Magnetic Field B for Rectangular (Horizontal)
184.     B_rec_h = []
185.     for g in range(0,len(Bx3)):
186.         b3_value = math.sqrt(Bx3[g]**2+By3[g]**2+Bz3[g]**2)
187.         B_rec_h.append(b3_value)
188.
189.
190.     # Vertical
191.     data4 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T,
192. cm).xlsx')
192.     dfObj4 = pd.DataFrame(data4, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
193. B'])
193.     x4_data = dfObj4['x']
194.     y4_data = dfObj4['y']
195.     Bx4_data = dfObj4['Bx']
196.     By4_data = dfObj4['By']
197.     Bz4_data = dfObj4['Bz']
198.     x4 = x4_data.tolist()
199.     y4 = y4_data.tolist()
200.     Bx4 = Bx4_data.tolist()
201.     By4 = By4_data.tolist()
202.     Bz4 = Bz4_data.tolist()
203.
204.     # Calculate Magnetic Field B for Rectangular (Vertical)
205.     B_rec_v = []
206.     for h in range(0,len(Bx4)):
207.         b4_value = math.sqrt(Bx4[h]**2+By4[h]**2+Bz4[h]**2)
208.         B_rec_v.append(b4_value)
209.
210.     # In[7]:
211.     # Print Magnetic Field Calculated / Data
212.     # for Cylinder
213.     print('Magnetic Field for Cylinder')
214.     print(X_cyl_th, Y_cyl_th, By_cyl_th)
215.     print('Data for Cylinder')
216.     print(B_cyl)
217.
218.     # for Cube
219.     print('Magnetic Field for Cube')
220.     print(X_cub_th, Y_cub_th, B_cub_th)
221.     print('Data for Cube')
222.     print(B_cub)
223.
224.     # for Rectangular
225.     # Horizontal
226.     print('Magnetic Field for Rectangular (horizontal)')
227.     print(X_rec_h_th, Y_rec_h_th, B_rec_h_th)
228.     print('Data for Rectangular (horizontal)')
229.     print(B_rec_h)
230.
231.     # Vertical

```

```

232.     print('Magnetic Field for Rectangular (vertical)')
233.     print(X_rec_v_th, Y_rec_v_th, B_rec_v_th)
234.     print('Data for Rectangular (vertical)')
235.     print(B_rec_v)
236.
237.     # In[8]:
238.     # Plot Magnetic Field
239.     # for Cylinder
240.     fig1 = plt.figure(figsize=(15,8))
241.     ax1 = fig1.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
242.     surf_cyl_th = ax1.scatter(X_cyl_th, Y_cyl_th, B_cyl_th, c='blue', mar
ker='o')
243.     ax1.set_title('Magnetic field - Cylinder (th)', fontsize=14)
244.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
245.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
246.     ax1.set_zlabel('B (T)')
247.     ax2 = fig1.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
248.     surf_cyl_lab = ax2.scatter(x1, y1, B_cyl, c='purple', marker='^')
249.     ax2.set_title('Magnetic field - Cylinder (lab)', fontsize=14)
250.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
251.     ax2.set_ylabel('y (cm)')
252.     ax2.set_zlabel('B (T)')
253.     plt.show()
254.
255.     # Compare Plots
256.     fig2 = plt.figure(figsize=(15,8))
257.     ax = Axes3D(fig2)
258.     surf_cyl_the = ax.scatter(X_cyl_th, Y_cyl_th, B_cyl_th,
c='blue', marker='o')
259.     surf_cyl_labo = ax.scatter(x1, y1, B_cyl, c='purple', marker='^')
260.     ax.set_title('Magnetic field - Cylinder', fontsize=14)
261.     ax.set_xlabel('x (cm)')
262.     ax.set_ylabel('y (cm)')
263.     ax.set_zlabel('B (T)')
264.     plt.show()
265.
266.     # In[9]:
267.     # Plot Magnetic Field
268.     # for Cube
269.     fig3 = plt.figure(figsize=(15,8))
270.     ax1 = fig3.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
271.     surf_cub_th = ax1.scatter(X_cub_th, Y_cub_th, B_cub_th, c='blue', mar
ker='o')
272.     ax1.set_title('Magnetic field - Cube (th)', fontsize=14)
273.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
274.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
275.     ax1.set_zlabel('B (T)')
276.     ax2 = fig3.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
277.     surf_cub_lab = ax2.scatter(x2, y2, B_cub, c='purple', marker='^')
278.     ax2.set_title('Magnetic field - Cube (lab)', fontsize=14)
279.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
280.     ax2.set_ylabel('y (cm)')
281.     ax2.set_zlabel('B (T)')
282.     plt.show()
283.
284.     # Compare Plots
285.     fig4 = plt.figure(figsize=(15,8))
286.     ax = Axes3D(fig4)
287.     surf_cub_the = ax.scatter(X_cub_th, Y_cub_th, B_cub_th,
c='blue', marker='o')
288.     surf_cub_labo = ax.scatter(x2, y2, B_cub, c='purple', marker='^')
289.     ax.set_title('Magnetic field - Cube', fontsize=14)
290.     ax.set_xlabel('x (cm)')
291.     ax.set_ylabel('y (cm)')
292.     ax.set_zlabel('B (T)')
293.     plt.show()

```

```

294.
295.     # In[10]:
296.     # Plot Magnetic Field
297.     # for Rectangular (Horizontal)
298.     fig5 = plt.figure(figsize=(15,8))
299.     ax1 = fig5.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
300.     surf_rec_h_th = ax1.scatter(X_rec_h_th, Y_rec_h_th, B_rec_h_th, c='bl
ue', marker='o')
301.     ax1.set_title('Magnetic field - Rectangular (horizontal
(th)', fontsize=14)
302.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
303.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
304.     ax1.set_zlabel('B (T)')
305.     ax2 = fig5.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
306.     surf_rec_h_lab = ax2.scatter(x3, y3, B_rec_h, c='purple', marker='^')
307.     ax2.set_title('Magnetic field -
Rectangular (horizontal) (lab)', fontsize=14)
308.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
309.     ax2.set_ylabel('y (cm)')
310.     ax2.set_zlabel('B (T)')
311.     plt.show()
312.
313.     # Compare Plots
314.     fig6 = plt.figure(figsize=(15,8))
315.     ax = Axes3D(fig6)
316.     surf_rec_h_the = ax.scatter(X_rec_h_th, Y_rec_h_th, B_rec_h_th, c='bl
ue', marker='o')
317.     surf_rec_h_labo = ax.scatter(x3, y3, B_rec_h, c='purple', marker='^')
318.     ax.set_title('Magnetic field -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
319.     ax.set_xlabel('x (cm)')
320.     ax.set_ylabel('y (cm)')
321.     ax.set_zlabel('B (T)')
322.     plt.show()
323.
324.     # In[11]:
325.     # Plot Magnetic Field
326.     # for Rectangular (Vertical)
327.     fig7 = plt.figure(figsize=(15,8))
328.     ax1 = fig7.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
329.     surf_rec_v_th = ax1.scatter(X_rec_v_th, Y_rec_v_th, B_rec_v_th, c='bl
ue', marker='o')
330.     ax1.set_title('Magnetic field -
Rectangular (vertical) (th)', fontsize=14)
331.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
332.     ax1.set_ylabel('y (cm)')
333.     ax1.set_zlabel('B (T)')
334.     ax2 = fig7.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
335.     surf_rec_v_lab = ax2.scatter(x4, y4, B_rec_v, c='purple', marker='^')
336.     ax2.set_title('Magnetic field -
Rectangular (vertical) (lab)', fontsize=14)
337.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
338.     ax2.set_ylabel('y (cm)')
339.     ax2.set_zlabel('B (T)')
340.     plt.show()
341.
342.     # Compare Plots (vertical)
343.     fig8 = plt.figure(figsize=(15,8))
344.     ax = Axes3D(fig8)
345.     surf_rec_v_the = ax.scatter(X_rec_v_th, Y_rec_v_th, B_rec_v_th, c='bl
ue', marker='o')
346.     surf_rec_v_labo = ax.scatter(x4, y4, B_rec_v, c='purple', marker='^')
347.     ax.set_title('Magnetic field - Rectangular (vertical)', fontsize=14)
348.     ax.set_xlabel('x (cm)')
349.     ax.set_ylabel('y (cm)')
350.     ax.set_zlabel('B (T)')

```

```
351. plt.show()
352.
```

2. Αλγόριθμοι του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart

2.1. Μαγνητική διπολική ροπή και παραμένουσα μαγνήτιση των μαγνητών

```
1. # In[1]:
2. # Libraries
3. import math
4. import pandas as pd
5. import matplotlib.pyplot as plt
6.
7. # In[2]:
8. # Inputed parameters
9. # for Cylinder
10. R = float(input("Cylinder: R (cm) = " ))
11. L = float(input("Cylinder: L (cm) = "))
12.
13. # for Cube
14. a1 = float(input("Cube: a (cm) = " ))
15. b1 = float(input("Cube: b (cm) = "))
16. c1 = float(input("Cube: c (cm) = "))
17.
18. # for Rectangular (horizontal)
19. a2 = float(input("Rectangular (horizontal): a (cm) = " ))
20. b2 = float(input("Rectangular (horizontal): b (cm) = "))
21. c2 = float(input("Rectangular (horizontal): c (cm) = "))
22.
23. # for Rectangular (vertical)
24. a3 = float(input("Rectangular (vertical): a (cm) = " ))
25. b3 = float(input("Rectangular (vertical): b (cm) = "))
26. c3 = float(input("Rectangular (vertical): c (cm) = "))
27.
28. # In[3]:
29. # Import Measured Data
30. # for Cylinder
31. data1 = pd.read_excel('Cylinder_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
32. dfObj1 = pd.DataFrame(data1, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
33. y_cyl_data = dfObj1['y']
34. By_cyl_data = dfObj1['By']
35. y_cyl_lab = y_cyl_data.tolist()
36. By_cyl_lab = By_cyl_data.tolist()
37.
38. # for Cube
39. # (x-axis)
40. data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(y=0).xlsx')
41. dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
42. x_cub_data = dfObj2['x']
43. Bx_cub_data = dfObj2['Bx']
44. x_cub_lab = x_cub_data.tolist()
45. Bx_cub_lab = Bx_cub_data.tolist()
46. # (y-axis)
47. data3 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
48. dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
49. y_cub_data = dfObj3['y']
```

```

50. By_cub_data = dfObj3['By']
51. y_cub_lab = y_cub_data.tolist()
52. By_cub_lab = By_cub_data.tolist()
53.
54. # for Rectangular
55. # Horizontal
56. # (x-axis)
57. data4 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (y=0).xlsx')
58. dfObj4 = pd.DataFrame(data4, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
59. x_rec_h_data = dfObj4['x']
60. Bx_rec_h_data = dfObj4['Bx']
61. x_rec_h_lab = x_rec_h_data.tolist()
62. Bx_rec_h_lab = Bx_rec_h_data.tolist()
63. # (y-axis)
64. data5 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (x=0).xlsx')
65. dfObj5 = pd.DataFrame(data5, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
66. y_rec_h_data = dfObj5['y']
67. By_rec_h_data = dfObj5['By']
68. y_rec_h_lab = y_rec_h_data.tolist()
69. By_rec_h_lab = By_rec_h_data.tolist()
70.
71. # Vertical
72. # (x-axis)
73. data6 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (y=0).xlsx')
74. dfObj6 = pd.DataFrame(data6, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
75. x_rec_v_data = dfObj6['x']
76. Bx_rec_v_data = dfObj6['Bx']
77. x_rec_v_lab = x_rec_v_data.tolist()
78. Bx_rec_v_lab = Bx_rec_v_data.tolist()
79. # (y-axis)
80. data7 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (x=0).xlsx')
81. dfObj7 = pd.DataFrame(data7, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
82. y_rec_v_data = dfObj7['y']
83. By_rec_v_data = dfObj7['By']
84. y_rec_v_lab = y_rec_v_data.tolist()
85. By_rec_v_lab = By_rec_v_data.tolist()
86.
87. # In[4]:
88. # Magnetic Moment
89. # for Cylinder
90. my_cyl = []
91. for i in range(0, len(By_cyl_lab)):
92.     try:
93.         my_cylValue = By_cyl_lab[i]*(y_cyl_lab[i]**3)*5
94.         my_cyl.append(my_cylValue)
95.     except ZeroDivisionError:
96.         continue
97. av_cyl = sum(my_cyl)/len(my_cyl)
98. print('my average - Cylinder')
99. print(av_cyl)
100.
101.
102.     # Permanent Magnetization
103.     # Cylinder volume
104.     V_cyl = math.pi*(R**2)*L*10**-6
105.     print('volume - cylinder')
106.     print(V_cyl)
107.
108.     # (y-axis)
109.     My_cyl = []
110.     for j in range(0, len(my_cyl)):
111.         My_cylValue = my_cyl[j]*V_cyl

```

```

112.     My_cyl.append(My_cylValue)
113.     avM_cyl = sum(My_cyl)/len(My_cyl)
114.     print('My average - Cylinder')
115.     print(avM_cyl)
116.
117.     # In[5]:
118.     # Magnetic Moment
119.     # for Cube
120.     # (x-axis)
121.     mx_cub = []
122.     for k in range(0,len(Bx_cub_lab)):
123.         try:
124.             mx_cubValue = Bx_cub_lab[k]*(x_cub_lab[k]**3)*5
125.             mx_cub.append(mx_cubValue)
126.         except ZeroDivisionError:
127.             continue
128.     av_cub_x = sum(mx_cub)/len(mx_cub)
129.     print('mx average - Cube (x-axis)')
130.     print(av_cub_x)
131.
132.     # (y-axis)
133.     my_cub = []
134.     for l in range(0,len(By_cub_lab)):
135.         try:
136.             my_cubValue = By_cub_lab[l]*(y_cub_lab[l]**3)*5
137.             my_cub.append(my_cubValue)
138.         except ZeroDivisionError:
139.             continue
140.     av_cub_y = sum(my_cub)/len(my_cub)
141.     print('my average - Cube (y-axis)')
142.     print(av_cub_y)
143.
144.
145.     # Permanent Magnetization
146.     # Cube volume
147.     V_cub = a1*b1*c1*10**-6
148.     print('volume - cube')
149.     print(V_cub)
150.
151.     # (x-axis)
152.     Mx_cub = []
153.     for m in range(0,len(mx_cub)):
154.         Mx_cubValue = mx_cub[m]*V_cub
155.         Mx_cub.append(Mx_cubValue)
156.     avMx_cub = sum(Mx_cub)/len(Mx_cub)
157.     print('Mx average - Cube (x-axis)')
158.     print(avMx_cub)
159.
160.     # (y-axis)
161.     My_cub = []
162.     for n in range(0,len(my_cub)):
163.         My_cubValue = my_cub[n]*V_cub
164.         My_cub.append(My_cubValue)
165.     avMy_cub = sum(My_cub)/len(My_cub)
166.     print('My average - Cube (y-axis)')
167.     print(avMy_cub)
168.
169.     # In[6]:
170.     # Magnetic Moment
171.     # for Rectangular (horizontal)
172.     # (x-axis)
173.     mx_rec_h = []
174.     for p in range(0,len(Bx_rec_h_lab)):
175.         try:
176.             mx_rec_h_Value = Bx_rec_h_lab[p]*(x_rec_h_lab[p]**3)*5
177.             mx_rec_h.append(mx_rec_h_Value)

```

```

178.         except ZeroDivisionError:
179.             continue
180.         av_rec_h_x = sum(mx_rec_h)/len(mx_rec_h)
181.         print('mx average - Rectangular (horizontal) (x-axis)')
182.         print(av_rec_h_x)
183.
184.         # (y-axis)
185.         my_rec_h = []
186.         for q in range(0,len(By_rec_h_lab)):
187.             try:
188.                 my_rec_h_Value = By_rec_h_lab[q]*(y_rec_h_lab[q]**3)*5
189.                 my_rec_h.append(my_rec_h_Value)
190.             except ZeroDivisionError:
191.                 continue
192.         av_rec_h_y = sum(my_rec_h)/len(my_rec_h)
193.         print('my average - Rectangular (horizontal) (y-axis)')
194.         print(av_rec_h_y)
195.
196.
197.         # Permanent Magnetization
198.         # Rectangular volume
199.         V_rec = a2*b2*c2*10**-6
200.         print('volume - rectangular')
201.         print(V_rec)
202.
203.         # (x-axis)
204.         Mx_rec_h = []
205.         for r in range(0,len(mx_rec_h)):
206.             Mx_rec_h_Value = mx_rec_h[r]*V_rec
207.             Mx_rec_h.append(Mx_rec_h_Value)
208.         avMx_rec_h = sum(Mx_rec_h)/len(Mx_rec_h)
209.         print('Mx average - Rectangular (horizontal) (x-axis)')
210.         print(avMx_rec_h)
211.
212.         # (y-axis)
213.         My_rec_h = []
214.         for s in range(0,len(my_rec_h)):
215.             My_rec_h_Value = my_rec_h[s]*V_rec
216.             My_rec_h.append(My_rec_h_Value)
217.         avMy_rec_h = sum(My_rec_h)/len(My_rec_h)
218.         print('My average - Rectangular (horizontal) (y-axis)')
219.         print(avMy_rec_h)
220.
221.         # In[7]:
222.         # Rectangular (vertical)
223.         # Magnetic Moment
224.         # (x-axis)
225.         mx_rec_v = []
226.         for t in range(0,len(Bx_rec_v_lab)):
227.             try:
228.                 mx_rec_v_Value = Bx_rec_v_lab[t]*(x_rec_v_lab[t]**3)*5
229.                 mx_rec_v.append(mx_rec_v_Value)
230.             except ZeroDivisionError:
231.                 continue
232.         av_rec_v_x = sum(mx_rec_v)/len(mx_rec_v)
233.         print('mx average - Rectangular (vertical) (x-axis)')
234.         print(av_rec_v_x)
235.
236.         # (y-axis)
237.         my_rec_v = []
238.         for u in range(0,len(By_rec_v_lab)):
239.             try:
240.                 my_rec_v_Value = By_rec_v_lab[u]*(y_rec_v_lab[u]**3)*5
241.                 my_rec_v.append(my_rec_v_Value)
242.             except ZeroDivisionError:
243.                 continue

```

```

244.     av_rec_v_y = sum(my_rec_v)/len(my_rec_v)
245.     print('my average - Rectangular (vertical) (y-axis)')
246.     print(av_rec_v_y)
247.
248.
249.     # Permanent Magnetization
250.     # (x-axis)
251.     Mx_rec_v = []
252.     for w in range(0,len(mx_rec_v)):
253.         Mx_rec_v_Value = mx_rec_v[w]*V_rec
254.         Mx_rec_v.append(Mx_rec_v_Value)
255.     avMx_rec_v = sum(Mx_rec_v)/len(Mx_rec_v)
256.     print('Mx average - Rectangular (vertical) (x-axis)')
257.     print(avMx_rec_v)
258.
259.     # (y-axis)
260.     My_rec_v = []
261.     for h in range(0,len(my_rec_v)):
262.         My_rec_v_Value = my_rec_v[h]*V_rec
263.         My_rec_v.append(My_rec_v_Value)
264.     avMy_rec_v = sum(My_rec_v)/len(My_rec_v)
265.     print('My average - Rectangular (vertical) (y-axis)')
266.     print(avMy_rec_v)
267.
268.     # In[8]:
269.     # Export Calculated Data (1D)
270.     # for Cylinder
271.     equation_data1 = {'y_cyl_lab':y_cyl_lab,'my_cyl':my_cyl,'My_cyl':My_c
y1}
272.     result1 = pd.DataFrame(equation_data1)
273.     result1.to_excel('Magnetic Moment - Permanent Magnetization (y-
axis) - Cylinder.xlsx')
274.
275.     # for Cube
276.     # (x-axis)
277.     equation_data2 = {'x_cub_lab':x_cub_lab,'mx_cub':mx_cub,'Mx_cub':Mx_c
ub}
278.     result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
279.     result2.to_excel('Magnetic Moment - Permanent Magnetization (x-
axis) - Cube.xlsx')
280.     # (y-axis)
281.     equation_data3 = {'y_cub_lab':y_cub_lab,'my_cub':my_cub,'My_cub':My_c
ub}
282.     result3 = pd.DataFrame(equation_data3)
283.     result3.to_excel('Magnetic Moment - Permanent Magnetization (y-
axis) - Cube.xlsx')
284.
285.     # for Rectangular
286.     # Horizontal
287.     # (x-axis)
288.     equation_data4 = {'x_rec_h_lab':x_rec_h_lab,'mx_rec_h':mx_rec_h,'Mx_r
ec_h':Mx_rec_h}
289.     result4 = pd.DataFrame(equation_data4)
290.     result4.to_excel('Magnetic Moment - Permanent Magnetization (x-
axis) - Rectangular (horizontal).xlsx')
291.     # (y-axis)
292.     equation_data5 = {'y_rec_h_lab':y_rec_h_lab,'my_rec_h':my_rec_h,'My_r
ec_h':My_rec_h}
293.     result5 = pd.DataFrame(equation_data5)
294.     result5.to_excel('Magnetic Moment - Permanent Magnetization (y-
axis) - Rectangular (horizontal).xlsx')
295.
296.     # Vertical
297.     # (x-axis)
298.     equation_data6 = {'x_rec_v_lab':x_rec_v_lab,'mx_rec_v':mx_rec_v,'Mx_r
ec_v':Mx_rec_v}

```



```

299.     result6 = pd.DataFrame(equation_data6)
300.     result6.to_excel('Magnetic Moment - Permanent Magnetization (x-
axis) - Rectangular (vertical).xlsx')
301.     # (y-axis)
302.     equation_data7 = {'y_rec_v_lab':y_rec_v_lab,'my_rec_v':my_rec_v,'My_r
ec_v':My_rec_v}
303.     result7 = pd.DataFrame(equation_data7)
304.     result7.to_excel('Magnetic Moment - Permanent Magnetization (y-
axis) - Rectangular (vertical).xlsx')
305.
306.     # In[9]:
307.     # Plot Magnetic Moment
308.     # for Cylinder
309.     # (y-axis)
310.     fig1 = plt.figure(figsize=(10,6))
311.     my_cyl1D_sctr = plt.scatter(y_cyl_lab,my_cyl, color='blue', linewidth
h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
312.     plt.legend(('my Cube (1D)'), loc='upper right')
313.     plt.title('Magnetic Moment (y-axis) - Cylinder', fontsize=14)
314.     plt.xlabel('y (cm)')
315.     plt.ylabel('my')
316.     plt.ylim(-0.03, 0.0)
317.
318.     # for Cube
319.     # (x-axis)
320.     fig2 = plt.figure(figsize=(10,6))
321.     mx_cub1D_sctr = plt.scatter(x_cub_lab,mx_cub, color='blue', linewidth
= 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
322.     plt.legend(('mx Cube (1D)'), loc='upper right')
323.     plt.title('Magnetic Moment (x-axis) - Cube (1D)', fontsize=14)
324.     plt.xlabel('x (cm)')
325.     plt.ylabel('mx')
326.     plt.ylim(-0.0002, 0.0005)
327.     # (y-axis)
328.     fig3 = plt.figure(figsize=(10,6))
329.     my_cub1D_sctr = plt.scatter(y_cub_lab,my_cub, color='blue', linewidth
= 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
330.     plt.legend(('my Cube (1D)'), loc='upper right')
331.     plt.title('Magnetic Moment (y-axis) - Cube (1D)', fontsize=14)
332.     plt.xlabel('y (cm)')
333.     plt.ylabel('my')
334.     plt.ylim(-0.0025, 0.0005)
335.
336.     # for Rectangular
337.     # Horizontal
338.     # (x-axis)
339.     fig4 = plt.figure(figsize=(10,6))
340.     mx_rec1D_h_sctr = plt.scatter(x_rec_h_lab,mx_rec_h, color='blue', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
341.     plt.legend(('mx Cube (1D)'), loc='upper right')
342.     plt.title('Magnetic Moment (x-axis) -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
343.     plt.xlabel('x (cm)')
344.     plt.ylabel('mx')
345.     plt.ylim(-0.00002, 0.004)
346.     # (y-axis)
347.     fig5 = plt.figure(figsize=(10,6))
348.     my_rec1D_h_sctr = plt.scatter(y_rec_h_lab,my_rec_h, color='blue', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
349.     plt.legend(('my Cube (1D)'), loc='upper right')
350.     plt.title('Magnetic Moment (y-axis) -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
351.     plt.xlabel('y (cm)')
352.     plt.ylabel('my')
353.     plt.ylim(0.01, 0.04)
354.

```

```

355.     # Vertical
356.     # (x-axis)
357.     fig6 = plt.figure(figsize=(10,6))
358.     mx_rec1D_v_sctr = plt.scatter(x_rec_v_lab,mx_rec_v, color='blue', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
359.     plt.legend(('mx Cube (1D)'), loc='upper right')
360.     plt.title('Magnetic Moment (x-axis) -
Rectangular (vertical)', fontsize=14)
361.     plt.xlabel('x (cm)')
362.     plt.ylabel('mx')
363.     plt.ylim(-0.0002, 0.006)
364.     # (y-axis)
365.     fig7 = plt.figure(figsize=(10,6))
366.     my_rec1D_v_sctr = plt.scatter(y_rec_v_lab,my_rec_v, color='blue', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
367.     plt.legend(('my Cube (1D)'), loc='upper right')
368.     plt.title('Magnetic Moment (y-axis) -
Rectangular (vertical)', fontsize=14)
369.     plt.xlabel('y (cm)')
370.     plt.ylabel('my')
371.     plt.ylim(0.01, 0.04)

```

2.2. Οι απλοποιημένες εξισώσεις του νόμου Biot-Savart

```

1. # In[1]:
2. # Libraries
3. import pandas as pd
4. import matplotlib.pyplot as plt
5.
6. # In[2]:
7. # Biot-Savart Equations (cm)
8. def Bx_eq(x,mx):
9.     return (2*10**-1)*mx/(x**3)
10.
11. def By_eq(y,my):
12.     return (2*10**-1)*my/(y**3)
13.
14. # In[3]:
15. # Inputed parameters
16. # for Cylinder
17. my_cyl = float(input("Cylinder: my = "))
18.
19. # for Cube
20. mx_cub = float(input("Cube: mx= "))
21. my_cub = float(input("Cube: my= "))
22.
23. # for Rectangular (horizontal)
24. mx_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): mx= "))
25. my_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): my= "))
26.
27. # for Rectangular (vertical)
28. mx_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): mx= "))
29. my_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): my= "))
30.
31. # In[4]:
32. # Solve Biot-Savart theoretically
33. # for Cylinder
34. Y_cyl_th=[]
35. By_cyl_th=[]
36. for y_cyl in range(6,22,3):
37.     try:

```

```

38.     res_y_cyl = By_eq(y_cyl,my_cyl)
39.     By_cyl_th.append(res_y_cyl)
40.     except ZeroDivisionError:
41.         continue
42.     y_cyl_value = y_cyl
43.     Y_cyl_th.append(y_cyl_value)
44.
45. # for Cube
46. X_cub_th=[]
47. Y_cub_th=[]
48. Bx_cub_th=[]
49. By_cub_th=[]
50. for x_cub in range(4,13,2):
51.     try:
52.         res_x_cub = Bx_eq(x_cub,mx_cub)
53.         Bx_cub_th.append(res_x_cub)
54.     except ZeroDivisionError:
55.         continue
56.     x_cub_value = x_cub
57.     X_cub_th.append(x_cub_value)
58.
59. for y_cub in range(3,22,3):
60.     try:
61.         res_y_cub = By_eq(y_cub,my_cub)
62.         By_cub_th.append(res_y_cub)
63.     except ZeroDivisionError:
64.         continue
65.     y_cub_value = y_cub
66.     Y_cub_th.append(y_cub_value)
67.
68. # for Rectangular
69. # Horizontal
70. X_rec_h_th=[]
71. Y_rec_h_th=[]
72. Bx_rec_h_th=[]
73. By_rec_h_th=[]
74. Bz_rec_h_th=[]
75. for x_rec_h in range(8,15,2):
76.     try:
77.         res_x_rec_h = Bx_eq(x_rec_h,mx_rec_h)
78.         Bx_rec_h_th.append(res_x_rec_h)
79.     except ZeroDivisionError:
80.         continue
81.     x_rec_h_value = x_rec_h
82.     X_rec_h_th.append(x_rec_h_value)
83.
84. for y_rec_h in range(9,22,3):
85.     try:
86.         res_y_rec_h = By_eq(y_rec_h,my_rec_h)
87.         By_rec_h_th.append(res_y_rec_h)
88.     except ZeroDivisionError:
89.         continue
90.     y_rec_h_value = y_rec_h
91.     Y_rec_h_th.append(y_rec_h_value)
92.
93. # Vertical
94. X_rec_v_th=[]
95. Y_rec_v_th=[]
96. Bx_rec_v_th=[]
97. By_rec_v_th=[]
98. Bz_rec_v_th=[]
99. for x_rec_v in range(8,15,2):
100.    try:
101.        res_x_rec_v = Bx_eq(x_rec_v,mx_rec_v)
102.        Bx_rec_v_th.append(res_x_rec_v)
103.    except ZeroDivisionError:

```

```

104.         continue
105.         x_rec_v_value = x_rec_v
106.         X_rec_v_th.append(x_rec_v_value)
107.
108.     for y_rec_v in range(9,22,3):
109.         try:
110.             res_y_rec_v = By_eq(y_rec_v,my_rec_v)
111.             By_rec_v_th.append(res_y_rec_v)
112.         except ZeroDivisionError:
113.             continue
114.         y_rec_v_value = y_rec_v
115.         Y_rec_v_th.append(y_rec_v_value)
116.
117.     # In[5]:
118.     # Export Calculated Biot-Savart
119.     # for Cylinder
120.     equation_data1 = {'y_cyl':Y_cyl_th,'By_cyl_th':By_cyl_th}
121.     result1 = pd.DataFrame(equation_data1)
122.     result1.to_excel('Biot Savart for Cylinder (y-axis).xlsx')
123.
124.     # for Cube
125.     # (x-axis)
126.     equation_data2 = {'x_cub':X_cub_th, 'Bx_cub':Bx_cub_th}
127.     result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
128.     result2.to_excel('Biot Savart for Cube (x-axis).xlsx')
129.     # (y-axis)
130.     equation_data3 = {'y_cub':Y_cub_th, 'By_cub':By_cub_th}
131.     result3 = pd.DataFrame(equation_data3)
132.     result3.to_excel('Biot Savart for Cube (y-axis).xlsx')
133.
134.     # for Rectangular
135.     # horizontal
136.     # (x-axis)
137.     equation_data4 = {'x_rec_h':X_rec_h_th,'Bx_rec_h_th':Bx_rec_h_th}
138.     result4 = pd.DataFrame(equation_data4)
139.     result4.to_excel('Biot Savart for Rectangular (horizontal) (x-
axis).xlsx')
140.     # (y-axis)
141.     equation_data5 = {'y_rec_h':Y_rec_h_th,'By_rec_h_th':By_rec_h_th}
142.     result5 = pd.DataFrame(equation_data5)
143.     result5.to_excel('Biot Savart for Rectangular (horizontal) (y-
axis).xlsx')
144.
145.     # vertical
146.     # (x-axis)
147.     equation_data6 = {'x_rec_v':X_rec_v_th,'Bx_rec_v_th':Bx_rec_v_th}
148.     result6 = pd.DataFrame(equation_data6)
149.     result6.to_excel('Biot Savart for Rectangular (vertical) (x-
axis).xlsx')
150.     # (y-axis)
151.     equation_data7 = {'y_rec_v':Y_rec_v_th,'By_rec_v_th':By_rec_v_th}
152.     result7 = pd.DataFrame(equation_data7)
153.     result7.to_excel('Biot Savart for Rectangular (vertical) (y-
axis).xlsx')
154.
155.     # In[6]:
156.     # Import Measured Data
157.     # for Cylinder
158.     data1 = pd.read_excel('Cylinder_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xls
x')
159.     dfObj1 = pd.DataFrame(data1, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
160.     y_cyl_data = dfObj1['y']
161.     By_cyl_data = dfObj1['By']
162.     y_cyl_lab = y_cyl_data.tolist()
163.     By_cyl_lab = By_cyl_data.tolist()

```

```

164.
165.     # for Cube
166.     # (x-axis)
167.     data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(y=0).xlsx')
168.     dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
169.     x_cub_data = dfObj2['x']
170.     Bx_cub_data = dfObj2['Bx']
171.     x_cub_lab = x_cub_data.tolist()
172.     Bx_cub_lab = Bx_cub_data.tolist()
173.     # (y-axis)
174.     data3 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
175.     dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
176.     y_cub_data = dfObj3['y']
177.     By_cub_data = dfObj3['By']
178.     y_cub_lab = y_cub_data.tolist()
179.     By_cub_lab = By_cub_data.tolist()
180.
181.     # for Rectangular
182.     # Horizontal
183.     # (x-axis)
184.     data4 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(
T, cm)_(y=0).xlsx')
185.     dfObj4 = pd.DataFrame(data4, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
186.     x_rec_h_data = dfObj4['x']
187.     Bx_rec_h_data = dfObj4['Bx']
188.     x_rec_h_lab = x_rec_h_data.tolist()
189.     Bx_rec_h_lab = Bx_rec_h_data.tolist()
190.     # (y-axis)
191.     data5 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(
T, cm)_(x=0).xlsx')
192.     dfObj5 = pd.DataFrame(data5, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
193.     y_rec_h_data = dfObj5['y']
194.     By_rec_h_data = dfObj5['By']
195.     y_rec_h_lab = y_rec_h_data.tolist()
196.     By_rec_h_lab = By_rec_h_data.tolist()
197.
198.     # Vertical
199.     # (x-axis)
200.     data6 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T,
cm)_(y=0).xlsx')
201.     dfObj6 = pd.DataFrame(data6, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
202.     x_rec_v_data = dfObj6['x']
203.     Bx_rec_v_data = dfObj6['Bx']
204.     x_rec_v_lab = x_rec_v_data.tolist()
205.     Bx_rec_v_lab = Bx_rec_v_data.tolist()
206.     # (y-axis)
207.     data7 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T,
cm)_(x=0).xlsx')
208.     dfObj7 = pd.DataFrame(data7, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', '
B'])
209.     y_rec_v_data = dfObj7['y']
210.     By_rec_v_data = dfObj7['By']
211.     y_rec_v_lab = y_rec_v_data.tolist()
212.     By_rec_v_lab = By_rec_v_data.tolist()
213.
214.     # In[7]:
215.     # Print Magnetic Field Calculated / Data
216.     # for Cylinder
217.     print('Biot Savart for Cylinder (y-axis)')
218.     print(By_cyl_th)
219.     print('Data for Cylinder (y-axis)')

```

```

220.     print(By_cyl_lab)
221.     print('_____')
222.
223.     # for Cube
224.     # (x-axis)
225.     print('Biot Savart for Cube (x-axis)')
226.     print(Bx_cub_th)
227.     print('Data for Cube (x-axis)')
228.     print(Bx_cub_lab)
229.     print('-----')
230.     # (y-axis)
231.     print('Biot Savart for Cube (y-axis)')
232.     print(By_cub_th)
233.     print('Data for Cube (y-axis)')
234.     print(By_cub_lab)
235.     print('_____')
236.
237.     # for Rectangular (horizontal)
238.     # (x-axis)
239.     print('Biot Savart for Rectangular (horizontal) (x-axis)')
240.     print(Bx_rec_h_th)
241.     print('Data for Rectangular (horizontal) (x-axis)')
242.     print(Bx_rec_h_lab)
243.     print('-----')
244.     # (y-axis)
245.     print('Biot Savart for Rectangular (horizontal) (y-axis)')
246.     print(By_rec_h_th)
247.     print('Data for Rectangular (horizontal) (y-axis)')
248.     print(By_rec_h_lab)
249.     print('_____')
250.
251.     # for Rectangular (vertical)
252.     # (x-axis)
253.     print('Biot Savart for Rectangular (vertical) (x-axis)')
254.     print(Bx_rec_v_th)
255.     print('Data for Rectangular (vertical) (x-axis)')
256.     print(Bx_rec_v_lab)
257.     print('-----')
258.     # (y-axis)
259.     print('Biot Savart for Rectangular (vertical) (y-axis)')
260.     print(By_rec_v_th)
261.     print('Data for Rectangular (vertical) (y-axis)')
262.     print(By_rec_v_lab)
263.
264.     # In[8]:
265.     # Plot and Compare
266.     #for Cylinder
267.     gridsize1 = (2,2)
268.     fig1 = plt.figure(figsize=(15,8))
269.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize1, (0, 0))
270.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize1, (0, 1))
271.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize1, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
272.
273.     ax1.set_title('Biot-Savart - Cylinder (th)', fontsize=14)
274.     sctr_cyl_th = ax1.scatter(Y_cyl_th,By_cyl_th, color='red', linewidth
= 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
275.     sctr_cyl_th_line = ax1.plot(Y_cyl_th,By_cyl_th, color='red', linewidth
h = 1.0, linestyle = '-')
276.     ax1.set_xlabel('y (cm)')
277.     ax1.set_ylabel('By_th (T)')
278.     ax1.set_ylim(-0.004,0.002)
279.
280.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) -
Cylinder (lab)', fontsize=14)
281.     sctr_cyl_lab = ax2.scatter(y_cyl_lab,By_cyl_lab, color='green', linew
idth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')

```

```

282.     sctr_cyl_lab_line = ax2.plot(y_cyl_lab,By_cyl_lab, color='green', lin
      ewidth = 1.0, linestyle = '-')
283.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
284.     ax2.set_ylabel('By_lab (T)')
285.     ax2.set_ylim(-0.004,0.002)
286.
287.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cylinder', fontsize=14)
288.     sctr_cyl_th = ax3.scatter(Y_cyl_th,By_cyl_th, color='blue', linewidth
      = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
289.     sctr_cyl_lab = ax3.scatter(y_cyl_lab,By_cyl_lab, color='purple', line
      width = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
290.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
291.     ax3.set_ylabel('By_lab (T)')
292.     ax3.set_ylim(-0.004,0.002)
293.     plt.legend([sctr_cyl_th, (sctr_cyl_th, sctr_cyl_lab)], ["By_th", "By_
      lab"])
294.     plt.show()
295.
296.     # In[9]:
297.     # Plot and Compare
298.     #for Cube
299.     # (x-axis)
300.     gridsize2 = (2,2)
301.     fig2 = plt.figure(figsize=(15,8))
302.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 0))
303.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 1))
304.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize2, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
305.
306.     ax1.set_title('Biot-Savart (x-axis) - Cube (th)', fontsize=14)
307.     sctr_cub_xth = ax1.scatter(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewidth
      h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
308.     sctr_cub_xth_line = ax1.plot(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewi
      dth = 1.0, linestyle = '-')
309.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
310.     ax1.set_ylabel('Bx_th (T)')
311.     ax1.set_ylim(-0.00005,0.00002)
312.
313.     ax2.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube (lab)', fontsize=14)
314.     sctr_cub_xlab = ax2.scatter(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', lin
      ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
315.     sctr_cub_xlab_line = ax2.plot(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', l
      inewidth = 1.0, linestyle = '-')
316.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
317.     ax2.set_ylabel('Bx_lab (T)')
318.     ax2.set_ylim(-0.00005,0.00002)
319.
320.     ax3.set_title('Magnetic field (x-axis) - Cube', fontsize=14)
321.     sctr_cub_xth = ax3.scatter(X_cub_th,Bx_cub_th, color='blue', linewidth
      h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
322.     sctr_cub_xlab = ax3.scatter(x_cub_lab,Bx_cub_lab, color='purple', lin
      ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
323.     ax3.set_xlabel('x (cm)')
324.     ax3.set_ylabel('Bx (T)')
325.     ax3.set_ylim(-0.00005,0.00002)
326.     plt.legend([sctr_cub_xth, (sctr_cub_xth, sctr_cub_xlab)], ["Bx_th", "
      Bx_lab"])
327.     plt.show()
328.
329.     # (y-axis)
330.     gridsize3 = (2,2)
331.     fig3 = plt.figure(figsize=(15,8))
332.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize3, (0, 0))
333.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize3, (0, 1))
334.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize3, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
335.
336.     ax1.set_title('Biot-Savart (y-axis) - Cube (th)', fontsize=14)

```

```

337.     sctr_cub_yth = ax1.scatter(Y_cub_th,By_cub_th, color='blue', linewidth
    h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
338.     sctr_cub_yth_line = ax1.plot(Y_cub_th,By_cub_th, color='blue', linewi
    dth = 1.0, linestyle = '-')
339.     ax1.set_xlabel('y (cm)')
340.     ax1.set_ylabel('By_th (T)')
341.     ax1.set_ylim(-0.0001,0.0002)
342.
343.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cube (lab)', fontsize=14)
344.     sctr_cub_ylab = ax2.scatter(y_cub_lab,By_cub_lab, color='purple', lin
    ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
345.     sctr_cub_ylab_line = ax2.plot(y_cub_lab,By_cub_lab, color='purple', l
    inewidth = 1.0, linestyle = '-')
346.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
347.     ax2.set_ylabel('By_lab (T)')
348.     ax2.set_ylim(-0.0001,0.0002)
349.
350.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cube', fontsize=14)
351.     sctr_cub_yth = ax3.scatter(Y_cub_th,By_cub_th, color='blue', linewidth
    h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
352.     sctr_cub_ylab = ax3.scatter(y_cub_lab,By_cub_lab, color='purple', lin
    ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
353.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
354.     ax3.set_ylabel('By (T)')
355.     ax3.set_ylim(-0.0001,0.0002)
356.     plt.legend([sctr_cub_yth, (sctr_cub_yth, sctr_cub_ylab)], ["By_th", "
    By_lab"])
357.     plt.show()
358.
359.     # In[10]:
360.     # Plot and Compare
361.     #for Rectangular (horizontal)
362.     # (x-axis)
363.     gridsize4 = (2,2)
364.     fig4 = plt.figure(figsize=(15,8))
365.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize4, (0, 0))
366.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize4, (0, 1))
367.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize4, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
368.
369.     ax1.set_title('Biot-Savart (x-axis) -
    Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
370.     sctr_rec_h_xth = ax1.scatter(X_rec_h_th,Bx_rec_h_th, color='blue', li
    newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
371.     sctr_rec_h_xth_line = ax1.plot(X_rec_h_th,Bx_rec_h_th, color='blue',
    linewidth = 1.0, linestyle = '-')
372.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
373.     ax1.set_ylabel('Bx_th_h (T)')
374.     ax1.set_ylim(-0.00005,0.0002)
375.
376.     ax2.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
377.     sctr_rec_h_xlab = ax2.scatter(x_rec_h_lab,Bx_rec_h_lab, color='purple
    ', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
378.     sctr_rec_h_xlab_line = ax2.plot(x_rec_h_lab,Bx_rec_h_lab, color='purp
    le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
379.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
380.     ax2.set_ylabel('Bx_lab_h (T)')
381.     ax2.set_ylim(-0.00005,0.0002)
382.
383.     ax3.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
384.     sctr_rec_h_xth = ax3.scatter(X_rec_h_th,Bx_rec_h_th, color='blue', li
    newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
385.     sctr_rec_h_xlab = ax3.scatter(x_rec_h_lab,Bx_rec_h_lab, color='purple
    ', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
386.     ax3.set_xlabel('x (cm)')

```



```

387.     ax3.set_ylabel('Bx (T)')
388.     ax3.set_ylim(-0.00005,0.0002)
389.     plt.legend([sctr_rec_h_xth, (sctr_rec_h_xth, sctr_rec_h_xlab)], ["Bx_
th", "Bx_lab_h"])
390.     plt.show()
391.
392.     # (y-axis)
393.     gridsize5 = (2,2)
394.     fig5 = plt.figure(figsize=(15,8))
395.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize5, (0, 0))
396.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize5, (0, 1))
397.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize5, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
398.
399.     ax1.set_title('Biot-Savart (y-axis) -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
400.     sctr_rec_h_yth = ax1.scatter(Y_rec_h_th,By_rec_h_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
401.     sctr_rec_h_yth_line = ax1.plot(Y_rec_h_th,By_rec_h_th, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
402.     ax1.set_xlabel('y_th_h (cm)')
403.     ax1.set_ylabel('By_th_h (T)')
404.     ax1.set_ylim(-0.0002,0.001)
405.
406.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
407.     sctr_rec_h_ylab = ax2.scatter(y_rec_h_lab,By_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
408.     sctr_rec_h_ylab_line = ax2.plot(y_rec_h_lab,By_rec_h_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
409.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
410.     ax2.set_ylabel('By_lab_h (T)')
411.     ax2.set_ylim(-0.0002,0.001)
412.
413.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) -
Rectangular (horizontal)', fontsize=14)
414.     sctr_rec_h_yth = ax3.scatter(Y_rec_h_th,By_rec_h_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
415.     sctr_rec_h_ylab = ax3.scatter(y_rec_h_lab,By_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
416.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
417.     ax3.set_ylabel('By (T)')
418.     ax3.set_ylim(-0.0002,0.001)
419.     plt.legend([sctr_rec_h_yth, (sctr_rec_h_yth, sctr_rec_h_ylab)], ["By_
th", "By_lab_h"])
420.     plt.show()
421.
422.     # In[11]:
423.     # Plot and Compare
424.     #for Rectangular (vertical)
425.     # (x-axis)
426.     gridsize6 = (2,2)
427.     fig6 = plt.figure(figsize=(15,8))
428.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize6, (0, 0))
429.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize6, (0, 1))
430.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize6, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
431.
432.     ax1.set_title('Biot-Savart (x-axis) -
Rectangular (vertical)', fontsize=14)
433.     sctr_rec_v_xth = ax1.scatter(X_rec_v_th,Bx_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
434.     sctr_rec_v_xth_line = ax1.plot(X_rec_v_th,Bx_rec_v_th, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
435.     ax1.set_xlabel('x (cm)')
436.     ax1.set_ylabel('Bx_th_v (T)')
437.     ax1.set_ylim(-0.00002,0.00015)
438.

```

```

439.     ax2.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
440.     sctr_rec_v_xlab = ax2.scatter(x_rec_v_lab,Bx_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
441.     sctr_rec_v_xlab_line = ax2.plot(x_rec_v_lab,Bx_rec_v_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
442.     ax2.set_xlabel('x (cm)')
443.     ax2.set_ylabel('Bx_lab_v (T)')
444.     ax2.set_ylim(-0.00002,0.00015)
445.
446.     ax3.set_title('Magnetic field (x-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
447.     sctr_rec_v_xth = ax3.scatter(X_rec_v_th,Bx_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
448.     sctr_rec_v_xlab = ax3.scatter(x_rec_v_lab,Bx_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
449.     ax3.set_xlabel('x (cm)')
450.     ax3.set_ylabel('Bx (T)')
451.     ax3.set_ylim(-0.00002,0.00015)
452.     plt.legend([sctr_rec_v_xth, (sctr_rec_v_xth, sctr_rec_v_xlab)], ["Bx_
th_v", "Bx_lab_v"])
453.     plt.show()
454.
455.     # (y-axis)
456.     gridsize7 = (2,2)
457.     fig7 = plt.figure(figsize=(15,8))
458.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize7, (0, 0))
459.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize7, (0, 1))
460.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize7, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
461.
462.     ax1.set_title('Biot-Savart (y-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
463.     sctr_rec_v_yth = ax1.scatter(Y_rec_v_th,By_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
464.     sctr_rec_v_yth_line = ax1.plot(Y_rec_v_th,By_rec_v_th, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
465.     ax1.set_xlabel('y_th_v (cm)')
466.     ax1.set_ylabel('By_th_v (T)')
467.     ax1.set_ylim(-0.00015,0.001)
468.
469.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
470.     sctr_rec_v_ylab = ax2.scatter(y_rec_v_lab,By_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
471.     sctr_rec_v_ylab_line = ax2.plot(y_rec_v_lab,By_rec_v_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
472.     ax2.set_xlabel('y (cm)')
473.     ax2.set_ylabel('By_lab_v (T)')
474.     ax2.set_ylim(-0.00015,0.001)
475.
476.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Rectangular (vertical)', fontsize=14)
477.     sctr_rec_v_yth = ax3.scatter(Y_rec_v_th,By_rec_v_th, color='blue', li
newidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
478.     sctr_rec_v_ylab = ax3.scatter(y_rec_v_lab,By_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
479.     ax3.set_xlabel('y (cm)')
480.     ax3.set_ylabel('By (T)')
481.     ax3.set_ylim(-0.00015,0.001)
482.     plt.legend([sctr_rec_v_yth, (sctr_rec_v_yth, sctr_rec_v_ylab)], ["By_
th_v", "By_lab_v"])
483.     plt.show()

```

2.3. Επίλυση του απλοποιημένου νόμου Biot-Savart

```
1. # In[1]:
2. # Libraries
3. import pandas as pd
4. import matplotlib.pyplot as plt
5. import sympy as sp
6. from sympy import solve
7.
8. # In[2]:
9. # Biot-Savart Equations (cm)
10. def Bx_eq(x,mx):
11.     return (2*10**-1)*mx/(x**3)
12.
13. def By_eq(y,my):
14.     return (2*10**-1)*my/(y**3)
15.
16. # In[3]:
17. # Inputed parameters
18. # for Cylinder
19. my_cyl = float(input("Cylinder: my = "))
20.
21. # for Cube
22. mx_cub = float(input("Cube: mx= "))
23. my_cub = float(input("Cube: my= "))
24.
25. # for Rectangular (horizontal)
26. mx_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): mx= "))
27. my_rec_h = float(input("Rectangular (horizontal): my= "))
28.
29. # for Rectangular (vertical)
30. mx_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): mx= "))
31. my_rec_v = float(input("Rectangular (vertical): my= "))
32.
33. # In[4]:
34. # Import Measured Data
35. # for Cylinder
36. data1 = pd.read_excel('Cylinder_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
37. dfObj1 = pd.DataFrame(data1, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
38. y_cyl_data = dfObj1['y']
39. By_cyl_data = dfObj1['By']
40. y_cyl_lab = y_cyl_data.tolist()
41. By_cyl_lab = By_cyl_data.tolist()
42.
43. # for Cube
44. # (x-axis)
45. data2 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(y=0).xlsx')
46. dfObj2 = pd.DataFrame(data2, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
47. x_cub_data = dfObj2['x']
48. Bx_cub_data = dfObj2['Bx']
49. x_cub_lab = x_cub_data.tolist()
50. Bx_cub_lab = Bx_cub_data.tolist()
51. # (y-axis)
52. data3 = pd.read_excel('Cube_without_geomagnetic_(T, cm)_(x=0).xlsx')
53. dfObj3 = pd.DataFrame(data3, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
54. y_cub_data = dfObj3['y']
55. By_cub_data = dfObj3['By']
56. y_cub_lab = y_cub_data.tolist()
57. By_cub_lab = By_cub_data.tolist()
58.
59. # for Rectangular
60. # Horizontal
61. # (x-axis)
```

```

62. data4 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (y=0).xlsx')
63. dfObj4 = pd.DataFrame(data4, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
64. x_rec_h_data = dfObj4['x']
65. Bx_rec_h_data = dfObj4['Bx']
66. x_rec_h_lab = x_rec_h_data.tolist()
67. Bx_rec_h_lab = Bx_rec_h_data.tolist()
68. # (y-axis)
69. data5 = pd.read_excel('Rectangular (horizontal)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (x=0).xlsx')
70. dfObj5 = pd.DataFrame(data5, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
71. y_rec_h_data = dfObj5['y']
72. By_rec_h_data = dfObj5['By']
73. y_rec_h_lab = y_rec_h_data.tolist()
74. By_rec_h_lab = By_rec_h_data.tolist()
75.
76. # Vertical
77. # (x-axis)
78. data6 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (y=0).xlsx')
79. dfObj6 = pd.DataFrame(data6, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
80. x_rec_v_data = dfObj6['x']
81. Bx_rec_v_data = dfObj6['Bx']
82. x_rec_v_lab = x_rec_v_data.tolist()
83. Bx_rec_v_lab = Bx_rec_v_data.tolist()
84. # (y-axis)
85. data7 = pd.read_excel('Rectangular (vertical)_without_geomagnetic_(T, cm)_
    (x=0).xlsx')
86. dfObj7 = pd.DataFrame(data7, columns = ['x', 'y', 'Bx', 'By', 'Bz', 'B'])
87. y_rec_v_data = dfObj7['y']
88. By_rec_v_data = dfObj7['By']
89. y_rec_v_lab = y_rec_v_data.tolist()
90. By_rec_v_lab = By_rec_v_data.tolist()
91.
92. # In[5]:
93. # Solve Biot-Savart
94. # for Cylinder
95. y_cyl = sp.Symbol('y_cyl', real=True)
96. Y_cyl_th=[]
97. RESY_cyl = []
98. for i in range(0,len(By_cyl_lab)):
99.     f1 = By_cyl_lab[i] - By_eq(y_cyl,my_cyl)
100.     resy_cyl = solve(f1, y_cyl)
101.     resy_cyl_d = resy_cyl[0]
102.     RESY_cyl.append(resy_cyl_d)
103.     y_cyl_value = y_cyl
104.     Y_cyl_th.append(y_cyl_value)
105.     print('Biot-Savart for Cylinder: y (cm)')
106.     print(RESY_cyl)
107.     print('Data for Cylinder: y (cm)')
108.     print(y_cyl_lab)
109.     print('_____')
110.
111.     # for Cube
112.     x_cub = sp.Symbol('x_cub', real=True)
113.     y_cub = sp.Symbol('y_cub', real=True)
114.     X_cub_th=[]
115.     Y_cub_th=[]
116.     RESX_cub = []
117.     RESY_cub = []
118.     for j in range(0,len(Bx_cub_lab)):
119.         f2 = Bx_cub_lab[j] - Bx_eq(x_cub,mx_cub)
120.         resx_cub = solve(f2, x_cub)
121.         resx_cub_d = resx_cub[0]
122.         RESX_cub.append(resx_cub_d)
123.         x_cub_value = x_cub

```

```

124.     X_cub_th.append(x_cub_value)
125.     print('Biot-Savart for Cube: x (cm)')
126.     print(RESX_cub)
127.     print('Data for Cube: x (cm)')
128.     print(x_cub_lab)
129.     print('-----')
130.
131.     for k in range(0,len(By_cub_lab)):
132.         f3 = By_cub_lab[k] - By_eq(y_cub,my_cub)
133.         resy_cub = solve(f3, y_cub)
134.         resy_cub_d = resy_cub[0]
135.         RESY_cub.append(resy_cub_d)
136.         y_cub_value = y_cub
137.         Y_cub_th.append(y_cub_value)
138.     print('Biot-Savart for Cube: y (cm)')
139.     print(RESY_cub)
140.     print('Data for Cube: y (cm)')
141.     print(y_cub_lab)
142.     print('_____')
143.
144.     # for Rectangular
145.     # Horizontal
146.     x_rec_h = sp.Symbol('x_rec_h', real=True)
147.     y_rec_h = sp.Symbol('y_rec_h', real=True)
148.     X_rec_h_th = []
149.     Y_rec_h_th = []
150.     RESX_rec_h = []
151.     RESY_rec_h = []
152.
153.     for l in range(0,len(Bx_rec_h_lab)):
154.         f4 = (Bx_rec_h_lab[l] - Bx_eq(x_rec_h,mx_rec_h))
155.         resx_rec_h = solve(f4, x_rec_h)
156.         resx_rec_h_d = resx_rec_h[0]
157.         RESX_rec_h.append(resx_rec_h_d)
158.         x_rec_h_value = x_rec_h
159.         X_rec_h_th.append(x_rec_h_value)
160.     print('Biot-Savart for Rectangular (horizontal): x (cm)')
161.     print(RESX_rec_h)
162.     print('Data for Rectangular (horizontal): x (cm)')
163.     print(x_rec_h_lab)
164.     print('-----')
165.
166.     for m in range(0,len(By_rec_h_lab)):
167.         f5 = (By_rec_h_lab[m] - By_eq(y_rec_h,my_rec_h))
168.         resy_rec_h = solve(f5, y_rec_h)
169.         resy_rec_h_d = resy_rec_h[0]
170.         RESY_rec_h.append(resy_rec_h_d)
171.         y_rec_h_value = y_rec_h
172.         Y_rec_h_th.append(y_rec_h_value)
173.     print('Biot-Savart for Rectangular (horizontal): y (cm)')
174.     print(RESY_rec_h)
175.     print('Data for Rectangular (horizontal): y (cm)')
176.     print(y_rec_h_lab)
177.     print('_____')
178.
179.     # Vertical
180.     x_rec_v = sp.Symbol('x_rec_v', real=True)
181.     y_rec_v = sp.Symbol('y_rec_v', real=True)
182.     X_rec_v_th = []
183.     Y_rec_v_th = []
184.     RESX_rec_v = []
185.     RESY_rec_v = []
186.     for n in range(0,len(Bx_rec_v_lab)):
187.         f6 = (Bx_rec_v_lab[n] - Bx_eq(x_rec_v,mx_rec_v))
188.         resx_rec_v = solve(f6, x_rec_v)
189.         resx_rec_v_d = resx_rec_v[0]

```

```

190.     RESX_rec_v.append(resx_rec_v_d)
191.     x_rec_v_value = x_rec_v
192.     X_rec_v_th.append(x_rec_v_value)
193.     print('Biot-Savart for Rectangular (vertical): x (cm)')
194.     print(RESX_rec_v)
195.     print('Data for Rectangular (vertical): x (cm)')
196.     print(x_rec_v_lab)
197.     print('-----')
198.
199.     for p in range(0,len(By_rec_v_lab)):
200.         f7 = (By_rec_v_lab[p] - By_eq(y_rec_v,my_rec_v))
201.         resy_rec_v = solve(f7, y_rec_v)
202.         resy_rec_v_d = resy_rec_v[0]
203.         RESY_rec_v.append(resy_rec_v_d)
204.         y_rec_v_value = y_rec_v
205.         Y_rec_v_th.append(y_rec_v_value)
206.         print('Biot-Savart for Rectangular (vertical): y (cm)')
207.         print(RESY_rec_v)
208.         print('Data for Rectangular (vertical): y (cm)')
209.         print(y_rec_v_lab)
210.         print('_____')
211.
212.     # In[5]:
213.     # Export Calculated Biot-Savart
214.     # for Cylinder
215.     equation_data1 = {'By_cyl_lab':By_cyl_lab,'y_cyl':y_cyl_lab,'RESY_cyl
':RESY_cyl}
216.     result1 = pd.DataFrame(equation_data1)
217.     result1.to_excel('Solve Biot Savart for Cylinder (y-axis).xlsx')
218.
219.     # for Cube
220.     # (x-axis)
221.     equation_data2 = {'Bx_cub_lab':Bx_cub_lab,'x_cub':x_cub_lab, 'RESX_cu
b':RESX_cub}
222.     result2 = pd.DataFrame(equation_data2)
223.     result2.to_excel('Solve Biot Savart for Cube (x-axis).xlsx')
224.     # (y-axis)
225.     equation_data3 = {'By_cub_lab':By_cub_lab,'y_cub':y_cub_lab, 'RESY_cu
b':RESY_cub}
226.     result3 = pd.DataFrame(equation_data3)
227.     result3.to_excel('Solve Biot Savart for Cube (y-axis).xlsx')
228.
229.     # for Rectangular
230.     # horizontal
231.     # (x-axis)
232.     equation_data4 = {'Bx_rec_h_lab':Bx_rec_h_lab,'x_rec_h':x_rec_h_lab,'
RESX_rec_h':RESX_rec_h}
233.     result4 = pd.DataFrame(equation_data4)
234.     result4.to_excel('Solve Biot Savart for Rectangular (horizontal) (x-
axis).xlsx')
235.     # (y-axis)
236.     equation_data5 = {'By_rec_h_lab':By_rec_h_lab,'y_rec_h':y_rec_h_lab,'
RESY_rec_h':RESY_rec_h}
237.     result5 = pd.DataFrame(equation_data5)
238.     result5.to_excel('Solve Biot Savart for Rectangular (horizontal) (y-
axis).xlsx')
239.
240.     # vertical
241.     # (x-axis)
242.     equation_data6 = {'Bx_rec_v_lab':Bx_rec_v_lab,'x_rec_v':x_rec_v_lab,'
RESX_rec_v':RESX_rec_v}
243.     result6 = pd.DataFrame(equation_data6)
244.     result6.to_excel('Solve Biot Savart for Rectangular (vertical) (x-
axis).xlsx')
245.     # (y-axis)

```

```

246.     equation_data7 = {'By_rec_v_lab':By_rec_v_lab,'y_rec_v':y_rec_v_lab,'
    RESY_rec_v':RESY_rec_v}
247.     result7 = pd.DataFrame(equation_data7)
248.     result7.to_excel('Solve Biot Savart for Rectangular (vertical) (y-
    axis).xlsx')
249.
250.     # In[:
251.
252.     # In[8]:
253.     # Plot and Compare
254.     #for Cylinder
255.     gridsize1 = (2,2)
256.     fig1 = plt.figure(figsize=(15,8))
257.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize1, (0, 0))
258.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize1, (0, 1))
259.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize1, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
260.
261.     ax1.set_title('Biot-Savart - Cylinder (th)', fontsize=14)
262.     sctr_cyl_th = ax1.scatter(By_cyl_lab,RESY_cyl, color='red', linewidth
    = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
263.     sctr_cyl_th_line = ax1.plot(By_cyl_lab,RESY_cyl, color='red', linewid
    th = 1.0, linestyle = '-')
264.     ax1.set_xlabel('By_lab (T)')
265.     ax1.set_ylabel('y_th (cm)')
266.     ax1.set_xlim(-0.0015,0.0025)
267.
268.     ax2.set_title('Magnetic field (y-axis) -
    Cylinder (lab)', fontsize=14)
269.     sctr_cyl_lab = ax2.scatter(By_cyl_lab,y_cyl_lab, color='green', linew
    idth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
270.     sctr_cyl_lab_line = ax2.plot(By_cyl_lab,y_cyl_lab, color='green', lin
    ewidth = 1.0, linestyle = '-')
271.     ax2.set_xlabel('By_lab (T)')
272.     ax2.set_ylabel('y_lab (cm)')
273.     ax2.set_xlim(-0.0015,0.0025)
274.
275.     ax3.set_title('Magnetic field (y-axis) - Cylinder', fontsize=14)
276.     sctr_cyl_th = ax3.scatter(By_cyl_lab,RESY_cyl, color='blue', linewidth
    h = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
277.     sctr_cyl_lab = ax3.scatter(By_cyl_lab,y_cyl_lab, color='purple', line
    width = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
278.     ax3.set_xlabel('By_lab (T)')
279.     ax3.set_ylabel('y (cm)')
280.     ax3.set_xlim(-0.0015,0.0025)
281.
282.     plt.legend([sctr_cyl_th, (sctr_cyl_th, sctr_cyl_lab)], ["y_cyl_th", "
    y_cyl_lab"])
283.     plt.show()
284.
285.
286.     # In[7]:
287.     # Plot and Compare
288.     #for Cube
289.     # (x-axis)
290.     gridsize2 = (2,2)
291.     fig2 = plt.figure(figsize=(15,8))
292.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 0))
293.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize2, (0, 1))
294.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize2, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
295.
296.     ax1.set_title('Biot-Savart for Cube: x (cm)', fontsize=14)
297.     sctr_xcub_th = ax1.scatter(Bx_cub_lab,RESX_cub, color='blue', linewid
    th = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
298.     sctr_xcub_th_line = ax1.plot(Bx_cub_lab,RESX_cub, color='blue', linew
    idth = 1.0, linestyle = '-')
299.     ax1.set_xlabel('Bx_lab (T)')

```

```

300.     ax1.set_ylabel('x_th (cm)')
301.     ax1.set_xlim(-0.00005,0.00015)
302.
303.     ax2.set_title('Data for Cube: x (cm)', fontsize=14)
304.     sctr_xcub_lab = ax2.scatter(Bx_cub_lab,x_cub_lab, color='purple', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
305.     sctr_xcub_lab_line = ax2.plot(Bx_cub_lab,x_cub_lab, color='purple', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-')
306.     ax2.set_xlabel('Bx_lab (T)')
307.     ax2.set_ylabel('x_lab (cm)')
308.     ax2.set_xlim(-0.00005,0.00015)
309.
310.     ax3.set_title('Biot-Savart & Data for Cube: x (cm)', fontsize=14)
311.     sctr_xcub_th = ax3.scatter(Bx_cub_lab,RESX_cub, color='blue', linewid
th = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
312.     sctr_xcub_lab = ax3.scatter(Bx_cub_lab,x_cub_lab, color='purple', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
313.     ax3.set_xlabel('Bx (T)')
314.     ax3.set_ylabel('x (cm)')
315.     ax3.set_xlim(-0.00005,0.00015)
316.     plt.legend([sctr_xcub_th, (sctr_xcub_th, sctr_xcub_lab)], ["x_cub_th"
, "x_cub_lab"])
317.     plt.show()
318.
319.
320.     # (y-axis)
321.     gridsize3 = (2,2)
322.     fig3 = plt.figure(figsize=(15,8))
323.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize3, (0, 0))
324.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize3, (0, 1))
325.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize3, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
326.
327.     ax1.set_title('Biot-Savart for Cube: y (cm)', fontsize=14)
328.     sctr_ycub_th = ax1.scatter(By_cub_lab,RESY_cub, color='blue', linewid
th = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
329.     sctr_ycub_th_line = ax1.plot(By_cub_lab,RESY_cub, color='blue', linew
idth = 1.0, linestyle = '-')
330.     ax1.set_xlabel('By_lab (T)')
331.     ax1.set_ylabel('y_th (cm)')
332.     ax1.set_xlim(-0.0003,0.00002)
333.
334.     ax2.set_title('Data for Cube: y (cm)', fontsize=14)
335.     sctr_ycub_lab = ax2.scatter(By_cub_lab,y_cub_lab, color='purple', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
336.     sctr_ycub_lab_line = ax2.plot(By_cub_lab,y_cub_lab, color='purple', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-')
337.     ax2.set_xlabel('By_lab (T)')
338.     ax2.set_ylabel('y_lab (cm)')
339.     ax2.set_xlim(-0.0003,0.00002)
340.
341.     ax3.set_title('Biot-Savart & Data for Cube: y (cm)', fontsize=14)
342.     sctr_ycub_th = ax3.scatter(By_cub_lab,RESY_cub, color='blue', linewid
th = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
343.     sctr_ycub_lab = ax3.scatter(By_cub_lab,y_cub_lab, color='purple', lin
ewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
344.     ax3.set_xlabel('By_lab (T)')
345.     ax3.set_ylabel('y (cm)')
346.     ax3.set_xlim(-0.0003,0.00002)
347.     plt.legend([sctr_ycub_th, (sctr_ycub_th, sctr_ycub_lab)], ["y_cub_th"
, "y_cub_lab"])
348.     plt.show()
349.
350.     # In[8]:
351.     # Plot and Compare
352.     #for Rectangular (horizontal)
353.     # (x-axis)

```



```

354.     gridsize4 = (2,2)
355.     fig4 = plt.figure(figsize=(15,8))
356.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize4, (0, 0))
357.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize4, (0, 1))
358.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize4, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
359.
360.     ax1.set_title('Biot-
Savart for Rectangular (horizontal): x (cm)', fontsize=14)
361.     sctr_xrec_h_th = ax1.scatter(Bx_rec_h_lab,RESX_rec_h, color='blue', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
362.     sctr_xrec_h_th_line = ax1.plot(Bx_rec_h_lab,RESX_rec_h, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
363.     ax1.set_xlabel('Bx_lab (T)')
364.     ax1.set_ylabel('x_th (cm)')
365.     ax1.set_xlim(0.0,0.00015)
366.
367.     ax2.set_title('Data for Rectangular (horizontal): x (cm)', fontsize=1
4)
368.     sctr_xrec_h_lab = ax2.scatter(Bx_rec_h_lab,x_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
369.     sctr_xrec_h_lab_line = ax2.plot(Bx_rec_h_lab,x_rec_h_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
370.     ax2.set_xlabel('Bx_lab (T)')
371.     ax2.set_ylabel('x_lab (cm)')
372.     ax2.set_xlim(0.0,0.00015)
373.
374.     ax3.set_title('Biot-
Savart & Data for Rectangular (horizontal): y (cm)', fontsize=14)
375.     sctr_xrec_h_th = ax3.scatter(Bx_rec_h_lab,RESX_rec_h, color='blue', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
376.     sctr_xrec_h_lab = ax3.scatter(Bx_rec_h_lab,x_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
377.     ax3.set_xlabel('Bx_lab (T)')
378.     ax3.set_ylabel('x (cm)')
379.     ax3.set_xlim(0.0,0.00015)
380.     plt.legend([sctr_xrec_h_th, (sctr_xrec_h_th, sctr_xrec_h_lab)], ["x_r
ec_h_th", "x_rec_h_lab"])
381.     plt.show()
382.
383.     # (y-axis)
384.     gridsize5 = (2,2)
385.     fig5 = plt.figure(figsize=(15,8))
386.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize5, (0, 0))
387.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize5, (0, 1))
388.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize5, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
389.
390.     ax1.set_title('Biot-
Savart for Rectangular (horizontal): y (cm)', fontsize=14)
391.     sctr_yrec_h_th = ax1.scatter(By_rec_h_lab,RESY_rec_h, color='blue', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
392.     sctr_yrec_h_th_line = ax1.plot(By_rec_h_lab,RESY_rec_h, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
393.     ax1.set_xlabel('By_lab (T)')
394.     ax1.set_ylabel('y_th (cm)')
395.     ax1.set_xlim(-0.00006,0.0008)
396.
397.     ax2.set_title('Data for Rectangular (horizontal): y (cm)', fontsize=1
4)
398.     sctr_yrec_h_lab = ax2.scatter(By_rec_h_lab,y_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
399.     sctr_yrec_h_lab_line = ax2.plot(By_rec_h_lab,y_rec_h_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
400.     ax2.set_xlabel('By_lab (T)')
401.     ax2.set_ylabel('y_lab (cm)')
402.     ax2.set_xlim(-0.00006,0.0008)
403.

```

```

404.     ax3.set_title('Biot-
Savart & Data for Rectangular (horizontal): y (cm)', fontsize=14)
405.     sctr_yrec_h_th = ax3.scatter(By_rec_h_lab,RESY_rec_h, color='blue', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
406.     sctr_yrec_h_lab = ax3.scatter(By_rec_h_lab,y_rec_h_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
407.     ax3.set_xlabel('By_lab (T)')
408.     ax3.set_ylabel('y (cm)')
409.     ax3.set_xlim(-0.00006,0.0008)
410.     plt.legend([sctr_yrec_h_th, (sctr_yrec_h_th, sctr_yrec_h_lab)], ["y_r
ec_h_th", "y_rec_h_lab"])
411.     plt.show()
412.
413.     # In[9]:
414.     # Plot and Compare
415.     #for Rectangular (vertical)
416.     # (x-axis)
417.     gridsize6 = (2,2)
418.     fig6 = plt.figure(figsize=(15,8))
419.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize6, (0, 0))
420.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize6, (0, 1))
421.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize6, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
422.
423.     ax1.set_title('Biot-
Savart for Rectangular (vertical): x (cm)', fontsize=14)
424.     sctr_xrec_v_th = ax1.scatter(Bx_rec_v_lab,RESX_rec_v, color='blue', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
425.     sctr_xrec_v_th_line = ax1.plot(Bx_rec_v_lab,RESX_rec_v, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
426.     ax1.set_xlabel('Bx_lab (T)')
427.     ax1.set_ylabel('x_th (cm)')
428.     ax1.set_xlim(0,0.00015)
429.
430.     ax2.set_title('Data for Rectangular (vertical): x (cm)', fontsize=14)
431.     sctr_xrec_v_lab = ax2.scatter(Bx_rec_v_lab,x_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
432.     sctr_xrec_v_lab_line = ax2.plot(Bx_rec_v_lab,x_rec_v_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
433.     ax2.set_xlabel('Bx_lab (T)')
434.     ax2.set_ylabel('x_lab (cm)')
435.     ax2.set_xlim(0,0.00015)
436.
437.     ax3.set_title('Biot-
Savart & Data for Rectangular (vertical): x (cm)', fontsize=14)
438.     sctr_xrec_v_th = ax3.scatter(Bx_rec_v_lab,RESX_rec_v, color='blue', l
inewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
439.     sctr_xrec_v_lab = ax3.scatter(Bx_rec_v_lab,x_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
440.     ax3.set_xlabel('Bx_lab (T)')
441.     ax3.set_ylabel('x (cm)')
442.     ax3.set_xlim(0,0.00015)
443.     plt.legend([sctr_xrec_v_th, (sctr_xrec_v_th, sctr_xrec_v_lab)], ["x_r
ec_v_th", "x_rec_v_lab"])
444.     plt.show()
445.
446.
447.     # (y-axis)
448.     gridsize7 = (2,2)
449.     fig7 = plt.figure(figsize=(15,8))
450.     ax1 = plt.subplot2grid(gridsize7, (0, 0))
451.     ax2 = plt.subplot2grid(gridsize7, (0, 1))
452.     ax3 = plt.subplot2grid(gridsize7, (1, 0), colspan=2, rowspan=2)
453.
454.     ax1.set_title('Biot-
Savart for Rectangular (vertical): y (cm)', fontsize=14)

```

```

455.     sctr_yrec_v_th = ax1.scatter(By_rec_v_lab,RESY_rec_v, color='blue', l
linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
456.     sctr_yrec_v_th_line = ax1.plot(By_rec_v_lab,RESY_rec_v, color='blue',
linewidth = 1.0, linestyle = '-')
457.     ax1.set_xlabel('By_lab (T)')
458.     ax1.set_ylabel('y_th (cm)')
459.     ax1.set_xlim(0,0.0008)
460.
461.     ax2.set_title('Data for Rectangular (vertical): y (cm)', fontsize=14)
462.     sctr_yrec_v_lab = ax2.scatter(By_rec_v_lab,y_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
463.     sctr_yrec_v_lab_line = ax2.plot(By_rec_v_lab,y_rec_v_lab, color='purp
le', linewidth = 1.0, linestyle = '-')
464.     ax2.set_xlabel('By_lab (T)')
465.     ax2.set_ylabel('y_lab (cm)')
466.     ax2.set_xlim(0,0.0008)
467.
468.     ax3.set_title('Biot-
Savart & Data for Rectangular (vertical): y (cm)', fontsize=14)
469.     sctr_yrec_v_th = ax3.scatter(By_rec_v_lab,RESY_rec_v, color='blue', l
linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
470.     sctr_yrec_v_lab = ax3.scatter(By_rec_v_lab,y_rec_v_lab, color='purple
', linewidth = 1.0, linestyle = '-', cmap='RdYlGn')
471.     ax3.set_xlabel('By_lab (T)')
472.     ax3.set_ylabel('y (cm)')
473.     ax3.set_xlim(0,0.0008)
474.     plt.legend([sctr_yrec_v_th, (sctr_yrec_v_th, sctr_yrec_v_lab)], ["y_r
ec_v_th", "y_rec_v_lab"])
475.     plt.show()

```