ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Πληθωριστικές Διαταραχές και ο Τανυστής του Weyl

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Βασιλικής Ζαννή

Επιβλέπων: Αλέξανδρος Κεχαγιάς

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα

Φεβρουάριος 2019

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

Πληθωριστικές Διαταραχές και ο Τανυστής του Weyl

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Βασιλικής Ζαννή

Επιβλέπων: Αλέξανδρος Κεχαγιάς

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τον Φεβρουάριο του 2019.

(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)
....	....	....
Αλέξανδρος Κεχαγιάς	Νικόλαος 'Ηργες	Γεώργιος Κουτσούμπας
Καθηγητής Ε.Μ.Π	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία περιστρέφεται γύρω από την ευρέως διαδεδομένη θεωρία του πληθωρισμο-ύ (inflation). Αρχικά διατυπώνονται τα προβλήματα της μεγάλης έκρηξης τα οποία κατέστησαν αναγκαία την εμφάνιση αυτής της θεωρίας, ενώ στην πορεία της εργασίας μελετώνται τα χα-ρακτηριστικά του φαινομένου, οι προβλέψεις του καθώς και ο τρόπος με τον οποίο οδηγεί το σύμπαν στη σημερινή του μορφή, θεωρητικά με την παράθεση κάποιων αποσπασμάτων αλλά και πρακτικά, με αναλυτικές πράξεις. Τέλος, η εργασία πραγματεύεται τη σύνδεση του τανυ-στή Weyl με το inflation και την τροποποίηση που αυτή επιφέρει στη ¨μέτρηση¨ βαρυτικών κυμάτων.

Ολοκληρώνοντας τον πρόλογο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Α-λέξανδρο Κεχαγιά για τη βοήθεια και την καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας μου.

Περιεχόμενα

0.1 Εισαγωγή

0.1.1 Προβλήματα του Big Bang

Γνωρίζουμε ότι η θεωρία της μεγάλης έκρηξης είναι η πιο διαδεδομένη θεωρία σήμερα μέσα στους επιστημονικούς κύκλους. Ωστόσο αντιμετωπίζει κάποια προβλήματα, μερικά από τα οποία είναι και τα παρακάτω :

- **Magnetic-Monopoles problem**

  Ενώ από τη θεωρία προβλέπεται αφθονία μαγνητικών μονόπολων στο σύμπαν, σήμερα δεν παρατηρούνται.

- **Flatness problem**

  Από τη σχέση $\rho^{cr}(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$ και τη 2^η εξίσωση Friedmann $\rho(t) = \frac{3}{8\pi G}(H^2 + \frac{k}{a^2})$, μπορούμε να ορίσουμε την κοσμολογική παράμετρο $\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho^{cr}(t)} \Rightarrow \Omega(t) - 1 = \frac{k}{(Ha)^2}$. Αυτή είναι ουσιαστικά μία ποσότητα που μας δείχνει τη γεωμετρία του σύμπαντος. Συγκεκριμένα, αν $\Omega > 1$ το σύμπαν είναι ¨κλειστό¨, αν $\Omega < 1$ το σύμπαν είναι ¨ανοικτό¨ και αν $\Omega = 1$ το σύμπαν είναι ¨επίπεδο¨. Σήμερα το Ω έχει μετρηθεί πολύ κοντά στη μονάδα. Το πρόβλημα είναι ότι σε ένα radiation dominated universe το $\Omega(t) - 1$ αυξάνεται ανάλογα με το a^2 και σε ένα matter dominated universe το $\Omega(t) - 1$ αυξάνεται ανάλογα με το a. Σε κάθε περίπτωση αυξάνεται δηλαδή, οπότε για να είναι σήμερα κοντά στη μονάδα, θα έπρεπε και στην πολύ αρχή ($t_i = t_{Pl} \sim 10^{-43}s$) να βρίσκεται ακόμα πιο κοντά στο 1. Μάλιστα, έχει βρεθεί ότι θα πρέπει $\Omega_i - 1 \sim 10^{-60}$! (θα χρειαζόταν δηλαδή σημαντικό fine tuning)

- **Horizon problem**

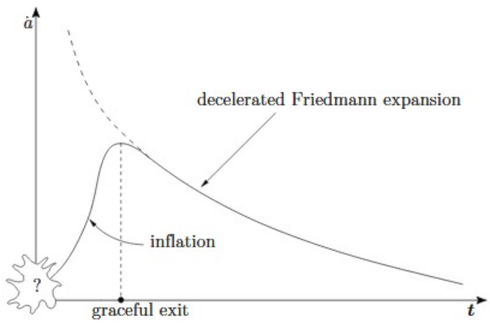
  Το σύμπαν είναι ομοιογενές, δηλαδή σε όποια κατεύθυνση και να κοιτάξουμε, θα διαπιστώσουμε ότι η θερμοκρασία είναι ίδια και περίπου ίση με 2.75K (CMB 1960). Αυτό όμως δημιουργεί πρόβλημα, καθώς μέρη του σύμπαντος που απέχουν αποστάσεις μεγαλύτερες από την ηλικία του και συνεπώς δεν γίνεται να έχουν ¨επικοινωνήσει¨ μεταξύ τους ή να έχουν έρθει σε επαφή, έχουν ίδια θερμοκρασία. Αυτό λοπόν έχει βρεθεί ότι θα μπορούσε να συμβεί, μόνο εάν αρχικά βρίσκονταν το πολύ σε απόσταση μίας μοίρας!

Με αφετηρία τα παραπάνω προβλήματα, ο Alan Guth πρότεινε το 1980 τη θεωρία του inflation.[2]

0.1.2 Η θεωρία του inflation

Inflation ονομάζεται η περίοδος κατά την οποία η επέκταση του σύμπαντος επιταχύνθηκε εκθετικά, με τη βαρύτητα να δρα ως απωστική δύναμη. Η επιτάχυνση αυτή πραγματοποιήθηκε με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός και τελείωσε περίπου στα $t_f \sim 10^{-34} - 10^{-36}s$. Ορίζεται μάλιστα και μία ποσότητα $N = ln\frac{a_{end}}{a_{beg}}$ που δίνει τον αριθμό των e-folds, ουσιαστικά δηλαδή μετράει την ¨ποσότητα¨ του inflation. Έχει βρεθεί ότι για να μπορέσει το inflation να λύσει τα προβλήματα του Big Bang και να θεωρηθεί επιτυχημένο, πρέπει να διαρκέσει τουλάχιστον 75 e-folds.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα για τι μέγεθος μιλάμε, υπολογίζεται ότι κατά το inflation το σύμπαν διπλασιάστηκε περίπου 100 φορές! Το γεγονός ότι η βαρύτητα δρα σαν απωστική δύναμη δεν είναι κάτι καινούριο σαν ιδέα, καθώς κάτι ανάλογο είχε προταθεί και από τον Einstein στη γενική θεωρία της σχετικότητας, απλά με διαφορετική μορφή (εκεί η κοσμολογική σταθερά έπαιζε αυτό το ρόλο για να επιτευχθεί ένα στατικό σύμπαν). Για να είναι επιτυχημένο το inflation, χρειάζεται επιπλέον να έχει μία ομαλή ¨μετάβαση¨ προς την επιβραδυνόμενη επέκταση Friedmann όπως φαίνεται και στο ακόλουθο διάγραμμα, ώστε να μην καταστραφεί η ομοιογένεια του σύμπαντος.



Σχήμα 1: η μετάβαση από το inflation στην επιβραδυνόμενη επέκταση Friedmann, Physical Foundations of Cosmology του V. Mukhanov

Η θεωρία του inflation λύνει τα προβλήματα του Big Bang. Συγκεκριμένα, η επέκταση έγινε τόσο αστραπιαία και ο όγκος πολλαπλασιάστηκε τόσο πολύ, που ακούγεται λογικό η πυκότητα των μονοπόλων να έγινε πολύ μικρή καθώς και το σύμπαν να φαίνεται σχεδόν επίπεδο. Επίσης λύνει και το πρόβλημα του ορίζοντα, καθώς αυτό που υποστηρίζει είναι ότι όλο το ορατό σύμπαν προέρχεται από μία μικρή ομοιογενή περιοχή ($\sim 10^{-28}cm$), ακόμα και αν το σύμπαν έξω από αυτήν είναι αρκετά ανομοιογενές. Αυτό συμβαίνει γιατί σε ένα επιταχυνόμενο σύμπαν υπάρχει πάντα ορίζοντας γεγονότων. Έτσι, αντί να θεωρούμε ένα ομοιογενές σύμπαν με πολλές περιοχές που δεν έχουν ¨επικοινωνήσει¨ μεταξύ τους, ξεκινάμε με μία μικρή ομοιογενή περιοχή την οποία το inflation μετατρέπει σε γιγάντια (ενέργειες $\sim 10^{16}GeV$), διατηρώντας την ομοιογένεια ανεξάρτητα από τις συνθήκες που επικρατούν έξω από αυτή την περιοχή.

Με απλά λόγια, όλες οι περιοχές που βλέπουμε σήμερα προέρχονται από τότε. Κατά τη διάρκεια του inflation ο ορίζοντας Hubble παραμένει σχεδόν σταθερός, ενώ το ρευστό βγαίνει συνεχώς εκτός μέχρι να επέλθει η ομοιογένεια. Στη συνέχεια, το σύμπαν αρχίζει να επεκτείνεται κανονικά, με τις περιοχές που εμφανίζονται σταδιακά να είναι αυτές που είχαν βγει εκτός ορίζοντα προηγουμένως, και συνεπώς έχουν την ίδια θερμοκρασία και καμπυλότητα αφού προέρχονται από την ίδια αρχικά μικρή περιοχή.

Από την 1^{η} εξίσωση Friedmann έχουμε ότι $\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a$, άρα για να έχουμε επιταχυνόμενη επέκταση ($\ddot{a} > 0$), θα πρέπει $\rho + 3p < 0$. Ουσιαστικά δηλαδή, θα πρέπει να υπάρχει αρνητική πίεση. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και αυτό που αναφέραμε προηγουμένως, δηλαδή το παράδειγμα της θετικής κοσμολογικής σταθεράς για την οποία ισχύει $p = -\rho$ και $\rho + 3p = -2\rho < 0$ (σύμπαν de Sitter). Αυτό βέβαια δεν αποτελεί κομμάτι της θεωρίας του inflation, καθώς δεν υπάρχει ομαλή μετάβαση στην επιβραδυνόμενη επέκταση Friedmann.[1]

Η θεωρία του inflation μπορεί να περιγραφεί και με ένα απλό θεωρητικό μοντέλο ενός scalar πεδίου το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση κατάστασης $\rho + 3p < 0$. Το πεδίο αυτό ονομάζεται inflaton και κυριαρχεί στην ενεργειακή πυκνότητα του σύμπαντος κατά τη διάρκεια του inflation. Θεωρώντας το scalar πεδίο ως ένα ιδανικό ρευστό, μπορούμε να πάρουμε τις ακόλουθες σχέσεις για την πυκνότητα ενέργειας και την πίεση του ομοιογενούς κλασικού πεδίου

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \qquad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και την εξίσωση κατάστασης, καταλήγουμε στη σχέση $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Συνεπώς για να είναι το inflation επιτυχημένο, θα πρέπει το $\dot{\phi}^2$ (κινητική ενέργεια) να διατηρείται μικρό ως προς το δυναμικό, για περίπου 75 e-folds. Αυτό ουσιαστικά εξαρτάται από το σχήμα του δυναμικού. Για να προσδιορίσουμε ποιά δυναμικά μπορούν να οδηγήσουν σε inflation, πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός ομοιογενούς κλασικού scalar πεδίου σε ένα σύμπαν που επεκτείνεται. Η εξίσωση για αυτό το πεδίο μπορεί να εξαχθεί, αντικαθιστώντας τις 2 σχέσεις που βρήκαμε για την πυκνότητα ενέργειας και την πίεση στη σχέση που αφορά τη διατήρηση της ενέργειας, $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ και το αποτέλεσμα είναι

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση συμπίπτει με την εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με μεγάλο όρο τριβής ανάλογο του H, πράγμα που διευκολύνει μία κατάσταση slow-roll, στην οποία η επιτάχυνση του πεδίου είναι αμελητέα ως προς τον όρο τριβής. Επειδή για ένα γενικό δυναμικό ισχύει $H \propto \sqrt{\rho} \sim \sqrt{V}$, περιμένουμε ότι για μεγάλες τιμές του δυναμικού ο όρος τριβής πάλι οδηγεί σε ένα στάδιο slow-roll inflation, όπου το $\ddot{\phi}$ είναι αμελητέο συγκρινόμενο με το $3H\dot{\phi}$. Οπότε λοιπόν, παραλείποντας τον όρο $\ddot{\phi}$ και θεωρώντας ότι $\dot{\phi}^2 \ll V$, η εξίσωση για το πεδίο γίνεται

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi)$$

Συνεπώς η κατάσταση slow-roll, όταν δηλαδή το inflaton κυλάει πολύ αργά στο πηγάδι δυναμικού, απαιτεί την ικανοποίηση των 2 συνθηκών

- $\dot{\phi}^2 \ll V \Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \ll H^2$
- $|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}| \Rightarrow |V''| \ll H^2$

Με βάση τις παραπάνω συνθήκες, ορίζουμε τις slow-roll parameters ϵ και η ως εξής

- $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G_N \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2\bar{M}_{Pl}^2 H^2} = \frac{1}{16\pi G_N}\left(\frac{V'}{V}\right)^2$
- $\eta = \frac{1}{8\pi G_N}\left(\frac{V''}{V}\right) = \frac{1}{3}\frac{V''}{H^2}$

όπου $\bar{M}_{Pl}$ η reduced Planck mass, για την οποία ισχύει

$$\bar{M}_{Pl}^2 = \frac{1}{8\pi G_N} = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi}$$

Η παράμετρος ϵ δείχνει πώς αλλάζει ο Hubble rate σε σχέση με το χρόνο, κατά τη διάρκεια του inflation. Εφόσον $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1-\epsilon)H^2$, inflation θα έχουμε μόνο εάν $\epsilon < 1$. Γενικότερα, το slow-roll απαιτεί $\epsilon \ll 1$ και $|\eta| \ll 1$. Κατά τη διάρκεια του inflation, οι slow-roll parameters μπορούν να θεωρηθούν σχεδόν σταθερές, καθώς το δυναμικό $V(\phi)$ είναι πολύ flat.

Επιπλέον, το inflation είναι μία περίοδος στην οποία συμβαίνει ¨supercooled expansion¨, καθώς η θερμοκρασία πέφτει από τους $10^{27}K$ στους $10^{22}K$. Όταν τελειώνει, δηλαδή όταν η δυναμική ενέργεια του inflaton γίνεται μικρότερη από την κινητική του ενέργεια, η θερμοκρασία επανέρχεται στα αρχικά επίπεδα (reheating), καθώς η μεγάλη δυναμική ενέργεια του inflaton μέσω διάσπασης μετατρέπεται σε σωματίδια. Συνεπώς, γεμίζει το σύμπαν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και ξεκινάει η φάση που κυριαρχεί η ακτινοβολία.[2]

Το inflation, εκτός από την πιο απλή περίπτωση ενός scalar πεδίου με δυναμικό που ικανοποιεί τις συνθήκες slow-roll, μπορεί να επιτευχθεί και με άλλους τρόπους. Αρχικά, μπορεί να συμβεί μέσω ενός φερμιονικού πεδίου το οποίο περιγράφεται ως ένα effective scalar πεδίο. Επίσης, inflation μπορεί να προκύψει από θεωρίες higher derivative gravity, οι οποίες είναι conformally ισοδύναμες με την Einstein gravity συν ένα επιπλέον πεδίο. Γνωρίζουμε ότι η Einstein gravity είναι η μόνη metric θεωρία στις 4 διαστάσεις η οποία δίνει εξισώσεις κίνησης δευτέρου βαθμού. Οπότε, εάν το δυναμικό του επιπλέον αυτού πεδίου ικανοποιεί τις συνθήκες slow-roll, τότε έχουμε λύση inflation στο conformal frame. Εν γένει, η conformal μετρική και η φυσική μετρική περιγράφουν manifolds με διαφορετικές γεωμετρίες, οπότε τα τελικά αποτελέσματα πρέπει να είναι εκφρασμένα ως προς τη φυσική μετρική. Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως, η conformal μετρική συσχετίζεται με τη φυσική μετρική μέσω ενός παράγοντα που εξαρτάται μόνο από την καμπυλότητα και ο οποίος δεν μεταβάλλεται σημαντικά. Συνεπώς, inflation έχουμε και στο original physical frame. Ακόμα, inflation μπορεί να επιτευχθεί και χωρίς όρο δυναμικού. Για παράδειγμα, μπορεί να συμβεί όταν η δράση εξαρτάται μη γραμμικά από την κινητική ενέργεια ενός scalar πεδίου (k inflation).

Υπάρχουν διάφοροι τύποι δυναμικών που έχουν μελετηθεί όσον αφορά την περίπτωση ενός scalar πεδίου με κανονική κινητική ενέργεια, κάποιοι από τους οποίους είναι και οι παρακάτω

- New inflation : βασίζεται σε ένα δυναμικό τύπου Coleman-Weinberg. Καθώς το δυναμικό είναι αρκετά επίπεδο και έχει μέγιστο στο $\phi = 0$, το scalar πεδίο φεύγει από το μέγιστο λόγω κβαντικών διαταραχών. Στη συνέχεια κάνει slow-roll μέχρι το ολικό ελάχιστο όπου και η ενέργεια ελευθερώνεται ομοιογενώς σε όλο το σύμπαν.
- Chaotic inflation : αφορά τη γενικότερη δυνατή κλάση δυναμικών που ικανοποιούν τις συνθήκες slow-roll. Ο όρος chaotic αναφέρεται στην πιθανότητα οι αρχικές συνθήκες για το scalar πεδίο να είναι σχεδόν τυχαίες.

Βλέπουμε τις δύο περιπτώσεις στα ακόλουθα διαγράμματα

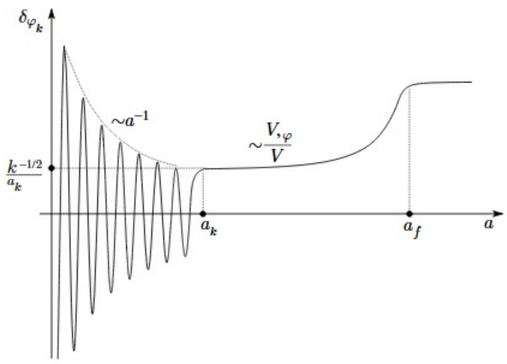
Σχήμα 2: new και chaotic inflation, Physical Foundations of Cosmology του V. Mukhanov

0.1.3 Inflation και quantum fluctuations

Μετρήσεις του CMB (cosmic microwave background) δείχνουν ότι το σύμπαν ήταν πολύ ο-μοιογενές και ισότροπο. Σήμερα όμως, το σύμπαν έχει μία καλά δομημένη μη γραμμική δομή. Αυτή η δομή παίρνει τη μορφή γαλαξιών, συμπλεγμάτων γαλαξιών και σε μεγαλύτερη κλίμακα, κενών, ¨φύλλων¨ και ιστών γαλαξιών. Μελέτες όμως δείχνουν, ότι έπειτα από λίγες εκατοντάδες megaparsecs οι ανομοιογένειες στην κατανομή της πυκνότητας παραμένουν μικρές. Η απάντηση στο πώς μη γραμμικές δομές θα μπορούσαν να δημιουργηθούν από μικρές αρχικές διαταραχές, βασίζεται στο γεγονός της βαρυτικής αστάθειας, της φυσικής ιδιότητας της βαρύτητας κατά την οποία η ύλη συσσωρεύεται στις περιοχές υψηλής πυκνότητας , αυξάνοντας έτσι τις ήδη υπάρχουσες ανομοιογένειες.

Η θεωρία του inflation εξηγεί επίσης την προέλευση των αρχέγονων αυτών ανομοιογενειών $\left(\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}\right)$, οι οποίες αποτέλεσαν τη βάση πάνω στην οποία σχηματίστηκε η σημερινή δομή του σύμπαντος. Οι αρχέγονες διαταραχές προέρχονται από κβαντικά fluctuations. Αυτό συμβαίνει γιατί το inflaton είναι ένα κβαντικό πεδίο, πράγμα που σημαίνει ότι όσο κάνει slow-roll στο δυναμικό παίρνει διαφορετικές τιμές στο χώρο, καθώς υπάρχει κατανομή πιθανοτήτων. Σε κάθε e-fold παράγονται καινούρια fluctuations τα οποία αθροίζονται με τα προηγούμενα. Τα fluctuations λοιπόν αυτά, ενώ έχουν σημαντικά πλάτη μόνο σε κλίμακες κοντά στο planck length, κατά το inflation γίνονται stretched σε galactic scales με σχεδόν σταθερό πλάτος.

Μία απλή περιγραφή του φαινομένου είναι η εξής: Τα modes, δηλαδή η απεικόνιση των spatial variations στο χώρο Fourier, έχουν μήκος κύματος μικρότερο του Hubble horizon. Κατά το inflation, ενώ ο Hubble rate παραμένει σχεδόν σταθερός (όχι τελείως σταθερός, καθώς η επέκταση είναι quasi de Sitter), τα modes γίνονται stretched σε superhorizon length. Το κομμάτι των modes που είναι μέσα στον Hubble horizon εξακολουθεί να ταλαντώνεται, ενώ αυτό που βγαίνει εκτός ¨παγώνει¨, δηλαδή γίνεται κλασικό. Στο τέλος του inflation, ο Hubble horizon επεκτείνεται καλύπτοντάς τα και αυτά είναι που στη συνέχεια δημιουργούν τις ανισοτροπίες στη θερμοκρασία και την ύλη που παρατηρούμε σήμερα. Καθώς το inflation δηλαδή τελειώνει, ο Hubble rate μεγαλώνει γρηγορότερα από τον scale factor, ενώ πριν συνέβαινε το αντίθετο. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται τα quantum fluctuations του inflaton ως προς τον scale factor



Σχήμα 3: quantum fluctuations συναρτήσει scale factor, Physical Foundations of Cosmology του V. Mukhanov

Από το διάγραμμα φαίνονται πιο καθαρά ορισμένα πράγματα. Καταρχάς, μέσα στον ορίζοντα το πλάτος της ταλάντωσης πέφτει ανάλογα με το a^{-1}, ενώ μετά το mode ¨παγώνει¨ και γίνεται stretched σε galactic scales με σχεδόν ίδιο πλάτος (παρατηρούμε μία ελάχιστη αύξηση). Έπειτα, κατά την περίοδο του reheating παραμένει σταθερό.

Γενικά, δεν υπολογίζεται το πλάτος αλλά το φάσμα των quantum fluctuations, δηλαδή η εξάρτηση από το μήκος κύματος. Συγκεκριμένα, παρατηρούνται λογαριθμικές αποκλίσεις από ένα flat φάσμα. Ισχύει $\delta^2_\phi(k) \propto k^{n_s-1}$, όπου n_s ο spectral index για τον οποίο γνωρίζουμε ότι όταν $n_s = 1$, το φάσμα είναι flat. Εδώ, το n_s έχει μετρηθεί 0.95, πολύ κοντά στη μονάδα, πράγμα που σημαίνει ότι το φάσμα είναι σχεδόν scale invariant. Επίσης, το γεγονός ότι $n_s < 1$ μεταφράζεται ως red tilt, πράγμα που μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το inflaton έχει μάζα και ο Hubble rate δεν είναι τελείως σταθερός.

Επίσης, κατά το inflation παράγονται βαρυτικά κύματα το φάσμα των οποίων πάλι παρουσιάζει red tilt. Για αυτά έχει βρεθεί ότι σε superhorizon scales έχουν σταθερό πλάτος, ενώ όταν εισέρχονται στον ορίζοντα το πλάτος τους πέφτει ανάλογα με το a^{-1}.

Από το διάγραμμα αντιλαμβανόμαστε επίσης, ότι όσο το μέγεθος των fluctuations δε νιώθει την καμπυλότητα του σύμπαντος ($< H^{-1}$) τόσο θα μειώνεται το πλάτος. Σε ένα επιβραδυνόμενο σύμπαν, $H^{-1} = \frac{a}{\dot{a}} > \lambda_{ph} \sim a$, γιατί το $\dot{a}$ μειώνεται. Οπότε, αν τα fluctuations βρίσκονται μέσα στον ορίζοντα θα μειωθούν, ενώ αν βρίσκονται εκτός, σύντομα θα βρεθούν μέσα και θα μειωθούν και αυτά. Αντίθετα, σε ένα επιταχυνόμενο σύμπαν, $H^{-1} = \frac{a}{\dot{a}} < \lambda_{ph} \sim a$. Συνεπώς, τα fluctuations που βρίσκονται μέσα στον ορίζοντα σύντομα βγαίνουν εκτός, ¨νιώθοντας¨ την καμπυλότητα που δεν τους ¨επιτρέπει¨ να μειωθούν.

Μία άλλη θεωρία γύρω από το inflation ονομάζεται eternal inflation και υποστηρίζει ότι καθώς το inflaton είναι κβαντικό πεδίο, υπάρχει πιθανότητα να βρίσκεται πιο πίσω ή ακόμα και να μην κάνει roll down το δυναμικό. Συνεπώς θα υπάρχουν κομμάτια στα οποία το inflation έχει τελειώσει, άλλα στα οποία θα συμβαίνει ακόμα και κάποια άλλα στα οποία θα γίνεται ¨για πάντα¨. Άρα η εικόνα έχει ως εξής: Θα υπάρχει ένα multiverse μέσα στον οποίο θα βρίσκονται πολλά pocket universes σαν το δικό μας, και ο χώρος μεταξύ τους θα αυξάνει με εκθετικό ρυθμό.[1]

0.2 Inflation και cosmological perturbations

0.2.1 Quantum fluctuations γενικού scalar άμαζου πεδίου κατά το inflation

Έστω ένα γενικό άμαζο πεδίο χ το οποίο δεν είναι το inflaton και έστω μία de Sitter εποχή κατά την οποία ο Hubble rate είναι σταθερός. Αν το αναπτύξουμε σε Fourier modes, έχουμε

$$\delta\chi(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx} \delta\chi_k(t) a_k + h.c.$$

όπου a_k ο κλασικός τελεστής καταστροφής. Οπότε, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση για τα fluctuations ως

$$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\chi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k = 0 \tag{1}$$

- Για μήκη κύματος μέσα στην ακτίνα Hubble ($\lambda \ll H^{-1}$), οι αντίστοιχοι κυματαριθμοί ικανοποιούν τη σχέση $k \gg aH$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο τριβής $3H\delta\dot{\chi}_k$, οπότε

  $$\delta\ddot{\chi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k = 0$$

  η οποία είναι ουσιαστικά η εξίσωση κίνησης ενός αρμονικού ταλαντωτή. Φυσικά, ο όρος της συχνότητας $\frac{k^2}{a^2}$ εξαρτάται από τον χρόνο καθώς το a αυξάνει εκθετικά. Ποσοτικά όμως, περιμένουμε ότι όταν το μήκος κύματος είναι μέσα στον ορίζοντα, το fluctuation ταλαντώνεται.

- Για μήκη κύματος πέρα από την ακτίνα Hubble ($\lambda \gg H^{-1}$), οι αντίστοιχοι κυματαριθμοί ικανοποιούν τη σχέση $k \ll aH$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $\frac{k^2}{a^2}$, οπότε

  $$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\chi}_k = 0$$

  σύμφωνα με την οποία σε super-Hubble scales, το $\delta\chi_k$ παραμένει σταθερό.

Οπότε έχουμε την ακόλουθη εικόνα : θεωρούμε ένα fluctuation του οποίου το αρχικό μήκος κύματος $\lambda \sim \frac{a}{k}$ είναι μέσα στην ακτίνα Hubble. Αυτό ταλαντώνεται μέχρι το μήκος κύματος να γίνει της τάξης του ορίζοντα και όταν το μήκος κύματος διασχίζει την ακτίνα Hubble, τότε το fluctuation σταματά την ταλάντωση και ¨παγώνει¨.

Για να εξετάσουμε την εξέλιξη του fluctuation πιο ποσοτικά, ορίζουμε $\delta\chi_k = \frac{\delta\sigma_k}{a}$ και δουλεύουμε στον conformal time $d\tau = \frac{dt}{a}$. Εφόσον μελετάμε επέκταση de Sitter, παίρνουμε τον scale factor να μεγαλώνει εκθετικά ως $a \sim e^{Ht}$, οπότε ο αντίστοιχος conformal factor είναι

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \quad (\tau < 0)$$

Η αρχή του inflation συμπίπτει με κάποιον αρχικό χρόνο $\tau \ll 0$. Η (1) τότε γίνεται

$$\delta\sigma_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\delta\sigma_k = 0 \tag{2}$$

Παρατηρούμε μία εξίσωση η οποία είναι πολύ κοντά σε μία εξίσωση για ένα Klein-Gordon scalar πεδίο σε έναν flat χωρόχρονο, με τη μόνη διαφορά ότι υπάρχει ένας αρνητικός όρος χρονοεξαρτόμενης μάζας $-\frac{a''}{a} = -\frac{2}{\tau^2}$. Από τη στιγμή που $\frac{k}{aH} = -k\tau$

- σε sub-Hubble scales $k^2 \gg \frac{a''}{a}$. Η (2) τότε γίνεται

$$\delta\sigma_k'' + k^2\delta\sigma_k = 0$$

  της οποίας η λύση είναι επίπεδο κύμα

$$\delta\sigma_k = A_1\frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} + A_2\frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (k \gg aH)$$

  Βρίσκουμε δηλαδή ότι τα fluctuations με μήκη κύματος μέσα στον ορίζοντα, ταλαντώνονται ακριβώς όπως στον flat χωρόχρονο. Στη UV περιοχή, δηλαδή για μήκη κύματος πολύ μικρότερα από την κλίμακα της ακτίνας Hubble, περιμένουμε ότι η προσέγγιση του χωρόχρονου ως flat είναι μία καλή προσέγγιση. Η επιλογή των συντελεστών A_1 και A_2 είναι ουσιαστικά η επιλογή του κενού η οποία είναι στάνταρ, καθώς επιλέγουμε το κενό Bunch-Davies, την κατάσταση δηλαδή που ελαχιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή του κενού της χαμιλτονιανής. Εδώ αυτό αντιστοιχεί με $A_1 = 1$ και $A_2 = 0$, οπότε

$$\delta\sigma_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (k \gg aH).$$

- σε super-Hubble scales $k^2 \ll \frac{a''}{a}$. Η (2) τότε γίνεται

$$\delta\sigma_k'' - \frac{a''}{a}\delta\sigma_k = 0$$

της οποίας η λύση είναι

$$\delta\sigma_k = B(k)a \quad (k \ll aH)$$

όπου $B(k)$ είναι σταθερά της ολοκλήρωσης.

Εξισώνοντας τις απόλυτες τιμές των 2 λύσεων στο $k = aH(-k\tau = 1)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε την απόλυτη τιμή της σταθεράς $B(k)$

$$|B(k)|a = \frac{1}{\sqrt{2k}} \Rightarrow |B(k)| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$$

Γράφοντας στη συνέχεια τα αποτελέσματα ως προς την original μεταβλητή $\delta\chi_k$, παρατηρούμε ότι τα quantum fluctuations του πεδίου χ στις super-Hubble scales είναι σταθερά και περίπου ίσα με

$$|\delta\chi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \quad \text{(ON SUPER-HUBBLE SCALES)}$$

Στην πραγματικότητα, η εξίσωση (2) έχει ακριβή λύση την

$$\delta\sigma_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}\left(1 - \frac{i}{k\tau}\right)$$

η οποία αναπαράγει πλήρως όλα τα ποιοτικά συμπεράσματα που βρήκαμε προηγουμένως στις 2 περιοχές $k \ll aH$ και $k \gg aH$. Ο λόγος λοιπόν για τον οποίο κάναμε την προηγούμενη διαδικασία, είναι για να αναδείξουμε τη χρησιμότητά της σε περίπτωση που η ακριβής λύση δεν είναι γνωστή.

0.2.2 Quantum fluctuations γενικού μαζικού πεδίου σε μία φάση de Sitter

Μέχρι εδώ, βρήκαμε τις εξισώσεις για τα quantum perturbations ενός γενικού άμαζου πεδίου, μη λαμβάνοντας προφανώς υπ' όψιν τον τετραγωνικό όρο μάζας m_χ^2. Όταν λοιπόν ο όρος αυτός είναι παρών, η (2) γίνεται

$$\delta\sigma_k'' + [k^2 + M^2(\tau)]\delta\sigma_k = 0 \tag{3}$$

όπου

$$M^2(\tau) = (m_\chi^2 - 2H^2)a^2(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{m_\chi^2}{H^2} - 2\right)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε την (3) ως

$$\delta\sigma_k'' + \left[k^2 - \frac{1}{\tau^2}\left(\nu_\chi^2 - \frac{1}{4}\right)\right]\delta\sigma_k = 0 \tag{4}$$

όπου

$$\nu_\chi^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2}\right)$$

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης για ν_χ πραγματικό, είναι

$$\delta\sigma_k = \sqrt{-\tau}[c_1(k)H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\tau) + c_2(k)H_{\nu_\chi}^{(2)}(-k\tau)]$$

όπου $H_{\nu_\chi}^{(1)}$ και $H_{\nu_\chi}^{(2)}$ οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα. Επιβάλλοντας πάλι το κενό Bunch-Davies, δηλαδή ότι στην UV περιοχή $k \gg aH(-k\tau \gg 1)$ η λύση συμπίπτει με τη λύση επίπεδου κύματος $\frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}$ και γνωρίζοντας ότι

$$H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4})}, \quad H_{\nu_\chi}^{(2)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\chi - \frac{\pi}{4})}$$

Θέτουμε $c_2(k) = 0$ και $c_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2} + \nu_\chi)}$. Οπότε η γενική λύση γίνεται

$$\delta\sigma_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2} + \nu_\chi)}\sqrt{-\tau}H_{\nu_\chi}^{(1)}(-k\tau) \tag{5}$$

Στις super-Hubble κλίμακες, εφόσον $H_{\nu_\chi}^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i\frac{\pi}{2}}2^{(\nu_\chi - \frac{3}{2})}\left(\frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right)x^{-\nu_\chi}$, η (5) γίνεται

$$\delta\sigma_k = e^{i(\nu_\chi - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}2^{(\nu_\chi - \frac{3}{2})}\frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{1}{\sqrt{2k}}(-k\tau)^{\frac{1}{2} - \nu_\chi}$$

Γράφοντας πάλι τα αποτελέσματα ως προς την παλιά μεταβλητή $\delta\chi_k$, βρίσκουμε ότι στις super-Hubble κλίμακες το fluctuation με μη μηδενική μάζα δεν είναι ακριβώς σταθερό, αλλά έχει μία μικρή χρονική εξάρτηση της μορφής

$$|\delta\chi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu_\chi} \quad \text{(ON SUPER-HUBBLE SCALES)}$$

όπου εάν ορίσουμε κατ' αναλογία με τα slow-roll parameters ϵ και η για το inflaton την παράμετρο $\eta_\chi = \left(\frac{m_\chi^2}{3H^2}\right) \ll 1$, τότε

$$\frac{3}{2} - \nu_\chi \simeq \eta_\chi$$

0.2.3 Power spectrum

Το power spectrum είναι μία χρήσιμη ποσότητα που χαρακτηρίζει τις ιδιότητες των perturbations. Για μία γενική ποσότητα $g(x,t)$ η οποία μπορεί να αναπτυχθεί στο χώρο Fourier ως

$$g(x,t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx} g_k(t)$$

το power spectrum ορίζεται ως

$$< 0|g_{k1}g_{k2}|0 > \equiv (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2)|g_k|^2$$

όπου $|0>$ είναι η κβαντική κατάσταση του κενού στο σύστημά μας. Αυτός ο ορισμός οδηγεί στη σχέση

$$< 0|g^2(x,t)|0 > = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g_k g_{-k} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}|g_k|^2 = \int \frac{dk}{k} P_g(k)$$

η οποία καθορίζει το power spectrum των perturbations του πεδίου $g(x,t)$ ως

$$P_g(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}|g_k|^2$$

0.2.4 Quantum fluctuations γενικού scalar πεδίου σε μία φάση quasi de Sitter

Μέχρι τώρα, είδαμε τη χρονική εξέλιξη και το φάσμα των quantum fluctuations ενός γενικού scalar πεδίου χ, θεωρώντας ότι ο scale factor εξελίσσεται όπως σε μία επέκταση de Sitter, δηλαδή $a(\tau) = -\frac{1}{(H\tau)}$. Όμως, κατά τη διάρκεια του inflation ο Hubble rate δεν είναι ακριβώς σταθερός, αλλά αλλάζει με το χρόνο ως $\dot{H} = -\epsilon H^2$ (quasi de Sitter). Στη συνέχεια λοιπόν, θα ασχοληθούμε με τα perturbations σε μία επέκταση quasi de Sitter. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του conformal time, βρίσκουμε ότι ο scale factor για μικρές τιμές του ϵ γίνεται

$$a(\tau) = -\frac{1}{H}\frac{1}{\tau^{(1+\epsilon)}}$$

Οπότε, η εξίσωση (3) έχει τώρα έναν τετραγωνικό όρο μάζας

$$M^2(\tau) = m_\chi^2 a^2 - \frac{a''}{a}$$

όπου

$$\frac{a''}{a} \simeq \frac{1}{\tau^2}(2 + 3\epsilon)$$

Γράφοντας $\frac{m_\chi^2}{H^2} = 3\eta_\chi$ και κάνοντας expand γύρω από μικρές τιμές των ϵ και η_χ, παίρνουμε την (4) με

$$\nu_\chi \simeq \frac{3}{2} + \epsilon - \eta_\chi$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να υπολογίσουμε το power spectrum των fluctuations του scalar πεδίου χ. Τα fluctuations είναι σχεδόν ¨παγωμένα¨ στις super-Hubble κλίμακες (η χρονική εξάρτηση προέρχεται από τον όρο μάζας και όχι από την απόκλιση από την de Sitter). Ένας τρόπος για τον χαρακτηρισμό των perturbations είναι ο υπολογισμός του φάσματος σε κλίμακες μεγαλύτερες από την ακτίνα Hubble στο τέλος του inflation (ο Hubble rate ισούται με $\frac{a'}{a^2} \sim \tau^\epsilon$)

$$P_{\delta\chi}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}|\delta\chi_k|^2 = \left(\frac{H_e}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{k_e}\right)^{3-2\nu_\chi}$$

όπου $k_e = a_e H_e$. Μπορούμε να ορίσουμε ακόμα τον spectral index $n_{\delta\chi}$ των fluctuations ως

$$n_{\delta\chi} - 1 = \frac{dlnP_{\delta\phi}}{dlnk} = 3 - 2\nu_\chi = 2\eta_\chi - 2\epsilon$$

Το power spectrum των fluctuations του scalar πεδίου χ είναι λοιπόν σχεδόν flat, δηλαδή σχεδόν ανεξάρτητο από το μήκος κύματος $\lambda = \frac{\pi}{k}$. Επίσης, το πλάτος των fluctuations στις super-Hubble κλίμακες δεν εξαρτάται σχεδόν καθόλου από τον χρόνο στον οποίο τα fluctuations διασχίζουν την ακτίνα Hubble και ¨παγώνουν¨. Η μικρή απόκλιση του power spectrum από το flat, προέρχεται από το γεγονός ότι το scalar πεδίο έχει μάζα και επειδή κατά τη διάρκεια του inflation ο Hubble rate δεν είναι τελείως σταθερός, αλλά εξαρτάται από τη slow-roll parameter ϵ. Μπορούμε να πούμε ότι το φάσμα των perturbations είναι μπλε, εάν $n_{\delta\chi} > 1$ (πιο ισχυρό στο UV) και κόκκινο, εάν $n_{\delta\chi} < 1$ (πιο ισχυρό στο υπέρυθρο).

Εφόσον στις super-Hubble κλίμακες (η χρονική εξάρτηση της απόκλισης από την de Sitter εξαφανίζεται όταν $\delta\chi_k = a\delta\sigma_k$)

$$\delta\chi_k \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\eta_\chi} \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left[1 + \eta_\chi ln\left(\frac{k}{aH}\right)\right]$$

τότε

$$|\delta\dot{\chi}_k| \simeq |H\eta_\chi\delta\chi_k| \ll |H\delta\chi_k|$$

Συνεπώς, στις super-Hubble κλίμακες η εξάρτηση των perturbations από τον χρόνο μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα εάν χρειαστεί.

0.3 Quantum fluctuations κατά τη διάρκεια του inflation

Όπως είδαμε προηγουμένως, τα fluctuations δημιουργήθηκαν κατά τη διάρκεια του inflation και έγιναν stretched σε αστρονομικές κλίμακες, εξαιτίας της αστραπιαίας επέκτασης του σύμπαντος κατά τη διάρκεια μίας quasi de Sitter εποχής.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεωρητικό κομμάτι, τα perturbations ενός γενικού scalar πεδίου χ δημιουργούνται κατά τη διάρκεια μίας quasi de Sitter επέκτασης. Το πεδίο inflaton είναι ένα scalar πεδίο, οπότε συμπεραίνουμε ότι θα δημιουργούνται και τα inflaton fluctuations. Όμως, το inflaton είναι ξεχωριστό όσον αφορά τα perturbations και ο λόγος είναι πολύ απλός. Έχουμε υποθέσει ότι το πεδίο inflaton κυριαρχεί στην ενεργειακή πυκνότητα του σύμπαντος κατά τη διάρκεια του inflation. Κάθε perturbation του πεδίου inflaton σημαίνει perturbation του stress energy-momentum tensor

$$\delta\phi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu}$$

Το perturbation του stress energy-momentum tensor δημιουργεί μέσω των εξισώσεων Einstein perturbation στη μετρική

$$\delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \left[\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta(g_{\mu\nu}R)\right] = 8\pi G\delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu}$$

Από την άλλη, perturbation στη μετρική δημιουργεί back reaction στην εξέλιξη του inflaton perturbation, μέσω της εξίσωσης Klein-Gordon για το πεδίο inflaton

$$\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta\left(-\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi}\right) = 0 \Rightarrow \delta\phi$$

Η παραπάνω λογική ¨αλυσίδα¨ μας οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι τα perturbations του πεδίου inflaton και της μετρικής είναι στενά συνδεδεμένα το ένα με το άλλο και πρέπει γι' αυτό το λόγο να μελετηθούν μαζί

$$\delta\phi \Longleftrightarrow \delta g_{\mu\nu}$$

Για να κατανοήσουμε γιατί όντως κατά τη διάρκεια του inflation είναι παρόντα τα fluctuations, διαχωρίζουμε το πεδίο inflaton στην κλασική τιμή ϕ_0 συν το κβαντικό fluctuation $\delta\phi$, δηλαδή γράφουμε $\phi(x,t) = \phi_0(t) + \delta\phi(x,t)$, όπου το κβαντικό perturbation $\delta\phi$ ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} + V''\delta\phi = 0$$

Παραγωγίζοντας τώρα την κλασική εξίσωση που ικανοποιεί το inflaton ως προς το χρόνο και θεωρώντας το H σταθερό (de Sitter επέκταση), έχουμε

$$\dddot{\phi}_0 + 3H\ddot{\phi}_0 + V''\dot{\phi}_0 = 0$$

Βλέπουμε ότι το $\dot{\phi}_0$ και το $\delta\phi$ υπακούουν στην ίδια εξίσωση, συνεπώς οι λύσεις θα σχετίζονται μεταξύ τους μέσω κάποιας σταθεράς αναλογίας η οποία θα εξαρτάται μόνο από το χώρο

$$\delta\phi = -\dot{\phi}_0 \delta t(x)$$

Οπότε, το $\phi(x,t)$ θα είναι της μορφής

$$\phi(x,t) = \phi_0(x, t - \delta t(x))$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι το πεδίο inflaton δεν παίρνει την ίδια τιμή σε δεδομένη χρονική στιγμή t σε όλο το χώρο. Αντί γι' αυτό, όταν το inflaton κάνει roll down το δυναμικό του, παίρνει διαφορετικές τιμές από το ένα χωρικό σημείο x στο άλλο. Το πεδίο inflaton δεν είναι ομοιογενές και υπάρχουν fluctuations τα οποία στη συνέχεια θα δημιουργήσουν fluctuations στη μετρική.

0.3.1 Metric fluctuations

Τα μαθηματικά εργαλεία με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε τη γραμμική εξέλιξη των cosmological perturbations προκύπτουν από τη διαταραχή σε πρώτη τάξη της FRW μετρικής $g_{\mu\nu}^{(0)}$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)}(t) + \delta g_{\mu\nu}(x,t); \qquad \delta g_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}^{(0)}$$

Τα perturbations της μετρικής μπορούν να αποσυντεθούν σε :

- scalar perturbations
- vector perturbations
- tensor perturbations

Τα tensor perturbations ή αλλιώς βαρυτικά κύματα έχουν spin 2 και είναι οι πραγματικοί βαθμοί ελευθερίας του βαρυτικού πεδίου. Τα vector perturbations είναι modes spin 1 που προκύπτουν από πεδία περιστροφικών ταχυτήτων (rotational velocity fields), ενώ τέλος τα scalar perturbations έχουν spin 0.

Σε γραμμικό βαθμό, τα scalar, vector και tensor perturbations εξελίσσονται ανεξάρτητα και γι' αυτό το λόγο είναι δυνατή η ξεχωριστή ανάλυσή τους. Τα vector perturbations δεν εμφανίζονται κατά τη διάρκεια του inflation, καθώς δεν υπάρχουν πεδία περιστροφικών ταχυτήτων. Προς το παρόν δεν θα ασχοληθούμε με τα tensor perturbations, οπότε θα εστιάσουμε στους scalar βαθμούς ελευθερίας της μετρικής.

Θεωρώντας μόνο τους scalar βαθμούς ελευθερίας της perturbed μετρικής, η πιο γενική perturbed μετρική γράφεται ως

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -(1+2\Phi) & \partial_i B \\ \partial_i B & (1-2\Psi)\delta_{ij} + D_{ij}E \end{bmatrix}$$

ενώ το στοιχείο γραμμή μπορεί να γραφεί ως

$$ds^2 = a^2[-(1+2\Phi)d\tau^2 + 2\partial_i B d\tau dx^i + ((1-2\Psi)\delta_{ij} + D_{ij}E)dx^i dx^j], \quad \text{με } D_{ij} = (\partial_i\partial_j - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)$$

Οπότε, τώρα χρειάζεται να βρούμε την αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$ σε γραμμικό βαθμό

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Άρα, έχουμε να λύσουμε τις εξισώσεις

$$(g^{\mu\alpha}_{(0)} + g^{\mu\alpha})(g^{(0)}_{\alpha\nu} + g_{\alpha\nu}) = \delta^\mu_\nu \tag{6}$$

όπου $g^{\mu\alpha}_{(0)}$ είναι απλά η unperturbed FRW μετρική.

Από τη στιγμή που

$$g^{\mu\nu}_{(0)} = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta^{ij} \end{bmatrix}$$

μπορούμε να γράψουμε γενικά

$$g^{00} = \frac{1}{a^2}(-1+X)$$
$$g^{0i} = \frac{1}{a^2}\partial^i Y$$
$$g^{ij} = \frac{1}{a^2}[(1+2Z)\delta^{ij} + D^{ij}K]$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (6), βρίσκουμε για $\mu = \nu = 0$

$$\frac{1}{a^2}(-1+X)a^2(-1-2\Phi)+\frac{1}{a^2}\partial^i Y a^2 \partial_i B = 1 \Rightarrow 1+2\Phi - X - 2\Phi X + \partial^i Y \partial_i B = 1 \Rightarrow X = 2\Phi$$

Στην παραπάνω έκφραση αγνοήσαμε τους όρους $-2\Phi X$ και $\partial^i Y \partial_i B$, επειδή είναι δευτέρου βαθμού ως προς τα perturbations.

Πράττουμε ανάλογα και για τα στοιχεία $\mu = 0, \nu = i$ της εξίσωσης (6), οπότε σε πρώτη τάξη πάλι

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}(-1+X)a^2\partial_i B + \frac{1}{a^2}\partial^j Y a^2[(1-2\Psi)\delta_{ij} + D_{ij}E] = 0 \Rightarrow \\
&-\partial_i B + X\partial_i B + \partial_i Y - 2\partial_i Y\Psi + \partial^j Y D_{ij} E = 0 \Rightarrow -\partial_i B + \partial_i Y = 0 \Rightarrow Y = B
\end{aligned}$$

Τέλος, για τα στοιχεία $\mu = i, \nu = j$ αγνοώντας όρους δευτέρου βαθμού, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2}\partial^i Y a^2 \partial_j B + \frac{1}{a^2}[(1+2Z)\delta^{ik} + D^{ik}K]a^2[(1-2\Psi)\delta_{kj} + D_{kj}E] = \delta^i_j \Rightarrow \\
&(1+2Z-2\Psi)\delta^i_j + D^i_j K + D^i_j E = \delta^i_j \Rightarrow \quad Z = \Psi \quad , \quad K = -E
\end{aligned}$$

Οπότε η αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$ έρχεται στην τελική της μορφή

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix} -1+2\Phi & \partial^i B \\ \partial^i B & (1+2\Psi)\delta^{ij} - D^{ij}E \end{bmatrix}$$

0.3.2 Perturbed affine connections-Einstein's tensor

Παρακάτω θα υπολογίσουμε τα perturbed affine connections και Einstein's tensor. Αρχικά, τα unperturbed affine connections δίνονται ως εξής

$$\begin{gathered}
\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a}, \qquad \Gamma^i_{0j} = \frac{a'}{a}\delta^i_j, \qquad \Gamma^0_{ij} = \frac{a'}{a}\delta_{ij}, \\
\Gamma^i_{00} \quad = \quad \Gamma^0_{0i} \quad = \quad \Gamma^i_{jk} \quad = \quad 0
\end{gathered}$$

Η έκφραση για τα affine connections ως προς τη μετρική, γράφεται

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

η οποία και γίνεται [2]

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\rho}} \right) + \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(\frac{\partial \delta g_{\rho\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \delta g_{\beta\rho}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \delta g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τα perturbed affine connections

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{0}_{00} =& \frac{1}{2}\delta g^{0\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial \tau} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\rho}} \right) + \frac{1}{2} g^{0\rho} \left(\frac{\partial \delta g_{\rho 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta g_{0\rho}}{\partial \tau} - \frac{\partial \delta g_{00}}{\partial x^{\rho}} \right) = \\
& \frac{1}{2}\frac{2\Phi}{a^2}(-2aa' - 2aa' + 2aa') + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right) \left[\frac{\partial(-2\Phi a^2)}{\partial \tau} + \frac{\partial(-2\Phi a^2)}{\partial \tau} - \frac{\partial(-2\Phi a^2)}{\partial \tau} \right] = \\
& -2\Phi\frac{a'}{a} - \frac{1}{2a^2}(-2\Phi' a^2 - 4\Phi a a') = -2\Phi\frac{a'}{a} + \Phi' + 2\Phi\frac{a'}{a} = \Phi'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{0}_{0i} =& \frac{1}{2}\delta g^{0\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho i}}{\partial \tau} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^{\rho}} \right) + \frac{1}{2} g^{0\rho} \left(\frac{\partial \delta g_{\rho i}}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta g_{0\rho}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \delta g_{0i}}{\partial x^{\rho}} \right) = \\
& \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right) \left[\frac{\partial(a^2\partial_i B)}{\partial \tau} + \frac{\partial(-a^2 2\Phi)}{\partial x^{i}} - \frac{\partial(a^2\partial_i B)}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^i B}{a^2}\left[\frac{\partial(a^2\delta_{ii})}{\partial \tau} \right] = \\
& -\frac{1}{2a^2}(-2a^2\partial_i\Phi) + \frac{\partial^i B}{2a^2}2aa'\delta_{ii} = \partial_i\Phi + \frac{a'}{a}\partial_i B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{i}_{00} =& \frac{1}{2}\delta g^{i\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial \tau} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\rho}} \right) + \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\frac{\partial \delta g_{\rho 0}}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta g_{0\rho}}{\partial \tau} - \frac{\partial \delta g_{00}}{\partial x^{\rho}} \right) = \\
& \frac{1}{2}\frac{\partial^i B}{a^2} \left[\frac{\partial(-a^2)}{\partial \tau} + \frac{\partial(-a^2)}{\partial \tau} - \frac{\partial(-a^2)}{\partial \tau} \right] + \frac{\delta^{ij}}{2a^2}\left[2\frac{\partial(a^2\partial_j B)}{\partial \tau} - \frac{\partial(-2\Phi a^2)}{\partial x^{j}} \right] = \\
& -\partial^i B\frac{a'}{a} + 2\frac{a'}{a}\partial^i B + \partial^i B' + \partial^i\Phi = \frac{a'}{a}\partial^i B + \partial^i B' + \partial^i \Phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{i}_{0j} =& \frac{1}{2}\delta g^{i\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho j}}{\partial \tau} + \frac{\partial g_{0\rho}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^{\rho}} \right) + \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\frac{\partial \delta g_{\rho j}}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta g_{0\rho}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \delta g_{0j}}{\partial x^{\rho}} \right) = \\
& \frac{\delta_{jj}}{2a^2}2aa'(2\Psi\delta^{ij} - D^{ij}E) + \frac{\delta^{ij}}{2a^2}\left[\frac{\partial[a^2(-2\Psi\delta_{ij} + D_{ij}E)]}{\partial \tau} + \frac{\partial(a^2\partial_j B)}{\partial x^{j}} - \frac{\partial(a^2\partial_j B)}{\partial x^{j}} \right] = \\
& \frac{a'}{a}(2\Psi\delta^i_j - D^i_j E) - \frac{a'}{a}(2\Psi\delta^i_j - D^i_j E) + \frac{1}{2}(-2\Psi'\delta_{ij} + D_{ij}E') = -\Psi'\delta_{ij} + \frac{1}{2}D_{ij}E'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma^0_{ij} =& \frac{1}{2}\delta g^{0\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho j}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{i\rho}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\rho}\right)+\frac{1}{2}g^{0\rho}\left(\frac{\partial \delta g_{\rho j}}{\partial x^i}+\frac{\partial \delta g_{i\rho}}{\partial x^j}-\frac{\partial \delta g_{ij}}{\partial x^\rho}\right)= \\
& \frac{1}{2}\frac{2\Phi}{a^2}\left[-\frac{\partial(a^2\delta_{ij})}{\partial\tau}\right]+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)\left[\frac{\partial(a^2\partial_j B)}{\partial x^i}+\frac{\partial(a^2\partial_i B)}{\partial x^j}-\frac{\partial[a^2(-2\Psi\delta_{ij}+D_{ij}E)]}{\partial\tau}\right]= \\
& -2\frac{a'}{a}\Phi\delta_{ij}-\frac{1}{2}\partial_i\partial_j B-\frac{1}{2}\partial_i\partial_j B+\frac{a'}{a}(-2\Psi\delta_{ij}+D_{ij}E)+\frac{1}{2}(-2\Psi'\delta_{ij}+D_{ij}E')= \\
& -2\frac{a'}{a}\Phi\delta_{ij}-\partial_i\partial_j B-2\frac{a'}{a}\Psi\delta_{ij}-\Psi'\delta_{ij}+\frac{a'}{a}D_{ij}E+\frac{1}{2}D_{ij}E'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma^i_{jk} =& \frac{1}{2}\delta g^{i\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho k}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{j\rho}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\rho}\right)+\frac{1}{2}g^{i\rho}\left(\frac{\partial \delta g_{\rho k}}{\partial x^j}+\frac{\partial \delta g_{j\rho}}{\partial x^k}-\frac{\partial \delta g_{jk}}{\partial x^\rho}\right)=\frac{\partial^i B}{2a^2}\left[-\frac{\partial(a^2\delta_{jk})}{\partial\tau}\right]+ \\
& \frac{\delta^{ii}}{2a^2}\left[\frac{\partial[a^2(-2\Psi\delta_{ik}+D_{ik}E)]}{\partial x^j}+\frac{\partial[a^2(-2\Psi\delta_{ij}+D_{ij}E)]}{\partial x^k}-\frac{\partial[a^2(-2\Psi\delta_{jk}+D_{jk}E)]}{\partial x^i}\right]= \\
& -\frac{a'}{a}\partial^i B\delta_{jk}-\partial_j\Psi\delta^i_k+\frac{1}{2}\partial_j D^i_k E-\partial_k\Psi\delta^i_j+\frac{1}{2}\partial_k D^i_j E+\partial^i\Psi\delta_{jk}-\frac{1}{2}\partial^i D_{jk}E
\end{aligned}
$$

Έπειτα ακολουθεί ο υπολογισμός του Ricci scalar, το οποίο ορίζεται ως εξής

$$
R_{\mu\nu}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}+\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}-\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}
$$

Η διαταραχή πρώτου βαθμού γράφεται ως

$$
\delta R_{\mu\nu}=\partial_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-\partial_\mu\delta\Gamma^\alpha_{\nu\alpha}+\delta\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}+\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}-\delta\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}-\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}
$$

Αρχικά, οι unperturbed τιμές δίνονται ως εξής

$$
R_{00}=-3\frac{a''}{a}+3\left(\frac{a'}{a}\right)^2,\qquad R_{0i}=0,\qquad R_{ij}=\left[\frac{a''}{a}+\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]\delta_{ij}
$$

οπότε

$$\delta R_{00} = \partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \delta\Gamma^\alpha_{0\alpha} + \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{00} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\delta\Gamma^\sigma_{00} - \delta\Gamma^\alpha_{\sigma 0}\Gamma^\sigma_{0\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma 0}\delta\Gamma^\sigma_{0\alpha} =$$

$$\Phi'' - \Phi'' + \frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + \frac{a'}{a}\Phi' + \frac{a'}{a}(-\Psi') + \frac{a'}{a}\Phi' +$$

$$\frac{3a'}{a}\Phi' - \frac{a'}{a}\Phi' - \frac{a'}{a}\delta^j_i\left(\frac{1}{2}D_{ij}E' - \Psi'\delta_{ij}\right) - \frac{a'}{a}\Phi' - \frac{a'}{a}\delta^i_j\left(\frac{1}{2}D_{ij}E' - \Psi'\delta_{ij}\right) =$$

$$\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + 3\frac{a'}{a}\Psi' + 3\frac{a'}{a}\Phi'$$

$$\delta R_{0i} = \partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{0i} - \partial_0 \delta\Gamma^\alpha_{i\alpha} + \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{0i} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\delta\Gamma^\sigma_{0i} - \delta\Gamma^\alpha_{\sigma i}\Gamma^\sigma_{0\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma i}\delta\Gamma^\sigma_{0\alpha} =$$

$$\partial_0\partial_i\Phi + \partial_0\left(\frac{a'}{a}\partial_i B\right) + \partial_j\left(\frac{1}{2}D_{ij}E' - \Psi'\delta_{ij}\right) - \partial_0\partial_i\Phi - \partial_0\left(\frac{a'}{a}\partial_i B\right) -$$

$$\partial_0\left(-3\partial_i\Psi - \partial_j\Psi\delta^j_i + \partial^j\Psi\delta_{ij} - \frac{a'}{a}\partial^j B\delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_j D^j_i E - \frac{1}{2}\partial^j D_{ij}E\right) +$$

$$\frac{a'}{a}\delta^k_i\left(-\partial_j\Psi\delta^j_k - 3\partial_k\Psi + \partial^j\Psi\delta_{jk} - \frac{a'}{a}\partial^j B\delta_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j D^j_k E - \frac{1}{2}\partial^j D_{jk}E\right) +$$

$$\frac{a'}{a}\partial_i\Phi + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + 3\frac{a'}{a}\partial_i\Phi + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B - \frac{a'}{a}\partial_i\Phi - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B -$$

$$\frac{a'}{a}\delta^k_j\left(-\partial_k\Psi\delta^j_i - \partial_i\Psi\delta^j_k + \partial^j\Psi\delta_{ki} - \frac{a'}{a}\partial^j B\delta_{ki} + \frac{1}{2}\partial_k D^j_i E + \frac{1}{2}\partial_i D^j_k E - \frac{1}{2}\partial^j D_{ki}E\right) -$$

$$\frac{a'}{a}\delta_{ij}\left(\frac{a'}{a}\partial^j B + \partial^j B' + \partial^j\Phi\right) - \frac{a'}{a}\delta^j_i\left(\partial_j\Phi + \frac{a'}{a}\partial_j B\right) + \frac{a'}{a}\delta^j_i\left(\partial_j\Phi + \frac{a'}{a}\partial_j B\right) =$$

$$\frac{1}{2}\partial_j D_{ij}E' - \partial_i\Psi' + 3\partial_0\partial_i\Psi + \partial_0\partial_i\Psi - \partial_0\partial_i\Psi + \partial_0\left(\frac{a'}{a}\partial_i B\right) - \frac{1}{2}\partial_0\partial_j D^j_i E + \frac{1}{2}\partial_o\partial^j D_{ij}E -$$

$$\frac{a'}{a}\partial_i\Psi - 3\frac{a'}{a}\partial_i\Psi + \frac{a'}{a}\partial_i\Psi - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\partial_j D^j_i E - \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\partial^j D_{ij}E + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B +$$

$$3\frac{a'}{a}\partial_i\Phi + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + \frac{a'}{a}\partial_i\Psi + 3\frac{a'}{a}\partial_i\Psi - \frac{a'}{a}\partial_i\Psi + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B - \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\partial_j D^j_i E +$$

$$\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\partial^j D_{ij}E - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B - \frac{a'}{a}\partial_i B' - \frac{a'}{a}\partial_i\Phi - \frac{a'}{a}\partial_i\Phi - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + \frac{a'}{a}\partial_i\Phi + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B =$$

$$\frac{1}{2}\partial_k D^k_i E' + 2\partial_i\Psi' + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi + \frac{a''}{a}\partial_i B - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + \frac{a'}{a}\partial_i B' + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B - \frac{a'}{a}\partial_i B' =$$

$$\frac{1}{2}\partial_k D^k_i E' + 2\partial_i\Psi' + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi + \frac{a''}{a}\partial_i B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B$$

$$
\begin{aligned}
\delta R_{ij} =& \partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{ij} - \partial_i \delta\Gamma^\alpha_{j\alpha} + \delta\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{ij} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\delta\Gamma^\sigma_{ij} - \delta\Gamma^\alpha_{\sigma j}\Gamma^\sigma_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma j}\delta\Gamma^\sigma_{i\alpha} = \\
& - 2\partial_0\left(\frac{a'}{a}\Phi\right)\delta_{ij} - \partial_i\partial_j B' - 2\partial_0\left(\frac{a'}{a}\Psi\right)\delta_{ij} - \Psi''\delta_{ij} + \partial_0\left(\frac{a'}{a}D_{ij}E\right) + \frac{1}{2}\partial_0(D_{ij}E') + \\
& \partial_k\left(-\partial_i\Psi\delta^k_j - \partial_j\Psi\delta^k_i + \partial^k\Psi\delta_{ij} - \frac{a'}{a}\partial^k B\delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i D^k_j E + \frac{1}{2}\partial_j D^k_i E - \frac{1}{2}\partial^k D_{ij}E\right) - \partial_i\partial_j\Phi - \\
& \frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B - \partial_i\left(-3\partial_j\Psi - \partial_k\Psi\delta^k_j + \partial^k\Psi\delta_{jk} - \frac{a'}{a}\partial^k B\delta_{jk} + \frac{1}{2}\partial_k D^k_j E - \frac{1}{2}\partial^k D_{jk}E\right) + \frac{a'}{a}\Phi'\delta_{ij} + \\
& \frac{a'}{a}\delta_{ij}(-3\Psi') + 4\frac{a'}{a}\left(-2\frac{a'}{a}\Phi\delta_{ij} - \partial_i\partial_j B - 2\frac{a'}{a}\Psi\delta_{ij} - \Psi'\delta_{ij} + \frac{a'}{a}D_{ij}E + \frac{1}{2}D_{ij}E'\right) - \\
& \frac{a'}{a}\delta^k_i\left(-2\frac{a'}{a}\Phi\delta_{kj} - \partial_k\partial_j B - 2\frac{a'}{a}\Psi\delta_{kj} - \Psi'\delta_{kj} + \frac{a'}{a}D_{kj}E + \frac{1}{2}D_{kj}E'\right) - \\
& \frac{a'}{a}\delta_{ik}\left(-\Psi'\delta_{kj} + \frac{1}{2}D_{kj}E'\right) - \frac{a'}{a}\delta_{kj}\left(-\Psi'\delta_{ki} + \frac{1}{2}D_{ki}E'\right) - \\
& \frac{a'}{a}\delta^k_j\left(-2\frac{a'}{a}\Phi\delta_{ik} - \partial_i\partial_k B - 2\frac{a'}{a}\Psi\delta_{ik} - \Psi'\delta_{ik} + \frac{a'}{a}D_{ik}E + \frac{1}{2}D_{ik}E'\right) = \\
& - 2\frac{a''}{a}\Phi\delta_{ij} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi\delta_{ij} - 2\frac{a'}{a}\Phi'\delta_{ij} - \partial_i\partial_j B' - 2\frac{a''}{a}\Psi\delta_{ij} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi\delta_{ij} - 2\frac{a'}{a}\Psi'\delta_{ij} - \\
& \Psi''\delta_{ij} + \frac{a''}{a}D_{ij}E - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E + \frac{a'}{a}D_{ij}E' + \frac{1}{2}D_{ij}E'' - \partial_j\partial_i\Psi - \partial_i\partial_j\Psi + \partial_k\partial^k\Psi\delta_{ij} - \\
& \frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B\delta_{ij} + \frac{1}{2}\partial_k\partial_i D^k_j E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j D^k_i E - \frac{1}{2}\partial^k\partial_k D_{ij}E - \partial_i\partial_j\Phi - \frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B + 3\partial_i\partial_j\Psi + \partial_i\partial_j\Psi - \\
& \partial_i\partial_j\Psi + \frac{a'}{a}\partial_i\partial^j B - \frac{1}{2}\partial_i\partial^k D^k_j E + \frac{1}{2}\partial^i\partial_k D_{jk}E + \frac{a'}{a}\Phi'\delta_{ij} - 3\frac{a'}{a}\Psi'\delta_{ij} - 8\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi\delta_{ij} - 4\frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B - \\
& 8\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi\delta_{ij} - 4\frac{a'}{a}\Psi'\delta_{ij} + 4\left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E + 2\frac{a'}{a}D_{ij}E' + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi\delta_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi\delta_{ij} + \\
& \frac{a'}{a}\Psi'\delta_{ij} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E - \frac{1}{2}\frac{a'}{a}D_{ij}E' + \frac{a'}{a}\Psi'\delta_{ij} - \frac{1}{2}\frac{a'}{a}D_{ij}E' + \frac{a'}{a}\Psi'\delta_{ij} - \frac{1}{2}\frac{a'}{a}D_{ij}E' + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi\delta_{ij} + \\
& \frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi\delta_{ij} + \frac{a'}{a}\Psi'\delta_{ij} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E - \frac{1}{2}\frac{a'}{a}D_{ij}E' = \\
& \left[-\frac{a'}{a}\Phi' - 5\frac{a'}{a}\Psi' - 2\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi - 2\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi - \Psi'' + \partial_k\partial^k\Psi - \frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B\right]\delta_{ij} + \\
& \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E + \frac{a''}{a}D_{ij}E + \frac{a'}{a}D_{ij}E' - \partial_i\partial_j B' - 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B - \partial_i\partial_j\Phi + \partial_i\partial_j\Psi + \frac{1}{2}D_{ij}E'' - \\
& \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D_{ij}E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j D^k_i E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_i D^k_j E
\end{aligned}
$$

Για τη scalar curvature ισχύει

$$R = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu}$$

της οποίας η διαταραχή πρώτης τάξης είναι

$$\delta R = \delta g^{\mu\alpha} R_{\alpha\mu} + g^{\mu\alpha} \delta R_{\alpha\mu} \tag{7}$$

Η background τιμή της είναι

$$R = \frac{6}{a^2}\frac{a''}{a}$$

και από την εξίσωση (7) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\delta R =& \delta g^{00} R_{00} + g^{00}\delta R_{00} + \delta g^{0i} R_{0i} + g^{0i}\delta R_{0i} + \delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij}\delta R_{ij} = \\
& \frac{2\Phi}{a^2}\left[-3\frac{a''}{a} + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right] + \left(-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + 3\frac{a'}{a}\Psi' + 3\frac{a'}{a}\Phi'\right) + \\
& \left(\frac{2\Psi}{a^2}\delta^{ij} - \frac{1}{a^2}D^{ij}E\right)\left[\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]\delta_{ij} + \frac{1}{a^2}\delta^{ij}\delta R_{ij} = \\
& \frac{1}{a^2}\left[-6\frac{a''}{a}\Phi + 6\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi - \frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - \partial_i\partial^i B' - \partial_i\partial^i\Phi - 3\Psi'' - 3\frac{a'}{a}\Psi' - 3\frac{a'}{a}\Phi' + 6\frac{a''}{a}\Psi\right] + \\
& \frac{1}{a^2}\left[6\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi + \partial_i\partial^i\Psi - \partial_i\partial^i\Phi - 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - \partial_i\partial^i B' - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 15\frac{a'}{a}\Psi' - 6\frac{a''}{a}\Phi - 6\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi\right] + \\
& \frac{1}{a^2}\left[-6\frac{a''}{a}\Psi - 6\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi - 3\Psi'' + 3\partial_k\partial^k\Psi - 3\frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B + \partial_k\partial^i D_i^k E\right] = \\
& \frac{1}{a^2}\left(-12\frac{a''}{a}\Phi - 6\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - 2\partial_i\partial^i B' - 2\partial_i\partial^i\Phi - 6\Psi'' - 18\frac{a'}{a}\Psi' - 6\frac{a'}{a}\Phi' + 4\partial_i\partial^i\Psi + \partial_k\partial^i D_i^k E\right)
\end{aligned}$$

Πλέον, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα perturbations του Einstein tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

του οποίου τα background στοιχεία είναι

$$G_{00} = 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2, \qquad G_{0i} = 0, \qquad G_{ij} = \left[-2\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]\delta_{ij}$$

Σε πρώτο βαθμό, βρίσκουμε

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\delta R$$

Πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}
\delta G_{00} =& \delta R_{00} - \frac{1}{2}\delta g_{00} R - \frac{1}{2} g_{00}\delta R = \\
& \frac{a^2}{2a^2}\left(-6\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - 2\partial_i\partial^i B' - 2\partial_i\partial^i\Phi - 6\Psi'' - 6\frac{a'}{a}\Phi' - 18\frac{a'}{a}\Psi' - 12\frac{a''}{a}\Phi + 4\partial_i\partial^i\Psi + \partial_k\partial^i D_i^k E\right) + \\
& \frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + 3\frac{a'}{a}\Psi' + 3\frac{a'}{a}\Phi' - \frac{1}{2}(-2\Phi a^2)\frac{6}{a^2}\frac{a''}{a} = \\
& \frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + 3\frac{a'}{a}\Psi' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 6\frac{a''}{a}\Phi - 3\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - \partial_i\partial^i B' - \partial_i\partial^i\Phi - \\
& 3\Psi'' - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 9\frac{a'}{a}\Psi' - 6\frac{a''}{a}\Phi + 2\partial_i\partial^i\Psi + \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D_i^k E = \\
& -2\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - 6\frac{a'}{a}\Psi' + 2\partial_i\partial^i\Psi + \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D_i^k E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta G_{0i} =& \delta R_{0i} - \frac{1}{2}\delta g_{0i} R - \frac{1}{2} g_{0i}\delta R = \\
& \frac{a''}{a}\partial_i B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + 2\partial_i\Psi' + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi + \frac{1}{2}\partial_k D_i^k E' - \frac{1}{2}a^2\partial_i B\frac{6}{a^2}\frac{a''}{a} = \\
& -2\frac{a''}{a}\partial_i B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + 2\partial_i\Psi' + \frac{1}{2}\partial_k D_i^k E' + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta G_{ij} =& \delta R_{ij} - \frac{1}{2}\delta g_{ij} R - \frac{1}{2} g_{ij}\delta R = \\
& \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E + \frac{a''}{a} D_{ij}E + \frac{a'}{a} D_{ij}E' - \partial_i\partial_j B' - 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B - \partial_i\partial_j\Phi + \partial_i\partial_j\Psi + \frac{1}{2} D_{ij}E'' - \\
& \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D_{ij}E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j D_i^k E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_i D_j^k E + \left[-\frac{a'}{a}\Phi' - 5\frac{a'}{a}\Psi' - 2\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi\right]\delta_{ij} + \\
& \left[-2\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi - \Psi'' + \partial_k\partial^k\Psi - \frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B\right]\delta_{ij} - \frac{1}{2}(-2\Psi a^2\delta_{ij} + a^2 D_{ij}E)\frac{6}{a^2}\frac{a''}{a} - \\
& \frac{\delta_{ij}}{2}\left[-6\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - 2\partial_i\partial^i B' - 2\partial_i\partial^i\Phi - 6\Psi'' - 6\frac{a'}{a}\Phi' - 18\frac{a'}{a}\Psi' - 12\frac{a''}{a}\Phi + 4\partial_i\partial^i\Psi + \partial_k\partial^i D_i^k E\right] = \\
& \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E + \frac{a''}{a} D_{ij}E + \frac{a'}{a} D_{ij}E' - \partial_i\partial_j B' - 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B - \partial_i\partial_j\Phi + \partial_i\partial_j\Psi + \frac{1}{2} D_{ij}E'' - \\
& \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D_{ij}E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j D_i^k E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_i D_j^k E - 3\frac{a''}{a} D_{ij}E + \left[-\frac{a'}{a}\Phi' - 5\frac{a'}{a}\Psi' - 2\frac{a''}{a}\Phi\right]\delta_{ij} + \\
& \left[-2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi - 2\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi - \Psi'' + \partial_k\partial^k\Psi - \frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B + 6\frac{a''}{a}\Psi + 3\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B +\right]\delta_{ij} + \\
& \left[\partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\Phi + 3\Psi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 9\frac{a'}{a}\Psi' + 6\frac{a''}{a}\Phi - 2\partial_i\partial^i\Psi - \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D_i^k E\right]\delta_{ij} = \\
& \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E - 2\frac{a''}{a} D_{ij}E + \frac{a'}{a} D_{ij}E' - \partial_i\partial_j B' - 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial_j B - \partial_i\partial_j\Phi + \partial_i\partial_j\Psi + \frac{1}{2} D_{ij}E'' - \\
& \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D_{ij}E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j D_i^k E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_i D_j^k E + \left[2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Psi' + 4\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi + 2\Psi''\right]\delta_{ij} + \\
& \left[-\partial_k\partial^k\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi + \partial_k\partial^k\Phi + \partial^k\partial_k B' + 4\frac{a''}{a}\Psi + 2\frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B - \frac{1}{2}\partial_k\partial^m D_m^k E\right]\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

Μας διευκολύνει να γράψουμε τις εκφράσεις με έναν δείκτη πάνω και έναν δείκτη κάτω, οπότε

$$\delta G^{\mu}_{\nu} = \delta(g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}) = \delta g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta G_{\alpha\nu}$$

Πιο συγκεκριμένα

$$\delta G^0_0 = \delta g^{0\alpha}G_{\alpha 0} + g^{0\alpha}\delta G_{\alpha 0} = \delta g^{00}G_{00} + g^{00}\delta G_{00} + \delta g^{0i}G_{i0} + g^{0i}\delta G_{i0} =$$

$$3\frac{2\Phi}{a^2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{a^2}\right)\left(-2\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B - 6\frac{a'}{a}\Psi' + 2\partial_i\partial^i\Psi + \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D^k_i E\right) =$$

$$\frac{1}{a^2}\left[6\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi + 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + 6\frac{a'}{a}\Psi' - 2\partial_i\partial^i\Psi - \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D^k_i E\right]$$

$$\delta G^0_i = \delta g^{0\alpha}G_{\alpha i} + g^{0\alpha}\delta G_{\alpha i} = \delta g^{00}G_{0i} + g^{00}\delta G_{0i} + \delta g^{0j}G_{ji} + g^{0j}\delta G_{ji} =$$

$$-\frac{1}{a^2}\left[-2\frac{a''}{a}\partial_i B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B + 2\partial_i\Psi' + \frac{1}{2}\partial_k D^k_i E' + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi\right] + \frac{\delta_{ij}}{a^2}\partial^j B\left[-2\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{a^2}\left[2\frac{a''}{a}\partial_i B - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B - 2\partial_i\Psi' - \frac{1}{2}\partial_k D^k_i E' - 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi - 2\frac{a''}{a}\partial_i B + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\partial_i B\right] =$$

$$\frac{1}{a^2}\left(-2\partial_i\Psi' - \frac{1}{2}\partial_k D^k_i E' - 2\frac{a'}{a}\partial_i\Phi\right)$$

$$\delta G^i_j = \delta g^{i\alpha}G_{\alpha j} + g^{i\alpha}\delta G_{\alpha j} = \delta g^{i0}G_{0j} + g^{i0}\delta G_{0j} + \delta g^{ik}G_{kj} + g^{ik}\delta G_{kj} =$$

$$\frac{\delta_{kj}}{a^2}(2\Psi\delta^{ik} - D^{ik}E)\left[-2\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right] + \frac{\delta^{ik}}{a^2}\left(\partial_k\partial_j\Psi - \partial_k\partial_j B' - \partial_k\partial_j\Phi + \frac{a'}{a}D_{kj}E'\right) +$$

$$\frac{\delta^{ik}}{a^2}\left[-2\frac{a''}{a}D_{kj}E + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{kj}E + \frac{1}{2}D_{kj}E'' + \frac{1}{2}\partial_i\partial_k D^i_j E + \frac{1}{2}\partial^i\partial_j D_{ik}E - \frac{1}{2}\partial_i\partial^i D_{kj}E - 2\frac{a'}{a}\partial_k\partial_j B\right] +$$

$$\frac{\delta_{kj}}{a^2}\left[2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Psi' + 4\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi + 4\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi + 2\Psi'' - \partial_k\partial^k\Psi + 2\frac{a'}{a}\partial_k\partial^k B\right] +$$

$$\frac{\delta_{kj}}{a^2}\left(\partial_k\partial^k B' + \partial_k\partial^k\Phi - \frac{1}{2}\partial_i\partial^m D^i_m E\right) =$$

$$\frac{\delta_{ij}}{a^2}\left[-4\frac{a''}{a}\Psi + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi + 2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Psi' + 4\frac{a''}{a}\Phi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi + 4\frac{a''}{a}\Psi - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Psi + 2\Psi''\right] +$$

$$\frac{\delta_{ij}}{a^2}\left(-\partial_i\partial^i\Psi + 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial^i\partial_i B' + \partial_i\partial^i\Phi - \frac{1}{2}\partial_k\partial^m D^k_m E\right) + \frac{1}{a^2}\left[2\frac{a''}{a}D^{ij}E - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D^{ij}E\right] +$$

$$\frac{1}{a^2}\left[\partial_i\partial_j\Psi - \partial_i\partial_j B - \partial_i\partial_j\Phi + \frac{a'}{a}D_{ij}E' - 2\frac{a''}{a}D_{ij}E + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 D_{ij}E + \frac{1}{2}D_{ij}E'' + \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D^k_j E\right] +$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\partial_k\partial_j D^{ik}E - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D^i_j E - 2\frac{a'}{a}\partial^i\partial_j B\right) =$$

$$\frac{\delta^i_j}{a^2}\left[2\frac{a'}{a}\Phi' + 4\frac{a''}{a}\Phi + 4\frac{a'}{a}\Psi' - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\Phi + 2\Psi'' - \partial_i\partial^i\Psi + 2\frac{a'}{a}\partial_i\partial^i B + \partial_i\partial^i B' + \partial_i\partial^i\phi - \frac{1}{2}\partial_k\partial^m D^k_m E\right] +$$

$$\frac{1}{a^2}\left(-\partial^i\partial_j\Phi + \partial^i\partial_j\Psi - 2\frac{a'}{a}\partial^i\partial_j B - \partial^i\partial_j B' + \frac{a'}{a}D^i_j E' + \frac{1}{2}D^i_j E'' + \frac{1}{2}\partial_k\partial^i D^k_j E + \frac{1}{2}\partial_k\partial_j D^{ik}E - \frac{1}{2}\partial_k\partial^k D^i_j E\right)$$

0.3.3 Perturbed stress energy-momentum tensor

Ως γνωστόν, τα perturbations της μετρικής προκαλούνται από τα perturbations του stress energy-momentum tensor του πεδίου inflaton

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right)$$

του οποίου οι background τιμές είναι

$$T_{00} = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)a^2, \qquad T_{0i} = 0, \qquad T_{ij} = \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)a^2\right)\delta_{ij}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\delta T_{\mu\nu} =& \partial_\mu\delta\phi\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\delta\phi - \delta g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right) - \\ & g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\delta\phi\partial_\beta\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right)\end{aligned}$$

Πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}\delta T_{00} =& \phi'\delta\phi' + \phi'\delta\phi' + 2\Phi a^2\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\phi'^2 + \frac{1}{a^2}\delta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi\right) + V(\phi)\right] + a^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\Phi}{a^2}\phi'^2 + \frac{\partial^i B}{a^2}\phi'\partial_i\phi\right)\right] + \\ & a^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}2\Psi\delta^{ij} - \frac{1}{a^2}D^{ij}E\right)\partial_i\phi\partial_j\phi\right] + a^2\left(-\frac{1}{a^2}\phi'\delta\phi' + \frac{1}{a^2}\delta^{ij}\partial_i\delta\phi\partial_j\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right) = \\ & 2\phi'\delta\phi' - \Phi\phi'^2 + 2\Phi(\partial_i\phi)^2 + 2\Phi a^2V(\phi) + \Phi\phi'^2 + \frac{1}{2}\phi'\partial^i B\partial_i\phi + \Psi(\partial_i\phi)^2 - \frac{1}{2}D^{ij}E\partial_i\phi\partial_j\phi - \\ & \phi'\delta\phi' + \partial_i\delta\phi\partial_i\phi + a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi = \phi'\delta\phi' + 2\Phi a^2V(\phi) + a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\end{aligned}$$

$$\delta T_{0i} = \delta\phi'\partial_i\phi + \phi'\partial_i\delta\phi - a^2\partial_i B\left(-\frac{1}{2a^2}\phi'^2 + V(\phi)\right) = \phi'\partial_i\delta\phi + \frac{1}{2}\phi'^2\partial_i B - a^2 V(\phi)\partial_i B$$

$$\begin{aligned}\delta T_{ij} =& \partial_i\delta\phi\partial_j\phi + \partial_i\phi\partial_j\delta\phi - a^2(-2\Psi\delta_{ij} + D_{ij}E)\left(-\frac{1}{2a^2}\phi'^2 + \frac{1}{2a^2}\delta^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + V(\phi)\right) - \\ & a^2\delta_{ij}\left(\frac{1}{a^2}\Phi\phi'^2 + \frac{1}{2a^2}\phi'\partial^i B\partial_i\phi + \frac{1}{a^2}\Psi(\partial_i\phi)^2 - \frac{1}{2a^2}D^{ij}E\partial_i\phi\partial_j\phi - \frac{1}{a^2}\phi'\delta\phi' + \frac{1}{a^2}\partial_i\delta\phi\partial_i\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right) = \\ & \frac{1}{2}D_{ij}E\phi'^2 - a^2 D_{ij}EV(\phi) + \left(2a^2\Psi V(\phi) - \Psi\phi'^2 - \Phi\phi'^2 + \phi'\delta\phi' - a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right)\delta_{ij}\end{aligned}$$

Για ευκολία πάλι

$$\delta T^\mu_\nu = \delta(g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}) = \delta g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}\delta T_{\alpha\nu}$$

όπου

$$\begin{aligned}\delta T^0_0 =& \delta g^{0\alpha}T_{\alpha 0} + g^{0\alpha}\delta T_{\alpha 0} = \frac{2\Phi}{a^2}\left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)a^2\right) - \frac{1}{a^2}\left(\phi'\delta\phi' + 2\Phi V(\phi)a^2 + a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right) = \\ & \frac{\Phi}{a^2}\phi'^2 + 2\Phi V(\phi) - \frac{1}{a^2}\phi'\delta\phi' - 2\Phi V(\phi) - \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi = \frac{1}{a^2}\left(\Phi\phi'^2 - \phi'\delta\phi' - a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta T^i_0 =& \delta g^{i\alpha}T_{\alpha 0} + g^{i\alpha}\delta T_{\alpha 0} = \frac{\partial^i B}{a^2}\left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi)a^2\right) + \frac{\delta^{ij}}{a^2}\left(\phi'\partial_j\delta\phi + \frac{1}{2}\phi'^2\partial_j B - a^2 V(\phi)\partial_j B\right) = \\ & \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\phi'^2\partial^i B + a^2 V(\phi)\partial^i B + \phi'\partial^i\delta\phi + \frac{1}{2}\phi'^2\partial^i B - a^2 V(\phi)\partial^i B\right) = \frac{1}{a^2}\left(\phi'^2\partial^i B + \phi'\partial^i\delta\phi\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta T^0_i =& \delta g^{0\alpha}T_{\alpha i} + g^{0\alpha}\delta T_{\alpha i} = \frac{\partial^j B}{a^2}\left(\frac{1}{2}\phi'^2 - a^2 V(\phi)\right)\delta_{ij} - \frac{1}{a^2}\left(\phi'\partial_i\delta\phi + \frac{1}{2}\phi'^2\partial_i B - a^2 V(\phi)\partial_i B\right) = \\ & \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\phi'^2\partial_i B - a^2 V(\phi)\partial_i B - \phi'\partial_i\delta\phi - \frac{1}{2}\phi'^2\partial_i B + a^2 V(\phi)\partial_i B\right) = -\frac{1}{a^2}\phi'\partial_i\delta\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta T^i_j =& \delta g^{i\alpha}T_{\alpha j} + g^{i\alpha}\delta T_{\alpha j} = \frac{\delta_{kj}}{a^2}(2\Psi\delta^{ik} - D^{ik}E)\left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)a^2\right) + \frac{\delta^{ik}}{a^2}\left(\frac{1}{2}\phi'^2 D_{kj}E - a^2 D_{kj}EV(\phi)\right) + \\ & \frac{\delta^{ik}}{a^2}\left(2a^2\Psi V(\phi) - \phi'^2\Psi - \phi'^2\Phi + \phi'\delta\phi' - a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right)\delta_{kj} = \frac{\delta^i_j}{a^2}\left(\phi'^2\Psi - 2a^2\Psi V(\phi) + 2a^2\Psi V(\phi)\right) + \\ & \frac{\delta^i_j}{a^2}\left(-\phi'^2\Psi - \phi'^2\Phi + \phi'\delta\phi' - a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi\right) + \frac{1}{a^2}\left(a^2 ED^{ij}V(\phi) - \frac{1}{2}\phi'^2 ED^{ij} + \frac{1}{2}\phi'^2 ED_{ij} - a^2 ED_{ij}V(\phi)\right) = \\ & \frac{\delta^i_j}{a^2}\left(\phi'\delta\phi' - \phi'^2\Phi - a^2\delta\phi\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

0.3.4 Perturbed Klein-Gordon

Η εξίσωση κίνησης του inflaton είναι η Klein-Gordon εξίσωση ενός scalar πεδίου υπό τη δράση του δυναμικού του $V(\phi)$. Συνεπώς, η εξίσωση που θα διαταράξουμε είναι

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = \frac{\partial V}{\partial\phi}$$

η οποία σε μηδενικό βαθμό δίνει την εξίσωση κίνησης του inflaton

$$\phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' = -\frac{\partial V}{\partial\phi}a^2 \tag{8}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu\partial^\mu\phi) = \delta(\Box\phi) =& \delta[(-g)^{-\frac{1}{2}}]\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] + (-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[\delta[(-g)^{\frac{1}{2}}]g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] + \\ & (-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}\delta g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] + (-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\nu(\delta\phi)]\end{aligned}$$

και με βάση τις σχέσεις

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\nu\mu}, \qquad \delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}}, \qquad \delta\frac{1}{\sqrt{-g}} = \frac{\delta\sqrt{-g}}{g}$$

έχουμε

$$a^2\delta[(-g)^{-\frac{1}{2}}]\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = \phi''\Phi + 2\frac{a'}{a}\Phi\phi' - 3\Psi\phi'' - 6\frac{a'}{a}\Psi\phi'$$

$$a^2(-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[\delta[(-g)^{\frac{1}{2}}]g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = -\Phi\phi'' - \Phi'\phi' - 2\frac{a'}{a}\Phi\phi' + 3\phi'\Psi' + 3\Psi\phi'' + 6\frac{a'}{a}\Psi\phi'$$

$$a^2(-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}\delta g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = 2\Phi\phi'' + 2\Phi'\phi' + 4\frac{a'}{a}\Phi\phi' + \phi'\partial_i\partial^i B$$

$$a^2(-g)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu[(-g)^{\frac{1}{2}}g^{\mu\nu}\partial_\nu(\delta\phi)] = \partial_i\partial^i\delta\phi - \delta\phi'' - 2\frac{a'}{a}\delta\phi'$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε

$$\begin{aligned}a^2\delta(\partial_\mu\partial^\mu\phi) =&\phi''\Phi+2\frac{a'}{a}\Phi\phi'-3\Psi\phi''-6\frac{a'}{a}\Psi\phi'-\Phi\phi''-\Phi'\phi'-2\frac{a'}{a}\Phi\phi'+3\phi'\Psi'+3\Psi\phi''+6\frac{a'}{a}\Psi\phi'+\\ &2\Phi\phi''+2\Phi'\phi'+4\frac{a'}{a}\Phi\phi'+\phi'\partial_i\partial^iB+\partial_i\partial^i\delta\phi-\delta\phi''-2\frac{a'}{a}\delta\phi'=\\ &-\delta\phi''-2\frac{a'}{a}\delta\phi'+\partial_i\partial^i\delta\phi+2\Phi\phi''+4\frac{a'}{a}\Phi\phi'+\Phi'\phi'+3\Psi'\phi'+\phi'\partial_i\partial^iB\end{aligned}$$

Η (8) μπορεί να γραφεί και ως

$$2\Phi\phi''+4\frac{a'}{a}\Phi\phi'=-2\Phi a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}$$

οπότε η προηγούμενη εξίσωση τροποποιείται ως εξής

$$a^2\delta(\partial_\mu\partial^\mu\phi)=-\delta\phi''-2\frac{a'}{a}\delta\phi'+\partial_i\partial^i\delta\phi+\Phi'\phi'+3\Psi'\phi'+\phi'\partial_i\partial^iB-2\Phi a^2\frac{\partial V}{\partial\phi}$$

Επιπλέον, το variation του δεξιού μέλους της Klein-Gordon μας δίνει

$$\delta\left(\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)=\frac{\partial^2V}{\partial\phi^2}\delta\phi$$

Οπότε, η εξίσωση κίνησης έρχεται στην τελική της μορφή

$$\delta\phi''+2\frac{a'}{a}\delta\phi'-\partial_i\partial^i\delta\phi-\Phi'\phi'-3\Psi'\phi'-\phi'\partial_i\partial^iB=-a^2\frac{\partial^2V}{\partial\phi^2}\delta\phi-2\Phi a^2\frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (9)$$

0.3.5 Gauge invariance

Καθώς αναλύουμε τα cosmological density perturbations, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να ακολουθήσουμε την εξέλιξη ενός χωρόχρονου ο οποίος δεν είναι ούτε ομοιογενής ούτε ισότροπος. Αυτό γίνεται ακολουθώντας την εξέλιξη των διαφορών μεταξύ του πραγματικού χωρόχρονου και ενός καλά μελετημένου χωρόχρονου αναφοράς. Έτσι λοιπόν, θα θεωρήσουμε μικρές διαταραχές σε έναν ομοιογενή και ισότροπο χωρόχρονο. Το σύστημα αναφοράς στην περίπτωσή μας είναι ο χωρικά επίπεδος Friedmann-Robertson-Walker χωρόχρονος, με στοιχείο μετρικής

$$ds^2 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + dx^2)$$

Το στοιχείο κλειδί είναι ότι η γενική σχετικότητα είναι μία θεωρία βαθμίδας, όπου οι μετασχηματισμοί βαθμίδας είναι οι γενικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων από ένα τοπικό σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο.

Όταν υπολογίζουμε τη διαταραχή μίας δεδομένης ποσότητας, υπολογίζουμε ουσιαστικά τη διαφορά μεταξύ της τιμής που έχει η συγκεκριμένη ποσότητα στον πραγματικό φυσικό χωρόχρονο και της τιμής που έχει στο unperturbed background. Βέβαια, για να γίνει αυτή η σύγκριση μεταξύ των δύο τιμών, είναι απαραίτητο να έχουν υπολογιστεί στο ίδιο σημείο του χωρόχρονου. Από τη στιγμή που οι δύο τιμές ¨ζουν¨ σε δύο διαφορετικές γεωμετρίες, είναι αναγκαίο να οριστεί ένας χάρτης ο οποίος θα επιτρέπει να συνδέεται μονοσήμαντα το ίδιο σημείο στους δύο διαφορετικούς χωρόχρονους. Αυτή η αντιστοίχιση ονομάζεται επιλογή βαθμίδας και αλλάζοντας το χάρτη σημαίνει ότι κάνουμε ένα μετασχηματισμό βαθμίδας.

Η επιλογή μίας βαθμίδας στη γενική σχετικότητα σημαίνει επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων. Μία επιλογή συντεταγμένων ορίζει ένα threading του χωρόχρονου σε γραμμές (αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες χωρικές συντεταγμένες x) και σε ένα slicing σε υπερεπιφάνειες (αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο χρόνο τ). Μία επιλογή συντεταγμένων ονομάζεται βαθμίδα και δεν υπάρχει προτιμητέα βαθμίδα.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΒΑΘΜΙΔΑΣ $\Longleftrightarrow$ SLICING ΚΑΙ THREADING

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την αλλαγή συντεταγμένων είτε ως έναν ενεργό μετασχηματισμό κατά τον οποίο αλλάζουμε λίγο το manifold, είτε ως παθητικό μετασχηματισμό κατά τον οποίο δεν αλλάζουμε το manifold (όλα τα σημεία παραμένουν σταθερά) αλλά το σύστημα συντεταγμένων. Σύμφωνα με το τελευταίο, συγκρίνουμε τη μετρική (ή τα perturbations της) στο σημείο P (με συντεταγμένες x^μ) με την καινούρια μετρική στο σημείο P', για το οποίο ισχύει ότι $\tilde{x^\mu}(P') = x^\mu(P)$. Αυτός κιόλας είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος για την ανίχνευση συμμετριών, με την προϋπόθεση ότι θεωρούμε απειροστούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Η εφαρμογή ενός απειροστού μετασχηματισμού βαθμίδας στις συντεταγμένες

$$\tilde{x^\mu} = x^\mu + \delta x^\mu$$

επιβάλλει σε μία γενική ποσότητα Q έναν μετασχηματισμό στα perturbations του

$$\tilde{\delta Q} = \delta Q + \pounds_{\delta x} Q_0$$

όπου Q_0 η background τιμή της ποσότητας Q και $\pounds_{\delta x}$ η Lie-derivative της Q κατά μήκος του δx^μ. Για ένα scalar, η Lie-derivative είναι μία απλή παράγωγος κατά κατεύθυνση.

Αποσυνθέτοντας το διάνυσμα δx^μ

$$\delta x^0 = \xi^0(x^\mu)$$
$$\delta x^i = \partial^i \beta(x^\mu) + \upsilon^i(x^\mu), \quad \partial_i \upsilon^i = 0$$

μπορούμε εύκολα να εξάγουμε τον κανόνα μετασχηματισμού μίας scalar ποσότητας f. Πρώτα γράφουμε $\delta f(x) = f(x) - f_0(x)$, όπου $f_0(x)$ είναι η background τιμή. Κάτω από έναν μετασχηματισμό βαθμίδας, έχουμε $\tilde{\delta f}(\tilde{x^\mu}) = \tilde{f}(\tilde{x^\mu}) - \tilde{f}_0(\tilde{x^0})$. Από τη στιγμή που το f είναι scalar, μπορούμε να γράψουμε $\tilde{f}(\tilde{x^\mu}) = f(x^\mu)$ (η τιμή μίας scalar συνάρτησης σε ένα δεδομένο φυσικό σημείο, είναι ίδια σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων). Από την άλλη, στην unperturbed background υπερεπιφάνεια η background λύση είναι ίδια, $\tilde{f}_0(\tilde{x^0}) = f_0(\tilde{x^0})$. Οπότε, έχουμε

$$\tilde{\delta f}(\tilde{x^\mu}) = \tilde{f}(\tilde{x^\mu}) - \tilde{f}_0(\tilde{x^0}) = f(x^\mu) - f_0(\tilde{x^0}) = f(x^\mu) - \delta x^0 \frac{\partial f_0(x^0)}{\partial x^0} - f_0(x^0)$$

Συνεπώς, εξάγουμε ότι

$$\tilde{\delta f} = \delta f - f_0' \xi^0$$

Για τα spin 0 perturbations της μετρικής, δουλεύουμε ανάλογα. Κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^\mu \rightarrow \tilde{x^\mu} = x^\mu + \delta x^\mu$, το στοιχείο γραμμή μένει αναλλοίωτο ($ds^2 = \tilde{ds^2}$). Αυτό επιβάλλει για παράδειγμα, ότι $a^2(\tilde{x^0})(1+2\tilde{\Phi})(\tilde{dx^0})^2 = a^2(x^0)(1+2\Phi)(dx^0)^2$. Επειδή $a^2(\tilde{x^0}) \simeq a^2(x^0) + 2aa'\xi^0$ και $\tilde{dx^0} = (1+\xi^{0\prime})dx^0 + \frac{\partial x^0}{\partial x^i}dx^i$, παρατηρούμε ότι $1 + 2\Phi = 1 + 2\tilde{\Phi} + 2H\xi^0 + 2\xi^{0\prime}$. Μία παρόμοια διαδικασία οδηγεί στους παρακάτω κανόνες μετασχηματισμού

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \xi^{0\prime} - \frac{a'}{a}\xi^0$$
$$\tilde{B} = B + \xi^0 + \beta'$$
$$\tilde{\Psi} = \Psi - \frac{1}{3}\nabla^2\beta + \frac{a'}{a}\xi^0$$
$$\tilde{E} = E + 2\beta$$

Το πρόβλημα εδώ πηγάζει από το γεγονός ότι μία αλλαγή στο χάρτη, δηλαδή στο σύστημα συντεταγμένων, επιβάλλει variation του perturbation μίας δεδομένης ποσότητας η οποία μπορεί να παίρνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με την επιλογή βαθμίδας. Για να εξαλειφθεί το πρόβλημα αυτό, υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές

- Εύρεση αυτών των συνδιασμών που αντιπροσωπεύουν gauge invariant ποσότητες
- Επιλογή δεδομένης βαθμίδας και υπολογισμοί σε αυτή τη βαθμίδα

Και οι δύο εναλλακτικές έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Η επιλογή μίας βαθμίδας μπορεί να κάνει τεχνικά πιο απλό τον υπολογισμό, αλλά υπάρχει ο κίνδυνος να περιέχει gauge freedoms που δεν είναι φυσικές. Από την άλλη, ο gauge-invariant υπολογισμός μπορεί να είναι τεχνικά δυσκολότερος, αλλά έχει το πλεονέκτημα της ύπαρξης μόνο φυσικών ποσοτήτων.

Κάποιες gauge invariant ποσότητες είναι για παράδειγμα τα gauge invariant δυναμικά ή αλλιώς Bardeen's

$$\Phi_{GI} = \Phi - \frac{1}{a}\left[\left(-B + \frac{E'}{2}\right)a\right]'$$
$$\Psi_{GI} = \Psi + \frac{1}{6}\nabla^2 E - \frac{a'}{a}\left(B - \frac{E'}{2}\right)$$

0.3.6 Comoving curvature perturbation

Η εσωτερική χωρική καμπυλότητα υπερεπιφανειών σταθερού conformal χρόνου τ και για ένα flat σύμπαν, δίνεται ως

$$^{(3)}R = \frac{4}{a^2}\nabla^2\Psi$$

Η ποσότητα Ψ συνήθως αναφέρεται ως curvature perturbation. Μέχρι τώρα όμως είδαμε, ότι το curvature potential Ψ δεν είναι gauge αναλλοίωτο, αλλά ορίζεται σε δεδομένο slicing. Κάτω από έναν μετασχηματισμό σε υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου $\tau \to \tau + \xi^0$ (αλλαγή slicing)

$$\Psi \to \Psi + \mathcal{H}\xi^0$$

Θεωρούμε τώρα το comoving slicing, το οποίο ορίζεται να είναι το slicing που είναι ορθογώνιο στις κοσμικές γραμμές των comoving παρατηρητών, με βάση τους οποίους χαρακτηρίζεται η επέκταση ισοτροπική. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ροή ενέργειας μετρούμενη από τους παρατηρητές, δηλαδή $T_{0i} = 0$. Κατά τη διάρκεια του inflation αυτό σημαίνει ότι αυτοί οι παρατηρητές μετράνε $\delta\phi_{com} = 0$, από τη στιγμή που ο T_{0i} πηγαίνει ως $\partial_i\delta\phi(x,\tau)\phi'(\tau)$.

Εφόσον $\delta\phi \to \delta\phi - \phi'\xi^0$ για έναν μετασχηματισμό σε υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου, αυτό σημαίνει ότι

$$\delta\phi \to \delta\phi_{com} = \delta\phi - \phi'\xi^0 = 0 \Rightarrow \xi^0 = \frac{\delta\phi}{\phi'}$$

όπου το $\xi^0 = \frac{\delta\phi}{\phi'}$ είναι η χρονική συνθήκη που χρειάζεται για να πάμε από ένα γενικό slicing με γενικό $\delta\phi$ στο comoving slicing όπου $\delta\phi_{com} = 0$.

Την ίδια στιγμή, η curvature perturbation Ψ μετασχηματίζεται ως

$$\Psi \to \Psi_{com} = \Psi + \mathcal{H}\xi^0 = \Psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi'}$$

Η ποσότητα

$$R = \Psi + \mathcal{H}\frac{\delta\phi}{\phi'} = \Psi + H\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}$$

καλείται comoving curvature perturbation, είναι gauge invariant από κατασκευής και συσχετίζεται με την gauge dependent curvature perturbation Ψ σε ένα γενικό slicing και το inflaton perturbation $\delta\phi$ σε αυτή τη βαθμίδα. Από κατασκευής, το R αντιπροσωπεύει το βαρυτικό δυναμικό σε comoving υπερεπιφάνειες όπου $\delta\phi = 0$ [2]

$$R = \Psi|_{\delta\phi=0}$$

0.3.7 Υπολογισμός της curvature perturbation στη longitudinal gauge

Η longitudinal gauge είναι μία βολική επιλογή βαθμίδας για τον υπολογισμό των cosmological perturbations και χαρακτηρίζεται από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων, τέτοιον ώστε $B = E = 0$. Έτσι ουσιαστικά μένουν 2 βαθμοί ελευθερίας στα scalar perturbations, Φ και Ψ.

Αρχικά, για τον υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε το μη διαγώνιο κομμάτι $(i \neq j)$ της $(ij)-$εξίσωσης Einstein. Από τη στιγμή που ο stress energy-momentum tensor δεν έχει μη διαγώνια στοιχεία, έχουμε

$$-\partial_i\partial_j\Phi + \partial_i\partial_j\Psi = 8\pi G \cdot 0 \Rightarrow \partial_i\partial_j(\Psi - \Phi) = 0 \Rightarrow \Psi = \Phi$$

Δουλεύοντας λοιπόν μόνο με τη μεταβλητή Ψ, συνεχίζουμε με το $(0i)-$ στοιχείο της εξίσωσης Einstein, οπότε

$$2\partial_i\Psi' + 2\frac{a'}{a}\partial_i\Psi = 8\pi G\phi'\partial_i\delta\phi \Rightarrow \partial_i\left(\Psi' + \frac{a'}{a}\Psi\right) = \partial_i(4\pi G\phi'\delta\phi) \Rightarrow \Psi' + H\Psi = 4\pi G\phi'\delta\phi = \epsilon H^2\frac{\delta\phi}{\phi'} \tag{10}$$

όπου $\epsilon = 4\pi G\frac{\phi'^2}{H^2}$ (slow-roll parameter).

Στη συνέχεια, με όμοιο τρόπο εξάγουμε από το $(00)-$στοιχείο και το διαγώνιο μέρος (ii) της $(ij)-$ εξίσωσης Einstein τις παρακάτω 2 σχέσεις

$$3H(\Psi' + H\Psi) - \nabla^2\Psi = -4\pi G(\phi'\delta\phi' - \phi'^2\Psi + a^2\delta\phi V')$$

$$\left(2\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)\Psi + 3H\Psi' + \Psi'' = 4\pi G(\phi'\delta\phi' - \phi'^2\Psi - a^2\delta\phi V')$$

Αθροίζοντάς τις, έχουμε

$$6H\Psi' + 2H^2\Psi - \nabla^2\Psi + \Psi'' + 2\frac{a''}{a}\Psi = -8\pi G a^2\delta\phi V'$$

Γνωρίζουμε ότι $\frac{a''}{a} = H' + H^2$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$6H\Psi' + 4H^2\Psi - \nabla^2\Psi + \Psi'' + 2H'\Psi = -8\pi G a^2\delta\phi V'$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και την background Klein-Gordon, δηλαδή ότι $-V' = \frac{1}{a^2}\phi'' + 2\frac{a'}{a^3}\phi'$, παίρνουμε ότι

$$6H\Psi' + 4H^2\Psi - \nabla^2\Psi + \Psi'' + 2H'\Psi = 8\pi G\phi''\delta\phi + 16\pi G\frac{a'}{a}\phi'\delta\phi$$

Από την (10)

$$\delta\phi = \frac{1}{4\pi G\phi'}(\Psi' + H\Psi)$$

Άρα

$$6H\Psi' + 4H^2\Psi - \nabla^2\Psi + \Psi'' + 2H'\Psi = 2\frac{\phi''}{\phi'}(\Psi' + H\Psi) + 4(H\Psi' + H^2\Psi) \Rightarrow$$

$$2H\Psi' + \Psi'' - \nabla^2\Psi + 2H'\Psi - 2\frac{\phi''}{\phi'}\Psi' - 2\frac{\phi''}{\phi'}H\Psi = 0 \Rightarrow$$

$$\Psi_k'' + 2\left(H - \frac{\phi''}{\phi'}\right)\Psi_k' + 2\left(H' - \frac{\phi''}{\phi'}H\right)\Psi_k + k^2\Psi_k = 0$$

Γνωρίζουμε ότι $\eta - \epsilon = 1 - \frac{\phi''}{H\phi'}$ και $\eta - 2\epsilon = \frac{H'}{H^2} - \frac{\phi''}{H\phi'}$, οπότε η παραπάνω σχέση τροποποιείται τελικά ως εξής

$$\Psi_k'' + 2H(\eta - \epsilon)\Psi' + 2H^2(\eta - 2\epsilon)\Psi_k + k^2\Psi_k = 0$$

Στις super-Hubble κλίμακες, το βαρυτικό δυναμικό Ψ είναι σχεδόν σταθερό (όπως εξάγεται στην περίπτωση μίας quasi de Sitter stage, λογαριθμική εξάρτηση από το χρόνο, ανάλογο με τα slow-roll parameters), δηλαδή $\dot{\Psi}_k \sim$ (slow-roll parameters) $\times\Psi_k$. Αυτό δεν μας προκαλεί έκπληξη, καθώς γνωρίζουμε ότι τα fluctuations είναι ¨παγωμένα¨ στις super-Hubble scales.

Από την (10) και με βάση το προηγούμενο σχόλιο, έχουμε ότι

$$\Psi_k \simeq \epsilon H \frac{\delta\phi_k}{\dot{\phi}} \qquad (on \quad super - hubble \quad scales) \tag{11}$$

Αυτό μας δίνει την ευκαιρία να υπολογίσουμε τη gauge invariant comoving curvature perturbation R_k

$$R_k = \Psi_k + H\frac{\delta\phi_k}{\dot{\phi}} = (1+\epsilon)H\frac{\delta\phi_k}{\dot{\phi}} \simeq H\frac{\delta\phi_k}{\dot{\phi}}$$

Το power spectrum της comoving curvature perturbation R_k στις super-Hubble scales, γράφεται ως

$$P_R = \frac{k^3}{2\pi^2}\frac{H^2}{\dot{\phi}^2}|\delta\phi_k|^2$$

Επίσης

$$\epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2\bar{M}_{Pl}^2} \Rightarrow \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} = \frac{1}{2\epsilon\bar{M}_{Pl}^2}$$

Οπότε, από τις 2 παραπάνω σχέσεις

$$P_R = \frac{k^3}{4\epsilon\pi^2\bar{M}_{Pl}^2}|\delta\phi_k|^2$$

Αυτό που μένει για να βρούμε το P_R, είναι να υπολογιστεί η χρονική εξέλιξη του $\delta\phi_k$. Για αυτό το λόγο, θεωρούμε την perturbed Klein-Gordon στην longitudinal gauge και σε cosmic time, δηλαδή τροποποιούμε κατάλληλα την (9) και έχουμε

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k + V''\delta\phi_k = -2\Psi_k V' + 4\dot{\Psi}_k\dot{\phi}$$

Από τη στιγμή που στις super-Hubble scales ισχύει $|4\dot{\Psi}_k\dot{\phi}| \ll |\Psi_k V'|$, χρησιμοποιώντας την (11) και τη σχέση $V' \simeq -3H\dot{\phi}$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την perturbed Klein-Gordon στις super-Hubble scales ως

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + V''\delta\phi_k = -2\left(\epsilon H\frac{\delta\phi_k}{\dot{\phi}}\right)(-3H\dot{\phi}) \Rightarrow \delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + (V'' - 6\epsilon H^2)\delta\phi_k = 0$$

Έπειτα, εισάγουμε ως συνήθως το πεδίο $\delta\chi_k = \frac{\delta\phi_k}{a}$ και πηγαίνουμε στον conformal time τ. Από τις σχέσεις $V'' = 3\eta H^2$ και $\frac{a''}{a} \simeq \frac{(2+3\epsilon)}{\tau^2}$, η perturbed Klein-Gordon στις super-Hubble scales γίνεται

$$\delta\chi_k'' - \frac{1}{\tau^2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\delta\chi_k = 0$$

όπου $\nu^2 = \frac{9}{4} + 9\epsilon - 3\eta$.

Τέλος, πάλι από τη μελέτη των quantum fluctuations ενός πεδίου με μάζα κατά τη διάρκεια μιας quasi de Sitter stage, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$|\delta\phi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu} \qquad (on \quad super-hubble \quad scales)$$

Συνεπώς, τόσο το inflaton perturbation όσο και το βαρυτικό δυναμικό, είναι σχεδόν σταθερά στις super-Hubble scales.

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση που εξάγαμε, υπολογίζουμε το power spectrum της comoving curvature perturbation στις super-Hubble scales

$$P_R = \frac{k^3}{4\epsilon\pi^2\bar{M}_{Pl}^2}|\delta\phi_k|^2 = \frac{k^3}{4\epsilon\pi^2\bar{M}_{Pl}^2}\left(\frac{H}{\sqrt{2k^3}}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu} = \frac{1}{2\epsilon\bar{M}_{Pl}^2}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_R-1} \equiv A_R^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_R-1}$$

όπου A_R^2 το πλάτος της comoving curvature perturbation και n_R ο spectral index της, για τον οποίο ισχύει

$$n_R - 1 = \frac{dlnP_R}{dlnk} = 3 - 2\nu = 2\eta - 6\epsilon$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι το φάσμα των curvature perturbations είναι σχεδόν scale-independent.

0.4 Υπολογισμός του Weyl tensor

Στη συνέχεια θα υπολογιστεί το τετράγωνο του Weyl tensor, καθώς το coupling του με το inflaton είναι η πιο γενική διόρθωση στην tensor two-point function. Θα δείξουμε ακόμα ότι αυτό το σενάριο οδηγεί σε μία διόρθωση στο tilt του tensor power spectrum, παραβιάζοντας την tensor consistency condition.

Στην περίπτωσή μας, θεωρούμε μοντέλα inflation των οποίων οι προβλέψεις ελέγχονται από τη weakly broken conformal symmetry ενός quasi de Sitter background. To tensor power spectrum χαρακτηρίζεται από ένα πλάτος (ή tensor-to-scalar ratio, r) και ένα tilt (n_t), τα οποία όταν ένα πεδίο κάνει slow-roll inflation minimally coupled με την Einstein gravity, συνδέονται μέσω της consistency condition $r = -8n_t$. Θα δείξουμε ότι οι κυρίαρχες higher curvature διορθώσεις στη gravitational δράση, οδηγούν σε παραβίαση αυτής της consistency condition.

Αρχικά, θεωρούμε ένα μικρό σπάσιμο της de Sitter συμμετρίας στη δράση του inflaton, η οποία ελέγχεται από τη slow-roll parameter $\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}$. Στο μοντέλο μας, η conformal symmetry σπάει από το δυναμικό του inflaton που κάνει coupling με το τετράγωνο του Weyl tensor. Ενώ το tensor-to-scalar ratio είναι της τάξης του ϵ, το tensor tilt έχει μία διόρθωση της τάξης του $\sqrt{\epsilon}\frac{H^2}{M^2}$, όπου M είναι το scale που κάνει supress τα higher curvature corrections. Εάν το M είναι κοντά στο Hubble rate, οι διορθώσεις αυτές είναι το κυρίαρχο φαινόμενο.

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με την standard ADM αποσύνθεση της μετρικής, με τα N και τα N^i να είναι ανεξάρτητα από το χρόνο

$$ds^2 = -N^2dt^2 + g_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j)$$

Στην comoving gauge το inflaton είναι unperturbed, $\phi = \bar{\phi}(t)$ και η χωρική μετρική γράφεται

$$g_{ij} = a^2(\delta_{ij} + \gamma_{ij})$$

όπου γ_{ij} ένας transverse και traceless tensor. Οπότε έχουμε την ακόλουθη εικόνα

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -N^2 + N_i N^i & N_i \\ N_i & a^2(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) \end{bmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & \frac{1}{a^2}(\delta^{ij} - \gamma^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}) \end{bmatrix}$$

Ξεκινάμε λοιπόν με τον υπολογισμό των Christoffel symbols, για τα οποία ισχύει

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ak} \left(\frac{\partial g_{kb}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{kc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^k} \right)$$

[3]

Συνεπώς, σε πρώτο βαθμό έχουμε

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{0k}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{0k}\left(2\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{00}\left(2\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right) +$$
$$\frac{1}{2}g^{0i}\left(2\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}\frac{N^i}{N^2}\left[-\frac{\partial(-N^2 + N_i N^i)}{\partial x^i}\right] = 0$$

$$\Gamma^0_{i0} = \frac{1}{2}g^{0k}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{0j}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j}\right) =$$
$$-\frac{1}{2N^2}\frac{\partial(-N^2 + N_i N^i)}{\partial x^i} + \frac{N^j}{2N^2}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^0} = \frac{N^j}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ji} + \gamma_{ji}) + a^2\dot{\gamma}_{ji}]$$

$$\Gamma^0_{0j} = \frac{1}{2}g^{0k}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{0i}\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i}\right) =$$
$$-\frac{1}{2N^2}\frac{\partial(-N^2 + N_i N^i)}{\partial x^j} + \frac{N^i}{2N^2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = \frac{N^i}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}]$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}g^{0k}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{0k}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) =$$
$$-\frac{1}{2N^2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x^j} + \frac{\partial N_j}{\partial x^i} - [2a\dot{a}(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}]\right) + \frac{N^k}{2N^2}a^2(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k})$$

$$\Gamma^\rho_{00} = \frac{1}{2}g^{\rho k}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{\rho k}\left(2\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{\rho 0}\left(2\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right) +$$
$$\frac{1}{2}g^{\rho i}\left(2\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}g^{\rho i}\left[-\frac{\partial(-N^2 + N_i N^i)}{\partial x^i}\right] = 0$$

$$\Gamma^\rho_{0j} = \frac{1}{2}g^{\rho k}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{\rho 0}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{\rho i}\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i}\right) =$$
$$\frac{N^\rho}{2N^2}\frac{\partial(-N^2 + N_i N^i)}{\partial x^j} + \frac{\delta^{\rho i} - \gamma^{\rho i}}{2a^2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j}{\partial x^i} + [2a\dot{a}(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}]\right) =$$
$$\frac{\delta^{\rho i} - \gamma^{\rho i}}{2a^2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j}{\partial x^i} + 2a\dot{a}\delta_{ij}\right) + \frac{\delta^{\rho i}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{ij} + a^2\dot{\gamma}_{ij})$$

$$\Gamma^\rho_{i0} = \frac{1}{2}g^{\rho k}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{\rho 0}\left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{\rho j}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j}\right) =$$
$$\frac{N^\rho}{2N^2}\frac{\partial(-N^2 + N_i N^i)}{\partial x^i} + \frac{\delta^{\rho j} - \gamma^{\rho j}}{2a^2}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j} + [2a\dot{a}(\delta_{ji} + \gamma_{ji}) + a^2\dot{\gamma}_{ji}]\right) =$$
$$\frac{\delta^{\rho j} - \gamma^{\rho j}}{2a^2}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{ji}\right) + \frac{\delta^{\rho j}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{ji} + a^2\dot{\gamma}_{ji})$$

$$\Gamma^{\rho}_{ij} = \frac{1}{2} g^{\rho k}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2} g^{\rho 0}\left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2} g^{\rho k}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) =$$
$$- \frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}] + \frac{\delta^{\rho k}}{2}(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k})$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον Riemann tensor, με βάση τον τύπο

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{n\rho}(\Gamma^n_{kl}\Gamma^\rho_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^\rho_{il})$$

Αρχικά, όσα έχουν τρία ή τέσσερα μηδενικά στοιχεία, είναι μηδέν. Οπότε υπολογίζουμε όσα έχουν ένα, δύο ή κανένα στοιχείο μηδέν.

$$R_{00in} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{0n}}{\partial x^0 \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{0i}}{\partial x^0 \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{0i}}{\partial x^0 \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{0n}}{\partial x^0 \partial x^i}\right) + g_{k\rho}(\Gamma^k_{0i}\Gamma^\rho_{0n} - \Gamma^k_{0n}\Gamma^\rho_{0i}) = g_{00}(\Gamma^0_{0i}\Gamma^0_{0n} - \Gamma^0_{0n}\Gamma^0_{0i}) +$$
$$g_{0\rho}(\Gamma^0_{0i}\Gamma^\rho_{0n} - \Gamma^0_{0n}\Gamma^\rho_{0i}) + g_{k0}(\Gamma^k_{0i}\Gamma^0_{0n} - \Gamma^k_{0n}\Gamma^0_{0i}) + g_{k\rho}(\Gamma^k_{0i}\Gamma^\rho_{0n} - \Gamma^k_{0n}\Gamma^\rho_{0i}) = a^2(\gamma_{k\rho} + \delta_{k\rho})\times$$
$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{kj} - \gamma^{kj})\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{ji}\right) + \frac{\delta^{kj}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{ji} + a^2\dot{\gamma}_{ji})\right]\times$$
$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho j} - \gamma^{\rho j})\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^n} - \frac{\partial N_n}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{jn}\right) + \frac{\delta^{\rho j}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{jn} + a^2\dot{\gamma}_{jn})\right] - a^2(\gamma_{k\rho} + \delta_{k\rho})\times$$
$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{kj} - \gamma^{kj})\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^n} - \frac{\partial N_n}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{jn}\right) + \frac{\delta^{kj}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{jn} + a^2\dot{\gamma}_{jn})\right]\times$$
$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho j} - \gamma^{\rho j})\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{ji}\right) + \frac{\delta^{\rho j}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{ji} + a^2\dot{\gamma}_{ji})\right] = a^2(\gamma_{k\rho} + \delta_{k\rho})\times$$
$$\frac{\delta^{k\rho} - \gamma^{\rho k} - \gamma^{k\rho}}{4a^4}\left[2a\dot{a}\delta_{ji}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^n} - \frac{\partial N_n}{\partial x^j}\right) + 2a\dot{a}\delta_{jn}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j}\right) + 4a^2\dot{a}^2\delta_{in}\right] + a^2(\gamma_{k\rho} + \delta_{k\rho})\times$$
$$\left[\frac{\delta^{k\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{ji}\right)(2a\dot{a}\gamma_{jn} + a^2\dot{\gamma}_{jn}) + \frac{\delta^{k\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^n} - \frac{\partial N_n}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{jn}\right)(2a\dot{a}\gamma_{ji} + a^2\dot{\gamma}_{ji})\right] -$$
$$a^2(\gamma_{k\rho} + \delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho} - \gamma^{\rho k} - \gamma^{k\rho}}{4a^4}\left[2a\dot{a}\delta_{ji}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^n} - \frac{\partial N_n}{\partial x^j}\right) + 2a\dot{a}\delta_{jn}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j}\right) + 4a^2\dot{a}^2\delta_{in}\right] -$$
$$a^2(\gamma_{k\rho} + \delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{ji}\right)(2a\dot{a}\gamma_{jn} + a^2\dot{\gamma}_{jn}) -$$
$$a^2(\gamma_{k\rho} + \delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_j}{\partial x^n} - \frac{\partial N_n}{\partial x^j} + 2a\dot{a}\delta_{jn}\right)(2a\dot{a}\gamma_{ji} + a^2\dot{\gamma}_{ji}) = 0$$

$$
\begin{aligned}
R_{0i0j} =&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{0j}}{\partial x^i \partial x^0}+\frac{\partial^2 g_{i0}}{\partial x^0 \partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^0)^2}\right)+g_{n\rho}(\Gamma^n_{i0}\Gamma^\rho_{0j}-\Gamma^n_{ij}\Gamma^\rho_{00})=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^0)^2}+\\
&g_{00}(\Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{0j}-\Gamma^0_{ij}\Gamma^0_{00})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{i0}\Gamma^\rho_{0j}-\Gamma^0_{ij}\Gamma^\rho_{00})+g_{n0}(\Gamma^n_{i0}\Gamma^0_{0j}-\Gamma^n_{ij}\Gamma^0_{00})+g_{n\rho}(\Gamma^n_{i0}\Gamma^\rho_{0j}-\Gamma^n_{ij}\Gamma^\rho_{00})=\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{nk}-\gamma^{nk})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)+\frac{\delta^{nk}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})\right]\times\\
&\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho k}-\gamma^{\rho k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kj}\right)+\frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{kj}+2a\dot{a}\gamma_{kj})\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}[2a\dot{a}(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]=\\
&-\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\ddot{\gamma}_{ij}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]+\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}-\gamma^{\rho n}-\gamma^{n\rho}}{4a^4}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)2a\dot{a}\delta_{kj}+\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)2a\dot{a}\delta_{ik}+4a^2\dot{a}^2\delta_{ij}\right]+\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kj}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})+\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)(a^2\dot{\gamma}_{kj}+2a\dot{a}\gamma_{kj})=\\
&-\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\ddot{\gamma}_{ij}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]+\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})\right]+\\
&\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{kj}+2a\dot{a}\gamma_{kj})+4a^2\dot{a}^2\gamma_{ij}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{ji}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}+4a^2\dot{a}^2\delta_{ij}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{0mi0} =&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^m \partial x^i}+\frac{\partial^2 g_{mi}}{(\partial x^0)^2}-\frac{\partial^2 g_{0i}}{\partial x^m \partial x^0}-\frac{\partial^2 g_{m0}}{\partial x^0 \partial x^i}\right)+g_{n\rho}(\Gamma^n_{mi}\Gamma^\rho_{00}-\Gamma^n_{m0}\Gamma^\rho_{0i})=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{mi}}{(\partial x^0)^2}+\\
&g_{00}(\Gamma^0_{mi}\Gamma^0_{00}-\Gamma^0_{m0}\Gamma^0_{0i})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{mi}\Gamma^\rho_{00}-\Gamma^0_{m0}\Gamma^\rho_{0i})+g_{n0}(\Gamma^n_{mi}\Gamma^0_{00}-\Gamma^n_{m0}\Gamma^0_{0i})+g_{n\rho}(\Gamma^n_{mi}\Gamma^\rho_{00}-\Gamma^n_{m0}\Gamma^\rho_{0i})=\\
&-a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{nk}-\gamma^{nk})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{km}\right)+\frac{\delta^{nk}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})\right]\times\\
&\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho k}-\gamma^{\rho k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)+\frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{ki}+a^2\dot{\gamma}_{ki})\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}[2a\dot{a}(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+a^2\dot{\gamma}_{mi}]=\\
&\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+a^2\ddot{\gamma}_{mi}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}]-\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}-\gamma^{n\rho}-\gamma^{\rho n}}{4a^4}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)2a\dot{a}\delta_{ki}+\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)2a\dot{a}\delta_{km}+4a^2\dot{a}^2\delta_{im}\right]-\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{km}\right)(2a\dot{a}\gamma_{ki}+a^2\dot{\gamma}_{ki})-\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})=
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+a^2\ddot{\gamma}_{mi}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}]-\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{ki}+a^2\dot{\gamma}_{ki})\right]-$$
$$\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+4a^2\dot{a}^2\delta_{im}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{im}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{im}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{mi}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}\right]$$

$$R_{i00n}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{in}}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{i0}}{\partial x^0\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{0n}}{\partial x^i\partial x^0}\right)+g_{k\rho}(\Gamma^k_{00}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{0n}\Gamma^\rho_{i0})=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{in}}{(\partial x^0)^2}+$$
$$g_{00}(\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{in}-\Gamma^0_{0n}\Gamma^0_{i0})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{00}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^0_{0n}\Gamma^\rho_{i0})+g_{k0}(\Gamma^k_{00}\Gamma^0_{in}-\Gamma^k_{0n}\Gamma^0_{i0})+g_{k\rho}(\Gamma^k_{00}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{0n}\Gamma^\rho_{i0})=$$
$$-a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{k\pi}-\gamma^{k\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi n}\right)+\frac{\delta^{k\pi}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{\pi n}+a^2\dot{\gamma}_{\pi n})\right]\times$$
$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho\pi}-\gamma^{\rho\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi i}\right)+\frac{\delta^{\rho\pi}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{\pi i}+2a\dot{a}\gamma_{\pi i})\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}[2a\dot{a}(\gamma_{in}+\delta_{in})+a^2\dot{\gamma}_{in}]=$$
$$\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{in}+\delta_{in})+a^2\ddot{\gamma}_{in}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{in}]-$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}-\gamma^{k\rho}-\gamma^{\rho k}}{4a^4}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}\right)2a\dot{a}\delta_{\pi i}+\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}\right)2a\dot{a}\delta_{\pi n}+4a^2\dot{a}^2\delta_{in}\right]-$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi n}\right)(a^2\dot{\gamma}_{\pi i}+2a\dot{a}\gamma_{\pi i})-$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi i}\right)(2a\dot{a}\gamma_{\pi n}+a^2\dot{\gamma}_{\pi n})=$$
$$\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{in}+\delta_{in})+a^2\ddot{\gamma}_{in}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{in}]-\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}\right)(a^2\dot{\gamma}_{\pi i}+2a\dot{a}\gamma_{\pi i})\right]-$$
$$\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}\right)(2a\dot{a}\gamma_{\pi n}+a^2\dot{\gamma}_{\pi n})+4a^2\dot{a}^2\delta_{in}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ni}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{ni}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{in}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{in}\right]$$

$$R_{in00}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{i0}}{\partial x^n\partial x^0}+\frac{\partial^2 g_{n0}}{\partial x^i\partial x^0}-\frac{\partial^2 g_{i0}}{\partial x^n\partial x^0}-\frac{\partial^2 g_{n0}}{\partial x^i\partial x^0}\right)+g_{k\rho}(\Gamma^k_{n0}\Gamma^\rho_{i0}-\Gamma^k_{n0}\Gamma^\rho_{i0})=0$$

$$R_{i0j0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{i0}}{\partial x^0\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{0j}}{\partial x^i\partial x^0}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^0)^2}-\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\partial x^j}\right)+g_{n\rho}(\Gamma^n_{0j}\Gamma^\rho_{i0}-\Gamma^n_{00}\Gamma^\rho_{ij})=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ij}}{(\partial x^0)^2}+$$
$$g_{00}(\Gamma^0_{0j}\Gamma^0_{i0}-\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ij})+g_{n0}(\Gamma^n_{0j}\Gamma^0_{i0}-\Gamma^n_{00}\Gamma^0_{ij})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{0j}\Gamma^\rho_{i0}-\Gamma^0_{00}\Gamma^\rho_{ij})+g_{n\rho}(\Gamma^n_{0j}\Gamma^\rho_{i0}-\Gamma^n_{00}\Gamma^\rho_{ij})=$$
$$a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{nk}-\gamma^{nk})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kj}\right)+\frac{\delta^{nk}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})\right]\times$$
$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho k}-\gamma^{\rho k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)+\frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}[2a\dot{a}(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]=$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\ddot{\gamma}_{ij}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]+\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}-\gamma^{n\rho}-\gamma^{\rho n}}{4a^4}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)2a\dot{a}\delta_{ki}+\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)2a\dot{a}\delta_{kj}+4a^2\dot{a}^2\delta_{ij}\right]+\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kj}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})+\\
&a^2(\gamma_{n\rho}+\delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})=\\
&-\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\ddot{\gamma}_{ij}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]+\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})\right]+\\
&\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})+4a^2\dot{a}^2\delta_{ij}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{ji}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{ij}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{imjn}=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^m\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^i\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^m\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i\partial x^j}\right)+g_{k\rho}(\Gamma^k_{mj}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{mn}\Gamma^\rho_{ij})=\\
&\frac{a^2}{2}(\gamma_{in,mj}+\gamma_{mj,in}-\gamma_{ij,mn}-\gamma_{mn,ij})+g_{00}(\Gamma^0_{mj}\Gamma^0_{in}-\Gamma^0_{mn}\Gamma^0_{ij})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{mj}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^0_{mn}\Gamma^\rho_{ij})+\\
&g_{k0}(\Gamma^k_{mj}\Gamma^0_{in}-\Gamma^k_{mn}\Gamma^0_{ij})+g_{k\rho}(\Gamma^k_{mj}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{mn}\Gamma^\rho_{ij})=\frac{a^2}{2}(\gamma_{in,mj}+\gamma_{mj,in}-\gamma_{ij,mn}-\gamma_{mn,ij})+\\
&N_\rho\frac{a\dot{a}}{2N^2}\left[\delta_{mj}\delta^{\rho\sigma}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})-\delta_{mn}\delta^{\rho\sigma}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})\right]+\\
&N_k\frac{a\dot{a}}{2N^2}\left[\delta_{in}\delta^{k\sigma}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})-\delta_{ij}\delta^{k\sigma}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})\right]+\\
&a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[-\frac{N^k}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mj}+\gamma_{mj})+a^2\dot{\gamma}_{mj}]+\frac{\delta^{k\sigma}}{2}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})\right]\times\\
&\left[-\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot{\gamma}_{in}]+\frac{\delta^{\rho\sigma}}{2}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})\right]-\\
&a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[-\frac{N^k}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot{\gamma}_{mn}]+\frac{\delta^{k\sigma}}{2}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})\right]\times\\
&\left[-\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]+\frac{\delta^{\rho\sigma}}{2}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})\right]=\\
&\frac{a^2}{2}(\gamma_{in,mj}+\gamma_{mj,in}-\gamma_{ij,mn}-\gamma_{mn,ij})+N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}\left[\delta_{mj}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})-\delta_{mn}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})\right]+\\
&N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}\left[\delta_{in}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})-\delta_{ij}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})\right]+\\
&a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[-\frac{N^k\delta^{\rho\sigma}}{4N^2}2a\dot{a}\delta_{mj}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})-\frac{N^\rho\delta^{k\sigma}}{4N^2}2a\dot{a}\delta_{in}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})\right]-\\
&a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[-\frac{N^k\delta^{\rho\sigma}}{4N^2}2a\dot{a}\delta_{mn}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})-\frac{N^\rho\delta^{k\sigma}}{4N^2}2a\dot{a}\delta_{ij}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})\right]=
\end{aligned}
$$

$$\frac{a^2}{2}(\gamma_{in,mj}+\gamma_{mj,in}-\gamma_{ij,mn}-\gamma_{mn,ij})+N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}\left[\delta_{mj}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})-\delta_{mn}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})\right]+$$

$$N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}\left[\delta_{in}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})-\delta_{ij}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})\right]-\frac{a^3\dot{a}N^\sigma}{2N^2}\delta_{mj}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})-$$

$$\frac{a^3\dot{a}N^\sigma}{2N^2}\delta_{in}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})+\frac{a^3\dot{a}N^\sigma}{2N^2}\delta_{mn}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})+$$

$$\frac{a^3\dot{a}N^\sigma}{2N^2}\delta_{ij}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})=\frac{a^2}{2}(\gamma_{in,mj}+\gamma_{mj,in}-\gamma_{ij,mn}-\gamma_{mn,ij})+$$

$$N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}(1-a^2)\left[\delta_{mj}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})-\delta_{mn}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})\right]+$$

$$N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}(1-a^2)\left[\delta_{in}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})-\delta_{ij}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})\right]$$

$$R_{0min}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{0n}}{\partial x^m\partial x^i}+\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^0\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{0i}}{\partial x^m\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^0\partial x^i}\right)+g_{j\rho}(\Gamma^j_{mi}\Gamma^\rho_{0n}-\Gamma^j_{mn}\Gamma^\rho_{0i})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mi}}{\partial x^0\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^0\partial x^i}\right)+$$

$$g_{00}(\Gamma^0_{mi}\Gamma^0_{0n}-\Gamma^0_{mn}\Gamma^0_{0i})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{mi}\Gamma^\rho_{0n}-\Gamma^0_{mn}\Gamma^\rho_{0i})+g_{j0}(\Gamma^j_{mi}\Gamma^0_{0n}-\Gamma^j_{mn}\Gamma^0_{0i})+g_{j\rho}(\Gamma^j_{mi}\Gamma^\rho_{0n}-\Gamma^j_{mn}\Gamma^\rho_{0i})=$$

$$\frac{N_\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+a^2\dot{\gamma}_{mi}]\left[\frac{\dot{a}}{a}\delta_{kn}(\delta^{\rho k}-\gamma^{\rho k})+\frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{kn}+a^2\dot{\gamma}_{kn})\right]-$$

$$\frac{N_\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot{\gamma}_{mn}]\left[\frac{\dot{a}}{a}\delta_{ki}(\delta^{\rho k}-\gamma^{\rho k})+\frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{ki}+a^2\dot{\gamma}_{ki})\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^n}[2a\dot{a}(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+a^2\dot{\gamma}_{mi}]-\frac{\partial}{\partial x^i}[2a\dot{a}(\gamma_{mn}+\delta_{mn})+a^2\dot{\gamma}_{mn}]\right]+$$

$$a^2(\gamma_{j\rho}+\delta_{j\rho})\left[-\frac{N^j}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+a^2\dot{\gamma}_{mi}]+\frac{\delta^{jk}}{2}(\gamma_{km,i}+\gamma_{ki,m}-\gamma_{mi,k})\right]\times$$

$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho k}-\gamma^{\rho k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kn}\right)+\frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{kn}+a^2\dot{\gamma}_{kn})\right]-$$

$$a^2(\gamma_{j\rho}+\delta_{j\rho})\left[-\frac{N^j}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot{\gamma}_{mn}]+\frac{\delta^{jk}}{2}(\gamma_{km,n}+\gamma_{kn,m}-\gamma_{mn,k})\right]\times$$

$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho k}-\gamma^{\rho k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)+\frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{ki}+a^2\dot{\gamma}_{ki})\right]=$$

$$\frac{N_n}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+a\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}]+\frac{a\dot{a}N_\rho}{N^2}\delta_{mi}\left(-\frac{\dot{a}}{a}\gamma^{\rho n}+\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\rho n}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\rho n}\right)-$$

$$\frac{N_i}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a\dot{a}\dot{\gamma}_{mn}]-\frac{a\dot{a}N_\rho}{N^2}\delta_{mn}\left(-\frac{\dot{a}}{a}\gamma^{\rho i}+\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\rho i}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\rho i}\right)+$$

$$\frac{1}{2}(2a\dot{a}\gamma_{mi,n+}+a^2\dot{\gamma}_{mi,n}-2a\dot{a}\gamma_{mn,i}-a^2\dot{\gamma}_{mn,i})+a^2(\gamma_{j\rho}+\delta_{j\rho})\times$$

$$\left[-\frac{a\dot{a}N^j}{N^2}\delta_{mi}\left(\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\rho n}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\rho n}\right)+\frac{\delta^{j\rho}}{4a^2}(\gamma_{km,i}+\gamma_{ki,m}-\gamma_{mi,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kn}\right)\right]-$$

$$a^2(\gamma_{j\rho}+\delta_{j\rho})\frac{\dot a}{a}(\delta^{\rho n}-\gamma^{\rho n})\frac{N^j}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+a^2\dot\gamma_{mi}]+$$

$$a^2(\gamma_{j\rho}+\delta_{j\rho})\frac{\dot a}{a}(\delta^{\rho i}-\gamma^{\rho i})\frac{N^j}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot\gamma_{mn}]-a^2(\gamma_{j\rho}+\delta_{j\rho})\times$$

$$\left[-\frac{a\dot aN^j}{N^2}\delta_{mn}\left(\frac{\dot a}{a}\gamma_{\rho i}+\frac{1}{2}\dot\gamma_{\rho i}\right)+\frac{\delta^{j\rho}}{4a^2}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot a\delta_{ki}\right)(\gamma_{km,n}+\gamma_{kn,m}-\gamma_{mn,k})\right]=$$

$$a\dot a(\gamma_{mi,n}-\gamma_{mn,i})+\frac{a^2}{2}(\dot\gamma_{mi,n}-\dot\gamma_{mn,i})+\frac{a\dot aN_\rho}{2N^2}(\delta_{mi}\dot\gamma_{\rho n}-\delta_{mn}\dot\gamma_{\rho i})+\frac{N_n}{2N^2}[2\dot a^2(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+a\dot a\dot\gamma_{mi}]-$$

$$\frac{N_i}{2N^2}[2\dot a^2(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a\dot a\dot\gamma_{mn}]-\frac{a\dot aN^j}{N^2}\delta_{mi}\left(a\dot a\gamma_{jn}+\frac{a^2}{2}\dot\gamma_{jn}\right)+\frac{a\dot aN^j}{N^2}\delta_{mn}\left(a\dot a\gamma_{ji}+\frac{a^2}{2}\dot\gamma_{ji}\right)+$$

$$\frac{3}{4}(\gamma_{km,i}+\gamma_{ki,m}-\gamma_{mi,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}+2a\dot a\delta_{kn}\right)-$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot a\delta_{ki}\right)(\gamma_{km,n}+\gamma_{kn,m}-\gamma_{mn,k})-$$

$$\frac{a\dot aN^n}{N^2}\left[a\dot a(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+\frac{a^2}{2}\dot\gamma_{mi}\right]+\frac{a\dot aN^i}{N^2}\left[a\dot a(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+\frac{a^2}{2}\dot\gamma_{mn}\right]=$$

$$a\dot a(\gamma_{mi,n}-\gamma_{mn,i})+\frac{a^2}{2}(\dot\gamma_{mi,n}-\dot\gamma_{mn,i})+\frac{N^n}{2N^2}[(2\dot a^2-2a^2\dot a^2)(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+(a\dot a-a^3\dot a)\dot\gamma_{mi}]+\frac{3}{4}\times$$

$$\left[(\gamma_{km,i}+\gamma_{ki,m}-\gamma_{mi,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}+2a\dot a\delta_{kn}\right)-(\gamma_{km,n}+\gamma_{kn,m}-\gamma_{mn,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot a\delta_{ki}\right)\right]$$

$$+\frac{N^i}{2N^2}[(2a^2\dot a^2-2\dot a^2)(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+(a^3\dot a-a\dot a)\dot\gamma_{mn}]+$$

$$\frac{a\dot aN^\rho}{2N^2}[\delta_{mn}(2a\dot a\gamma_{\rho i}+a^2\dot\gamma_{\rho i})-\delta_{mi}(2a\dot a\gamma_{\rho n}+a^2\dot\gamma_{\rho n})+\delta_{mi}\dot\gamma_{\rho n}-\delta_{mn}\dot\gamma_{\rho i}]$$

$$R_{im0n}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^m\partial x^0}+\frac{\partial^2 g_{m0}}{\partial x^i\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{i0}}{\partial x^m\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i\partial x^0}\right)+g_{k\rho}(\Gamma^k_{m0}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{mn}\Gamma^\rho_{i0})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^m\partial x^0}-\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i\partial x^0}\right)+$$

$$g_{00}(\Gamma^0_{m0}\Gamma^0_{in}-\Gamma^0_{mn}\Gamma^0_{i0})+g_{k0}(\Gamma^k_{m0}\Gamma^0_{in}-\Gamma^k_{mn}\Gamma^0_{i0})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{m0}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^0_{mn}\Gamma^\rho_{i0})+g_{k\rho}(\Gamma^k_{m0}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{mn}\Gamma^\rho_{i0})=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^m}[2a\dot a(\gamma_{in}+\delta_{in})+a^2\dot\gamma_{in}]-\frac{\partial}{\partial x^i}[2a\dot a(\gamma_{mn}+\delta_{mn})+a^2\dot\gamma_{mn}]\right]+$$

$$\frac{N_k}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot\gamma_{in}]\left[\frac{\dot a}{a}(\delta^{km}-\gamma^{km})+\frac{\delta^{k\pi}}{2a^2}(a^2\dot\gamma_{\pi m}+2a\dot a\gamma_{\pi m})\right]-$$

$$\frac{N_\rho}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot\gamma_{mn}]\left[\frac{\dot a}{a}(\delta^{\rho i}-\gamma^{\rho i})+\frac{\delta^{\rho\pi}}{2a^2}(a^2\dot\gamma_{\pi i}+2a\dot a\gamma_{\pi i})\right]+$$

$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{k\pi}-\gamma^{k\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi m}\right)+\frac{\delta^{k\pi}}{2a^2}(a^2\dot\gamma_{\pi m}+2a\dot a\gamma_{\pi m})\right]\times$$

$$\left[-\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot\gamma_{in}]+\frac{\delta^{\rho\pi}}{2}(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})\right]-$$

$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[-\frac{N^k}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot\gamma_{mn}]+\frac{\delta^{k\pi}}{2}(\gamma_{\pi m,n}+\gamma_{\pi n,m}-\gamma_{mn,\pi})\right]\times$$

$$\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho\pi}-\gamma^{\rho\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi i}\right)+\frac{\delta^{\rho\pi}}{2a^2}(a^2\dot\gamma_{\pi i}+2a\dot a\gamma_{\pi i})\right]=$$

$$\frac{1}{2}(2a\dot a\gamma_{in,m}+a^2\dot\gamma_{in,m}-2a\dot a\gamma_{mn,i}-a^2\dot\gamma_{mn,i})+\frac{N_m}{2N^2}[2\dot a^2(\gamma_{in}+\delta_{in})+a\dot a\dot\gamma_{in}]+$$

$$\frac{a\dot aN_k}{N^2}\delta_{in}\left(-\frac{\dot a}{a}\gamma^{km}+\frac{1}{2}\dot\gamma_{km}+\frac{\dot a}{a}\gamma_{km}\right)-\frac{N_i}{2N^2}[2\dot a^2(\gamma_{mn}+\delta_{mn})+a\dot a\dot\gamma_{mn}]-$$

$$\frac{a\dot aN_\rho}{N^2}\delta_{mn}\left(-\frac{\dot a}{a}\gamma^{\rho i}+\frac{1}{2}\dot\gamma_{\rho i}+\frac{\dot a}{a}\gamma_{\rho i}\right)+a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^2}\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi m}\right)(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})-$$

$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{a\dot aN^\rho}{N^2}\delta_{in}\left(\frac{1}{2}\dot\gamma_{km}+\frac{\dot a}{a}\gamma_{km}\right)-a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\dot a}{a}(\delta^{km}-\gamma^{km})\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot\gamma_{in}]+$$

$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{a\dot aN^k}{N^2}\delta_{mn}\left(\frac{1}{2}\dot\gamma_{\rho i}+\frac{\dot a}{a}\gamma_{\rho i}\right)-a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^2}\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi i}\right)(\gamma_{\pi m,n}+\gamma_{\pi n,m}-\gamma_{mn,\pi})+$$

$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\dot a}{a}(\delta^{\rho i}-\gamma^{\rho i})\frac{N^k}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot\gamma_{mn}]=a\dot a(\gamma_{in,m}-\gamma_{mn,i})+\frac{a^2}{2}(\dot\gamma_{in,m}-\dot\gamma_{mn,i})+$$

$$\frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi m}\right)(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})-\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi i}\right)(\gamma_{\pi m,n}+\gamma_{\pi n,m}-\gamma_{mn,\pi})\right]+$$

$$\frac{N_m}{2N^2}[2\dot a^2(\gamma_{in}+\delta_{in})+a\dot a\dot\gamma_{in}]+\frac{a\dot aN_k}{2N^2}\delta_{in}\dot\gamma_{km}-\frac{N_i}{2N^2}[2\dot a^2(\gamma_{mn}+\delta_{mn})+a\dot a\dot\gamma_{mn}]-\frac{a\dot aN_\rho}{2N^2}\delta_{mn}\dot\gamma_{\rho i}-$$

$$\frac{a^3\dot aN^k}{N^2}\delta_{in}\left(\frac{1}{2}\dot\gamma_{km}+\frac{\dot a}{a}\gamma_{km}\right)+\frac{a^3\dot aN^\rho}{N^2}\delta_{mn}\left(\frac{1}{2}\dot\gamma_{\rho i}+\frac{\dot a}{a}\gamma_{\rho i}\right)-\frac{a\dot aN^m}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot\gamma_{in}]-$$

$$\frac{a^2\dot a^2N^\rho}{N^2}\delta_{in}(\gamma_{m\rho}-\gamma^{\rho m})+\frac{a\dot aN^i}{2N^2}[2a\dot a(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+a^2\dot\gamma_{mn}]=a\dot a(\gamma_{in,m}-\gamma_{mn,i})+\frac{a^2}{2}(\dot\gamma_{in,m}-\dot\gamma_{mn,i})+$$

$$\frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi m}\right)(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})-\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}+2a\dot a\delta_{\pi i}\right)(\gamma_{\pi m,n}+\gamma_{\pi n,m}-\gamma_{mn,\pi})\right]+$$

$$\frac{N_m}{2N^2}[(2\dot a^2-2a^2\dot a^2)(\gamma_{in}+\delta_{in})+(a\dot a-a^3\dot a)\dot\gamma_{in}]+\frac{N_i}{2N^2}[(2a^2\dot a^2-2\dot a^2)(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+(a^3\dot a-a\dot a)\dot\gamma_{mn}]+$$

$$\frac{a\dot aN^\rho}{2N^2}(\delta_{in}\dot\gamma_{\rho m}-\delta_{mn}\dot\gamma_{\rho i})+\frac{a^2\dot a^2N^\rho}{N^2}\delta_{in}(\gamma^{\rho m}-\gamma_{m\rho})+\frac{a\dot aN^\rho}{2N^2}[\delta_{mn}(a^2\dot\gamma_{\rho i}+2a\dot a\gamma_{\rho i})-\delta_{in}(a^2\dot\gamma_{\rho m}+2a\dot a\gamma_{\rho m})]$$

$$
\begin{aligned}
R_{imj0} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{i0}}{\partial x^m \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^i \partial x^0} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^m \partial x^0} - \frac{\partial^2 g_{m0}}{\partial x^i \partial x^j}\right) + g_{n\rho}(\Gamma^n_{mj}\Gamma^\rho_{i0} - \Gamma^n_{m0}\Gamma^\rho_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial x^i \partial x^0} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^m \partial x^0}\right) + \\
&+ g_{00}(\Gamma^0_{mj}\Gamma^0_{i0} - \Gamma^0_{m0}\Gamma^0_{ij}) + g_{0\rho}(\Gamma^0_{mj}\Gamma^\rho_{i0} - \Gamma^0_{m0}\Gamma^\rho_{ij}) + g_{n0}(\Gamma^n_{mj}\Gamma^0_{i0} - \Gamma^n_{m0}\Gamma^0_{ij}) + g_{n\rho}(\Gamma^n_{mj}\Gamma^\rho_{i0} - \Gamma^n_{m0}\Gamma^\rho_{ij}) = \\
&\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}[2a\dot{a}(\gamma_{mj} + \delta_{mj}) + a^2\dot{\gamma}_{mj}] - \frac{\partial}{\partial x^m}[2a\dot{a}(\gamma_{ij} + \delta_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}]\right] + \\
&\frac{N_\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mj} + \gamma_{mj}) + a^2\dot{\gamma}_{mj}]\left[\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{\rho i} - \gamma^{\rho i}) + \frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{ki} + 2a\dot{a}\gamma_{ki})\right] - \\
&\frac{N_n}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}]\left[\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{nm} - \gamma^{nm}) + \frac{\delta^{nk}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{km} + 2a\dot{a}\gamma_{km})\right] + \\
&a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\left[-\frac{N^n}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mj} + \gamma_{mj}) + a^2\dot{\gamma}_{mj}] + \frac{\delta^{nk}}{2}(\gamma_{km,j} + \gamma_{kj,m} - \gamma_{mj,k})\right] \times \\
&\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{\rho k} - \gamma^{\rho k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^k} + 2a\dot{a}\delta_{ki}\right) + \frac{\delta^{\rho k}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{ki} + 2a\dot{a}\gamma_{ki})\right] - \\
&a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{nk} - \gamma^{nk})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^k} + 2a\dot{a}\delta_{km}\right) + \frac{\delta^{nk}}{2a^2}(a^2\dot{\gamma}_{km} + 2a\dot{a}\gamma_{km})\right] \times \\
&\left[-\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}] + \frac{\delta^{\rho k}}{2}(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k})\right] = \\
&\frac{1}{2}(2a\dot{a}\gamma_{mj,i} + a^2\dot{\gamma}_{mj,i} - 2a\dot{a}\gamma_{ij,m} - a^2\dot{\gamma}_{ij,m}) + \frac{N_i}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{mj} + \gamma_{mj}) + a\dot{a}\dot{\gamma}_{mj}] + \\
&\frac{a\dot{a}N_\rho}{N^2}\delta_{mj}\left(-\frac{\dot{a}}{a}\gamma^{\rho i} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\rho i} + \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\rho i}\right) - \frac{N_m}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}] - \\
&\frac{a\dot{a}N_n}{N^2}\delta_{ij}\left(-\frac{\dot{a}}{a}\gamma^{nm} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{nm} + \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{nm}\right) - a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\frac{a\dot{a}N^n}{N^2}\delta_{mj}\left(\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\rho i} + \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\rho i}\right) + \\
&a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^2}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^k} + 2a\dot{a}\delta_{ki}\right)(\gamma_{km,j} + \gamma_{kj,m} - \gamma_{mj,k}) - \\
&a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{\rho i} - \gamma^{\rho i})\frac{N^n}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mj} + \gamma_{mj}) + a^2\dot{\gamma}_{mj}] + a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\frac{a\dot{a}N^\rho}{N^2}\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{nm} + \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{nm}\right) - \\
&a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\frac{\delta^{n\rho}}{4a^2}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^k} + 2a\dot{a}\delta_{km}\right)(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k}) + \\
&a^2(\gamma_{n\rho} + \delta_{n\rho})\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{nm} - \gamma^{nm})\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a^2\dot{\gamma}_{ij}] = a\dot{a}(\gamma_{mj,i} - \gamma_{ij,m}) + \frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{mj,i} - \dot{\gamma}_{ij,m}) + \\
&\frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^k} + 2a\dot{a}\delta_{ki}\right)(\gamma_{km,j} + \gamma_{kj,m} - \gamma_{mj,k}) - \left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^k} + 2a\dot{a}\delta_{km}\right)(\gamma_{ki,j} + \gamma_{kj,i} - \gamma_{ij,k})\right] + \\
&\frac{N_i}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{mj} + \gamma_{mj}) + a\dot{a}\dot{\gamma}_{mj}] - \frac{N_m}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}] + \frac{a\dot{a}N_\rho}{2N^2}\delta_{mj}\dot{\gamma}_{\rho i} - \frac{a\dot{a}N_n}{2N^2}\delta_{ij}\dot{\gamma}_{nm} - \\
&\frac{a^3\dot{a}N^\rho}{N^2}\delta_{mj}\left(\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{\rho i} + \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{\rho i}\right) - \frac{a\dot{a}N^i}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{mj} + \gamma_{mj}) + a^2\dot{\gamma}_{mj}] + \frac{a^3\dot{a}N^n}{N^2}\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{nm} + \frac{\dot{a}}{a}\gamma_{nm}\right) +
\end{aligned}
$$

$$\frac{a\dot{a}N^m}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]+\frac{a^2\dot{a}^2N^\rho}{N^2}\delta_{ij}(\gamma_{m\rho}-\gamma^{\rho m})=a\dot{a}(\gamma_{mj,i}-\gamma_{ij,m})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{mj,i}-\dot{\gamma}_{ij,m})+$$
$$\frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)(\gamma_{km,j}+\gamma_{kj,m}-\gamma_{mj,k})-\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{km}\right)(\gamma_{ki,j}+\gamma_{kj,i}-\gamma_{ij,k})\right]+$$
$$\frac{N_i}{2N^2}[(2\dot{a}^2-2a^2\dot{a}^2)(\delta_{mj}+\gamma_{mj})+(a\dot{a}-a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{mj}]+\frac{N_m}{2N^2}[(2a^2\dot{a}^2-2\dot{a}^2)(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+(a^3\dot{a}-a\dot{a})\dot{\gamma}_{ij}]+$$
$$\frac{a\dot{a}N_\rho}{2N^2}(\delta_{mj}\dot{\gamma}_{\rho i}-\delta_{ij}\dot{\gamma}_{\rho m})+\frac{a^2\dot{a}^2N^\rho}{N^2}\delta_{ij}(\gamma_{m\rho}-\gamma^{\rho m})-\frac{a\dot{a}N^\rho}{2N^2}[\delta_{mj}(a^2\dot{\gamma}_{\rho i}+2a\dot{a}\gamma_{\rho i})-\delta_{ij}(a^2\dot{\gamma}_{\rho m}+2a\dot{a}\gamma_{\rho m})]$$

$$R_{i0jn}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^0\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{0j}}{\partial x^i\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^0\partial x^n}-\frac{\partial^2 g_{0n}}{\partial x^i\partial x^j}\right)+g_{k\rho}(\Gamma^k_{0j}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{0n}\Gamma^\rho_{ij})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^0\partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^0\partial x^n}\right)+$$
$$g_{00}(\Gamma^0_{0j}\Gamma^0_{in}-\Gamma^0_{0n}\Gamma^0_{ij})+g_{0\rho}(\Gamma^0_{0j}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^0_{0n}\Gamma^\rho_{ij})+g_{k0}(\Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{in}-\Gamma^k_{0n}\Gamma^0_{ij})+g_{k\rho}(\Gamma^k_{0j}\Gamma^\rho_{in}-\Gamma^k_{0n}\Gamma^\rho_{ij})=$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}[2a\dot{a}(\gamma_{in}+\delta_{in})+a^2\dot{\gamma}_{in}]-\frac{\partial}{\partial x^n}[2a\dot{a}(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]\right]+$$
$$\frac{N_k}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot{\gamma}_{in}]\left[\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{kj}-\gamma^{kj})+\frac{\delta^{k\pi}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{\pi j}+a^2\dot{\gamma}_{\pi j})\right]-$$
$$\frac{N_k}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]\left[\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{kn}-\gamma^{kn})+\frac{\delta^{k\pi}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{\pi n}+a^2\dot{\gamma}_{\pi n})\right]+$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{k\pi}-\gamma^{k\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right)+\frac{\delta^{k\pi}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{\pi j}+a^2\dot{\gamma}_{\pi j})\right]\times$$
$$\left[-\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot{\gamma}_{in}]+\frac{\delta^{\rho\pi}}{2}(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})\right]-$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\left[\frac{1}{2a^2}(\delta^{k\pi}-\gamma^{k\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi n}\right)+\frac{\delta^{k\pi}}{2a^2}(2a\dot{a}\gamma_{\pi n}+a^2\dot{\gamma}_{\pi n})\right]\times$$
$$\left[-\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]+\frac{\delta^{\rho\pi}}{2}(\gamma_{\pi i,j}+\gamma_{\pi j,i}-\gamma_{ij,\pi})\right]=\frac{1}{2}(2a\dot{a}\gamma_{in,j}+a^2\dot{\gamma}_{in,j}-2a\dot{a}\gamma_{ij,n}-a^2\dot{\gamma}_{ij,n})+$$
$$\frac{N_j}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{in}+\gamma_{in})+a\dot{a}\dot{\gamma}_{in}]+\frac{a\dot{a}N_k}{N^2}\delta_{in}\left(-\frac{\dot{a}}{a}\gamma^{kj}+\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{kj}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{kj}\right)-\frac{N_n}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]-$$
$$\frac{a\dot{a}N_k}{N^2}\delta_{ij}\left(-\frac{\dot{a}}{a}\gamma^{kn}+\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{kn}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{kn}\right)+a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^2}\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right)(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})-$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{a\dot{a}N^\rho}{N^2}\delta_{in}\left(\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{kj}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{kj}\right)-a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{kj}-\gamma^{kj})\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot{\gamma}_{in}]+$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{a\dot{a}N^\rho}{N^2}\delta_{ij}\left(\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{kn}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{kn}\right)+a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\dot{a}}{a}(\delta^{kn}-\gamma^{kn})\frac{N^\rho}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]-$$
$$a^2(\gamma_{k\rho}+\delta_{k\rho})\frac{\delta^{k\rho}}{4a^2}\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi n}\right)(\gamma_{\pi i,j}+\gamma_{\pi j,i}-\gamma_{ij,\pi})=a\dot{a}(\gamma_{in,j}-\gamma_{ij,n})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,j}-\dot{\gamma}_{ij,n})+$$

$$\frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right)(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})-\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi n}\right)(\gamma_{\pi i,j}+\gamma_{\pi j,i}-\gamma_{ij,\pi})\right]+$$
$$\frac{N_j}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{in}+\gamma_{in})+a\dot{a}\dot{\gamma}_{in}]-\frac{N_n}{2N^2}[2\dot{a}^2(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]+\frac{a\dot{a}N_k}{2N^2}\delta_{in}\dot{\gamma}_{kj}-\frac{a\dot{a}N_k}{2N^2}\delta_{ij}\dot{\gamma}_{kn}-$$
$$\frac{a^3\dot{a}N^k}{N^2}\delta_{in}\left(\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{kj}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{kj}\right)+\frac{a^3\dot{a}N^k}{N^2}\delta_{ij}\left(\frac{\dot{a}}{a}\gamma_{kn}+\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{kn}\right)-\frac{a\dot{a}N^j}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{in}+\gamma_{in})+a^2\dot{\gamma}_{in}]+$$
$$\frac{a\dot{a}N^n}{2N^2}[2a\dot{a}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+a^2\dot{\gamma}_{ij}]-\frac{a^2\dot{a}^2N^\rho}{N^2}\delta_{in}(\gamma_{j\rho}-\gamma^{\rho j})+\frac{a^2\dot{a}^2N^\rho}{N^2}\delta_{ij}(\gamma_{n\rho}-\gamma^{\rho n})=$$
$$\frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right)(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})-\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi n}\right)(\gamma_{\pi i,j}+\gamma_{\pi j,i}-\gamma_{ij,\pi})\right]+$$
$$a\dot{a}(\gamma_{in,j}-\gamma_{ij,n})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,j}-\dot{\gamma}_{ij,n})+\frac{N_j}{2N^2}[(2\dot{a}^2-2a^2\dot{a}^2)(\delta_{in}+\gamma_{in})+(a\dot{a}-a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{in}]+$$
$$\frac{N_n}{2N^2}[(2a^2\dot{a}^2-2\dot{a}^2)(\delta_{ij}+\gamma_{ij})+(a^3\dot{a}-a\dot{a})\dot{\gamma}_{ij}]+\frac{a\dot{a}N_\rho}{2N^2}(\delta_{in}\dot{\gamma}_{\rho j}-\delta_{ij}\dot{\gamma}_{\rho n})+$$
$$\frac{a^2\dot{a}^2N^\rho}{N^2}[\delta_{ij}(\gamma_{n\rho}-\gamma^{\rho n})-\delta_{in}(\gamma_{j\rho}-\gamma^{\rho j})]+\frac{a\dot{a}N^\rho}{2N^2}[\delta_{ij}(a^2\dot{\gamma}_{\rho n}+2a\dot{a}\gamma_{\rho n})-\delta_{in}(a^2\dot{\gamma}_{\rho j}+2a\dot{a}\gamma_{\rho j})]$$

$$R_{00}=g^{mn}R_{0m0n}=g^{00}R_{0000}+g^{m0}R_{0m00}+g^{0n}R_{000n}+g^{mn}R_{0m0n}=-\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\times$$
$$\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{mn}+\delta_{mn})+a^2\ddot{\gamma}_{mn}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{mn}]+\frac{3}{4a^4}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})\right]+$$
$$\frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{kn}+2a\dot{a}\gamma_{kn})+4a^2\dot{a}^2\gamma_{mn}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{mn}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{nm}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{nm}+4a^2\dot{a}^2\delta_{mn}\right]\times$$
$$\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})=-\frac{3}{2a^2}(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})+\frac{3}{4a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+$$
$$\frac{3}{4a^4}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+12a^2\dot{a}^2\right]=$$
$$6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2-3\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{3}{2a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})$$

$$R_{0i}=g^{mn}R_{0min}=g^{00}R_{00i0}+g^{m0}R_{0mi0}+g^{0n}R_{00in}+g^{mn}R_{0min}=g^{m0}R_{0mi0}+g^{mn}R_{0min}=$$
$$\frac{N^m}{2N^2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+a^2\ddot{\gamma}_{mi}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}]-\frac{3N^m}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{ki}+a^2\dot{\gamma}_{ki})\right]-$$
$$\frac{3N^m}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+4a^2\dot{a}^2\delta_{im}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{im}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{im}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{mi}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}\right]+$$
$$\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})a\dot{a}(\gamma_{mi,n}-\gamma_{mn,i})+\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{mi,n}-\dot{\gamma}_{mn,i})+$$

$$\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\frac{N^n}{2N^2}[(2\dot{a}^2-2a^2\dot{a}^2)(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+(a\dot{a}-a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{mi}]+\frac{3}{4a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\times$$

$$\left[(\gamma_{km,i}+\gamma_{ki,m}-\gamma_{mi,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kn}\right)-(\gamma_{km,n}+\gamma_{kn,m}-\gamma_{mn,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{ki}\right)\right]+$$

$$\frac{N^i}{2N^2}\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})[(2a^2\dot{a}^2-2\dot{a}^2)(\delta_{mn}+\gamma_{mn})+(a^3\dot{a}-a\dot{a})\dot{\gamma}_{mn}]+$$

$$\frac{a\dot{a}N^\rho}{2N^2}\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})[\delta_{mn}(2a\dot{a}\gamma_{\rho i}+a^2\dot{\gamma}_{\rho i})-\delta_{mi}(2a\dot{a}\gamma_{\rho n}+a^2\dot{\gamma}_{\rho n})+\delta_{mi}\dot{\gamma}_{\rho n}-\delta_{mn}\dot{\gamma}_{\rho i}]=$$

$$\frac{N^m}{2N^2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+a^2\ddot{\gamma}_{mi}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}]-$$

$$\frac{3N^m}{4a^2N^2}(4a^2\dot{a}^2\delta_{im}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{im}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{im}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{mi}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{mi})+$$

$$\frac{N^m}{2a^2N^2}[(2\dot{a}^2-2a^2\dot{a}^2)(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+(a\dot{a}-a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{mi}]-\frac{N^n}{2a^2N^2}(2\dot{a}^2-2a^2\dot{a}^2)\gamma^{in}+$$

$$\frac{3}{4a^2}(\gamma_{kn,i}+\gamma_{ki,n}-\gamma_{ni,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kn}\right)+\frac{3N^i}{2a^2N^2}(2a^2\dot{a}^2-2\dot{a}^2)+$$

$$\frac{\dot{a}N^\rho}{2aN^2}[6a\dot{a}\gamma_{\rho i}+3a^2\dot{\gamma}_{\rho i}-\delta_{in}(2a\dot{a}\gamma_{\rho n}+a^2\dot{\gamma}_{\rho n})+\delta_{in}\dot{\gamma}_{\rho n}-3\dot{\gamma}_{\rho i}]=$$

$$\frac{N^m}{N^2}\left[(\dot{a}^2+a\ddot{a})(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mi}+2a\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}\right]+\frac{N^n}{N^2}\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\gamma^{in}+\frac{3N^i}{N^2}\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]+$$

$$\frac{N^m}{a^2N^2}\left[(\dot{a}^2-a^2\dot{a}^2)(\delta_{mi}+\gamma_{mi})+\frac{1}{2}(a\dot{a}-a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{mi}-3a^2\dot{a}^2\delta_{im}-3a^2\dot{a}^2\gamma_{im}-\frac{3}{2}a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{im}-3a^2\dot{a}^2\gamma_{mi}-\frac{3}{2}a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{mi}\right]+$$

$$\frac{3}{4a^2}(\gamma_{kn,i}+\gamma_{ki,n}-\gamma_{ni,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^n}-\frac{\partial N_n}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{kn}\right)+$$

$$\frac{\dot{a}N^\rho}{2aN^2}[4a\dot{a}\gamma_{\rho i}+(2a^2-2)\dot{\gamma}_{\rho i}]=\frac{N^m}{N^2}\left[\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)(\gamma_{mi}+\delta_{mi})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mi}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{mi}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{im}-3\dot{a}^2\gamma_{im}\right]+$$

$$\left(\frac{3N^i}{N^2}+\frac{N^n}{N^2}\gamma^{in}\right)\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]+\frac{3}{4a^2}(\gamma_{km,i}+\gamma_{ki,m}-\gamma_{mi,k})\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}+2a\dot{a}\delta_{km}\right)+$$

$$\frac{N^k}{N^2}\left[2\dot{a}^2\gamma_{ki}+\left(a\dot{a}-\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{ki}\right]$$

$$
\begin{aligned}
R_{i0} =& g^{mn}R_{im0n} = g^{00}R_{i000} + g^{m0}R_{im00} + g^{0n}R_{i00n} + g^{mn}R_{im0n} = g^{0n}R_{i00n} + g^{mn}R_{im0n} = \\
& \frac{N^n}{2N^2}[(2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})(\gamma_{in} + \delta_{in}) + a^2\ddot{\gamma}_{in} + 4a\dot{a}\dot{\gamma}_{in}] - \frac{3N^n}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^n} - \frac{\partial N_n}{\partial x^\pi}\right)(a^2\dot{\gamma}_{\pi i} + 2a\dot{a}\gamma_{\pi i})\right] - \\
& \frac{3N^n}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^\pi}\right)(2a\dot{a}\gamma_{\pi n} + a^2\dot{\gamma}_{\pi n}) + 4a^2\dot{a}^2\delta_{in} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ni} + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{ni} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{in} + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{in}\right] + \\
& \frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn})a\dot{a}(\gamma_{in,m} - \gamma_{mn,i}) + \frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn})\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,m} - \dot{\gamma}_{mn,i}) + \\
& \frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right)(\gamma_{\pi i,n} + \gamma_{\pi n,i} - \gamma_{in,\pi}) - \left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi i}\right)(\gamma_{\pi m,n} + \gamma_{\pi n,m} - \gamma_{mn,\pi})\right] \times \\
& \frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn}) + \frac{N_m}{2N^2}\frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn})[(2\dot{a}^2 - 2a^2\dot{a}^2)(\gamma_{in} + \delta_{in}) + (a\dot{a} - a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{in}] + \\
& \frac{N_i}{2N^2}\frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn})[(2a^2\dot{a}^2 - 2\dot{a}^2)(\delta_{mn} + \gamma_{mn}) + (a^3\dot{a} - a\dot{a})\dot{\gamma}_{mn}] + \\
& \frac{a\dot{a}N^\rho}{2N^2}\frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn})(\delta_{in}\dot{\gamma}_{\rho m} - \delta_{mn}\dot{\gamma}_{\rho i}) + \frac{a^2\dot{a}^2N^\rho}{N^2}\delta_{in}\frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn})(\gamma^{\rho m} - \gamma_{m\rho}) + \\
& \frac{a\dot{a}N^\rho}{2N^2}\frac{1}{a^2}(\delta^{mn} - \gamma^{mn})[\delta_{mn}(a^2\dot{\gamma}_{\rho i} + 2a\dot{a}\gamma_{\rho i}) - \delta_{in}(a^2\dot{\gamma}_{\rho m} + 2a\dot{a}\gamma_{\rho m})] = \\
& \frac{N^n}{2N^2}[(2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})(\gamma_{in} + \delta_{in}) + a^2\ddot{\gamma}_{in} + 4a\dot{a}\dot{\gamma}_{in}] + \frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi i,m} + \gamma_{\pi m,i} - \gamma_{im,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right) - \\
& \frac{3N^n}{4a^2N^2}(4a^2\dot{a}^2\delta_{in} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ni} + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{ni} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{in} + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{in}) - \frac{N_m}{2a^2N^2}(2\dot{a}^2 - 2a^2\dot{a}^2)\gamma^{mi} + \\
& \frac{N_n}{2a^2N^2}[(2\dot{a}^2 - 2a^2\dot{a}^2)(\gamma_{in} + \delta_{in}) + (a\dot{a} - a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{in}] + \frac{3N_i}{2a^2N^2}(2a^2\dot{a}^2 - 2\dot{a}^2) + \frac{\dot{a}N^\rho}{2aN^2}(\dot{\gamma}_{\rho i} - 3\dot{\gamma}_{\rho i}) + \\
& \frac{\dot{a}^2N^\rho}{N^2}(\gamma^{\rho i} - \gamma_{i\rho}) + \frac{\dot{a}N^\rho}{2aN^2}(3a^2\dot{\gamma}_{\rho i} + 6a\dot{a}\gamma_{\rho i} - a^2\dot{\gamma}_{\rho i} - 2a\dot{a}\gamma_{\rho i}) = \frac{3N_i}{N^2}\left[\dot{a}^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] + \\
& \frac{N_m}{N^2}\left[\dot{a}^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\gamma^{mi} + \frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi i,m} + \gamma_{\pi m,i} - \gamma_{im,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right) + \\
& \frac{N^n}{N^2}[(\dot{a}^2 + a\ddot{a})(\gamma_{in} + \delta_{in}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{in} + 2a\dot{a}\dot{\gamma}_{in}] + \frac{N^\rho}{N^2}\left[3\dot{a}^2\gamma_{\rho i} - \dot{a}^2\gamma_{i\rho} + \left(a\dot{a} - \frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\rho i}\right] + \\
& \frac{N^n}{a^2N^2}\left[(\dot{a}^2 - 4a^2\dot{a}^2)(\gamma_{in} + \delta_{in}) + (\frac{1}{2}a\dot{a} - 2a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{in} - \frac{3}{2}a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ni} - 3a^2\dot{a}^2\gamma_{ni}\right] =
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{3N_i}{N^2}+\frac{N_m}{N^2}\gamma^{mi}\right)\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]+\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi i,m}+\gamma_{\pi m,i}-\gamma_{im,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right)+$$
$$\frac{N^\pi}{N^2}\left[3\dot{a}^2\gamma_{\pi i}-\dot{a}^2\gamma_{i\pi}+\left(a\dot{a}-\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\pi i}\right]+$$
$$\frac{N^n}{N^2}\left[\left(a\ddot{a}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2-3\dot{a}^2\right)(\gamma_{in}+\delta_{in})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{in}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{in}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ni}-3\dot{a}^2\gamma_{ni}\right]$$

$$R_{ij}=g^{mn}R_{imjn}=g^{00}R_{i0j0}+g^{0n}R_{i0jn}+g^{m0}R_{imj0}+g^{mn}R_{imjn}=$$
$$\frac{3N^n}{4N^2}[2a\dot{a}\delta_{\pi j}(\gamma_{\pi i,n}+\gamma_{\pi n,i}-\gamma_{in,\pi})-2a\dot{a}\delta_{\pi n}(\gamma_{\pi i,j}+\gamma_{\pi j,i}-\gamma_{ij,\pi})]+$$
$$\frac{N^n}{N^2}\left[a\dot{a}(\gamma_{in,j}-\gamma_{ij,n})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,j}-\dot{\gamma}_{ij,n})\right]+\frac{N^m}{N^2}\left[a\dot{a}(\gamma_{mj,i}-\gamma_{ij,m})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{mj,i}-\dot{\gamma}_{ij,m})\right]+$$
$$\frac{3N^m}{4N^2}[2a\dot{a}\delta_{ki}(\gamma_{km,j}+\gamma_{kj,m}-\gamma_{mj,k})-2a\dot{a}\delta_{km}(\gamma_{ki,j}+\gamma_{kj,i}-\gamma_{ij,k})]+$$
$$\frac{1}{2N^2}[(2\dot{a}^2+2a\ddot{a})(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+a^2\ddot{\gamma}_{ij}+4a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]-\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})\right]-$$
$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})+4a^2\dot{a}^2\delta_{ij}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{ji}+2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}+4a^2\dot{a}^2\gamma_{ij}\right]+$$
$$\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\frac{a^2}{2}(\gamma_{in,mj}+\gamma_{mj,in}-\gamma_{ij,mn}-\gamma_{mn,ij})+$$
$$N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}(1-a^2)\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\left[\delta_{mj}(\gamma_{\sigma i,n}+\gamma_{\sigma n,i}-\gamma_{in,\sigma})-\delta_{mn}(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})\right]+$$
$$N_\sigma\frac{a\dot{a}}{2N^2}(1-a^2)\frac{1}{a^2}(\delta^{mn}-\gamma^{mn})\left[\delta_{in}(\gamma_{\sigma m,j}+\gamma_{\sigma j,m}-\gamma_{mj,\sigma})-\delta_{ij}(\gamma_{\sigma m,n}+\gamma_{\sigma n,m}-\gamma_{mn,\sigma})\right]=$$
$$\frac{3a\dot{a}N^n}{2N^2}(\gamma_{ji,n}+\gamma_{jn,i}-\gamma_{in,j}-\gamma_{ni,j}-\gamma_{nj,i}+\gamma_{ij,n})+\frac{N^n}{N^2}\left[a\dot{a}(\gamma_{in,j}-\gamma_{ij,n})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,j}-\dot{\gamma}_{ij,n})\right]+$$
$$\frac{N^m}{N^2}\left[a\dot{a}(\gamma_{mj,i}-\gamma_{ij,m})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{mj,i}-\dot{\gamma}_{ij,m})\right]+\frac{3a\dot{a}N^m}{2N^2}(\gamma_{im,j}+\gamma_{ij,m}-\gamma_{mj,i}-\gamma_{mi,j}-\gamma_{mj,i}+\gamma_{ij,m})+$$
$$\frac{1}{N^2}[(\dot{a}^2+a\ddot{a})(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ij}+2a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}]-\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})\right]-$$
$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})\right]-\frac{1}{N^2}[3\dot{a}^2\delta_{ij}+\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}+3\dot{a}^2\gamma_{ji}+\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}+3\dot{a}^2\gamma_{ij}]+$$
$$\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(1-a^2)(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma}-3\gamma_{\sigma i,j}-3\gamma_{\sigma j,i}+3\gamma_{ij,\sigma})+\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(1-a^2)(\gamma_{\sigma i,j}+\gamma_{\sigma j,i}-\gamma_{ij,\sigma})=$$

$$\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ij}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ij}-3\dot{a}^2\gamma_{ji}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}\right]+\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(1-a^2)(\gamma_{ij,\sigma}-\gamma_{\sigma i,j}-\gamma_{\sigma j,i})-$$

$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})+\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})\right]+$$

$$\frac{N^n}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}(\gamma_{ji,n}+\gamma_{jn,i}-\gamma_{ni,j}-\gamma_{nj,i})-\frac{a\dot{a}}{2}(\gamma_{in,j}-\gamma_{ij,n})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,j}-\dot{\gamma}_{ij,n})\right]+$$

$$\frac{N^m}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}(\gamma_{im,j}+\gamma_{ij,m}-\gamma_{mi,j}-\gamma_{mj,i})-\frac{a\dot{a}}{2}(\gamma_{mj,i}-\gamma_{ij,m})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{mj,i}-\dot{\gamma}_{ij,m})\right]=$$

$$\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ij}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ij}-3\dot{a}^2\gamma_{ji}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}\right]+\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(\gamma_{ij,\sigma}-\gamma_{\sigma i,j}-\gamma_{\sigma j,i})-$$

$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})+\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})\right]+$$

$$\frac{N^n}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{ji,n}+\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{jn,i}-\frac{5a\dot{a}}{2}\gamma_{ni,j}-3a\dot{a}\gamma_{nj,i}+a\dot{a}\gamma_{in,j}+2a\dot{a}\gamma_{ij,n}+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,j}+\dot{\gamma}_{nj,i}-2\dot{\gamma}_{ij,n})\right]$$

$$R=g^{ij}R_{ij}=g^{00}R_{00}+g^{i0}R_{i0}+g^{0j}R_{0j}+g^{ij}R_{ij}=-\frac{6}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{3\ddot{a}}{aN^2}-$$

$$\frac{3}{2N^2a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+\frac{N^i}{N^2}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi i,m}+\gamma_{\pi m,i}-\gamma_{im,\pi})2a\dot{a}\delta_{\pi m}+$$

$$\frac{N^j}{N^2}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{km,j}+\gamma_{kj,m}-\gamma_{mj,k})2a\dot{a}\delta_{km}+\frac{1}{a^2}(\delta^{ij}-\gamma^{ij})\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(\gamma_{ij,\sigma}-\gamma_{\sigma i,j}-\gamma_{\sigma j,i})+$$

$$\frac{1}{a^2}(\delta^{ij}-\gamma^{ij})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ij}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ij}-3\dot{a}^2\gamma_{ji}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}\right]-\frac{1}{a^2}(\delta^{ij}-\gamma^{ij})\times$$

$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki}+2a\dot{a}\gamma_{ki})+\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(2a\dot{a}\gamma_{kj}+a^2\dot{\gamma}_{kj})\right]+\frac{1}{a^2}(\delta^{ij}-\gamma^{ij})\times$$

$$\frac{N^n}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{ji,n}+\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{jn,i}-\frac{5a\dot{a}}{2}\gamma_{ni,j}-3a\dot{a}\gamma_{nj,i}+a\dot{a}\gamma_{in,j}+2a\dot{a}\gamma_{ij,n}+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,j}+\dot{\gamma}_{nj,i}-2\dot{\gamma}_{ij,n})\right]=$$

$$-\frac{6}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{3\ddot{a}}{aN^2}-\frac{3}{2N^2a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+\frac{3}{a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)-$$

$$\frac{3}{4a^4N^2}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(2a^2\dot{\gamma}_{kj}+4a\dot{a}\gamma_{kj})=$$

$$-\frac{3}{N^2a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+\frac{6\ddot{a}}{aN^2}-\frac{12}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
W^{0i}_{jk} =& g^{0\theta}g^{i\tau}W_{\theta\tau jk} = g^{00}g^{i0}W_{00jk} + g^{00}g^{i\tau}W_{0\tau jk} + g^{0\theta}g^{i0}W_{\theta 0jk} + g^{0\theta}g^{i\tau}W_{\theta\tau jk} \\
& -\frac{N^i}{N^4}W_{00jk} - \frac{1}{a^2N^2}(\delta^{i\tau}-\gamma^{i\tau})W_{0\tau jk} + \frac{N^\theta N^i}{N^4}W_{\theta 0jk} + \frac{N^\theta}{a^2N^2}(\delta^{i\tau}-\gamma^{i\tau})W_{\theta\tau jk} = \\
& -\frac{N^i}{N^4}W_{00jk} - \frac{1}{a^2N^2}(\delta^{i\tau}-\gamma^{i\tau})W_{0\tau jk} + \frac{N^\theta}{a^2N^2}(\delta^{i\tau}-\gamma^{i\tau})W_{\theta\tau jk}
\end{aligned}
$$

Σε αυτό το σημείο, καθώς γνωρίζουμε ότι οι τιμές των N^2 και N_i στην background μετρική είναι 1 και 0 αντίστοιχα, ο μόνος όρος που συνεισφέρει στον παραπάνω υπολογισμό είναι αυτός που περιέχει τον $W_{0\tau jk}$. Γνωρίζουμε ότι

$$
W_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) + \frac{R}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})
$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
W_{0\tau jk} =& R_{0\tau jk} - \frac{1}{2}(g_{0j}R_{\tau k} - g_{0k}R_{\tau j} - g_{\tau j}R_{0k} + g_{\tau k}R_{0j}) + \frac{R}{6}(g_{0j}g_{\tau k} - g_{\tau j}g_{0k}) = \\
& a\dot{a}(\gamma_{\tau j,k} - \gamma_{\tau k,j}) + \frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{\tau j,k} - \dot{\gamma}_{\tau k,j}) + \frac{N^k}{2N^2}[(2\dot{a}^2 - 2a^2\dot{a}^2)(\delta_{\tau j} + \gamma_{\tau j}) + (a\dot{a} - a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{\tau j}] + \frac{3}{4}\times \\
& \left[(\gamma_{\pi\tau,j} + \gamma_{\pi j,\tau} - \gamma_{\tau j,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^k} - \frac{\partial N_k}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi k}\right) - (\gamma_{\pi\tau,k} + \gamma_{\pi k,\tau} - \gamma_{\tau k,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right)\right] + \\
& \frac{N^j}{2N^2}[(2a^2\dot{a}^2 - 2\dot{a}^2)(\delta_{\tau k} + \gamma_{\tau k}) + (a^3\dot{a} - a\dot{a})\dot{\gamma}_{\tau k}] + \\
& \frac{a\dot{a}N^\pi}{2N^2}[\delta_{\tau k}(2a\dot{a}\gamma_{\pi j} + a^2\dot{\gamma}_{\pi j}) - \delta_{\tau j}(2a\dot{a}\gamma_{\pi k} + a^2\dot{\gamma}_{\pi k}) + \delta_{\tau j}\dot{\gamma}_{\pi k} - \delta_{\tau k}\dot{\gamma}_{\pi j}] + \\
& \frac{a^2}{6}\left[-\frac{3}{N^2a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km} + 2a\dot{a}\gamma_{km}) + \frac{6\ddot{a}}{aN^2} - \frac{12}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right][N_j(\delta_{\tau k} + \gamma_{\tau k}) - N_k(\delta_{\tau j} + \gamma_{\tau j})] - \\
& \frac{N_j}{2N^2}\left[(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2)(\gamma_{\tau k} + \delta_{\tau k}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{\tau k} + \frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{\tau k} - 3\dot{a}^2\gamma_{k\tau} - \frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{k\tau}\right] + \\
& \frac{N_k}{2N^2}\left[(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2)(\gamma_{\tau j} + \delta_{\tau j}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{\tau j} + \frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{\tau j} - 3\dot{a}^2\gamma_{j\tau} - \frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{j\tau}\right] + \frac{a^2}{2}(\delta_{\tau j} + \gamma_{\tau j})\times \\
& \frac{N^m}{N^2}\left[\left(a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)(\gamma_{mk} + \delta_{mk}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mk} + \frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{mk} - \frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{km} - 3\dot{a}^2\gamma_{km}\right] + \\
& \frac{a^2}{2}(\delta_{\tau j} + \gamma_{\tau j})\left(\frac{3N^k}{N^2} + \frac{N^n}{N^2}\gamma^{kn}\right)\left[\dot{a}^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] + \frac{a^2}{2}(\delta_{\tau j} + \gamma_{\tau j})\frac{N^\pi}{N^2}\left[2\dot{a}^2\gamma_{\pi k} + \left(a\dot{a} - \frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\pi k}\right] + \\
& \frac{a^2}{2}(\delta_{\tau j} + \gamma_{\tau j})\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,k} + \gamma_{\pi k,m} - \gamma_{mk,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right) -
\end{aligned}
$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{\tau k}+\gamma_{\tau k})\frac{N^m}{N^2}\left[\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)(\gamma_{mj}+\delta_{mj})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mj}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{mj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{jm}-3\dot{a}^2\gamma_{jm}\right]-$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{\tau k}+\gamma_{\tau k})\left(\frac{3N^j}{N^2}+\frac{N^n}{N^2}\gamma^{jn}\right)\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]-\frac{a^2}{2}(\delta_{\tau k}+\gamma_{\tau k})\frac{N^\pi}{N^2}\left[2\dot{a}^2\gamma_{\pi j}+\left(a\dot{a}-\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\pi j}\right]-$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{\tau k}+\gamma_{\tau k})\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,j}+\gamma_{\pi j,m}-\gamma_{mj,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right)=$$

$$a\dot{a}(\gamma_{\tau j,k}-\gamma_{\tau k,j})+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{\tau j,k}-\dot{\gamma}_{\tau k,j})+\frac{N^k}{2N^2}[(2\dot{a}^2-2a^2\dot{a}^2)(\delta_{\tau j}+\gamma_{\tau j})+(a\dot{a}-a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{\tau j}]+\frac{3}{4}\times$$

$$\left[(\gamma_{\pi\tau,j}+\gamma_{\pi j,\tau}-\gamma_{\tau j,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^k}-\frac{\partial N_k}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi k}\right)-(\gamma_{\pi\tau,k}+\gamma_{\pi k,\tau}-\gamma_{\tau k,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right)\right]+$$

$$\frac{N^j}{2N^2}[(2a^2\dot{a}^2-2\dot{a}^2)(\delta_{\tau k}+\gamma_{\tau k})+(a^3\dot{a}-a\dot{a})\dot{\gamma}_{\tau k}]+$$

$$\frac{a\dot{a}N^\pi}{2N^2}[\delta_{\tau k}(2a\dot{a}\gamma_{\pi j}+a^2\dot{\gamma}_{\pi j})-\delta_{\tau j}(2a\dot{a}\gamma_{\pi k}+a^2\dot{\gamma}_{\pi k})+\delta_{\tau j}\dot{\gamma}_{\pi k}-\delta_{\tau k}\dot{\gamma}_{\pi j}]+$$

$$a^2\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2}-\frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right][N_j(\delta_{\tau k}+\gamma_{\tau k})-N_k(\delta_{\tau j}+\gamma_{\tau j})]-$$

$$\frac{N_j}{2N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{\tau k}+\delta_{\tau k})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{\tau k}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{\tau k}-3\dot{a}^2\gamma_{k\tau}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{k\tau}\right]+$$

$$\frac{N_k}{2N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{\tau j}+\delta_{\tau j})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{\tau j}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{\tau j}-3\dot{a}^2\gamma_{j\tau}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{j\tau}\right]+\frac{a^2}{2}\gamma_{\tau j}\frac{N^k}{N^2}\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)+$$

$$\frac{a^2}{2}\delta_{\tau j}\frac{N^m}{N^2}\left[\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)(\gamma_{mk}+\delta_{mk})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mk}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{mk}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{km}-3\dot{a}^2\gamma_{km}\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{\tau j}+\gamma_{\tau j})\left(\frac{3N^k}{N^2}+\frac{N^n}{N^2}\gamma^{kn}\right)\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]+\frac{a^2}{2}\delta_{\tau j}\frac{N^\pi}{N^2}\left[2\dot{a}^2\gamma_{\pi k}+\left(a\dot{a}-\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\pi k}\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}\delta_{\tau j}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,k}+\gamma_{\pi k,m}-\gamma_{mk,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right)-\frac{a^2}{2}\gamma_{\tau k}\frac{N^j}{N^2}\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)-$$

$$\frac{a^2}{2}\delta_{\tau k}\frac{N^m}{N^2}\left[\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)(\gamma_{mj}+\delta_{mj})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mj}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{mj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{jm}-3\dot{a}^2\gamma_{jm}\right]-$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{\tau k}+\gamma_{\tau k})\left(\frac{3N^j}{N^2}+\frac{N^n}{N^2}\gamma^{jn}\right)\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]-\frac{a^2}{2}\delta_{\tau k}\frac{N^\pi}{N^2}\left[2\dot{a}^2\gamma_{\pi j}+\left(a\dot{a}-\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\pi j}\right]-$$

$$\frac{a^2}{2}\delta_{\tau k}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,j}+\gamma_{\pi j,m}-\gamma_{mj,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right)$$

Οπότε,

$$W^{0i}_{jk} = -\frac{1}{a^2N^2}(\delta^{i\tau} - \gamma^{i\tau})W_{0\tau jk} = -\frac{1}{a^2N^2}W_{0ijk} + \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}W_{0\tau jk}$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}W_{0\tau jk} = \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{N^k}{2N^2}(2\dot{a}^2 - 2a^2\dot{a}^2)\delta_{\tau j} + \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{N^j}{2N^2}(2a^2\dot{a}^2 - 2\dot{a}^2)\delta_{\tau k} +$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}a^2\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](N_j\delta_{\tau k} - N_k\delta_{\tau j}) - \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{N_j}{2N^2}(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2)\delta_{\tau k} +$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{N_k}{2N^2}(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2)\delta_{\tau j} + \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{a^2}{2}\delta_{\tau j}\frac{N^m}{N^2}\left(a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\delta_{mk} +$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{a^2}{2}\delta_{\tau j}\frac{3N^k}{N^2}\left[\dot{a}^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] - \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{a^2}{2}\delta_{\tau k}\frac{N^m}{N^2}\left(a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\delta_{mj} -$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}\frac{a^2}{2}\delta_{\tau k}\frac{3N^j}{N^2}\left[\dot{a}^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] = \gamma^{ij}\frac{N^k}{2a^2N^4}(2\dot{a}^2 - 2a^2\dot{a}^2) + \gamma^{ik}\frac{N^j}{2a^2N^4}(2a^2\dot{a}^2 - 2\dot{a}^2) +$$
$$\left[\frac{\ddot{a}}{aN^4} - \frac{2}{N^4}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](N_j\gamma^{ik} - N_k\gamma^{ij}) - \gamma^{ik}\frac{N_j}{2a^2N^4}(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2) + \gamma^{ij}\frac{N_k}{2a^2N^4}(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2) +$$
$$\gamma^{ij}\frac{N^k}{2N^4}\left(a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right) + \gamma^{ij}\frac{3N^k}{2N^4}\left[\dot{a}^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] - \gamma^{ik}\frac{N^j}{2N^4}\left(a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right) -$$
$$\gamma^{ik}\frac{3N^j}{2N^4}\left[\dot{a}^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{a^2N^2}W_{0ijk} = -\frac{1}{a^2N^2}a\dot{a}(\gamma_{ij,k} - \gamma_{ik,j}) - \frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{ij,k} - \dot{\gamma}_{ik,j}) -$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{N^k}{2N^2}[(2\dot{a}^2 - 2a^2\dot{a}^2)(\delta_{ij} + \gamma_{ij}) + (a\dot{a} - a^3\dot{a})\dot{\gamma}_{ij}] - \frac{1}{a^2N^2}\frac{3}{4}\times$$
$$\left[(\gamma_{\pi i,j} + \gamma_{\pi j,i} - \gamma_{ij,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^k} - \frac{\partial N_k}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi k}\right) - (\gamma_{\pi i,k} + \gamma_{\pi k,i} - \gamma_{ik,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j}{\partial x^\pi} + 2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right)\right] -$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{N^j}{2N^2}[(2a^2\dot{a}^2 - 2\dot{a}^2)(\delta_{ik} + \gamma_{ik}) + (a^3\dot{a} - a\dot{a})\dot{\gamma}_{ik}] -$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a\dot{a}N^\pi}{2N^2}[\delta_{ik}(2a\dot{a}\gamma_{\pi j} + a^2\dot{\gamma}_{\pi j}) - \delta_{ij}(2a\dot{a}\gamma_{\pi k} + a^2\dot{\gamma}_{\pi k}) + \delta_{ij}\dot{\gamma}_{\pi k} - \delta_{ik}\dot{\gamma}_{\pi j}] -$$
$$\frac{1}{a^2N^2}a^2\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right][N_j(\delta_{ik} + \gamma_{ik}) - N_k(\delta_{ij} + \gamma_{ij})] +$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{N_j}{2N^2}\left[(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2)(\gamma_{ik} + \delta_{ik}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik} + \frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik} - 3\dot{a}^2\gamma_{ki} - \frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right] -$$
$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{N_k}{2N^2}\left[(a\ddot{a} - 2\dot{a}^2)(\gamma_{ij} + \delta_{ij}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ij} + \frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ij} - 3\dot{a}^2\gamma_{ji} - \frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ji}\right] -$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\gamma_{ij}\frac{N^k}{N^2}\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)-$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ij}\frac{N^m}{N^2}\left[\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)(\gamma_{mk}+\delta_{mk})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mk}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{mk}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{km}-3\dot{a}^2\gamma_{km}\right]-$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})\left(\frac{3N^k}{N^2}+\frac{N^n}{N^2}\gamma^{kn}\right)\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]-\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ij}\frac{N^\pi}{N^2}\left[2\dot{a}^2\gamma_{\pi k}+\left(a\dot{a}-\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\pi k}\right]-$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ij}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,k}+\gamma_{\pi k,m}-\gamma_{mk,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right)+$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\gamma_{ik}\frac{N^j}{N^2}\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)+$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ik}\frac{N^m}{N^2}\left[\left(a\ddot{a}-3\dot{a}^2+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)(\gamma_{mj}+\delta_{mj})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{mj}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{mj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{jm}-3\dot{a}^2\gamma_{jm}\right]+$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}(\delta_{ik}+\gamma_{ik})\left(\frac{3N^j}{N^2}+\frac{N^n}{N^2}\gamma^{jn}\right)\left[\dot{a}^2-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]+\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ik}\frac{N^\pi}{N^2}\left[2\dot{a}^2\gamma_{\pi j}+\left(a\dot{a}-\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\gamma}_{\pi j}\right]+$$

$$\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ik}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,j}+\gamma_{\pi j,m}-\gamma_{mj,\pi})\left(\frac{\partial N_\pi}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^\pi}+2a\dot{a}\delta_{\pi m}\right)$$

Στη συνέχεια για $N^2=1$ και $N_i=0$, αθροίζοντας τα 2 παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$\begin{aligned}
W^{0i}_{jk}=&-\frac{1}{a^2N^2}(\delta^{i\tau}-\gamma^{i\tau})W_{0\tau jk}=-\frac{1}{a^2N^2}W_{0ijk}+\frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}W_{0\tau jk}=-\frac{1}{a^2N^2}a\dot{a}(\gamma_{ij,k}-\gamma_{ik,j})-\\
&\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{ij,k}-\dot{\gamma}_{ik,j})-\frac{1}{a^2N^2}\frac{3}{4}\left[(\gamma_{\pi i,j}+\gamma_{\pi j,i}-\gamma_{ij,\pi})2a\dot{a}\delta_{\pi k}-(\gamma_{\pi i,k}+\gamma_{\pi k,i}-\gamma_{ik,\pi})2a\dot{a}\delta_{\pi j}\right]-\\
&\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ij}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,k}+\gamma_{\pi k,m}-\gamma_{mk,\pi})2a\dot{a}\delta_{\pi m}+\frac{1}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{ik}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi m,j}+\gamma_{\pi j,m}-\gamma_{mj,\pi})2a\dot{a}\delta_{\pi m}=\\
&-\frac{\dot{a}}{aN^2}(\gamma_{ij,k}-\gamma_{ik,j})-\frac{1}{2N^2}(\dot{\gamma}_{ij,k}-\dot{\gamma}_{ik,j})-\frac{3\dot{a}}{2aN^2}(\gamma_{ki,j}+\gamma_{kj,i}-\gamma_{ij,k}-\gamma_{ji,k}-\gamma_{jk,i}+\gamma_{ik,j})=\\
&-\frac{\dot{a}}{a}(\gamma_{ij,k}-\gamma_{ik,j})-\frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{ij,k}-\dot{\gamma}_{ik,j})-\frac{3\dot{a}}{2a}(\gamma_{ki,j}+\gamma_{kj,i}-\gamma_{ij,k}-\gamma_{ji,k}-\gamma_{jk,i}+\gamma_{ik,j})=\frac{1}{2a}(\dot{\gamma}_{ik,j}-\dot{\gamma}_{ij,k})
\end{aligned}$$

Ομοίως δουλεύουμε και για το $W^{jk}_{0i} \quad \Rightarrow \quad W^{jk}_{0i}=\frac{1}{2a}(\dot{\gamma}_{ij,k}-\dot{\gamma}_{ik,j})$

$$
\begin{aligned}
W^{0i}_{0j} =& g^{0\theta}g^{i\tau}W_{\theta\tau 0j} = g^{00}g^{i0}W_{000j} + g^{00}g^{i\tau}W_{0\tau 0j} + g^{0\theta}g^{i0}W_{\theta 00j} + g^{0\theta}g^{i\tau}W_{\theta\tau 0j} = \\
& g^{00}g^{i\tau}W_{0\tau 0j} = -\frac{1}{a^2N^2}(\delta^{i\tau} - \gamma^{i\tau})W_{0\tau 0j} = -\frac{1}{a^2N^2}W_{0i0j} + \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}W_{0\tau 0j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{0i0j} =& R_{0i0j} - \frac{1}{2}(g_{00}R_{ij} - g_{0j}R_{i0} - g_{i0}R_{0j} + g_{ij}R_{00}) + \frac{R}{6}(g_{00}g_{ij} - g_{i0}g_{0j}) = \\
& R_{0i0j} - \frac{1}{2}(-g_{0j}R_{i0} - g_{i0}R_{0j} + g_{ij}R_{00}) = -\frac{1}{2}[(2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})(\gamma_{ij} + \delta_{ij}) + a^2\ddot{\gamma}_{ij} + 4a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}] + \\
& \frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki} + 2a\dot{a}\gamma_{ki})\right] + \\
& \frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{kj} + 2a\dot{a}\gamma_{kj}) + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{ij} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ij} + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{ji} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ji} + 4a^2\dot{a}^2\delta_{ij}\right] + \\
& \frac{N_j}{2}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{\pi i,m} + \gamma_{\pi m,i} - \gamma_{im,\pi})2a\dot{a}\delta_{\pi m} + \frac{N_i}{2}\frac{3}{4a^2}(\gamma_{km,j} + \gamma_{kj,m} - \gamma_{mj,k})2a\dot{a}\delta_{km} - \\
& \frac{a^2}{2}(\delta_{ij} + \gamma_{ij})\left[6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km} + 2a\dot{a}\gamma_{km})\right] = \\
& -[(\dot{a}^2 + a\ddot{a})(\gamma_{ij} + \delta_{ij}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ij} + 2a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}] + \frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki} + 2a\dot{a}\gamma_{ki})\right] + \\
& \frac{3}{4a^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{kj} + 2a\dot{a}\gamma_{kj}) + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{ij} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ij} + 4a^2\dot{a}^2\gamma_{ji} + 2a^3\dot{a}\dot{\gamma}_{ji} + 4a^2\dot{a}^2\delta_{ij}\right] - \\
& \frac{a^2}{2}(\delta_{ij} + \gamma_{ij})\left[6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\frac{\ddot{a}}{a}\right] - \frac{3}{4a^2}\delta_{ij}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m} - \frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km} + 2a\dot{a}\gamma_{km})
\end{aligned}
$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
W^{0i}_{0j} =& -\frac{1}{a^2N^2}W_{0i0j} + \frac{1}{a^2N^2}\gamma^{i\tau}W_{0\tau 0j} = \frac{1}{a^2N^2}[(\dot{a}^2 + a\ddot{a})(\gamma_{ij} + \delta_{ij}) + \frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ij} + 2a\dot{a}\dot{\gamma}_{ij}] - \\
& \frac{3}{4a^4N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{ki} + 2a\dot{a}\gamma_{ki})\right] + \frac{1}{2N^2}(\delta_{ij} + \gamma_{ij})\left[6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\frac{\ddot{a}}{a}\right] -
\end{aligned}
$$

$$\frac{3}{4a^4N^2}\left[\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^k}\right)(a^2\dot\gamma_{kj}+2a\dot a\gamma_{kj})+4a^2\dot a^2\gamma_{ij}+2a^3\dot a\dot\gamma_{ij}+4a^2\dot a^2\gamma_{ji}+2a^3\dot a\dot\gamma_{ji}+4a^2\dot a^2\delta_{ij}\right]+$$

$$\frac{3}{4a^4N^2}\delta_{ij}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot\gamma_{km}+2a\dot a\gamma_{km})-\frac{\gamma^{i\tau}}{a^2N^2}(\dot a^2+a\ddot a)\delta_{\tau j}+\frac{\gamma^{i\tau}}{a^2N^2}3\dot a^2\delta_{\tau j}-$$

$$\frac{\gamma^{i\tau}}{a^2N^2}\frac{a^2}{2}\delta_{\tau j}\left[6\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2-3\frac{\ddot a}{a}\right]=\frac{1}{a^2}[(\dot a^2+a\ddot a)(\gamma_{ij}+\delta_{ij})+\frac{a^2}{2}\ddot\gamma_{ij}+2a\dot a\dot\gamma_{ij}]+\frac{1}{2}(\delta_{ij}+\gamma_{ij})\left[6\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2-3\frac{\ddot a}{a}\right]-$$

$$\frac{3}{4a^4}(4a^2\dot a^2\gamma_{ij}+2a^3\dot a\dot\gamma_{ij}+4a^2\dot a^2\gamma_{ji}+2a^3\dot a\dot\gamma_{ji}+4a^2\dot a^2\delta_{ij})-\frac{\gamma^{ij}}{a^2}(\dot a^2+a\ddot a)+\frac{\gamma^{ij}}{a^2}3\dot a^2-\frac{\gamma^{ij}}{2}\left[6\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2-3\frac{\ddot a}{a}\right]=$$

$$\gamma_{ij}\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{\ddot a}{a}+3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2-\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2-\frac{\ddot a}{a}-3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]+\dot\gamma_{ij}\left[2\frac{\dot a}{a}-\frac{3}{2}\frac{\dot a}{a}\right]+\frac{1}{2}\ddot\gamma_{ij}-3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\gamma_{ji}-\frac{3}{2}\frac{\dot a}{a}\dot\gamma_{ji}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{\dot a}{a}\dot\gamma_{ij}+\frac{1}{2}\ddot\gamma_{ij}-3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\gamma_{ji}-\frac{3}{2}\frac{\dot a}{a}\dot\gamma_{ji}=\frac{1}{4}\left(\ddot\gamma_{ij}+H\dot\gamma_{ij}+\frac{\nabla^2}{a^2}\gamma_{ij}\right)$$

$$\begin{aligned}W^{ij}_{kl}=&g^{i\theta}g^{j\tau}W_{\theta\tau kl}=g^{i0}g^{j0}W_{00kl}+g^{i0}g^{j\tau}W_{0\tau kl}+g^{i\theta}g^{j0}W_{\theta 0kl}+g^{i\theta}g^{j\tau}W_{\theta\tau kl}=\\&g^{i\theta}g^{j\tau}W_{\theta\tau kl}=\frac{1}{a^4}(\delta^{i\theta}-\gamma^{i\theta})(\delta^{j\tau}-\gamma^{j\tau})W_{\theta\tau kl}=\frac{1}{a^4}(\delta^{i\theta}\delta^{j\tau}-\delta^{i\theta}\gamma^{j\tau}-\delta^{j\tau}\gamma^{i\theta})W_{\theta\tau kl}=\\&\frac{1}{a^4}(W_{ijkl}-\gamma^{j\tau}W_{i\tau kl}-\gamma^{i\theta}W_{\theta jkl})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{ijkl}=&R_{ijkl}-\frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl}-g_{il}R_{jk}-g_{jk}R_{il}+g_{jl}R_{ik})+\frac{R}{6}(g_{ik}g_{jl}-g_{jk}g_{il})=\\&\frac{a^2}{2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})+\\&N_\sigma\frac{a\dot a}{2N^2}(1-a^2)\left[\delta_{jk}(\gamma_{\sigma i,l}+\gamma_{\sigma l,i}-\gamma_{il,\sigma})-\delta_{jl}(\gamma_{\sigma i,k}+\gamma_{\sigma k,i}-\gamma_{ik,\sigma})\right]+\\&N_\sigma\frac{a\dot a}{2N^2}(1-a^2)\left[\delta_{il}(\gamma_{\sigma j,k}+\gamma_{\sigma k,j}-\gamma_{jk,\sigma})-\delta_{ik}(\gamma_{\sigma j,l}+\gamma_{\sigma l,j}-\gamma_{jl,\sigma})\right]-\\&\frac{a^2}{2}(\delta_{ik}+\gamma_{ik})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot a-2\dot a^2)(\gamma_{jl}+\delta_{jl})+\frac{a^2}{2}\ddot\gamma_{jl}+\frac{a\dot a}{2}\dot\gamma_{jl}-3\dot a^2\gamma_{lj}-\frac{3}{2}a\dot a\dot\gamma_{lj}\right]-\end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{ik}+\gamma_{ik})\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(\gamma_{jl,\sigma}-\gamma_{\sigma j,l}-\gamma_{\sigma l,j})+\frac{a^2}{2}(\delta_{ik}+\gamma_{ik})\times$$

$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^l}-\frac{\partial N_l}{\partial x^m}\right)(a^2\dot{\gamma}_{mj}+2a\dot{a}\gamma_{mj})+\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^m}\right)(2a\dot{a}\gamma_{ml}+a^2\dot{\gamma}_{ml})\right]-\frac{a^2}{2}(\delta_{ik}+\gamma_{ik})\times$$

$$\frac{N^n}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{lj,n}+\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{ln,j}-\frac{5a\dot{a}}{2}\gamma_{nj,l}-3a\dot{a}\gamma_{nl,j}+a\dot{a}\gamma_{jn,l}+2a\dot{a}\gamma_{jl,n}+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{jn,l}+\dot{\gamma}_{nl,j}-2\dot{\gamma}_{jl,n})\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{il}+\gamma_{il})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jk}+\delta_{jk})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jk}-3\dot{a}^2\gamma_{kj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{il}+\gamma_{il})\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(\gamma_{jk,\sigma}-\gamma_{\sigma j,k}-\gamma_{\sigma k,j})-\frac{a^2}{2}(\delta_{il}+\gamma_{il})\times$$

$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^k}-\frac{\partial N_k}{\partial x^m}\right)(a^2\dot{\gamma}_{mj}+2a\dot{a}\gamma_{mj})+\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^j}-\frac{\partial N_j}{\partial x^m}\right)(2a\dot{a}\gamma_{mk}+a^2\dot{\gamma}_{mk})\right]+\frac{a^2}{2}(\delta_{il}+\gamma_{il})\times$$

$$\frac{N^n}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{kj,n}+\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{kn,j}-\frac{5a\dot{a}}{2}\gamma_{nj,k}-3a\dot{a}\gamma_{nk,j}+a\dot{a}\gamma_{jn,k}+2a\dot{a}\gamma_{jk,n}+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{jn,k}+\dot{\gamma}_{nk,j}-2\dot{\gamma}_{jk,n})\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{jk}+\gamma_{jk})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{il}+\delta_{il})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{il}-3\dot{a}^2\gamma_{li}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{li}\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{jk}+\gamma_{jk})\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(\gamma_{il,\sigma}-\gamma_{\sigma i,l}-\gamma_{\sigma l,i})-\frac{a^2}{2}(\delta_{jk}+\gamma_{jk})\times$$

$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^l}-\frac{\partial N_l}{\partial x^m}\right)(a^2\dot{\gamma}_{mi}+2a\dot{a}\gamma_{mi})+\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^m}\right)(2a\dot{a}\gamma_{ml}+a^2\dot{\gamma}_{ml})\right]+\frac{a^2}{2}(\delta_{jk}+\gamma_{jk})\times$$

$$\frac{N^n}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{li,n}+\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{ln,i}-\frac{5a\dot{a}}{2}\gamma_{ni,l}-3a\dot{a}\gamma_{nl,i}+a\dot{a}\gamma_{in,l}+2a\dot{a}\gamma_{il,n}+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,l}+\dot{\gamma}_{nl,i}-2\dot{\gamma}_{il,n})\right]-$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{jl}+\gamma_{jl})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ik}+\delta_{ik})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik}-3\dot{a}^2\gamma_{ki}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right]-$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{jl}+\gamma_{jl})\frac{\dot{a}N_\sigma}{2aN^2}(\gamma_{ik,\sigma}-\gamma_{\sigma i,k}-\gamma_{\sigma k,i})+\frac{a^2}{2}(\delta_{jl}+\gamma_{jl})\times$$

$$\frac{3}{4a^2N^2}\left[\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^k}-\frac{\partial N_k}{\partial x^m}\right)(a^2\dot{\gamma}_{mi}+2a\dot{a}\gamma_{mi})+\left(\frac{\partial N_m}{\partial x^i}-\frac{\partial N_i}{\partial x^m}\right)(2a\dot{a}\gamma_{mk}+a^2\dot{\gamma}_{mk})\right]-\frac{a^2}{2}(\delta_{jl}+\gamma_{jl})\times$$

$$\frac{N^n}{N^2}\left[\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{ki,n}+\frac{3a\dot{a}}{2}\gamma_{kn,i}-\frac{5a\dot{a}}{2}\gamma_{ni,k}-3a\dot{a}\gamma_{nk,i}+a\dot{a}\gamma_{in,k}+2a\dot{a}\gamma_{ik,n}+\frac{a^2}{2}(\dot{\gamma}_{in,k}+\dot{\gamma}_{nk,i}-2\dot{\gamma}_{ik,n})\right]+$$

$$\frac{a^4}{6}\left[-\frac{3}{N^2a^4}\left(\frac{\partial N_k}{\partial x^m}-\frac{\partial N_m}{\partial x^k}\right)(a^2\dot{\gamma}_{km}+2a\dot{a}\gamma_{km})+\frac{6\ddot{a}}{aN^2}-\frac{12}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\times$$

$$(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{ik}\gamma_{jl}+\delta_{jl}\gamma_{ik}-\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{jk}\gamma_{il}-\delta_{il}\gamma_{jk})=\frac{a^2}{2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{ik}+\gamma_{ik})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jl}+\delta_{jl})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jl}-3\dot{a}^2\gamma_{lj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{il}+\gamma_{il})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jk}+\delta_{jk})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jk}-3\dot{a}^2\gamma_{kj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{jk}+\gamma_{jk})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{il}+\delta_{il})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{il}-3\dot{a}^2\gamma_{li}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{li}\right]-$$

$$\frac{a^2}{2}(\delta_{jl}+\gamma_{jl})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ik}+\delta_{ik})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik}-3\dot{a}^2\gamma_{ki}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right]+$$

$$\frac{a^4}{6}\left[\frac{6\ddot{a}}{aN^2}-\frac{12}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{ik}\gamma_{jl}+\delta_{jl}\gamma_{ik}-\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{jk}\gamma_{il}-\delta_{il}\gamma_{jk})$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
W^{ij}_{kl} =&\frac{1}{a^4}(W_{ijkl}-\gamma^{j\tau}W_{i\tau kl}-\gamma^{i\theta}W_{\theta jkl})=\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-\\
&\frac{1}{2a^2}(\delta_{ik}+\gamma_{ik})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jl}+\delta_{jl})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jl}-3\dot{a}^2\gamma_{lj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+\\
&\frac{1}{2a^2}(\delta_{il}+\gamma_{il})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jk}+\delta_{jk})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jk}-3\dot{a}^2\gamma_{kj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+\\
&\frac{1}{2a^2}(\delta_{jk}+\gamma_{jk})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{il}+\delta_{il})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{il}-3\dot{a}^2\gamma_{li}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{li}\right]-\\
&\frac{1}{2a^2}(\delta_{jl}+\gamma_{jl})\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ik}+\delta_{ik})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik}-3\dot{a}^2\gamma_{ki}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right]+\\
&\frac{1}{6}\left[\frac{6\ddot{a}}{aN^2}-\frac{12}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{ik}\gamma_{jl}+\delta_{jl}\gamma_{ik}-\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{jk}\gamma_{il}-\delta_{il}\gamma_{jk})+\\
&\frac{\gamma^{j\tau}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{ik}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{\tau l}-\frac{\gamma^{j\tau}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{il}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{\tau k}-\frac{\gamma^{j\tau}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{\tau k}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{il}+\\
&\frac{\gamma^{j\tau}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{\tau l}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{ik}-\frac{\gamma^{j\tau}}{a^4}\frac{a^4}{6}\left[\frac{6\ddot{a}}{aN^2}-\frac{12}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{ik}\delta_{\tau l}-\delta_{\tau k}\delta_{il})+\\
&\frac{\gamma^{i\theta}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{\theta k}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jl}-\frac{\gamma^{i\theta}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{\theta l}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jk}-\frac{\gamma^{i\theta}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{jk}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{\theta l}+\\
&\frac{\gamma^{i\theta}}{a^4}\frac{a^2}{2}\delta_{jl}\frac{1}{N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{\theta k}-\frac{\gamma^{i\theta}}{a^4}\frac{a^4}{6}\left[\frac{6\ddot{a}}{aN^2}-\frac{12}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{\theta k}\delta_{jl}-\delta_{jk}\delta_{\theta l})=\\
&\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{ik}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jl}+\delta_{jl})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jl}-3\dot{a}^2\gamma_{lj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{il}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jk}+\delta_{jk})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jk}-3\dot{a}^2\gamma_{kj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{jk}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{il}+\delta_{il})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{il}-3\dot{a}^2\gamma_{li}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{li}\right]-$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{jl}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ik}+\delta_{ik})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik}-3\dot{a}^2\gamma_{ki}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right]+$$

$$\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2}-\frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{ik}\gamma_{jl}+\delta_{jl}\gamma_{ik}-\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{jk}\gamma_{il}-\delta_{il}\gamma_{jk})+\frac{\gamma^{jl}}{2a^2N^2}\delta_{ik}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)-$$

$$\frac{\gamma^{jk}}{2a^2N^2}\delta_{il}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)-\frac{\gamma^{jk}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{il}+\frac{\gamma^{jl}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{ik}-\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2}-\frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{ik}\gamma^{jl}-\gamma^{jk}\delta_{il})+$$

$$\frac{\gamma^{ik}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jl}-\frac{\gamma^{il}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jk}-\frac{\gamma^{il}}{2a^2N^2}\delta_{jk}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)+\frac{\gamma^{ik}}{2a^2N^2}\delta_{jl}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)-$$

$$\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2}-\frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\gamma^{ik}\delta_{jl}-\delta_{jk}\gamma^{il})-\frac{\gamma_{ik}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jl}+\frac{\gamma_{il}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jk}+\frac{\gamma_{jk}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{il}-$$

$$\frac{\gamma_{jl}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{ik}=\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{ik}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jl}+\delta_{jl})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jl}-3\dot{a}^2\gamma_{lj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{il}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{jk}+\delta_{jk})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jk}-3\dot{a}^2\gamma_{kj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{jk}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{il}+\delta_{il})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{il}-3\dot{a}^2\gamma_{li}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{li}\right]-$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{jl}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)(\gamma_{ik}+\delta_{ik})+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik}-3\dot{a}^2\gamma_{ki}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right]+$$

$$\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2}-\frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{jk}\delta_{il})+\frac{\gamma_{jl}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{ik}-\frac{\gamma^{jk}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{il}-$$

$$\frac{\gamma_{il}}{2a^2N^2}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jk}+\frac{\gamma^{ik}}{2a^2N^2}\delta_{jl}(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)=\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{ik}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jl}+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jl}-3\dot{a}^2\gamma_{lj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{il}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{jk}+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jk}-3\dot{a}^2\gamma_{kj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{jk}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{il}+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{il}-3\dot{a}^2\gamma_{li}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{li}\right]-$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{jl}\frac{1}{N^2}\left[(a\ddot{a}-2\dot{a}^2)\delta_{ik}+\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik}-3\dot{a}^2\gamma_{ki}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right]+\left[\frac{\ddot{a}}{aN^2}-\frac{2}{N^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right](\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{jk}\delta_{il})=$$

$$\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-\frac{1}{2a^2}\delta_{ik}\left[\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jl}-3\dot{a}^2\gamma_{lj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{il}\left[\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{jk}-3\dot{a}^2\gamma_{kj}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+\frac{1}{2a^2}\delta_{jk}\left[\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{il}-3\dot{a}^2\gamma_{li}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{li}\right]-$$

$$\frac{1}{2a^2}\delta_{jl}\left[\frac{a^2}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{a\dot{a}}{2}\dot{\gamma}_{ik}-3\dot{a}^2\gamma_{ki}-\frac{3}{2}a\dot{a}\dot{\gamma}_{ki}\right]=\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-$$

$$\frac{1}{2}\delta_{ik}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{jl}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{lj}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+\frac{1}{2}\delta_{il}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{jk}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{kj}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+$$

$$\frac{1}{2}\delta_{jk}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{il}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{li}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{li}\right]-\frac{1}{2}\delta_{jl}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{ik}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{ki}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{ki}\right]=$$

$$\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-\frac{\delta_{ik}}{2}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{jl}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{jl}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{lj}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{lj}\right]+$$

$$\frac{\delta_{il}}{2}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{jk}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{jk}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{kj}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{kj}\right]+\frac{\delta_{jk}}{2}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{il}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{il}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{li}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{li}\right]-$$

$$\frac{\delta_{jl}}{2}\left[\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{ik}+\frac{\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{ik}-3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\gamma_{ki}-\frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\gamma}_{ki}\right]=\frac{1}{2a^2}(\gamma_{il,jk}+\gamma_{jk,il}-\gamma_{ik,jl}-\gamma_{jl,ik})-$$

$$\frac{\delta_{ik}}{4}\left[\ddot{\gamma}_{jl}+H\dot{\gamma}_{jl}-\frac{\nabla^2}{a^2}\gamma_{jl}\right]+\frac{\delta_{il}}{4}\left[\ddot{\gamma}_{jk}+H\dot{\gamma}_{jk}-\frac{\nabla^2}{a^2}\gamma_{jk}\right]+\frac{\delta_{jk}}{4}\left[\ddot{\gamma}_{il}+H\dot{\gamma}_{il}-\frac{\nabla^2}{a^2}\gamma_{il}\right]-$$

$$\frac{\delta_{jl}}{4}\left[\ddot{\gamma}_{ik}+H\dot{\gamma}_{ik}-\frac{\nabla^2}{a^2}\gamma_{ik}\right]$$

Άρα τελικά

$$W^{\mu\nu}_{\rho\sigma}W^{\rho\sigma}_{\mu\nu}=4W^{0i}_{0j}W^{0j}_{0i}+4W^{0i}_{jk}W^{jk}_{0i}+W^{ij}_{kl}W^{kl}_{ij}=2\left(\ddot{\gamma}_{ij}+H\dot{\gamma}_{ij}+\frac{\nabla^2}{a^2}\gamma_{ij}\right)^2+4\dot{\gamma}_{ij}\frac{\nabla^2}{a^2}\dot{\gamma}_{ij}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μετατρέπει την tensor consistency condition στην

$$-\frac{8n_t}{r}=1\mp\frac{4b}{\sqrt{2\epsilon}}\frac{H^2}{M^2}$$

όπου b μία αδιάστατη σταθερά, η οποία έχει άμεση σχέση με τη ζεύξη inflaton-Weyl^2.

Παρατηρούμε ότι η παραβίαση της tensor consistency condition $n_t = -\frac{r}{8}$ ¨δυναμώνει¨ όσο πιο μικρό είναι το ϵ και όσο πιο μεγάλο είναι το b, αλλά ¨εξασθενεί¨ λόγω του παράγοντα $\frac{H^2}{M^2}$. Στην περιοχή του inflation το πηλίκο αυτό μπορεί να παίρνει την τιμή 1, πράγμα που σημαίνει ότι η τροποποίηση του tensor spectrum πλέον αποτελεί σημαντικό γεγονός.

Συμπεράσματα

Η θεωρία του inflation λοιπόν, είδαμε ότι αφορά στην αυτο-αναπαραγωγή του σύμπαντος από μία μικρή ομοιογενή περιοχή και στη δημιουργία πολύπλοκων δομών σε πολύ μεγάλες κλίμακες. Αυτά που πετυχαίνει σε μεγάλο βαθμό η θεωρία αυτή είναι :

- να δώσει ικανοποιητική λύση στα προβλήματα που προκύπτουν από τη θεωρία της μεγάλης έκρηξης
- ότι προβλέπει ουσιαστικά την ύπαρξη ενός ¨στοιχείου¨ dark matter ή dark energy ή συνδιασμού τους
- ότι εξηγεί την προέλευση των μη γραμμικών δομών στο σύμπαν με βάση τα quantum fluctuations του inflaton
- ότι το spectrum των perturbations είναι σε μεγάλο βαθμό σύμφωνο με τα πρόσφατα δεδομένα
- ότι προβλέπει την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων

Γι' αυτό το λόγο είναι ευρέως διαδεδομένη στην επιστημονική κοινότητα.

Στη συνέχεια, μελετήθηκε το coupling του Weyl^2 tensor με το inflaton, ώστε να βρεθεί η διόρθωση στο tilt του tensor power spectrum. Εν τέλει, παραβιάζεται η tensor consistency condition, η οποία έρχεται στη μορφή

$$-\frac{8n_t}{r} = 1 \mp \frac{4b}{\sqrt{2\epsilon}} \frac{H^2}{M^2}$$

Είναι σημαντικό το γεγονός ότι έρχεται σε μία τέτοια μορφή, καθώς υπολογίζοντας πειραματικά το δεξί μέλος, μπορεί να μετρηθεί το r που ουσιαστικά αντικατοπτρίζει την ¨ποσότητα¨ των βαρυτικών κυμάτων.

Βιβλιογραφία

[1] V. Mukhanov
Physical Foundations of COSMOLOGY, Cambridge University Press (2005).

[2] A. Riotto
Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations,
arxiv.org/abs/hep-ph/0210162.

[3] Daniel Baumann, Hayden Lee, Guilherme L. Pimentel
High-Scale Inflation and the Tensor Tilt,
arxiv.org/abs/1507.07250.