



ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ Ιούνιος 2025 – Κ. Αναγνωστόπουλος

ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε κάθε θέμα σε ξεχωριστές κόλλες.

Καμπύλες (15 βαθμοί)

Δίνεται η μετρική Minkowski της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1)$$

και η καμπύλη

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= R \cos \omega \lambda \\ y(\lambda) &= R \sin \omega \lambda \\ z(\lambda) &= 0 \\ t(\lambda) &= v \lambda \end{aligned}$$

όπου $-\infty < \lambda < +\infty$ και v, ω, R θετικές σταθερές.

Να γράψετε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα v, ω, R , έτσι ώστε η καμπύλη να είναι χρονοειδής.

Να υπολογίσετε το μέτρο του χωροχρονικού μήκους της καμπύλης $\int |ds|$ από το γεγονός $\lambda = 0$ σαν συνάρτηση του λ .

Υποθέτοντας ότι η καμπύλη είναι χρονοειδής, να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $x^\mu(\tau)$ που περνάει από τα ίδια γεγονότα, αλλά έχει παράμετρο τον ιδιόχρονο τ .

Να υπολογίσετε το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $x^\mu(\lambda)$ και της $x^\mu(\tau)$.

Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο στην ΕΘΣ (25 βαθμοί)

Οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού ταυυστή ορίζονται από τη σχέση

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2)$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F_{i0} &= E_i \\ F_{ij} &= \epsilon_{ijk} B_k, \end{aligned} \quad (3)$$

όπου $i, j, k = 1, 2, 3$ και ϵ_{ijk} το 3-διάστατο πλήρες αντισυμμετρικό σύμβολο με $\epsilon_{123} = 1$.

Να υπολογίσετε τις μη-μηδενικές συνιστώσες του $F_{\mu\nu}$ συναρτήσει των συνιστωσών των εντάσεων E_i και B_i .

Να υπολογίσετε τις μη-μηδενικές συνιστώσες του $\tilde{F}_{\mu\nu}$ συναρτήσει των συνιστωσών των εντάσεων E_i και B_i , όπου

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\rho\lambda}, \quad (4)$$

και $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ το 4-διάστατο πλήρες αντισυμμετρικό σύμβολο με $\epsilon_{0123} = 1$.

Να υπολογίσετε τα βαθμωτά πεδία $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$, συναρτήσει των συνιστωσών των εντάσεων E_i και B_i .

Δίνεται η σχέση $\epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$.

Το Σύμπαν του Gödel (30 βαθμοί)

Θεωρήστε τη μετρική στο σύμπαν του Gödel

$$ds^2 = -dt^2 - 2\frac{r^2}{\sqrt{2}a}dtd\phi + \frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2} + r^2 \left[1 - \left(\frac{r}{2a}\right)^2 \right] d\phi^2 + dz^2. \quad (5)$$

Θεωρήστε σωματίδιο μη μηδενικής μάζας ηρεμίας με κοσμική γραμμή

$$\begin{aligned} t(\tau) &= 0 & r(\tau) &= R \\ \phi(\tau) &= \omega \tau & z(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

όπου $R > 2a$, ω είναι σταθερές και τ ο ιδιόχρονος του σωματιδίου.

Να δείξετε ότι η κλειστή αυτή καμπύλη είναι παντού χρονοειδής.

Να δείξετε ότι η παραπάνω καμπύλη δεν είναι γεωδαισιακή.

Να δείξετε ότι το διάνυσματικό πεδίο $\xi_2 = \partial_\phi$ είναι Killing Vector Field και να υπολογίσετε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα k_2 πάνω σε μία γεωδαισιακή.

Δίνονται τα ανεξάρτητα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel:

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{r}{2a^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2}, \quad \Gamma_{\phi r}^t = \frac{r^3}{4\sqrt{2}a^3} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2}, \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{r}{4a^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2}, \quad (6)$$

$$\Gamma_{\phi t}^r = \frac{r}{\sqrt{2}a} \left(1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2 \right), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = r \left(1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2 \right) \left(2 \left(\frac{r}{2a}\right)^2 - 1 \right), \quad (7)$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2}, \quad \Gamma_{rt}^\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}ar} \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2}. \quad (8)$$

Μετρική Schwarzschild/Καμπυλότητα (30 βαθμοί)

Δίνεται η μετρική Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (9)$$

και οι ανεξάρτητες μη-μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Riemann της:

$$R_{0101} = -\frac{2M}{r^3} \quad R_{0202} = \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (10)$$

$$R_{1212} = -\frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \quad R_{0303} = \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \sin^2\theta \quad (11)$$

$$R_{1313} = -\frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \sin^2\theta \quad R_{2323} = 2Mr \sin^2\theta. \quad (12)$$

Θεωρήστε την ορθοκανονική βάση $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, όπου

$$\hat{e}_\mu = |g_{\mu\mu}|^{-1/2} \partial_\mu, \quad (\text{τα } \mu \text{ δεν αθροίζονται}). \quad (13)$$

Να υπολογίσετε τις ανεξάρτητες μη-μηδενικές συνιστώσες $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}$. Τι συμβαίνει όταν $r = 2M$; Στον υπολογισμό που θα κάνετε, μπορείτε να υποθέσετε ότι $r > 2M$.

Θεωρώντας τον αδρανειακό παρατηρητή με τετραταχύτητα $u = \hat{e}_0$, να υπολογίσετε το δεξί μέλος των εξισώσεων γεωδαισιακής απόκλισης:

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\mu}}}{d\tau^2} = R^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\sigma}} u^{\hat{\nu}} u^{\hat{\lambda}} \xi^{\hat{\sigma}}. \quad (14)$$