

Θ.Ε. Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες
Θέματα* Τελικών Εξετάσεων στις «Εισαγωγικές Έννοιες Μαθηματικών»
Ιούλιος 2002

Θέμα 1^ο

α) Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} (1-\lambda)x - 2\lambda y &= 2 \\ 2\lambda x + (\lambda-1)y &= \lambda - 4 \end{aligned} \right\} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το σύστημα έχει μία μοναδική λύση (x_1, y_1) , για την οποία ισχύει η σχέση: $(x_1 + y_1) > 1$.

β) Δίνεται ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι $A^2 = 7I_2$ (όπου I_2 ο μοναδιαίος πίνακας 2×2) και υπολογίστε τον A^{20} .

Θέμα 2^ο

α) Θ εωρείστε τα σημεία A, B και Γ με συντεταγμένες $\{\lambda, \mu\}$, $\{\mu, -\lambda\}$ και $\{-\mu, \lambda\}$ αντίστοιχα. Εάν O είναι η αρχή του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων να δείξετε ότι :

I. τα διανύσματα \vec{OB} και \vec{OG} είναι αντίθετα

II. τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{AG} είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν τα μέτρα τους ίσα.

β) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}\{2,3\}$, $\vec{\beta}\{-1,-2\}$. Να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ώστε να ισχύουν οι τρεις ακόλουθες σχέσεις: $\vec{\alpha} = \vec{\gamma} - \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} // \vec{\beta}$, $\vec{\delta} \perp \vec{\alpha}$

Θέμα 3^ο

α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 + \lambda \cdot x + 1}}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το \mathbb{R} .

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 3 + \sqrt{x-4}$. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών της f, η αντίστροφη συνάρτηση της f (εάν υπάρχει) καθώς και τα πεδία ορισμού και τιμών της.

Θέμα 4^ο

α) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{I. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1}, \quad \text{II. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}, \quad \text{III. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{εάν } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

β) Να βρεθούν οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(\sqrt{3 - x^2})$$

γ) Το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου δίνεται συναρτήσει της μεταβλητής t από την διανυσματική συνάρτηση: $\vec{r}(t) = (\cos t - 1) \cdot \vec{i} + (2\sin t + 1) \cdot \vec{j}$

(όπου τα σύμβολα \vec{i}, \vec{j} παριστούν τα μοναδιαία διανύσματα του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων)

Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσματικών συναρτήσεων, $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ και $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$, για $t=5\pi/6$ και $t=5\pi/3$. Πότε το μέτρο της $\vec{V}(t)$ γίνεται μέγιστο και πότε ελάχιστο και ποια η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του;

Θέμα 5^ο

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx, \quad \beta) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx, \quad \gamma) \int \frac{x dx}{x^2 - 3x - 4}$$

Καλή Επιτυχία

* Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Επίσης, τα υπο-ερωτήματα κάθε θέματος είναι βαθμολογικά ισοδύναμα μεταξύ τους