1^{η} ΕΡΓΑΣΙΑ

1. **(5 βαθμοί)**

   (a) Αποδείξτε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε περιττού αριθμού n είναι και αυτός περιττός αριθμός $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Αποδείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

   (c) Αποδείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

2. **(5 βαθμοί)**

   (a) Αποδείξτε την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

   (b) Αποδείξτε ότι αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη–συγγραμικά διανύσματα και $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ με x, y πραγματικούς αριθμούς, συνεπάγεται $x = y = 0$.

   (c) Προσδιορίστε το διάνυσμα με αρχή $P(x_1, y_1, z_1)$ και τέλος $Q(x_2, y_2, z_2)$ και υπολογίστε το μέτρο του.

3. **(10 βαθμοί)**

   (a) Αν οι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, να αποδείξετε οτι $x_1^3 + x_2^3 = (3\beta\gamma/\alpha^2) - (\beta/\alpha)^3$. Υπενθυμίζουμε την γνωστή ταυτότητα $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$.

   (b) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγουμένου ερωτήματος βρείτε την τιμή του λ στην εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda$, έτσι ώστε $x_1^3 + x_2^3 = 2$.

   (c) Προσδιορίστε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 = 0$ να έχει ρίζα το -1.

4. **(10 βαθμοί)** Δίνονται τα παρακάτω διανύσματα:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= -6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \\
\vec{b} &= 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \\
\vec{c} &= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}
$$

   Βρείτε τα παρακάτω:

(a) Δείξτε ότι τα $\vec{b}$ και $\vec{c}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

(b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

(c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

(d) $\vec{a} \times \vec{b}$

(e) την γωνία μεταξύ $\vec{a}$ και $\vec{b}$

(f) τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\vec{b}$ (συνημίτονα γωνιών α,β,γ που σχηματίζει το $\vec{b}$ με τους αξονες x, y, z).

(g) την επιφάνεια του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(h) τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$.

(i) Πως θα συμπεραίνατε ότι τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ είναι συνεπίπεδα;

5. **(5 βαθμοί)** Βρείτε τη γωνία μεταξύ της διαγωνίου ενός κύβου και της διεύθυνσης της διαγωνίου μιας από τις έδρες του.

6. **(15 βαθμοί)** Χρησιμοποιήστε τους πίνακες A, B, C, D για να εκτελέσετε τις πράξεις που δίνονται αν αυτές είναι δυνατές.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $4C$

(b) AD

(c) DA

(d) BC

(e) $3CB$

(f) $C(A + B)$

(g) AB

(h) BA

(i) CAD

(j) DBC

(k) $AD + (CB)^{\mathrm{T}}$

(l) DC

(m) CD

7. **(5 βαθμοί)** Εστω $A_1, A_2, \ldots A_n$ τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι N×N πίνακες. Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής $\forall n \in \mathbb{N}$:

   (a) $(A_1 A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$

   (b) $\det(A_1 A_2 \ldots A_n) = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_n$

   (c) $[(A_1 A_2)^n]^{-1} = (A_2^{-1} A_1^{-1})^n$

8. **(10 βαθμοί)** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \hat{i}$, $\vec{OB} = \hat{i} + \hat{j}$ και $\vec{OC} = (1-\lambda)\hat{i} + \lambda\hat{j}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Υπολογίστε το εμβαδόν Ε(λ) του τριγώνου ABC.

(b) Ζωγραφίστε σε χαρτί μιλλιμετρέ το τρίγωνο ABC για κάθε μια από τις παρακάτω τιμές του λ:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$
- $\lambda_3 = \frac{3}{2}$
- $\lambda_4 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$
- $\lambda_5 = 3$

(c) Για ποιά τιμή του λ μηδενίζεται το Ε(λ); Γιατί γίνεται αυτό;

(d) Κάνετε την γραφική παράσταση του Ε(λ) για $\lambda \in [-1, 4]$.

(e) Εστω η συνάρτηση $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με Ε(λ) το εμβαδόν του τριγώνου ABC. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση είναι 1–1 και επί. Να βρεθούν οι κατάλληλοι περιορισμοί της Ε που είναι αντιστρέψιμοι (πεδίο ορισμού, τιμών και τύπος που δίνει τις τιμές της συνάρτησης). Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις τους.

9. **(10 βαθμοί)** Δίνονται τα παρακάτω διανύσματα με $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= (1-\lambda)\,\hat{i} + (2-2\lambda)\,\hat{j} + (1-\lambda)\,\hat{k} \\
\vec{b} &= (-6+3\lambda)\,\hat{i} + (-2+\lambda)\,\hat{j} \\
\vec{c} &= \hat{i} + 2\,\hat{j} - \hat{k}
\end{aligned}
$$

(a) Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου $V(\lambda)$ που ορίζεται από τα παραπάνω διανύσματα.

(b) Να βρεθεί για ποιές τιμές του λ ο όγκος $V(\lambda)$ μηδενίζεται και να εξηγηθεί γεωμετρικά για πιό λόγο γίνεται.

(c) Να υπολογιστούν τα διανύσματα $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$.

(d) Να βρεθούν οι τιμές του λ (αν υπάρχουν) για τις οποίες όλα τα διανύσματα $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο xy.

10. **(15 βαθμοί)** Δίνονται οι παρακάτω πίνακες:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\det(A_1 A_2^{-1}) = \frac{1}{\det(A_1^{-1} A_2)} = \frac{\det A_1}{\det A_2}$$

και αναλόγως για τους πίνακες B_1, B_2 κάνοντας ρητά τις πράξεις σε κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια δείξτε ότι οι σχέσεις αυτές ισχύουν όταν τα B_1, B_2 είναι $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ αντιστρέψιμοι πίνακες χρηοιμοποιώντας τις γενικές σχέσεις που βρίσκονται στο βιβλίο σας.

11. **(10 βαθμοί)** Δίνεται το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων με $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(-2+3\lambda-\lambda^2)x + (4-6\lambda+2\lambda^2)y + (6-9\lambda+3\lambda^2)z + (-4+6\lambda-2\lambda^2)w &= 1 \\
y + z + 2w &= 0 \\
3x - 4y - 2z + w &= 2 \\
-\frac{4}{\lambda-1}x + \frac{2}{\lambda-1}y + \frac{4}{\lambda-1}z + \frac{8}{\lambda-1}w &= -1
\end{aligned}$$

(a) Για ποιές τιμές του λ το σύστημα έχει λύση;

(b) Να υπολογίσετε τις λύσεις αυτές.