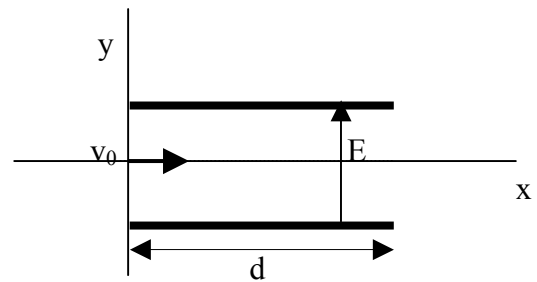


Θέμα 1

A) Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται κατά μήκος του άξονα που περνά από το μέσο οριζοντίων πλακιδίων μήκους $d=4 \text{ cm}$ με αρχική ταχύτητα $v_0=8 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Ανάμεσα από τα πλακίδια υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με ένταση $E=6 \cdot 10^3 \text{ N/C}$ με κατεύθυνση προς τα πάνω όπως δείχνει το σχήμα.

α) Να βρεθεί η κατακόρυφη απομάκρυνση του ηλεκτρονίου από τον άξονα εκτόξευσης όταν φθάσει στο τέλος των πλακιδίων.

β) Ποια είναι η ταχύτητά του όταν φθάσει στο τέλος των πλακιδίων; (50%)



B) Η ένταση του γήινου ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια της γης, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σφαιρική με ακτίνα $R=3458 \text{ km}$ είναι περίπου 130 N/C και διευθύνεται ακτινικά προς τα έξω. Πόσο είναι το φορτίο της γης υποθέτοντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο προκαλείται από αυτό; (50%)

Λύση

A) Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων x-y με x τον άξονα που περνά από το μέσο πλακιδίων και αρχή το σημείο όπου βρίσκεται το ηλεκτρόνιο αρχικά. Τότε η δύναμη που θα ασκηθεί στο ηλεκτρόνιο είναι $\vec{F} = e\vec{E} = eE\hat{j}$ όπου e το φορτίο του ηλεκτρονίου. Επομένως η επιτάχυνση είναι

$\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m} = \frac{eE}{m}\hat{j}$ όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου. Δηλαδή στον άξονα x η κίνηση του ηλεκτρονίου είναι ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα v_0 ενώ στον άξονα y ομαλά επιταχυνόμενη.

α) Το ηλεκτρόνιο θα φθάσει στο τέλος των πλακιδίων σε χρόνο $\tau=d/v_0$ και το διάστημα που θα έχει

διανύσει στον άξονα y θα είναι $\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a}\tau^2 = \frac{eE\tau^2}{2m}\hat{j} = \frac{eEd^2}{2mv_0^2}\hat{j} = -1.32\hat{j}(m)$. Το αρνητικό

πρόσημο σημαίνει ότι θα έχει κινηθεί προς τα κάτω.

β) Η x συνιστώσα της ταχύτητας είναι $\vec{v}_x = \vec{v}_0 = v_0\hat{i}$ ενώ η y συνιστώσα είναι

$\vec{v}_y = \vec{a}\tau = \frac{eEd}{mv_0}\hat{j}$ δηλαδή η ταχύτητα όταν φθάσει στο τέλος των πλακιδίων θα είναι $(v_0, \frac{eEd}{mv_0})$

B) Αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια Gauss με κέντρο το κέντρο της Γης και ακτίνα ίση με R τότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια αυτή με σταθερό μέτρο και διεύθυνση προς τα έξω. Επομένως η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια είναι $\Phi=E4\pi R^2$ και θα ισούται με το συνολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια δηλαδή το φορτίο που υπάρχει στη Γη διαιρεμένο με ϵ_0 . Επομένως το φορτίο της Γης είναι $Q = \epsilon_0 E 4\pi R^2 = 172880 \text{ C}$

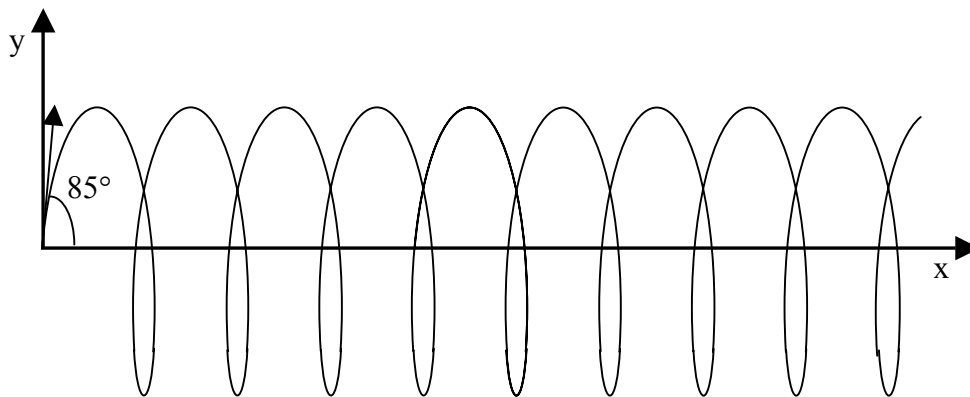
Θέμα 2

A) Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο εντάσεως ίσης με 0.150 T έχει διεύθυνση προς τα θετικά x . Ένα πρωτόνιο με ταχύτητα μέτρου $v=5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ μπαίνει μέσα στο μαγνητικό πεδίο με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 85° με τον άξονα x . Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων της τροχιάς του που απέχουν χρονικά μία περίοδο. (70%)

B) Συρμάτινο κυκλικό πλαίσιο εμβαδού A βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με το επίπεδο του κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $B=B_0 \sin(\omega t)$ όπου $\omega=300 \text{ s}^{-1}$. Να βρεθεί η έκφραση της ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο πλαίσιο. (30%)

Λύση

A) Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα. Το πρωτόνιο θα κάνει δύο κινήσεις. Μια ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα $v_x = v \cos 85^\circ$ και μια ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο περιστροφής την αρχή των αξόνων επειδή η y συνιστώσα της ταχύτητά του ($v_y = v \sin 85^\circ$) είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο. Επομένως η τροχιά του πρωτονίου είναι μια έλικα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σε μια περίοδο της κυκλικής τροχιάς (T) το πρωτόνιο θα έχει κινηθεί κατά L στον άξονα x . Επειδή η κίνηση στον άξονα x είναι ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ισχύει $L = v \cos 85^\circ T$, ενώ για την κυκλική κίνηση ισχύει

$$qv_y B = m \frac{v_y^2}{R} \Leftrightarrow qB = m \frac{v_y}{R} \Leftrightarrow qB = m \frac{\omega R}{R} \Leftrightarrow \omega = \frac{qB}{m} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$\text{Επομένως } L = v \cos 85^\circ \frac{2\pi m}{qB} = 5 \cdot 10^6 \cdot 0.087 \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 1.672 \cdot 10^{-27}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.15} = 0,19 \text{ m}$$

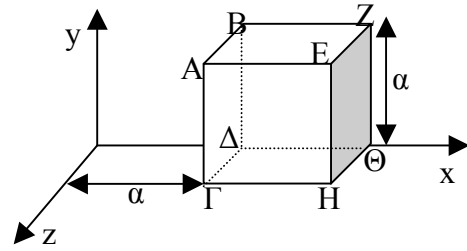
B) Η Ηλεκτρεγερτική δύναμη οφείλεται στη μεταβολή της μαγνητικής ροής που οφείλεται εφόσον η επιφάνεια του πλαισίου δεν αλλάζει, αλλά στην μεταβολή του μέτρου του μαγνητικού πεδίου

$$\text{ΗΕΔ} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\vec{S} \frac{d\vec{B}}{dt} = -300SB_0 \cos(300t) \text{ V}$$

Θέμα 3

A) Κύβος έχει τις ακμές του, μήκους a , παράλληλες στους 3 ορθογώνιους άξονες x, y, z . Η έδρα που είναι παράλληλη στο επίπεδο yz απέχει από αυτό απόσταση a . Στο χώρο υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση $\vec{E} = b\sqrt{x} \hat{i} + c \hat{j}$ όπου b, c σταθερές με μονάδες $NC^{-1}m^{-1/2}$ και NC^{-1} αντίστοιχα.

- α) Βρείτε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από την επιφάνεια του κύβου, και
β) το φορτίο που υπάρχει στο εσωτερικό του κύβου.
(50%)



B) Ένα πρωτόνιο βάλλεται από άπειρη απόσταση, με ταχύτητα μέτρου $v=400$ m/s, προς ακίνητο πυρήνα άνθρακα (που αποτελείται από 6 πρωτόνια και 6 νετρόνια) και διεύθυνση προς το κέντρο του πυρήνα. Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση από τον πυρήνα στην οποία θα φτάσει το πρωτόνιο. Υποθέστε ότι ο πυρήνας παραμένει ακίνητος σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου και ότι έχει αμελητέες διαστάσεις. (50%)

Λύση

A) Η ολική ροή που διέρχεται από το κύβο είναι το άθροισμα των ροών που διέρχονται από κάθε πλευρά του. Τα διανύσματα των 6 επιφανειών του κύβου έχουν μέτρο ίσο με a^2 , διεύθυνση κάθετη στην κάθε πλευρά αντίστοιχα και φορά προς τα έξω της κλειστής επιφάνειας που ορίζουν. Επομένως:

$$S_{AB\Gamma\Delta} = -a^2 \hat{i}, S_{ABZE} = a^2 \hat{j}, S_{EZH\Theta} = a^2 \hat{i}, S_{\Gamma\Delta\Theta H} = -a^2 \hat{j}, S_{AE\Gamma H} = a^2 \hat{k}, S_{BZ\Theta\Delta} = -a^2 \hat{k}$$

Στις πλευρές $AE\Gamma H$ και $BZ\Theta\Delta$ οι ροές είναι μηδέν γιατί δεν υπάρχει συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια.

Στις πλευρές $ABZE$ και $\Gamma\Delta\Theta H$ οι ροές οφείλονται μόνο στην y -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι σταθερή γιατί η x -συνιστώσα αν και έχει διαφορετική τιμή για κάθε σημείο των επιφανειών είναι κάθετη στα διανύσματα των επιφανειών.

Στις πλευρές $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ οι ροές οφείλονται στην x -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου η οποία στην πλευρά $AB\Gamma\Delta$ έχει τιμή $b\sqrt{a}$ ενώ στην πλευρά $EZH\Theta$ έχει τιμή $b\sqrt{2a}$

Επομένως οι ροές είναι:

$$\Phi_{AB\Gamma\Delta} = -a^2 b\sqrt{a}, \Phi_{ABZE} = a^2 c, \Phi_{EZH\Theta} = a^2 b\sqrt{2a}, \Phi_{\Gamma\Delta\Theta H} = -a^2 c, \Phi_{AE\Gamma H} = 0, \Phi_{BZ\Theta\Delta} = 0$$

α) Η συνολική ροή είναι το άθροισμα των επιμέρους ροών δηλαδή

$$\Phi_{ολ} = a^2 b\sqrt{2a} - a^2 b\sqrt{a} = a^2 b\sqrt{a} (\sqrt{2} - 1) NC^{-1}m^2$$

β) Σύμφωνα με το νόμο του Gauss η συνολική ροή είναι $\Phi_{ολ} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ επομένως το φορτίο μέσα στο

κύβο είναι ίσο με $Q = \Phi_{ολ} \epsilon_0$

B) Το φορτίο του πυρήνα του άνθρακα είναι $Q=6|e|$ όπου e το φορτίο του ηλεκτρονίου. Στο πλησιέστερο προς τον πυρήνα σημείο στο οποίο φτάνει το πρωτόνιο, η ταχύτητά του μηδενίζεται. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για το πρωτόνιο από το άπειρο μέχρι το πλησιέστερο σημείο.

$$W_{\infty \rightarrow A} = K_A - K_{\infty} \Leftrightarrow W_{\infty \rightarrow A} = 0 - \frac{1}{2} m_p v^2$$

Όμως $W_{\infty \rightarrow A} = -W_{A \rightarrow \infty} = -V_A e$ όπου V_A το δυναμικό που δημιουργεί ο πυρήνας στο σημείο A. Αν

το σημείο A απέχει απόσταση r από τον πυρήνα θα είναι $V_A = K \frac{Q}{r} = K \frac{6|e|}{r}$

$$\text{Αντικαθιστώντας έχουμε } -K \frac{6e^2}{r} = -\frac{1}{2} m_p v^2 \Leftrightarrow r = \frac{12Ke^2}{m_p v^2} = 10.8 \cdot 10^{-6} m$$