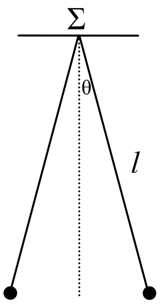
ΦΥΕ14 - ΕΡΓΑΣΙΑ 6

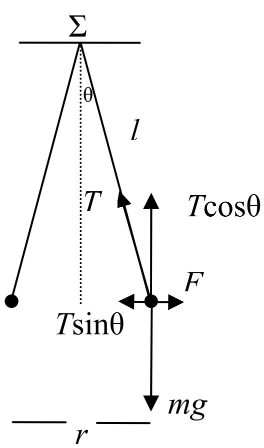
Προθεσμία αποστολής: 4/7/2006

Άσκηση 1

Δύο σφαίρες με ίσες μάζες m είναι δεμένες με νήματα μήκους l από το ίδιο σημείο της οροφής Σ. Αν η κάθε σφαίρα φέρει φορτίο q να βρεθεί η γωνία θ που σχηματίζουν τα νήματα με την κατακόρυφο λόγω της άπωσης των σφαιρών. Υποθέστε ότι οι γωνίες απόκλισης είναι πολύ μικρές οπότε ισχύουν οι προσεγγίσεις $\sin\theta \cong \theta$ και $\cos\theta \cong 1$. Δίνεται η σταθερά του Coulomb K και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



Λύση



Οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο σφαίρες είναι το βάρος mg, η τάση του νήματος T, η οποία αναλύεται στις δύο συνιστώσες $T\cos\theta$ και $T\sin\theta$ αντίστοιχα και η ηλεκτρική απωστική δύναμη

$$F = K\frac{q^2}{r^2} \qquad (1)$$

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των σφαιρών. Οι δύο σφαίρες θα αποκλίνουν από την κατακόρυφο εξαιτίας των απωστικών ηλεκτρικών δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους και τελικά θα ισορροπήσουν στην ίδια γωνία θ από την κατακόρυφο λόγω συμμετρίας. Επίσης

$$\sin\theta = \frac{r/2}{l} \Rightarrow r = 2l\sin\theta \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) προκύπτει:

$$F = K\frac{q^2}{4l^2 \sin^2\theta} \tag{3}$$

Από τις συνθήκες ισορροπίας προκύπτει:

$$F = T\sin\theta \tag{4}$$

$$mg = T\cos\theta \tag{5}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} \overset{(3)}{\Rightarrow} \tan\theta = \frac{Kq^2}{4mgl^2\sin^2\theta} \Rightarrow \tan\theta\sin^2\theta = \frac{Kq^2}{4mgl^2} \Rightarrow$$

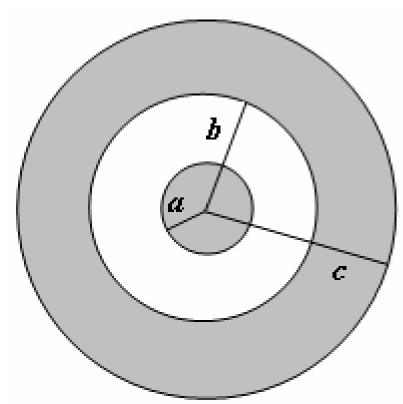
$$\Rightarrow \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} = \frac{Kq^2}{4mgl^2}$$

Επομένως για πολύ μικρές γωνίες απόκλισης η παραπάνω σχέση δίνει

$$\theta^3 \cong \frac{Kq^2}{4mgl^2} \Rightarrow \theta \cong \left(\frac{Kq^2}{4mgl^2}\right)^{1/3}$$

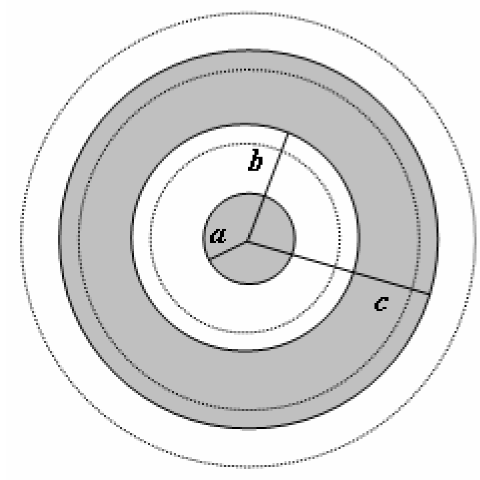
Άσκηση 2

Μία συμπαγής αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a έχει θετικό φορτίο 4Q. Ένα αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c είναι ομόκεντρο με τη σφαίρα και έχει φορτίο –Q. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο. Ποια είναι η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου στην εσωτερική και την εξωτερική επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους; Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_0.



Λύση

Το φορτίο είναι κατανεμημένο με σφαιρική συμμετρία αφού οι δύο σφαίρες είναι ομόκεντρες.



Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Για $r < a$
Γνωρίζουμε ότι στο εσωτερικό ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι μηδέν ($E_1 = 0$), επομένως ολόκληρο το φορτίο $4Q$ της συμπαγούς σφαίρας βρίσκεται στην εξωτερική της επιφάνεια (βλ. Ι. Γκιάλα, Εισαγωγική Φυσική: Ηλεκτρομαγνητισμός, σελ. 53-55).

(ii) Για $a < r < b$
Κατασκευάζουμε μία σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r, η οποία παριστάνεται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή. Η επιφάνεια Gauss περικλείει φορτίο $4Q$ (το φορτίο της εσωτερικής σφαίρας). Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss προκύπτει

$$\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = E_2 4\pi r^2 = \frac{4Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

(iii) Για $b < r < c$
Ομοίως με την περίπτωση (i) το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγώγιμου σφαιρικού κελύφους θα είναι μηδέν ($E_3 = 0$). Επομένως αν θεωρήσουμε μία σφαιρική επιφάνεια Gauss και εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss προκύπτει ότι το συνολικό φορτίο που περικλείεται σε αυτή την επιφάνεια θα είναι μηδέν . Όμως περικλείει ήδη το φορτίο $4Q$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στην εσωτερική επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους πρέπει να εμφανίζεται εξ' επαγωγής φορτίο ίσο με $-4Q$ ώστε να εξουδετερώνει το φορτίο $4Q$ της συμπαγούς σφαίρας. Γνωρίζουμε ότι το συνολικό φορτίο του κελύφους είναι $-Q$. Επομένως στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους εμφανίζεται φορτίο $3Q$ ώστε το άθροισμα των ηλεκτρικών φορτίων της εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας να ισούται με το συνολικό φορτίο του κελύφους.

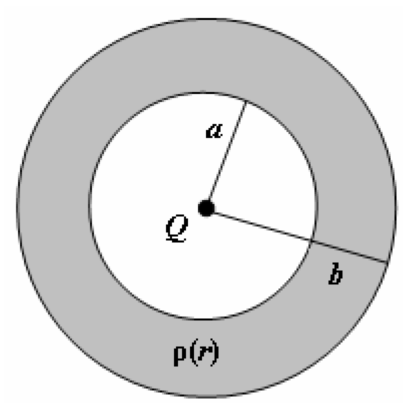
(iv) Για $r > c$

Σε αυτή την περίπτωση η εξωτερική σφαιρική επιφάνεια περικλείει φορτίο $q = 4Q + (-Q) = 3Q$ οπότε σύμφωνα με το νόμο του Gauss

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = E_4 4\pi r^2 = \frac{3Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{r^2}$$

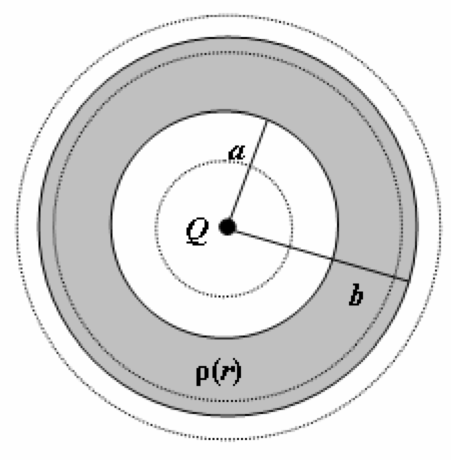
Άσκηση 3

Ένας σφαιρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b είναι φορτισμένος με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho(r) = \mu / r$ (για $a < r < b$), όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο και μ είναι μία σταθερά. Στο κέντρο του φλοιού υπάρχει σημειακό φορτίο Q. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου. Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_0.



Λύση

Επειδή η κατανομή του φορτίου παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία η ένταση $\vec{E}$ έχει ακτινική διεύθυνση. Επιλέγοντας σφαιρική επιφάνεια Gauss και εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στις τρεις ακόλουθες περιοχές του χώρου προκύπτει:



(α) Για $r < a$:
Όπως φαίνεται από το σχήμα το περικλειόμενο φορτίο από την επιφάνεια Gauss, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή, είναι μόνο το σημειακό φορτίο Q. Επομένως

$$\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = E_1 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

(β) Για $a < r < b$: $\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (1)

Το ολικό φορτίο q που περικλείει η επιφάνεια Gauss είναι ίσο με το άθροισμα του σημειακού φορτίου Q και το φορτίο του φλοιού μέχρι ακτίνας $a < r < b$. Επομένως

$$q = Q + \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{2}$$

όπου $\rho(r) = \mu / r$ και για σφαιρική κατανομή $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση συνεχούς κατανομής φορτίου το περικλειόμενο φορτίο δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_V \rho \mathrm{d}V$. Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να επιλυθεί εκφράζοντας το στοιχειώδη όγκο της κατανομής. Συγκεκριμένα το $\mathrm{d}V$ προκύπτει με παραγώγιση ολόκληρου του όγκου. Στην περίπτωση σφαιρικής κατανομής:

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{r}^3 \Rightarrow \mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

όπου $\mathrm{d}V$ είναι ο στοιχειώδης όγκος σφαιρικού φλοιού ακτίνας r και εύρους $\mathrm{d}r$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η (2) γράφεται:

$$q = Q + 4\pi\mu\int_a^r r\mathrm{d}r = Q + 2\pi\mu(r^2 - a^2) \qquad (3)$$

Επομένως από τις (1), (2) και (3) προκύπτει τελικά:

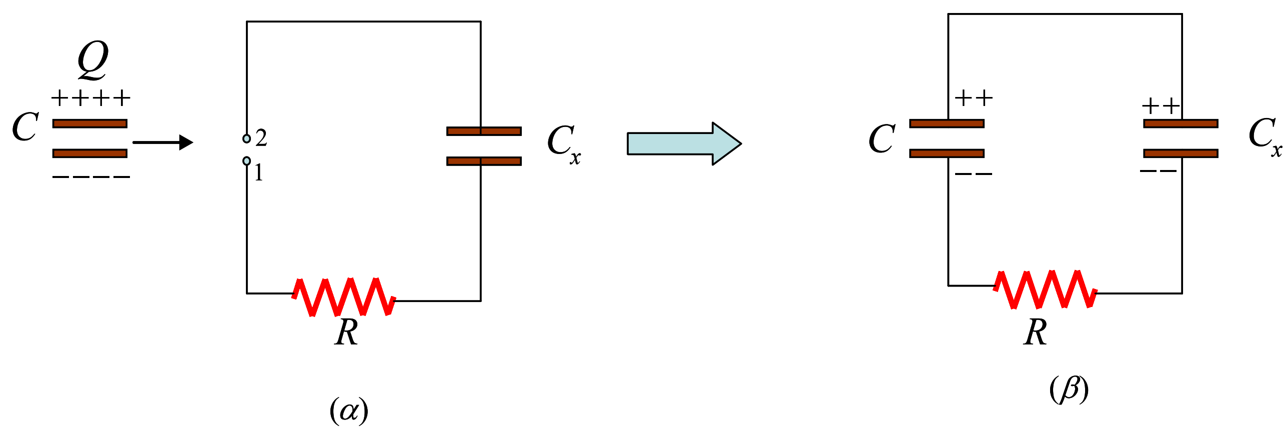
$$E_2 = \frac{Q + 2\pi\mu(r^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(γ) Για $r > b$:

$$\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[Q + 4\pi\mu\int_a^b r\mathrm{d}r\right] \Rightarrow E_3 = \frac{Q + 2\pi\mu(b^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Άσκηση 4

Στους ακροδέκτες 1,2 του κυκλώματος, στο σχήμα (α), που περιλαμβάνει αφόρτιστο πυκνωτή C_x και αντίσταση R, συνδέεται πυκνωτής C που φέρει αρχικά φορτίο Q. Μετά από μια μεταβατική περίοδο το σύστημα έρχεται σε κατάσταση ισορροπίας όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Αν C_x=κC όπου κ γνωστός πολλαπλασιαστικός παράγοντας να βρεθούν ως συνάρτηση των κ,Q,C τα ακόλουθα : (1) Οι τελικές διαφορές δυναμικού μεταξύ των οπλισμών κάθε πυκνωτή, (2) το τελικό φορτίο σε κάθε πυκνωτή, (3) Οι τελικές ενέργειες αποθηκευμένες σε κάθε πυκνωτή , (4) Η ενέργεια που καταναλώθηκε στην αντίσταση R, (5) Σχολιάστε τις περιπτώσεις (3)και (4) στην περίπτωση που $\kappa \to \infty$



Λύση :

Στην κατάσταση ισορροπίας το συνολικό φορτίο Q θα έχει κατανεμηθεί στους δύο πυκνωτές οι οποίοι επειδή είναι συνδεδεμένοι παράλληλα θα έχουν ίδια διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών τους η οποία δίνεται από τη σχέση : $V = \frac{Q}{C + C_x} = \frac{Q}{C + \kappa C} = \frac{Q}{C(1+\kappa)}$

Στην τελική κατάσταση ο πυκνωτής C φέρει φορτίο $Q_1 = VC = \frac{Q}{C(1+\kappa)}C = \frac{Q}{1+\kappa}$ και ο πυκνωτής C_x φέρει φορτίο : $Q_x = VC_x = \frac{Q}{C(1+\kappa)}\kappa C = \frac{Q}{1+\frac{1}{\kappa}}$

Η τελική ενέργεια στον C είναι : $U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{Q}{C(1+\kappa)}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C(1+\kappa)^2}$. Αντίστοιχα η ενέργεια στον C_x είναι $U_{C_x} = \frac{1}{2}C_xV^2 = \frac{1}{2}\kappa C\left(\frac{Q}{C(1+\kappa)}\right)^2 = \frac{\kappa Q^2}{2C(1+\kappa)^2}$

Η ενέργεια U_R που καταναλώθηκε στην αντίσταση ισούται με την αρχική ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στον πυκνωτή C $\left(U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)$ πριν αυτός συνδεθεί στο κύκλωμα, μείον τα άθροισμα των τελικών ενεργειών που είναι αποθηκευμένες στους πυκνωτές στην κατάσταση ισορροπίας :

$$U_R = U_i - U_C - U_{C_x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(1+\kappa)^2} - \frac{1}{2}\frac{\kappa Q^2}{C(1+\kappa)^2} = \ldots = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\kappa}}\right)$$

Στην περίπτωση που $\kappa \to \infty$, $U_C \to 0, U_{C_x} \to 0$ και $U_R = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. Δηλαδή το σύνολο της αρχικής ενέργειας καταναλώνεται στην R.

Άσκηση 5

Ένα ψηφιακό πολύμετρο εσωτερικής αντίστασης r χρησιμοποιείται για να μετρήσει την τάση στα άκρα του πυκνωτή σε ένα RC κύκλωμα όπως φαίνεται στο σχήμα. Επειδή το πολύμετρο έχει πεπερασμένη εσωτερική αντίσταση, τμήμα του ρεύματος που παρέχεται από μπαταρία με ΗΕΔ E θα περνάει από το πολύμετρο. Θεωρείστε τα R,C,E,r γνωστά.

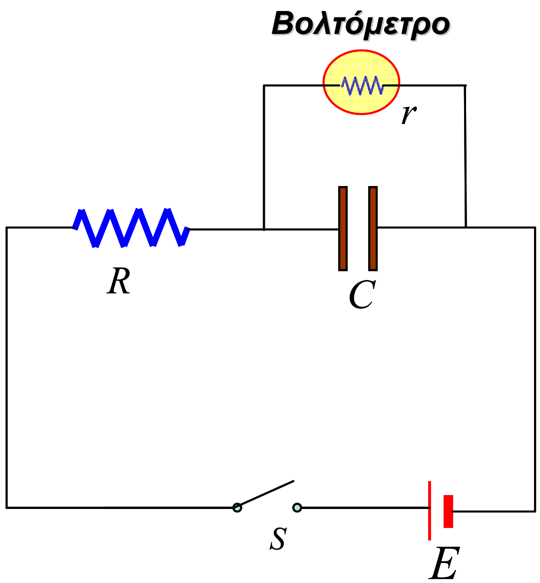
(α) Εφαρμόστε τον νόμο του Kirchhoff και το γεγονός ότι $i_C = \frac{dq}{dt}$, *όπου q το φορτίο του πυκνωτή προκειμένου να αποδείξετε ότι η εξίσωση που δίνει τη συσσώρευση φορτίου στον πυκνωτή, μετά το κλείσιμο του διακόπτη S, είναι η ακόλουθη :*

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{r+R}{rRC}q$$

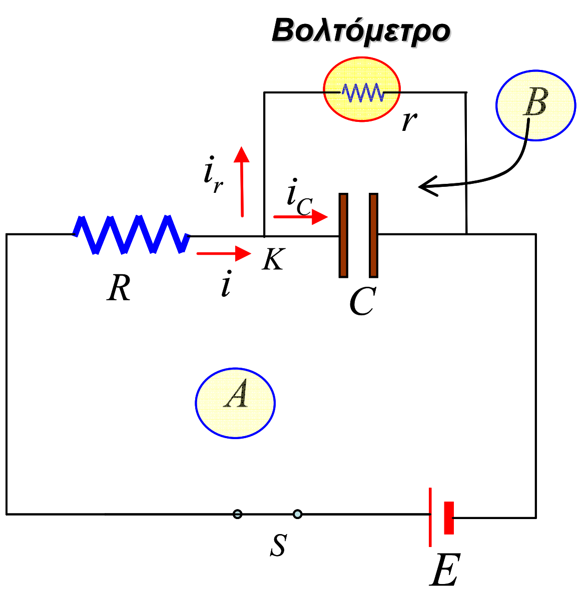
(β) Δείξτε ότι η λύση της εξίσωσης αυτής η οποία δίνει το φορτίο στον πυκνωτή ως συνάρτηση του χρόνου είναι :

$$q(t)=\frac{r}{r+R}CE\left(1-e^{-t/\left(\frac{rRC}{r+R}\right)}\right)$$

(γ) Βρείτε την τάση στα άκρα των οπλισμών του πυκνωτή V(t) ως συνάρτηση του χρόνου
(δ) Κάνετε τη γραφική παράσταση της V(t) ως συνάρτηση του χρόνου για τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων, R=10kΩ, C=1nF, E=5V, r=10MΩ.
(ε) Ποια είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή στην κατάσταση ισορροπίας ?



Λύση :
(α) Έστω I το ρεύμα της μπαταρίας , i_C το ρεύμα του πυκνωτή και i_r το ρεύμα στο βολτόμετρο. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Kirchhoff στον κόμβο K έχουμε : $i=i_C+i_r$ (1)



Εφαρμόζοντας τον νόμο Kirchhoff στον βρόχο Α παίρνουμε :

$$E = V_R + V_C = iR + \frac{q}{C} \quad (2)$$

Ο νόμος του Kirchhoff για τα στοιχεία που βρίσκονται στο βρόχο της εξωτερικής διαδρομής δίνει :

$$E = V_R + V_r = iR + i_r r \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) το i_r από την (1) και θέτοντας την έκφραση που δίνεται από τη εκφώνηση για το i_C παίρνουμε :

$$E = iR + i_r r = iR + (i - i_C)r = i(R+r) - \frac{dq}{dt}r \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\frac{dq}{dt} = E - i(R+r) \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) την έκφραση $i = \dfrac{E - \frac{q}{C}}{R}$ που προκύπτει από την (2) καταλήγουμε μετά από μερικές απλές πράξεις στην εξίσωση :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{r+R}{rRC}q \qquad (5)$$

(β) Γράφουμε την εξίσωση (5) στην ακόλουθη μορφή :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{r+R}{rRC}q = -\frac{r+R}{rRC}\left(q - \frac{ErC}{r+R}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{dq}}{q - \frac{ErC}{r+R}} = -\frac{r+R}{rRC}dt \qquad (6)$$

Η (6) με ολοκλήρωση δίνει :

$$\int_0^{q(t)} \frac{dq}{q - \frac{ErC}{r+R}} = -\frac{r+R}{rRC}\int_0^t dt$$

Ο πρώτος όρος υπολογίζεται με αλλαγή μεταβλητής $q - \frac{ErR}{r+R} = y$ και τελικά παίρνουμε

$$\ln\left(\frac{q(t) - ErC/(R+r)}{-ErC/(R+r)}\right) = -\frac{r+R}{rRC}t$$

Η σχέση αυτή με μία αναδιάταξη όρων δίνει την τελική έκφραση

$$q(t) = \frac{r}{r+R}CE\left(1 - e^{-t/\left(\frac{rRC}{r+R}\right)}\right) \qquad (7)$$

(γ) Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι $V_C(t) = \dfrac{q(t)}{C}$ ή

$$V(t)=\frac{r}{r+R}E\left(1-e^{-t/\left(\frac{rRC}{r+R}\right)}\right) \qquad (8)$$

(δ)Για τις τιμές των παραμέτρων που δίνονται στην εκφώνηση έχουμε

$$\frac{r}{r+R}=\frac{1}{1+\frac{R}{r}}=\frac{1}{1+\frac{10\times10^{3}\Omega}{10\times10^{6}\Omega}}=\frac{1}{1+10^{-3}}\approx 1$$

Και $\frac{rRC}{r+R}=\frac{RC}{1+R/r}=\frac{10\times10^{3}\Omega\times10^{-9}F}{1+\frac{10\times10^{3}\Omega}{10\times10^{6}\Omega}}=\frac{10^{-5}s}{1+10^{-3}}\approx 10^{-5}s=10\mu s$

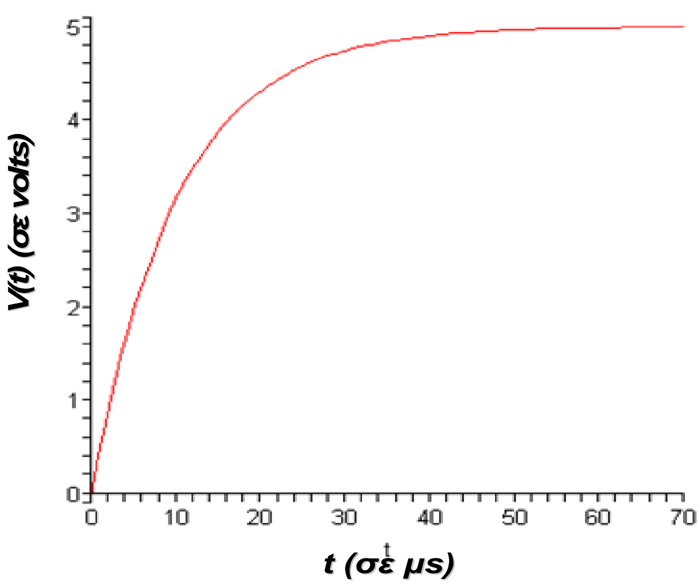
Οπότε η (8) παίρνει τη μορφή

$$V(t)=5\left(1-e^{-0.1t}\right) \qquad (9)$$

Όπου το t εκφράζεται σε μs και το V(t) σε volts

Η γραφική παράσταση της (9) δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

(ε) Από την (8) παίρνουμε ότι για $t\to\infty \quad \Rightarrow \; V\to\frac{r}{r+R}E$



Άσκηση 6

(α) Αντικείμενο με μάζα 0.5 kg εκτελεί απλή αρμονική κίνηση στο άκρο ενός οριζοντίου ελατηρίου με σταθερά k=300 N/m. Όταν το αντικείμενο βρίσκεται 0.012 m από την θέση ισορροπίας έχει ταχύτητα 0.3 m/s. (i) Πόση είναι η ολική ενέργεια του αντικειμένου σε οποιοδήποτε σημείο της διαδρομής; (ii) Πόσο είναι το πλάτος της κίνησης; (iii) Πόση

είναι η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά κατά την κίνηση του; (iv) Ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση του;
(β) Τέσσερις επιβάτες με συνολική μάζα 350 kg μπαίνουν σε ένα αυτοκίνητο με χαλασμένα αμορτισέρ και συμπιέζουν τα ελατήρια του κατά 5 cm. Αν το συνολικό βάρος που ασκείται στα ελατήρια είναι 1200 kg να βρείτε την περίοδο με την οποία ταλαντώνεται το φορτωμένο αυτοκίνητο.

Λύση :

(α) $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{300}{0.5} = 600 s^{-2} \Rightarrow \omega = 24.5 s^{-1}$

i) $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}300 \cdot 0.012^2 = 0.0216J$

$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}0.5 \cdot 0.3^2 = 0.0225J$

$E = K + U = 0.0441J$

ii) Από τις σχέσεις : $\begin{matrix} x = A\sin(\omega t) \\ \upsilon = A\omega\cos(\omega t) \end{matrix}$ υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{0,3}{24.5}\right)^2 + 0.012^2} = 0.017m = 1.7cm$$

iii) $\upsilon_{\max} = A \cdot \omega = 0.017 \cdot 24.5 = 0.42 m/s$

iv) $a_{\max} = A \cdot \omega^2 = 0.017 \cdot 600 = 10.2 m/s^2$

(β) Το επιπλέον βάρος των ανθρώπων που ενεργεί σε κάθε ελατήριο είναι $\frac{350 \cdot 9.8}{4} = 857.5N$ Αυτή η δύναμη αντιστοιχεί σε συσπείρωση 0.05 m.

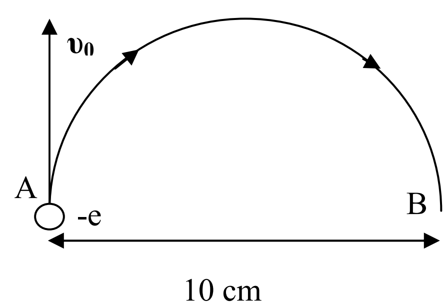
Άρα $k = \frac{F}{x} = 17150 N/m$

Η συνολική μάζα που φορτίζει κάθε ελατήριο είναι $\frac{1200}{4} = 300kg$

Η περίοδος είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.83s$

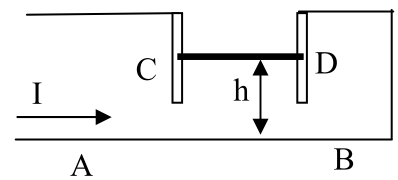
Άσκηση 7

(α) Ένα ηλεκτρόνιο στο σημείο Α έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = 4\times10^6$ m/s. Βρείτε (I) το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που θα αναγκάσει το ηλεκτρόνιο να ακολουθήσει την ημικυκλική τροχιά από το Α στο Β (ii) τον χρόνο



που απαιτείται για να μεταβεί το ηλεκτρόνιο από το Α στο Β.

(β) Οριζόντιο σύρμα ΑΒ μεγάλου μήκους είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα τραπέζι. Ένα δεύτερο σύρμα CD μήκους 0.4 m βρίσκεται πάνω από το πρώτο παράλληλα με αυτό και είναι ελεύθερο να ολισθαίνει χάρη σε δύο λείους, κατακόρυφους, μεταλλικούς αγωγούς C και D. Τα δύο σύρματα συνδέονται μεταξύ τους και διαρρέονται από ρεύμα 40 Α. Το σύρμα CD έχει γραμμική πυκνότητα μάζας 5×10^{-3} kg/m. Σε τι απόσταση h από το σύρμα ΑΒ θα ισορροπήσει το σύρμα CD, αν υποθέσουμε ότι η μαγνητική δύναμη που ασκείται σε αυτό οφείλεται αποκλειστικά στο ρεύμα μέσω του ΑΒ;



Λύση :

(α) Η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι από τον αναγνώστη προς την σελίδα. Έχουμε:

$$e\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow B = \frac{m}{e}\frac{\upsilon}{r} = \frac{1}{1.76\cdot10^{11}C/kg}\frac{4\cdot10^6 m/s}{0.05m} = 4.5\cdot10^{-4}T$$

και $T = \dfrac{\pi r}{\upsilon} = \dfrac{3.14\cdot0.05}{4\cdot10^6} = 3.9\cdot10^{-8}s$

(β) Στο CD η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι από την σελίδα προς τον αναγνώστη. Το CD διαρρέεται από ρεύμα Ι με διεύθυνση προς τα αριστερά. Άρα η μαγνητική δύναμη είναι προς τα πάνω και ισορροπεί το βάρος του CD.

$$mg = BIx \Rightarrow \lambda xg = BIx = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi h}Ix \Rightarrow$$

$$h = \frac{\mu_0 \mathrm{I}^2}{2\pi\lambda g} = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot40^2}{2\pi\cdot5\cdot10^{-3}\cdot9.8} = 65.3\cdot10^{-4}m = 0.65cm$$

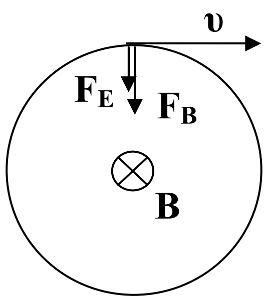
Άσκηση 8

Στη θεωρία του Bohr για το άτομο του υδρογόνου το ηλεκτρόνιο θεωρείται ότι κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από το πρωτόνιο. Υποθέστε ότι ένα τέτοιο άτομο τοποθετείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο με το επίπεδο της τροχιάς του κάθετο προς το Β. (α) Αν το ηλεκτρόνιο κινείται όπως οι δείκτες του ρολογιού ως προς τον παρατηρητή που παρατηρεί κατά την διεύθυνση του Β, η συχνότητα θα αυξηθεί ή θα ελαττωθεί; (β) Τι θα συμβεί αν το ηλεκτρόνιο κινηθεί αντίστροφα; Υποθέστε ότι η ακτίνα της τροχιάς δε μεταβάλλεται. (γ) Δείξετε ότι η μεταβολή στη συχνότητα περιστροφής η οποία προκαλείται από το μαγνητικό πεδίο δίνεται κατά προσέγγιση από την σχέση

$$\Delta\nu = \pm\frac{Be}{4\pi m}$$

όπου m και e είναι η μάζα και το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου αντίστοιχα. Υπενθυμίζεται ότι η γωνιακή ταχύτητα ω και η συχνότητα περιστροφής ν σχετίζονται με την σχέση ω=2πν. Τέτοιες μεταβολές συχνότητας παρατηρήθηκαν στην πράξη από τον Zeeman το 1896.

Λύση :



Αν το B έχει διεύθυνση από τον αναγνώστη προς την σελίδα τότε το ηλεκτρόνιο κινείται προς την φορά των δεικτών του ρολογιού.
Η κεντρομόλος δύναμη είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής έλξης από τον πυρήνα και της δύναμης Lorentz:

$$m\frac{\upsilon^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} + e\upsilon B \Rightarrow mr^3\omega^2 - e\mathrm{B}r^3\omega - ke^2 = 0 \quad (1)$$

Αν δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο η γωνιακή συχνότητα δίνεται από την (1) με B=0
Η κυκλική συχνότητα σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\omega_0 = e\sqrt{\frac{k}{mr^3}} \Rightarrow \nu_0 = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{mr^3}} = \frac{e}{4\pi m}\sqrt{\frac{4mk}{r^3}} \quad (2)$$

Η διακρίνουσα της (1) είναι πάντα θετική. Επιλύοντας βρίσκουμε

$$\nu = \frac{e}{4\pi m}\left[B \pm \sqrt{B^2 + \frac{4mk}{r^3}}\right] \quad (3)$$

Αλλά αν βάλουμε τις τιμές που δίνονται στο βιβλίο για την μάζα του ηλεκτρονίου και περίπου την ακτίνα ενός ατόμου θα δούμε ότι

$4mk/r^3 \approx (4\times9\times10^{-31}\times9\times10^9) / (10^{-10})^3 \approx 10^{10}$ T

ενώ B ≈ 1 T . Επειδή λοιπόν το $B^2 << 4mk/r^3$ μπορούμε να το αγνοήσουμε στην υπόρριζη ποσότητα. Επίσης το (-) στην (3) μας δίνει αρνητική τιμή για την συχνότητα που είναι μη φυσική λύση και την απορρίπτουμε. Κατά συνέπεια η (3) γίνεται

$$\nu = \frac{e}{4\pi m}\left[B + \sqrt{\frac{4mk}{r^3}}\right] (4)$$

Από τις (2) και (4) παίρνουμε τελικά

$\Delta\nu = \nu_0 - \nu \approx (eB) / (4\pi m)$ (5) δηλαδή η συχνότητα αυξάνει

Αν η φορά του ηλεκτρονίου είναι αντίθετη με την φορά του ρολογιού τότε η εξίσωση κίνησης γράφεται

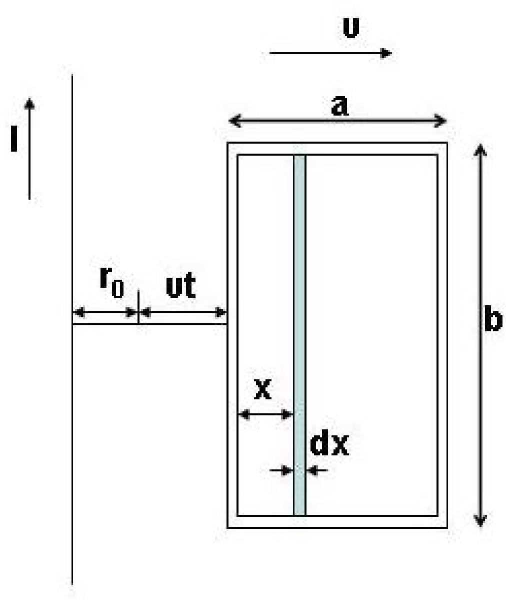
$m\upsilon^2/r = ke^2/r^2 - e\upsilon B$ και επομένως $m\, r^3\omega^2 + eBr^3\omega - ke^2 = 0$ (1')

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στην σχέση

$\Delta\nu = \nu_0 - \nu \approx -(eB) / (4\pi m)$ (5') δηλαδή η συχνότητα μειώνεται

Άσκηση 9

Το ορθογώνιο πλαίσιο του σχήματος απομακρύνεται από τον ευθύγραμμο αγωγό, που διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I, με ταχύτητα υ. Να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ.



Λύση:

Από τη στοιχειώδη επιφάνεια dS=bdx τη χρονική στιγμή t περνάει μαγνητική ροή:

$$d\Phi(x,t) = \vec{B}(x,t)\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r_0+\upsilon t + x}bdx$$

Η μαγνητική ροή από όλο το πλαίσιο είναι:

$$\Phi(t) = \int_0^a \vec{B}(x,t)\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_0^a \frac{dx}{r_0+\upsilon t + x}$$

ή

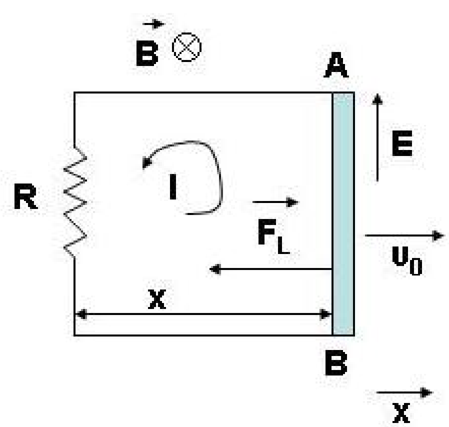
$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left[\ln(r_0+\upsilon t + x)\right]_0^a = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{r_0+\upsilon t + a}{r_0+\upsilon t}$$

Η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη ΗΕΔ είναι:

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 I ab\upsilon}{2\pi(r_0+\upsilon t + a)(r_0+\upsilon t)}$$

Άσκηση 10

Δύο παράλληλες οριζόντιες ράγες συνδέονται με αντίσταση R, όπως στο σχήμα. Μία ράβδος μάζας m και μήκους l μπορεί να γλιστρά χωρίς τριβές κάθετα πάνω σε αυτές. Η διάταξη είναι τοποθετημένη κάθετα σε μαγνητικό πεδίο εντάσεως B. Στη ράβδο δίδεται αρχική ταχύτητα υ_0. Να βρεθούν:
α) το μέτρο και η φορά της επαγόμενης ΗΕΔ στο κύκλωμα, όταν t=0 και $\upsilon=\upsilon_0$
β) Ποια η φορά του ρεύματος επαγωγής και ποιά είναι η διεύθυνση της μαγνητικής δύναμης πάνω στη ράβδο
γ) η εξίσωση κίνησης της ράβδου
δ) η ταχύτητά της σαν συνάρτηση του χρόνου
ε) η επαγόμενη ΗΕΔ και το επαγόμενο ρεύμα σαν συνάρτηση του χρόνου



Λύση:

α) Η μαγνητική ροή που περνά από το κύκλωμα είναι:

$$\Phi = BS = Blx$$

Η τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ στο κύκλωμα είναι:

$$\left|E\right| = \frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Bl\upsilon \quad (1)$$

Άρα, για t=0:

$$\left|E\right|_{t=0} = Bl\upsilon_0$$

Η φορά της επαγόμενης ΗΕΔ είναι από το άκρο Β της ράβδου προς το άκρο της Α.

β) Η φορά του ρεύματος επαγωγής είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, εφόσον προκαλείται από την ΗΕΔ η οποία έχει φορά από το άκρο Β της ράβδου προς το άκρο της Α.
Η μαγνητική δύναμη δίνεται από τη σχέση:

$\vec{F}_L = I\vec{l} \times \vec{B}$, όπου το διάνυσμα $\vec{l}$ έχει τη φορά του ρεύματος.
Άρα

$$\vec{F}_L = -IlB\hat{x} \quad (2)$$

η διεύθυνση της μαγνητικής δύναμης πάνω στη ράβδο είναι προς τα αριστερά.

γ) Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_L = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -IlB\hat{x} \quad (3)$$

Όταν η ταχύτητα της ράβδου είναι ίση με υ, η τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{Bl\upsilon}{R} \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, η εξίσωση κίνησης της ράβδου γίνεται:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}\hat{x} = -\frac{B^2l^2\upsilon}{R}\hat{x} \quad (5)$$

δ) Από τη σχέση (5) προκύπτει:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt$$

ή θέτοντας $\tau = \dfrac{mR}{B^2 l^2}$:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{1}{\tau} dt$$

Επειδή τα m, B, l και R είναι σταθερά, ολοκληρώνοντας προκύπτει :

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -\frac{t}{\tau}$$

ή:

$$\upsilon = \upsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6)$$

ε) Από τις σχέσεις (1) και (6) έπεται:

$$\left|E\right| = Bl\upsilon = Bl\upsilon_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Από τις σχέσεις (4) και (6) έπεται:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{Bl\upsilon}{R} = \frac{Bl\upsilon_0}{R} e^{\frac{-t}{\tau}}$$