

Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (6-7-2008)
Ηλεκτρομαγνητισμός

Όνοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

A . Εάν 10^{19} ηλεκτρόνια είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα στο εσωτερικό μονωτικής σφαίρας ακτίνας $R=9\text{cm}$ και βρίσκονται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, να βρεθεί η δύναμη που ασκείται σε κάθε ηλεκτρόνιο ως συνάρτηση της θέσης του. Δίνεται $e=1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $k=1/(4\pi \epsilon_0) \sim 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

B . N όμοιες σφαιρικές σταγόνες υδραργύρου ακτίνας r φέρουν το ίδιο δυναμικό V . Να βρείτε το δυναμικό (ως συνάρτηση μόνο των παραμέτρων N και V) που προκύπτει από τη συνένωση όλων των μικρών όμοιων σταγόνων ώστε να σχηματιστεί μία μεγάλη σφαιρική σταγόνα. (Υποδ. : Να υποθέσετε ότι μετά τη συνένωση των N ομοίων σφαιρικών σταγόνων υδραργύρου ακτίνας ακτίνας r προκύπτει μια σφαίρα ακτίνας R).

A. Λύση

Η σφαίρα έχει φορτίο $Q=10^{19} e = 10^{19} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1.6 \text{ C}$

Για $r < R$ από το νόμο του Gauss έχουμε

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\epsilon_0}$, όπου q' το φορτίο που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια. Το

διάνυσμα της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου \vec{E} έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το διάνυσμα $d\vec{S}$. Άρα

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS \cos 0^\circ = E 4\pi r^2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

$$\text{αλλά } \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{q'}{V'} = \frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \frac{q'}{Q} = \frac{r^3}{R^3}$$

$$\text{Άρα } E 4\pi r^2 = \frac{q'}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$$

Άρα η δύναμη θα είναι

$$F = Ee = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10^{19} e}{R^3} r e = k \frac{10^{19} e^2}{R^3} r$$

$$= 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{10^{19} (1.6 \cdot 10^{-19})^2 \text{C}^2}{(9 \cdot 10^{-2} \text{m})^3} r = 1.97 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}} r$$

B. Λύση

Ο όγκος της νέας σφαίρας ακτίνας R θα είναι $\frac{4}{3}\pi R^3 = N \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R = N^{1/3} r$

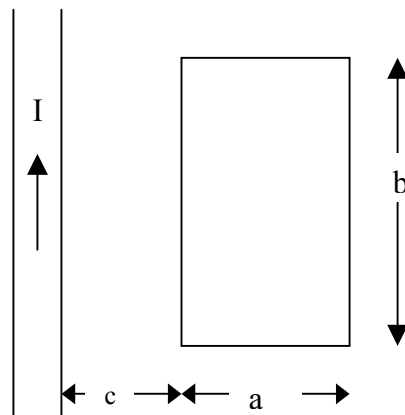
Το δυναμικό θα είναι

$$V_{o\lambda} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{o\lambda}}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Nq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Nq}{N^{1/3} r} = N^{2/3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = N^{2/3} V$$

ΘΕΜΑ 2

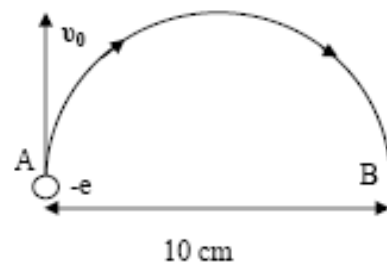
A. Ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους βρίσκεται στο επίπεδο συρμάτινου ορθογώνιου πλαισίου, πλευρών a και b , σε απόσταση c από την πλησιέστερη πλευρά του πλαισίου το οποίο έχει αντίσταση R . Ο αγωγός είναι παράλληλος προς τη πλευρά μήκους b του πλαισίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο εάν

1. ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I_0
2. ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I = I_0 \sin \omega t$.

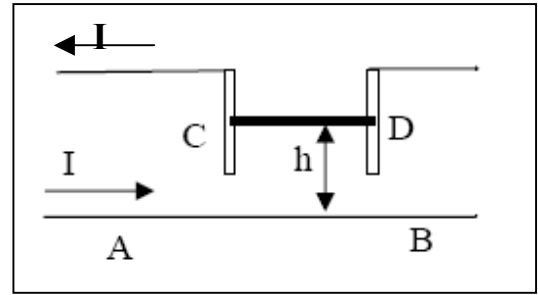


B. α) Ένα ηλεκτρόνιο στο σημείο A έχει ταχύτητα $v_0 = 4 \times 10^6 \text{ m/s}$. Να βρεθεί

- i) το μέτρο και η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που θα αναγκάσει το ηλεκτρόνιο να ακολουθήσει την ημικυκλική τροχιά από το A στο B
- ii) ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί το ηλεκτρόνιο από το A στο B.



β) Οριζόντιο σύρμα AB μεγάλου μήκους είναι τοποθετημένο πάνω σ' ένα τραπέζι. Ένα δεύτερο σύρμα CD μήκους 0.40 m βρίσκεται πάνω από το πρώτο σύρμα παράλληλα με αυτό και είναι ελεύθερο να ολισθαίνει χωρίς τριβή σε δύο κατακόρυφους μεταλλικούς αγωγούς C και D όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κάθε σύρμα διαρρέεται από ρεύμα 40 A με αντίθετη φορά όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύρμα CD έχει γραμμική πυκνότητα μάζας $5 \times 10^{-3}\text{ kg/m}$. Σε τι ύψος h θα ισορροπήσει το σύρμα CD αν υποθέσουμε ότι η μαγνητική δύναμη που ασκείται σε αυτό οφείλεται στο ρεύμα μέσω του AB ;



A. Λύση

i) Από ο νόμο του Ampere γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από το ρεύμα σε απόσταση r είναι

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Δηλαδή το πεδίο δεν είναι ομογενές αλλά μεταβάλλεται μέσα στο πλαίσιο, είναι κάθετο προς αυτόν και κατευθύνεται από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Αφού B είναι παράλληλο προς το dA

$$\Phi = \int B dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA \quad (1)$$

Το B δεν είναι σταθερό ως προς το r αλλά είναι ως προς το χρόνο. Άρα η Φ =σταθ δηλαδή δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή κι άρα ρεύμα./

ii) Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα γράφουμε το στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας $dA = bdr$ άρα η (1) γίνεται:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} b \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \ln r \Big|_c^{a+c} = \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \ln \left(\frac{a+c}{c} \right)$$

οπότε αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή

$$E = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{a+c}{c} \right) \frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{a+c}{c} \right) \frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$$

και ρεύμα

$$I' = \frac{E}{R} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{a+c}{c} \right) \frac{I_0}{\omega R} \cos \omega t$$

B. Λύση

(α) Η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι από τον αναγνώστη προς την σελίδα. Έχουμε:

$$e v B = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow B = \frac{m v}{e r} = \frac{1}{1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}} \frac{4 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{0.05 \text{ m}} = 4.5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$t = T/2 = \frac{\pi r}{v} = \frac{3.14 \cdot 0.05}{4 \cdot 10^6} = 3.9 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

(β) Στο CD η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι από την σελίδα προς τον αναγνώστη. Το CD διαρρέεται από ρεύμα I με διεύθυνση προς τα αριστερά. Άρα η μαγνητική δύναμη είναι προς τα πάνω και ισορροπεί το βάρος του CD.

$$mg = B l x \Rightarrow \lambda x g = B l x = \frac{\mu_0 I}{2 \pi h} l x \Rightarrow$$

$$h = \frac{\mu_0 I^2}{2 \pi \lambda g} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 40^2}{2 \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 65.3 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0.65 \text{ cm}$$