ΕΡΓΑΣΙΑ 4

(παράδοση 2/4/2006)

Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

1. Χαλύβδινη σφαίρα μάζας 1 kg είναι συνδεδεμένη στο ένα άκρο σύρματος μήκους 1 m που περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο γύρω από το άλλο άκρο του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 120 rad s^{-1} ($g = 10\mathrm{m/s}^2$).

   (α′) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια.

   (β′) Αν αντί της γωνιακής ταχύτητας είναι η ολική ενέργεια της σφαίρας που παραμένει σταθερή, ποια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και της γωνιακής ταχύτητας μεταξύ του ψηλότερου και χαμηλότερου σημείου του κύκλου; Υποθέστε ότι η τιμή της γωνιακής ταχύτητας που δόθηκε παραπάνω ισχύει για το ψηλότερο σημείο του κύκλου.

   Λύση:

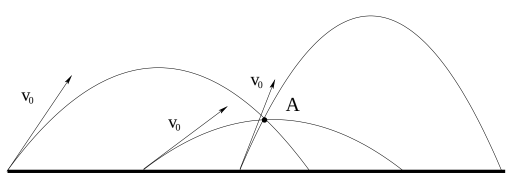
   (α′)
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 = \frac{1}{2}(1\mathrm{kg})(120\mathrm{s}^{-1})^2(1\mathrm{m}^2) = 7200\mathrm{J}\,.$$

   (β′) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι ίση με το έργο του βάρους, δηλ.
$$\Delta E_k = mg(2l) = (1\mathrm{kg})(10\mathrm{m/s}^2)(2 \cdot 1\mathrm{m}) = 20\mathrm{J}\,.$$
   Αλλά
$$\Delta E_k = E_k' - E_k = \frac{1}{2}m\omega'^2 l^2 - E_k\,,$$
   οπότε παίρνουμε
$$\omega' = \sqrt{2(\Delta E_k + E_k)/ml^2} = \sqrt{2(7200\mathrm{J} + 20\mathrm{J})/(1\mathrm{kg})(1\mathrm{m})^2} = 120.17\mathrm{s}^{-1}\,.$$

2. Τρία πυροβόλα όπλα βάλλουν βλήματα με αρχική ταχύτητα ίδιου μέτρου v_0 κατά τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα βλήματα να περάσουν από το ίδιο σημείο A (όχι απαραίτητα την ίδια χρονική στιγμή).

   (α′) Προσδιορίστε την σχέση μεταξύ των μέτρων των ταχυτήτων v_A των βλημάτων στο A.

   (β′) Μπορείτε να προσδιορίσετε τη διεύθυνση της ταχύτητας των βλημάτων χρησιμοποιώντας μόνο την αρχή διατήρησης της ενέργειας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Σχήμα 1: Άσκηση 2

   Λύση:

   (α′) Έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Οπότε
$$E = E_{k,A} + U_A = E_{k,0} \Rightarrow E_{k,A} = E_{k,0} - U_A\,.$$
   Αρα:
$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh_A \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2gh_A}\,,$$
   που είναι ίδια και και για τα τρία βλήματα.

(β′) Το ίδιο δεν ισχύει και για τη διεύθυνση της ταχύτητας. Έστω θ_A και θ_0 οι γωνίες που σχηματίζουν οι $\vec{v}_A$ και $\vec{v}_0$ με την οριζόντια διεύθυνση. Έχουμε

$$\cos\theta_A = \frac{v_{x,A}}{v_A} = \frac{v_0\cos\theta_0}{v_A}\,,$$

οπότε αφού οι v_0 και v_A είναι ίδιες για όλα τα βλήματα ενώ οι θ_0 διαφορετικές προκύπτει ότι οι θ_A θα είναι διαφορετικές παρόλο που οι E, $E_{k,A}$ και U_A είναι ίδιες και για τα τρία βλήματα.

3. Θεωρήστε ένα σωμάτιο του οποίου η μηχανική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)\,,$$

με $v = dx/dt$ και

$$U(x) = \frac{L^2}{2mx^2} - \frac{k}{x}\,.$$

Θεωρήστε ότι $m = 1\,\mathrm{kg}$ και $k = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{m}$. Θεωρήστε τις δύο περιπτώσεις $L_1 = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$ και $L_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$.

(α′) Προσδιορίστε τις ελάχιστες τιμές $U_{\mathrm{min},1}$, $U_{\mathrm{min},2}$ της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ του σωματίου και στις δύο περιπτώσεις καθώς και τη θέση των ελαχίστων $x_{\mathrm{min},1}$ και $x_{\mathrm{min},2}$.

(β′) Πόση ενέργεια χρειάζεται για τη μετάβαση από την κατάσταση ισορροπίας της μιας καμπύλης στην κατάσταση ισορροπίας της άλλης;

(γ′) Σε ποιο διάστημα μπορεί το σωμάτιο να κινηθεί όταν έχει ενέργεια $U_{\mathrm{min},2}$ και $L = L_1$; Φτιάξτε στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα δυναμικής ενέργειας του σωματίου δείχνοντας καθαρά τα αποτελέσματά σας.

(δ′) Προσδιορίστε τη δύναμη (δηλ. μέτρο και φορά) που ασκείται στο σωμάτιο με $L = L_1$ όταν βρίσκεται στη θέση $x_{\mathrm{min},2}$.

Λύση:

$$L_1 = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \Rightarrow U_1(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\ \ \mathrm{J}\,.$$
$$L_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \Rightarrow U_2(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\ \ \mathrm{J}\,.$$

(α′) Αρα

$$\frac{dU_1}{dx} = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\bigg|_{x=x_{0,1}} = 0 \Rightarrow x_{0,1} = 1\mathrm{m}\,.$$
$$\frac{dU_2}{dx} = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\bigg|_{x=x_{0,2}} = 0 \Rightarrow x_{0,2} = 2\mathrm{m}\,.$$
$$U_1(x_{0,1}) = -\frac{1}{2}\mathrm{J}\,.$$
$$U_2(x_{0,2}) = -\frac{1}{4}\mathrm{J}\,.$$

(β′)

$$\Delta E = U_2(x_{0,2}) - U_1(x_{0,1}) = (-0.25\mathrm{J}) - (-0.50\mathrm{J}) = 0.25\mathrm{J}\,.$$

(γ′) Η ολική μηχανική ενέργεια είναι $E = -0.25\mathrm{J}$. Οπότε

$$U_1 = E \Rightarrow \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} = -0.25 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}\,\mathrm{m}\,.$$

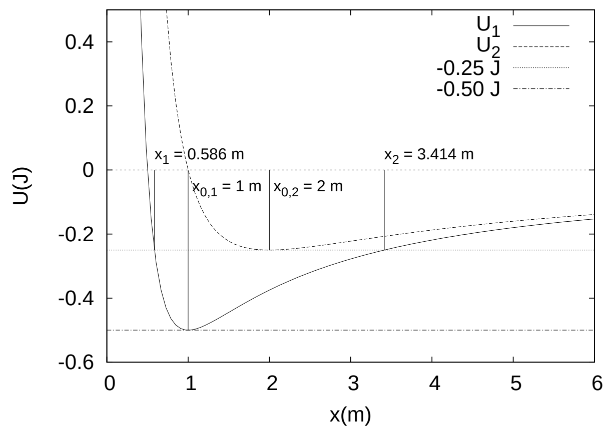
Αρα $x_1 = 0.586\mathrm{m}$ και $x_2 = 3.414\mathrm{m}$.

(δ′) Η δύναμη δίνεται από τη σχέση

$$F_1(x) = -\frac{dU_1}{dx} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\ \mathrm{N}\,,$$

οπότε

$$F_1(x_{0,2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\ \mathrm{N} = -\frac{1}{8}\,\mathrm{N}\,.$$



Σχήμα 2: Άσκηση 3

4. Σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση πεδίου δυνάμεων που περιγράφεται από τις παρακάτω συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας:

(α′) $U(x) = ax^n\,.$

(β′) $U(x, y) = axy\,.$

(γ′) $U(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)\,.$

Σε κάθε περίπτωση εκφράστε το πεδίο δυνάμεων σε διανυσματική μορφή. Τα a, k είναι σταθερές[1].

Λύση:

(α′)

$$\vec{F}(x) = -\frac{dU}{dx}\,\hat{i} = -anx^{n-1}\,\hat{i}\,.$$

(β′)

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{j} = -ay\,\hat{i} - ax\,\hat{j}\,.$$

(γ′)

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{k} = -2k(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) = -2k\vec{r}.$$

[1] Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ της σελ. 153 του βιβλίου σας. Ο τελεστής της μερικής παραγώγου $\partial/\partial x$ όταν δράσει πάνω σε μία συνάρτηση $f(x, y, z, \ldots)$ επιστρέφει την παράγωγο της συνάρτησης ως προς x θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές. Όμοια για τους τελεστές $\partial/\partial y$ και $\partial/\partial z$ παίρνουμε την παράγωγο ως προς y και z αντίστοιχα.

5. Σωμάτιο κινείται στο επίπεδο κάτω από την επίδραση πεδίου δυνάμεων με δυναμική ενέργεια $U(x,y) = -kx$. Έστω (r,θ) δίνουν τη θέση του σωματιδίου, όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων και θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον άξονα των x με φορά που ορίζεται από την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

   (α′) Υπολογίστε τις συνιστώσες της δύναμης F_x και F_y που ασκείται στο σωμάτιο ($\vec{F} = F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath}$).

   (β′) Υπολογίστε τις συνιστώσες της δύναμης F_r και F_θ, όπου F_r η προβολή της δύναμης στην ακτινική διεύθυνση και F_θ στην κάθετη προς αυτή διεύθυνση με θετική τη φορά που είναι αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

   (γ′) Δείξτε ότι:
$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}\,, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,.$$

Λύση:

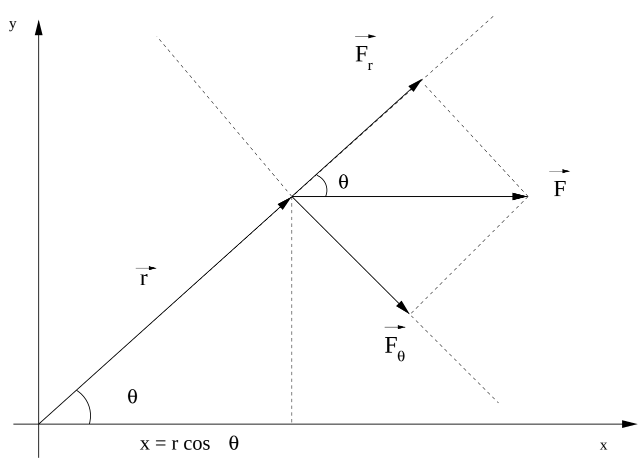
(α′)
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = k \qquad , \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0\,.$$

(β′)
$$F_r = F\cos\theta = k\cos\theta \qquad , \qquad F_\theta = -F\sin\theta = -k\sin\theta\,.$$

Το πρόσημο στην F_θ οφείλεται στην επιλογή της θετικής φοράς να ορίζεται από την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

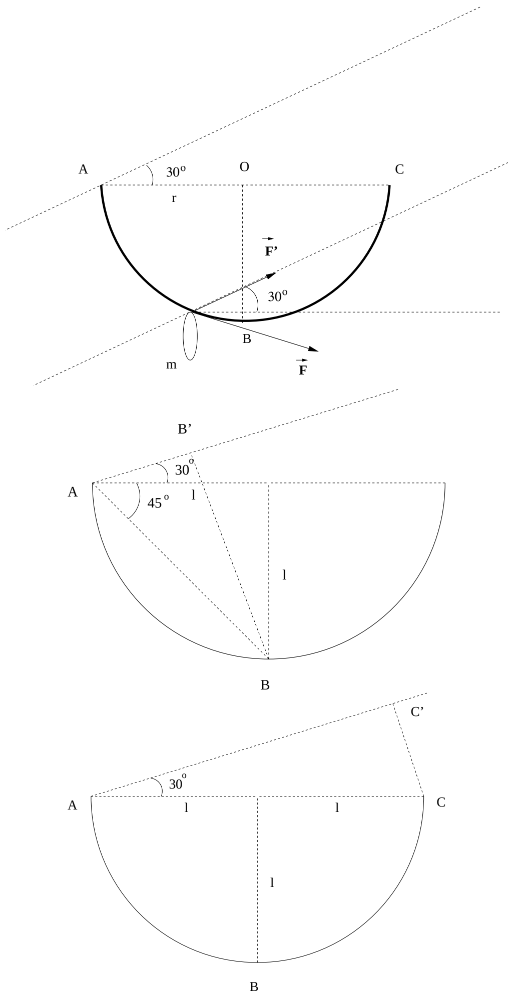
(γ′)
$$U(x,y) = -kx = -kr\cos\theta\,.$$

Αρα
$$-\frac{\partial U}{\partial r} = k\cos\theta = F_r\,,$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}(+kr\sin\theta) = -k\sin\theta = F_\theta\,.$$



Σχήμα 3: Άσκηση 5

6. Το δαχτυλίδι μάζας $m = 5.0\,\mathrm{kg}$ ολισθαίνει πάνω σε λείο μεταλλικό τόξο ABC που αντιστοιχεί σε τόξο κύκλου ακτίνας $1.2\,\mathrm{m}$. Στο δαχτυλίδι ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}'$ που έχουν μέτρα $40\,\mathrm{N}$ και $150\,\mathrm{N}$ αντίστοιχα. Η δύναμη $\vec{F}$ παραμένει εφαπτόμενη στον κύκλο. Η $\vec{F}'$ ασκείται σε σταθερή διεύθυνση και σχηματίζει γωνία 30^o μοιρών με την οριζόντια διεύθυνση. Και οι δύο δυνάμεις βρίσκονται πάνω στο επίπεδο ABC. Υπολογίστε το ολικό έργο που παράγεται από το σύστημα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα όταν μετατοπίζεται από το A στο B και από το A στο C.



Σχήμα 4: Άσκηση 6

Λύση: Έχουμε:

$$W_{AB} = W_{AB,F} + W_{AB,F'}\,.$$

$$W_{AB,F} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F\,dr = F\int_A^B dr = FS_{AB} = F(\frac{2\pi}{4}l) = 75.40\mathrm{J}\,,$$

όπου $S_{AB} = \frac{2\pi}{4}l = 1.885\mathrm{m}$ το μήκος του τόξου AB. Η δύναμη $\vec{F}'$ είναι σταθερή. Όπως γνωρίζουμε το έργο σταθερής δύναμης (λ.χ. το έργο του βάρους κοντά στην επιφάνεια της γης) είναι ίσο με τη δύναμη επί την (αλγεβρική) προβολή της μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της δύναμης πάνω στην διεύθυνση της δύναμης. Διαλέγοντας τον άξονα των x να συμπίπτει με την διεύθυνση της $\vec{F}'$ παίρνουμε:

$$W_{AB,F'} = \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F'\, dx = F' \int_{x_A}^{x_B} dx = F'(x_B - x_A)\,.$$

Αλλά επειδή $x_A = 0$ και $(AB) = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}l$ έχουμε

$$x_B = (AB)\cos(45^o + 30^o) = \sqrt{2}l\cos(75^o) = 0.3660l = 0.439\mathrm{m}\,,$$

οπότε παίρνουμε

$$W_{AB,F'} = 65.88\mathrm{J}\,.$$

Τελικά

$$W_{AB} = 75.40\mathrm{J} + 65.88\mathrm{J} = 141.28\mathrm{J}\,.$$

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε

$$W_{AC} = W_{AC,F} + W_{AC,F'} = FS_{AC} + F'(x_C - x_A)\,,$$

όπου αντικαθιστώντας $S_{AC} = \pi l = 3.770\mathrm{m}$ και $x_C = (AC)\cos 30^o = 2l\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.078\mathrm{m}$ παίρνουμε

$$W_{AC} = 40 \times 3.770 + 150 \times 2.078\ \mathrm{J} = 462.5\mathrm{J}\,.$$

7. Δίνεται η δύναμη $\vec{F} = k\,\hat{j} \times \vec{v}$ που ασκείται πάνω σε σωμάτιο μάζας m, όπου $\hat{j}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση στη θετική διεύθυνση του άξονα των y και $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ η ταχύτητα του σωματιδίου.

   (α΄) Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου παραμένει σταθερή.

   (β΄) Ποιο είναι το έργο που παράγει η δύναμη;

   (γ΄) Ποια η επίδραση της δύναμης πάνω στο διάνυσμα της ταχύτητας;

   Λύση:

   (α΄)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = k(\hat{j} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dt = k(\vec{v} \times \vec{v}) \cdot \hat{j}\, dt = 0\,.$$

   Χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα του τριπλού γινομένου

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot c = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot b\,.$$

   Άρα

$$W_{AB} = \int_A^B dW = 0 \Rightarrow \Delta E_{k,AB} = 0\,.$$

   (β΄) Όπως είπαμε παραπάνω $W_{AB} = 0$ για οποιαδήποτε A και B και οποιαδήποτε διαδρομή τα ενώνει.

   (γ΄) Εφόσον $\Delta E_{k,AB} = 0$ το μέτρο της ταχύτητας δε μεταβάλλεται. Εφόσον $\vec{F} = k\,\hat{j} \times \vec{v}$ έχουμε $\vec{F} \perp \vec{v}$ οπότε η $\vec{F}$ μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνση της $\vec{v}$ και δρα ως κεντρομόλος[2].

8. Σωματίδιο μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ και συγκρούεται ελαστικά με σωματίδιο μάζας m_2 πού είναι ακίνητο ώς προς το σύστημα του εργαστηρίου L. Παρατηρητής κινείται με ταχύτητα

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2}\,,$$

   ως προς το εργαστήριο και παρατηρεί στο σύστημά του C την ίδια κρούση.

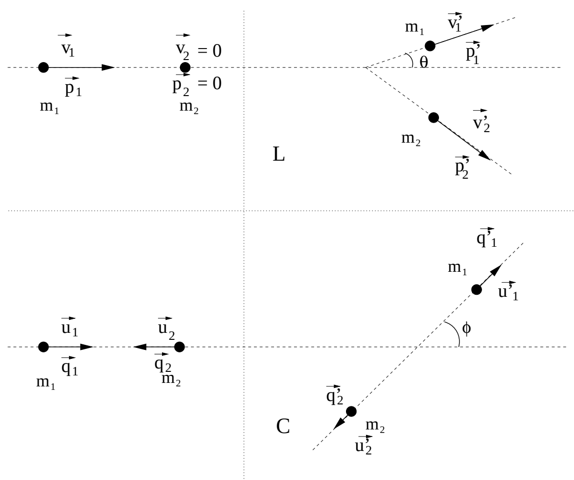
[2] Παρατήρηση: Όταν η $\vec{v}$ βρίσκεται στο επίπεδο x-z το σωμάτιο κινείται πάνω σε κύκλο που βρίσκεται στο επίπεδο αυτό. Στη γενική περίπτωση διαγράφει ελικοειδή τροχιά με κατεύθυνση τον $\pm y$ άξονα. Τέτοιου τύπου δύναμη δρα πάνω σε κινούμενο φορτισμένο σωμάτιο από ομογενές μαγνητικό πεδίο.

(α′) Δείξτε ότι στο σύστημα C τα δύο σωμάτια πριν και μετά την κρούση κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις.

(β′) Δείξτε ότι οι γωνίες θ και ϕ που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του m_1 μετά την κρούση σε σχέση με τη αρχική διεύθυνση της κίνησής του στα συστήματα L και C αντίστοιχα, συνδέονται με τη σχέση

$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \frac{m_1}{m_2}}\,.$$

(γ′) Βρίσκεται πειραματικά ότι η μέγιστη εκτροπή σωματιδίων άλφα από το υδρογόνο (πρακτικά δηλ. από το πρωτόνιο του πυρήνα του) στο σύστημα αναφοράς που το υδρογόνο είναι ακίνητο είναι περίπου 15^o. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα εκτιμήστε το λόγο των μαζών του σωματιδίου άλφα ως προς το υδρογόνο.



Σχήμα 5: Άσκηση 8

Λύση:

(α′)

$$\vec{u}_1 = \vec{v} - \vec{V} = \vec{v} - \frac{m_1\vec{v}}{m_1+m_2} = \frac{m_2\vec{v}}{m_1+m_2}\,,$$

$$\vec{u}_2 = \vec{0} - \vec{V} = -\frac{m_1\vec{v}}{m_1+m_2}\,.$$

Άρα τα διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ είναι αντιπαράλληλα:

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1\,.$$

Η συνολική ορμή στο σύστημα C πριν την κρούση είναι

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\frac{m_2\vec{v}}{m_1+m_2} - m_2\frac{m_1\vec{v}}{m_1+m_2} = \vec{0}\,.$$

Αφού η ορμή στο σύστημα C διατηρείται θα έχουμε

$$\vec{q}_1{}' + \vec{q}_2{}' = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{q}_1{}' = -\vec{q}_2{}'\,,$$

άρα οι ταχύτητες $\vec{u}_1{}' = \vec{q}_1{}'/m_1$ και $\vec{u}_2{}' = \vec{q}_2{}'/m_2$ είναι αντιπαράλληλες. Συνοψίζοντας:

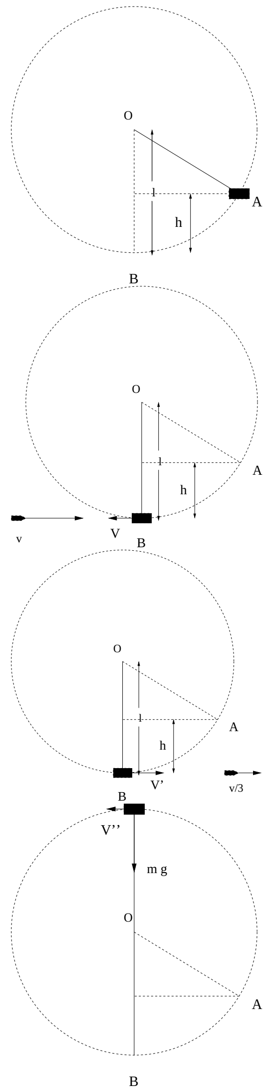
$$\vec{q}_1 = -\vec{q}_2 \qquad \vec{q}_1{}' = -\vec{q}_2{}'\,.$$

(β′) Έχουμε
$$\tan\theta = \frac{p_{1y}'}{p_{1x}'}\,.$$
Αλλά
$$p_{1x}' = m_1 v_{1x}' = m_1(u_{1x}' + \frac{m_1 v}{m_1+m_2}) = q_{1x}' + \frac{m_1 p}{m_1+m_2}\,,$$
$$p_{1y}' = m_1 v_{1y}' = m_1(u_{1y}' + 0) = q_{1y}'\,.$$
Άρα
$$\tan\theta = \frac{q_{1y}'}{q_{1x}' + \frac{m_1}{m_1+m_2}p} = \frac{q_1{}'\sin\phi}{q_1{}'\cos\phi + \frac{m_1}{m_1+m_2}p} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{p}{q_1{}'}}\,. \tag{1}$$
Από την διατήρηση της ορμής έχουμε
$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{q}_1 = -\vec{q}_2 \Rightarrow q \equiv |\vec{q}_1| = |\vec{q}_2|\,,$$
$$\vec{q}_1{}' + \vec{q}_2{}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{q}_1{}' = -\vec{q}_2{}' \Rightarrow q\,' \equiv |\vec{q}_1{}'| = |\vec{q}_2{}'|\,,$$
και από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας (ελαστική κρούση) έχουμε:
$$\frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} = \frac{q_1{}'^2}{2m_1} + \frac{q_2{}'^2}{2m_2} \Rightarrow \frac{q^2}{2m_1} + \frac{q^2}{2m_2} = \frac{q\,'^2}{2m_1} + \frac{q\,'^2}{2m_2} \Rightarrow q = q\,'\,.$$
Άρα
$$q_1{}' = q\,' = q = |\vec{q}_2| = |m_2\vec{u}_2| = \left|m_2\left(-\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\right)\right| = \left|\frac{m_2\vec{p}}{m_1+m_2}\right| = \frac{m_2 p}{m_1+m_2}\,.$$
Άρα
$$\frac{p}{q_1{}'} = \frac{p}{\frac{m_2 p}{m_1+m_2}} = \frac{m_1+m_2}{m_2}\,. \tag{2}$$
Η (1) συνεπάγεται από τη (2):
$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{m_1+m_2}{m_2}} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + \frac{m_1}{m_2}}\,. \tag{3}$$

(γ′) Η μέγιστη εκτροπή είναι όταν $\phi = \pi/2$. Τότε η (3) δίνει:
$$\tan\theta_{\max} = \frac{1}{0 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{m_2}{m_1} \approx 0.268 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \approx 3.73\,.$$

9. Σφαίρα μάζας m και ταχύτητας $\vec{v} = v\,\hat{i}$ περνάει μέσα από το βαρίδι εκκρεμούς μάζας M όταν αυτό βρίσκεται στο σημείο Β, και βγαίνει από αυτό με ταχύτητα $\vec{v}' = (v/3)\,\hat{i}$. Το βαρίδι του εκκρεμούς βρίσκεται στην άκρη αβαρούς νήματος μήκους l και αρχικά ήταν ακίνητο στη θέση Α σε ύψος h ως προς το Β. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της v ώστε το βαρίδι του εκκρεμούς να διαγράψει ολόκληρο κύκλο;

Λύση: Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των σημείων A, B δίνει:
$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}\,.$$
Η ορμή διατηρείται κατά την κρούση οπότε η ταχύτητα V' του βαριδιού αμέσως μετά την κρούση θα δίνεται από τη σχέση:
$$mv - MV = m\frac{v}{3} + MV' \Rightarrow V' = \frac{2}{3}\left(\frac{m}{M}\right)v - \sqrt{2gh}\,. \tag{4}$$



Σχήμα 6: Άσκηση 9

Αν η ταχύτητα του βαριδιού στο ανώτατο σημείο της τροχιάς είναι V'', τότε η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μας δίνει:

$$\frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}MV''^2 + Mg(2l) \Rightarrow V''^2 = V'^2 - 4gl\,. \tag{5}$$

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει η V'' ώστε να μη χαλαρώσει το νήμα είναι όταν το βάρος του βαριδιού είναι η κεντρομόλος δύναμη στο ανώτατο σημείο της τροχιάς. Αυτή αντιστοιχεί και στη ζητούμενη ελάχιστη τιμή της v. Η συνθήκη αυτή δίνει:

$$M\frac{V''^2}{l} = Mg \Rightarrow V''^2 = gl\,. \tag{6}$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε:

$$gl = V'^2 - 4gl \Rightarrow V' = \sqrt{5gl}\,. \tag{7}$$

Από τις σχέσεις (4) και (7) παίρνουμε:

$$\sqrt{5gl} = \frac{2}{3}\left(\frac{m}{M}\right)v - \sqrt{2gh} \Rightarrow v = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{m}\right)\left(\sqrt{5gl} + \sqrt{2gh}\right)\,.$$

10. Έχει βρεθεί πειραματικά ότι κατά τη μετωπική κρούση[3] δύο στερεών σφαιρών η σχετική ταχύτητα της σφαίρας 2 ως προς τη σφαίρα 1 μετά την κρούση $v'_{12} = v'_2 - v'_1$ σχετίζεται με την αντίστοιχη σχετική ταχύτητα πριν την κρούση $v_{12} = v_2 - v_1$ με τη σχέση:

$$v'_{12} = -e\,v_{12}\,.$$

Η τιμή του *συντελεστή αποκατάστασης*, e, είναι μεταξύ 0 και 1. Αυτό το αποτέλεσμα ανακαλύφθηκε από τον Νεύτωνα και ισχύει μόνο προσεγγιστικά. Επιπλέον η ορμή διατηρείται κατά την κρούση. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(α΄) Οι ταχύτητες μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v'_1 = \frac{\mu v_2(1+e)}{m_1} + \frac{\mu v_1(1-e\frac{m_2}{m_1})}{m_2}\,,$$

$$v'_2 = \frac{\mu v_1(1+e)}{m_2} + \frac{\mu v_2(1-e\frac{m_1}{m_2})}{m_1}\,,$$

όπου [4]

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\,.$$

(β΄) Έστω παρατηρητής C που παρατηρεί την κρούση κινούμενος με ταχύτητα $V = (m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2)$. Η ποσότητα $Q = E_k^{(C)'} - E_k^{(C)}$ στο σύστημα του C μετράει την απώλεια ενέργειας του συστήματος και είναι

$$Q = -\frac{1}{2}(1-e^2)\mu v_{12}^2\,.$$

Υπόδειξη: $E_k^{(C)} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$ όπου $u_1 = v_1 - V$ και $u_2 = v_2 - V$. Αντίστοιχα $E_k^{(C)'} = \frac{1}{2}m_1(u'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(u'_2)^2$.
Παρατήρηση: (Χωρίς απόδειξη) Η ποσότητα Q θα ήταν η ίδια αν την ορίζαμε στο σύστημα του εργαστηρίου.

[3] Θα θεωρήσετε δηλ. ότι οι σφαίρες κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση. Οι ποσότητες v_1, v_2, $v_{12}\ldots$ είναι αλγεβρικές, δηλ. αναφέρονται στις συνιστώσες των αντίστοιχων διανυσμάτων πάνω στον άξονα που ορίζεται από τη διεύθυνση κίνησης και παίρνουν θετικές ή αρνητικές τιμές ανάλογα με τη φορά των αντίστοιχων διανυσμάτων.

[4] μ ονομάζεται η ανηγμένη μάζα του συστήματος των δύο σωμάτων.

(γ΄) Ποια είναι η τιμή του e όταν η κρούση είναι ελαστική και ποια όταν είναι πλαστική (τα δύο σωμάτια κινούνται μαζί);

Λύση:

(α΄) Από τον ορισμό του e παίρνουμε:

$$v'_{12} = -ev_{12} \Rightarrow (v'_2 - v'_1) = -e(v_2 - v_1)\,.$$

και μαζί με τη διατήρηση της ορμής παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ -v'_1 + v'_2 &= ev_1 - ev_2\,. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών του παραπάνω συστήματος είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = m_1 + m_2\,.$$

Άρα η λύση του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{1}{m_1+m_2}\begin{vmatrix} m_1v_1 + m_2v_2 & m_2 \\ ev_1 - ev_2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1v_1 + m_2v_2 - m_2ev_1 + m_2ev_2\right) \\ &= \frac{1}{m_1+m_2}\left[(m_1 - em_2)v_1 + (m_2 + m_2e)v_2\right] \\ &= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1\left(1 - e\frac{m_2}{m_1}\right)v_1 + m_2(1+e)v_2\right] \\ &= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(1 - e\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{m_2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+e)\frac{v_2}{m_1} \\ &= \frac{\mu v_2(1+e)}{m_1} + \frac{\mu v_1\left(1 - e\frac{m_2}{m_1}\right)}{m_2}\,, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή αντικαταστήσαμε

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,.$$

Όμοια παίρνουμε:

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{1}{m_1+m_2}\begin{vmatrix} m_1 & m_1v_1 + m_2v_2 \\ -1 & ev_1 - ev_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1ev_1 - em_1v_2 + m_1v_1 + m_2v_2\right] \\ &= \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1(1+e)v_1 + (m_2 - em_1)v_2\right] \\ &= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1+e)\frac{v_1}{m_2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(1 - e\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{v_2}{m_1} \\ &= \frac{\mu v_1(1+e)}{m_2} + \frac{\mu v_2\left(1 - e\frac{m_1}{m_2}\right)}{m_1}\,. \end{aligned}$$

(β′) Από τον ορισμό του Q παίρνουμε:

$$Q = \frac{1}{2}m_1 {u_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {u_2'}^2 - \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \, .$$

Αντικαθιστούμε τις ταχύτητες:

$$u_1 = v_1 - V = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 v_{12}}{m_1 + m_2} \, ,$$

$$u_2 = v_2 - V = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_{12}}{m_1 + m_2} \, ,$$

$$u_1' = v_1' - V' = v_1' - \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(v_1' - v_2')}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 v_{12}'}{m_1 + m_2} \, ,$$

$$u_2' = v_2' - V' = v_2' - \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(v_2' - v_1')}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_{12}'}{m_1 + m_2} \, .$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 {v_{12}'}^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2 {v_{12}'}^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 v_{12}^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2 v_{12}^2}{(m_1+m_2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(m_1+m_2){v_{12}'}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(m_1+m_2)v_{12}^2 \\
&= \frac{1}{2}\mu({v_{12}'}^2 - v_{12}^2) = \frac{1}{2}\mu(e^2 v_{12}^2 - v_{12}^2) \\
&= \frac{1}{2}\mu(1 - e^2)v_{12}^2 \, .
\end{aligned}$$

(γ′) Όταν η κρούση είναι πλαστική τα δύο σώματα κινούνται μαζί και $v_{12}' = 0 \Rightarrow e = 0$. Τότε η απώλεια ενέργειας παίρνει τη μέγιστη τιμή

$$Q = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 \, .$$

Όταν η κρούση είναι ελαστική δεν υπάρχουν απώλειες κινητικής ενέργειας των σωματιδίων και περιμένουμε ότι $Q = 0 \Rightarrow e = 1$ (αρκεί για απόδειξη του ζητούμενου). Αυτό μπορούμε να το δούμε αναλυτικά από τις σχέσεις διατήρησης ορμής και κιν. ενέργειας:

$$\begin{aligned}
m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\
\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2 \, ,
\end{aligned}$$

που δίνει

$$\begin{aligned}
m_1(v_1' - v_1) &= -m_2(v_2' - v_2) \\
m_1({v_1'}^2 - v_1^2) &= -m_2({v_2'}^2 - v_2^2) \, ,
\end{aligned}$$

από όπου αναπτύσσοντας τη διαφορά τετραγώνων παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
m_1(v_1' - v_1) &= -m_2(v_2' - v_2) \\
m_1(v_1' - v_1)(v_1' + v_1) &= -m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \, .
\end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$v_1' + v_1 = v_2' + v_2 \Rightarrow v_2' - v_1' = -(v_2 - v_1) \Rightarrow v_{12}' = -v_{12} \Rightarrow e = 1 \, .$$

Παρατήρηση:
Το Q μετράει την απώλεια κιν. ενέργειας και στο σύστημα L:

$$
\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(u_1+V)^2 + \frac{1}{2}m_2(u_2+V)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + (m_1 u_1 + m_2 u_2)V \\
&= E_k^{(C)} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2
\end{aligned}
$$

Στην προτελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (γεγονός που διαφοροποιεί το σύστημα C από τα υπόλοιπα)

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1\left(-\frac{m_2 v_{12}}{m_1+m_2}\right) + m_2\left(\frac{m_1 v_{12}}{m_1+m_2}\right) = 0\,.$$

Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} E_k = E_k^{(C)} + \frac{1}{2}MV^2 \\ E_k' = E_k^{(C)\prime} + \frac{1}{2}MV'^2 \\ V = V' \end{array}\right\} \Rightarrow E_k - E_k' = E_k^{(C)} - E_k^{(C)\prime} = Q\,.$$

Η σχέση $V = V'$ προκύπτει επειδή $V = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1+m_2)$ και $V' = (m_1 v_1' + m_2 v_2')/(m_1+m_2)$ και $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ λόγω της διατήρησης της ορμής κατά την κρούση.