

## 2<sup>η</sup> Εργασία

Ημερομηνία Αποστολής : 21 Ιανουαρίου 2007

**Άσκηση 1.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του L' Hopital:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 5}{6x^2 + 2x - 3} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

(Υπόδειξη: χωρίς να την αποδείξετε χρησιμοποιήστε την σχέση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \right) = 1). \quad (9 \text{ βαθμοί})$$

**Άσκηση 2.** Ένα σωματίδιο ακολουθεί μια κυκλοειδή τροχιά:

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t) \vec{i} + (1 - \cos t) \vec{j} \quad \text{για} \quad 0 \leq t < \frac{5\pi}{2}.$$

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα  $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$  και την επιτάχυνση  $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$  του σωματιδίου για  $t = \pi/2$ .

Τη χρονική στιγμή  $t = 5\pi/2$  το σωματίδιο εγκαταλείπει την τροχιά στη διεύθυνση της εφαπτομένης και στη συνέχεια ακολουθεί μια ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα.

β) Πού βρίσκεται το σωματίδιο όταν  $t = 4\pi$ ;

γ) Να σχεδιάσετε στο  $(x, y)$  επίπεδο την πορεία του σωματιδίου από  $t = 0$  μέχρι  $t = 4\pi$ .

δ) Να αποδείξετε ότι

$$\sin(2\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha [2 \tan \alpha \cos \beta + (1 - \tan^2 \alpha) \sin \beta] \quad (12 \text{ βαθμοί})$$

**Άσκηση 3.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = \ln x$  για  $x > 0$ .

α) Να υπολογίσετε τα  $g(f(g(1)))$  και  $f(g(f(1)))$ .

β) Να υπολογίσετε το πλευρικό όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$  και επίσης  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x)$  για τη

σύνθετη συνάρτηση  $h(x) = x f(\sqrt{x}) g'(x) + f(f(g(x)))$ .

γ) Χρησιμοποιήστε τη σχέση  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

για να βρείτε την ακριβή τιμή του  $\sin(-\pi/8)$  (9 βαθμοί)

#### Άσκηση 4.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο  $dy/dx$  της συνάρτησης  $y(x)$  που ικανοποιεί την εξίσωση  $(x \cdot y^2)^2 + x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y = 0$

β) Υπολογίστε τις παραγώγους  $\frac{dy}{dx}$  και  $\frac{d^2y}{dx^2}$  της συνάρτησης  $y = \frac{e^x}{1+e^x}$

γ) Πυκνωτής φορτίζεται από ηλεκτρική πηγή τάσης  $E$  μέσω αντίστασης  $R$ . Έχοντας υπ' όψη ότι το φορτίο του πυκνωτή είναι  $q$ , το ρεύμα  $I=dq/dt$  και ότι γενικά ισχύει  $E-I \cdot R+q/C=0$  (1), όπου  $C$  η χωρητικότητα του πυκνωτή, να υπολογίσετε τις συναρτήσεις  $I = f(t)$  και  $q = f(t)$  παραγωγίζοντας την (1) ως προς τον χρόνο. Το αρχικό ρεύμα ισούται με  $I_0$  και το αρχικό φορτίο ίσο με μηδέν. **(15 βαθμοί)**

#### Άσκηση 5.

α) Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης  $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$

β) Δίνεται σύρμα μήκους  $\lambda$ , το οποίο χωρίζουμε σε δύο τεμάχια. Με το ένα κατασκευάζουμε κύκλο και με το άλλο τετράγωνο. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών κύκλου και τετραγώνου γίνεται ελάχιστο όταν ο λόγος των τεμαχίων είναι  $\pi/4$ . **(6 βαθμοί)**

#### Άσκηση 6.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της καμπύλης που περιγράφεται με την συνάρτηση  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , για  $0 \leq x \leq a$ , όπου  $a = 6.4$  cm, ξεκινώντας από την σχέση

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \cdot \frac{dx}{dx} \text{ όπου } ds \text{ στοιχειώδες τμήμα της τροχιάς}$$

και να σχεδιάσετε την καμπύλη  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  για  $0 \leq x \leq a$ , όπου  $a = 6.4$  cm

β) Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  και τους άξονες  $X$  και  $Y$ , για  $0 \leq x \leq a$ , όπου  $a = 6.4$  cm.

γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $y = x^2 - 3 \cdot x + 2$ , για  $0 \leq x \leq 2$  και το εμβαδόν του επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη  $y = x^2 - 3 \cdot x + 2$  και τους άξονες  $X$  και  $Y$ , για  $0 \leq x \leq 2$ .

δ) Υπολογίστε το εμβαδόν του επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y_1 = 2 \cdot x + 5, \quad y_2 = \frac{x}{x^2 + 5} \text{ και τις παράλληλες ευθείες στον άξονα } Y \text{ για } x = 0 \text{ και } x = 5. \text{ (15 βαθμοί)}$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 4}$

α) Να μελετήσετε την  $f(x)$  και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_3^5 f(x) dx$  και να χρωματίσετε το αντίστοιχο εμβαδόν στη γραφική παράσταση της  $f(x)$ . **(6 βαθμοί)**

### Άσκηση 8.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α)  $\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx$     β)  $\int \frac{2-x}{4x^2 + 4x - 3} dx$     γ)  $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} \left( \frac{1}{x(x-1)} \right) dx$

**(9 βαθμοί)**

### Άσκηση 9.

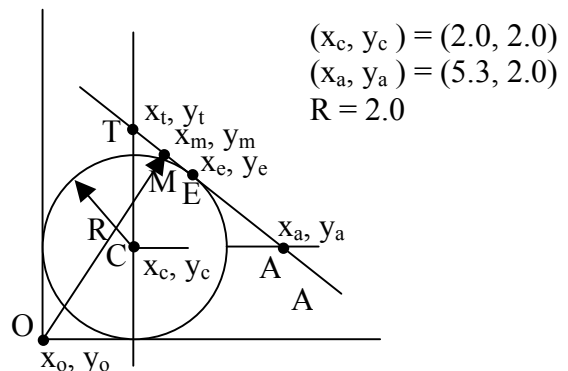
Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

α)  $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}$     β)  $\int \frac{dx}{1 + \cot \frac{x}{2}}$     γ)  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} dx$

**(9 βαθμοί)**

### Άσκηση 10.

α) Υπολογίστε την απόσταση από την αρχή των αξόνων του σημείου M, μέσω του ευθύγραμμου τμήματος TE της εφαπτομένης σε κύκλο στο σημείο E, η οποία διέρχεται από το σημείο A και τέμνεται με ευθεία η οποία είναι κάθετη στον άξονα x και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου στο σημείο T.



β) Δίνεται κύκλος με εξίσωση  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$  και ευθεία με εξίσωση  $y = \alpha \cdot x + \lambda$ . Υπολογίστε για ποιές τιμές του  $\lambda$  η ευθεία τέμνει τον κύκλο.

**(10 βαθμοί)**

