ΦΥΕ 14 ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2007-2008

1^{Η} ΕΡΓΑΣΙΑ

Ημερομηνία παράδοσης: 12 Νοεμβρίου 2007

(Όλες οι ασκήσεις βαθμολογούνται ισοτίμως με 10 μονάδες η κάθε μία)

Άσκηση 1

α) Να υπολογισθεί η προβολή του $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ πάνω στο διάνυσμα

$\vec{\varepsilon} = (-1, -1, 2)$ όταν:
$\vec{\alpha} = (2, 0, -1),\ \vec{\beta} = (-1, 3, 2),\ \vec{\gamma} = \hat{\imath}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + \hat{k}(\hat{\imath}\cdot\vec{\alpha})$.

β)Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος

$$\vec{\delta} = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\quad[(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\hat{\imath}] + (\vec{\beta}\times\vec{\gamma})(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) + [\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})](\vec{\gamma}\cdot\hat{k})\vec{\gamma}$$

όταν $\vec{\alpha} = (1, -1, 2),\quad \vec{\beta} = (-1, 0, 1),\ \vec{\gamma} = (3, 2, 1)$

Τα $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, είναι τα μοναδιαία διανύσματα.

Λύση

α) Ως γνωστόν η προβολή του $\vec{\delta}$ στο $\vec{\varepsilon}$ είναι: $\vec{\delta}\cdot\hat{\varepsilon}$ όπου $\hat{\varepsilon}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του ε, δηλ. $\hat{\varepsilon} = \frac{\vec{\varepsilon}}{|\vec{\varepsilon}|}$.

Με βάση τα δεδομένα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\vec{\delta} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma} &= (2, 0, -1) + 2(-1, 3, 2) - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}, 0, \hat{\imath}\cdot\vec{\alpha}) \\
&= (2, 0, -1) + (-2, 6, 4) - [(-2 + 0 - 2), 0, (2 + 0 + 0)] \\
&= (2, 0, -1) + (-2, 6, 4) - (-4, 0, 2) \\
&= 2 + (-2) - (-4), (0 + 6 - 0), (-1 + 4 - 2) = (2 - 2 + 4, 6, 1) \\
&= (4, 6, 1)
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}\cdot\hat{\varepsilon} = (4, 6, 1)\cdot\frac{(-1, -1, 2)}{\sqrt{1 + 1 + 4}} &= (4, 6, 1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{-4}{\sqrt{6}} + \left(\frac{-6}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\
&= \frac{-4}{\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{8}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Β) Έχουμε

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{\imath}[(-1)\cdot 1 - 2\cdot 0] + \hat{\jmath}(2\cdot(-1) - 1\cdot 1) + \hat{k}[1\cdot 0 - (-1)(-1) \Rightarrow$$
$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = -\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k} = (-1,-3,-1)$$

$$\vec{\beta}\times\vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \hat{\imath}(0\cdot 1 - 1\cdot 2) + \hat{\jmath}(1\cdot 3 - (-1)\cdot 1) + \hat{k}((-1)\cdot 2 - 0\cdot 3)$$
$$= -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k} = (-2,4,-2)$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

$$(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\hat{\imath} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)0 + 0 + 1\cdot(0-2) = 0 + 0 - 2 = -2$$

$$\vec{\gamma}\cdot\hat{k} = (3,2,1)\cdot(0,0,1) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$(\vec{\gamma}\cdot\hat{k})\vec{\gamma} = 1\cdot(3,2,1) = (3,2,1)$$

$$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-2) + (-1)(3+1) + 2(-2-0)$$
$$= -2 - 4 - 4 = -10$$

Οπότε

$$\vec{\delta} = (-1,-3,-1)\cdot(-2) + (-2,4-2)\cdot 1 + (-10)\cdot(3,2,1)$$
$$= (2,6,2,) + (-2,4,-2) + (-30,-20,-10) = (-30,-10,-10)$$

ή $\vec{\delta} = -30\,\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 10\hat{k}$

Άσκηση 2

Αν Ο, Α, Β, Γ είναι τέσσερα σημεία του χώρου, να δειχθεί ότι:

$\vec{AB}\times\vec{A\Gamma} - \vec{OB}\times\vec{O\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\vec{OA}$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι: $(\vec{AB}\times\vec{A\Gamma} - \vec{OB}\times\vec{O\Gamma})\cdot\vec{OA} = 0$

Όμως

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA}$$

οπότε

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{O\Gamma}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\times\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}\right)-\ \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{O\Gamma}=$$

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\ \times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\ \times\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{OA}\ \times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\ \times\overrightarrow{O\Gamma}=$$

$$-\overrightarrow{OB}\ \times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\ \times\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OA}\ \times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\ \times\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OA}\ \times\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\overrightarrow{OA}\ \times\overrightarrow{\Gamma B}$$

Και τελικά

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{O\Gamma})\cdot\overrightarrow{OA}=\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{\Gamma B}\right)\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

διότι το διάνυσμα που προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA}\ \times\overrightarrow{\Gamma B}$ είναι <u>κάθετο στο διάνυσμα</u> $\overrightarrow{OA}$, οπότε η γωνία μεταξύ αυτού και του $O\vec{A}$ είναι 90^o και το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν ($\cos 90^o=0$).

Άσκηση 3

A) i) Δείξτε ότι $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})$ είναι μηδέν για όλα τα διανύσματα $\vec{A}\quad \kappa\alpha\iota\quad \vec{B}$.

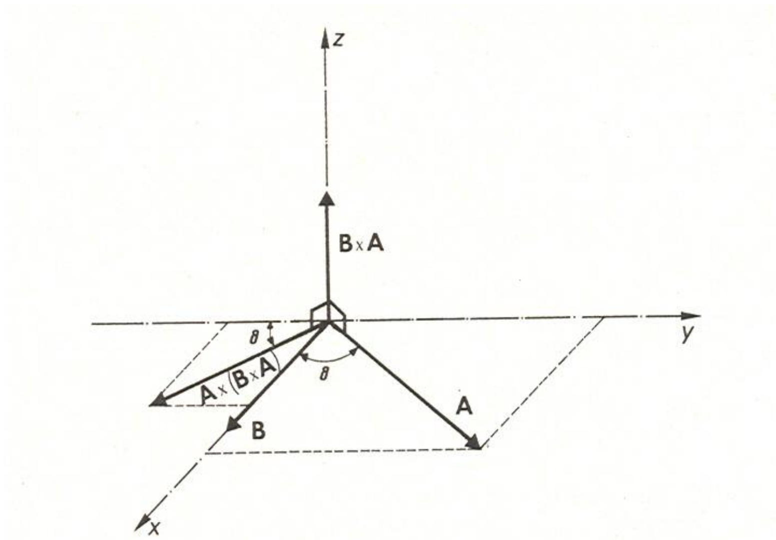
ii) Με τι ισούται το $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{A})$ αν οι διευθύνσεις των $\vec{A}\quad \kappa\alpha\iota\quad \vec{B}$ σχηματίζουν γωνία θ;

B) Δείξτε ότι αν $\vec{\alpha}\neq 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\quad(1)$

$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}\quad(2)$

τότε $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$. Αν ισχύει μόνο η μία από τις δύο, τότε δεν ισχύει πάντοτε ότι $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.



<u>**Λύση**</u>

A)

i) Επειδή το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι κάθετο στο καθένα από αυτά, έπεται ότι το διάνυσμα $\vec{C} = (\vec{B} \times \vec{A})$ είναι κάθετο στο $\vec{A}$. Τότε όμως

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = CA\cos 90^o = 0 \quad \delta\eta\lambda \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = 0$$

ii) Το $\vec{C} = (\vec{B} \times \vec{A})$ είναι κάθετο στο $\vec{A}$ και έχει μέτρο *BAsinϑ.*

Επομένως $\quad \left|\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A})\right| = A(BA\sin\vartheta)\sin 90^o = A^2 B\sin\vartheta$

Η φορά αυτού του διανύσματος βρίσκεται με τον κανόνα της δεξιάς χειρός και είναι αυτή που δείχνεται στο σχήμα.

B) Από την (1) προκύπτει ότι

$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta} - \vec{\gamma}|cos\vartheta = 0 \ \ (3)$

Από την (2) έχουμε: $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta} - \vec{\gamma}|sin\vartheta = 0 \ \ (4)$

Συνδυάζοντας, τις (3) και (4), αφού $\vec{\alpha} \neq 0$ και αφού ή το ημίτονο ή το συνημίτονο της γωνίας θ μπορεί να είναι μηδέν αλλά όχι και τα δύο ταυτοχρόνως, προκύπτει ότι:

$|\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = 0$ και άρα $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Αν ισχύει μόνο η μία από τις δύο, έστω η (1), τότε από την (3) προκύπτει ότι έχουμε δύο επιλογές:

ή $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$

ή cosθ = 0, δηλαδή $\vec{\alpha}$ κάθετο στο $(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$, οπότε στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι διάφορο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Άσκηση 4

A) Να υπολογιστούν οι πίνακες A + 2B και A – 3Γ, όταν

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, όπου i πραγματικός αριθμός.

B) Να υπολογιστεί ο πίνακας A B – Γ, όταν:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Λύση

α) Α + 2Β = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 6+2i \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

Α – 3Γ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ - 3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2i \\ 0 & -7 & -9 \end{pmatrix}$

Και

β) Α Β – Γ = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 1\cdot 1 & 1\cdot 1 - 1\cdot 0 & 1\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 0\cdot 1 & 2\cdot 1 + 0\cdot 0 & 2\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5

Α) Να υπολογιστούν οι πίνακες $A\,A^{T}$ και $A\,A$ όταν $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Β) Να υπολογιστούν οι πίνακες $A\,A^{T}$ και $A^{T}A$ όταν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Λύση

Α) Εφαρμόζοντας τον κανόνα πολλαπλασιασμού των πινάκων, έχουμε:

$A\,A^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και

$A\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Β) Ο ανάστροφος πίνακας είναι:

$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, οπότε:

$$A\,A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + 4\cdot 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 3\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 & 0\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 4\cdot 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 6

Α) Να υπολογίσετε τις τιμές του k, για τις οποίες μηδενίζεται η ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix}$.

Β) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των ακολούθων πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

Λύση

Α)Η ορίζουσα είναι: $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 2k^2 - 4k = 2k(k-2) = 0$. Άρα η ορίζουσα μηδενίζεται για k=0 και k=2.

Β)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1(2-15) - 2(-4-6) + 3(20+4) = 79$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2(10-9) + 1(-9+2) = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(6+4) = 10$$

$\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$=(a-b)(a+b) - a·a = $-b^2$

Άσκηση 7

Α) Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω σύστημα έχει ακριβώς μια λύση και να βρεθεί αυτή.

$3x - y + 2z = 10$

$x + y - 4z = -10$

$2x - 4y + 5z = 24$

Β) Θεωρείστε τα παρακάτω συστήματα

α) $\begin{aligned} x+y+az &= 1 \\ x+ay+z &= 4 \\ ax+y+z &= b \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} x+2y+2z &= 1 \\ x+ay+3z &= 3 \\ x+11y+az &= b \end{aligned}$

Για ποιες τιμές των *α,b* έχει το καθένα σύστημα μια μοναδική λύση; Η μοναδικότητα της λύσης εξαρτάται από το *b*; Γιατί;

Για ποιες τιμές των *α,b* έχει το καθένα σύστημα περισσότερες από μια λύσεις;

Λύση

Α) Αν καλέσουμε Α την ορίζουσα του πίνακα του συστήματος τότε

A= $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ = 3 $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ - (-1) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ +2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ =

=3 (5-16) + 1 (5+8)+2(-4-2) = - 32 ≠ 0

Συνεπώς το σύστημα έχει μια μόνο λύση που τη βρίσκουμε με τον κανόνα

Του Cramer. Έχουμε ότι

$\left|A^{(1)}\right|$ = $\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -10 & 1 & -4 \\ 24 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ = 10 $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ + 10 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ +24 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ = - 32

$|A^{(2)}|$ = $\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 24 & 5 \end{vmatrix}$ =96 $|A^{(3)}|$ = $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -10 \\ 2 & -4 & 24 \end{vmatrix}$ = -64

Έτσι x= $\frac{|A^{(1)}|}{|A|}$ = 1, y= $\frac{|A^{(2)}|}{|A|}$ = -3, z = $\frac{|A^{(3)}|}{|A|}$ = 2

Δηλαδή, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η (x,y,z)= (1,-3,2) € R^3 .

B)

α)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = (a-1)-(1-a)+a(1-a^2) = -a^3+3a-2$$

$$-a^3+3a-2 = -a^3+a+2a-2 = -a(a^2-1)+2(a-1) = -a(a-1)(a+1)+2(a-1)$$
$$= (a-1)[-a(a+1)+2] = (a-1)(-a^2-a+2) = (a-1)(-a^2+a-2a+2) =$$
$$(a-1)[(-a(a-1)-2(a-1)] = -(a-1)^2(a+2)$$

λύσεις *α* = 1 και *α* = -2

Συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση για $\alpha \neq 1$ $\alpha \neq -2$ ανεξαρτήτως της τιμής της σταθεράς *b*.

Για α=1 το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 4 \\ x+y+z &= b \end{aligned}$$

οπότε είναι αδύνατο.

Για α=-2 το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 1 \\ x-2y+z &= 4 \\ -2x+y+z &= b \end{aligned} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{aligned} x &= 2+z \\ y &= -1+z \\ -2x+y+z &= b \end{aligned}$$

οπότε με αντικατάσταση στην $3^η$ προκύπτει b=-5

Άρα για τα ζεύγος (*α,b*) (-2,-5) έχουμε περισσότερες από μια λύσεις .

β)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 11 & a \end{vmatrix} = 1\begin{pmatrix} a & 3 \\ 11 & a \end{pmatrix} - (2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 11 \end{pmatrix} = (a^2 - 33) - (2)(a-3) + 2(11-a) = a^2 - 4a - 5$$

$$a^2 - 4a - 5 = a^2 - 5a + a - 5 = -a(a-5) + (a-5) = (a-5)(a+1)$$

λύσεις α = 5 και α = -1 και

Συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση για $\alpha \neq 5$ $\alpha \neq -1$ ανεξαρτήτως της τιμής της σταθεράς *b*.

Για να βρούμε για ποια ζεύγη *α,b* έχει περισσότερες από μια λύση, προχωρούμε στη λύση, έτσι:

$$\begin{aligned} &x + 2y + 2z = 1 \ \rightarrow \mathrm{E}_1 \\ &x + ay + 3z = 3 \ \rightarrow \mathrm{E}_2 \\ &ax + 11y + az = b \rightarrow \ \mathrm{E}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 \rightarrow y(a-2) + z = 2 \ \rightarrow \ \ \mathrm{E}_{21} \\ &\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_1 \rightarrow 9y + z(a-2) = b - 1 \ \ \rightarrow \ \ \mathrm{E}_{31} \end{aligned} \quad \text{Και}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_{31} - (a-2)\mathrm{E}_{21} \rightarrow 9y + z(a-2) - -y(a-2)^2 - z(a-2) = b - 1 - 2(a-2) \\ &y[9 - (a-2)^2] = b - 2a + 3 \end{aligned}$$

για α = 5 $\quad b - 10 + 3 = 0 \rightarrow b = 7$,

για α = -1 $\quad b - 2(-1) + 3 = 0 \rightarrow b = -5$,

Άρα για τα ζεύγη (*α,b*), (5,7) και (-1,-5) έχουμε περισσότερες από μια λύσεις.

Η μοναδικότητα των λύσεων δεν εξαρτάται από το *b* αφού αυτό δεν υπεισέρχεται στην ορίζουσα των αγνώστων.

Άσκηση 8

A) Έστω η συνάρτηση f(x) για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0 \text{ για } x \in \Re$$

a) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

b) Να βρείτε την αντίστροφη της f

B)

a. Να βρεθούν όλα τα λ και μ για τα οποία η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda x+1}{\mu x-1}$ ταυτίζεται με την αντίστροφή της.
b. Να βρεθεί και το πεδίο ορισμού των *f* και f^{1} για κάθε *λ* και *μ*.
c. Υπάρχουν σημεία τομής των f και f^{1} για $\lambda=0$, $\mu=1$;
d. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ λ και μ ώστε οι f και f^{1} να έχουν ένα και μοναδικό σημείο τομής.

(Υποσημείωση: Διευκρινίζεται ότι $f^3(x) = (f(x))^3$ και όχι $f^3(x) = f \circ f \circ f$.)

Λύση

A)

α) Η f έχει πεδίο ορισμού αλλά και πεδίο τιμών το $\Re$.

Για κάθε $x \in \Re$ έχουμε:

$$e^{f(x)}+2f^3(x)-x+1=0 \Rightarrow e^{f(x)}+2f^3(x)+1=x$$

Έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με $f(x_1)=f(x_2)$

Τότε ισχύουν και οι σχέσεις: $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$ και $f^3(x_1)=f^3(x_2)$

Οπότε: $e^{f(x_1)}+2f^3(x_1)+1=e^{f(x_2)}+2f^3(x_2)+1 \Rightarrow x_1=x_2$

Επομένως η συνάρτηση f(x) είναι 1-1.

b) Έστω $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(x)$

Οπότε η δοθείσα ισότητα γίνεται:

$$e^y+2y^3-f^{-1}(y)+1=0 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+2y^3+1$$

Συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε ως μεταβλητή το x επομένως έχουμε:

$$f^{-1}(x)=e^x+2x^3+1$$

B)

a. $f(x)=\dfrac{\lambda x+1}{\mu x-1}=y \Rightarrow \mu xy-y=\lambda x+1 \Rightarrow x=\dfrac{y+1}{\mu y-\lambda} \Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{\mu x-\lambda}$

Πεδίο ορισμού της *f*(x) είναι όλα τα x για τα οποία ισχύει x ≠ 1/μ και της f^{-1}(x) εκείνα για τα οποία ισχύει x ≠ λ/μ.

Για να ταυτίζονται οι *f*(x) και f^{-1}(x), θα πρέπει λ=1 και x ≠ 1/μ.

b. Βάσει των προηγουμένων θα πρέπει $x \neq \dfrac{1}{\mu}$ για την f και $x \neq \dfrac{\lambda}{\mu}$ για την f^{-1}.

c. Έχουμε $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ με λύση $x = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2} = f(x) = f^{-1}(x)$ και επομένως υπάρχουν δυο σημεία τομής ΄πάνω στην ευθεία $y = x$.

d. Έχουμε $\dfrac{\lambda x+1}{\mu x-1} = \dfrac{x+1}{\mu x-\lambda} \Rightarrow \mu\ \ \lambda-1\ \ x^2 +\ \ 1-\lambda^2\ \ x +\ \ 1-\lambda\ \ = 0$. Για να έχουμε μία λύση θα πρέπει για $\mu \neq 1 \quad \lambda \neq 1$ η διακρίνουσα να είναι μηδέν που οδηγεί σε

$$1-\lambda^2\ \ ^2 + 4\mu(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2\left[(1+\lambda)^2 + 4\mu\right] = 0 \ \ \textit{δηλαδή}\ \ (1+\lambda)^2 + 4\mu = 0$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 9

Α) Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda^2-1)x^2+(\lambda+1)x+1$. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε:

α) να έχει 2 αρνητικές ρίζες και

β) να έχει 2 αντίστροφες ρίζες.

Β)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^2+\lambda x+1$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η γραφική της παράσταση:

α) εφάπτεται στον άξονα xx΄

β) έχει άξονα συμμετρίας τον yy΄ και

γ) έχει κορυφή ένα σημείο με τεταγμένη 4.

Λύση

Α) Για να είναι η έκφραση $(\lambda^2-1)x^2+(\lambda+1)x+1$ τριώνυμο, θα πρέπει

$$\lambda^2 - 1 \neq 0 \text{ οπότε } \lambda \neq \pm 1 \qquad (1)$$

Άρα:

α) Για να έχει δύο ρίζες πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μεγαλύτερη η ίση του μηδενός. Αρα $(\lambda+1)^2-4(\lambda^2-1)\geq 0 \Rightarrow -3\lambda^2+2\lambda+5\geq 0$.

Για να ισχύει όμως η προηγούμενη ανισότητα πρέπει το λ να παίρνει τιμές μεταξύ των ριζών λ_1 = -1 και $\lambda_2 = \frac{10}{6}$ του τριωνύμου $-3\lambda^2+2\lambda+5$. Άρα $-1 \le \lambda \le \frac{10}{6}$ (2)

Για να είναι αρνητικές πρέπει το άθροισμα των ριζών να είναι αρνητικό αλλά και το γινόμενό τους να είναι θετικό.

Επομένως ισχύει:

$$-\frac{\beta}{\alpha}<0 \Rightarrow -\frac{\lambda+1}{\lambda^2-1}<0 \Rightarrow \lambda \ne -1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{1}{\lambda-1}<0 \Rightarrow \lambda \ne 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \lambda>1. \qquad (3)$$

Αλλά και

$$\frac{\gamma}{\alpha}>0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2-1}>0 \Rightarrow \lambda^2-1>0 \Rightarrow \lambda>1 \, ή \quad \lambda<-1 \qquad (4)$$

Το διάστημα στο οποίο ικανοποιούνται το σύνολο των ανισοτήτων (1) , (2) και (3) και (4) είναι $1<\lambda \le \frac{10}{6}$.

β) Για να έχει δύο αντίστροφες ρίζες πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha}=1 \Rightarrow \frac{1}{(\lambda^2-1)}=1 \Rightarrow \lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda_1=\sqrt{2}, \lambda_2=-\sqrt{2}$.Επειδή όμως πρέπει να ισχύει και η (2) είναι δεκτή μόνο η τιμή της λ_1.

B) Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, το τριώνυμο ορίζεται εφ' όσον $\lambda \ne 0$.

α) Για να εφάπτεται στον άξονα xx΄ πρέπει να έχει διπλή ρίζα. Είναι επομένως $\Delta=0 \Rightarrow$

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 4.$$

Από τις δύο αυτές λύσεις δεκτή είναι η λ=4, αφού το τριώνυμο ορίζεται εφ' όσον $\lambda \ne 0$.

β) Για να έχει άξονα συμμετρίας τον yy΄ πρέπει

$$f(x)=f(-x) \Rightarrow \lambda x^2+\lambda x+1=\lambda x^2-\lambda x+1 \Rightarrow 2\lambda x=0 \Rightarrow \lambda=0 .$$

Αλλά για λ = 0, η συνάρτηση εκφυλίζεται αφού περιορίζεται σε μία σταθερά ($f(x)=1$) δηλαδή είναι ευθεία και ως εκ τούτου έχει άξονα συμμετρίας τον yy' (αλλά η λύση είναι εκφυλισμένη).

γ) Η κορυφή του τριωνύμου είναι το σημείο

$$\mathrm{M}\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)=\mathrm{M}\left(-\frac{\lambda}{2\lambda}, f\left(-\frac{\lambda}{2\lambda}\right)\right)=\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2},\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2}+1\right)\Rightarrow\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2}+1=4\Rightarrow\lambda=-12.$$

Άσκηση 10

Α)

α) Να ευρεθεί το $\lambda\in\Re$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\left[\lambda x^2+(\lambda-3)x+1\right]$ να έχει πεδίο ορισμού το $\Re$.

β) Εάν $(fog)(x)=x^2+x-12$ και $g(x)=x-3$, να ευρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

γ) Η συνάρτηση f είναι 1-1 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(3, 2006) και Β(4,2007). Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left[-1+f(x^2-12)\right]=3$

Β)

Δίδεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-2x^2}$. Δίδεται επίσης η συνάρτηση $g(x)=\sin x$ με πεδίο ορισμού $0,2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$.Να εξετάσετε αν υπάρχει η συνάρτηση fog και αν ναι, βρείτε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της. Να επαναλάβετε για την σύνθετη συνάρτηση gof.

Λύση

Α)

α) Καταρχήν για Να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left[\lambda x^2+(\lambda-3)x+1\right]$ θα πρέπει να ισχύει: $\lambda x^2+(\lambda-3)x+1>0$ για κάθε $x\in\Re$.

Αυτό είναι αληθές μόνον εάν ισχύουν: $\Delta<0$ και $\lambda>0$

Οπότε: $\Delta<0\Rightarrow(\lambda-3)^2-4\lambda<0\Rightarrow\lambda^2-10\lambda+9<0$

Λύνοντας την ανίσωση διαπιστώνουμε ότι ισχύει για $1<\lambda<9$.

β) Έχουμε: $(fog)(x)=x^2+x-12\Rightarrow f(g(x))=x^2+x-12\Rightarrow f(x-3)=x^2+x-12$

Θέτουμε $x-3=y\Leftrightarrow x=y+3$ Επομένως:

$$f(y) = (y+3)^2 + (y+3) - 12 = y^2 + 6y + 9 + y + 3 - 12 = y^2 + 7y$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή έχουμε: $f(x) = x^2 + 7x$

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(3, 2006) και Β(4,2007). Επίσης η συνάρτηση f(x) είναι 1-1. Επομένως έχουμε:

$$f(3) = 2006$$

$$f(4) = 2007$$

Άρα

$$f^{-1}(2006) = 3$$

$$f^{-1}(2007) = 4$$

$$f^{-1}\left[-1 + f(x^2 - 12)\right] = 3 \Leftrightarrow f^{-1}\left[-1 + f(x^2 - 12)\right] = f^{-1}(2006) \Leftrightarrow$$

$$-1 + f(x^2 - 12) = 2006 \Leftrightarrow f(x^2 - 12) = 2007 \Leftrightarrow f(x^2 - 12) = f(4) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 12 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Β)

Έχουμε την συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}}$. Θα βρούμε καταρχήν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής. Πρέπει:

$\boldsymbol{1 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}}$ Επομένως το πεδίο ορισμού της f(x) είναι το $\boldsymbol{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$

Για την συνάρτηση g(x) το πεδίο ορισμού της είναι το $\boldsymbol{[0, 2k\pi]}$ ενώ το πεδίο τιμών της είναι το $\boldsymbol{[-1, 1]}$ γιατί το sinx παίρνει τιμές ανάμεσα στο -1 και στο 1.

Παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της g(x) δεν είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f(x).

Επομένως για να υπάρχει η συνάρτηση fog πρέπει το πεδίο τιμών της g(x) να είναι το $\boldsymbol{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$

Τότε ισχύει : $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$

Αυτό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fog.

Επομένως εάν $x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ τότε υπάρχει η συνάρτηση fog με τύπο:

$fog = f \quad g \quad x \quad = \sqrt{1 - 2\sin^2 x} = \sqrt{\cos 2x}$ και πεδίο ορισμού την ένωση των συνόλων, $\left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ για όλους τους ακεραίους αριθμούς *k*.

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για την συνάρτηση gof. Προκύπτει:

$gof = \sin \quad \sqrt{1 - 2x^2}$ με $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.