Εργασία 2

Παράδοση 20/1/08
Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:
Α.
$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$
Β.
$$\lim_{\beta\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\beta x}-\mathrm{e}^{-\beta x}}{\mathrm{e}^{\beta x}+\mathrm{e}^{-\beta x}+\mathrm{e}^{\beta y}}$$
Γ. όπου $x>0, \quad y>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
Δ. όπου $f(x)=\sqrt{5x+1}$
Κάνετε απευθείας τις πράξεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε παραγώγους.
Επιβεβαιώστε ότι το παραπάνω όριο ισούται με $f'(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^3}$$
Ε.
$$\lim_{x\to 2}\frac{4+7^{1/x}}{2+5^{1/x}}$$
ΣΤ.

Λύση
Α.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{7x^2+2x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3-(2/x)+(1/x^2)\right)}{x^2\left(7+(2/x)+(4/x^2)\right)}=\frac{3-0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}$$
Β.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(x^2+5)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}\\
&= \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})=3+\sqrt{2^2+5}=6
\end{aligned}$$
Γ.
$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\beta x}-\mathrm{e}^{-\beta x}}{\mathrm{e}^{\beta x}+\mathrm{e}^{-\beta x}+\mathrm{e}^{\beta y}} &= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\beta x}(1-\mathrm{e}^{-2\beta x})}{\mathrm{e}^{\beta x}(1+\mathrm{e}^{-2\beta x}+\mathrm{e}^{\beta(y-x)})}\\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta x}}{1+\mathrm{e}^{-2\beta x}+\mathrm{e}^{\beta(y-x)}}
\end{aligned}$$

Έστω
$x > y.\ \ x > y \Rightarrow y - x < 0 \Rightarrow \lim_{\beta\to+\infty} \mathrm{e}^{\beta(y-x)} = 0$

και $x > 0 \Rightarrow \lim_{\beta\to+\infty} \mathrm{e}^{-2\beta x} = 0$. Τότε το ζητούμενο όριο είναι

$$= \frac{1-0}{1+0+0} = 1$$

Έστω $x < y.\ x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow \lim_{\beta\to+\infty} \mathrm{e}^{\beta(y-x)} = +\infty$

Τότε το ζητούμενο όριο είναι $= \dfrac{1-0}{1+0+(+\infty)} = 0$.

Έστω $x = y.\ \mathrm{e}^{\beta(y-x)} = \mathrm{e}^0 = 1$. Τότε το ζητούμενο όριο είναι

$$= \frac{1-0}{1+0+1} = \frac{1}{2}.$$

Δ.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1}-\sqrt{5x+1}}{h} \\
= \quad \lim_{h\to 0} &\frac{(\sqrt{5(x+h)+1}-\sqrt{5x+1})(\sqrt{5(x+h)+1}+\sqrt{5x+1})}{h(\sqrt{5(x+h)+1}+\sqrt{5x+1})} \\
= \quad \lim_{h\to 0} &\frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h(\sqrt{5(x+h)+1}+\sqrt{5x+1})} \\
= \quad \lim_{h\to 0} &\frac{5h}{h(\sqrt{5(x+h)+1}+\sqrt{5x+1})} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}
\end{aligned}$$

Πράγματι, το όριο είναι ίσο με $f'(x)$ αφού

$$(\sqrt{5x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{5x+1}}(5x+1)' = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

Ε. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{[x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)]'}{[x^3]'} \\
\lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1}{3x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{[x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1]'}{[3x^2]'} \\
\lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x}{6x} = \frac{\mathrm{e}^0}{6} &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

ΣΤ. $\quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4+7^{1/x}}{2+5^{1/x}} = \dfrac{4+\sqrt{7}}{2+\sqrt{5}}$

2 Μελετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις: Βρείτε τα πεδία ορισμού, τιμών, ακρότατα, σημεία καμπής, διαστήματα μονοτονίας, ασύμπτωτες (οριζόντιες, κάθετες ή πλάγιες). Διερευνήστε αν είναι συνεχείς και κάνετε τη σχετική γραφική παράσταση.

A. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

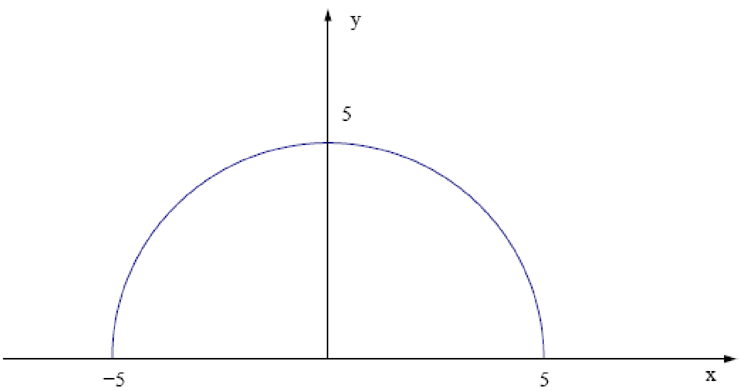
B. $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1}$

<u>Υπόδειξη</u>: Η ευθεία $y = ax + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης αν $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - y) = 0$ Τότε $a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$ και $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax)$.

Λύση

A.

Για να είναι η συνάρτηση καλά ορισμένη πρέπει $25 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[-5, 5]$. Αφού $y = \sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25 - y^2}$ έχω ότι



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

$y \in [-5,5]$. Αλλά από τον ορισμό της f έχω $y \geq 0$ άρα $y \in [0,5]$. Το σύνολο τιμών είναι το $[0,5]$.

Τώρα υπολογίζουμε

$$f'(x) = \left(\sqrt{25-x^2}\right)' = \boxed{\frac{\left(25-x^2\right)'}{2\sqrt{25-x^2}}} = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

και παίρνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 5$, τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Έχουμε

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)' \\ &= \frac{-\sqrt{25-x^2} + x\left(-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)}{\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2} \\ &= \frac{(25-x^2)+x^2}{(25-x^2)\sqrt{25-x^2}} \\ &= -\frac{25}{(25-x^2)^{3/2}} < 0 \end{aligned}$$

Άρα το $x = 0$ είναι τοπικό μέγιστο. Αφού $f(0) = 5$ είναι η μέγιστη τιμή αυτό είναι το ολικό μέγιστο της $f(x)$.

Για $x < 0$, $f'(x) > 0$ και η $f(x)$ είναι αύξουσα. Για $x > 0$, $f'(x) < 0$ και η $f(x)$ είναι φθίνουσα. Αφού $f''(x) < 0$ για $x \in (-5,5)$ δεν έχω σημεία καμπής.

Η συνάρτηση είναι παντού συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Δεν έχει κάθετες ασύμπτωτες αφού $-\infty < 0 \leq f(x) \leq 5 < +\infty$. Το πεδίο ορισμού δεν εκτείνεται στο $\pm\infty$ άρα δεν έχω οριζόντιες / πλάγιες ασύμπτωτες.

B.

Το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Για το πεδίο τιμών θέτουμε

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x^2+3x-2}{x-1} \Leftrightarrow \\ 0 &= 2x^2+(3-y)x+(y-2) \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{4}\left(-3+y\pm\sqrt{y^2-14y+25}\right) \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα στο υπόριζο του τριώνυμου είναι $\Delta = 14^2-4\cdot 25 = 96>0$ και έχω $y^2-14y+25=(y-7+2\sqrt{6})(y-7-2\sqrt{6})$ που είναι θετικό ή μηδέν όταν $y\in(-\infty,7-2\sqrt{6}]\cup[7+2\sqrt{6},+\infty)\approx(-\infty,2.101]\cup[11.899,+\infty)$ που είναι και το σύνολο τιμών.

$$g'(x)=\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-\frac{1}{2}(2-\sqrt{6}))(x-\frac{1}{2}(2+\sqrt{6}))}{(x-1)^2}$$

και

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-4x-1=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & =\frac{1}{2}(2-\sqrt{6})\approx -0.2247 \\ x_2 & =\frac{1}{2}(2+\sqrt{6})\approx 2.2247 \end{array}\right.$$

Η συνάρτηση είναι αυστηρώς αύξουσα όταν:

$$g'(x)>0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 2x^2-4x-1 & >0 \\ x & \neq 1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow x\in(-\infty,\frac{2-\sqrt{6}}{2})\cup(\frac{2+\sqrt{6}}{2},+\infty)$$

Η συνάρτηση είναι αυστηρώς φθίνουσα όταν:

$$g'(x)<0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 2x^2-4x-1 & <0 \\ x & \neq 1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow x\in(\frac{2-\sqrt{6}}{2},1)\cup(1,\frac{2+\sqrt{6}}{2})$$

Άρα για

$$\left.\begin{array}{rl} x<x_1 & g'(x)>0 \\ 1>x>x_1 & g'(x)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow \quad x_1 \quad \text{τοπικό μέγιστο}$$

και για

$$\left.\begin{array}{rl} 1<x<x_2 & g'(x)<0 \\ x>x_2 & g'(x)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \quad x_2 \quad \text{τοπικό ελάχιστο}$$

Δεν υπάρχουν σημεία καμπής γιατί

$$g''(x) = \frac{6}{(x-1)^3} \Rightarrow g''(x) \neq 0 \text{ στο } (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Έχω $\lim_{x\to 1^+} = +\infty$ $\lim_{x\to 1^-} = -\infty$ αφού ο αριθμητής της $g(x)$ είναι θετικός για $x = 1$. Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κάθετη ασύμπτωτη της $g(x)$.
Δεν έχω οριζόντιες ασύμπτωτες γιατί

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x-2}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x\frac{2+0-0}{1-0} = \lim_{x\to\pm\infty} 2x = \pm\infty\end{aligned}$$

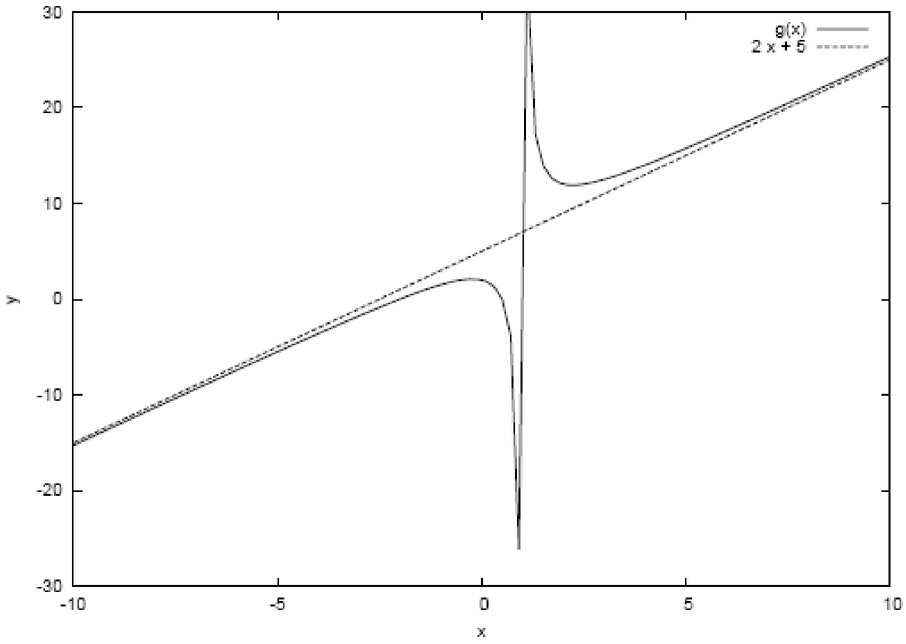
Αλλά

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x})} = 2$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} (g(x)-2x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2+3x-2}{x-1} - 2x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x-2-2x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-2}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(5-\frac{2}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = 5\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $g(x)$.



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της $g(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x-1}$.

3. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = R\cos(2\pi t)\,\hat{\imath} + R\sin(2\pi t)\,\hat{\jmath}$.

    Α. Σχεδιάστε στο επίπεδο τα σημεία που διατρέχει η κορυφή του διανύσματος $\vec{r}(t)$ για $0 \le t \le 1$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{r}(1/8)$.

    Β. Υπολογίστε τη διανυσματική συνάρτηση $\hat{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$ και δείξτε ότι $\hat{v} \perp \vec{r}(t)$.

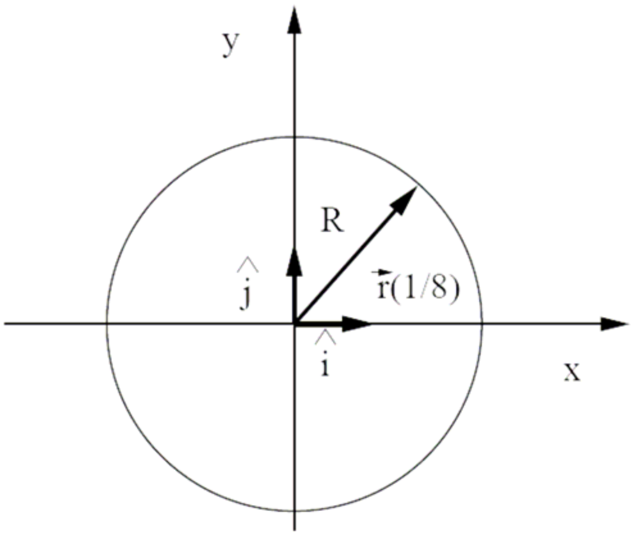
    Γ. Υπολογίστε τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{\kappa}(t) = \dfrac{d\hat{v}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$ και σχεδιάστε το $\vec{\kappa}(1/8)$. Δείξτε ότι $|\vec{\kappa}(t)| = 1/R$ και ότι $\vec{\kappa}(t) \perp \hat{v}(t)$.

    Δ. Υπολογίστε τη διανυσματική συνάρτηση $\hat{b}(t) = \hat{v}(t) \times \hat{\kappa}(t)$ όπου $\hat{\kappa} = \vec{\kappa}/|\vec{\kappa}|$.

Σχόλιο: Στον κλάδο των μαθηματικών που λέγεται διαφορική γεωμετρία, το σύστημα των διανυσμάτων $\{\hat{v}, \hat{\kappa}, \hat{b}\}$ αποτελεί σε κάθε σημείο μιας καμπύλης ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων, το εφαπτόμενο διάνυσμα, το πρώτο και δεύτερο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη αντίστοιχα. Το διάνυσμα $\vec{\kappa}(t)$ είναι σε κάθε σημείο της καμπύλης το διάνυσμα της καμπυλότητας. Έχει την τιμή που θα περιμένατε; (εκτός βαθμολογίας)

Λύση

A. Η καμπύλη δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:



Σχήμα 3: Ο κύκλος ακτίνας R που διαγράφει η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ και το διάνυσμα $\vec{r}(1/8) = (R/\sqrt{2})\hat{i} + (R/\sqrt{2})\hat{j}$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= R\cos(2\pi t)\,\hat{i} + R\sin(2\pi t)\,\hat{j} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = & R\cos(2\pi t) \\ y(t) = & R\sin(2\pi t) \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα παίρνουμε

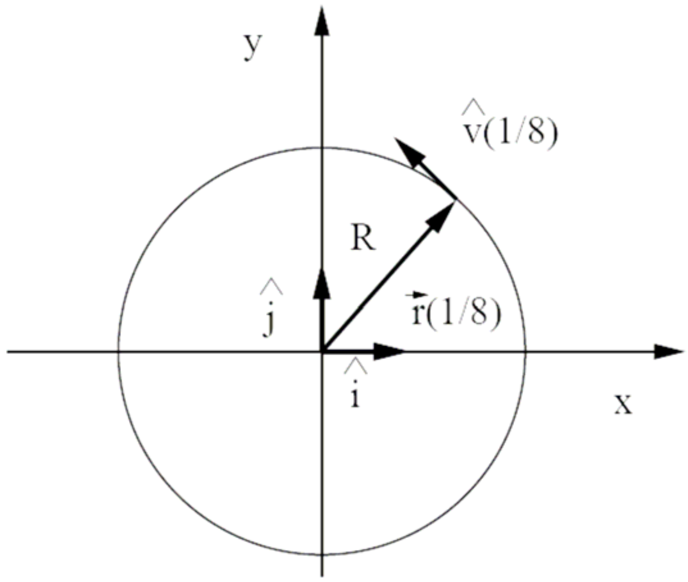
$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)) = R^2$$

που δείχνει ότι η κορυφή του διανύσματος $\vec{r}(t)$ διαγράφει κύκλο ακτίνας R. Για $t = 1/8$ παίρνουμε

$$\vec{r}(\frac{1}{8}) = R\cos(2\pi\frac{1}{8})\,\hat{i} + R\sin(2\pi\frac{1}{8})\,\hat{j} = R\cos(\frac{\pi}{4})\,\hat{i} + R\sin(\frac{\pi}{4})\,\hat{j} = \frac{R}{\sqrt{2}}\,\hat{i} + \frac{R}{\sqrt{2}}\,\hat{j}$$

B.

Παραγωγίζοντας παίρνουμε



Σχήμα 4: Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\hat{v}(1/8) = -(1/\sqrt{2})\hat{\imath} + (1/\sqrt{2})\hat{\jmath}$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -2\pi R \sin(2\pi t)\,\hat{\imath} + 2\pi R \cos(2\pi t)\,\hat{\jmath}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| &= \sqrt{(-2\pi R \sin(2\pi t))^2 + (2\pi R \cos(2\pi t))^2} \\ &= \sqrt{(2\pi R)^2 (\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t))} \\ &= \sqrt{(2\pi R)^2 \cdot 1} = 2\pi R \end{aligned}$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)/dt}{|d\vec{r}(t)/dt|} = -\sin(2\pi t)\,\hat{\imath} + \cos(2\pi t)\,\hat{\jmath}$$

Πράγματι είναι μοναδιαίο αφού

$$|\hat{v}(t)| = \sqrt{(-\sin(2\pi t))^2 + (\cos(2\pi t))^2} = 1$$

που είναι αναμενόμενο αφού

$$|\hat{v}(t)| = \left|\frac{d\vec{r}(t)/dt}{|d\vec{r}(t)/dt|}\right| = \frac{|d\vec{r}(t)/dt|}{|d\vec{r}(t)/dt|} = 1$$

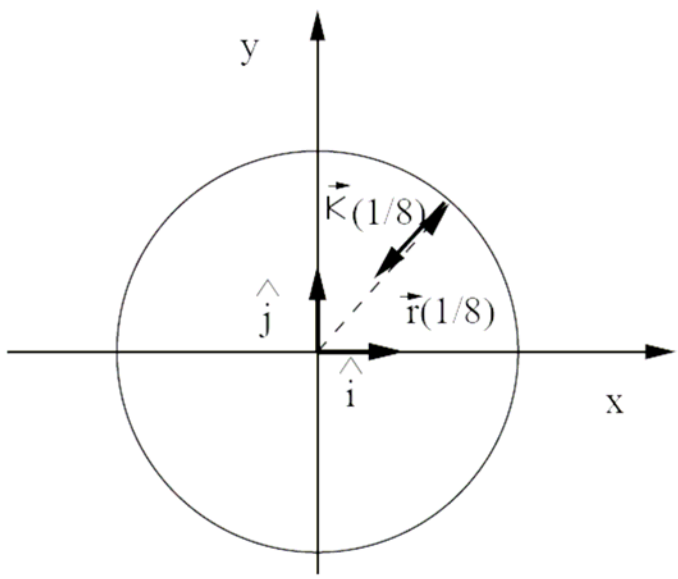
Πολλαπλασιάζοντας τα διανύσματα με το εσωτερικό γινόμενο παίρνω

$$\begin{aligned}
\hat{v}(t)\cdot\vec{r}(t) &= \left(-\sin(2\pi t)\,\hat{\imath} + \cos(2\pi t)\,\hat{\jmath}\right)\cdot\left(R\cos(2\pi t)\,\hat{\imath} + R\sin(2\pi t)\,\hat{\jmath}\right) \\
&= -R\sin(2\pi t)\cos(2\pi t) + R\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Άρα $\hat{v}(t) \perp \vec{r}(t)$ και $\hat{v}(t)$ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο.

Γ.

Παραγωγίζοντας την $\hat{v}(t)$ παίρνουμε



Σχήμα 5: Το διάνυσμα της καμπυλότητας $\vec{\kappa}(1/8) = -(1/\sqrt{2}R)\hat{\imath} - (1/\sqrt{2}R)\hat{\jmath}$

$$\frac{d\hat{\upsilon}}{dt} = -2\pi\cos(2\pi t)\,\hat{\imath} - 2\pi\sin(2\pi t)\,\hat{\jmath}$$

και όπως είπαμε παραπάνω $|d\vec{r}(t)/dt| = 2\pi R$ οπότε

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\hat{v}(t)/dt}{|d\vec{r}(t)/dt|} = -\frac{1}{R}\cos(2\pi t)\,\hat{i} - \frac{1}{R}\sin(2\pi t)\,\hat{j}$$

Παρατηρώ ότι

$$\vec{\kappa}(t) = -\frac{1}{R^2}\vec{r}(t)$$

που είναι αντίθετο στο $\vec{r}(t)\ \forall\ t$ άρα και κάθετο στο $\hat{v}(t)$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\vec{\kappa}(t)\cdot\hat{v}(t) &= \left(-\frac{1}{R}\cos(2\pi t)\,\hat{i} - \frac{1}{R}\sin(2\pi t)\,\hat{j}\right)\cdot\left(-\sin(2\pi t)\,\hat{i} + \cos(2\pi\right. \\
&= \frac{1}{R}\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) - \frac{1}{R}\sin(2\pi t)\cos(2\pi t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Το μέτρο του διανύσματος της καμπυλότητας είναι

$$\begin{aligned}
|\vec{\kappa}(t)| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{R}\cos(2\pi t)\right)^2 + \left(-\frac{1}{R}\sin(2\pi t)\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{R^2}\left(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{R^2}\cdot 1} = \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

Για $t = 1/8$ παίρνουμε

$$\vec{\kappa}(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{R}\cos(\frac{\pi}{4})\,\hat{i} - \frac{1}{R}\sin(\frac{\pi}{4})\,\hat{j} = -\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}R} - \frac{\hat{j}}{\sqrt{2}R}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\kappa}(t)$ στη διεύθυνση του $\vec{\kappa}(t)$ δίνεται από

$$\hat{\kappa}(t) = \frac{\vec{\kappa}(t)}{|\vec{\kappa}(t)|} = -\cos(\frac{\pi}{4})\,\hat{i} - \sin(\frac{\pi}{4})\,\hat{j}$$

Δ.

Το διάνυσμα $\hat{b}(t) = \hat{v}(t)\times\hat{\kappa}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\begin{aligned}
\hat{b}(t) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ -\cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{k}\begin{vmatrix} -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \\ -\cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \end{vmatrix} \\
&= \hat{k}\left(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\right) = \hat{k}
\end{aligned}$$

που φυσικά είναι μοναδιαίο και κάθετο στα $\hat{v}(t)$ και $\hat{\kappa}(t)$.

4.
Α. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$$

Β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\, dx$$

Γ. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ των γραφικών παραστάσεων $y = \sin x$, $y = \sin^3 x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Λύση

Α. Αναλύουμε το ολοκλήρωμα σε δύο άλλα ολοκληρώματα και έχουμε

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{0} \frac{e^t}{t}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt = -\int_{0}^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή στο πρώτο ολοκλήρωμα $u = \sqrt{x}$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\Big(-\int_{0}^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}\, dt + \int_{0}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt \Big) = -\frac{d}{du}\Big(\int_{0}^{u} \frac{e^t}{t}\, dt \Big) \cdot \frac{du}{dx} + \frac{e^x}{x}$$

Αφού $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ έχουμε

$$F'(x) = -\frac{e^u}{u} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{e^x}{x} = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x} + \frac{e^x}{x}$$

Β. Θέτουμε $u = x^2 + 4x$ και επομένως $du = (2x+4)dx = 2(x+2)dx$
Άρα έχουμε

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\, dx = \int \frac{x+2}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2(x+2)} = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du = \sqrt{u} = \sqrt{x^2+4x} + C$$

Γ. Έχουμε $0 \leq \sin x \leq 1$ και επομένως $(\sin x)^3 \leq \sin x$. Άρα το πάνω όριο είναι $y = \sin x$ και το κάτω $y = \sin^3 x$. Άρα

Επιφάνεια= $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin^3 x)\, dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(1-\sin^2 x\right)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx \\
&= \int_1^0 u^2\,(-du) = \int_0^1 u^2\, du \\
&= \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Όπου έγινε αλλαγή μεταβλητής $u = \cos x$

5.
Α. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\, d\theta$$

Β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \cos(\sqrt{x})dx$$

Γ. Έστω $f(x) = \int_1^{x^2} \sin t^3 dt + x^3$

Βρείτε τα $f(1)$ και $f'(x)$.

Λύση

Α. Λόγω συμμετρίας (άρτια συνάρτηση) έχουμε

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\, d\theta$$

Θέτουμε $u = \sin\theta$, $du = \cos\theta d\theta$. Για $\theta = 0,\ u = \sin 0 = 0$ και για $\theta = \frac{\pi}{2},\ u = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Επομένως

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\, d\theta = 2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\, du = 2\arctan(u)\Big|_0^1 = 2\Big(\frac{\pi}{4}-0\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Β. Θέτουμε $t = \sqrt{x}$ και $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ ή $dx = 2\sqrt{x}\, dt = 2t\, dt$. Επομένως

$$\int \cos(\sqrt{x})dx = 2\int t\cos t dt.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$
\begin{aligned}
2\int t\cos t dt &= \int u dv = uv - \int v du \\
&= 2t\sin t - 2\int \sin t dt = 2t\sin t + 2\cos t + C.
\end{aligned}
$$

Θέτοντας ξανά $t = \sqrt{x}$ παίρνουμε τελικά

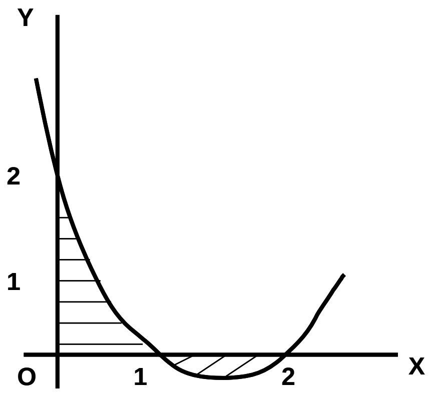
$$\int \cos(\sqrt{x})dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C.$$

Γ. Είναι προφανές ότι $f(1) = 1^3 = 1$ λόγω των ορίων ολοκλήρωσης. Θέτοντας $u = x^2$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

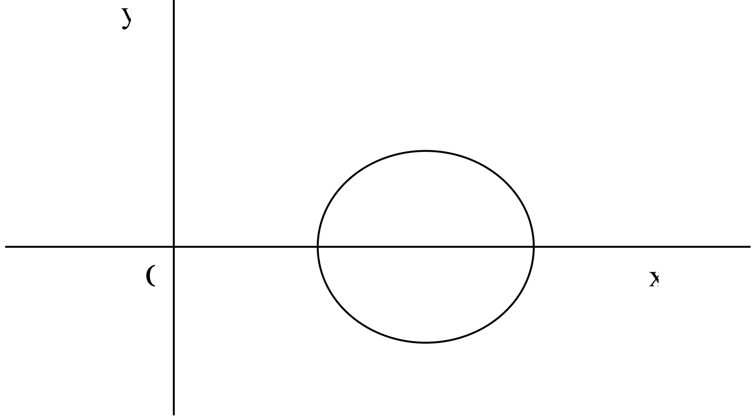
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{du}{dx}\,\frac{d}{du}\left(\int_1^u \sin t^3 dt\right)\bigg|_{u=x^2} + 3x^2 \\ &= 2x\,(\sin u^3)\big|_{u=x^2} + 3x^2 = 2x\sin x^6 + 3x^2. \end{aligned}$$

6.

Α. Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη της $y = x^2 - 3x + 2$ και τον άξονα των x.



Β. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $x = 3 + \cos\theta, y = 4\sin\theta$



Λύση

Α. Επειδή $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, η καμπύλη τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$.

Επίσης $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$. Άρα υπάρχει ένα σημείο ακρότατου όταν $x = \frac{3}{2}$

Επειδή $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ και είναι μονίμως θετική, το σημείο αυτό είναι σημείο ελαχίστου.

Η καμπύλη παριστάνεται στο σχήμα και το ζητούμενο εμβαδόν βρίσκεται ολόκληρο κάτω από τον ημιάξονα ΟΧ.

Ἐστω E_1 το εμβαδόν αυτό.

Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα ήταν $E = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx =$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) = -\frac{1}{6}$$

Επειδή το εμβαδόν είναι θετικός αριθμός, γι' αυτό το παραπάνω αποτέλεσμα είναι E=1/6

Το εμβαδόν κάτω από τη καμπύλη μεταξύ x = 0 και x = 1, δηλαδή το εμβαδόν που είναι γραμμοσκιαμένα με οριζόντιες γραμμές στο σχήμα δίνεται από το

$$E_2 = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{5}{6}$$

Συνεπώς το ολικό πραγματικό εμβαδόν είναι 1/6 + 5/6 = 1

Β. Τα όρια της σκιασμένης περιοχής στο σχήμα, ($\frac{1}{4}$ της απαιτούμενης περιοχής) περιγράφεται από δεξιά προς αριστερά καθώς το θ κυμαίνεται από 0 ως $\frac{1}{2}\pi$. Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι

$$A = 4\left|\int_0^{\pi/2} y dx\right| = -4\int_0^{\pi/2} (4\sin\theta)(-\sin\theta)\,d\theta = 16\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = 8\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)d\theta =$$

$$= 8\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi$$

7.

Α. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

Β. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx$

Γ. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

Λύση

Α. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε $u = x$, $dv = \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ και $du = dx$, $v = -\cot x$. Επομένως

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\, dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} u dv = uv|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} v du \\ &= -x\cot x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2,\end{aligned}$$

αφού $\cot\frac{\pi}{4} = 1$, $\cot\frac{\pi}{2} = 0$.

Β. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} (\ln x)^2\, dx &= x(\ln x)^2\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} (\ln x)^1\, dx \\ &= e^2(\ln e^2)^2 - 1(\ln 1)^2 - 2\left((x\ln x)|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx\right) \\ &= e^2(2\ln e)^2 - 0 - 2\left((e^2\ln(e^2) - 0) - (e^2 - 1)\right) \\ &= 4e^2 - 0 - 2\left((e^2 2 - 0) - e^2 + 1\right) \\ &= 4e^2 - 4e^2 + 2e^2 - 2 = 2e^2 - 2\end{aligned}$$

Γ.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos(\pi/2 - x)}$$

$1+\cos(\pi/2 - x) = 1 + \cos\left(2(\pi/4 - x/2)\right) = 1 + 2\cos^2(\pi/4 - x/2) - 1$

$$\int \frac{dx}{2\cos^2(\pi/4 - x/2)} = -\int \frac{d(\pi/4 - x/2)}{\cos^2(\pi/4 - x/2)} = -\int \frac{dz(\cos^2 z + \sin^2 z)}{\cos^2 z} =$$

$$-\int \frac{\cos z(\sin z)' - \sin z(\cos z)'}{\cos^2 z}\, dz = \int \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) dz = -\tan(z) = -\tan(\pi/4 - x/2)$$

8. Δίδονται τρία σημεία στο χώρο με συντεταγμένες Α(10,0), Β(0,0) και Γ(0,10) τα οποία αποτελούν κορυφές τριγώνου. Να βρεθούν: α) η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου και β) η εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου στο παραπάνω τρίγωνο.
Υπόδειξη: Από την ευκλείδειο γεωμετρία γνωρίζουμε ότι στον εγγεγραμμένο κύκλο οι πλευρές του τριγώνου είναι εφαπτόμενες στον κύκλο.

Λύση:

α) Έστω ότι η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου είναι $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.
Τα σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στον κύκλο άρα θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου. Συνεπώς θα ισχύουν αντίστοιχα οι εξής τρεις εξισώσεις:

$$(10-x_0)^2+(-y_0)^2=R^2 \Rightarrow {x_0}^2+{y_0}^2={y_0}^2+(10-{x_0}^2) \Rightarrow 2x_0=10 \Rightarrow x_0=5$$

$$(-x_0)^2+(-y_0)^2=R^2$$

$$(-x_0)^2+(10-y_0)^2=R^2 \Rightarrow {x_0}^2+{y_0}^2={x_0}^2+(10-y_0)^2 \Rightarrow 2y_0=10 \Rightarrow y_0=5$$

Θα είναι τέλος και $R=\sqrt{50}$.

β) Το πρόβλημά μας επομένως απαιτεί οι πλευρές του τριγώνου να είναι εφαπτόμενες του κύκλου. Άρα θα ισχύουν οι εξής σχέσεις:

1. Η εξίσωση της πλευράς ΑΒ είναι $y=0$ ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης στο κύκλο κέντρου (x_0,y_0) και ακτίνας R στο σημείο (x_1,y_1) είναι
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=R^2 \Rightarrow x(x_1-x_0)+y(y_1-y_0)=R^2+x_0(x_1-x_0)+y_0(y_1-y_0)$$
Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε εύκολα ότι θα ισχύει $x_1-x_0=0$ και $R^2+y_0(y_1-y_0)=0$.
2. Η εξίσωση της ευθείας που ανήκει η πλευρά ΒΓ είναι $x=0$ ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης στο κύκλο είναι
$x(x_2-x_0)+y(y_2-y_0)=R^2+x_0(x_2-x_0)+y_0(y_2-y_0)$ όπου (x_2,y_2) το σημείο επαφής. Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε εύκολα ότι θα ισχύει $y_2-y_0=0$ και $R^2+x_0(x_2-x_0)=0$.
3. Η εξίσωση της ευθείας που ανήκει η πλευρά ΓΑ είναι $x+y=10$ ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης στο κύκλο είναι
$x(x_3-x_0)+y(y_3-y_0)=R^2+x_0(x_3-x_0)+y_0(y_3-y_0)$ όπου (x_3,y_3) το σημείο επαφής. Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε εύκολα ότι θα ισχύει $x_3-x_0=y_3-y_0$ και $R^2+2x_0(x_3-x_0)=10(x_3-x_0)$.
4. Επειδή όμως το τρίγωνο είναι ισοσκελές ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται της πλευράς ΓΑ στο μέσο της, επομένως θα είναι $(x_3,y_3)=(5,5)$.
Γνωρίζουμε επίσης ότι $y_1=0$ και $x_2=0$.

Επομένως θα έχουμε:

$$x_3-x_0=y_3-y_0 \quad \Rightarrow R^2=(10-2x_0)(x_3-x_0) \Rightarrow {x_0}^2-x_0(2x_3+10)+10x_3=0$$

$$R^2+2x_0(x_3-x_0)=10(x_3-x_0)$$

$$R^2+x_0(x_2-x_0)=0$$

$$\Rightarrow R^2 = x_0{}^2$$

$$x_2 = 0$$

και τέλος από $x_0{}^2 - x_0(2x_3+10)+10x_3 = 0 \Rightarrow x_0{}^2 - 20x_0 + 50 = 0 \Rightarrow x_0 = 2.93$

$x_3 = 5$ (η τιμή 17.06 απορρίπτεται)

Από εδώ και πέρα όλα είναι εύκολα αφού από την $x_3 - x_0 = y_3 - y_0$ είναι προφανές ότι $y_0 = x_0$, από την $x_1 - x_0 = 0$ θα είναι $x_1 = x_0$, από την $y_2 - y_0 = 0$ θα είναι $y_2 = y_0$ και από την $R^2 = x_0{}^2 \Rightarrow R = x_0$.

9.
Α. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι περιγεγραμμένο γύρω από ένα κύκλο με κέντρο (4,2) και ακτίνα 2. Ο άξονας των Ox είναι η μία πλευρά, να βρεθούν οι άλλες δύο.
Β. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που περνάνε από το (5,1) και απέχουν απόσταση 1 από το (0,0).
Υπόδειξη: Από την ευκλείδειο γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου σε ένα τρίγωνο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.

Λύση
Α.
Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους , άρα ίσες με 60μοίρες.
Επομένως στο παραπάνω τρίγωνο οι γωνίες είναι ίσες με 60μοίρες .Και οι κλίσεις των ευθειών που σχηματίζουν το τρίγωνο είναι :

$$\varepsilon\phi 60° = \sqrt{3} \text{ και}$$

$$\varepsilon\phi(120°) = -\varepsilon\phi 60° = -\sqrt{3}$$

Έστω Μ το σημείο που τέμνονται οι διχοτόμοι δηλ. το κέντρο του κύκλου και έστω Α το σημείο που τέμνονται οι 2 ευθείες που ψάχνουμε και έστω Δ το σημείο που τέμνει η διχοτόμος από το Α τον Ox .
Ισχύει :

$$3\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{\Delta A}$$

διότι το σημείο Μ είναι και βαρύκεντρο. Οπότε επειδή το

$$\left|\overrightarrow{\Delta M}\right| = 2$$

παίρνουμε Α(4,6) .
Αφού ξέρουμε ένα σημείο των ευθειών και τις κλίσεις τους μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις τους.
Αυτές είναι οι εξής :

$$y - 6 = \sqrt{3}(x-4)$$

και

$$y - 6 = -\sqrt{3}(x-4)$$

Β.
Η(οι) εξίσωση(εις) δίνονται από τον παρακάτω τύπο:

$$y - y_0 = m(x - x_0),\ m \in \Re$$

Όμως ξέρουμε ένα σημείο της ευθείας το (5,1).
Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$y-1=m(x-5)$$
Επίσης ξέρουμε ότι η ευθεία απέχει από το (0,0) απόσταση ίση με 1.
Άρα:

$$d(0,\varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1\Leftrightarrow$$

$$d=\frac{|-m\cdot 0+1\cdot 0+5m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1\Leftrightarrow$$

$$|5m-1|=\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow(5m-1)^2=m^2+1\Leftrightarrow$$

$$24m^2-10m=0\Leftrightarrow m(24m-10)=0\Leftrightarrow$$

$$m=0,\ m=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι εξής:
α) $y-1=0\Leftrightarrow y=1$

β) $y-1=\frac{5}{12}(x-5)\Leftrightarrow y-\frac{5}{12}x+\frac{13}{12}=0$

10. Βρείτε
Α. την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $9x^2+5y^2=36x-30y-36$ στα σημεία με τετμημένη δύο $(x=2)$ και
Β. προσδιορίστε το είδος της καμπύλης καθώς και τα χαρακτηριστικά της στοιχεία.

Λύση

Α. Για x=2 η καμπύλη γίνεται

$$9\ 2^2+5\mathrm{y}^2=36\ \ 2-30\mathrm{y}-36\Rightarrow 5\mathrm{y}^2+30\mathrm{y}-72+36+36=0\Rightarrow 5\mathrm{y}^2+30\mathrm{y}=0\Rightarrow$$

$$5\mathrm{y}(\mathrm{y}+6)=0$$

Άρα τα σημεία με τετμημένη δύο είναι δύο. Το $(2,0)$ και το $(2,-6)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο (x_0,y_0) είναι $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.
Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της $9x^2+5y^2=36x-30y-36$ έχουμε:
$18x+10yy'=36-30y'\Rightarrow y'=\frac{36-18x}{10y+30}$ και στα σημεία $(x_0=2,y_0=0)$ και $(x_0=2,y_0=-6)$ είναι $y'=f'(x_0)=0$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=0$ ή $y=-6$.
Β.
Μετασχηματίζοντας την εξίσωση της καμπύλης και ακολουθώντας τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνων έχουμε:

$$9x^2+5y^2=36x-30y-36\Rightarrow 9(x^2-4x)+36+5(y^2+6y)+45=45\Rightarrow$$

$$9(x^2-4x+2^2)+5(y^2+6y+3^2)=45\Rightarrow 9(x-2)^2+5(y+3)^2=45\Rightarrow$$

$$\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$$

Αυτό δείχνει ότι η καμπύλη είναι μια έλλειψη. Για να τη μελετήσουμε πιο απλά μπορούμε να θεωρήσουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $O'XY$ με αρχή $O'(2,-3)$ οπότε και οι εξισώσεις $X = x-2$ και $Y = y+3$ μας δίνουν τις συντεταγμένες ως προς το σύστημα $O'XY$. Στο σύστημα αυτό η εξίσωση της καμπύλης θα γίνει $\frac{X^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$ οπότε το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 6, του μικρού $2\sqrt{5}$ και της εστιακής απόστασης 4.