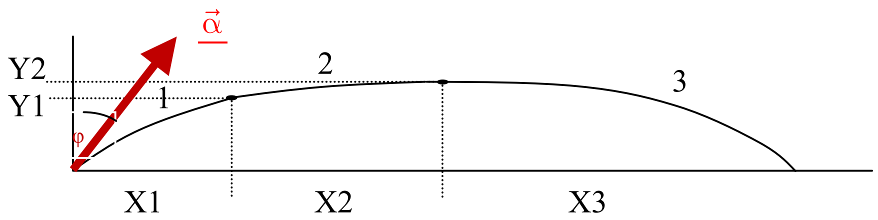
**$3^{η}$ Εργασία**
**ΦΥΕ14**
**Ημερομηνία αποστολής: 3/3/2008**

**<u>Άσκηση 1</u>**

Πύραυλος εκτοξεύεται με γωνία $φ = 60°$ ως προς την κατακόρυφο, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Αν η μηχανή του πυραύλου, του προσδίδει επιτάχυνση $α = 30$ m/s$^2$ και λειτουργεί για $t_1 = 10$s μετά την εκτόξευση, υπολογίστε το μέγιστο ύψος και το βεληνεκές του πυραύλου αυτού.

(*Υποθέτουμε ότι η Γη στο πεδίο βολής είναι επίπεδη, η αντίσταση του αέρα μηδαμινή και ότι η διεύθυνση του πυραύλου είναι σταθερή. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m/s$^2$*).




**<u>Λύση</u>**

Αναλύουμε την βολή σε τρία τμήματα:

**1.** Εκτόξευση μέχρι σβήσιμο του κινητήρα.

Έχουμε σύνθετη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα και συνιστώσες επιτάχυνσης, κατακόρυφη $α_y = (α \cos φ - g)$ και οριζόντια ίση με $α_x = α \sin φ$.

Ως εκ τούτου θα έχουμε στο τέλος των $t_1$ δευτερολέπτων:

$$Y_1 = \frac{1}{2}\cdot(α\cdot\cos φ - g)\cdot t_1{}^2,\quad X_1 = \frac{1}{2}\cdot α\cdot\sin φ\cdot t_1{}^2,\quad V_{y1} = (α\cdot\cos φ - g)\cdot t_1\quad ,\quad V_{x1} = α\cdot\sin φ\cdot t_1 \text{ όπου}$$

V ειναι οι σχετικές συνιστώσες της ταχύτητας.

**2.** Σβήσιμο του κινητήρα μέχρι το ανώτατο ύψος της τροχιάς.

Έχουμε σύνθετη κίνηση με αρχικές ταχύτητες (συνιστώσες) $V_{x1}$ και $V_{y1}$ όπως υπολογίστηκαν στο (1) και συνιστώσες επιτάχυνσης, κατακόρυφη $α_y = g$ και οριζόντια ίση με $α_x = 0$. Η κίνηση αυτή θα διαρκέσει έως ότου μηδενιστεί η κατακόρυφη ταχύτητα, όταν

$$0 = (α\cdot\cos φ - g)\cdot t_1 - g\cdot t_2 \quad\Rightarrow\quad t_2 = \frac{(α\cdot\cos φ - g)\cdot t_1}{g}$$

Συνεπώς

$$Y_2 = (α\cdot\cos φ - g)\cdot t_1\cdot t_2 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_2{}^2 = (α\cdot\cos φ - g)\cdot\frac{(α\cdot\cos φ - g)\cdot t_1^2}{g} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot\frac{(α\cdot\cos φ - g)^2\cdot t_1^2}{g^2} =$$

$$= \frac{(α\cdot\cos φ - g)^2\cdot t_1^2}{g} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(α\cdot\cos φ - g)^2\cdot t_1^2}{g} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(α\cdot\cos φ - g)^2\cdot t_1^2}{g}$$

$$X_2 = α\cdot\sin φ\cdot t_1\cdot t_2 = α\cdot\sin φ\cdot\frac{(α\cdot\cos φ - g)\cdot t_1^2}{g}$$

Και το μέγιστο ύψος ισούται με:

$$H = Y_1 + Y_2 = \frac{1}{2}\cdot(\alpha\cdot\cos\varphi - g)\cdot t_1^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\alpha\cdot\cos\varphi - g)^2\cdot t_1^2}{g} =$$

$$= 0.5\cdot(30\mathrm{m/s^2}\cdot\cos60° - 10\mathrm{m/s^2})\cdot 100\mathrm{s^2} + 0.5\cdot\frac{(30\mathrm{m/s^2}\cdot\cos60° - 10\mathrm{m/s^2})^2}{10\mathrm{m/s^2}}\cdot 100\mathrm{s^2} = 375\mathrm{m}$$

**3.** Από το ανώτατο ύψος μέχρι το έδαφος

Αν ο χρόνος καθόδου είναι $t_3$, τότε ισχύει:

$$H = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_3^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_3 = \sqrt{\frac{2\cdot H}{g}}$$

Συνεπώς $X_3 = V_{x1}\cdot t_3 = \alpha\cdot\sin\phi\cdot t_1\cdot\sqrt{\frac{2\cdot H}{g}}$

Το βεληνεκές θα ισούται με

$$B = X_1 + X_2 + X_3 = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\sin\varphi\cdot t_1^{\,2} + \alpha\cdot\sin\varphi\cdot\frac{(\alpha\cdot\cos\varphi - g)\cdot t_1^2}{g} + \alpha\cdot\sin\varphi\cdot t_1\cdot\sqrt{\frac{2\cdot H}{g}} =$$

$$= 0.5\cdot 30\mathrm{m/s^2}\cdot\sin60°\cdot 100\mathrm{s^2} + 30\mathrm{m/s^2}\cdot\sin60°\cdot 100\mathrm{s^2}\cdot\frac{(30\cdot\cos60° - 10)}{10} + 30\mathrm{m/s^2}\cdot\sin60°\cdot 10\mathrm{s}\cdot\sqrt{75}\mathrm{s} =$$

$= 4848$ m

**Άσκηση 2**

Αλεξιπτωτιστής πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση από αεροπλάνο. Αν η κατακόρυφη αντίσταση του αέρα αντιστοιχεί σε μία επιτάχυνση $k = -b\cdot\upsilon$, όπου υ η ταχύτητα του στον κατακόρυφο άξονα και $b = 0.5\ \mathrm{s^{-1}}$, υπολογίστε την οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει αφού εγκαταλείψει το αεροπλάνο και τον χρόνο $t_1$ που θα απαιτηθεί για να αποκτήσει το 0.99 αυτής της οριακής ταχύτητας. Θεωρώντας ότι ο χρόνος $t_1$ είναι ο χρόνος που απαιτείται για να αποκτήσει την οριακή ταχύτητα, υπολογίστε πόσο θα έχει κατέβει σε 2 min. *(Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$).*

**Λύση**

Κατά το πρώτο διάστημα της πτώσης ισχύει η σχέση

$$\sum F_y = m\cdot\alpha \Rightarrow m\cdot g - mb\cdot\upsilon = m\cdot\alpha \Rightarrow g - b\cdot\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad (1)$$

Όταν αποκτήσει οριακή ταχύτητα, το $d\upsilon/dt = 0$

Συνεπώς $g - b\cdot\upsilon_{op} = 0 \Rightarrow \upsilon_{op} = \frac{g}{b} = \frac{10\mathrm{m/s^2}}{0.5\mathrm{s^{-1}}} = 20\mathrm{m/s}$.

Για να υπολογίσουμε τον χρόνο που απαιτείται για να αποκτήσει το 0.99 την $\upsilon_{op}$, επεξεργαζόμαστε την (1) και έχουμε:

$$\frac{d\upsilon}{g-b\cdot\upsilon}=dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{-b}\cdot\int_0^{0.99\cdot\upsilon_{op}}\frac{d(g-b\cdot\upsilon)}{g-b\cdot\upsilon}=\int_0^{t_1}dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{-b}\cdot\ln\frac{g-b\cdot 0.99\cdot\upsilon_{op}}{g}=t_1 \;\Rightarrow$$

$$t_1=-\frac{1}{0.5s^{-1}}\cdot\ln\frac{10m/s^2-0.5s^{-1}\cdot 0.99\cdot 20ms^{-1}}{10m/s^2}=-2s\cdot(-4.6)=9.2s$$

Για να υπολογίσουμε το κατακόρυφο διάστημα που θα διανύσει σε 2 min = 120s, πρέπει να υπολογίσουμε το διάστημα $s_1$ που διανύει επιταχυνόμενος (σε χρόνο $t_1$ = 9.2s) και το διάστημα $s_2$ που διανύει με την οριακή ταχύτητα σε χρόνο:

$t_2$ = 120.0s – 9.2s = 110.8s

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{d\upsilon}{g-b\cdot\upsilon}=dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{-b}\cdot\int_0^{\upsilon}\frac{d(g-b\cdot\upsilon)}{g-b\cdot\upsilon}=\int_0^{t_1}dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{-b}\cdot\ln\frac{g-b\cdot\upsilon}{g}=t\Rightarrow$$

$$\ln\frac{g-b\cdot\upsilon}{g}=-b\cdot t \;\Rightarrow\; \frac{g-b\cdot\upsilon}{g}=e^{-b\cdot t} \;\Rightarrow\; b\cdot\upsilon=-g\cdot e^{-b\cdot t}+g \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt}=\frac{g}{b}\cdot(1-e^{-b\cdot t})$$

και $\int_0^{s_1}dx=\frac{g}{b}\cdot\int_0^{t_1}(1-e^{-b\cdot t})\cdot dt \;\Rightarrow\; s_1=\frac{g}{b}\cdot\left(\int_0^{t_1}dt+\frac{1}{b}\cdot\int_0^{t_1}e^{-b\cdot t}\cdot d(-bt)\right)=\frac{g}{b}\cdot\left(t_1+\frac{1}{b}\cdot\left(e^{-b\cdot t_1}-1\right)\right)=$

$$s_1=\frac{g}{b}\cdot\left(t_1+\frac{1}{b}\cdot\left(e^{-b\cdot t_1}-1\right)\right)=\frac{10ms^{-2}}{0.5s^{-1}}\cdot\left(9.2s+\frac{1}{0.5s^{-1}}\cdot\left(e^{-0.5\cdot 9.2}-1\right)\right)=20\cdot 7.22m=144.4m$$

$$s_2=\upsilon_{op}\cdot t_2=20m/s\cdot 110.8s=2216.0m$$

και $s = s_1 + s_2$ = 144.4m + 2216.0m = 2360.4m

**<u>Άσκηση 3</u>**

Ένας τεχνητός δορυφόρος ταξιδεύει σε κυκλική τροχιά γύρω από την γη και σε απόσταση 500 km από την επιφάνεια αυτής. Η περίοδος του δορυφόρου μειώνεται κάθε μέρα κατά 0.35 sec λόγω της αντίστασης του αέρα. Υπολογίστε την καθημερινή μεταβολή στο ύψος και σε πόσο χρόνο ο δορυφόρος θα πλησιάσει την ατμόσφαιρα της γης (10 km). Η ακτίνα της γης είναι 6370 km.

**<u>Λύση</u>**

Ας αγνοήσουμε αρχικά την αντίσταση του αέρα και ας υπολογίσουμε την περίοδο του δορυφόρου στην ιδανική αυτή κατάσταση. Θεωρώντας κυκλική την τροχιά του δορυφόρου έχουμε:

Κεντρομόλος δύναμη = δύναμη έλξης γης-δορυφόρου

$$\frac{m\upsilon^2}{r}=\frac{GMm}{r^2} \qquad (1)$$

Όπου r = (R+h), και βέβαια h είναι το ύψος του δορυφόρου από την γη, M είναι η μάζα της γης, m είναι η μάζα του δορυφόρου, υ η ταχύτητα του δορυφόρου, και G η Παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας.

Η ταχύτητα υ βρίσκεται από το μήκος της τροχιάς δια της περιόδου της τροχιάς:

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi r)^2}{\upsilon^2} \qquad (2)$$

Στο βιβλίο (σελίδες 90-91, εξισώσεις 1.53 και 1.54) μπορείτε να βρείτε την τιμή του g στο ύψος των 500 Km.

$$B = mg = G\frac{M \cdot m}{r^2} \Rightarrow g = \frac{G \cdot M}{r^2} \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας εξισώσεις (1) και (2) και (3) έχουμε:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{(G \cdot M / r)} = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} = \frac{4\pi^2 r^3}{g_r \cdot r^2} = \frac{4\pi^2 r}{g_r} \qquad (4)$$

Στην εξίσωση (4) η μόνη άγνωστη παράμετρος είναι η τιμή του $g_r$ στο ύψος των 500 km. Μπορούμε να το υπολογίσουμε με δύο τρόπους, είτε από την εξίσωση (3), αντικαθιστώντας τις τιμές G, M, και r, είτε χρησιμοποιώντας την τιμή του $g_r$ στο ύψος του δορυφόρου και μεταβάλλοντας την τιμή αυτή με βάση την μεταβολή της απόστασης από R σε R+r. Για διδακτικούς λόγους ας το κάνουμε και με τους δύο τρόπους:

$g_r = (6.67\text{x}10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2})\text{x}(5.98\text{x}10^{24}\text{kg})/(6.37\text{x}10^6\ \text{m} + 0.5\text{x}10^6\ \text{m})^2 =$

$(39.886\text{x}10^{13})/(6.87\text{x}10^6)^2\ \text{m/sec}^2 = 8.45\ \text{m/sec}^2$,

προφανώς μικρότερη τιμή από εκείνη στην επιφάνεια της γης.

Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού του g στο ύψος των 500 km είναι ο εξής:

$g_{\gamma\eta} = \frac{G \cdot M}{R^2}$ και $g_r = \frac{G \cdot M}{r^2}$, και διαιρώντας τις δύο εξισώσεις έχουμε:

$$\frac{g_{\gamma\eta}}{g_r} = \frac{GM / R^2}{GMr^2} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow g_r = (\frac{R^2}{r^2})g_{\gamma\eta} = \frac{6.37^2}{6.87^2} x\, 9.81(m/\sec^2) = 8.43(m/\sec^2)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας την τιμή του g στο ύψος του δορυφόρου στην εξίσωση (4) βρίσκουμε ότι η περίοδος είναι

$$\text{T}_{500}^2 = \frac{4\pi^2\, 6.87\,\text{x}10^6\,\text{m}}{8.43\text{ms}^{-2}} \Rightarrow \text{T}_{500} = 5672\ \text{s}$$ δηλαδή 94.5 min.

Ενώ στο ύψος των 10 km το g προκύπτει αντίστοιχα g = 9.779 $(m/\sec^2)$ και

$T_{10}$= 5075.08 s

Η διαφορά είναι $\Delta T = T_{500} - T_{10}$=5672-5075.08=596.9 s

Επομένως επειδή κάθε μέρα χάνει 0.35 δευτερόλεπτα από την περίοδό του οι συνολικές μέρες για να μειωθεί στα 10 km, πλησιάζοντας την ατμόσφαιρα της γης θα είναι 596.9/0.35=**1705.4 ημέρες.**

Αντικαθιστώντας την τιμή της περιόδου Τ στην εξίσωση (2) έχουμε:

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3.14159 \cdot 6.87 \cdot 10^6 m}{5672 s} = 7.6 \frac{m}{\sec}$$

Για να υπολογίσουμε την καθημερινή μεταβολή του ύψους λόγω της αντίστασης του αέρα υπολογίζουμε την ποσοστιαία μεταβολή της περιόδου:

ΔΤ = 0.35/5665 = $6.17\text{x}10^{-5}$ της καθημερινής περιόδου, ένα πολύ μικρό ποσοστό της περιόδου. Για να δούμε πόσο μεταβάλλεται το ύψος ξαναγυρνάμε στην εξίσωση (4):

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} = kr^3 \tag{5}$$

όπου $k = 4\pi^2/GM$ = σταθερά. Η μεταβολή της περιόδου και του ύψους σε ένα εικοσιτετράωρο είναι ΔΤ και Δr, αντίστοιχα. Η εξίσωση (5) μπορεί να γραφεί επομένως ως:

$$2T\Delta \mathrm{T} = 3kr^2 \Delta r \tag{6}$$

η οποία με τις κατάλληλες πράξεις και αντικαταστάσεις από προηγούμενες εξισώσεις μπορεί να γραφεί ως:

$$\Delta r = \frac{2T \cdot \Delta T}{3kr^2} \tag{7}$$

Όμως από την εξίσωση (4) $kr^2 = T^2/r$, οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7) έχουμε:

$$\Delta r = \frac{2T \cdot \Delta T}{\left(\frac{T^2}{r}\right)} = \frac{2\Delta \mathrm{T} \cdot r}{3 \cdot T} = \frac{2}{3} r \frac{\Delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}} \tag{8}$$

Στην εξίσωση (8) βλέπουμε την μεταβολή του ύψους σαν συνάρτηση γνωστών παραμέτρων. Αντικαθιστώντας στην (8) με τις γνωστές τιμές έχουμε:

$\Delta r = \frac{2}{3}(6.87 \cdot 10^6 m)\frac{0.35\sec}{5672\sec} = 0.28km$ . Το ύψος επομένως μεταβάλλεται κατά 0.28 km ημερησίως. Βεβαίως η απάντηση αυτή δεν είναι ακριβώς σωστή γιατί θεωρεί σταθερή την μεταβολή στο καθημερινό ύψος.

**Μια πιο ακριβής προσέγγιση είναι η εξής:**

Παίρνουμε ως αρχικό ύψος (από το κέντρο της γης) το $r_0 = 6.87x10^6$ m, και ως τελικό ύψος τα 10 Km πάνω από την επιφάνεια της γης, δηλαδή $r_f = 6.38x10^6$ m. Τέλος θεωρώντας ότι ο δορυφόρος θα προσεγγίσει την ατμόσφαιρα σε n ημέρες τότε η τελική περίοδος του δορυφόρου θα είναι $T_f = T_0 - 0.35n$. Επομένως μπορούμε να παραγωγίσουμε την εξίσωση (5) και με τις κατάλληλες πράξεις να καταλήξουμε:

$$\frac{dr}{r} = \frac{2}{3}\frac{dT}{T} \Rightarrow \int_{r_0}^{r_f}\frac{dr}{r} = \frac{2}{3}\int_{T_0}^{T_f}\frac{dT}{T} \Rightarrow \ln\left(\frac{r_f}{r_0}\right) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) \qquad (9)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\ln\left(\frac{r_f}{r_0}\right) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{r_f}{r_0}\right)^{(3/2)} = \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) \Rightarrow \left(\frac{r_f}{r_0}\right)^{(3/2)} = \left(\frac{T_0 - 0.35n}{T_0}\right) \qquad (10)$$

Και τελικά λύνοντας ως προς n έχουμε:

$$n = \frac{\left[1 - \left(\frac{6.38}{6.87}\right)^{1.5}\right]T_0}{0.35} = \frac{\left[1 - \left(\frac{6.38}{6.87}\right)^{1.5}\right]5665}{0.35} = \mathbf{1700\ \ ημέρες.}$$

Μικρή διαφορά στον αριθμό των ημερών από τον προηγούμενο υπολογισμό. Η ουσία είναι ότι χωρίς «καύσιμα» οι δορυφόροι δεν είναι για πάντα. Κάποια στιγμή χάνουν αρκετό ύψος ώστε να καταστραφούν πλησιάζοντας ή εισερχόμενοι στην ατμόσφαιρα.

Επίσης για την εξάρτηση του ύψους από την περίοδο μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά την συνάρτηση

$\mathrm{h_n = r_f - r_o}$ και από (4)

$$\mathrm{h_n} = \left(\frac{\mathrm{GM}}{4\pi^2}\mathrm{T_f^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{\mathrm{GM}}{4\pi^2}\left(\mathrm{T_o} - 0.35\mathrm{n}\right)^2\right)^{1/3}$$

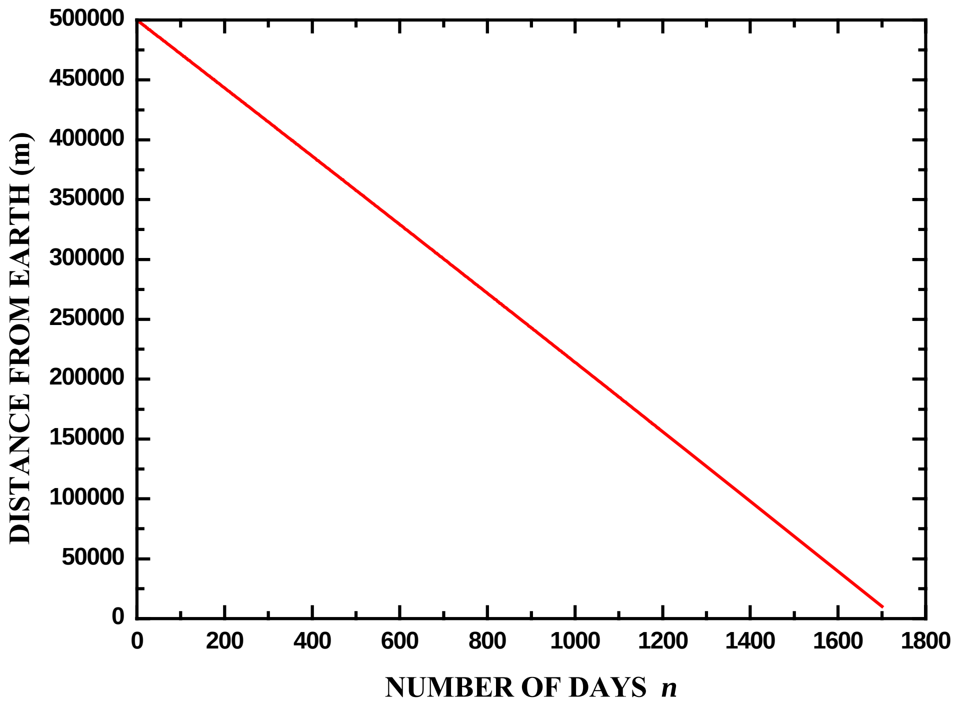
$$h_0 = 5.0\times10^5\,\mathrm{m}$$

$$h_n = \left(\left(\frac{\left(T_0 - 0.35\cdot n\right)^2 \times GM}{4\pi^2}\right)\right)^{1/3} - 6.37\times10^6\,\mathrm{m} =$$

$$= \left(\left(\frac{\left(5.665\times10^3\,\mathrm{s} - n\times0.35\,\mathrm{s/day}\right)^2 \times \left(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m\cdot kg^{-2}}\right)\left(5.98\times10^{24}\,\mathrm{kg}\right)}{4\pi^2}\right)\right)^{1/3} - 6.37\times10^6\,\mathrm{m} =$$

$$= \left(\left(\frac{\left(5.665\times10^3\,\mathrm{s} - n\times0.35\,\mathrm{s/day}\right)^2 \times \left(3.98866\times10^{14}\,\mathrm{N\cdot m\cdot kg^{-1}}\right)}{4\pi^2}\right)\right)^{1/3} - 6.37\times10^6\,\mathrm{m}$$

**Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής είναι:**

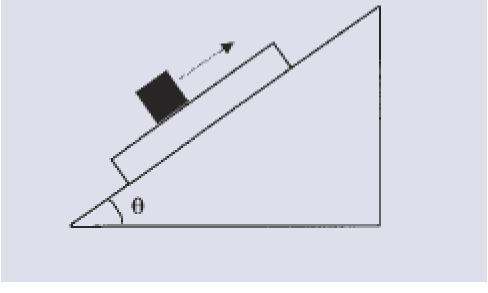



Σε 1700 ημέρες το ύψος από την επιφάνεια της Γης είναι 10121m όπως προκύπτει από την γραφική παράσταση. Η καθημερινή μεταβολή του ύψους είναι λοιπόν

$$\Delta r = \frac{(500000 - 10121)\,\mathrm{m}}{1700\ \mathrm{days}} = 288.164\mathrm{m/day}$$

**<u>Άσκηση 4</u>**

**Α.** Μία σανίδα μάζας m τοποθετείται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβές που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο και πάνω της τοποθετείται ένα μικρό κομμάτι M στο οποίο δίνεται μία μικρή ώθηση ώστε να αποκτήσει αρχική ταχύτητα v. Να βρεθεί η απόσταση d που θα έχει διανύσει το σώμα μάζας M τη στιγμή που η ταχύτητά του θα είναι v/2. Η σανίδα δεν κινείται σε σχέση με το κεκλιμένο επίπεδο.



**Λύση Α.**

Θεωρούμε σύστημα αξόνων με τον άξονα x παράλληλο στο επίπεδο και θετική διεύθυνση προς τα κάτω και άξονα y κάθετο στο επίπεδο. Για να είναι το m ακίνητο, θα πρέπει η προς τα επάνω δύναμη της κινητικής τριβής να είναι ίση με την προς τα κάτω συνιστώσα του βάρους άρα

$F_k = mg\sin\theta$

Άρα η συνολική δύναμη στο Μ θα είναι

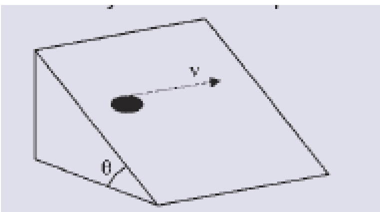
$\Sigma F_x = Mg\sin\theta + mg\sin\theta = M\alpha$

άρα $\alpha = g\sin\theta\dfrac{M+m}{M}$

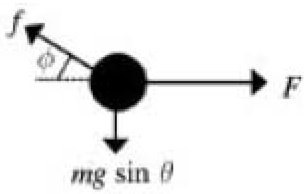
Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 = \upsilon_o^2 - 2\alpha d$ όπου d είναι η απόσταση όπου η ταχύτητα $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda} = \upsilon/2$ προκύπτει ότι

$$d = \frac{3\upsilon_o^2 M}{8g\sin\theta(M+m)}$$

**Β.** Ένα σώμα μάζας m ηρεμεί σε ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Ποια είναι η ελάχιστη δύναμη F που πρέπει να εφαρμοστεί στο σώμα ώστε να κινηθεί πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο παράλληλα με το οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα; Η σταθερά της στατικής τριβής μεταξύ του σώματος και του αντικειμένου είναι $\mu_s$.




(α)




(β)

**Λύση Β**

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι :

Το βάρος του Β στην κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα κάτω, η δύναμη F στη διεύθυνση της κίνησης, η στατική τριβή f πριν το σώμα να αρχίσει να κινείται, η κάθετη στο επίπεδο δύναμη N με διεύθυνση προς τα πάνω.

Αφού το σώμα είναι έτοιμο να ξεκινήσει να ολισθαίνει στο επίπεδο, η στατική τριβή θα πρέπει να έχει τη μέγιστη τιμή της $f = \mu_s N$.

Αναλύοντας τις δυνάμεις σε δύο άξονες παράλληλα (x) και κάθετα (y) με το κεκλιμένο επίπεδο και από το διάγραμμα του απελευθερωμένου σώματος του σχήματος (β) ισχύει

$\Sigma F_y = 0$, $N = mg\cos\theta$ και άρα $f = \mu_s mg\cos\theta$ (1)

. Η δύναμη της τριβής θα πρέπει να σχηματίζει κάποια γωνία φ γιατί αρχικά ισορροπεί τις δύο άλλες δυνάμεις του διαγράμματος.

Η ελάχιστη δύναμη για να αρχίσει να ολισθαίνει το σώμα θα είναι

$$F = f\cos\varphi \qquad (2)$$

και

$$f\sin\varphi = mg\sin\theta \quad f\sin\phi = mg\sin\theta \Rightarrow f = \frac{mg\sin\theta}{\sin\phi} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) καθώς και το $\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi}$ προκύπτει

$$F = mg\sin\theta\sqrt{\frac{1}{\sin^2\phi}-1} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) προκύπτει

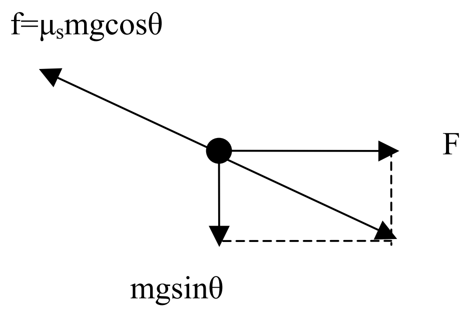
$$\frac{1}{\sin\phi} = \frac{\mu_s\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (5)$$

Οπότε με αντικατάσταση της (5) στην (4) προκύπτει ότι

$$F = mg\sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

Θα πρέπει $\mu_s > \tan\theta$ ειδάλλως το σώμα θα αρχίσει να ολισθαίνει και χωρίς την εφαρμοζόμενη δύναμη. Εάν $\mu_\kappa < \mu_s$ , που είναι η συνήθης περίπτωση, το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται μετά την εκκίνησή του.

**Β΄τρόπος** Από το σχήμα λόγω της ισορροπίας των δυνάμεων έχουμε




$$F = \sqrt{\mu_s^2 m^2 g^2\cos^2\theta - m^2 g^2\sin^2\theta}$$

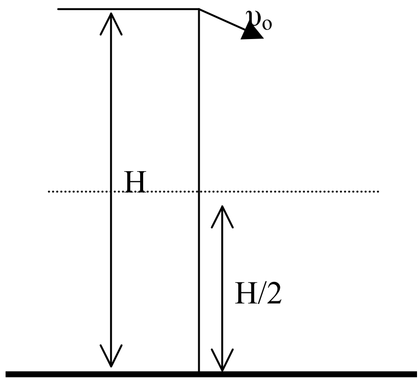
ή τελικά

$$F = mg\sqrt{\mu_s^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

## Άσκηση 5

Βλήμα βάλλεται από την κορυφή κτιρίου ύψους Η, με αρχική ταχύτητα με μέτρο $\upsilon_o = 40m/s$ και διεύθυνση 30° από την οριζόντιο, προς τα κάτω. Αν η σφαίρα διατρέχει το δεύτερο ήμισυ της διαδρομής (Η/2) σε χρόνο $t_2 = 1.0s$, υπολογίστε τον χρόνο Τ που απαιτείται για να φτάσει στο έδαφος, το ύψος Η και την ταχύτητα με την οποία κτυπάει το έδαφος.

Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα. (*Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$*)




## Λύση

Η ταχύτητα αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\upsilon_{\chi o} = \upsilon\cdot\cos 30°$ και $\upsilon_{yo} = \upsilon\cdot\sin 30°$ με φορά την φορά της επιτάχυνσης g.

Αν $t_1$ είναι ο χρόνος στον οποίο θα διανυθεί το πρώτο ήμισυ της διαδρομής $h_1$ και $t_2$ ο χρόνος για το δεύτερο $h_2$ θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$T = t_1 + t_2$ (1) και $H = h_1 + h_2$ (2) και βεβαίως $h_1 = h_2$

Από την τελευταία θα έχουμε (έχοντας υπ' όψη ότι $\upsilon_1 = \upsilon_{yo} + g \cdot t_1$):

$$h_1 = h_2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{yo}\cdot t_1 + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_1^2 = (\upsilon_{yo} + gt_1)\cdot t_2 + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_2^2 = \upsilon_{yo}\cdot t_2 + g\cdot t_1\cdot t_2 + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_2^2$$

$$\upsilon_{yo}\cdot t_1 + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_1^2 - \upsilon_{yo}\cdot t_2 - g\cdot t_1\cdot t_2 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_2^2 = 0$$

που είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το $t_1$. Έχουμε λοιπόν:

$$g\cdot t_1^2 + 2\cdot(\upsilon_{yo} - g\cdot t_2)\cdot t_1 - (g\cdot t_2^2 + 2\cdot\upsilon_{yo}\cdot t_2) = 0 \quad \text{και}$$

$$t_1 = \frac{-(\upsilon_{yo} - g\cdot t_2) \pm \sqrt{(\upsilon_{yo} - g\cdot t_2)^2 + g\cdot(g\cdot t_2^2 + 2\cdot\upsilon_{yo}\cdot t_2)}}{g} =$$

$$= \frac{-(40\cdot\sin 30° - 10\cdot 1.0) \pm \sqrt{(40\cdot\sin 30° - 10\cdot 1.0)^2 + 10\cdot(10\cdot 1.0 + 2\cdot 40\cdot\sin 30°\cdot 1.0)}}{10} s =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 10\cdot 50}}{10} s = \frac{-10 \pm \sqrt{600}}{10} s = \frac{-10 \pm 24.5}{10} s$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται, συνεπώς τελικά $t_1 = 1.45s$

Ο συνολικός χρόνος είναι $T = t_1 + t_2 = 1.45s + 1.0s = 2.45s$

$$H = \upsilon_{yo} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2 = 40m/s \cdot \sin 30° \cdot 2.45s + 0.5 \cdot 10m/s^2 \cdot 2.45^2 s^2 = 79.0m$$

Η $\upsilon_y$ συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι:

$\upsilon_y = \upsilon_{yo} + g \cdot T = 40m/s \cdot \sin30° + 10m/s^2 \cdot 2.45s = 44.5m/s$

και η $\upsilon_\chi = \upsilon_{\chi o} = \upsilon \cdot \cos30° = 40m/s \cdot \cos30° = 34.64m/s$

Το μέτρο της τελικής ταχύτητας είναι $\upsilon_f = \sqrt{44.5^2 + 34.64^2} m/s = 56.4m/s$

έχει φορά πρός τα κάτω και σχηματίζει γωνία θ ως προς το οριζόντιο όπου

$$\theta = \arccos\frac{34.64}{56.4} = 52.1°$$

**Άσκηση 6**

**Α.** Μια μπάλλα του τέννις κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο, έτσι ώστε οι συντεταγμένες θέσης της να δίνονται από τις σχέσεις:

**x = 18t, όπου x σε m και t σε s**

**y = 4t – 4.9t², όπου y σε m και t σε s**

Να βρεθούν ως συνάρτηση του χρόνου (α) το διάνυσμα θέσης της μπάλας , (β) η ταχύτητα και (γ) η επιτάχυνση της μπάλλας. Να σχεδιαστεί η τροχιά της σε σύστημα συντεταγμένων (x, y) (*Να χρησιμοποιηθεί μιλιμετρέ χαρτί*).

Αν υποτεθεί ότι ο ήλιος βρίσκεται στο ανώτατο σημείο του ουρανού ακριβώς πάνω από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, να βρεθεί η ταχύτητα της σκιάς της μπάλλας και η θέση της την χρονική στιγμή $t = 3\ s$ και να σημειωθεί στο διάγραμμα της τροχιάς που σχεδιάσατε.

**Β.** Σε σώμα μάζας m = 2kg ασκείται δύναμη της μορφής F = 8**i** - 4t**j** , όπου η δύναμη μετριέται σε Ν και ο χρόνος t σε s. Το σώμα την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ακίνητο. Να βρεθούν

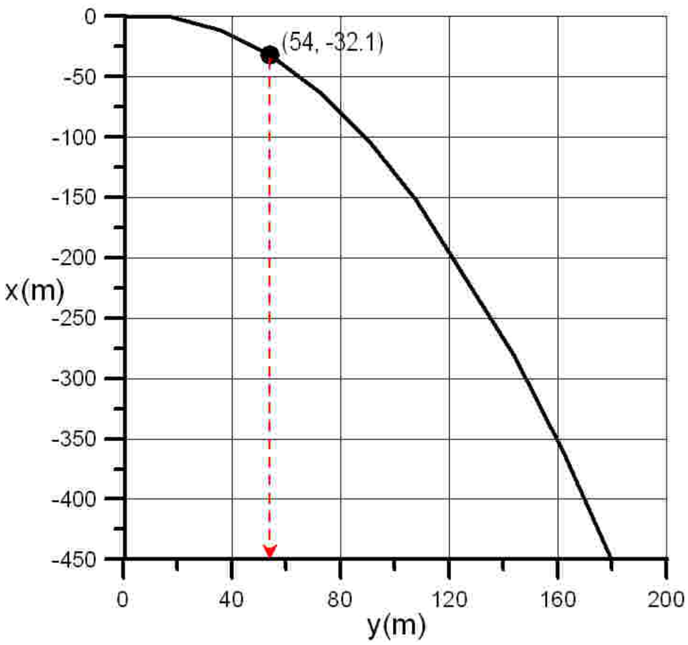
(α) η απόσταση του σώματος από την αρχική του θέση και

(β) το διάνυσμα θέσης του την χρονική στιγμή που το σώμα αποκτά ταχύτητα $15\ m/s$.

**Λύση**

**Α.**

α.) $\vec{r} = 18t\vec{i} + (4t - 4.9t^2)\vec{j}$, β.) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 18\vec{i} + (4 - 9.8t)\vec{j}$, γ.) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -9.8\vec{j}$.




Την χρονική στιγμή $t = 3s$ η κίνηση της σκιάς της μπάλας γίνεται στον άξονα x. Άρα $\vec{v_x} = 18\vec{i}$ και $x = v_x t = 54m$.

**B.**

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{a} = 4\vec{i} - 2t\vec{j}$.

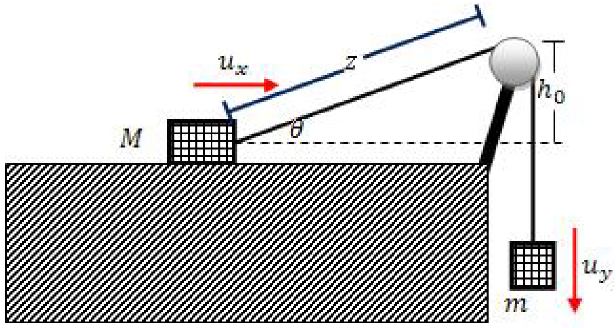
Είναι όμως $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \int_{v_i}^{v} d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v_i} = \int_0^t \vec{a}dt \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 4t\vec{i} - t^2\vec{j}}$.

Επίσης $|\vec{v}| = 15\, m/s \Rightarrow 16t^2 + t^4 = 225 \Rightarrow \boxed{t = 3s}$.

Επειδή $\vec{r}(0) = 0$, έχουμε $\vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt \Rightarrow \boxed{\vec{r} = 2t^2\vec{i} - t^3/3\,\vec{j}}$. Για $t = 3s$ βρίσκουμε ότι $\vec{r} = 18\vec{i} - 9\vec{j} \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{18^2 + 9^2} \sim 20.1m$.

**<u>Άσκηση 7</u>**

Σώμα μάζας M = 1kg μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές σε οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα εξαρτάται από το ένα άκρο νήματος, του οποίου το άλλο άκρο συνδέεται μέσω ιδανικής τροχαλίας σε σώμα μάζας m = 0.5kg, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες $u_x$ και $u_y$ είναι $u_x = r u_y\,(1)$, όπου $r = z(z^2 - h_0^2)^{-\frac{1}{2}}$,




(α) να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις επιταχύνσεις $\alpha_x$ και $\alpha_y$ την στιγμή που το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί,

(β) να βρεθεί η τάση του νήματος την στιγμή κατά την οποία $h_0 = 80cm$ και $\theta = 30^0$ και

(γ) να αποδειχθεί η σχέση (1).

*(Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9.8\ m/s^2$).*

**<u>Λύση</u>**

α.) $\alpha_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(rv_y) = r\frac{dv_y}{dt} + v_y\frac{dr}{dt}$. Την στιγμή που το σύστημα αφήνεται ελεύθερο είναι $v_y = 0$, οπότε $\alpha_x = r\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \boxed{\alpha_x = r\alpha_y}$ (1).

β.) $sin30^0 = \frac{0.8}{z} \Rightarrow z = 1.6m$ και επειδή $r = z(z^2 - h_0^2)^{-1/2} \Rightarrow \boxed{r = 1.15m}$.

Για το σώμα μάζας m ισχύει

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T - B = ma_y \Rightarrow a_y = -2T + 9.8$$

Για το σώμα μάζας M ισχύει

$$\sum F_x = Ma_x \Rightarrow Tcos30^0 = Ma_x \overset{(1)}{\Rightarrow} Tcos30^0 = Mra_y \xrightarrow{r=1.15m} \cdots T = 3.56\ N$$

γ.) Αν x η θέση του σώματος M τότε

$$z^2 = x^2 + h_0^2 \Rightarrow x = (z^2 - h_0^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(z^2 - h_0^2)^{-1/2}(2z)\frac{dz}{dt}$$

Το $\frac{dz}{dt}$ εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο περνάει το νήμα από την τροχαλία, που είναι ίσος

με $v_y = \frac{dz}{dt}$. Οπότε $v_x = z(z^2 - h_0^2)^{-1/2} v_y \Rightarrow \boxed{v_x = r v_y}$.

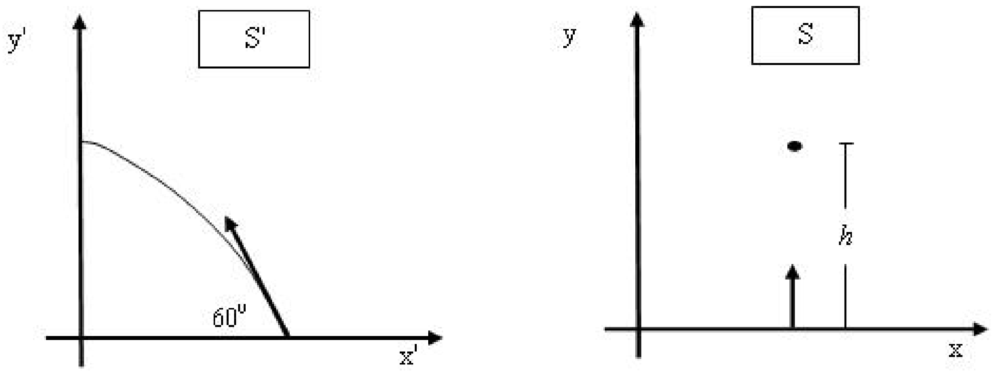
**<u>Άσκηση 8</u>**

Παρατηρητής βρίσκεται εντός αδρανειακού συστήματος αναφοράς S’, που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα 10 m/s. Ο παρατηρητής εκτοξεύει σώμα υπό γωνία $60^o$ σε σχέση με τον άξονα x του συστήματος. Παρατηρητής ευρισκόμενος σε ακίνητο αδρανειακό σύστημα S βλέπει την μπάλλα να κινείται κατακόρυφα. Σε ποιο ύψος έφτασε η μπάλλα σε σχέση με το σημείο εκτόξευσης? Σχεδιάστε ποιοτικά την τροχιά της μπάλλας σε κάθε αδρανειακό σύστημα. *(Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9.8\ m/s^2$).*

**<u>Λύση</u>**

Την στιγμή της εκτόξευσης στο σύστημα $S'$ ισχύει: $\frac{v'_y}{v'_x} = \tan 60^0 = \sqrt{3}\ \ (1)$.

Αν *u* είναι η σχετική ταχύτητα του $S'$ ως προς το $S$ τότε $v_x = v'_x + u = 0$, αφού ο παρατηρητής στο $S$ βλέπει μόνο κατακόρυφη κίνηση. Άρα $v'_x = -u = -10\ ^{m}/_{s}$. Το ‘−’ δηλώνει ότι, το σώμα εκτοξεύεται με φορά αντίθετη της φοράς κίνησης του συστήματος $S'$. Τότε από την (1) έχουμε $v_y = v'_y = -10\sqrt{3}\ m/s$. Επειδή $v_y^2 = 2gh \Rightarrow \boxed{h = 15.3\ m}$.




**<u>Άσκηση 9</u>**

**Α.** Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν από ηρεμία και κινούνται στην ίδια ευθεία ΑΒ το ένα προς το άλλο ταυτόχρονα. Το αυτοκίνητο 1 ξεκινά από το σημείο Α με ταχύτητα $v_1$ και το αυτοκίνητο 2 ξεκινά από το Β με ταχύτητα $v_2$. Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου 1 είναι $\alpha_1$ και έχει φορά προς το Α και του αυτοκινήτου 2 είναι $\alpha_2$ και έχει φορά προς το Β. Στη διάρκεια της κίνησης τα αυτοκίνητα συναντιούνται δύο φορές, και το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των δύο συναντήσεων είναι t. Να βρεθεί η απόσταση ΑΒ.

**Λύση**

Κάνουμε αλλαγή συστήματος αναφοράς, υποθέτοντας ότι το αυτοκίνητο 1 που ξεκινά από το Α είναι σε ηρεμία στη θέση x=0 . Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του αυτοκινήτου 2 απο το Β είναι $-(\upsilon_1+\upsilon_2)$ και $(\alpha_1+\alpha_2)$ αντίστοιχα.

Οι χρόνοι συνάντησης των 1 και 2 δίνονται από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$0 = x_B - (\upsilon_1 + \upsilon_2)t + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)t^2$$

που έχει λυση

$$t_{\sigma\upsilon\nu} = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2) \pm \sqrt{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 - 2x_B(\alpha_1 + \alpha_2)}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

και άρα το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των δύο συναντήσεων είναι

$$t = \frac{2\sqrt{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 - 2x_B(\alpha_1 + \alpha_2)}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

άρα $\frac{1}{4}t^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = (\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 - 2x_B(\alpha_1 + \alpha_2)$ και

$$x_B = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} - \frac{1}{8}(\alpha_1 + \alpha_2)t^2$$

**Β.** Το νερό σε ένα ποτάμι κυλά με σταθερή ταχύτητα 0.5 m/s. Ένας άνθρωπος κολυμπάει αντίθετα προς το ρεύμα διανύοντας απόσταση 1 km και επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης. Αν ο άνθρωπος μπορεί να κολυμπήσει με ταχύτητα 1.2 m/s σε σχέση με ακίνητο νερό, πόσο χρόνο θα χρειαστεί για τη διαδρομή; Συγκρίνετε τον χρόνο αυτό με το χρόνο που θα χρειαστεί για τη διαδρομή αυτή εάν το νερό ήταν ακίνητο.

**Λύση**

Εάν το νερό ήταν ακίνητο, ο χρόνος που θα χρειαζόταν θα ήταν

$$t = \frac{d}{\upsilon} = \frac{2000\,\mathrm{m}}{1.2\,\mathrm{m/s}} = 1.67\,\mathrm{x}\,10^3\,\mathrm{s}$$

Ο ολικός χρόνος που χρειάζεται για τη διαδρομή θα είναι ο χρόνος για να κινηθεί προς τη ροή του ποταμού ($t_{\pi\rho}$) αλλά και αντίθετα πό αυτήν ($t_{\alpha\nu\tau}$) . Άρα

$$t_{\alpha\nu\tau.} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{(1.20 - 0.50)\,\mathrm{m/s}} = 1.43\,\mathrm{x}\,10^3\,\mathrm{s}$$

και

$$t_{\pi\rho o\varsigma} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{(1.20+0.50)\,\mathrm{m/s}} = 588\,\mathrm{s}$$

Οπότε συνολικά ο χρόνος της διαδρομής θα είναι

$$t_{o\lambda} = 1,43\,\mathrm{x}\,10^3 + 588 = 2,02\,\mathrm{x}\,10^3\,\mathrm{s}$$

Όπως αναμενόταν $t_{o\lambda} > t$

**Άσκηση 10**

Ενα ποτάμι έχει πλάτος d. Ένας ψαράς με τη βάρκα του διασχίζει ένα ποτάμι δύο φορές. Την πρώτη φορά, περνά το ποτάμι στον ελάχιστο χρόνο t. Τη δεύτερη φορά περνά το ποτάμι κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μετατόπιση κατά τη φορά του ρεύματος να είναι ελάχιστη σε χρόνο 3t. Ποιά είναι η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού ; Να βρεθούν όλες οι πιθανές απαντήσεις.

**Λύση**

$\vec{u}$ : η ταχύτητα της βάρκας ως προς την όχθη

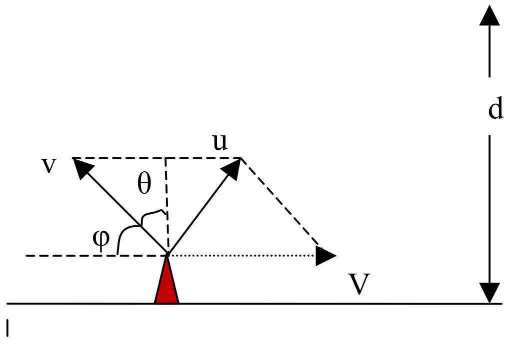
$\vec{v}$ : η ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με το ρεύμα του ποταμού

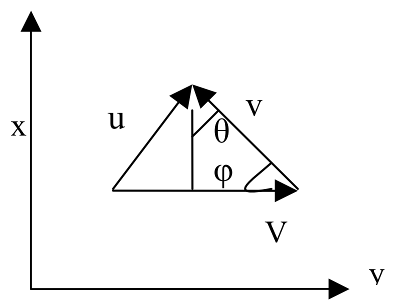
$\vec{V}$ : η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού ως προς την όχθη

Έστω y είναι η διεύθυνση του ρεύματος του ποταμού, x η κάθετη σ΄ αυτόν και φ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα της βάρκας v με την όχθη.

Η συνολική ταχύτητα της βάρκας ως προς την όχθη u ισούται με το άθροισμα των ταχυτήτων της βάρκας ως προς το ρεύμα του ποταμού v και του ρεύματος του ποταμού ως προς την όχθη V όπως φαίνεται στο σχήμα

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{V}$$



Έστω T ο χρόνος διέλευσης  της βάρκας. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι

$$T = \frac{d}{u_x} = \frac{d}{v_x} = \frac{d}{v\sin\phi} \qquad (2)$$

και άρα η μετατόπιση κατά τη φορά του ρεύματος θα είναι

$$y = u_y T = (V - v\sin\theta)\frac{d}{v\sin\phi} = (V - v\sin\theta)\frac{d}{v\cos\theta} \qquad (3)$$

Για να είναι ελάχιστος ο χρόνος στην πρώτη διέλευση θα πρέπει από (2)

$\frac{dT}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{\sin\phi}\right) = 0 \Rightarrow \frac{-\cos\phi}{\sin^2\phi} = 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = 90^o$ κι άρα ο ελάχιστος δυνατός χρόνος επιτυγχάνεται όταν η ταχύτητα v σχηματίζει γωνία $90^o$ με την όχθη.

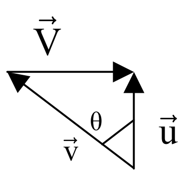
Άρα v =d/t (1) .

Αυτό που θέλουμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε είναι η απόλυτη τιμή του y, δηλαδή το $y^2$ (και όχι το y). Θέτοντας την παράγωγο του $y^2$ ίση με 0 προκύπτει

$2y\frac{dy}{d\theta} = 0$ και άρα προκύπτουν δύο λύσεις

1) y=0 δηλαδή από την (3) $V = v\sin\theta = v\cos\phi$

Μπορεί να γίνει μόνο όταν η ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού είναι πιο μικρή από της βάρκας V<v. κι άρα η ταχύτητα της βάρκας v σε σχέση με το ρεύμα, πρέπει να είναι κάθετη στην ταχύτητα της σε σχέση με την όχθη u. Τότε ο ψαράς μπορεί να μηδενίσει την πλάγια μετατόπισή του κατευθύνοντας την βάρκα του έτσι ώστε η y-συνιστώσα της σε σχέση με το νερό vsinθ να είναι ίση και αντίθετη με την ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού V όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Σ΄αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με την όχθη u πρέπει να είναι

$$u = \sqrt{v^2 - V^2} \Rightarrow \frac{d}{3t} = \sqrt{\left(\frac{d}{t}\right)^2 - V^2} \qquad (4)$$

όπου αντικαταστήσαμε την v από την (1) και η ταχύτητά διέλευσης u είναι στην x διεύθυνση και διανύει απόσταση d σε χρόνο 3t. Λύνοντας την παραπάνω ως προς V προκύπτει ότι

$$\boxed{V = \frac{2\sqrt{2}d}{3t} \cong 0.943\frac{d}{t}} \qquad (5)$$

2) Εάν είναι V>v τότε από την (3) θα πρέπει το y >0 που σημαίνει ότι η βάρκα μετακινείται προς το ρεύμα καθώς διασχίζει το ποτάμι. Σ΄αυτήν την περίπτωση για να ελαχιστοποιήσουμε την μετατόπιση θέτοντας

   dy/dθ = 0 από την (3) βρίσκουμε

$$\frac{dy}{d\theta} = \left(\frac{Vd}{v\cos\theta} - d\tan\theta\right)' = \frac{V}{v}d\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{d}{\cos^2\theta} = \frac{d}{\cos^2\theta}\left(\frac{V\sin\theta}{v} - 1\right) = 0 \text{ και άρα}$$

$$\sin\theta_{min} = \frac{v}{V} \Rightarrow \cos\theta_{min} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας τις (6) και (1) στην (2) , οι λύσεις που δινουν T=3t δίνουν τη δεύτερη λύση

$$T = \frac{d}{v\cos\theta} = \frac{d}{\frac{d}{t}\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} \Rightarrow 3t = \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} \Rightarrow 3 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} \text{ απ΄όπου προκύπτει ότι}$$

$$V = \frac{3d}{2\sqrt{2}t} \cong 1.061\frac{d}{t} \qquad (7)$$

__Παρατηρήσεις__

I. Οι δύο πιθανές λύσεις (5) και (7) που προέκυψαν δείχνουν ότι η ταχύτητα του ρεύματος πρέπει να είναι 6% μικρότερη ή μεγαλύτερη από την ταχύτητα της βάρκας!

**II** Για κάθε λύση, η κατεύθυνση της βάρκας-που προσδιορίζεται από την φορά του $\vec{v}$ -είναι η ίδια , αν και η κατεύθυνση της διαδρομής της βάρκας σε σχέση με την όχθη- όπως καθορίζεται από το $\vec{u}$ -είναι φυσικά διαφορετική. Αυτό φαίνεται γιατί η κατεύθυνση δίνεται από το

$$\cos\theta = \frac{u}{v} = \frac{d/3t}{d/t} = \frac{1}{3} \qquad (8)$$

**III.** Η δεύτερη λύση που δίνεται από την εξίσωση (6) δείχνει ότι

$$v = V\sin\theta = V\cos\phi \qquad (9)$$

κι άρα η ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με το ρεύμα v, πρέπει να είναι κάθετη στην ταχύτητα της σε σχέση με την όχθη u.

**IV.** Εάν αντικαταστήσουμε την τιμή της v από την (1), της θ από την (8) και της V από την (7) στην (3) , βρίσκουμε ότι η μετατόπιση της βάρκας προς τη φορά του ρεύματος για τη δεύτερη λύση είναι

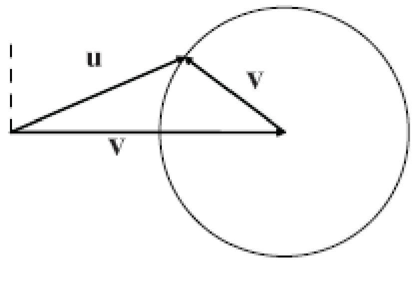
$$y = d/\sqrt{8} \cong -0.354d$$

**V.** Εάν το πρόβλημα ζητούσε απλά προς ποια κατεύθυνση ελαχιστοποιείται η πλάγια μετατόπιση της βάρκας ως προς την ταχύτητα του ρεύματος του ποταμού θα είχε μόνο μία λύση την πρώτη. Αλλά ζητάει δύο πράγματα α) να βρούμε τη κατεύθυνση $\theta_{min}$ (V) η οποία θα δώσει την ελάχιστη μετατόπιση για κάθε τιμή της ταχύτητας του ρεύματος του ποταμού V και β) επειδή για κάθε τιμή V (δηλαδή κατεύθυνση $\theta_{min}$ ) ο χρόνος διέλευσης της βάρκας καθορίζεται από την τιμή της ταχύτητάς της (εξίσωση 1) - να βρούμε όλες τις δυνατές ταχύτητες του ρεύματος του ποταμού για τις οποίες ο χρόνος αυτός είναι 3t

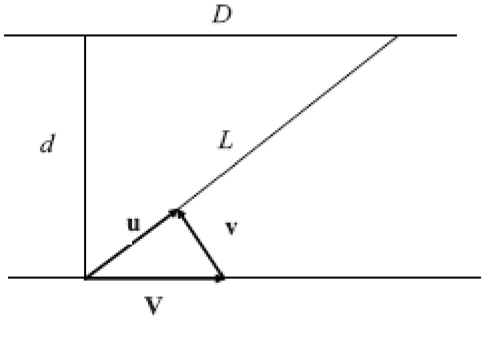
**Δεύτερος τρόπος :** Η δεύτερη απάντηση προκύπτει και ως εξής

Η συνολική ταχύτητα της βάρκας ως προς την όχθη u ισούται με το άθροισμα των ταχυτήτων της βάρκας ως προς το νερό v και του νερού ως προς την όχθη V όπως φαίνεται στο σχήμα

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{V}$$




Η κορυφή του διανύσματος u μπορεί να είναι οπουδήποτε πάνω στον κύκλο. Για να ελαχιστοποιηθεί η απόσταση που η βάρκα μετατοπίζεται κατά τη φορά του ρεύματος, η γωνία που το u σχηματίζει με το V θα πρέπει να είναι μέγιστη ώστε να είναι εφαπτομένη στον κύκλο, σχηματίζοντας ένα ορθογώνιο τρίγωνο όπως φαίνεται παρακάτω.



Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα του σχήματος είναι όμοια

$V/u=L/d$.Άρα $L=dV/\upsilon=Vt$

Αλλά $L=uT$ και άρα $u=Vt/T$. Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα

$(d/t)^2=\upsilon^2=V^2-u^2= V^2[1-(t/T)^2]$

Αφού $t/T=1/3$

$$V = \frac{d/t}{\sqrt{1-(t/T)^2}} = \frac{3d}{2\sqrt{2}t}$$