4^{η} ΕΡΓΑΣΙΑ
ΦΥΕ 14

Παράδοση 14-04-08
(Οι ασκήσεις είναι βαθμολογικά ισοδύναμες)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Α) Πάνω σε σωμάτιο εξασκείται μια δύναμη **F**=(2xy)**i** + x^2**j**. Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη, όταν το σωμάτιο μετατοπίζεται από το σημείο (0,0) στο σημείο (2,4)
α) πάνω στην ευθεία y=2x που περνάει από τα δύο σημεία
β) πάνω στην παραβολή $y=x^2$.
Είναι η δύναμη διατηρητική; Εξηγείστε. (όλες οι μονάδες είναι στο Διεθνές Σύστημα).
Β) Τρία σωμάτια κινούνται κάτω από την επίδραση πεδίου δυνάμεων που περιγράφονται από τις κατωτέρω συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας:
α) $U(x,y)=3x^3y - 7x$
β) $U(x,y,z)=cxyz$
γ) $U(x,y,z)=ax^2+bxy+cz$
όπου a, b, c είναι σταθερές. Εκφράστε τη αντίστοιχη δύναμη που επενεργεί σε κάθε σωμάτιο.

Λύσεις

Α)
Ονομάζουμε τα σημεία του επιπέδου (0,0) και (2,4) , Ο και Α αντίστοιχα.

Το έργο της μεταβλητής δύναμης δίνεται από την κατωτέρω σχέση:

$$W=\int_{\vec{r}1}^{\vec{r}2}\vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_{\vec{r}1}^{\vec{r}2}\left(F_x dx+F_y dy\right)=\int_O^A F_x dx+\int_O^A F_y dy$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε: $F_x=2xy$, $F_y=x^2$.

α) Για κίνηση του σωματίου πάνω στην ευθεία y=2x είναι dy=2dx, οπότε θα έχουμε:

$$W=\int_O^A 2xydx+\int_O^A x^2dy=\int_0^2 2x(2x)dx+\int_0^2 x^2(2)dx=\int_0^2(4x^2+2x^2)dx=\int_0^2 6x^2dx=$$

$$[6\frac{x^3}{3}]_0^2=16J$$

β) Για κίνηση του σωματίου πάνω στην παραβολή $y= x^2$, προκύπτει:

$$W=\int_O^A 2xydx+\int_O^A x^2dy=\int_0^2 2x(x^2)dx+\int_0^4 ydy=\int_0^2 2x^3dx+\int_0^4 ydy=[2\frac{x^4}{4}]_0^2+[\frac{y^2}{2}]_0^4=$$

$$=(8+8)J=16J$$

Παρατηρούμε ότι το παραγόμενο έργο για τους δύο διαφορετικούς δρόμους είναι το ίδιο. Συνεπώς, η δύναμη είναι διατηρητική.

Παρατήρηση . Η παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή. Η δύναμη είναι διατηρητική επειδή και ο στροβιλισμός της F (όπως θα μάθετε αργότερα) είναι μηδέν.

B)

Η σχέση μεταξύ δύναμης και δυναμικής ενέργειας δίνεται από την κατωτέρω έκφραση:

$$\vec{F} = -\nabla U = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$$

Επομένως η αντίστοιχη δύναμη σε κάθε σωμάτιο θα είναι:

$$a)\vec{F} = -(\frac{\partial(3x^3y-7x)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(3x^3y-7x)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(3x^3y-7x)}{\partial z}\vec{k}) = -[(9x^2y-7)\vec{i} + 3x^3\vec{j} + 0\vec{k}] =$$
$$-[(9x^2y-7)\vec{i} + 3x^3\vec{j}]$$

$$\beta)\vec{F} = -(\frac{\partial(cxyz)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(cxyz)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(cxyz)}{\partial z}\vec{k}) = -c(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

$$\gamma)\vec{F} = -(\frac{\partial(ax^2+bxy+cz)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(ax^2+bxy+cz)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(ax^2+bxy+cz)}{\partial z}\vec{k}) = -[(2ax+by)\vec{i} + bx\vec{j} + c\vec{k}]$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>

Α) Λεπτή ράβδος μήκους L βρίσκεται κατά μήκος του άξονα των θετικών x και η αρχή των αξόνων είναι στο αριστερό άκρο της ράβδου. Η ράβδος έχει μεταβαλλόμενη γραμμική πυκνότητα $dm/dx=kx^2$, όπου k θετική σταθερά, καθώς κινούμαστε από το αριστερό άκρο της προς το δεξί.
α) Να βρεθούν οι μονάδες του k στο Διεθνές Σύστημα.
β) Υπολογίστε την μάζα της ράβδου συναρτήσει των k και L.
γ) Υπολογίστε την θέση του κέντρου μάζας της ράβδου συναρτήσει του L.
<u>Υπόδειξη:</u> Για ένα στερεό σώμα, το οποίο δεν μπορεί να παρασταθεί από πεπερασμένο αριθμό σημειακών μαζών, το άθροισμα που ορίζει την θέση του κέντρου μάζας x_{cm} αντικαθίσταται από ένα ολοκλήρωμα:

$$x_{cm} = \int x\,dm / M$$

όπου x η συντεταγμένη του απειροστού στοιχείου του σώματος που έχει μάζα dm και M η μάζα του στερεού σώματος. Αντίστοιχες εκφράσεις ισχύουν για τις y_{cm} και z_{cm} συνιστώσες του κέντρου μάζας.
Β) Δύο αντικείμενα ίσων μαζών m και ιδίου μέτρου ταχύτητας υ κινούνται στο επίπεδο και συγκρούονται με πλαστική κρούση. Αν το συσσωμάτωμα των δύο αντικειμένων έχει ταχύτητα μέτρου υ/3, να βρεθεί η γωνία που σχημάτιζαν οι αρχικές διευθύνσεις των δύο σωμάτων πριν την κρούση.

<u>Λύσεις</u>

Α)
α) Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου είναι:

$\lambda = \frac{dm}{dx} = kx^2$, οπότε οι μονάδες του k στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων είναι:

k: $\frac{kg}{m \bullet m^2} = \frac{kg}{m^3}$

β) Για τον υπολογισμό της μάζας της ράβδου χρησιμοποιούμε την έκφραση της γραμμικής πυκνότητας λ:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = kx^2 \Rightarrow dm = kx^2 dx \Rightarrow \int dm = \int_0^L kx^2 dx \Rightarrow M = k[\frac{x^3}{3}]_0^L \Rightarrow M = k\frac{L^3}{3} (1)$$

γ) Για τον υπολογισμό της θέσης του κέντρου μάζας της ράβδου, χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα που δίνεται στην υπόδειξη, καθώς και την έκφραση της απειροστής μάζας dm, ως ανωτέρω:

$$x_{CM} = \frac{\int xdm}{M} = \frac{\int xkx^2 dx}{M} = \frac{\int_0^L kx^3 dx}{M} = \frac{k[\frac{x^4}{4}]_0^L}{M} = \frac{kL^4}{4M} (2)$$

Τέλος, από την αντικατάσταση της σχέσης (1) στη (2) προκύπτει:

$$x_{CM} = \frac{kL^4}{4k\frac{L^3}{3}} = \frac{3kL^4}{4kL^3} = \frac{3}{4}L$$

Συνεπώς, το κέντρο μάζας βρίσκεται στα $\frac{3}{4}L$ από το αριστερό άκρο της ράβδου, (ενώ για σταθερή γραμμική πυκνότητα θα βρισκόταν στο μέσο της ράβδου).

Β)

Το σύστημα των δύο μαζών 1 και 2 είναι απομονωμένο, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της ορμής πριν και μετά την πλαστική κρούση έχουμε:

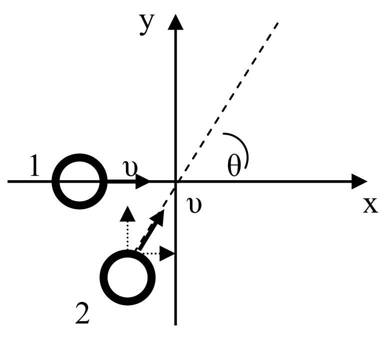
$$\overrightarrow{P_{πριν}} = \overrightarrow{P_{μετά}}$$

Η ανωτέρω εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύνολο των εξισώσεων:

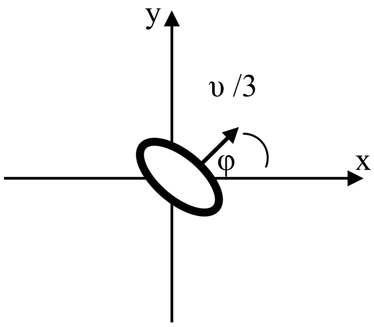
$$P_{x\ πριν} = P_{x\ μετά}\ (1),$$

$$P_{y\ πριν} = P_{y\ μετά}\ (2)$$

Πριν την πλαστική κρούση



Μετά την πλαστική κρούση



Έστω θ η γωνία που σχηματίζουν οι αρχικές διευθύνσεις των δύο σωμάτων πριν την κρούση και φ η γωνία του συσσωματώματος με τον άξονα x μετά την κρούση.

Η σχέση (1) γίνεται:

$$m\upsilon + m\upsilon\cos\theta = 2m\frac{\upsilon}{3}\cos\varphi \Rightarrow 1+\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\varphi \qquad (3)$$

Η σχέση (2) γίνεται αντίστοιχα:

$$0 + m\upsilon\sin\theta = 2m\frac{\upsilon}{3}\sin\varphi \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{3}\sin\varphi \qquad (4)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις (3) και (4):

$$1+2\cos\theta+\cos^2\theta = \frac{4}{9}\cos^2\varphi \qquad (5)$$

$$\sin^2\theta = \frac{4}{9}\sin^2\varphi \qquad (6)$$

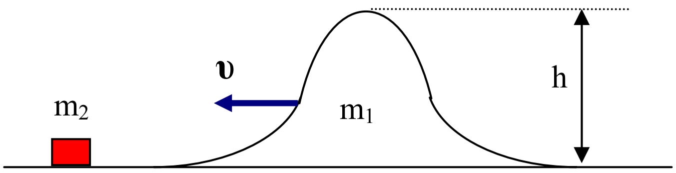
Προσθέτουμε κατά μέλη τις (5) και (6) :

$$1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta = \frac{4}{9}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \Rightarrow 1+2\cos\theta+1 = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

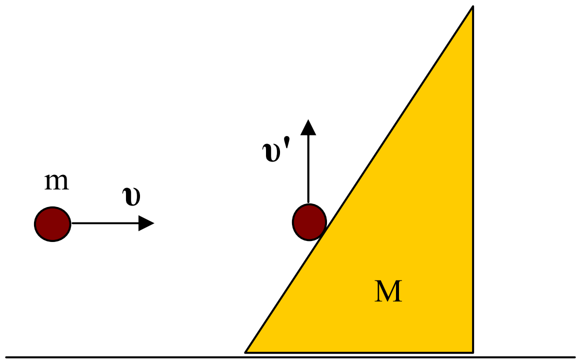
$$2\cos\theta = \frac{4}{9}-2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{7}{9} \Rightarrow \theta = 141^0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Α) Σε λεία οριζόντια επιφάνεια κινείται σώμα μάζας m_1 που έχει σχήμα λοφίσκου ύψους h με λείες πλαγιές. Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα του m_1, ώστε σώμα m_2 που βρίσκεται ακίνητο στο δρόμο του να ανέβει μέχρι την κορυφή και να περάσει από την άλλη πλευρά του;



Β) Σφαιρίδιο μάζας m κινείται με οριζόντια ταχύτητα **υ**. Αφού συγκρουσθεί ελαστικά με πρίσμα μάζας M, που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο, αναπηδά κατακόρυφα. Υπολογίστε το ύψος στο οποίο θα φθάσει το σφαιρίδιο.



Λύσεις

Α)

Ζητάμε την ελάχιστη ταχύτητα υ του λοφίσκου m_1 ώστε να φθάσει το σώμα m_2 στην κορυφή του λοφίσκου. Σε αυτή την περίπτωση, η ταχύτητα του στην κορυφή θα είναι μηδέν ως προς το λοφίσκο, δηλαδή και τα δύο σώματα θα κινούνται με ταχύτητα υ' ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Αφού έχουμε κίνηση μόνο στον οριζόντιο x-άξονα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο την x-συνιστώσα των ταχυτήτων. Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της ορμής.

$$m_1\upsilon = (m_1 + m_2)\upsilon' \Rightarrow \upsilon' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon$$

Από την αρχή διατήρηση ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 = m_2 gh + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon'^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 = m_2 gh + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon\right)^2 \Rightarrow$$

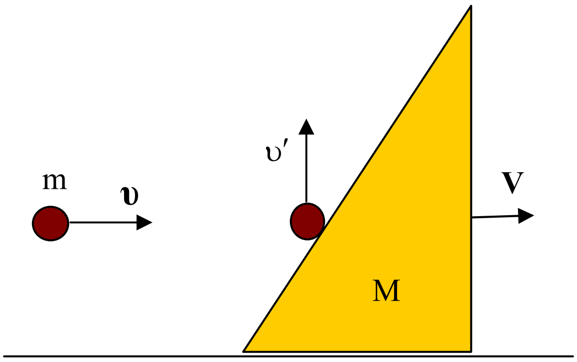
$$\upsilon^2 = 2gh\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}$$

B)

Η σφαίρα μάζας m έχει αρχική ταχύτητα υ στον οριζόντιο x-άξονα. Μετά την κρούση η σφαίρα έχει ταχύτητα υ′ στον κατακόρυφο y-άξονα ενώ η σφήνα αποκτά ταχύτητα V στον x-άξονα. Γράφουμε την αρχή διατήρησης ορμής στον x-άξονα

$$m\upsilon = MV \Rightarrow V = \frac{m}{M}\upsilon \qquad (1)$$



Αφού έχουμε ελαστική κρούση γράφουμε και την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\upsilon'^2$$

Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\right)^2\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\upsilon'^2 \Rightarrow \upsilon'^2 = \left(1 - \frac{m}{M}\right)\upsilon^2 = \frac{M-m}{M}\upsilon^2$$

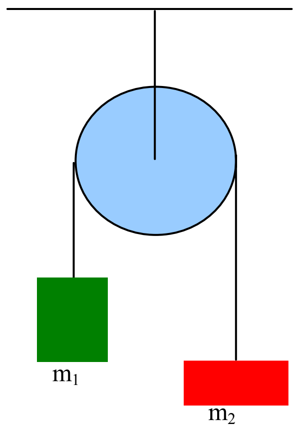
Τέλος μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας στο σημείο κρούσης και στο σημείο μέγιστου ύψους.

$$\frac{1}{2}m\upsilon'^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{\upsilon'^2}{2g} = \frac{M-m}{2Mg}\upsilon^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

A) Θεωρείστε σύστημα δύο σωμάτων m_1 και m_2 με ταχύτητες $\boldsymbol{\upsilon_1}$ και $\boldsymbol{\upsilon_2}$. (i) Βρείτε πώς η συνολική ορμή του συστήματος σχετίζεται με την ταχύτητα του ΚΜ (στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, L). (ii) Αποδείξτε ότι η συνολική ορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ είναι μηδέν. (iii) Βρείτε την σχέση μεταξύ της κινητικής ενέργειας του συστήματος στο σύστημα του εργαστηρίου και στο σύστημα του ΚΜ.

B) Δύο μάζες m_1 και m_2 συνδεδεμένες με λεπτό αβαρές μη εκτατό νήμα κρέμονται από τροχαλία αμελητέας μάζας. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο. Υπολογίστε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του ΚΜ του συστήματος.



<u>Λύσεις</u>

A)

(A.i) Η συνολική ορμή στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου δίνεται από την σχέση

$$\vec{p}_{o\lambda} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 \qquad (1)$$

και η ταχύτητα του κέντρου μάζας από

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1) και το γεγονός ότι η συνολική μάζα $M = m_1 + m_2$, η σχέση (2) γίνεται

$$\vec{p}_{o\lambda} = M\vec{\upsilon}_C \qquad (3)$$

(A.ii) Αν $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ και $\vec{\upsilon}_C$ είναι οι ταχύτητες των σωμάτων 1,2 και του κέντρου μάζας αντίστοιχα ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, ενώ $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ οι ταχύτητες των σωμάτων 1 και 2 ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_C \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_C \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την (2), οι σχέσεις (4) γίνονται

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$$

ή

$$\vec{\upsilon}_1' = \frac{m_2\vec{\upsilon}_1 - m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_2' = \frac{m_1\vec{\upsilon}_2 - m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2} \qquad (5)$$

Η συνολική ορμή του συστήματος στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{p}_{o\lambda}' = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2' \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5) στην (6) προκύπτει ότι

$$\vec{p}_{o\lambda}' = 0 \qquad (7)$$

(A.iii)

Η Κινητική ενέργεια (ΚΕ) στο σύστημα του εργαστηρίου (L) δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \qquad (8)$$

Η κινητική ενέργεια στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας (C) είναι

$$\mathrm{E}' = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \qquad (9)$$

Αντικαθιστούμε στην (8) τις σχέσεις (4)

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}m_1\left(\vec{\upsilon}_1' + \vec{\upsilon}_C\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{\upsilon}_2' + \vec{\upsilon}_C\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{\upsilon}_1'^2 + \frac{1}{2}m_1\vec{\upsilon}_C^2 + m_1\vec{\upsilon}_1'\cdot\vec{\upsilon}_C + \frac{1}{2}m_2\vec{\upsilon}_2'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{\upsilon}_C^2 + m_2\vec{\upsilon}_2'\cdot\vec{\upsilon}_C =$$

$$\left(\frac{1}{2}m_1\vec{\upsilon}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{\upsilon}_2'^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\vec{\upsilon}_C^2 + \left(m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'\right)\cdot\vec{\upsilon}_C =$$

$$E' + \frac{1}{2}M\vec{\upsilon}_C^2 + \left(m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'\right)\cdot\vec{\upsilon}_C \qquad (10)$$

Όμως αποδείξαμε στην ερώτηση (A.ii) ότι η συνολική ορμή στο σύστημα C

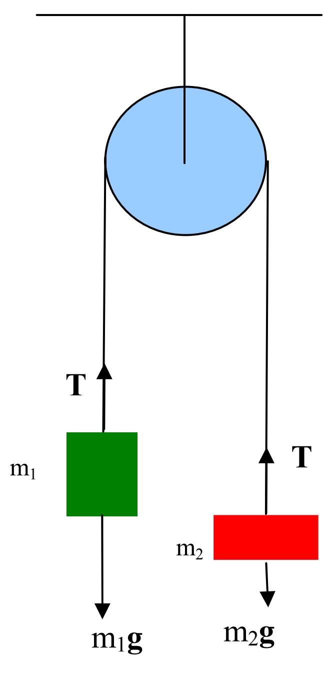
$$\vec{p}'_{o\lambda} = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2' = 0 \qquad (7)$$

Άρα η (10) γίνεται

$$E = E' + \frac{1}{2}M\vec{\upsilon}_C'^2$$

Δηλαδή η συνολική ΚΕ στο σύστημα αναφοράς L ισούται με την ΚΕ στο σύστημα C (μπορούμε να την ονομάσουμε εσωτερική κινητική ενέργεια) συν την ΚΕ ενός υλικού σημείου μάζας ίσης με την συνολική μάζα του συστήματος των σωμάτων κινούμενης με την ταχύτητα του ΚΜ.

Β)



Θεωρούμε μόνο κίνηση στον κατακόρυφο άξονα άρα χρησιμοποιούμε μόνο τις y-συνιστώσες των διανυσμάτων
Έστω τα θετικά προς τα κάτω. Ισχύει για το σώμα m_1

$$m_1 g - T = m_1\alpha_1 \qquad (1a)$$

και για το σώμα m_2

$$m_2 g - T = m_2\alpha_2 \qquad (1b)$$

Αφού όμως τα δύο σώματα συνδέονται με μη εκτατό νήμα ισχύει ότι

$$a_1 = -a_2 = a \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (3)$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας δίνεται από την σχέση

$$\vec{a}_C = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$

Εισάγοντας την (3), και χρησιμοποιώντας μόνο την y-συνιστώσα των διανυσμάτων, η (4) γίνεται

$$a_C = \frac{m_1 a - m_2 a}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\right) = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g \qquad (5)$$

Αντίστοιχα με την (4), μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \qquad (6)$$

Αφού τα σώματα κινούνται με σταθερή επιτάχυνση ξεκινώντας από την ηρεμία, ισχύει ότι

$$\upsilon_1 = a_1 t \quad \text{και} \quad \upsilon_2 = a_2 t \qquad (7)$$

Βέβαια ισχύει η (2) και ακόμα ότι $\upsilon_1 = -\upsilon_2 = \upsilon$. Άρα η (6) γίνεται (y-συνιστώσες)

$$\upsilon_C = \frac{m_1 \upsilon - m_2 \upsilon}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} at \qquad (8)$$

και χρησιμοποιώντας την (3)

$$\upsilon_C = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 gt \qquad (9)$$

Θεωρώντας ότι στο ΚΜ τοποθετείται ένα υλικό σημείο με μάζα τη μάζα του συστήματος, επιταχυνόμενο με σταθερή επιτάχυνση α_C, τότε αμέσως βρίσκουμε ότι το αποτέλεσμα (8) προκύπτει από την σχέση $\upsilon_C = a_C t$ σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα (5).

ΑΣΚΗΣΗ 5

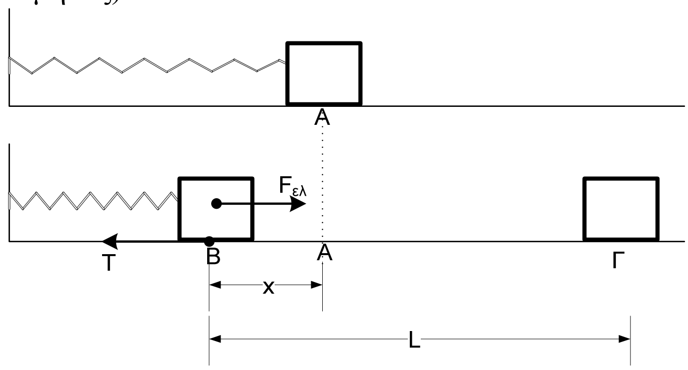
Σε κύβο μάζας m=2 kg που ακουμπά στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου αμελητέας μάζας ασκείται δύναμη που προκαλεί συμπίεση του ελατηρίου κατά 0.15 m. Στη συνέχεια το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και ο κύβος κινείται κατά 0.6 m πάνω σε οριζόντιο τραπέζι πριν σταματήσει. Η σταθερά του ελατηρίου είναι 200 N /m.

α) Ποιος είναι ο συντελεστής κινητικής τριβής μ_κ μεταξύ κύβου και τραπεζιού;
β) Ποια η ταχύτητα του σώματος όταν το ελατήριο αποκτά το αρχικό του μήκος;
γ) Ποια η μεταβολή του αθροίσματος της κινητικής ενέργειας K και της δυναμικής ενέργειας U κατά τη διάρκεια της διαδικασίας;

Λύσεις

α)

(Υποθέτουμε ότι η δράση της $F_{\varepsilon\lambda}$ σταματάει όταν το ελατήριο επιστρέψει στο κανονικό του μήκος)



x=AB=0.15 m
L=BΓ=0.60 m
m=2 kg
k=200 N/m

$$T = \mu_\kappa N = \mu_\kappa mg$$

$$W(\mathrm{B} \to \Gamma) = W_{F_{\varepsilon\lambda}}(\mathrm{B} \to \Gamma) + W_T(\mathrm{B} \to \Gamma)$$
$$= W_{F_{\varepsilon\lambda}}(\mathrm{B} \to \mathrm{A}) + W_T(\mathrm{B} \to \Gamma) \Rightarrow$$
$$\cancel{K_\Gamma}^{0} - \cancel{K_\mathrm{B}}^{0} = U_B - U_A + W_T(\mathrm{B} \to \Gamma)$$
$$0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0 - T \cdot (\mathrm{B}\Gamma)$$
$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}kx^2 = T \cdot L \Rightarrow \tfrac{1}{2}kx^2 = \mu_\kappa mgL$$
$$\mu_\kappa = \frac{kx^2}{2mgL} = \frac{200 \cdot (0.15)^2}{2 \cdot 2 \cdot (9.8) \cdot (0.60)} = 0.19$$

β)

$$W(\mathrm{B}\to\mathrm{A}) = W_{F_{\varepsilon\lambda}}(\mathrm{B}\to\mathrm{A}) + W_T(\mathrm{B}\to\mathrm{A})$$

$$K_{\mathrm{A}} - K_{\mathrm{B}} = U_{\mathrm{B}} - \cancel{U_{\mathrm{A}}}^{0} - T\cdot x \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} m u_A^2 = \tfrac{1}{2} k x^2 - Tx \Rightarrow u_{\mathrm{A}}^2 = \frac{kx^2 - 2Tx}{m} \Rightarrow u_{\mathrm{A}}^2 = \frac{kx^2 - 2\mu_\kappa mgx}{m}$$

$$\Rightarrow u_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{kx^2 - 2\mu_\kappa mgx}{m}}$$

$\mathrm{A}\rho\alpha$

$$u_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{200\cdot(0.15)^2 - 2\cdot(0.19)\cdot 2\cdot(9.8)\cdot 0.15}{2}} m/\mathrm{s} =$$

$$\sqrt{\frac{4\cdot 5 - 1\cdot 1172}{2}} m/\mathrm{s} = \sqrt{\frac{3\cdot 3828}{2}} m/\mathrm{s} = \sqrt{1.69} m/\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow u_A = 1.3 m/\mathrm{s}$$

γ) Για τη διαδρομή Β→Α

$$E_B = K_B + U_B = \tfrac{1}{2} kx^2 \ = 2.25J$$

$$E_A = K_A + U_A = K_A = \tfrac{1}{2} m u_A^2 = 1.60J$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Α) Δορυφόρος μάζας m μεταβαίνει από μια κυκλική τροχιά ακτίνας 3R σε μια άλλη 4R (όπου R:η ακτίνα της Γης). Υπολογίστε α) το έργο που παράγεται β) Συσχετίστε το έργο αυτό με τις μεταβολές της κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Β) Ένας πύραυλος έχει αρχική μάζα m_o και ανεβαίνει κατακόρυφα στο πεδίο βαρύτητας της γης. Αν τα καύσιμα εκτοξεύονται με σταθερό ρυθμό n kg/s και με ταχύτητα u', ως προς τον πύραυλο υπολογίστε την ταχύτητα του πυραύλου σε συνάρτηση με το χρόνο. Θεωρήστε ότι το πεδίο βαρύτητας είναι ομογενές και ότι η αρχική ταχύτητα του πυραύλου είναι μηδέν.

Λύσεις

Α)

α)Αν υποθέσουμε ότι m είναι η μάζα του σώματος και M η μάζα της Γης, (υποθέτουμε ότι η Γη είναι ακίνητη σ ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς), τότε η ολική ενέργεια του συστήματος των δυο σωμάτων που βρίσκονται μεταξύ τους απόσταση r, είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας της μάζας m και της δυναμικής ενέργειας του συστήματος και δίνεται από την εξίσωση:

$$E = K + U \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για το σώμα μάζας m, του οποίου η γραμμική ταχύτητα περιστροφής γύρω από τη Γη είναι v, όταν η απόσταση των δύο σωμάτων είναι r, έχουμε:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \qquad (2)$$

Επομένως έχουμε:

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} \qquad (3)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε την ενέργεια του δορυφόρου E_i, E_f στις τροχιές 3R και 4R, αντίστοιχα:

$$E_i = -\frac{GMm}{6R} \qquad E_f = -\frac{GMm}{8R}$$

Επομένως το έργο που είναι αναγκαίο για να αυξηθεί η ενέργεια του συστήματος είναι:

$$W = E_f - E_i = -\frac{GMm}{8R} - \left(-\frac{GMm}{6R}\right) = \frac{GMm}{24R} \qquad (4)$$

β) Για να δούμε πως είναι κατανεμημένη η ενέργεια αφού καταναλώσαμε έργο πάνω στο σύστημα , με βάση την εξίσωση (2), βρίσκουμε ότι $\Delta K = -GMm/24R$ (μειώνεται). Ενώ η αναλογούσα μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι $\Delta U = GMm/12R$ (αυξάνεται). Επομένως το έργο που έχει παραχθεί πάνω στο σύστημα είναι:

$$W = \Delta K + \Delta U = \frac{GMm}{24R}$$

B)

Έστω ότι σε μια τυχαία χρονική στιγμή t η μάζα του πυραύλου είναι m, η ταχύτητα του ως προς τη Γη $\vec{v}$ και η ταχύτητα των καυσίμων ως προς τη Γη $\vec{v'}$.

Με βάση αυτά θα έχουμε:

Τη χρονική στιγμή t η ορμή του πυραύλου είναι:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή t+dt η ορμή του συστήματος πυραύλου και εκτοξευθέντων καυσίμων είναι:

$$\vec{p}(t+dt) = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) + (-dm)\vec{v'} \quad (2)$$

Άρα:

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = md\vec{v} + \vec{v}dm - \vec{v'}dm = md\vec{v} - (\vec{v'} - \vec{v})dm = md\vec{v} - \vec{u}'dm \quad (3)$$

Η μόνη εξωτερική δύναμη που επιδρά στο σύστημα μας είναι η δύναμη της βαρύτητας. Επομένως χρησιμοποιώντας την (3) μπορούμε να γράψουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}'\frac{dm}{dt} = m\vec{g} \quad (4)$$

Θεωρώντας σαν άξονα κίνησης τον κατακόρυφο με θετική φορά προς τα πάνω έχουμε:

$$m\frac{dv}{dt} + u'\frac{dm}{dt} = -mg \quad (5)$$

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με m και πολλαπλασιάζοντας με dt καταλήγουμε:

$$dv = -u'\frac{dm}{m} - gdt \quad (6)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή έχουμε:

$$\int_0^v dv = -u'\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} - g\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$v = u'\ln\frac{m_o}{m} - gt \quad (7)$$

\`Επειδή ο σταθερός ρυθμός εκτόξευσης της μάζας, δίνεται σε kg/s και επειδή η μάζα μειώνεται, θα ισχύει:

$$n = -\frac{dm}{dt} \Rightarrow dm = -ndt \Rightarrow \int_{m_o}^{m} dm = -n\int_0^t dt \Rightarrow m = m_o - nt \; (8)$$

Επομένως καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση:

$$v = u'\ln\frac{m_o}{m_o - nt} - gt \quad (9)$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Σώμα μάζας m κινείται προς τα πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα, υπό την επίδραση δύναμης **F** που είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Δείξτε ότι εάν το έργο W που παράγει η δύναμη είναι μεγαλύτερο του διπλάσιου της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας τότε αν πάψει να εφαρμόζεται η **F** το σώμα δεν θα κινηθεί προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Λύσεις

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του $\vec{B}$, η τριβή $\vec{T}$, η αντίδραση του δαπέδου $\vec{N}$ και η δύναμη που το ωθεί $\vec{F}$.

$$\vec{\upsilon} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \begin{cases} F = T + B\sin\theta & (1) \\ \mathrm{N} = \mathrm{B}\cos\theta & (2) \end{cases}$$

Το έργο που παράγει η δύναμη F είναι $\Delta W = F\Delta S$ όπου ΔS το διάστημα που διανύει το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο.

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι $\Delta U = B\Delta y = B\sin\theta\,\Delta S$

Επομένως

$$\Delta W > 2\Delta U \Rightarrow F\Delta S > 2mg\Delta S\sin\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(T + B\sin\theta\right)\Delta S > 2B\Delta S\sin\theta$$
$$\Rightarrow T + B\sin\theta > 2B\sin\theta \Rightarrow T > B\sin\theta \quad (3)$$

Αλλά $T = \mu_\kappa N = \mu_\kappa B\cos\theta$, όπου μ_κ ο συντελεστής τριβής κινήσεως.

Επομένως από την (3) έχουμε $\mu_\kappa B\cos\theta > B\sin\theta \Rightarrow \mu_\kappa > \tan\theta \quad (4)$

Όταν θα πάψει να εφαρμόζεται η δύναμη F για να ισορροπεί το σώμα θα πρέπει

$$T_{o\rho} \geq B\sin\theta \Rightarrow \mu_s B\cos\theta \geq B\sin\theta \Rightarrow \mu_s \geq \tan\theta \quad (5)$$

όπου μ_s ο συντελεστής στατικής τριβής.

Ισχύει όμως ότι $\mu_s > \mu_\kappa \overset{(4)}{\Rightarrow} \mu_s > \tan\theta$

Άρα η συνθήκη (5) ικανοποιείται και το σώμα ισορροπεί.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 8</u>

Σώμα μάζας m κινείται σε κατακόρυφο κύκλο ακτίνας R πάνω σε ένα δακτύλιο ο οποίος ακουμπά στο έδαφος όπως στο σχήμα. Τριβή δεν υπάρχει. Όταν το σώμα m βρίσκεται στο κατώτατο σημείο του δακτυλίου η ταχύτητά του είναι u_0.

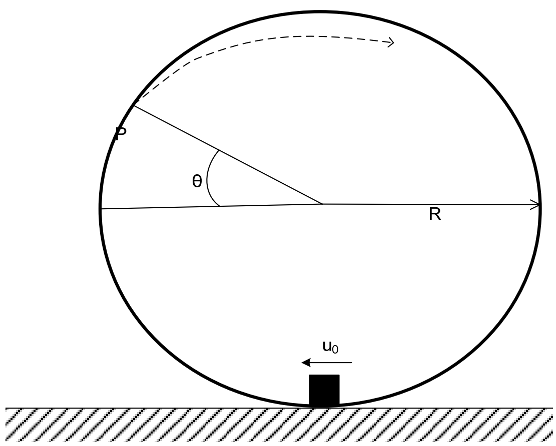
α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή u_m της u_0 για την οποία η m θα διαγράψει πλήρως τον κύκλο χωρίς να χάσει την επαφή της με το δακτύλιο;

β) υποθέστε ότι η u_0 είναι $0.775u_m$. Το σωμάτιο θα κινηθεί πάνω στο δακτύλιο μέχρι ένα ορισμένο σημείο P, στο οποίο θα χάσει την επαφή του με το δακτύλιο και θα κινηθεί σε μια τροχιά την οποία δείχνει πρόχειρα η διακεκομμένη γραμμή. Βρείτε τη γωνιακή θέση θ του σημείου P.

γ) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος από το έδαφος που θα φτάσει το σώμα;

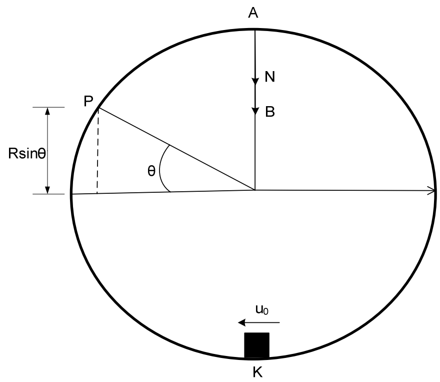
δ) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος (διάνυσμα) όταν αυτό θα προσκρούσει στο έδαφος ;

ε) Σε πόση απόσταση από το σημείο επαφής του δακτυλίου με το έδαφος θα πέσει το σώμα;



<u>Λύσεις</u>

α) Για να διαγράψει η m πλήρως το εσωτερικό του δακτυλίου χωρίς να χάσει την επαφή της με αυτόν, θα πρέπει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς, δηλαδή στο σημείο Α, να ισχύει:



στο Α: $mg + N = m\dfrac{u_A^2}{R} \Rightarrow$

$$N = m\frac{u_A^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow$$

$$u_A^2 \geq gR \quad (1)$$

Η συνθήκη διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των σημείων Α και Κ επιτάσσει:

$$E_K = E_A \Rightarrow \tfrac{1}{2}\cancel{m}u_0^2 = \tfrac{1}{2}\cancel{m}u_A^2 + \cancel{m}g2R$$

$$u_0^2 = u_A^2 + 4gR \Rightarrow u_A^2 = u_0^2 - 4gR \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow u_0^2 - 4gR \geq gR \Rightarrow u_0^2 \geq 5gR \Rightarrow u_{0\min} = \sqrt{5gR}$$

β)

$$E_K = E_P \Rightarrow \tfrac{1}{2}mu_0^2 = \tfrac{1}{2}mu_P^2 + mg(R + R\sin\theta) \quad (1)$$

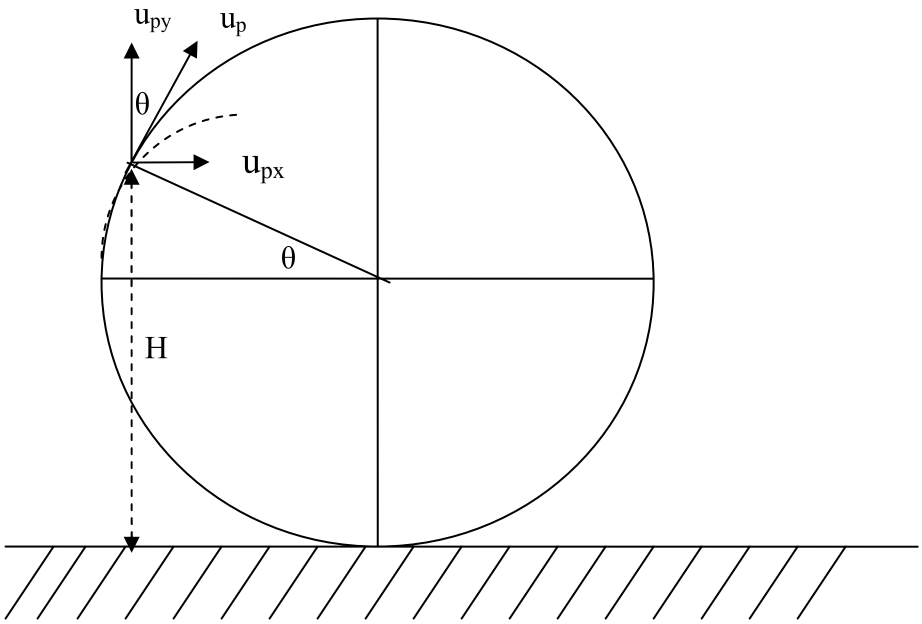
$$\left.\begin{aligned} &mg\sin\theta + \cancel{N}^{0} = m\frac{u_P^2}{R} \Rightarrow Rg\sin\theta = u_P^2 \\ &(1) \Rightarrow u_0^2 = u_P^2 + 2gR(1+\sin\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_P^2 = u_0^2 - 2gR(1+\sin\theta) = Rg\sin\theta$$

$$u_0^2 = 2gR + 3Rg\sin\theta \Rightarrow \frac{u_0^2 - 2Rg}{3Rg} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{u_m^2(0.775)^2}{3Rg} - \frac{2}{3} = \frac{5\cancel{gR}(0.775)^2}{3\cancel{gR}} - \frac{2}{3} \simeq \frac{1.003}{3} \Rightarrow \theta \approx 19{,}5^\circ$$

γ)



$$\frac{1}{2}mu_p^2 = \frac{1}{2}mu_{px}^2 + \frac{1}{2}mu_{py}^2 = mgh + \frac{1}{2}mu_{px}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mu_{py}^2 = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{u_{py}^2}{2g} = \frac{u_p^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{Rg\sin\theta\cos^2\theta}{2g} = \frac{R}{2}\sin\theta\cos^2\theta$$

Οπότε $H_{\max} = H + \frac{R}{2}\sin\theta\cos^2\theta = R + R\sin\theta + \frac{R}{2}\sin\theta\cos^2\theta =$

$$= R\left[1 + \sin\theta\left(1 + \frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\right] \approx 1.48R$$

δ) Έστω u_Γ η ταχύτητα του σώματος κατά τη στιγμή της πρόσκρουσής του στο έδαφος. Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας γράφεται τότε ως εξής:

$$\frac{1}{2}mu_p^2 + mgH = \frac{1}{2}mu_\Gamma^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mu_{px}^2 + \frac{1}{2}mu_{py}^2 + mgH = \frac{1}{2}mu_{\Gamma x}^2 + \frac{1}{2}mu_{\Gamma y}^2$$

αλλά $u_{px} = u_{\Gamma x}$, επομένως

$$\frac{1}{2}mu_{py}^2 + mgH = \frac{1}{2}mu_{\Gamma y}^2 \Rightarrow u_{\Gamma y}^2 = u_{py}^2 + 2gH$$

$$\Rightarrow u_{\Gamma y} = \sqrt{u_{py}^2 + 2gH} = \sqrt{Rg\sin\theta\cos^2\theta + 2g\left(R + R\sin\theta\right)}$$

$$\approx \sqrt{0.297Rg + 2.67Rg} \approx 1.72\sqrt{Rg}$$

$$u_{\Gamma x} = u_{px} = \sqrt{Rg\sin^3\theta} \approx 0.19\sqrt{Rg}$$

Άρα $\vec{u}_\Gamma = 0.19\sqrt{Rg}\,\hat{x}_0 - 1.72\sqrt{Rg}\,\hat{y}_0$

ε)

Ο χρόνος πτώσης του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση

$$u_{py} - gt = -u_{\Gamma y} \Rightarrow t = \frac{u_{py} + u_{\Gamma y}}{g} = \frac{0.545\sqrt{Rg} + 1.72\sqrt{Rg}}{g} = 2.265\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Άρα η οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα είναι

$$x = u_{px}t = 0.19\sqrt{Rg} \times 2.265\sqrt{\frac{R}{g}} = 0.430R$$

Επομένως η απόσταση του σώματος από το σημείο επαφής του δακτυλίου με το έδαφος είναι

$$0.430R - R\cos\theta = 0.430R - 0.942R = -0.512R$$

Επομένως το σώμα θ πέσει σε απόσταση $0.512R$ αριστερά του σημείου επαφής του δακτυλίου με το έδαφος.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u>

Το μέτρο της ελκτικής δύναμης μεταξύ του θετικά φορτισμένου πυρήνα και του αρνητικά φορτισμένου ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου, στα πλαίσια του μοντέλου του Bohr, δίνεται από την

$$F=ke^2/r^2,$$

Όπου e είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου, k μια σταθερά και r η απόσταση μεταξύ ηλεκτρονίου και πυρήνα. Υποθέστε ότι ο πυρήνας είναι ακίνητος. α) Υπολογίστε την δυναμική ενέργεια του ατόμου ως συνάρτηση του r, θεωρώντας ότι είναι μηδέν για r που τείνει στο άπειρο. β) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου που αρχικά κινείται σε κύκλο ακτίνας R_1. γ) Το ηλεκτρόνιο μεταβαίνει ξαφνικά σε μια κυκλική τροχιά μικρότερης ακτίνας R_2. Να βρεθεί η μεταβολή της δυναμικής και κινητικής ενέργειας, καθώς και η ελάττωση της ολικής ενέργειας του ατόμου σ' αυτή τη διαδικασία. (Η ενέργεια αυτή αποδίδεται με τη μορφή ακτινοβολίας).

<u>Λύσεις</u>

Το μέτρο της ελκτικής δύναμης δίνεται από τη σχέση:

$$F = k\frac{e^2}{r^2} \qquad (1)$$

Θεωρούμε ότι ο πυρήνας βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

α) Για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας του ατόμου $U(\vec{r})$, θεωρώντας ότι $U(\vec{b})$ είναι η δυναμική ενέργεια του σημείου αναφοράς, έχουμε διαδοχικά:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{b}) = -\int_{\vec{b}}^{\vec{r}} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\int_{\vec{b}}^{\vec{r}} Fdr\cos 180^o = \int_{\vec{b}}^{\vec{r}} Fdr = \int_{\vec{b}}^{\vec{r}} k\frac{e^2}{r^2}dr = ke^2\int_{\vec{b}}^{\vec{r}} \frac{1}{r^2}dr =$$

$$= [-ke^2\frac{1}{r}]_b^r = -ke^2(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})$$

Θεωρούμε τώρα ότι το σημείο αναφοράς $b \to \infty \Rightarrow \frac{1}{b} \to 0$. Στο σημείο αυτό από την υπόθεση, η δυναμική ενέργεια $U(\vec{b})$=0, οπότε η ανωτέρω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$U(r) = -ke^2\frac{1}{r} \qquad (2)$$

β) Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου ισούται με:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (3)$$

Εξάλλου, η ελκτική δύναμη της σχέσεως (1) παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης για το ηλεκτρόνιο, οπότε:

$$k\frac{e^2}{R_1^2} = \frac{mv^2}{R_1} \Rightarrow k\frac{e^2}{R_1} = mv^2 \qquad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (3) και (4) προκύπτει τελικά για την κινητική ενέργεια:

$$K_1 = k\frac{e^2}{2R_1} \qquad (5)$$

γ) Κατά την μετάβαση του ηλεκτρονίου από την ακτίνα R_1 στην μικρότερη ακτίνα R_2, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας υπολογίζεται από την (2) :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -ke^2\frac{1}{R_2} + ke^2\frac{1}{R_1} = -ke^2(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) < 0 \qquad (6)$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται με βάση την (5) :

$$\Delta K = K_2 - K_1 = k\frac{e^2}{2R_2} - k\frac{e^2}{2R_1} = \frac{ke^2}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) > 0 \qquad (7)$$

Η μεταβολή της ολικής ενέργειας του ατόμου υπολογίζεται από τις (6) και (7) :

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = -ke^2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{ke^2}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = -\frac{ke^2}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) < 0$$

Σ' αυτή τη διαδικασία επέρχεται ελάττωση της ολικής ενέργειας του ατόμου, αφού ΔΕ<0.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο ατόμων σε ορισμένα διατομικά μόρια μπορεί να εκφραστεί ως εξής: $U(x) = -a/x + b/x^2$, όπου a και b είναι θετικές σταθερές και x η απόσταση μεταξύ των ατόμων. α) Για ποιες τιμές του x η U(x) γίνεται μηδέν; β) Σχεδιάστε την U(x). (γ) Βρείτε τη μεταξύ των ατόμων δύναμη και το πρόσημο της δύναμης σε κατάλληλα διαστήματα της μεταβλητής x. (δ) Να βρεθεί η θέση ισορροπίας και το είδος της ισορροπίας. (ε) Υποθέτοντας ότι το ένα από τα άτομα παραμένει ακίνητο στη θέση x=0, δείξτε ότι για μικρά πλάτη ταλάντωσης Δx του δευτέρου ατόμου περί τη θέση ισορροπίας, η δύναμη είναι ανάλογη του (-Δx), οπότε έχουμε συνθήκη απλής αρμονικής κίνησης.

Λύσεις

α) Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \,(1)$$

Οπότε: $U(x) = 0 \Rightarrow -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{b - ax}{x^2} = 0 \Rightarrow b - ax = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{b}{a}$

Εξάλλου: $\lim_{x\to\infty} U(x) = 0$, δηλαδή η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της U(x).

β) Η γραφική παράσταση της U(x) θα γίνει με την μελέτη της συνάρτησης, κατά τα γνωστά.

Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x\to 0^+} U(x) = +\infty$, δηλαδή η ευθεία x=0, είναι κάθετη ασύμπτωτη της U(x).

Επιπλέον, η παράγωγος της (1) δίνει:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3} = \frac{ax - 2b}{x^3} \,(2)$$

Η πρώτη παράγωγος της U(x) μηδενίζεται όταν:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow ax - 2b = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2b}{a}$$

Για $x<x_1$, $\frac{dU(x)}{dx}<0$, η U(x) είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x>x_1$, $\frac{dU(x)}{dx}>0$, η U(x) είναι γνησίως αύξουσα.

Ευρίσκουμε την 2η παράγωγο της συνάρτησης U(x) από την (2).

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=-\frac{2a}{x^3}+\frac{6b}{x^4}=\frac{6b-2ax}{x^4}(3)$$

Για $x=x_1$, η (3) γίνεται:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_1}=\frac{a^4}{8b^3}>0(4)$$

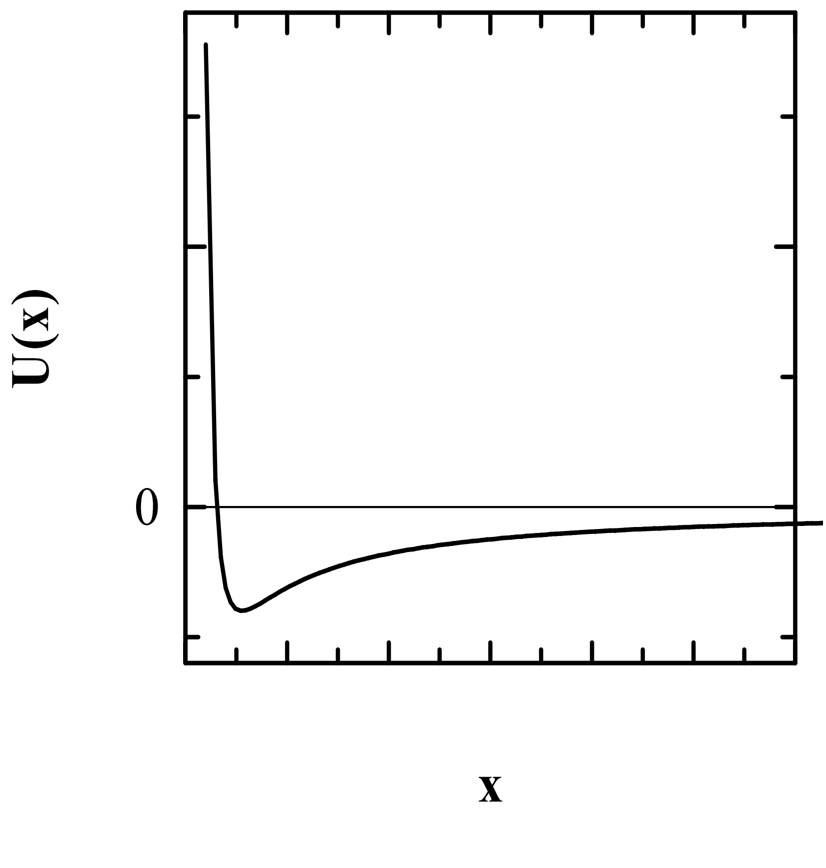
Επομένως, για $x=x_1$ η συνάρτηση U(x) έχει ελάχιστο, το οποίο είναι:

$$U(x_1)=-\frac{a}{x_1}+\frac{b}{x_1^2}=-\frac{a^2}{4b}$$

Τέλος:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=0\Rightarrow 6b-2ax=0\Rightarrow x_2=\frac{3b}{a}\ \text{(σημείο καμπής)}$$

Η γραφική παράσταση της U(x) φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Η μεταξύ των ατόμων δύναμη είναι ως γνωστό:

$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$, οπότε λόγω της (2) προκύπτει:

$$F(x) = -\frac{ax-2b}{x^3} = \frac{2b-ax}{x^3} \quad (5)$$

Για $x = x_1 = \frac{2b}{a}$ έχουμε $F(x_1) = 0$

Για $x<x_1$ η δύναμη είναι θετική, ενώ για $x>x_1$ η δύναμη είναι αρνητική.

δ) Για $x = x_1 = \frac{2b}{a}$, όπως είδαμε από την σχέση (4), η συνάρτηση U(x) έχει ελάχιστο, επομένως η x_1 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

ε) Από την σχέση (5) έχουμε διαδοχικά:

$$F(x_1+\Delta x) = \frac{2b-a(x_1+\Delta x)}{(x_1+\Delta x)^3} = \frac{2b-a\frac{2b}{a}-a\Delta x}{(\frac{2b}{a}+\Delta x)^3} = -\frac{a\Delta x}{(\frac{2b}{a}+\Delta x)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a\Delta x}{(\frac{2b}{a})^3} = -\frac{a^4}{8b^3}\Delta x \quad (6)$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση ότι $\Delta x \ll \frac{2b}{a}$. Η σχέση (6) δείχνει ότι η δύναμη είναι ανάλογη του –Δx, που είναι η συνθήκη για απλή αρμονική ταλάντωση, όπως θα συζητηθεί σε επόμενο κεφάλαιο.